MARCOS ALEXANDRE DOS SANTOS MONTANHA

SÉRIES GEOMÉTRICAS: A QUADRATURA DA PARÁBOLA DE ARQUIMEDES E OS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitados para obtenção do título de Mestre em matemática, orientada pela Prof.ª Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta.

IFSP

São Paulo

2020

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

m764s Montanha, Marcos Alexandre dos Santos
Séries Geométricas: A Quadratura da Parábola de Arquimedes e os Livros Didáticos do Ensino Básico / Marcos Alexandre dos Santos Montanha. São Paulo: [s.n.], 2020.
103 f.

Orientadora: Valéria Ostete Jannis Luchetta

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2020.

1. Séries Geométricas Infinitas. 2. Progressões Geométricas Infinitas. 3. Convergência. 4. Quadratura da Parábola de Arquimedes. 5. Educação Matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

MARCOS ALEXANDRE DOS SANTOS MONTANHA

SÉRIES GEOMÉTRICAS: A QUADRATURA DA PARÁBOLA DE ARQUIMEDES E OS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada e aprovada em 21 de setembro de 2020 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof.ª Dra. Valéria Ostete Jannis Luchetta

IFSP – Campus São Paulo

Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Dr. Emiliano Augusto Chagas

IFSP – Campus São Paulo

Membro da Banca

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

IFSP – Campus São Paulo

Membro da Banca

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos

UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Membro da Banca

Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.

Isaac Newton

Aos meus pais, amo vocês.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe *Dilce*, ao meu pai *José* e ao meu irmão *Pedro*, só tenho a agradecer por todo o amor, carinho e por todas as experiências da vida compartilhadas até aqui, que com toda certeza ajudaram a moldar meu caráter da melhor forma possível, além de me ensinarem a valorizar a educação de uma forma que levarei comigo para o resto da minha vida.

Aos meus amigos, *Michelle*, *Paulo* e *Samuel*, pelos mais de quinze anos de amizade e apoio mútuo às escolhas que fazemos na vida.

Ao *Murilo* e ao *Rafael*, cuja amizade e suporte nos últimos anos tem sido imprescindível para lidar de uma maneira mais leve com todas as dificuldades que a vida nos proporciona.

Ao *Henrique* e a *Vivian*, pela amizade de longa data e por saber que posso contar com vocês sempre que preciso.

Ao meu psicólogo *Carlos*, cujo profissionalismo foi essencial para meu desenvolvimento pessoal nos últimos anos.

A minha orientadora *Professora Dra. Valéria*, por todo o apoio, paciência e orientação durante esta pesquisa e principalmente por não me deixar desistir dessa dissertação a cada dificuldade que aparecia.

Aos meus colegas e professores deste curso, que compartilharam durante as aulas discussões e conhecimentos que com toda certeza agregaram a minha carreira profissional e acadêmica.

A todos os professores que tive como exemplo durante a vida, que me demonstraram, por meio da paixão e da dedicação, que o ensino pode transformar a vida das pessoas.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma possível abordagem para o ensino da convergência das séries geométricas infinitas por meio do texto da *Quadratura da Parábola* de Arquimedes. Nosso objetivo foi procurar no texto de Arquimedes argumentos que pudessem ser utilizados para a compreensão do conceito de convergência das séries geométricas em substituição ao uso do conceito de limite, normalmente apresentado de forma superficial nos textos dos livros didáticos dedicados ao ensino básico. Para compor nossas análises, realizamos uma pesquisa histórica, do ponto de vista epistemológico, em busca da compreensão do desenvolvimento dos conceitos que envolvem as séries geométricas. Apresentamos também uma descrição da forma como esses conceitos são abordados nos livros didáticos atuais. Além disso, realizamos uma análise das demonstrações dadas por Arquimedes no seu texto sobre a *Quadratura da Parábola* nas quais se fez uso das séries geométricas. Concluímos, apresentando uma possível abordagem baseada nos argumentos de Arquimedes para a compreensão da convergência da série geométrica infinita presente em um dos exemplos dos livros didáticos analisados.

Palavras-chave: Séries Geométricas Infinitas, Progressões Geométricas Infinitas, Convergência, Quadratura da Parábola de Arquimedes, Educação Matemática.

ABSTRACT

In this work, we present a possible approach for teaching the convergence of infinite geometric series through the text of the *Quadrature of the Parabola* by Archimedes. Our objective was to look in Archimedes' text for arguments that could be used to understand the concept of convergence of geometric series in substitution to the use of the concept of limit, normally presented superficially in textbooks dedicated to basic education. To compose our analyzes, we conducted an historical research, from an epistemological point of view, in search of understanding the development of the concepts that involve geometric series. We also present a description of how these concepts are approached in current textbooks. In addition, we performed an analysis of the demonstrations given by Archimedes in his text about the *Quadrature of the Parabola* in which geometric series were used. We conclude by presenting a possible approach based on Archimedes' arguments for understanding the convergence of the infinite geometric series present in one of the examples of the analyzed textbooks.

Keywords: Infinite Geometric Series, Infinite Geometric Progressions, Convergence, Quadrature of the Parabola by Archimedes, Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A proposta inicial deste trabalho era a de apresentar o desenvolvimento do conceito de *Convergência* aplicado a *Séries Geométricas Infinitas* por meio da análise de trabalhos históricos, com o intuito de buscar e apresentar alternativas para o ensino desse tema dedicado ao Ensino Básico no Brasil.

Devido à dificuldade de se trabalhar com textos históricos, tanto porque existem problemas de compreensão da língua, de entendimento do contexto no qual originalmente foram escritos, e também por vezes pelos originais citados por alguns autores nunca terem sido encontrados, decidimos buscar por trabalhos que fossem mais acessíveis e que acreditássemos ter potencial para uso didático.

Dentre os textos históricos aos quais tivemos acesso, a *Quadratura da Parábola* de Arquimedes de Siracusa[1] (287 a.E.C. – 212 a.E.C.[2]) foi o que mais chamou a nossa atenção. Observa-se nesse texto o uso de uma *série geométrica finita*, para resolver um problema que hoje relacionamos com o uso das *Séries Geométricas Infinitas* (ROQUE; CARVALHO, 2019).

Logo, este trabalho dedica-se a apresentar uma análise da forma como Arquimedes fez uso de uma *série geométrica* para demonstrar sua tese quanto a questão da Quadratura da Parábola em comparação à abordagem dada as *Séries Geométricas Infinitas* observada atualmente nos livros didáticos dedicados ao Ensino Básico.

[1] Arquimedes de Siracusa foi um matemático grego, considerado como um dos maiores matemáticos de sua época. Suas contribuições em geometria, assim como seus métodos, foram revolucionários a ponto de antecipar muitos dos resultados que hoje obtemos através do *Cálculo Diferencial e Integral*. Ele era considerado um homem prático, inventor de uma variedade de máquinas incluindo roldanas e até mesmo um dispositivo de bombeamento de parafusos (O'CONNOR e ROBERTSON, 1999).
[2] a.E.C. é abreviação para antes da Era Comum, utilizada para representar os anos anteriores ao ano 1 do calendário atual.

Da Motivação

Ao longo da minha jornada como estudante durante o Ensino Básico, a matemática me pareceu a disciplina cujas afirmações eram perfeitamente justificadas por meio de conceitos estudados anteriormente, ainda que eu não compreendesse seus significados por completo.

Essa visão que eu tinha da matemática mudou completamente ao ingressar no curso de Licenciatura em Matemática.

Ao me deparar com uma formalidade muito maior com a que estava acostumado e com demonstrações que utilizam como justificava outras demonstrações igualmente complexas, comecei a me questionar se eu realmente havia aprendido matemática da maneira correta até então.

O estudo da *Convergência* em *Séries Infinitas*, dentro da disciplina de *Análise Real*, era um dos temas que mais me incomodava. A cada vez que o professor dizia que uma *série* era *convergente* ou não, eu me questionava em que momento eu deveria ter aprendido o que era ser *convergente*.

É claro que meu professor explicou o conceito de *Convergência* do mesmo jeito que encontramos em qualquer livro de *Análise Real*, ou seja, diversas definições e demonstrações que utilizam outros conceitos, como o de *Limite*, que já deveriam ter sido absorvidos por mim durante as disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral*.

Fato é que eu sempre escutei, durante as disciplinas de *Cálculo Diferencial e Integral,* que apreenderíamos melhor os conceitos de *Limite* durante a disciplina de *Análise Real*. Vou me abster de aprofundar sobre esse paradoxo ao qual fui lançado como estudante, e assumir que, ao terminar o curso de *Ánalise Real*, estava convencido de que tinha compreendido todos os conceitos estudados.

Porém, por não conseguir compreender até então a necessidade de tanta formalização na matemática, ao começar a minha carreira como professor do ensino básico, na qual atuo até hoje, decidi me dedicar ao ensino da maneira menos formal possível. Essa postura durou até o primeiro momento em que tive que justificar a fórmula da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita*[3] em uma aula sobre *séries geométricas*.

Para os estudantes que não se convenciam do famoso exemplo do quadrado[4], e questionavam-me se não existiria uma maneira melhor de provar que a uma soma infinita poderia resultar em número finito, eu costumava dizer que era possível demonstrar por meio do conceito de *Limite* que estudamos na graduação.

Enquanto já estava convencido de que, como professor, deveria ter uma resposta melhor para dar aos estudantes, durante o início das pesquisas para a elaboração deste trabalho, deparei-me com o artigo *Infinite Series From History to Mathematics Education* do autor Giorgio T. Bagni.

Nesse artigo, o autor apresentou a seguinte pergunta para 88 estudantes entre 16 e 18 anos, em escolas regulares na Itália: "Em 1703, o matemático Guido Grandi[5] estudou a soma infinita: $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; qual resultado você acha que ele obteve?" (BAGNI, 2009, p.6, tradução nossa). Ao analisar as respostas, o autor percebeu que muitas das justificativas dadas coincidem com as noções de convergência usadas por Grandi, argumentando com isso que a História pode ser usada para compreendermos melhor os obstáculos epistemológicos[6] que os estudantes enfrentam ao se depararem com o conceito de *séries infinitas*.

Em sala de aula, presenciei discussões parecidas com os resultados apontados por Bagni (2009), pois alguns estudantes que ocasionalmente se depararam com a *série* $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, argumentavam que essa soma deveria resultar em 1, 0 ou $\frac{1}{2}$.

Além disso, segundo Lehmann (1995), o ensino de *Séries* em cursos de *Cálculo Diferencial e Integral* possui ênfase apenas em testes de *convergência*, dessa forma, dedica-se mais tempo em saber se uma *série* é realmente *convergente* do que estudar

---

[3] Uma *progressão geométrica* é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por um número constante – uma definição mais precisa será dada na Seção 1.2 deste trabalho.

[4] Dado um quadrado de lado 1 ao dividi-lo ao meio e tomar uma das partes e com a parte restante realizar o mesmo procedimento quantas vezes quiser, obteremos uma representação da progressão geométrica infinita de razão $\frac{1}{2}$.

[5] Guido Grandi (1671 – 1742) foi um jesuíta italiano conhecido por ter sido um dos primeiros matemáticos a publicar que a série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ deveria ser igual a $\frac{1}{2}$ (BAGNI, 2009).

[6] Referimo-nos a um conceito introduzido por Bachelard em sua obra *A formação do espírito científico* publicada na década de 30 do século XX (MIGUEL; MIORIM, 2004, p.99).

a série em si, levando assim os estudantes a se questionarem sobre a necessidade de aprender esses conceitos.

Quando é observada a abordagem dada ao desenvolvimento do conceito da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita* em livros didáticos, encontramos fórmulas prontas com uma menção rápida ao conceito de *Limite* ao invés de uma discussão mais aprofundada em relação ao conceito de *Convergência* aplicado às *séries infinitas* (LEHMANN, 1995).

Outros autores, como Sierpinska (1987), afirmam que muitos desses obstáculos epistemológicos no aprendizado de *séries* e *limites* derivam da dificuldade de lidar com conceitos que sofreram grandes mudanças na formalidade após o advento do *Cálculo Diferencial e Integral*. Por isso, Sierpinska (1987), assim como Lehmann (1995), defendem que a história pode ser utilizada para auxiliar o aprendizado de *convergência*, uma vez que, para se chegar ao conceito como conhecemos hoje, houve muitas reflexões e mudanças na forma de pensar por parte de muitos matemáticos.

Esses fatos me convenceram da importância de se realizar pesquisas dentro da análise de trabalhos históricos para que se possa não só compreender melhor o conceito de *Convergência*, como também procurar alternativas que possam contribuir para uma compreensão melhor desse tema.

Da Metodologia

Diversos pesquisadores, ao longo das últimas décadas, vêm se empenhando em buscar na História potencialidades para o ensino da Matemática (MIGUEL; MIORIM, 2004). Até mesmo aqueles que criticam seu uso pedagógico, devido ao tempo a mais que se gastaria ao ensinar esses assuntos em sala de aula, compreendem que na reconstrução de caminhos históricos, estaria o

> Mundo real de ideias, visto em gênese, desenvolvendo e deteriorando-se mais do que uma imitação artificial na qual o problema central é removido. Esse é o sentido em que a aprendizagem é 'mais fácil': um sentido pessoal no qual o estudante põe em relevo o trabalho criativo

> e imita a descoberta individual dos resultados. (GRATTAN-GUINNESS, 1973, p. 446 *apud* MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 65).

Nesse ponto, devemos ressaltar que o uso da história como potencial pedagógico para o ensino da Matemática se insere no campo da *História Na Educação Matemática*, no qual se incluem,

> Todos os estudos que tomam como objeto de investigação os problemas relativos às inserções efetivas da história na formação inicial ou continuada de professores de Matemática; na formação matemática dos estudos de quaisquer níveis; em livros de Matemática destinados ao ensino em qualquer nível e época; em programas ou propostas curriculares oficiais de ensino da Matemática; na investigação em Educação Matemática, etc. (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 11).

Dentre os autores que defendem o potencial pedagógico da História no ensino da Matemática, destacamos Sierpinska (1987), que recorre à História para "identificar os obstáculos epistemológicos que se manifestam na filogênese e na psicogênese de um objeto matemático específico a fim de entender melhor ambos os processos" (MIGUEL; MIORIM, 2004, p.105).

Há também autores, como Lehmann (1995), que defendem uma metodologia própria com base no desenvolvimento histórico dos conceitos os quais se desejam ensinar. O autor defende que o processo de ensino-aprendizagem tradicional muitas vezes apresenta lacunas que podem ser preenchidas com a análise do conhecimento histórico.

Como vemos, apesar de ser um campo de pesquisa que vem ganhando espaço dentro das pesquisas em educação matemática nas últimas décadas (MIGUEL; MIORIM, 2004), não existe uma única metodologia de pesquisa nessa área.

Por isso, durante nossas pesquisas históricas, levamos em consideração as observações dadas por Roque (2012) em seu livro *História da Matemática – Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas*, no qual a autora afirma que uma concepção possível do *fazer História da Matemática* é a de

> Exibir um conjunto de práticas, muitas vezes desordenadas, que, apesar de distintas das atuais, também podem ser ditas "matemáticas". Quando encarado como prática múltipla e diversa, esse conhecimento se apresenta composto por ferramentas, técnicas e resultados desenvolvidos por pessoas em momentos e contextos

> específicos, com suas próprias razões para *fazer matemática* e com ideias singulares sobre o que isso significa. (ROQUE, 2012, p. 16).

Entendemos que a busca da compreensão desses trabalhos históricos possa sofrer variações da mesma forma como afirma Lins (1993), na qual defende que,

> Mesmo o entendimento em História da Matemática varia tanto quanto se queira de acordo com uma leitura progressiva da História (ler a história em busca de uma sucessão de métodos e teoremas) ou uma leitura epistemológica da História (buscar entender como as ideias contidas em uma cultura matemática estão organicamente articuladas e de que forma certas noções estão naturalmente excluídas desta cultura). (LINS, 1993, p. 78).

Como nosso objetivo foi o de procurar possíveis potenciais pedagógicos ao longo da história como alternativa a abordagem atual utilizada em livros didáticos, da forma como foi citado anteriormente, tentamos manter a nossa pesquisa atrelada a da leitura epistemológica definida por Lins (1993).

Além disso, tomamos como base o livro *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s*, escrito por Giovanni Ferraro, sobre o desenvolvimento das *Séries* antes do advento do *Cálculo Diferencial e Integral*, e as críticas presente nos artigos de Sierpinska (1987) e Lehmann (1995) em relação ao ensino desse conceito.

Da Organização Deste Trabalho

Além da presente introdução, este trabalho está organizado em três capítulos. Dentre esses capítulos, o primeiro é dedicado a apresentar os aspectos históricos relativos ao desenvolvimento dos conceitos de *Séries* e *Convergências*, além de apresentar as definições atuais sobre esses temas.

O segundo capítulo é dedicado à *Quadratura da Parábola* de Arquimedes. Nesse capítulo apresentamos a concepção dos estudos de Arquimedes, além de definições e demonstrações contemporâneas relacionadas à *Geometria*, necessárias para a compreensão do uso da *série geométrica* que está inserida nas demonstrações acerca da *Quadratura da Parábola*.

O terceiro capítulo é dedicado a apresentar a forma como o tema das *Séries Geométricas Infinitas* é abordado nos livros didáticos destinados ao Ensino Básico, por meio de uma análise do texto da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e de três livros didáticos aprovados recentemente no programa do PNLD (Programa Nacional do Livro e Material Didático). E, na última seção desse capítulo, apresentamos uma possível alternativa para a abordagem por meio da *Quadratura da Parábola* de Arquimedes.

Por fim, apresentamos nossas considerações finais acerca deste trabalho, além de um apêndice com definições e teoremas da *Geometria Plana*, que possam vir a ser necessários para uma compreensão melhor da Seção 2.2.

1 SÉRIES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, apresentamos uma seção dedicada à alguns aspectos históricos que julgamos necessários para a compreensão do desenvolvimento dos conceitos relacionados ao tema principal deste trabalho, e também uma seção dedicada apenas às definições atuais do que hoje conhecemos como *Séries Geométricas*.

1.1 Aspectos Históricos Relativos às Séries

As *Séries Infinitas* foram ferramentas importantes e propulsoras para a elaboração da teoria do que hoje conhecemos como *Cálculo Diferencial e Integral*. Como afirma Luchetta (2017), é possível observar sua existência em inúmeros trabalhos anteriores a criação dessa teoria (século XVIII), principalmente na forma de *Séries Geométricas Infinitas*. Para Ferraro (2008),

> A teoria das séries nos séculos XVII e XVIII apresenta vários e interessantes problemas para os historiadores. De fato, os matemáticos da época obtiveram diversos resultados que variam do teorema binomial à fórmula de Taylor, das expansões das séries de potências de funções elementares até as séries trigonométricas, da série de Stirling à solução em série de equações diferenciais, da fórmula da soma de Euler-Maclaurin ao teorema de inversão de Lagrange, da teoria de geração de funções de Laplace ao cálculo de operações, etc. A maioria desses resultados foram, no entanto, obtidos usando métodos que seriam considerados inaceitáveis hoje, portanto, se olharmos para trás, para a teoria das séries antes de Cauchy sem reconstruir as motivações internas e os conhecimentos conceituais [da época], parece um corpo de técnicas de manipulação sem rigor, cujos resultados parecem ser o fruto intrigante da mente de um mágico ou adivinho, em vez da obra penetrante e complexa de grandes matemáticos. (FERRARO, 2008, p. vii, tradução nossa).

O significado da expressão *Séries Geométricas*, assim como muitas outras expressões utilizadas atualmente na matemática, sofreram diversas mudanças ao longo dos séculos. Por isso, com o intuito de contextualizar a compreensão desse conceito nos séculos próximos ao surgimento do *Cálculo Diferencial e Integral*, optamos por apresentar, inicialmente, o significado da expressão *Séries Geométricas* como escritas por Barlow (1814).

Essa opção foi tomada por entendermos que as definições dessa época auxiliam na compreensão de trabalhos anteriores ao século XVIII sobre *Séries,* tanto quanto no entendimento da linguagem Matemática utilizada nas traduções de Heath (1897) acerca do texto de Arquimedes – apresentadas no Capítulo 2 deste trabalho.

Para Barlow (1814), uma *Progressão* é definida como "uma série de números avançando ou procedendo da mesma maneira, ou de acordo com uma certa regra" que por sua vez poderiam ser "*Algébricas* ou *Geométricas*" (BARLOW, 1814, p. 577, tradução nossa).

Em particular, uma *Progressão Geométrica* é "uma progressão na qual todos os termos tem sucessivamente a mesma razão; como $2, 4, 8, 16, etc.$ onde a razão comum é 2" (BARLOW, 1814, p. 578, tradução nossa). Enquanto uma *Série* é definida como "uma fila contínua, ou progressão, de quantidades conectadas entre si pelos sinais de $+$ ou $-$; geralmente prosseguindo de acordo com uma determinada lei" (BARLOW, 1814, p. 648, tradução nossa).

Das definições anteriores, pode-se inferir que o significado de *Série Geométrica* era o nome dado a operação de soma e/ou subtração dos termos de uma *Progressão Geométrica*, ou seja, se somarmos apenas uma quantidade finita de uma *Progressão Geométrica Infinita*, obtemos uma *Série Geométrica*. Fato que demonstra uma diferença importante do uso da expressão *Série* quando comparado com as definições contemporâneas, pois como apresentado na próxima seção, atualmente o uso dessa expressão implica numa soma de infinitos termos.

O conceito de *Convergência*, atualmente considerado essencial para o cálculo da soma de uma *Série*, é definido como

> A tendência de coisas diferentes, dispostas de maneira variada, para um mesmo ponto. Às vezes [a expressão *Convergência*] também é usada para denotar uma aproximação do valor real de uma coisa. (BARLOW, 1814, p. 223, tradução nossa).

Entendemos que a concepção apresentada com essa definição é muito próxima à forma como a utilizamos atualmente, principalmente quando observado o uso em expressões do tipo "$\frac{1}{n}$ *converge para zero quando* n *tende ao infinito*".

Quando procuramos pela definição dada a *Série Convergente* por Barlow (1814) encontramos que "*Série Convergente* é aquela em que os termos diminuem ou se tornam sucessivamente menores, como $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}+etc$" (BARLOW, 1814, p. 648, tradução nossa). Essa definição exemplifica o modo como boa parte dos matemáticos da época compreendiam o conceito de *convergência*, uma vez que em geral consideravam que toda *série* de termos decrescentes eram também vistas como convergentes (FERRARO, 2008).

Atualmente, sabemos que essa definição não é tratada da mesma forma, pois, como exemplo, a *série* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$, conhecida como *Série Harmônica*, possui termos decrescentes porém não é considerada convergente.

De acordo com Lehmann (1995) e Bagni (2009), muitos matemáticos do século XVII já haviam demonstrado, em seus trabalhos sobre séries, a compreensão de que não era possível obter um valor numérico para a *Série Harmônica*. Essa compreensão, associada ao estudo da *convergência* das *Séries Geométricas* foi determinante para iniciar a transformação no conceito de *Convergência* na forma como conhecemos hoje (FERRARO, 2008).

Em Eves (2004), vemos a tradução do Problema 79 do *Papiro Rhind* datado de 1650 a.E.C. no qual encontra-se um conjunto de dados cujos números formam a sequência $(7, 49, 343, 2401, 16807)$. Observa-se que a sequência forma uma *progressão geométrica de razão* 7, ainda que não tratada dessa forma na época.

Mais adiante na história, segundo Eves (2004), Zenão de Eléia (490 a.E.C. – 425 a.E.C.) elaborou uma hipótese, hoje conhecida como *Paradoxo de Zenão*, no qual afirmou que,

> Se um segmento de reta pode ser dividido indefinidamente, então o movimento é impossível pois, para percorrê-lo, é preciso antes alcançar seu ponto médio, antes ainda alcançar o ponto que estabelece a marca de um quarto do segmento, e assim por diante, *ad infinitum*. Segue-se então que o movimento jamais começará. (EVES, 2004, p. 418).

Para Roque (2012), em linguagem atual, o *Paradoxo de Zenão* pode ser representado numericamente por uma *série geométrica* formada a partir dos termos da sequência $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right)$, que representa uma *progressão geométrica de razão* $\frac{1}{2}$. Segundo a autora,

> Esse paradoxo de Zenão indica a dificuldade de se somar uma infinidade de quantidades cada vez menores e de se conceber que essa soma possa ser uma grandeza finita. Na matemática atual, temos um problema análogo ao somar séries. Um exemplo simples para indicar a dificuldade de conceber que a soma de infinitas parcelas pode ser uma grandeza finita é mostrar que 0,999999... é igual a 1. (ROQUE, 2012, p. 135).

A dificuldade apontada pela autora, está diretamente relacionada com as discussões acerca do conceito do *Infinito*.

Segundo Lorin (2018), a compreensão do conceito do *Infinito*, que influenciou em grande parte o desenvolvimento da matemática ocidental até o século XVII, era a de *infinito potencial,* concepção na qual o *Infinito* é concebido, em geral, como um processo que pode ser continuado indefinidamente, muitas vezes associado a ideia de ilimitado. Essa forma de tratar o *infinito* não era necessariamente um problema para alguns matemáticos, pois, "a interpretação do infinito como uma potencialidade possibilitou, por exemplo, a Arquimedes se aprofundar no desenvolvimento de técnicas de cálculo de áreas e volumes"[7] (LORIN, 2018, p.43).

Em um dos livros mais famosos da antiguidade, *Os Elementos* (elaborado por volta do século III a.E.C.), de autoria de Euclides de Alexandria[8] (325 a.E.C. – 265 a.E.C.), a Proposição 12 do livro V já apresentava uma fórmula para obtermos a soma dos termos de uma *progressão geométrica*:

> Caso magnitudes, em quantidades qualquer, estejam em proporção, como um dos antecedentes estará para um dos consequentes, assim, todos os antecedentes para todos os consequentes. (EUCLIDES, 2009, p. 218).

[7] Como veremos no trabalho de Arquimedes sobre a *Quadratura da Parábola* no Capítulo 2 desse trabalho.
[8] Euclides de Alexandria foi um matemático grego conhecido por ser um dos primeiros a formalizar e reunir grande parte do conhecimento matemático de sua época em seu trabalho, conhecido como *Os Elementos* (O'CONNOR e ROBERTSON, 1999b).

Em linguagem moderna, se $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ é a soma dos termos de uma *progressão geométrica*, então $\frac{a_1}{a_2} = \frac{s_n - a_n}{s_n - a_1}$ (FERRARO, 2008).

A proposição de Euclides se demonstrou importante para alguns matemáticos do século XVI, como François Viète[9] (1540 - 1603). Influenciado pelo *Método da Exaustão*[10], Viète estudou essa proposição e chegou à conclusão de que se os termos de uma *progressão geométrica infinita* fossem decrescentes, poderíamos obter um valor para a soma dos seus infinitos termos, em linguagem atual, poderíamos concluir que $\frac{a_1 - a_2}{a_1} = \frac{a_1}{s}$, onde s representa a soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (FERRARO, 2008).

Gregorius de Saint-Vincent[11] (1584 - 1667) também foi um dos matemáticos que dedicaram boa parte de seus estudos ao desenvolvimento do conceito de *Séries Geométricas*. Segundo Ferraro (2008),

> Algumas décadas depois [após Viète], Gregorius Saint-Vincent fez das séries geométricas um instrumento crucial de seu método de quadraturas. Ele escreveu um notável tratado, o *Opus geometricum*, dedicado à quadratura das cônicas [...]. Gregorius observou que os problemas clássicos herdados dos antigos não foram resolvidos depois de muitos séculos; ele então pensou que novas técnicas e novos métodos precisavam ser descobertos [...]. Esses novos métodos foram baseados precisamente em séries geométricas infinitas, que ele discutiu longamente no segundo livro de *Opus geometricum*. (FERRARO, 2008, p. 6, tradução nossa).

Gregorius também foi um dos primeiros a dar uma definição distinta para *série geométrica* em relação a *progressão geométrica*[12], que por sua vez contribuiu para a compreensão de que seria possível obter um valor para a soma de infinitos termos de algumas progressões. Para Gregorius, uma *série geométrica* era "uma quantidade finita dividida por uma sequência ininterrupta de acordo com uma determinada razão" (FERRARO, 2008, p. 6, tradução nossa).

Ainda de acordo com Ferraro (2008), Gregorius também é um dos primeiros matemáticos a trabalhar com a noção de *convergência*. Ainda que essa noção fosse

---

[9] Fraçois Viète foi um matemático e astrônomo francês conhecido por ter sido um dos primeiros a introduzir um sistema de notações algébricas em seu trabalho *In artem analyticam isagoge* (O'CONNOR e ROBERTSON, 2000).

[10] O *Método da Exaustão* será devidamente apresentado no Capítulo 3 desse trabalho junto ao desenvolvimento do trabalho sobre a *Quadratura da Parábola* de Arquimedes.

[11] Gregorius de Saint-Vincent foi um jesuíta que escreveu vários livros cobrindo diversos aspectos da matemática de sua época (O'CONNOR e ROBERTSON, 2010).

[12] As definições atuais de séries e progressões geométricas serão dadas mais adiante nesse capítulo.

diferente da forma como conhecemos hoje, a própria definição de *série geométrica* citada no parágrafo anterior, já demonstra que a ideia de *convergência* estava começando a se relacionar com uma compreensão do *Infinito* distinta daquela utilizada na Matemática grega.

No texto de Lorin (2018), nota-se que as mudanças na concepção dos conceitos relacionados ao *Infinito*, apesar de já observadas em trabalhos de outros matemáticos desde o Paradoxo de Zenão, só foram consolidadas a partir do século XIX, com os trabalhos de Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor[13] (1845 – 1918). Cantor, introduziu uma nova concepção de *Infinito*, conhecida como *infinito atual* ou *infinito real*, que trata da concepção do infinito como uma quantidade, como vemos, por exemplo, ao tentarmos contar o número de elementos do conjunto dos números naturais.

Como afirmado anteriormente, o desenvolvimento das *Séries Geométricas Infinitas* até o século XVIII se deu aliado ao conceito de *infinito potencial*. Dado isto, observamos que uma das preocupações principais dos matemáticos dessa época era o de obter valores para as *séries infinitas* sem a preocupação de verificar se as operações realizadas poderiam ser feitas da mesma forma como realizamos as somas de termos de *sequências finitas* (LUCHETTA, 2017).

Um exemplo disso é o estudo da *série geométrica* $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, conhecida como *Série de Grandi*. Para a maioria dos matemáticos dos séculos XVII e XVIII, o valor dessa série deveria ser igual a $\frac{1}{2}$, por considerarem que $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ para qualquer valor real de x (LEHMANN, 1995). Em particular, Gottfried Leibniz[14] (1646 – 1716), considerado um dos criadores do *Cálculo Diferencial e Integral*, considerava que essa série poderia resultar em 1 ou 0 com igual probabilidade, por isso, argumentava que o resultado mais provável deveria ser a média aritmética desses valores.

---

[13] Georg Cantor foi um matemático russo considerado o fundador da teoria dos conjuntos, além de ter contribuído de forma significativa com trabalhos relacionados ao infinito e as séries trigonométricas (O'CONNOR e ROBERTSON, 1998).

[14] Gottfried Leibniz foi um matemático alemão que desenvolveu a notação para o *Cálculo Diferencial e Integral* que utilizamos até hoje. Ele também é reconhecido por alguns trabalhos na área da filosofia e por ter inventado uma das primeiras máquinas de calcular (O'CONNOR e ROBERTSON, 1998b).

É somente após o século XVIII, com a criação da teoria da *Análise Real,* que os conceitos de *Séries Geométricas* foram sintetizados na forma como conhecemos hoje (FERRARO, 2008).

Como afirma Sierpinska (1987), essa análise histórica contribui para uma compreensão melhor das mudanças ocorridas na forma de pensar dos matemáticos para chegarmos as definições como conhecemos hoje. Por isso, acreditamos que a compreensão do desenvolvimento histórico dos conceitos apresentados nessa seção colabora para um melhor compreendimento acerca das definições e teoremas que estão presentes no estudo das *Séries Geométricas*.

1.2 Definições Contemporâneas Sobre Séries Geométricas

Vamos começar essa seção respondendo à pergunta: O que são *Séries*?

Para Stewart (2016), dada uma sequência numérica infinita, que pode ser representada por $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, se tentarmos somar os termos dessa sequência obteremos uma expressão da forma $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, a essa expressão daremos o nome de ***série infinita*** (ou apenas ***série***) que pode ser denotada por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ou simplesmente por $\sum a_n$.

As próximas definições e teoremas que serão apresentadas nessa seção podem ser encontradas em livros de *Cálculo Diferencial e Integral* destinados ao ensino superior[15]. Porém, com o objetivo de explicitar alguns conceitos sobre *sequências* e *séries* da forma como conhecemos hoje e no Capítulo 3 analisar a abordagem desse assunto no Ensino Básico, optamos por apresentar essas definições e teoremas neste trabalho.

Definição 1.1 – Uma **sequência** é uma lista de números reais escritos em uma ordem definida previamente, onde, cada elemento dessa sequência é representado pelo símbolo a_n, onde n é um número natural que representa a posição do elemento nessa sequência. Da mesma forma, uma **sequência infinita** é uma sequência tal que

[15] Todas as definições e teoremas apresentados nessa seção possuem correspondências semelhantes em Stewart (2016).

para todo termo a_n pertencente a sequência, sempre teremos um sucessor desse elemento representando por a_{n+1}.

As sequências infinitas $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots)$ serão chamadas apenas de *sequências* e representadas nas definições e teoremas a seguir pelo símbolo $\{a_n\}$.

Definição 1.2 – Dada uma sequência $\{a_n\}$, se existir um número real L, tal que, os termos dessa sequência se aproximam de L quando n tende ao infinito, então, dizemos que $\{a_n\}$ é uma sequência **convergente**. Caso contrário, dizemos que a sequência é **divergente**.

Essa definição pode ser reescrita utilizando o conceito de *Limite* abordado nos livros de *Cálculo Diferencial e Integral*, da seguinte maneira: dado uma sequência $\{a_n\}$, se existir um número real L tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ então podemos dizer que a sequência **converge**. Caso esse limite não exista, dizemos que a sequência **diverge.**

Definição 1.3 – Uma sequência $\{a_n\}$ é dita **crescente** se $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \geq 1$. De forma análoga, a sequência é dita **decrescente** se $a_{n+1} < a_n$ para todo $n \geq 1$.

Definição 1.4 – Dizemos que uma sequência $\{a_n\}$ é **limitada superiormente** se existir um número real M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \geq 1$. De forma análoga, a sequência é **limitada inferiormente** se existir um número real m tal que $m \leq a_n$ para todo $n \geq 1$.

Agora podemos definir os conceitos de *Progressões Geométricas* e *Séries Geométricas* com mais precisão.

Definição 1.5 – Dado um número real $q \neq 0$, a sequência $\{a_n\}$ definida pela expressão $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, com $a_n \neq 0$, para todo $n \geq 1$, é chamada de **progressão geométrica** de razão q.

Definição 1.6 – Se $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão q, chamamos a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obtida dessa progressão de **série geométrica**.

Definição 1.7 – Dado uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, sendo $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, chamada de n-ésima **soma parcial**, se a sequência $\{s_n\}$ for convergente, ou seja, se existe um número real S tal que s_n tende a S, quando n

tende ao infinito, dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** e o número S é chamado de **soma** dessa série. Da mesma forma, se a sequência $\{s_n\}$ é divergente então a série será **divergente**.

Como consequência, se a série converge para S, podemos escrever $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$.

Teorema 1.1 (Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica) – Dado que $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, se s_n é igual a soma dos n primeiros termos dessa progressão então $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo dessa progressão.

Demonstração

Considere que $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, e s_n representa a soma dos n primeiros termos dessa progressão, ou seja, $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Como $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, podemos reescrever seus termos em função de a_1 e da razão q, ou seja, teríamos que $s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}$.

Logo, $s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$, subtraindo todos os termos de s_n por $s_n \cdot q$, temos, $s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n$, o que implica em $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. ■

Deixamos de fora o caso em que $q = 1$, pois, se $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão 1 e s_n é igual a soma dos n primeiros termos dessa progressão, segue-se imediatamente que $s_n = n \cdot a_1$.

Proposição 1.1 – Se $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, então a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se, e somente se, $0 < |q| < 1$.

Demonstração

Considere $\{a_n\}$ uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a série geométrica obtida dessa progressão e $\{s_n\}$ uma sequência obtida das somas parciais dessa série. Observe que da **Definição 1.7** a serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ será chamada de convergente apenas quando a sequência $\{s_n\}$ for convergente.

Do **Teorema 1.1,** os termos da sequência $\{s_n\}$ são dados por $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Como $a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$, temos que a sequência $\{s_n\}$ é convergente se, e somente se, a sequência $\{|q|^n\}$ também for convergente[16].

Observe que se $0 < |q| < 1$, temos que $|q|^{n+1} < |q|^n$ e $|q|^n \geq 0$ para todo $n \geq 1$. Logo, das **Definições 1.3 e 1.4**, podemos afirmar que a sequência $\{|q|^n\}$ é decrescente e limitada inferiormente por 0. Então, dado que $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$, da **Definição 1.2** temos que a sequência $\{|q|^n\}$ é convergente. Por outro lado, se 1< $|q|$, temos que $|q|^n < |q|^{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Logo, da **Definição 1.3** a sequência $\{|q|^n\}$ é crescente. Então, dado que $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = \infty$, da **Definição 1.2** temos que a sequência $\{|q|^n\}$ é divergente.

Portanto, da **Definição 1.7,** a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ obtida da progressão geométrica $\{a_n\}$ é convergente se, e somente se, $0 < |q| < 1$. ■

Teorema 1.2 (Soma de uma série geométrica convergente) – Se $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão q, com $0 < |q| < 1$, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é a série geométrica obtida dessa progressão, então, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo dessa progressão.

Demonstração

Considere $\{a_n\}$ uma progressão geométrica de razão q, com $0 < |q| < 1$, e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a série geométrica obtida dessa progressão. Da ***Proposição 1.1***, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série geométrica convergente. Da **Definição 1.7**, se $\{s_n\}$ é a sequência formada pelas somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, então, deve existir um número real S, tal que, s_n tende a S quando n tende ao infinito e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. E, do ***Teorema 1.1***, $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, onde a_1 é o primeiro termo da progressão geométrica $\{a_n\}$. Logo, podemos escrever $S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{a_1}{1-q}$, pois, $\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ para $0 < |q| < 1$, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}$. ■

[16] A demonstração para essa afirmação pode ser encontrada em Stewart (2016, p. 631-632).

Observe que, para a Matemática contemporânea, somente após os **Teoremas 1.1** e **1.2** e a ***Proposição 1.1***, é que podemos produzir significado paras a *Série de Grandi* e para a *série* que representa o *Paradoxo de Zenão.*

No primeiro caso, como a *Série de Grandi,* $1-1+1-1+1-1+\cdots$, é formada a partir dos termos de uma *progressão geométrica* de razão -1, da ***Proposição 1.1***, podemos afirmar que essa série é divergente, ou seja, não é possível assumir valor algum como resultado dessa soma.

Quanto a série que representa o *Paradoxo de Zenão*, por se tratar de uma *série* obtida a partir dos termos de uma *progressão geométrica* de razão $\frac{1}{2}$, do **Teorema 1.2**, temos que $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1$.

Também é possível verificar que as observações de Viète, citadas na seção anterior, em relação ao que hoje entendemos como *a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita* são equivalentes ao **Teorema 1.2**. Pois, em linguagem moderna, Viète afirmou que dado uma *progressão geométrica* $\{a_n\}$ de termos decrescentes, ou seja, de razão q, com $0<|q|<1$, era possível demonstrar que $\frac{a_1-a_2}{a_1}=\frac{a_1}{s}$, onde s representa a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. De fato, como $\{a_n\}$ é uma *progressão geométrica* de razão q, com $0<|q|<1$, se s representa a soma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, do **Teorema 1.2**, $s=\frac{a_1}{1-q}$ que é equivalente a $1-q=\frac{a_1}{s}$, como $\frac{a_1-a_2}{a_1}=\frac{a_1}{a_1}-\frac{a_2}{a_1}=1-q$, temos que $\frac{a_1-a_2}{a_1}=\frac{a_1}{s}$.

Podemos observar, desse último parágrafo, que se for possível demonstrar a equivalência entre os resultados obtidos por alguns matemáticos ao longo da História em comparação com os teoremas contemporâneos sobre *Séries*, o estudo desses trabalhos históricos – como faremos no próximo capítulo em relação a *Quadratura da Parábola* de Arquimedes – podem revelar ferramentas didáticas alternativas para auxiliar no ensino desse tema.

2 A QUADRATURA DA PARÁBOLA DE ARQUIMEDES

Arquimedes de Siracusa, como já mencionamos no primeiro capítulo, foi um matemático grego cujos trabalhos influenciaram muitos matemáticos que o sucederam, principalmente matemáticos dos séculos XVI e XVII (ROQUE; CARVALHO, 2019). Para O'Connor e Robertson (1999),

> As conquistas de Arquimedes são bastante notáveis. Ele é considerado pela maioria dos historiadores da matemática como um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele aperfeiçoou um método de integração que lhe permitiu encontrar áreas, volumes e áreas de superfícies de muitos corpos. (O'CONNOR; ROBERTSON, 1999, tradução nossa).

Arquimedes estudou problemas envolvendo a *quadratura de figuras planas*, comuns à sua época, porém, criou métodos e apresentou demonstrações diferentes de outros matemáticos gregos (ROQUE; CARVALHO, 2019). De acordo com Roque e Carvalho (2019), Arquimedes,

> Usava métodos que marcaram esta geometria [grega] e se distinguem dos procedimentos euclidianos. Ele nasceu mais ou menos no momento em que Euclides morreu, em torno da segunda década do século III a.E.C. Era de se esperar, portanto, que o trabalho de Euclides tivesse uma influência marcante em sua obra. Mas não foi bem assim, [...] seu trabalho não se inscreve, por assim dizer, em uma tradição euclidiana. (ROQUE; CARVALHO, 2019, p.133).

Dentre os trabalhos de Arquimedes, a *Quadratura da Parábola* é uma das realizações matemáticas mais antigas das quais temos registro que se fez uso de *séries geométricas*, ainda que não da forma como conhecemos hoje (ROQUE, 2012). O uso das séries aliado ao *Método da Exaustão*, de acordo com Ferraro (2008), exerceu uma grande influência nos estudos sobre *Séries* entre os matemáticos dos séculos XVI e XVII. Como apontado no Capítulo 1 deste trabalho, muitos matemáticos desses séculos tomaram esse texto de Arquimedes como ponto de partida para as discussões acerca do conceito de *Convergência*.

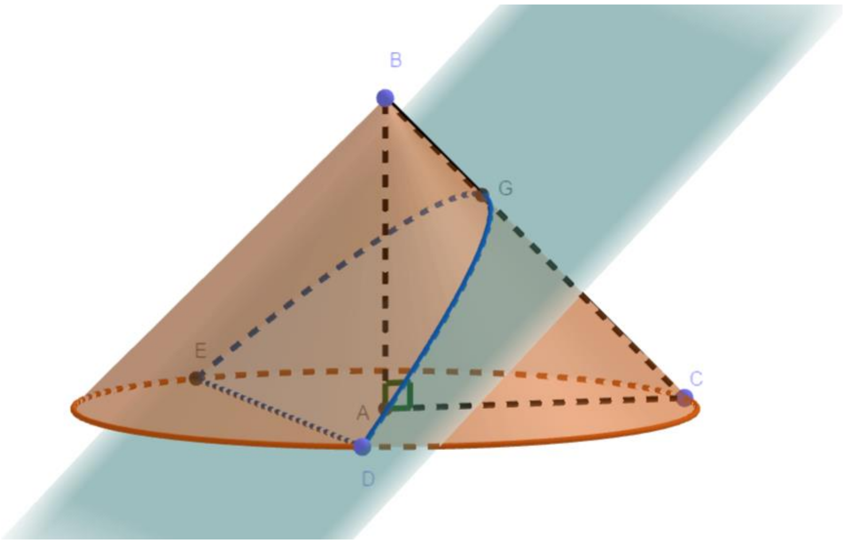
A *quadratura* de uma figura plana significava, para os matemáticos contemporâneos de Arquimedes, construir um quadrado cuja área seria equivalente à da figura dada. Em particular, em a *Quadratura da Parábola*, Arquimedes demonstra como determinar a área delimitada por um *segmento de parábola*[17].

Em vista disso, escolhemos abordar e detalhar nesse capítulo todos os aspectos significativos desse texto de Arquimedes, por entendermos que o estudo da *Quadratura da Parábola* pode contribuir com novas abordagens para o ensino das séries geométricas. Assim, iniciaremos este capítulo apresentando os conceitos mais importantes desse texto.

2.1 A Parábola Para Arquimedes

Para Arquimedes, uma parábola era uma linha determinada pela intersecção de um cone - obtido pela rotação de um triângulo retângulo isósceles em torno de um dos seus catetos - com um plano perpendicular à hipotenusa desse triângulo[18] (ver Figura 2.1).

Figura 2.1 – Parábola DGE obtida por meio da intersecção do cone com um plano perpendicular a hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo retângulo isósceles ABC.



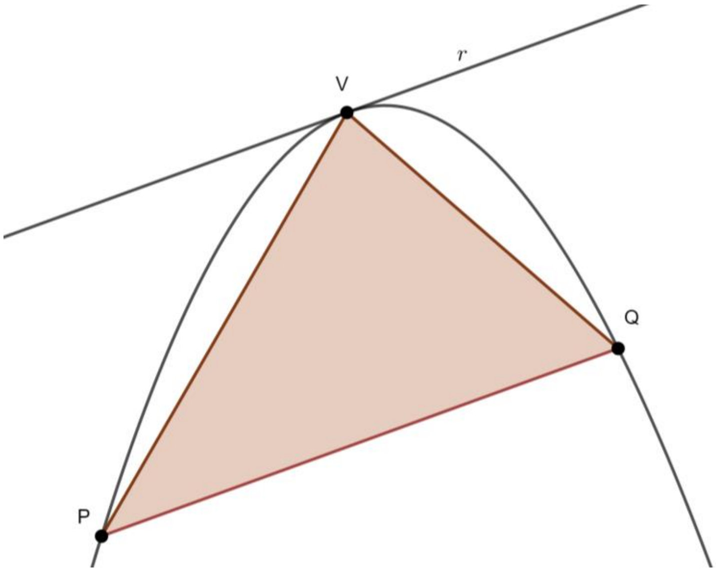
Fonte: O autor (2020).

[17] A definição de segmento de parábola será apresentada na seção 2.1.
[18] Essa definição pode ser encontrada em Heath (1897, p. 233).

Ainda para Arquimedes, um *segmento de uma parábola* era a região delimitada entre uma parábola, obtida da maneira descrita acima, com uma corda $\overline{PQ}$ dela própria.

Em seu texto sobre a *Quadratura da Parábola*, Arquimedes determinou que a área do segmento parabólico determinado por uma corda $\overline{PQ}$ é igual a $4/3$ da área do triângulo inscrito VPQ, onde V é o vértice desse segmento de parábola – o vértice desse segmento parabólico é um ponto V tal que V é a intersecção da parábola com uma reta tangente[19] à parábola e paralela ao segmento $\overline{PQ}$ (ver Figura 2.2).

Figura 2.2 – Triângulo VPQ inscrito no segmento parabólico determinado pela corda $\overline{PQ}$.



Fonte: O autor (2020).

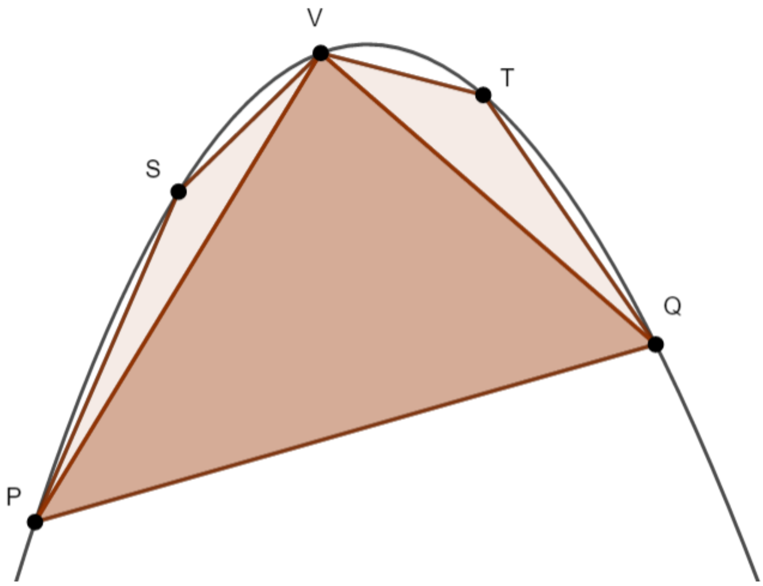
Segundo Roque e Carvalho (2019), para demonstrar esse resultado Arquimedes utilizou um método de demonstração bem comum em sua época que hoje é conhecido como *Método de Exaustão*[20]. Ainda segundo Roque e Carvalho (2019), esse método deriva da *Teoria das Proporções* de Eudoxo de Cnido (408 a.E.C – 355 a.E.C.) e consiste em: para provar que duas grandezas são iguais, deve-se demonstrar que uma não é nem maior nem menor que a outra.

[19] A definição geométrica de reta tangente a parábola será dada após a ***Proposição 1*** deste capítulo. Neste ponto estamos apenas apresentando a noção intuitiva de reta tangente a uma parábola da mesma forma como Arquimedes utilizava esse conceito em seu trabalho (HEATH, 1897, p. 233).

[20] De acordo com Roque (2012), esse nome foi dado por matemáticos do século XVII que estavam interessados nos problemas da matemática grega que envolviam cálculos de áreas por meio da *Teoria das Proporções* de Eudoxo.

Para isso, Arquimedes observou a existência de uma *progressão geométrica* de razão $\frac{1}{4}$, objeto de estudo deste trabalho, após verificar que a soma das áreas dos triângulos SPV e TVQ inscritos nos segmentos parabólicos determinados pelas cordas $\overline{PV}$ e $\overline{VQ}$, respectivamente (ver Figura 2.3) - obtidos de maneira análoga ao triângulo VPQ - é igual a $1/4$ da área do triângulo VPQ.

Figura 2.3 – Triângulos de Arquimedes.



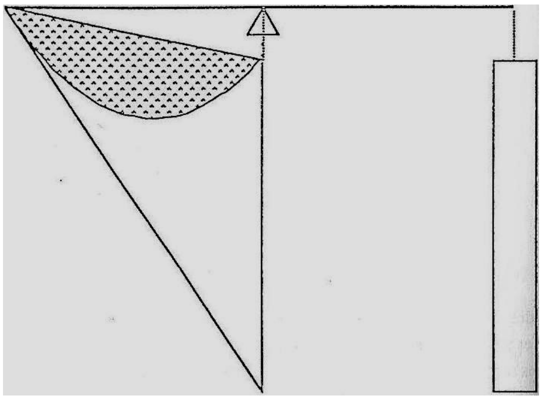
Fonte: O autor (2020).

O problema da *Quadratura da Parábola* foi divido por Arquimedes em 24 proposições, nas quais ele apresenta duas demonstrações distintas para esse problema. As proposições de 1 a 17 tratam do que hoje conhecemos como *Método Mecânico de Investigação*[21], no qual Arquimedes entendia como um processo de descoberta de resultados e não como prova. Quanto a esse método,

> O objetivo de Arquimedes é conseguir o equilíbrio dos corpos em uma balança, embora ele faça uso de dois procedimentos distintos de prova [Método Mecânico e o Método da Exaustão]. Em uma explanação básica, segundo o método mecânico de investigação, é suficiente tomar o caso simples em que se equilibra na balança os corpos X [o segmento da parábola dado] e B [um retângulo construído através dos procedimentos descritos nas proposições de 1 a 17], conforme ilustra a figura baixo [ver Figura 2.4]. (ALMEIDA, 2010, p. 4).

[21] Uma análise do *Método Mecânico de Investigação* de Arquimedes, assim como uma interpretação física e tradução das proposições de 1 a 17 pode ser encontrado no livro *O Método de Arquimedes: Análise e Tradução comentada* (ASSIS; MAGNAGHI, 2019).

Figura 2.4 – Representação do equilíbrio entre os corpos X e B.



Fonte: Almeida (2010, p. 4).

Já as proposições de 18 a 24 apresentam a demonstração por meio do *Método de Exaustão*, como citado anteriormente. Para demonstrar as proposições de 18 a 21, Arquimedes utiliza os resultados apresentados nas proposições 1 a 3. De acordo com a tradução feita por Heath (1897), Arquimedes afirmou que as demonstrações para essas três primeiras proposições apresentadas em seu texto poderiam ser encontradas nos tratados sobre cônicas de Euclides, porém, de acordo com Roque e Carvalho (2019) estes tratados e suas demonstrações, até então, não foram encontrados.

2.2 Definições e Demonstrações Contemporâneas

Nesta seção, optamos por apresentar definições e demonstrações contemporâneas diferentes das apresentadas por Arquimedes[22]. Consideramos essa apresentação necessária para que se possa compreender o uso da *série geométrica* presente nas proposições de 22 a 24, foco deste trabalho. Quanto as essas últimas três proposições, apresentaremos os enunciados e demonstrações originais como encontrados em Heath (1897).

Nas definições e proposições a seguir, estaremos sempre considerando que os axiomas da geometria euclidiana são válidos e, que todos os pontos, retas, e outros

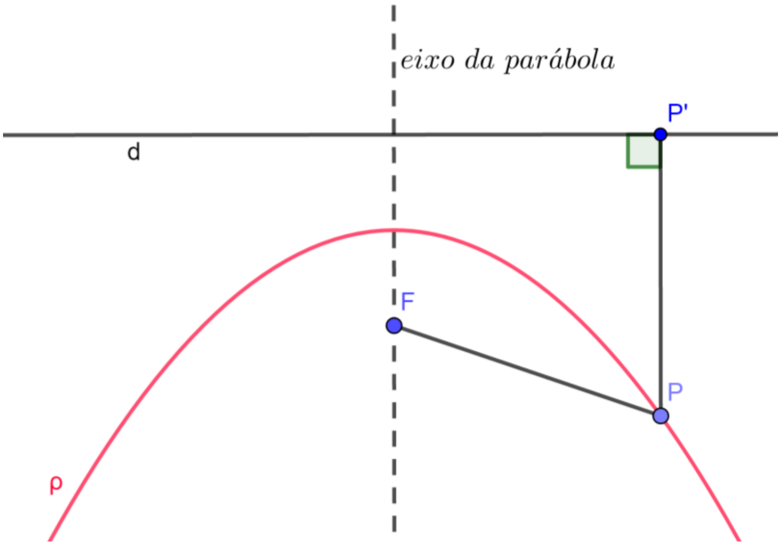
[22] Todas as proposições originalmente utilizadas por Arquimedes, em seu trabalho sobre a *Quadratura da Parábola*, podem ser encontradas em *The Works of Archimedes* (Heath, 1897, p. 233-252).

objetos geométricos mencionados pertencem a um mesmo plano, ou seja, só utilizaremos conceitos relacionados à geometria plana euclidiana.

Definição 2.1 – A **projeção ortogonal** de um ponto P em relação a uma reta d, é um ponto P' pertencente à reta d tal que $\overline{PP'} \perp d$. A medida do segmento $\overline{PP'}$ é chamada de *menor distância* entre o ponto P e a reta d.

Definição 2.2 – Dados uma reta d e um ponto F fora dessa reta, uma **parábola** ρ é o lugar geométrico[23] dos pontos equidistantes da reta d e do ponto F. A reta d é chamada de *diretriz* da parábola e o ponto F é chamado de *foco* da parábola. A reta que contém F e é perpendicular a d é chamada de *eixo da parábola* (ver Figura 2.5).

Figura 2.5 – Parábola de foco F e reta diretriz d.



Fonte: O autor (2020).

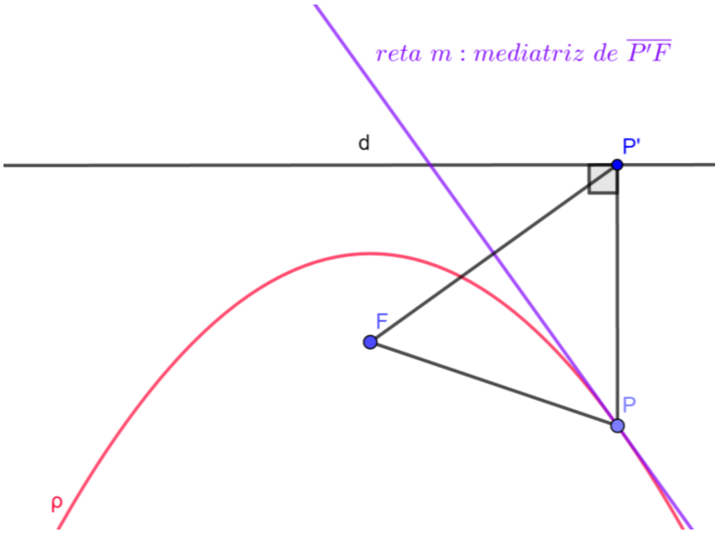
Definição 2.3 – A **mediatriz** de um segmento dado é uma reta perpendicular a esse segmento em seu ponto médio.

Pode-se demonstrar que os pontos da mediatriz de um segmento dado são equidistantes das extremidades desse segmento. Para isso, basta observar que dado um ponto P pertencente a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$, e sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$, se $P = M$ implica em $PA = PB$, por outro lado, se $P \neq M$ temos que os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso LAL, portanto, $PA = PB$.

[23] Lugar geométrico é um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade. A definição de parábola utilizada neste trabalho também pode ser encontrada em Camargo e Boulos (2005).

Proposição 2.1 – Dados uma parábola ρ de foco F e diretriz d, e um ponto P pertencente a ρ. Se m é a mediatriz do segmento $\overline{P'F}$, onde P' é a projeção ortogonal de P em relação à reta d, então *m* intercepta a parábola ρ somente em P (ver Figura 2.6).

Figura 2.6 – Proposição 2.1.



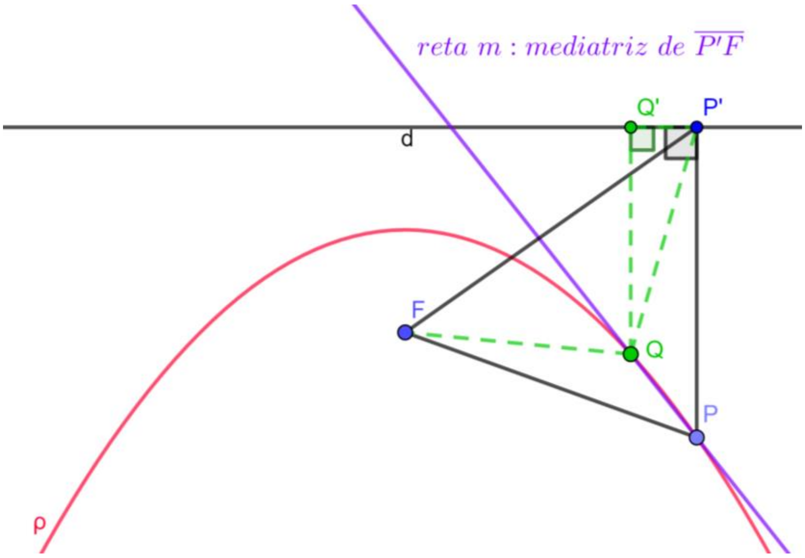
Fonte: O autor (2020).

Demonstração

Considere ρ a parábola de foco F e diretriz d e P um ponto pertencente à ρ, temos pela **Definição 2.2** que P é equidistante da reta d e do ponto F, ou seja, se P' é a projeção ortogonal de P em relação a reta d, temos que $PP' = PF$. Sendo m a reta mediatriz do segmento $\overline{P'F}$, da **Definição 2.3** temos que o ponto P pertence a m.

Queremos mostrar que P é o único ponto de intersecção entre a mediatriz m e a parábola ρ. Suponha, por absurdo, que a intersecção entre m e ρ não seja única, ou seja, que exista um ponto Q, diferente de P, pertencente a m tal que Q pertença a ρ. Se Q' é a projeção ortogonal de Q em relação a reta d, como $Q \neq P$, temos que $Q' \neq P'$ e, logo, o triângulo $QQ'P'$ será retângulo em Q' com hipotenusa $\overline{QP'}$, ou seja, $QP' \neq QQ'$ (ver Figura 2.7).

Figura 2.7 – Demonstração da Proposição 2.1.



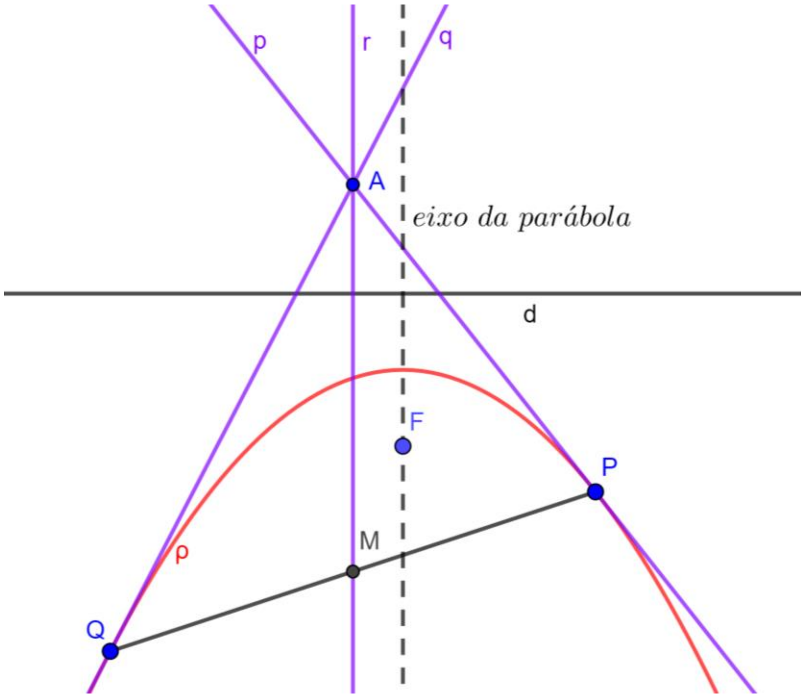
Fonte: O autor (2020).

Ainda, se Q pertence a ρ, teríamos, da **Definição 2.2** que $QQ' = QF$, porém, dado que Q pertence a m, temos que $QP' = QF$ e, logo, deveríamos ter $QP' = QQ'$, o que é um absurdo pois $QP' \neq QQ'$. Portanto P é o único ponto pertencente a intersecção de m e ρ. ∎

Definição 2.4 – A mediatriz m, como definida na ***Proposição 2.1***, será chamada de reta **tangente** a parábola ρ em *P*.

***Proposição 2.2* –** Dados uma parábola ρ de foco F e diretriz d e dois pontos distintos P e Q pertencentes a ρ, se p e q são retas tangentes a ρ em P e Q, respectivamente, e r é uma reta paralela ao eixo da parábola ρ e contém A, tal que A é o ponto de intersecção de p e q, então r intercepta o segmento $\overline{PQ}$ em M, onde M é ponto médio de $\overline{PQ}$ (ver Figura 2.8).

Figura 2.8 – Proposição 2.2.

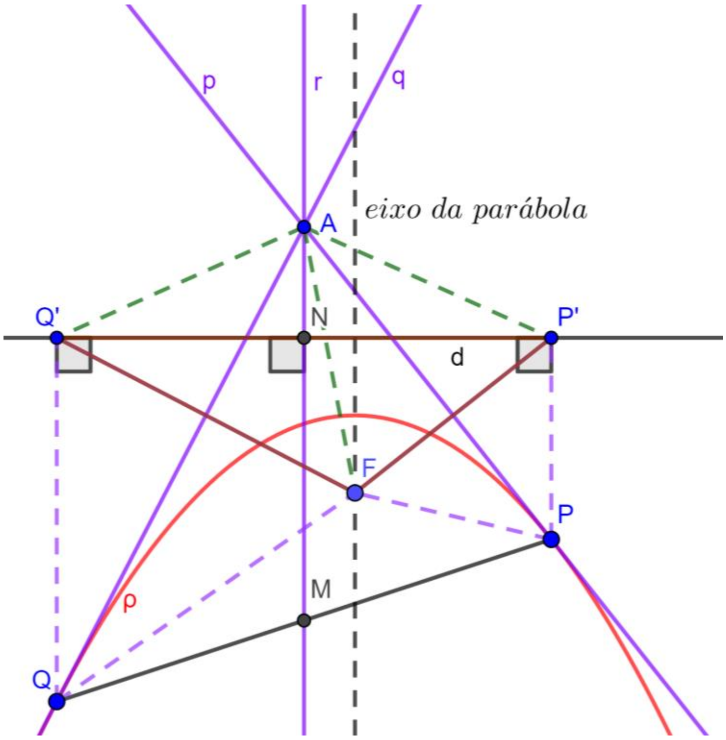


Fonte: O autor (2020).

Demonstração

Dados uma parábola ρ de foco F e diretriz d, sendo P e Q, pontos distintos de ρ, considere p e q retas tangentes a ρ em P e Q, respectivamente. Pela ***Proposição 2.1*** temos que as retas p e q são mediatrizes dos segmentos $\overline{FP'}$ e $\overline{FQ'}$, respectivamente, tais que P' e Q' são as respectivas projeções ortogonais de P e Q em relação a d. Como F, P' e Q' são pontos distintos não colineares, temos que as retas p e q não são paralelas, pois são mediatrizes dos lados do triângulo $FP'Q'$. Considere A o ponto de intersecção de p e q, e r uma reta que contém A e é paralela ao eixo da parábola ρ, temos pela **Definição 2.2** que r é perpendicular a d, e, da **Definição 2.3** temos que $AP' = AF = AQ'$, ou seja, o triângulo $AP'Q'$ é isósceles de base $\overline{P'Q'}$. Seja N o ponto de intersecção da reta r e do segmento $\overline{P'Q'}$. Temos que os triângulos ANP' e ANQ' são retângulos em N, $AP' = AQ'$ e $\overline{AN}$ é comum aos dois triângulos, logo, pelo Teorema de Pitágoras, segue que $P'N = Q'N$ (ver Figura 2.9).

Figura 2.9 – Demonstração da Proposição 2.2.



Fonte: O autor (2020).

Considere M o ponto de intersecção de r com o segmento $\overline{PQ}$. Como os segmentos $\overline{PP'}$, $\overline{QQ'}$ e $\overline{MN}$ são perpendiculares a reta d, ou seja, são paralelos entre si, pelo *Teorema de Thales*[24], temos que $\frac{PM}{QM} = \frac{P'N}{Q'N}$. Como $P'N = Q'N$, segue que $\frac{PM}{QM} = 1$, isto é, $PM = QM$, portanto M é ponto médio de $\overline{PQ}$. ■

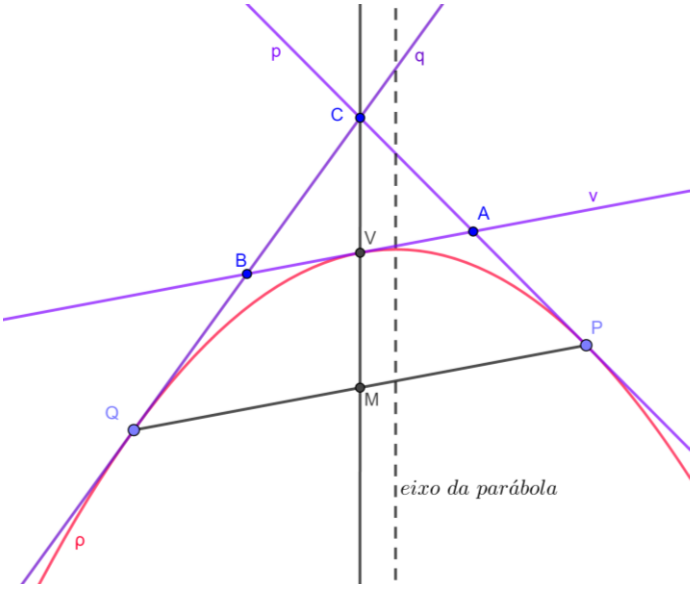
Proposição 2.3 – Dados P e Q pontos distintos de uma parábola ρ, C o ponto de intersecção das retas p e q tangentes a parábola ρ em P e Q, respectivamente, e M o ponto médio de $\overline{PQ}$. Sendo V ponto de intersecção da parábola ρ com o segmento $\overline{CM}$, e A e B pontos de intersecção da reta v, tangente a parábola ρ em V, com os segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{QC}$, respectivamente (ver Figura 2.10), segue-se que:

i. A e B são pontos médios de $\overline{PC}$ e $\overline{QC}$, respectivamente;
ii. V é ponto médio do segmento $\overline{CM}$.

---

[24] De acordo com Muniz Filho (2013, p. 123), Thales de Mileto foi um matemático grego do séc. VII a.C. no qual o Teorema creditado em seu nome, diz que: *Sejam dadas r, s e t, retas paralelas. Escolhemos pontos A, A' pertencentes a r, B, B' pertencentes a s e C, C' pertencentes a t, de modo que A, B, C e A', B', C' sejam dois ternos de pontos colineares. Então,* $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Figura 2.10 – Proposição 2.3.



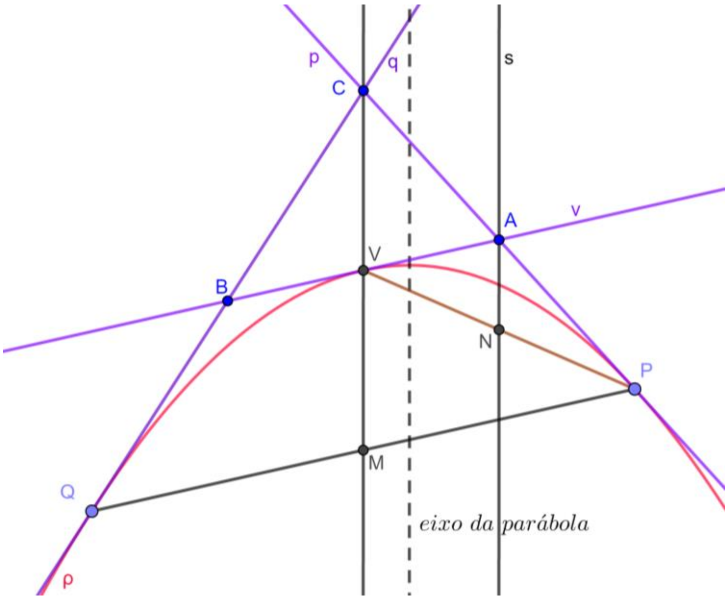
Fonte: O autor (2020).

Demonstração

Consideremos uma parábola ρ, pontos P e Q distintos pertencentes a ρ, C ponto de intersecção das retas p e q, tangentes a ρ em P e Q, respectivamente, M ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, V ponto de interseção de ρ com o segmento $\overline{CM}$ e v a reta tangente a ρ em V, tal que, a intersecção de v com as retas p e q determinam pontos A e B, respectivamente.

(i) Considere s uma reta que contém A e é paralela ao eixo da parábola ρ (ver **Definição 2.2**), como A é a intersecção das retas p e v, que são tangentes a ρ em P e V, respectivamente, temos pela ***Proposição 2.2*** que a reta s intercepta o segmento $\overline{PV}$ em N, tal que $PN = NV$ (ver Figura 2.11).

Figura 2.11 – Demonstração da Proposição 2.3.



Fonte: O autor (2020).

Como $\overline{AN}$ é paralelo a $\overline{CV}$, pois ambos são paralelos ao eixo da parábola ρ, pelo *Teorema de Thales*, temos que $\frac{PA}{AC} = \frac{PN}{NV}$. Como $PN = NV$, segue que $\frac{PA}{AC} = 1$, o que implica que $PA = AC$, portanto, A é ponto médio de $\overline{PC}$. De forma análoga, demonstra-se que B é ponto médio de $\overline{QC}$.

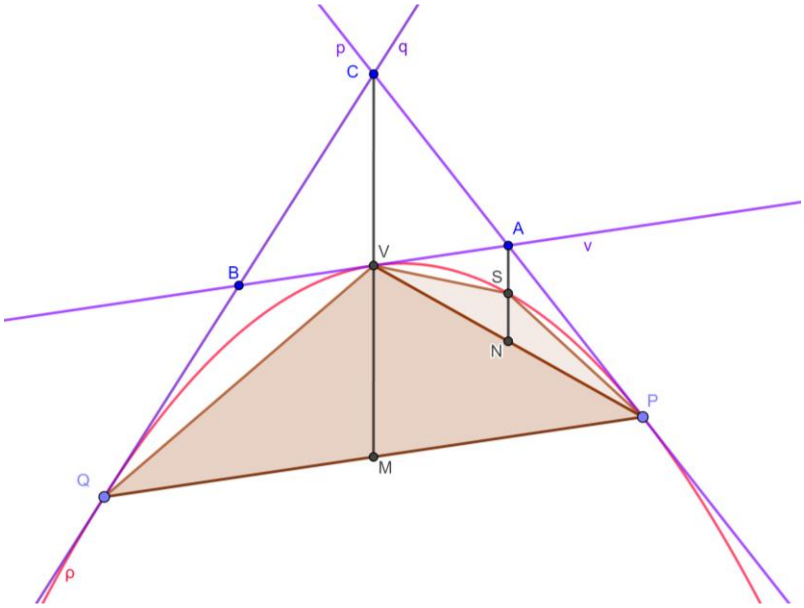
(ii) Como A e B são pontos médios de $\overline{PC}$ e $\overline{QC}$, respectivamente, afirmamos que os triângulos CAB e CPQ são semelhantes pelo critério LAL[25], pois $\frac{CA}{CP} = \frac{CB}{CQ}$ e o ângulo $A\hat{C}B$ é comum aos dois triângulos. Portanto, os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{P}Q$ são congruentes. Como $C\hat{A}B$ e $C\hat{P}Q$ são ângulos correspondentes congruentes, temos que $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{PQ}$[26]. Logo, dado que V pertence a $\overline{AB}$, pelo *Teorema de Thales*, temos que, a razão entre as medidas dos segmentos $\overline{CV}$ e $\overline{VM}$ é igual a razão entre as medidas dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{PA}$, ou seja, $\frac{CV}{VM} = \frac{AC}{PA}$. Como $PA = AC$, segue que $\frac{CV}{VM} = 1$, portanto, $CV = VM$, assim, V é ponto médio de $\overline{CM}$. ■

Proposição 2.4 (Os triângulos de Arquimedes) – Dados uma parábola ρ, pontos P e Q distintos pertencentes a ρ, C ponto de intersecção das retas p e q, tangentes a ρ em P e Q, respectivamente, e M o ponto médio de $\overline{PQ}$. Se V é o ponto

[25] O enunciado do critério LAL encontra-se no Teorema A.3 do apêndice A.
[26] O enunciado e a demonstração dessa afirmação encontram-se no Teorema A.1 do apêndice A.

de intersecção de ρ com o segmento $\overline{CM}$, A é o ponto de intersecção da reta v, tangente a ρ em V, com o segmento $\overline{PC}$, e N é o ponto médio do segmento $\overline{PV}$, então a intersecção do segmento $\overline{AN}$ com a parábola ρ é um ponto S tal que $A_{VPQ} = 8 \cdot A_{SPV}$ (ver Figura 2.12)[27].

Figura 2.12 – Proposição 2.4 (Os triângulos de Arquimedes).



Fonte: O autor (2020).

Demonstração

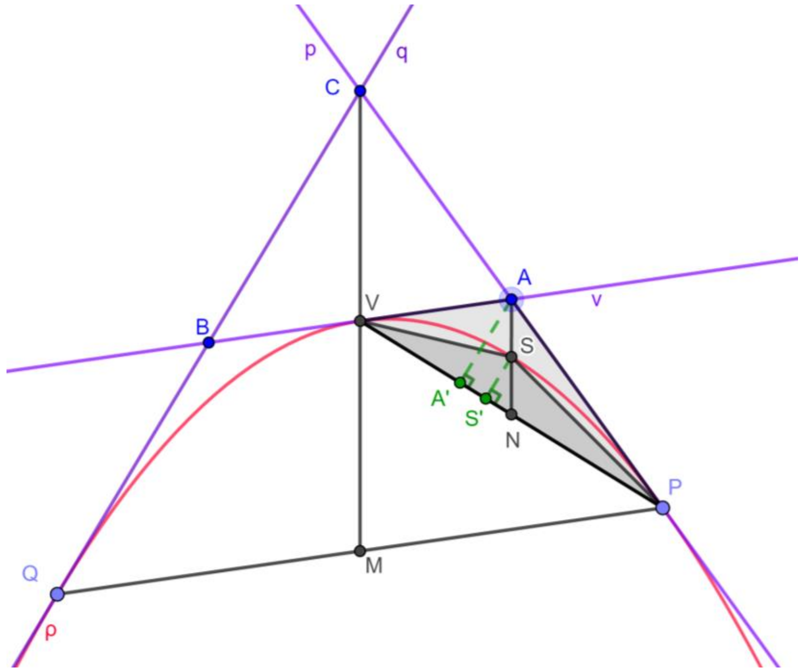
Consideremos uma parábola ρ, pontos P e Q distintos pertencentes a ρ, C ponto de intersecção das retas p e q, tangentes a ρ em P e Q, respectivamente, M ponto médio do segmento $\overline{PQ}$, V ponto de interseção de ρ com o segmento $\overline{CM}$ e v a reta tangente a ρ em V, tal que, a intersecção de v com as retas p e q determinam os pontos A e B, respectivamente. Da ***Proposição 2.3 (ii)*** temos que V é ponto médio de $\overline{CM}$. De forma análoga, sendo S o ponto de intersecção de ρ com o segmento $\overline{AN}$, onde N é ponto médio de $\overline{PV}$, então, dado que A é o ponto de intersecção das retas p e v, temos pela ***Proposição 2.3 (ii)*** que S é ponto médio de $\overline{AN}$, e, da ***Proposição 2.3 (i)*** temos que A é ponto médio de $\overline{CP}$.

Considere os triângulos APV e SPV (ver Figura 2.13), sendo A' e S' as projeções ortogonais dos pontos A e S em relação a reta $\overleftrightarrow{PV}$, respectivamente, da **Definição 2.1**,

[27] A notação A_{ABC} refere-se a área do triângulo ABC.

os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{SS'}$ são as respectivas alturas dos triângulos APV e SPV em relação a base $\overline{PV}$. Como os ângulos $A\widehat{A'}N$ e $S\widehat{S'}N$ são congruentes, assim como os ângulos $A\widehat{N}A'$ e $S\widehat{N}S'$ também são, podemos afirmar que os triângulos $AA'N$ e $SS'N$ são semelhantes pelo critério AA[28], logo, temos que $\frac{AA'}{SS'} = \frac{AN}{SN}$. Dado que S é ponto médio de $\overline{AN}$, ou seja, $AS = SN$ temos que $AN = AS + SN = SN + SN = 2 \cdot SN$, o que implica que $\frac{AA'}{SS'} = \frac{2 \cdot SN}{SN} = 2$. Logo, segue que a razão entre as áreas dos triângulos APV e SPV, nessa ordem, é igual a $\frac{\frac{PV \cdot AA'}{2}}{\frac{PV \cdot SS'}{2}} = \frac{AA'}{SS'} = 2$, ou seja, $A_{APV} = 2 \cdot A_{SPV}$.

Figura 2.13 – Demonstração da Proposição 2.4: Triângulos APV e SPV.

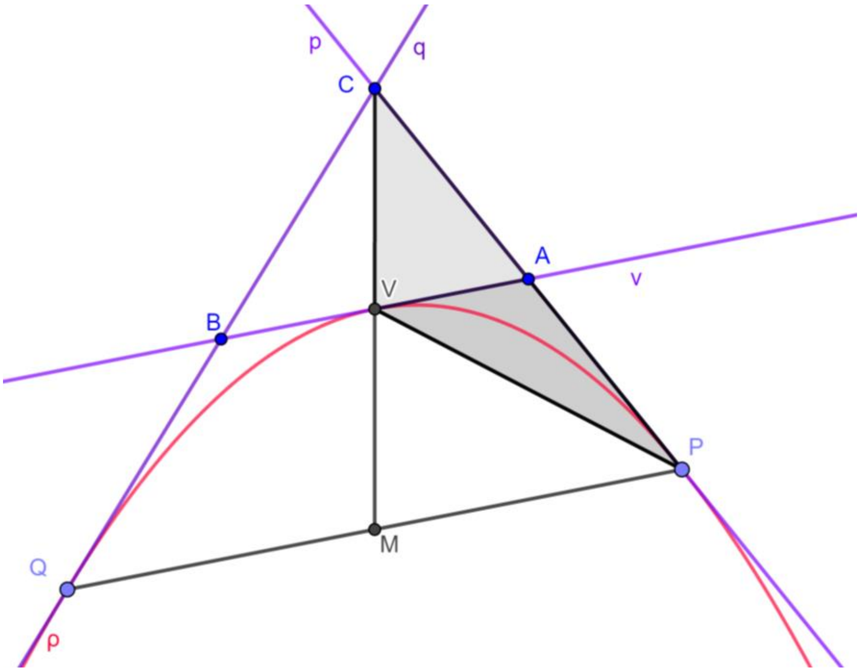


Fonte: O autor (2020).

Considere os triângulos CPV e APV (ver Figura 2.14), como ambos possuem a mesma altura relativa ao vértice V, temos que, o valor de suas áreas são proporcionais a razão entre as bases $\overline{CP}$ e $\overline{AP}$. Dado que A é ponto médio de $\overline{CP}$, ou seja, $CA = AP$, temos que, $CP = CA + AP = AP + AP = 2 \cdot AP$, o que implica que $\frac{CP}{CA} = \frac{2 \cdot AP}{AP} = 2$. Logo, segue que $\frac{A_{CPV}}{A_{APV}} = \frac{CP}{CA} = 2$, ou seja, $A_{CPV} = 2 \cdot A_{APV}$.

[28] O enunciado do critério AA encontra-se no Teorema A.2 do apêndice A.

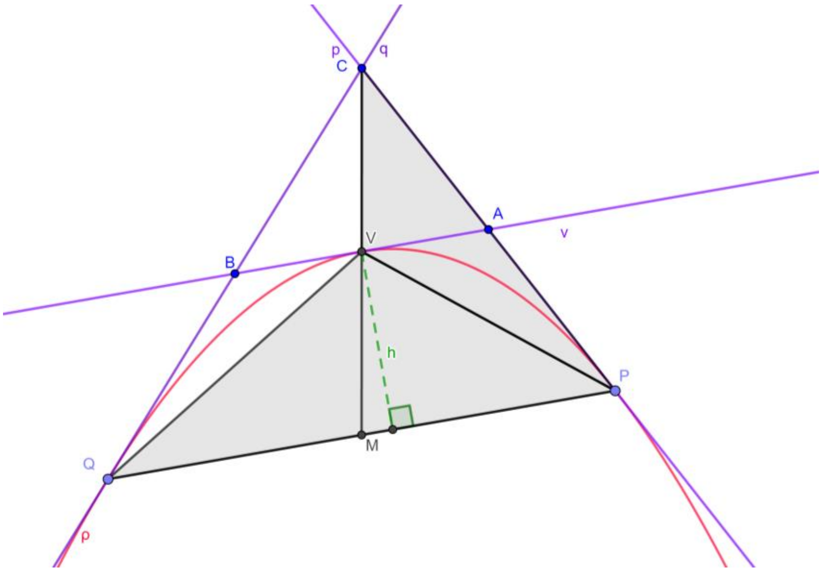
Figura 2.14 – Demonstração da Proposição 2.4: Triângulos CPV e APV.



Fonte: O autor (2020).

Considere os triângulos VPQ, VPM e CPV (ver Figura 2.15). Sabendo que V é ponto médio de $\overline{CM}$, ou seja $CV = VM$, e dado que os triângulos VPM e CPV possuem bases e alturas de mesma medida, relativas ao vértice P, temos que $A_{VPM} = A_{CPV}$. Como M é ponto médio de $\overline{PQ}$, ou seja, $PQ = 2 \cdot PM$, e dado que os triângulos VPQ e VPM possuem a mesma altura, em relação ao vértice V, sendo h a medida dessa altura, temos que a razão entre as áreas dos triângulos VPQ e VPM, nessa ordem, é igual a $\frac{\frac{PQ \cdot h}{2}}{\frac{PM \cdot h}{2}} = \frac{PQ}{PM} = \frac{2 \cdot PM}{PM} = 2$, ou seja, $A_{VPQ} = 2 \cdot A_{VPM}$. Como $A_{VPM} = A_{CPV}$, implica que, $A_{VPQ} = 2 \cdot A_{CPV}$.

Figura 2.15 – Demonstração da Proposição 2.4: Triângulos VPQ, VPM e CPV.



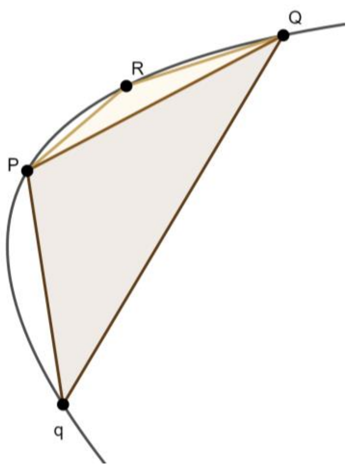
Fonte: O autor (2020).

Portanto, $A_{VPQ} = 2 \cdot A_{CPV} = 2 \cdot 2 \cdot A_{APV} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot A_{SPV} = 8 \cdot A_{SPV}$. ■

Em particular, o enunciado da ***Proposição 2.4*** apresentada neste trabalho é equivalente a ***Proposição 21 (Arquimedes)***, que diz,

> Se Qq é a base, e P o vértice, de um segmento de parábola, e se R é o vértice do segmento cortado por PQ, então, $\Delta PQq = 8 \cdot \Delta PRQ$ [ver Figura 2.16]. (HEATH, 1897, p. 248, tradução nossa)[29].

Figura 2.16 – Proposição 21 utilizada por Arquimedes.



Fonte: O autor (2020).

---

[29] Mantivemos nas traduções os símbolos originalmente utilizados para representar pontos e segmentos. Observe, por exemplo, que Qq é um segmento com extremidades nos pontos Q e q. A notação ΔPQq representa a área do triângulo PQq.

2.3 A Demonstração de Arquimedes Por Meio do Método da Exaustão

As últimas três proposições, de ***22 a 24 (Arquimedes)***, tratam da forma como Arquimedes obteve o resultado da área de um segmento parabólico em função do triângulo inscrito nesse segmento, utilizando apenas argumentos geométricos e do *Método da Exaustão*, que será descrito e analisado a seguir.

A ***Proposição 22 (Arquimedes)***, descreve o modo como Arquimedes pensava no preenchimento de uma parte da região delimitada por um dado segmento de parábola. Para isso, Arquimedes observou que poderíamos preencher o segmento de uma parábola com uma certa sequência de triângulos de tal forma que sempre haverá espaço sobrando entre os triângulos e o segmento parabólico dado. De acordo com Arquimedes,

> Se existe uma série[30] de áreas $A, B, C, D,$ ... onde cada uma é quatro vezes a próxima em ordem, e se a maior, A, é igual à do triângulo PQq inscrito no segmento parabólico PQq e tendo a mesma base que ele e altura igual, então, $(A + B + C + D + \cdots) < (área\ do\ segmento\ PQq)$. (HEATH, 1897, p. 249, tradução nossa).

De acordo com Ferraro (2008) e Luchetta (2017), o uso das reticências na expressão $(A + B + C + D + \cdots)$, para os matemáticos anteriores aos séculos XVII e XVIII, não possui o mesmo significado de hoje, ou seja, não representa a soma de infinitos termos. O que é possível observar a partir da demonstração dessa proposição – que se encontra no próximo parágrafo – é o fato que podemos continuar com o procedimento de encontrar áreas cada vez menores "onde cada uma é quatro vezes a próxima em ordem" (HEATH, 1897, p. 249, tradução nossa) tanto quanto quisermos, porém, mesmo assim, ainda teremos uma quantidade finita de termos.

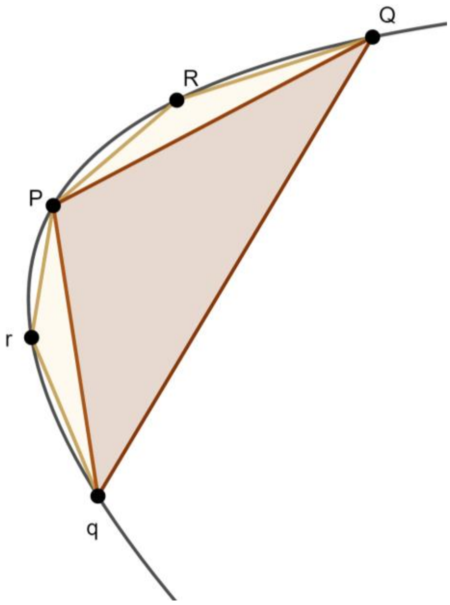
Para demonstrar essa proposição, Arquimedes utilizou como base a ***Proposição 21 (Arquimedes)***, como descreveremos a seguir:

> Visto que $\Delta PQq = 8 \cdot \Delta PRQ = 8 \cdot \Delta Pqr$, onde R, r são os vértices dos segmentos cortados por PQ, Pq, como na proposição anterior, $\Delta PQq = 4 \cdot (\Delta PQR + \Delta Pqr)$.
> Portanto, visto que $\Delta PQq = A$, $\Delta PQR + \Delta Pqr = B$ [ver Figura 2.17]. De modo semelhante, nós provamos que os triângulos igualmente inscritos nos segmentos restantes são juntos iguais a área C e, assim por diante. Logo, $A + B + C + D + \cdots$ é igual a área de um certo

[30] Na época de Arquimedes, o termo série é utilizado para denominar uma sequência.

polígono inscrito, e, portanto, menor que a área do segmento. (HEATH, 1897, p. 249, tradução nossa).

Figura 2.17 – Proposição 22 utilizada por Arquimedes.



Fonte: O autor (2020).

A sequência de termos $(A, B, C, D, \ldots)$ utilizada por Arquimedes é hoje entendida como uma progressão geométrica de razão $1/4$. Na ***Proposição 23 (Arquimedes)***, Arquimedes determina a soma dos termos dessa progressão em função do último termo dessa sequência. Segundo Arquimedes,

> Dado uma série de áreas $A, B, C, D, \ldots, Z$, onde A é a maior, e cada uma é igual a quatro vezes a próxima em ordem, então $A + B + C + D + \ldots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$. (HEATH, 1897, p. 249, tradução nossa).

A demonstração dada por Arquimedes para a ***Proposição 23 (Arquimedes)***, utiliza de um artificio algébrico[31] interessante, que iremos apresentar em linguagem moderna no teorema a seguir, da mesma forma como pode ser encontrada em Heath (1897).

[31] De acordo com Roque (2012), não podemos afirmar que as técnicas utilizadas para fazer cálculos na matemática grega eram algébricas como conhecemos hoje, pois sempre estavam relacionadas apenas a argumentos geométricos.

***Teorema 2.1 (Soma dos termos da progressão geométrica de Arquimedes)* –** Se a sequência $(A, B, C, D, \ldots, Z)$ forma uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, então, temos que $A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$.

Demonstração

Se $B = \frac{1}{4}A$, então $B + \frac{1}{3}B = \frac{1}{4}A + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}A = \frac{1}{3}A$.

Analogamente, se $C = \frac{1}{4}B$, então $C + \frac{1}{3}C = \frac{1}{3}B$ e assim por diante até $Z + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}Y$. Somando membro a membro os termos dessas equações, obtemos: $B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \cdots + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \cdots + \frac{1}{3}Y$.

Portanto, $B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{1}{3}A$, o que implica em $A + B + C + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$. ■

De fato, podemos verificar que esse resultado coincide com o cálculo que efetuamos hoje quando utilizamos a fórmula da *soma de uma progressão geométrica finita*. A saber, se a sequência $(A, B, C, D, \ldots, Z)$ forma uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, e sendo Z o n-ésimo termo dessa sequência, do ***Teorema 1.1***, temos que $A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = A \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{3} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$, o que implica em $A + B + C + D + \cdots + Z + \frac{1}{3}Z = \frac{4}{3}A$.

Finalmente, a ***Proposição 24 (Arquimedes)***, trata da *Quadratura da Parábola* em si, onde Arquimedes usou como hipótese todas as proposições apresentadas até aqui. Sua tese diz que,

> Todo segmento limitado por uma parábola e uma corda Qq é igual a quatro-terços do triângulo que tem a mesma base do segmento e altura igual. (HEATH, 1897, p. 251, tradução nossa).

Como, "os procedimentos de cálculo eram limitados por não se dispor dos números reais" (ALMEIDA, 2010, p. 3), veremos que a demonstração apresentada por Arquimedes utiliza apenas de argumentos geométricos, e, segundo Almeida (2010), ele utilizou argumentos baseados na *Teoria das Proporções* de Eudoxo (408 a.C. – 355 a.C.). Sobre essa teoria,

> Em síntese, a igualdade entre duas grandezas era provada pelo que conhecemos hoje como método da exaustão que decorre da teoria das proporções de Eudoxo: para provar que A = B, é preciso mostrar que se não se tem A > B ou A < B, consequentemente resulta que A = B. (ALMEIDA, 2010, p. 3).

Escolhemos apresentar aqui a demonstração como encontramos nos textos de Heath (1897) e, em seguida, apresentaremos uma possível abordagem algébrica dessa demonstração em linguagem moderna.

> Supondo $K = \frac{4}{3}\Delta PQq$, onde P é o vértice do segmento [de uma parábola]; e temos então que provar que a área do segmento é igual a K.
> Visto que se o segmento não for igual a K, ele deve ser maior ou menor.
> Suponha que a área do segmento é maior que K.
> Se inscrevermos então nos segmentos cortados por PQ, Pq, triângulos que tem a mesma base e altura igual, isto é, triângulos com o mesmo vértice R, r como aqueles dos segmentos, e se nos segmentos restantes inscrevermos triângulos da mesma maneira, e assim por diante, finalmente teremos os segmentos restantes cuja soma é menor que a área pelo qual o segmento PQq excede K.
> Assim, o polígono formado dessa maneira deve ser maior do que a área K; o qual é impossível, desde que, [da ***Proposição 23 (Arquimedes)***] $A + B + C + D + \ldots + Z < \frac{4}{3}A$, onde $A = \Delta PQq$.
> Então, a área do segmento não pode ser maior do que K.
> Supondo, se possível, que a área do segmento é menor do que K.
> Se então $\Delta PQq = A$, $B = \frac{1}{4}A$, $C = \frac{1}{4}B$, e assim por diante, até chegarmos a uma área X tal que X é menor do que a diferença entre K e o segmento, temos, [da ***Proposição 23 (Arquimedes)***] $A + B + C + D + \ldots + X + \frac{1}{3}X = \frac{4}{3}A = K$.
> Agora, desde que K exceda $A + B + C + D + \ldots + X$ por uma área menor do que X, e a área do segmento por uma área maior do que X, segue que $A + B + C + D + \ldots + X >$ (o segmento); o que é impossível pela ***Proposição 22*** **[*(Arquimedes)*]** acima.
> Por isso o segmento não é menor do que a área K.
> Portanto, desde que o segmento nem é maior nem menor que K, [temos] (área do segmento PQq) $= K = \frac{4}{3}\Delta PQq$. (HEATH, 1897, p. 251-252, tradução nossa).

Apresentaremos no teorema seguinte, argumentos semelhantes aos utilizados por Arquimedes, porém, com uma linguagem matemática contemporânea com o objetivo de que seja possível observar os conceitos utilizados de forma mais explícita.

Teorema 2.2 (Área de um segmento parabólico) – Dados uma parábola ρ e dois pontos distintos Q e q pertencentes à ρ, se S é medida da área do segmento da parábola ρ determinado pela corda $\overline{Qq}$ e A é a medida da área do triângulo PQq, onde

P é o vértice desse segmento de área S, como na ***Proposição 21 (Arquimedes)***, então, $S = \frac{4}{3}A$.

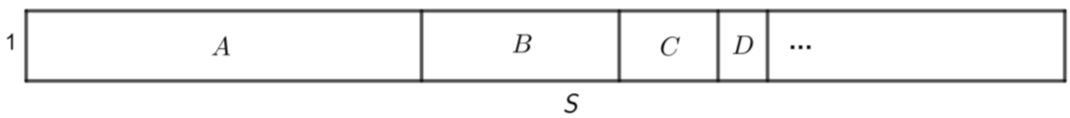
Demonstração

Consideremos uma parábola ρ e dois pontos distintos Q e q pertencentes à ρ, S a medida da área do segmento da parábola ρ determinado pela corda $\overline{Qq}$ e A a medida da área do triângulo PQq, tal que P é o vértice desse segmento de área S, como na ***Proposição 21 (Arquimedes)***.

Da demonstração da ***Proposição 22 (Arquimedes)***, podemos afirmar que existe uma sequência numérica $(A, B, C, D, \ldots)$, onde A é a medida da área do triângulo PQq – como definido no parágrafo anterior – B é a medida equivalente à soma das áreas dos triângulos Pqr e PQR, inscritos nos segmentos da parábola ρ determinados pelas cordas $\overline{QP}$ e $\overline{Pq}$, respectivamente (ver Figura 2.17) e os termos seguintes $C, D, \ldots$ são sempre medidas equivalentes à soma das áreas dos triângulos inscritos nos segmentos remanescentes da parábola ρ – inscritos sempre de forma análoga ao triângulo PQR – tais que os termos dessa sequência formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

Para efeito didático, vamos considerar que as áreas mencionadas no parágrafo anterior equivalem a áreas de retângulos de altura 1, ou seja, a área S do segmento da parábola ρ, equivale à área de um retângulo de altura 1 e comprimento S. O mesmo se aplica as áreas representadas pela sequência $(A, B, C, D, \ldots)$. Logo, da ***Proposição 22 (Arquimedes)***, podemos afirmar que a série geométrica determinada por essa sequência é limitada superiormente pela área S, ou seja, $A + B + C + D + \ldots < S$ (ver Figura 2.18).

Figura 2.18 – Representação da soma das áreas dadas pela sequência $(A, B, C, D, \ldots)$.

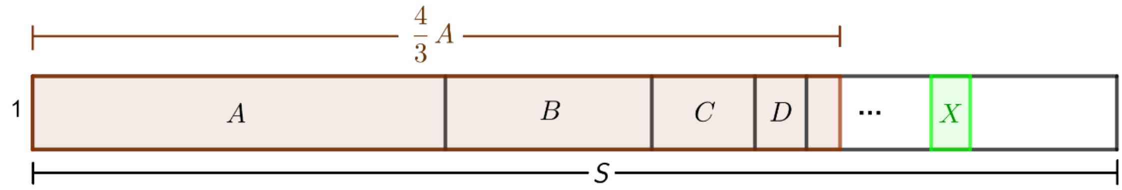


Fonte: O autor (2020).

Queremos mostrar que a área S, do segmento da parábola ρ, é igual a $\frac{4}{3}A$. Vamos supor, por absurdo, que $S \neq \frac{4}{3}A$, ou seja, $\frac{4}{3}A < S$ ou $S < \frac{4}{3}A$.

Supondo que $\frac{4}{3}A < S$, temos que $0 < S - \frac{4}{3}A$. Dado que $A + B + C + D + \cdots$ representa a área de um polígono inscrito na parábola de área S, como a sequência $(A, B, C, D, \ldots)$ é decrescente com $A + B + C + D + \ldots < S$, deve existir um termo X pertencente a essa sequência tal que $0 < X < S - \frac{4}{3}A$ e ao mesmo tempo, devemos ter $\frac{4}{3}A < A + B + C + \cdots + X < S$ (ver Figura 2.19).

Figura 2.19 – Representação da suposição $\frac{4}{3}A < S$.



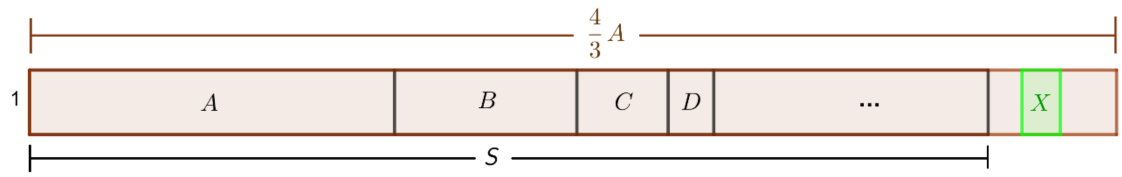
Fonte: O autor (2020).

Porém, como a sequência $(A, B, C, \ldots, X)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, da ***Proposição 23 (Arquimedes)*** (ou ***Teorema 2.1***) temos que $A + B + C + \cdots + X + \frac{X}{3} = \frac{4}{3}A$, o que implica em $A + B + C + \cdots + X < \frac{4}{3}A$, o que de fato é uma contradição, pois, por hipótese $\frac{4}{3}A < A + B + C + \cdots + X$.

Logo, S não é maior que $\frac{4}{3}A$.

Agora, vamos supor que $S < \frac{4}{3}A$, temos que $0 < \frac{4}{3}A - S$. De forma análoga a demonstração anterior, deve existir um termo X pertencente a sequência $(A, B, C, D, \ldots)$, tal que $0 < X < \frac{4}{3}A - S$ e, ao mesmo tempo, $A + B + C + \cdots + X < \frac{4}{3}A$ (ver Figura 2.20).

Figura 2.20 – Representação da suposição $S < \frac{4}{3}A$.



Fonte: O autor (2020).

Dado que $\frac{X}{3} < X$, devemos ter $\frac{X}{3} < \frac{4}{3}A - S$, logo, $S + \frac{X}{3} < \frac{4}{3}A$. Porém, como a sequência $(A, B, C, \ldots, X)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$, da ***Proposição 23***

(Arquimedes) (ou ***Teorema 2.1***) temos que $A + B + C + \cdots + X + \frac{X}{3} = \frac{4}{3}A$, o que implicaria em $S + \frac{X}{3} < A + B + C + \cdots + X + \frac{X}{3}$, equivalente a $S < A + B + C + \cdots + X$, o que é uma contradição, pois por hipótese $A + B + C + \cdots + X < S$.

Logo, S não é menor que $\frac{4}{3}A$.

Portanto, se a área S da parábola não é maior e nem menor que $\frac{4}{3}A$, devemos ter $S = \frac{4}{3}A$. ■

2.4 Considerações Acerca das Demonstrações de Arquimedes

Como afirmamos na Seção 1.1 deste trabalho, o modo como os matemáticos anteriores ao século XVIII trabalhavam com o conceito de *Infinito* está diretamente relacionado a noção de *infinito potencial*. Por isso, ao observarmos as proposições 22 e 23 do texto de Arquimedes, percebemos que ao fazer referência a soma das áreas dos triângulos em comparação a área do segmento da parábola, em nenhum momento Arquimedes afirma que os triângulos preenchem completamente a área do segmento. Em particular, na ***Proposição 23 (Arquimedes)***, vemos o uso da soma de uma *progressão geométrica finita*, que como afirmam Roque e Carvalho (2019), permitiu a Arquimedes obter uma aproximação da área do segmento de parábola sem o uso de uma *série infinita*.

Para a nossa compreensão contemporânea do conceito de *Infinito*, podemos inferir que a partir da ***Proposição 22 (Arquimedes)***, a soma das áreas dos triângulos definidos por Arquimedes (ou como definido na ***Proposição 2.4***), constituíram-se de forma infinita, preenchendo completamente a área do segmento da parábola. Portanto, como as áreas $A, B, C, \ldots$, formam uma *progressão geométrica* de razão $\frac{1}{4}$, temos que a *série infinita*, dada por $A + B + C + \cdots$, representa o valor da área do segmento de uma parábola na qual o triângulo de área A está inscrito. De fato, como essa *série* é *convergente* pelo ***Teorema 1.2***, temos que $A + B + C + \ldots = \frac{A}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A$, que coincide com o resultado obtido na ***Proposição 24 (Arquimedes)***.

Toda essa conclusão do parágrafo anterior, feita em poucas linhas quando comparado ao texto de Arquimedes, só é possível, pelo nosso entendimento, após a discussão e compreensão das mudanças ocorridas em relação aos conceitos de *Infinito* e *Convergência*, abordados no Capítulo 1 deste trabalho. Discussões que não estão presentes nos livros didáticos para o Ensino Básico, como é apresentado no Capítulo 3 deste trabalho.

Por isso, particularmente, em relação ao significado da expressão *soma de uma progressão geométrica infinita*, acreditamos que o estudo dos argumentos apresentados por Arquimedes na ***Proposição 24 (Arquimedes)***, ou no ***Teorema 1.2*** escrito por nós, pode contribuir para a compreensão dos conceitos, ou pelo menos de uma parte deles, que estão relacionados com a forma como operamos com *séries infinitas* atualmente. Uma possível interpretação de como essa contribuição pode acontecer será apresentada por nós no próximo capítulo.

3 SÉRIES GEOMÉTRICAS NO ENSINO BÁSICO

Nesse capítulo, apresentamos na primeira seção uma contextualização acerca do Ensino Básico no Brasil. Na segunda seção é apresentado uma análise da abordagem do tema *Séries Geométricas Infinitas* presente em três livros didáticos destinados a estudantes do Ensino Médio. Por último, apresenta-se uma terceira seção dedicada a uma proposta de como o texto de Arquimedes sobre a *Quadratura da Parábola* possa contribuir para o ensino das *Séries Geométricas Infinitas*.

3.1 Considerações Gerais sobre o Ensino Básico no Brasil

Atualmente, no Brasil, o Ensino Básico, ou também chamado de Educação Básica, é obrigatório para crianças e adolescentes de 4 a 17 anos, sendo dividida em três fases: Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio[32]. Dentre os documentos que norteiam os componentes curriculares para cada uma dessas fases do ensino, destacamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018),

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2018, p. 7).

A BNCC, publicada em 2018, estabelece quais são as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas pelos estudantes em cada fase do ensino. Numa busca pelo termo *série* no texto da BNCC, associada a alguma competência ou habilidade na área da Matemática, não foi encontrado nenhum resultado. Portanto,

---

[32] A educação infantil é destinada a crianças de até 6 anos de idade, o ensino fundamental é dividido em 9 anos obrigatórios destinado as crianças e adolescentes de 6 a 14 anos de idade e o ensino médio é dividido em 3 anos obrigatórios destinado aos adolescentes de 14 a 17 anos de idade (BRASIL, 2018).

nossa busca limitou-se a termos que consideramos estar relacionados ao ensino das *Séries Geométricas*, como *sequências* e *progressões*.

No que diz respeito ao ensino de *sequências*, a BNCC (2018) estabelece, de forma resumida, que durante os anos do *Ensino Fundamental* é esperado apenas que os estudantes desenvolvam a capacidade de reconhecimento de padrões em *sequências* numéricas ou não, e a habilidade de utilizar a simbologia algébrica para expressar essas regularidades encontradas. Dessa forma, não esperamos que o conceito de *Convergência*, ou até mesmo das *Séries Geométricas*, seja abordado em materiais didáticos destinados ao ensino fundamental.

Em relação ao Ensino Médio, no que diz respeito ao ensino das *Progressões Geométricas,* a BNCC (2018), estabelece que os estudantes desenvolvam a habilidade de,

> Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 514).

O desenvolvimento dessa habilidade é esperado dentro de um contexto amplo, denominado pela BNCC como *Competência Específica 5*, a qual estabelece que o estudante desenvolva a capacidade de

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 513).

Dessas diretrizes, entendemos que o ensino de *Séries*, ainda que não necessariamente com esse nome, deve se iniciar no Ensino Médio com o estudo das *Progressões Geométricas*.

Em paralelo às diretrizes educacionais, existem programas governamentais, destinados a distribuir materiais didáticos aos estudantes das escolas públicas de todo o país. Dentre esses programas, destacamos o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) (2017b),

> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) compreende um conjunto de ações voltadas para a distribuição de

> obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, destinados aos alunos e professores das escolas públicas de educação básica do País. O PNLD também contempla as instituições comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. As escolas participantes do PNLD recebem materiais de forma sistemática, regular e gratuita. Trata-se, portanto, de um Programa abrangente, constituindo-se em um dos principais instrumentos de apoio ao processo de ensino-aprendizagem nas Escolas beneficiadas. (BRASIL, 2017b).

Para que um livro didático possa ser distribuído a escolas públicas, por meio do PNLD, os autores devem submeter os livros a uma avalição técnica realizada por especialistas da área de educação. De acordo com Bigode (2018), essa avaliação, além de outros critérios, verifica se os livros seguem explicitamente o que está descrito na BNCC. Após as avaliações, o programa elabora um guia com informações acerca de cada obra aprovada, para que os professores, de cada escola participante, possam escolher o livro didático que melhor se adequa ao projeto político-pedagógico da escola.

Vale ressaltar, que o programa é alvo de diversas críticas em relação a liberdade de escolha pelos professores, como afirma Bigode (2018),

> Infelizmente é um mito a livre escolha do LD [livro didático] pelos professores e nem sempre a adoção é resultado da análise e do desejo deles. São vários os casos relatados de contaminação da escolha por práticas nem sempre republicanas: há casos de fraudes na escolha; há interferência de autoridades das escolas e Secretarias de Educação; envolvimento de agentes das editoras; compra casada; professores que escolhem uma coleção e recebem outra; cidades ou Estados em que uma determinada editora conseguiu 100% de adoção (em alguns casos de todas as disciplinas) etc. (BIGODE, 2018, p. 180).

Apesar das críticas, o programa foi responsável por distribuir 20.835.977 livros à 6.962.045 estudantes do Ensino Médio no ano de 2019 (BRASIL, 2017b).

Levando em consideração a abrangência desse programa e, por consequência, o uso dos livros por professores e estudantes das redes públicas de educação, entendemos que se justifica a análise da forma como os conceitos de *Séries Geométricas Infinitas* são expostos nos livros didáticos, para que, em seguida, possamos discutir abordagens alternativas.

3.2 Análise dos Livros Didáticos

Para a seleção dos livros didáticos a serem analisados levamos em consideração à disponibilidade dos mesmos na biblioteca do IFSP – Instituto Federal de São Paulo[33], além da sua aprovação em programas mais recentes do PNLD. Desses, escolhemos os livros #Contato Matemática, Matemática Para Compreender O Mundo, aprovados para o PNLD em 2018, e Matemática: Ciência e Aplicações, aprovado para o PNLD em 2015[34].

Para a análise, procuramos descrever a forma como os autores abordam o tema das *Séries Geométricas Infinitas*, apresentar o resumo contido no guia do PNLD, e observar se as críticas ao ensino de *Séries* nos artigos de Lehmann (1995) e Sierpinska (1987), no que diz respeito ao uso excessivo de fórmulas prontas ou apresentação de critérios de convergência sem a presença de uma discussão conceitual, podem ser aplicadas a abordagem encontrada nos livros didáticos destinados ao Ensino Médio.

Também levamos em consideração as observações de BIGODE (2018) em relação as limitações presentes na elaboração de um livro didático,

> Para início de conversa, um LD é linear o que acaba por determinar uma direção, por meio de uma sequência de ensino que nem sempre está em sintonia com o processo de aprendizagem dos alunos ou com a dinâmica da aula. Trata-se de um problema estrutural de natureza editorial, além disso, o livro é fisicamente limitado, limitado pelo tamanho do texto na página e pelo número de páginas, o que implica numa seleção “arbitrária” de conteúdos e abordagens. Na maioria das vezes, esta limitação é imposta pelos editores ou pelo edital do PNLD, no caso de livros para escolas públicas. (BIGODE, 2018, p. 163).

Dessa forma, tentamos adequar as nossas observações a apenas critérios objetivos relacionado ao ensino das Séries Geométricas Infinitas. Como por exemplo, destacar se os exemplos iniciais relacionam as *Séries Geométricas Infinitas* com conceitos da geometria, se o conceito de *Convergência* foi apresentado pelos autores dos livros e se os exemplos ou exercícios resolvidos propõem soluções alternativas sem o uso de fórmulas.

---

[33] Disponíveis em dezembro de 2019.

[34] O Livro Matemática: Ciência e Aplicações, também foi aprovado para o PNLD em 2018, porém com uma edição mais recente da qual não tivemos acesso.

Após a análise individual de cada um dos livros, apresentamos um resumo com as observações encontradas a partir desses critérios.

3.2.1 Livro #Contato Matemática

Nessa seção analisamos o livro *#Contato Matemática, volume 1,* destinado aos estudantes do primeiro ano do ensino médio, escrito por Joamir Roberto de Souza e Jacqueline da Silva Ribeiro Garcia, publicado pela editora FTD em 2016 e aprovado para o PNLD em 2018.

Em relação a coleção *#Contato Matemática* (3 volumes), o guia do PNLD 2018, apresenta a seguinte visão geral:

> O incentivo a que os estudantes elaborem problemas é um destaque na coleção. Ela também se caracteriza por apresentar uma considerável variedade de textos que possibilitam contextualizações e atividades interdisciplinares. No entanto, especialmente, na abertura dos capítulos, há conexões artificiais e pouco relacionadas aos temas abordados em seguida.
> Os conteúdos são, frequentemente, abordados com base em definições, atividades resolvidas e propostas. São feitas generalizações, mas de maneira rápida e sem o devido rigor. (BRASIL, 2018, p. 81).

No que se refere ao conteúdo que analisamos desse livro, as observações que constam no guia do PNLD 2018 são bem precisas em relação à falta de rigor e, em particular, a seção dedica às *Séries Geométricas* não apresenta textos contextualizados ou interdisciplinares.

Observa-se que os autores optaram por nomear a seção do livro que se refere as *Séries Geométricas Infinitas* como *Série Geométrica Convergente* (ver Figura 3.1) porém, como veremos adiante, o significado da palavra *convergência* não é discutido nessa seção do livro, assim como também não é apresentado nenhum exemplo de *série geométrica divergente*.

Logo no início da seção observa-se o uso de um único exemplo de *progressão geométrica infinita*[35] de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1. Nesse exemplo, foi explicitado – de forma curiosa – apenas o quinto, o oitavo e o nono termo, provavelmente, com a intenção de reforçar a ideia de que nessa sequência, quanto maior a posição do termo, mais próximo de zero será seu valor. Nenhuma outra justificativa é apresentada para garantir que essa afirmação seja verdadeira (ver Figura 3.1).

Figura 3.1 – #Contato Matemática: Definição de série geométrica convergente.

Série geométrica convergente

Considere a PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots\right)$, de razão $q = \frac{1}{3}$ cuja fórmula do termo geral é dada por $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Note que, quanto maior o valor de n, mais próximo de zero é o termo da PG. Por exemplo:

- $a_5 = \frac{1}{81} \simeq 0{,}01235$
- $a_8 = \frac{1}{2\,187} \simeq 0{,}00046$
- $a_9 = \frac{1}{6\,561} \simeq 0{,}00015$

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 225).

Em seguida, os autores apresentam uma generalização dos casos nos quais uma *progressão geométrica infinita* será *convergente* e, novamente sem definir ou discutir o significado, utilizaram a notação de *limite* para representar a expressão: “a medida que n cresce indefinidamente a_n aproxima-se de zero” (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 225). Com a junção dos conceitos e propriedades de *limite* e a da fórmula obtida anteriormente para o cálculo da *soma dos termos de uma progressão geométrica finita*, deduzem a fórmula para a obtenção do valor de uma *série geométrica convergente* (ver Figura 3.2).

[35] Não há nenhuma menção nesse livro de que se trata na verdade de uma progressão geométrica infinita, estamos admitindo assim pelo contexto dos tópicos apresentados.

Figura 3.2 – #Contato Matemática: Conceito de limite.

Podemos dizer que, à medida que *n* cresce indefinidamente, a_n aproxima-se de zero, ou seja, tende a zero.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$$

De modo geral, se $0<|q|<1$, então $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$.

Estudamos anteriormente que $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, para $q\neq 1$. Calculando o limite de S_n quando *n* tende ao infinito e $0<|q|<1$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1(1-0)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=0$ lê-se "limite de $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ tende a zero quando *n* tende ao infinito".

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 225).

Da mesma forma como afirma Sierpinska (1987), a dificuldade que alguns estudantes podem enfrentar para entender o significado da expressão *convergência* pode ser observada nesse livro a partir do momento que vemos uma abordagem sobrecarregada de conceitos que não são discutidos anteriormente. Uma vez que o texto desse livro não aborda os conceitos de *limite*, alguns estudantes poderiam interpretar de forma errada a pequena explicação sobre o símbolo do *limite*, concluindo que utilizamos esse símbolo para representar uma aproximação e não um valor real.

Em seguida, os autores utilizaram o resultado anterior para apresentar o valor da *série geométrica infinita* de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1 – o mesmo exemplo utilizado para apresentar o assunto – e ao mesmo tempo apresentam um resumo dos conceitos abordados até aqui, sintetizados em um quadro amarelo (ver Figura 3.3).

Figura 3.3 – #Contato Matemática: Soma dos termos de uma P.G. infinita.

Calculando a soma dos termos da PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \frac{1}{729}, \ldots\right)$, temos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

Portanto, o limite da soma dos termos dessa PG é $\frac{3}{2}$, ou seja, $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}$.

A fórmula que permite calcular o limite da soma dos termos de uma PG infinita de razão *q*, com $0<|q|<1$, é dada por:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}$$

Chamamos essa soma de **série geométrica convergente.**

Quando $q\geq 1$ ou $q\leq -1$, chamamos a soma da PG de **série geométrica divergente.**

Na PG $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\right)$, temos:

- $S_2=\frac{4}{3}=1,\bar{3}$
- $S_3=\frac{13}{9}=1,\bar{4}$
- $S_4=\frac{40}{27}=1,\overline{481}$

⋮

- $\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{3}{2}=1,5$

Capítulo 8

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 225).

Novamente observa-se que o conceito de limite é apresentado para justificar o cálculo da soma dos termos de uma *progressão geométrica infinita* e pela primeira vez nessa seção define-se o significado da expressão *série geométrica convergente*. Discordamos da definição apresentada pelos autores nesse livro, pois, da **Definição 1.6** dizemos que o valor $\frac{a_1}{1-q}$ é chamado de *soma* da *série geométrica convergente* e não que esse valor seja a *série geométrica convergente* como apresentado no quadro amarelo: “chamamos essa soma de série geométrica convergente” (SOUZA; GARCIA, 2016, p. 225). Poderíamos supor que os autores utilizaram essa expressão para fazer referência aos casos em que é possível obtermos o valor da soma dos termos de uma *progressão geométrica infinita*, mas como não há mais explicações ou exemplos, nem mesmo para os casos nos quais a série é divergente, essa definição pode fazer com que os estudantes[36] tenham conclusões equivocadas sobre o significado da expressão *série geométrica convergente*.

Um outro fato que chama a atenção é a apresentação, sem nenhuma explicação da motivação, de um quadro menor com o resultado do que hoje conhecemos como *somas parciais* da *série geométrica infinita* de razão $\frac{1}{3}$ e primeiro termo igual a 1 – ainda o mesmo exemplo inicial – terminando com o valor da *série geométrica convergente* (ver Figura 3.3). Entendemos que a intenção é de apresentar aos estudantes que os valores das *somas parciais* tendem a se aproximar do valor da *série infinita* ao aumentarmos o número de termos. Porém, novamente, sem uma explicação mais precisa, entendemos que esse exemplo pode induzir os estudantes a acreditarem que o valor da *série geométrica infinita* é apenas uma aproximação dos valores obtidos nas *somas parciais*.

Para encerrar a seção os autores apresentam um exercício resolvido sobre como obter a fração geratriz da dízima periódica $1{,}252525\ldots$. Observa-se na resolução apresentada pelos autores que essa dízima é equivalente a soma do número 1 com o valor da *série geométrica infinita* de razão $\frac{1}{100}$ e primeiro termo igual a $\frac{25}{100}$, obtida com a fórmula deduzida nessa seção. Porém, existe um equívoco na descrição dada pelos autores, quando afirmam que essa soma é uma *série geométrica convergente*, pois essa afirmação desconsidera o número 1 sem deixar esse fato explícito aos estudantes (ver Figura 3.4).

[36] Nesse capítulo utilizamos a expressão *estudantes* para fazer referência ao público alvo desses livros didáticos, que são os discentes do primeiro ano do ensino médio.

Figura 3.4 – #Contato Matemática: Atividades resolvidas.

Atividades resolvidas

R25. Determine a fração geratriz da dízima 1,252525...

Resolução

Podemos resolver esta atividade utilizando uma série geométrica convergente.

$$1{,}252525\ldots = 1+0{,}25+0{,}0025+0{,}000025+\ldots = 1+\frac{25}{100}+\frac{25}{10\,000}+\frac{25}{1\,000\,000}+\ldots$$

Note que a soma é uma série geométrica convergente, com $a_1=\frac{25}{100}$ e $q=\frac{\frac{25}{10\,000}}{\frac{25}{100}}=\frac{1}{100}$.

Logo: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{25}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{25}{99}$

Assim, temos: $1{,}252525\ldots=1+\overbrace{\frac{25}{100}+\frac{25}{10\,000}+\frac{25}{1\,000\,000}+\ldots}^{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{25}{99}}=1+\frac{25}{99}=\frac{124}{99}$

Fonte: SOUZA e GARCIA (2016, p. 225).

Ao simplesmente apresentarem as expressões *limite* e *convergência* sem abordarem com mais detalhes, como afirma Lehmann (1995), pode ocorrer que o significado da existência de uma *série geométrica convergente* pareça ter menos importância do que os critérios para os quais a *série* é *convergente*. Neste livro, como observamos, esses conceitos não são discutidos, são apenas apresentados e generalizados a partir de um único exemplo em particular, levando-nos a acreditar que essa abordagem pode fazer com que alguns estudantes não se interessem pelo tema ou tenham uma compreensão equivocada das noções de *limite*, *infinito* e do valor da soma de uma *série geométrica convergente*.

3.2.2 Livro Matemática Para Compreender O Mundo

Nessa seção analisamos o livro *Matemática Para Compreender O Mundo, volume 1*, destinado aos estudantes do primeiro ano do ensino médio, escrito por Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz, publicado pela editora Saraiva em 2016 e aprovado para o PNLD em 2018.

Em relação a coleção *Matemática Para Compreender o Mundo*, o guia do PNLD 2018 apresenta a seguinte visão geral:

> Na obra, os conteúdos são organizados em unidades que se iniciam com um texto, um problema, ou algum contexto histórico, geralmente

> instigante. Segue-se a abordagem teórica do tema em estudo, alguns exemplos e atividades para os estudantes.
> O estudo das funções favorece o entendimento das aplicações, o que o torna mais significativo. Os temas de estatística e probabilidade são abordados com base em discussões e análises de situações diversas e isso favorece um trabalho articulado com as práticas sociais. Em geometria analítica, prioriza-se a representação algébrica, em prejuízo de maior compreensão dos objetos geométricos representados.
> As novas tecnologias são utilizadas em seções específicas que são bastante frequentes na coleção. São propostas situações motivadoras, com o uso do computador e da calculadora. Também se discutem questões do ENEM ou de vestibulares, que incluem análises das possíveis estratégias de resolução, além de boas sugestões para um trabalho em conexão com outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 2018, p. 67).

Na seção analisada por nós, não há presença de textos contextualizados ou históricos e muito menos propostas de atividades relacionadas com novas tecnologias ou questões interdisciplinares como mencionado acima.

Nesse livro as autoras optaram por nomear a seção referente a *séries geométricas infinitas* como *Soma dos termos de uma P.G. infinta*. Veremos a seguir que, diferente do **LD1**[37], não é apresentado nesse livro o conceito de *convergência*, diferenciando a leitura desse livro com a leitura de teoremas e definições encontradas em livros de *Cálculo Diferencial e Integral* – como apresentado no Capítulo 1 deste trabalho. Porém, assim como no **LD1**, as autoras utilizaram o conceito de *limite* para apresentar e justificar os cálculos da soma dos temos de uma *progressão geométrica infinita*.

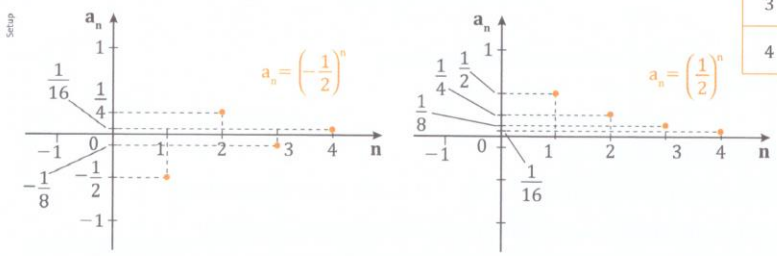
Para introduzir o tema vemos que as autoras desse livro optaram por utilizar uma representação gráfica dos quatro primeiros termos de duas *progressões geométricas infinitas* de razão $\frac{1}{2}$, sendo a primeira com primeiro termo igual a $-\frac{1}{2}$ e segunda com primeiro termo igual a $\frac{1}{2}$ (ver Figura 3.5).

[37] LD1 será a abreviação utilizada para o livro didático analisado na Seção 3.2.1 deste trabalho.

Figura 3.5 – Matemática Para Compreender O Mundo: Gráficos de P.G. infinitas.

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Sejam as progressões geométricas dadas pelas expressões gerais $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos construir uma representação gráfica para cada uma dessas sequências.



n	$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$	$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
4	$+\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

A utilização de gráficos, ferramenta muito utilizada nos livros de *Cálculo Diferencial e Integral*, para representar os termos dessas progressões, pode ser visto como um recurso didático com a intenção de justificar a aproximação dos valores dos termos dessas progressões ao número zero – quando a posição do termo tende ao infinito - como vemos na explicação dada pelas autoras. Pela primeira vez nessa seção é apresentado o conceito de limite, mas, de forma parecida ao **LD1**, o conceito é apenas apresentado como um símbolo que pode ser utilizado para representar a expressão "tendem a zero ou têm limite zero" (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 165) (ver Figura 3.6).

Figura 3.6 – Matemática Para Compreender O Mundo: Análise dos gráficos.

Observando as representações gráficas, notamos que, à medida que aumentamos o valor de **n**, os pontos vão se **aproximando do eixo horizontal**. Nos dois casos apresentados, os termos da sequência **não intersectarão o eixo horizontal**, apenas se aproximarão cada vez mais do valor zero, à medida que os valores de **n** forem aumentando.

Dizemos, então, que $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tendem a zero ou têm limite zero quando **n** tende a infinito e representamos desta forma: $\lim_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ e $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

Após a explicação do comportamento dessas duas primeiras progressões, são apresentados mais quatro exemplos de sequências que, como afirmam as autoras, "têm limite zero para n tendendo ao infinito" (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 165). Porém, não são apresentadas justificativas para essa afirmação, nem mesmo gráficos como nos exemplos anteriores. Em seguida é apresentado os valores que a razão pode assumir para os quais as *progressões geométricas infinitas* são *convergentes*, novamente sem justificativas (ver Figura 3.7). Um fato curioso que podemos notar é que as autoras utilizam a letra q para representar a razão de uma *progressão geométrica infinita*, porém essa representação só é definida posteriormente nessa seção[38], podendo gerar dúvidas ou confusões na leitura desse fragmento.

Figura 3.7 – Matemática Para Compreender O Mundo: A razão de uma P.G. convergente.

Outros exemplos de sequências que têm limite zero para **n** tendendo a $+\infty$ são: $\left(\frac{1}{3}\right)^n$; $-\left(\frac{1}{4}\right)^n$; $(0{,}6)^n$; $(-0{,}7)^n$.

De forma geral: Se $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

Entendemos que o enunciado e a demonstração da ***Proposição 1.2*** – que trata dos valores dos quais a razão de uma *progressão geométrica infinita* pode assumir para que a *série geométrica infinita* seja *convergente* – é carregado de conceitos que normalmente só estudamos no ensino superior, mas a simples apresentação desse critério, da mesma forma como acontece no **LD1**, pode induzir os estudantes a entenderem de forma equivocada que não há necessidade de compreensão dessa conceito e que deveríamos apenas decorar esses critérios (LEHMANN, 1995).

A seguir, observamos uma outra explicação para o critério de *convergência* por meio de um único exemplo. Nesse exemplo, as autoras optaram por apresentar quatro termos não consecutivos da *progressão geométrica infinita* de razão $0{,}7$ e primeiro termo igual a 1. Apesar dos valores estarem em ordem decrescente, não há nenhuma menção em relação à escolha dos termos apresentados (ver Figura 3.8).

Figura 3.8 – Matemática Para Compreender O Mundo: Exemplo de uma P.G. convergente.

Outra forma de expressar isso é dizer que os termos da sequência $(1, q, q^2, \ldots)$, com $-1 < q < 1$, convergem para zero.

Observe isso, por exemplo, para $q = 0{,}7$:

$0{,}7^3 = 0{,}343$; $0{,}7^{10} \simeq 0{,}028$; $0{,}7^{25} \simeq 0{,}00013$; $0{,}7^{35} \simeq 0{,}000004$.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

[38] Na seção anterior desse livro, que trata dos conceitos iniciais sobre *progressão geométrica* a letra q é utilizada para representar a razão desses tipos de progressões.

Após essa introdução sobre os *critérios de convergência*[39] é apresentado a dedução da fórmula para obter o valor da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita*. Da mesma forma como vemos no **LD1**, a fórmula foi deduzida a partir da *soma dos termos de uma progressão geométrica finita* – apresentada anteriormente no livro – e dos poucos conceitos sobre *Limite* abordados nessa seção. Todos os conceitos apresentados até esse ponto são sintetizados em um quadro azul (ver Figura 3.9).

Figura 3.9 – Matemática Para Compreender O Mundo: Soma dos termos de uma P.G. infinita.

Estamos, agora, em condições de analisar o que ocorre com $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ quando $n \to +\infty$ e $-1 < q < 1$, usando o fato de que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$. Assim, segue $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$.

Podemos, então, registrar que:

Em toda P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão **q**, com $-1 < q < 1$: $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$

O valor dessa expressão é definido como **a soma dos termos de uma P.G. infinita**.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} \text{ para } -1 < q < 1$$

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

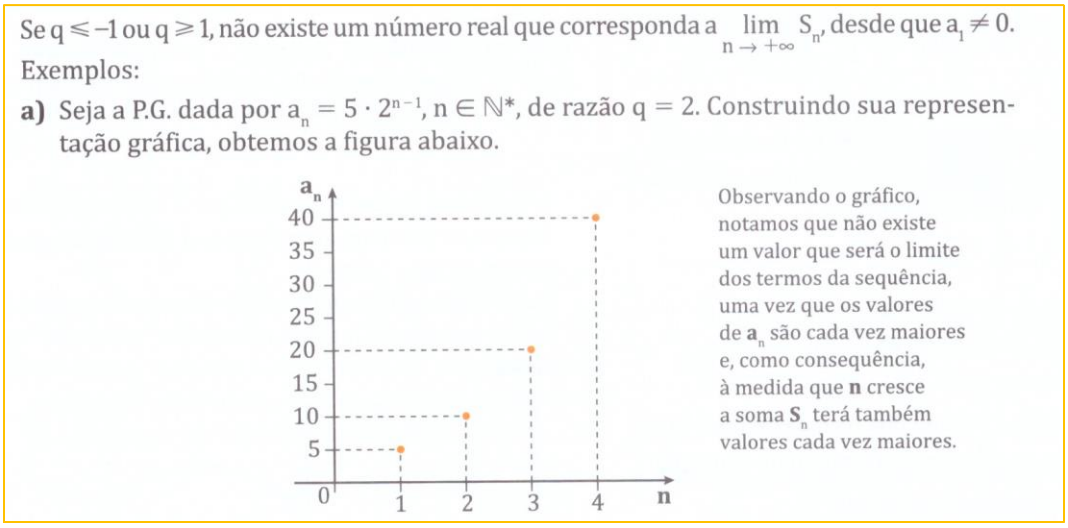
Ainda que não tenhamos encontrado nenhum problema com as definições matemáticas apresentadas até aqui, e mesmo sendo observado o uso de uma quantidade maior de exemplos, do que vimos no **LD1,** para apresentar os conceitos necessários para que se possa obter a fórmula da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita*, ainda não vemos uma discussão sobre o conceito de *convergência*. A falta de discussão desse conceito, como afirma Lehmann (1985), pode interferir no processo de aprendizado do real significado dos temas relacionas à *séries*.

Um fato curioso na abordagem escolhida pelas autoras desse livro é o da presença de três exemplos nos quais não é possível se realizar a *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita* apresentados imediatamente após a definição desse tipo de *soma* e antes dos exercícios resolvidos.

[39] Ainda que a expressão *critérios de convergência* não tenha sido utilizada pelas autoras desse livro, entendemos que toda a discussão que antecede a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita equivale ao que foi abordado nos teoremas e definições da seção 1.2 deste trabalho.

O primeiro exemplo (nomeado como item a) se refere a uma *progressão geométrica infinita* de razão 2 e primeiro termo igual a 5, onde, a partir da representação gráfica dos termos dessa progressão, as autoras afirmam que pode-se deduzir que “não existe um valor que será o limite dos termos dessa sequência” (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 165) (ver Figura 3.10).

Figura 3.10 - Matemática Para Compreender O Mundo: Exemplo (a) de P.G. não convergente



Se $q \leqslant -1$ ou $q \geqslant 1$, não existe um número real que corresponda a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$, desde que $a_1 \neq 0$.

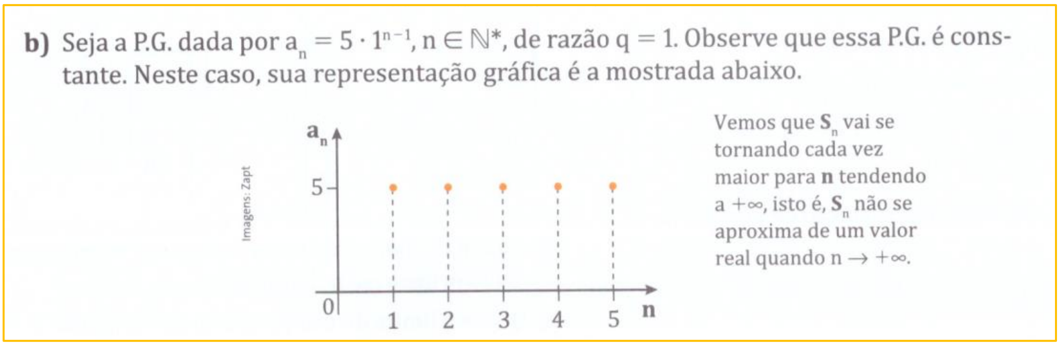
Exemplos:

a) Seja a P.G. dada por $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, de razão $q = 2$. Construindo sua representação gráfica, obtemos a figura abaixo.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

O segundo exemplo (nomeado como item b) se refere a uma progressão geométrica infinita de razão 1 e primeiro termo igual a 5, onde, da mesma forma como é abordado no primeiro exemplo, a partir da representação gráfica dos termos dessa progressão, as autoras afirmam que pode-se deduzir que a soma dos termos dessa progressão “não se aproxima de um valor real quando n tende ao infinito” (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 165). Essa última afirmação pode induzir os estudantes a uma interpretação equivocada do conceito de *infinito*, quando tratamos de conjuntos com infinitos elementos, pelo fato das autoras não deixaram explicito o que queriam dizer com *valor real* (ver Figura 3.11).

Figura 3.11 – Matemática Para Compreender O Mundo: Exemplo (b) de P.G. não convergente.

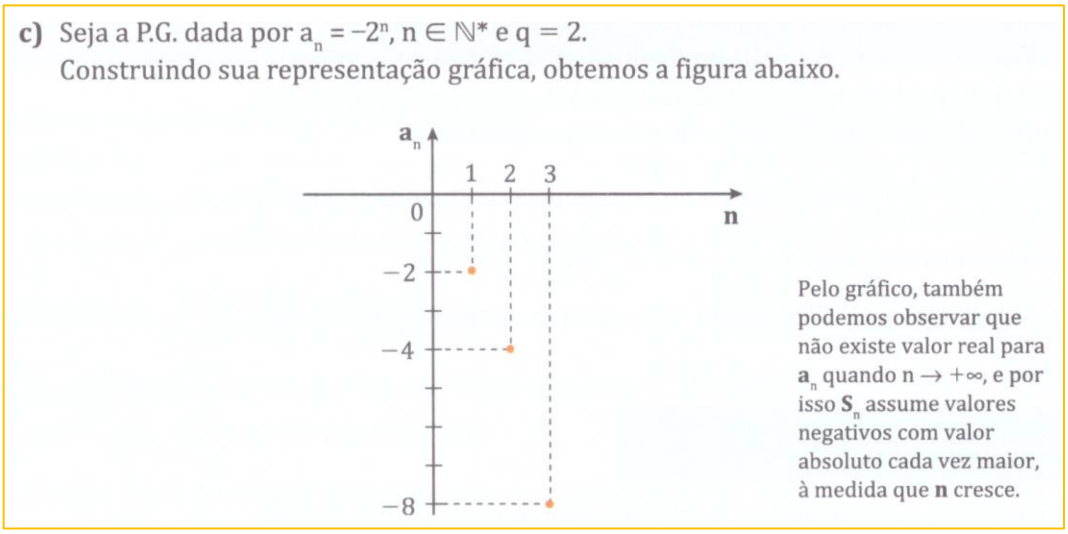


b) Seja a P.G. dada por $a_n = 5 \cdot 1^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, de razão $q = 1$. Observe que essa P.G. é constante. Neste caso, sua representação gráfica é a mostrada abaixo.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 165).

O terceiro e último exemplo (nomeado como item c) se refere a uma *progressão geométrica infinita* de razão 2 e primeiro termo igual a -2, onde, novamente, a partir da representação gráfica dos termos dessa progressão, as autoras afirmam que pode-se deduzir que o valor da soma dos termos dessa progressão “assume valores negativos com valor absoluto cada vez maior, à medida que n cresce” (SMOLE; DINIZ, 2016, p.166) e portanto não existe um valor que será o limite dos termos dessa sequência (ver Figura 3.12).

Figura 3.12 – Matemática Para Compreender O Mundo: Exemplo (c) de P.G. não convergente.



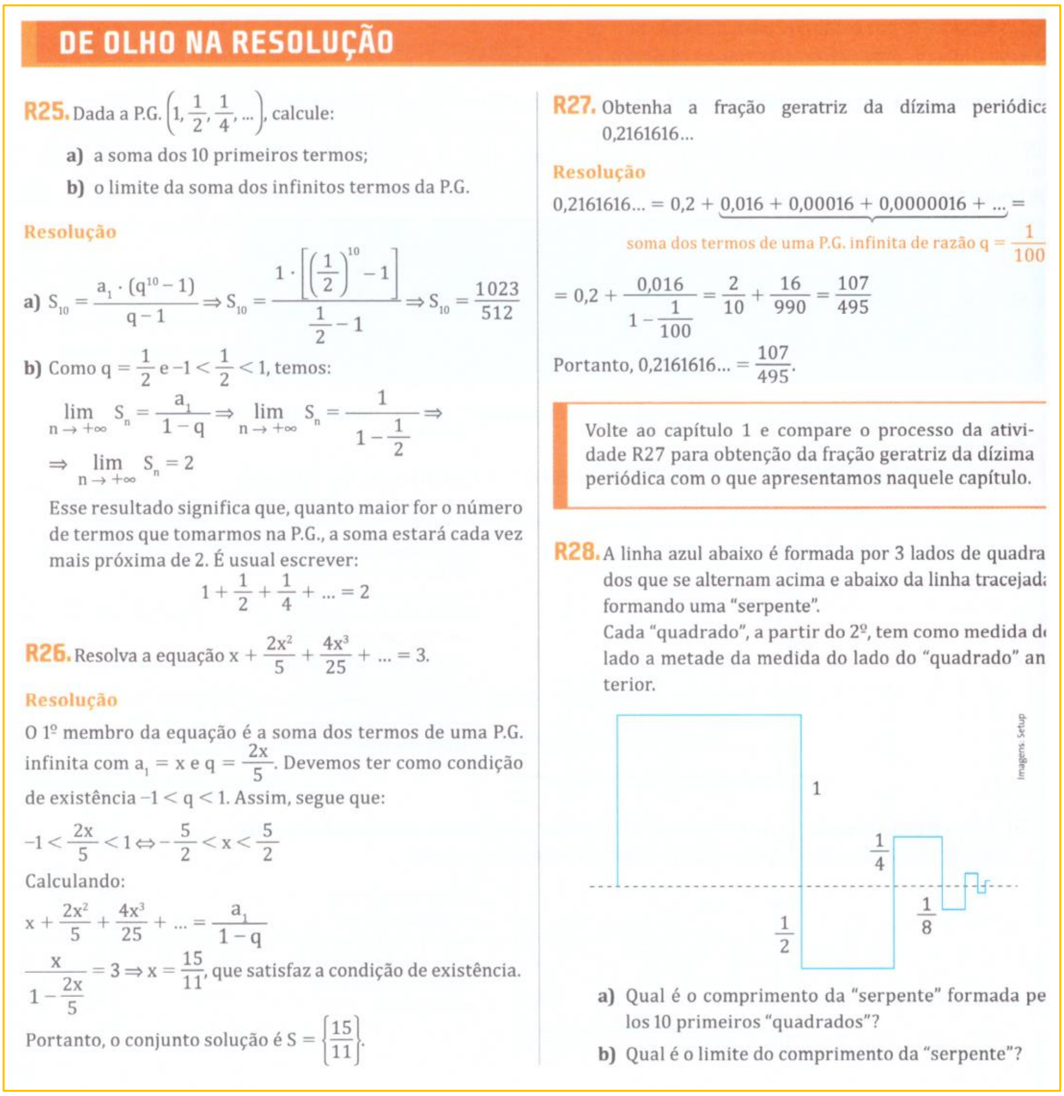
c) Seja a P.G. dada por $a_n = -2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $q = 2$.
Construindo sua representação gráfica, obtemos a figura abaixo.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 166).

Quando comparado com o **LD1**, a utilização desses exemplos poderia colaborar com a discussão do significado do conceito de *Convergência*, porém, como observamos, em nenhum momento é explicitado esse conceito muito menos dado uma justificava do porquê da escolha dessas progressões em detrimento de outras. Novamente, vemos aqui uma referência para a afirmação de Lehmann (1995) sobre o fato que em geral os exemplos sobre *séries infinitas* apresentam mais ênfase nos *critérios de convergência* do que na discussão do conceito ou até mesmo da própria *série* em si.

As autoras terminam a seção expondo quatro exercícios resolvidos, nos quais vemos que, em sua maioria, há uma preocupação maior em mostrar como se obter o valor da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita*, do que abordar a existência das *séries geométricas* em cada um dos problemas propostos. Consideramos que há uma exceção, em relação ao exercício resolvido 28, pois no item b é proposto que o estudante compreenda a formação de uma figura geométrica por meio da construção de *infinitos* quadrados (ver Figura 3.13).

Figura 3.13 – Matemática Para Compreender O Mundo: Exercícios resolvidos.



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R25. Dada a P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$, calcule:

a) a soma dos 10 primeiros termos;

b) o limite da soma dos infinitos termos da P.G.

Resolução

a) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_{10} = \frac{1023}{512}$

b) Como $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$, temos:

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$

Esse resultado significa que, quanto maior for o número de termos que tomarmos na P.G., a soma estará cada vez mais próxima de 2. É usual escrever:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... = 2$$

R26. Resolva a equação $x + \frac{2x^2}{5} + \frac{4x^3}{25} + ... = 3$.

Resolução

O 1º membro da equação é a soma dos termos de uma P.G. infinita com $a_1 = x$ e $q = \frac{2x}{5}$. Devemos ter como condição de existência $-1 < q < 1$. Assim, segue que:

$-1 < \frac{2x}{5} < 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$

Calculando:

$x + \frac{2x^2}{5} + \frac{4x^3}{25} + ... = \frac{a_1}{1 - q}$

$\frac{x}{1 - \frac{2x}{5}} = 3 \Rightarrow x = \frac{15}{11}$, que satisfaz a condição de existência.

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{15}{11}\right\}$.

R27. Obtenha a fração geratriz da dízima periódica 0,2161616...

Resolução

$0{,}2161616... = 0{,}2 + \underbrace{0{,}016 + 0{,}00016 + 0{,}0000016 + ...}_{\text{soma dos termos de uma P.G. infinita de razão } q = \frac{1}{100}} =$

$= 0{,}2 + \frac{0{,}016}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{2}{10} + \frac{16}{990} = \frac{107}{495}$

Portanto, $0{,}2161616... = \frac{107}{495}$.

Volte ao capítulo 1 e compare o processo da atividade R27 para obtenção da fração geratriz da dízima periódica com o que apresentamos naquele capítulo.

R28. A linha azul abaixo é formada por 3 lados de quadrados que se alternam acima e abaixo da linha tracejada, formando uma "serpente".
Cada "quadrado", a partir do 2º, tem como medida do lado a metade da medida do lado do "quadrado" anterior.

a) Qual é o comprimento da "serpente" formada pelos 10 primeiros "quadrados"?

b) Qual é o limite do comprimento da "serpente"?

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 166).

Porém, a resolução apresentada pelas autoras para esse item tem como foco apenas a aplicação da fórmula para obter o valor da soma dos termos de uma *progressão geométrica infinita*, podendo induzir os estudantes a uma compreensão equivocada de que obter o valor da soma é mais importante do que o entendimento dos conceitos relacionados a *séries geométricas infinitas* (ver Figura 3.14).

Figura 3.14 – Matemática Para Compreender O Mundo: Exercícios resolvidos (continuação).

Resolução

a) A sequência dos comprimentos dos "quadrados" é dada por:

$3 \cdot 1 \qquad 3 \cdot \frac{1}{2} \qquad 3 \cdot \frac{1}{4} \qquad 3 \cdot \frac{1}{8} \ldots$

Essa sequência é uma P.G. de razão $\frac{1}{2}$ cujo 10º termo será $3 \cdot \frac{1}{2^9}$.

O comprimento da "serpente" formada pelos 10 "quadrados" iniciais será obtido pelo cálculo da soma dos 10 primeiros termos da sequência.

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{3 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -6 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right) = -\frac{6}{2^{10}} + 6 = 6 - \frac{6}{1024} = \frac{6138}{1024} \simeq 5{,}99$$

b) O limite do comprimento da "serpente" será dado pela soma dos termos da P.G. infinita:

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Logo, o comprimento não poderá ser maior que 6 e nunca atingirá o valor 6.

Fonte: SMOLE e DINIZ (2016, p. 167).

Em comparação com o **LD1**, podemos afirmar que esse livro apresenta mais exemplos e exercícios com a intenção de abordar o tema, mas como detalhamos nessa seção, os conceitos de *convergência*, *infinito* e *limite* não são abordados nesse livro, o que entendemos, que possa induzir a uma compreensão equivocada das *séries geométricas infinitas* por parte dos estudantes.

3.2.3 Livro Matemática: Ciência e Aplicações

Nessa seção analisamos o livro *Matemática: Ciência e Aplicações, volume 1*, destinado aos estudantes do primeiro ano do ensino médio, escrito por Gelson Iezzi [et al.], publicado pela editora Saraiva em 2013 e aprovado para o PNLD em 2015.

Em relação a coleção *Matemática: Ciência e Aplicações* (3 volumes), o guia do PNLD 2015 apresenta a seguinte visão geral:

> A obra destaca-se pela escolha de um acentuado rigor matemático, porém adequado ao nível de ensino a que se destina.
> A abordagem adotada na coleção obedece a um padrão: as noções a serem trabalhadas são, em geral, apresentadas com exemplos ou com atividades, seguidas de uma sistematização teórica e de novos exemplos ou exercícios resolvidos. Essa metodologia, reduz as

> possibilidades de o aluno participar de modo mais autônomo e crítico no processo de aprendizagem.
> Tal forma de apresentação dos conteúdos, no entanto, é atenuada pelas boas contextualizações, que ora relacionadas à história da própria Matemática ou a outras áreas do conhecimento, ora a situações de práticas sociais. (BRASIL, 2015, p.48).

A descrição apresentada no guia do PNLD 2015 coincide com muito do que podemos observar durante as análises. Porém na seção referentes a *Séries Geométricas Infinitas*, não encontramos conteúdos relacionados à História da Matemática, muito menos relacionados a outras áreas do conhecimento.

Nesse livro os autores optaram por nomear a seção referente a *séries geométricas infinitas* como *Soma dos termos de uma P.G. infinta*, da mesma forma que o **LD2**[40]. Veremos a seguir que da mesma forma que o **LD2**, não é apresentado nesse livro o conceito de *convergência*, e os conceitos de *limite* e *infinito* são usados apenas de forma indireta, ou seja, com poucas explicações, como vimos em **LD1** e **LD2**.

Para introduzir o tema, os autores optaram por apresentar um único exemplo de uma *progressão geométrica infinita* de razão $\frac{1}{10}$ e primeiro termo igual a $\frac{1}{10}$. De forma parecida com o **LD1**, apresenta-se aos estudantes os quatro primeiros termos dessa progressão e em seguida o décimo termo, provavelmente, com a intenção de demonstrar que nessa progressão o valor de seus termos é decrescente, como afirmam os autores: "à medida que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero" (IEZZI et al., 2013, p. 219). Porém, nenhuma justificava, além dos termos que foram expostos, é apresentada para contribuir com a compreensão dessa afirmação (ver Figura 3.15).

[40] LD2 será a abreviação utilizada para o livro didático analisado na Seção 3.2.2 deste trabalho.

Figura 3.15 – Matemática: Ciência e Aplicações: Exemplo de uma P.G. infinita.

Soma dos termos de uma P.G. infinita

Seja (a_n) uma sequência dada pelo termo geral: $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos atribuir valores para n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) para caracterizar essa sequência:

$$n = 1 \rightarrow a_1 = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$n = 2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$
$$n = 3 \rightarrow a_3 = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$$
$$n = 4 \rightarrow a_4 = \frac{1}{10\,000} = 0{,}0001$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$n = 10 \rightarrow a_{10} = \frac{1}{10^{10}} = 0{,}0000000001$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Trata-se da P.G. $(0{,}1; 0{,}01; 0{,}001; 0{,}0001; \ldots)$ de razão $q = \frac{1}{10}$. É fácil perceber que, à medida que o valor do expoente n aumenta, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero.

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 219).

Após esse único exemplo, os autores introduzem o conceito de *Limite*, mas novamente, como vimos em **LD1** e **LD2**, apenas o utilizam como um símbolo para representar o fato de que os valores dos termos dessa primeira progressão tendem a zero quando a posição dos termos tende ao infinito. Da mesma forma como acontece na abordagem adotada pelos autores em **LD1** e **LD2**, não fica claro se isso representa um valor exato ou uma aproximação para o valor dos termos que não conseguimos calcular (ver Figura 3.16).

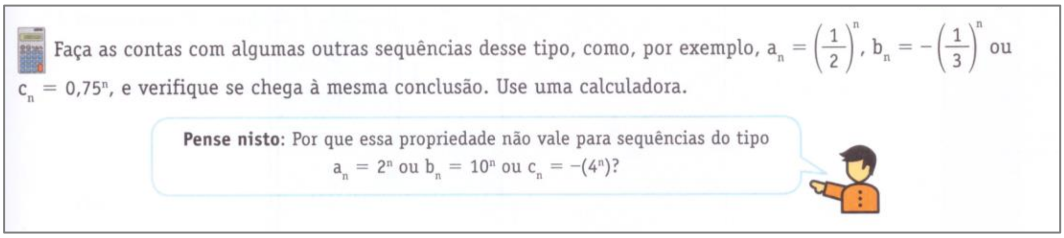
Figura 3.16 – Matemática: Ciência e Aplicações: Conceito de limite.

Dizemos, então, que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n$, quando n tende ao infinito (isto é, quando n se torna "suficientemente grande"), vale zero e representamos esse fato da seguinte maneira: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \left(\text{ou} \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0\right)$.

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 219).

Diferente do que foi visto em **LD1** e **LD2**, os autores desse livro propõem aos estudantes que, usando uma calculadora, determinem os valores dos termos de três *progressões geométricas infinitas* de razões $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $0{,}75$, e por meio desses cálculos obtenham a mesma conclusão do primeiro exemplo. Em seguida, é pedido para os estudantes refletirem sobre o fato do porque não podermos afirmar o mesmo para *progressões geométricas* de razões 2, 10 e 4 (ver Figura 3.17).

Figura 3.17 – Matemática: Ciência e Aplicações: Atividade com auxílio de uma calculadora.


Faça as contas com algumas outras sequências desse tipo, como, por exemplo, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ou $c_n = 0{,}75^n$, e verifique se chega à mesma conclusão. Use uma calculadora.

Pense nisto: Por que essa propriedade não vale para sequências do tipo $a_n = 2^n$ ou $b_n = 10^n$ ou $c_n = -(4^n)$?

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 219).

Nesse ponto, vale uma observação que consideramos importante sobre o uso de uma calculadora para realizar esses cálculos. Apesar de concordarmos com o uso de calculadoras para auxiliar na resolução de exercícios, entendemos que as mesmas possuem limitações, como a quantidade de algarismos que pode ser digitado para cada número, espaço de memória para realizar cálculos e até mesmo os tipos de operações que podem ser realizadas. Por isso, da mesma forma que Bigode (2018), entendemos que esse tipo de atividade deveria ser acompanhada de um roteiro (ou algo similar) ou uma breve explicação dos resultados esperados, pois, observa-se que em nenhum momento é dado instruções claras ao estudante do uso correto da calculadora e quais (ou quanto são) os termos que devem ser calculados para se chegar nas mesmas conclusões do exemplo anterior.

Para tornar nossa crítica mais explícita, utilizamos uma calculadora científica[41] para determinar o valor dos termos[42] a_{328} e a_{329} da *progressão geométrica* $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Ao calcular o valor de a_{328} obtivemos $1{,}828779826 \cdot 10^{-99}$, e para o valor de a_{329} a resposta obtida na calculadora foi igual a 0, provavelmente, devido a limitação de valores que a calculadora consegue processar. Esses valores poderiam induzir alguns estudantes, que repitam o experimento da mesma maneira que fizemos, a concluírem que a partir do termo de posição 329, os valores obtidos serão sempre zero ou simplesmente são sempre aproximados para zero, o que seria um equívoco na compreensão do conceito de *Limite*.

Como apenas um único exemplo foi dado anteriormente a essa experiência com a calculadora, podemos supor que a intenção dos autores é deixar a cargo dos estudantes a conclusão de que as *progressões geométricas infinitas* só são

[41] Para essa experiência foi utilizada uma calculadora científica da marca CASSIO, modelo FX-82MS.
[42] Esses valores foram determinados após diversas tentativas de se obter o menor valor possível na calculadora.

convergentes para valores de razão compreendidos entre -1 e 1, pois, essa afirmação é apresentada pelos autores no parágrafo seguinte sem nenhuma justificativa. Outra observação que podemos notar na leitura desse parágrafo, é que não há uma explicação do porquê podemos calcular somente a *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita* de razão compreendida entre -1 e 1, diferente do que foi observado no **LD2** (ver Figura 3.18).

Figura 3.18 – Matemática: Ciência e Aplicações: A razão de uma P.G. convergente.

De modo geral, pode-se mostrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$.

Nosso objetivo é calcular a soma dos infinitos termos de uma P.G. cuja razão q é tal que $-1 < q < 1$.

Para isso, precisamos analisar o que ocorre com a soma de seus n primeiros termos quando n tende ao infinito, isto é, quando n se torna arbitrariamente "grande". Temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \right), \text{ com } -1 < q < 1$$

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 219).

De forma análoga ao que foi observado em **LD1** e **LD2**, os autores desse livro utilizam a fórmula da soma dos termos de uma *progressão geométrica finita*, apresentada anteriormente, e os conceitos de limite discutidos nessa seção para deduzir a fórmula da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita*. Em seguida, esse resultado, e os principais conceitos dessa seção são sintetizados em um quadro amarelo (ver Figura 3.19).

Figura 3.19 – Matemática: Ciência e Aplicações: Soma dos termos da P.G. infinita.

Levando em conta as considerações anteriores, temos que:

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0$$

Assim, segue que:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Na P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

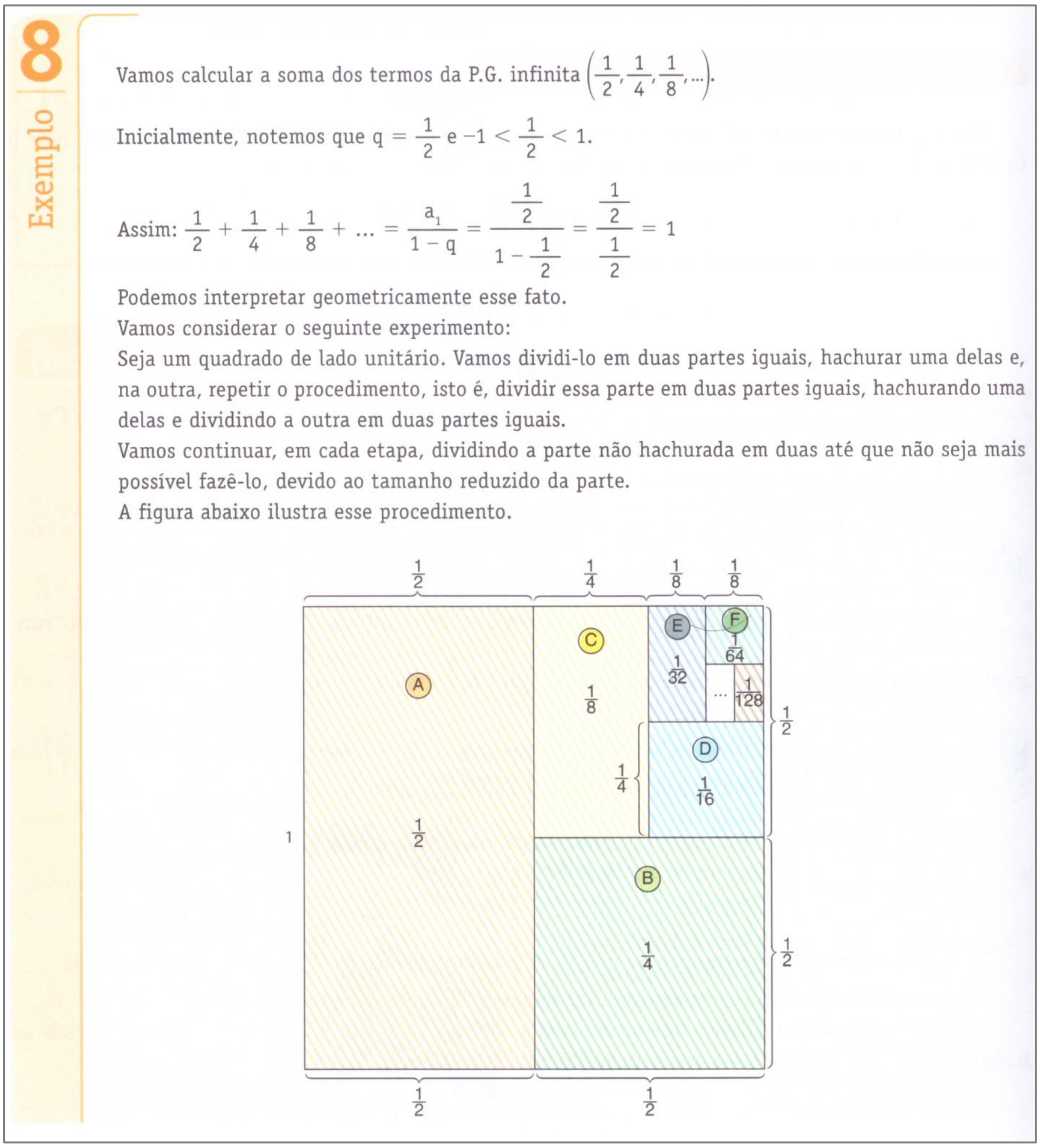
Dizemos, então, que a soma dos termos da P.G. infinita é igual a $\frac{a_1}{1 - q}$.

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 220).

Assim como o **LD2**, não encontramos nenhum problema nas definições matemáticas utilizadas até aqui, porém vemos novamente a aplicação de conceitos como o do *Limite*, sem que seja dada uma explicação mais abrangente desses conceitos ao estudante, o que pode vir a causar equívocos na compreensão dessas operações como afirma Sierpinska (1987), devido a quantidade de conceitos resumidos em poucas expressões.

Após a dedução da fórmula da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita*, os autores desse livro optaram por apresentar um único exemplo de uma *série geométrica infinita* de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo igual a $\frac{1}{2}$. Nesse exemplo, optam por apresentar uma interpretação geométrica para essa *série*, fato que não vimos em **LD1** e **LD2**. Essa *série* é representada pela soma das áreas de vários retângulos formados da seguinte maneira: um quadrado de lado 1 é dividido em dois retângulos congruentes e um deles é escolhido para realizar o mesmo procedimento de dividi-lo em dois retângulos congruentes, e assim sucessivamente, até que não seja mais possível realizar esse procedimento, “devido ao tamanho reduzido da parte [restante]” (IEZZI et al., 2013, p. 220). Dessa forma os retângulos formados possuem áreas de valores equivalentes aos termos dessa *série*, induzindo assim os estudantes a compreenderem que o valor da soma é equivalente a área do quadrado, portanto, igual a 1 (ver Figuras 3.20).

Figura 3.20 – Matemática: Ciência e Aplicações: Exemplo da soma dos termos de uma P.G. infinita.



Exemplo 8

Vamos calcular a soma dos termos da P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

Inicialmente, notemos que $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Assim: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Podemos interpretar geometricamente esse fato.
Vamos considerar o seguinte experimento:
Seja um quadrado de lado unitário. Vamos dividi-lo em duas partes iguais, hachurar uma delas e, na outra, repetir o procedimento, isto é, dividir essa parte em duas partes iguais, hachurando uma delas e dividindo a outra em duas partes iguais.
Vamos continuar, em cada etapa, dividindo a parte não hachurada em duas até que não seja mais possível fazê-lo, devido ao tamanho reduzido da parte.
A figura abaixo ilustra esse procedimento.

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 220).

A única ressalva em relação a abordagem utilizada nesse exemplo é o fato da explicação dada pelos autores, em relação ao procedimento de formação dos retângulos, dizer que devemos parar quando o retângulo restante for muito pequeno. De fato, sabemos que não é possível para os estudantes construírem retângulos tão pequenos, porém, entendemos que sem uma menção explícita de que deveríamos continuar esse procedimento de forma *infinita*, pode se induzir a uma compreensão errada quanto a *série* ser ou não *infinita*. Em seguida, os autores apresentam, dessa vez de maneira bem definida, o valor da soma dos termos dessa *progressão geométrica infinita* deixando claro para os estudantes que "a soma das áreas dos ‘infinitos’ retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado” (IEZZI et al., 2013, p. 221) (ver Figura 3.21).

Figura 3.21 – Matemática: Ciência e Aplicações: Exemplo da soma dos termos de uma P.G. infinita (continuação).

A soma das áreas dos “infinitos” retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado original, isto é:

$$\overbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}^{A} + \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}^{B} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}^{C} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}^{D} + \overbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}^{E} + \overbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}^{F} + \ldots = 1$$

ou, melhor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1$$

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 221).

Para encerrar a seção, os autores apresentam três exercícios resolvidos, que diferente do que observamos no exemplo anterior, e de forma parecida ao que foi observado nos exercícios resolvidos presentes em **LD1** e **LD2**, as resoluções apresentadas pelos autores, dão mais atenção para a utilização da fórmula da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita* do que em justificar a presença das *séries geométricas infinitas* nesses exercícios (ver Figura 3.22).

Figura 3.22 – Matemática: Ciência e Aplicações: Exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

19. Obter a fração geratriz da dízima 0,2222...

Solução:

Seja x = 0,2222.... Podemos escrever *x* na forma:

$$x = 0{,}2 + 0{,}02 + 0{,}002 + 0{,}0002 + \ldots$$

Observe que *x* representa a soma dos termos de uma P.G., infinita, cujo 1º termo é $a_1 = 0{,}2$ e a razão é $q = \frac{0{,}02}{0{,}2} = 0{,}1$.

Assim:

$$x = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0{,}2}{1-0{,}1} \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

20. Calcular o valor de: $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots$

Solução:

Trata-se de calcular a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \ldots\right)$.

Observe que $q = -\frac{1}{3}$ e $\left(-1 < -\frac{1}{3} < 1\right)$.

Assim, $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$

21. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação: $x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$

Solução:

O 1º membro da equação representa a soma dos termos da P.G. infinita $\left(x, \frac{x^2}{4}, \frac{x^3}{16}, \ldots\right)$, cujo valor é:

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{x}{1-\frac{x}{4}}$$

Daí:

$$\frac{x}{1-\frac{x}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x = 4 - x \Rightarrow x = 1$$

Notemos que, para x = 1, temos $q = \frac{x}{4} = \frac{1}{4}$ e $-1 < q < 1$.

Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 221).

Podemos observar nos fragmentos apresentados nessa seção, quando comparado com ao LD1 e o LD2, que os autores desse livro tiveram uma preocupação maior com o rigor matemático apresentado nas definições e exemplos. Porém da mesma forma, como observamos nos outros livros, não há uma preocupação dos autores em apresentar para os estudantes uma discussão acerca dos conceitos de *Convergência*, *Limite* e *Infinito*, podendo, da mesma forma como já afirmamos, levar a uma compreensão equivocada dos conceitos em torno das *Séries Geométricas Infinitas*.

3.2.4 Resumo da Análise dos Livros Didáticos

Para Bigode (2018), a partir dos anos 1970, as apostilas de cursinhos[43], que apresentam textos resumidos, "definições mastigadas e uma longa lista de exercícios mecânicos com muitos modelos resolvidos" (BIGODE, 2018, p. 180) passaram a exercer uma grande influência sobre os modelos editorias dos livros didáticos. Ainda de acordo com Bigode (2018), a adequação ao que é exigido para participar do PNLD, faz com que muitos autores acabem produzindo textos parecidos com obras aprovadas no programa anteriormente.

Como resultado desse processo de produção de livros didáticos, acabamos tendo acesso a obras muito parecidas em suas abordagens. No que diz respeito às seções sobre *Séries Geométricas Infinitas*, percebemos que os livros analisados apresentam abordagens muito parecidas, que se assemelham desde a estruturação do capítulo em *exemplos iniciais, definição e exercícios resolvidos* até o uso do conceito de *Limite* para justificar a *convergência* das *séries geométricas* sem apresentar qualquer discussão acerca desses conceitos.

Apesar de entendermos que *progressões geométricas* podem ser formadas a partir de outros objetos de estudo da matemática que vão além da geometria, como as dízimas periódicas por exemplo, nosso interesse era verificar se os exemplos iniciais poderiam se beneficiar de argumentos geométricos como visto no texto de Arquimedes.

Porém, os exemplos iniciais observados em todos os livros são puramente artificiais. Os poucos exemplos que consideramos relacionados com a geometria foram encontrados apenas após a definição da *soma dos termos de uma progressão geométricas infinita*, como o item b do exercício resolvido 28 do livro *Matemática Para Compreender O Mundo*.

Entendemos que em todos os livros analisados, a discussão acerca da *convergência* das *séries geométricas infinitas* é apresentada apenas de forma

[43] Cursos preparatórios para vestibulares ou concursos públicos.

superficial com a uma simples menção ao conceito de *Limite*. Nenhum dos livros apresentou alguma forma de discussão sobre o conceito de *Convergência*.

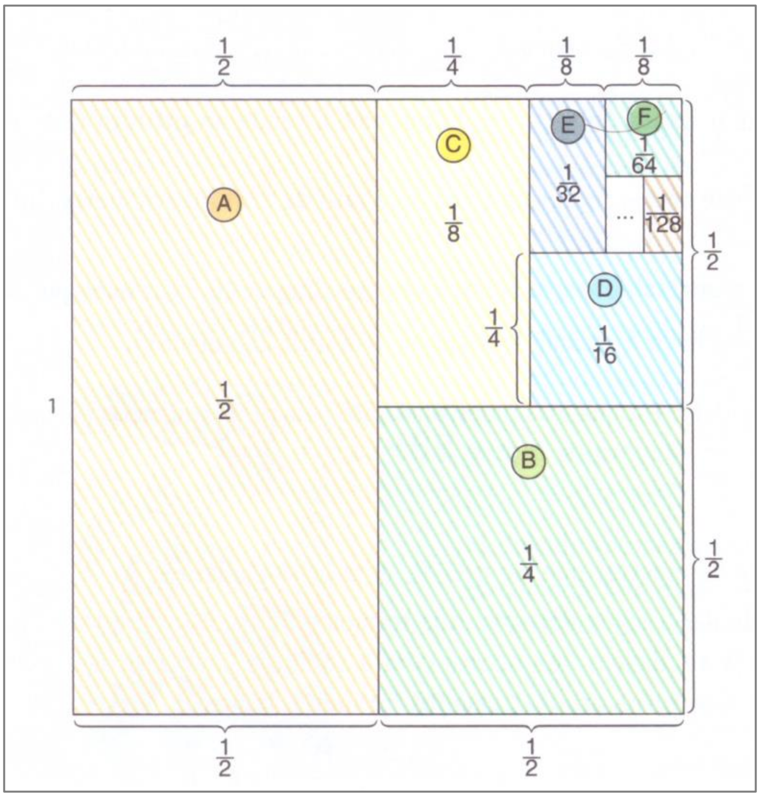
A maioria dos exercícios e exemplos resolvidos presentes nos livros analisados, apresentam resoluções que priorizam o uso da fórmula da soma dos termos de uma *progressão geométrica infinita*. A única exceção encontrada nessa análise foi uma parte da resolução dada ao exemplo 8 do livro *Matemática: Ciência e Aplicações*, no qual os autores apontam que a soma dos termos de uma *progressão geométrica infinita* de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo igual a $\frac{1}{2}$ deve ser numericamente igual a área de um quadrado de lado 1.

Portanto, entendemos que as críticas em relação ao ensino de séries apontadas por Lehmann (1995) e Sierpinska (1987), podem ser aplicadas as abordagens utilizadas pelos autores desses livros. Pois, os autores optaram por apresentar o resultado da *soma dos termos de uma progressão geométrica infinita* a partir do conceito intuitivo de *Limite*, em detrimento de uma discussão acerca do conceito de Convergência. Fato que pode causar nos estudantes uma compreensão equivocada desse tema.

3.3 Uma Possível Abordagem para o Ensino das Séries Geométricas Infinitas Por Meio da Quadratura da Parábola de Arquimedes

Dos exemplos presentes nos livros didáticos analisados, destacamos que o único que apresenta argumentos geométricos em sua resolução é o Exemplo 8 da página 220 do livro *Matemática: Ciência e Aplicações.* Nesse exemplo, os autores argumentam que é possível produzir significado para a *série geométrica infinita* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ por meio de uma interpretação geométrica na qual os termos dessa *série* representam o valor da área de retângulos construídos internamente a um quadrado de lado 1 (ver Figura 3.23).

Figura 3.23 – Matemática: Ciência e Aplicações: Exemplo 8.



Fonte: IEZZI et al. (2013, p. 220).

A partir da observação dessa figura, os autores afirmam que a soma das áreas desses retângulos deve ser igual a área do quadrado, ou seja, que o valor da *série geométrica* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ deve ser igual a 1. Entendemos que essa afirmação só é justificada a partir do conceito de *Limite*, como apresentado, de forma abreviada, pelos autores desse livro.

Silva (2011), em seu estudo sobre a noção de *Limite* no estudo das *progressões geométricas infinitas* no ensino médio, afirma que uma das dificuldades apontadas pelos estudantes para conceber que essa soma deve ser igual a 1, está diretamente relacionada a concepção do conceito do *Infinito* como *infinito potencial*.

Ao conceberem a *série geométrica* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ a partir da concepção de *infinito potencial*, os estudantes afirmam que a soma se aproxima de 1, mas nunca atinge esse valor. Essa concepção do *Infinito* coincide com as nossas observações aos argumentos apresentados por Arquimedes na Proposição 22 do seu texto sobre a *Quadratura da Parábola*. No enunciado dessa proposição, Arquimedes afirma que a soma das áreas dos triângulos construídos internamente ao segmento da parábola, de forma ilimitada, é menor do que a área da parábola.

A partir da concepção de *infinito atual*, hoje, compreendemos que a *soma infinita* das áreas dos triângulos preenche completamente a área do segmento de parábola. Mas, como afirma Roque (2019), para Arquimedes, a concepção diferente da atual sobre o *Infinito*, não foi impeditivo para determinar a área do segmento de parábola a partir da soma dos termos de uma *progressão geométrica finita*.

Por isso, o que queremos apresentar nesta seção é uma possível exposição para a afirmação que o valor da *série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ é igual a 1, por meio de argumentos geométricos semelhantes aos apresentados por Arquimedes nas Proposições 23 e 24 do texto sobre a *Quadratura da Parábola*, de forma que essa exposição possa contribuir para a compreensão da *convergência* dessa *série* sem o uso do conceito de *Limite*.

Para isso, vamos retomar a definição de *convergência* para *séries infinitas* presente nos livros atuais de *Cálculo Diferencial e Integral* e enunciada por nós na **Definição 1.7**: *Dado uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, *sendo* $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, *chamada de* n*-ésima* ***soma parcial****, se a sequência* $\{s_n\}$ *for convergente, ou seja, se existe um número real* S *tal que* s_n *tende a* S, *quando* n *tende ao infinito, dizemos que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *é* ***convergente*** *e o número* S *é chamado de* ***soma*** *dessa série.*

Da definição anterior, para demonstrarmos que a *série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ é *convergente*, precisamos mostrar que a sequência $\{s_n\}$ formada pelas *somas parciais* dessa série é *convergente* e tende a 1 quando n tende ao infinito.

Para utilizar argumentos semelhantes aqueles apresentados por Arquimedes, devemos construir a sequência $\{s_n\}$ de forma geométrica. Para isso, considere um retângulo de área 1. Observe que este retângulo pode ser dividido, por um segmento na vertical, em dois retângulos congruentes de área $\frac{1}{2}$. Tomando um desses dois retângulos de área $\frac{1}{2}$, podemos dividi-lo da mesma forma em outros dois retângulos congruentes de área $\frac{1}{4}$. Se tomarmos um desses retângulos de área $\frac{1}{4}$, podemos novamente, da mesma forma, dividi-lo em outros dois retângulos congruentes de área $\frac{1}{8}$ (ver Figura 3.24).

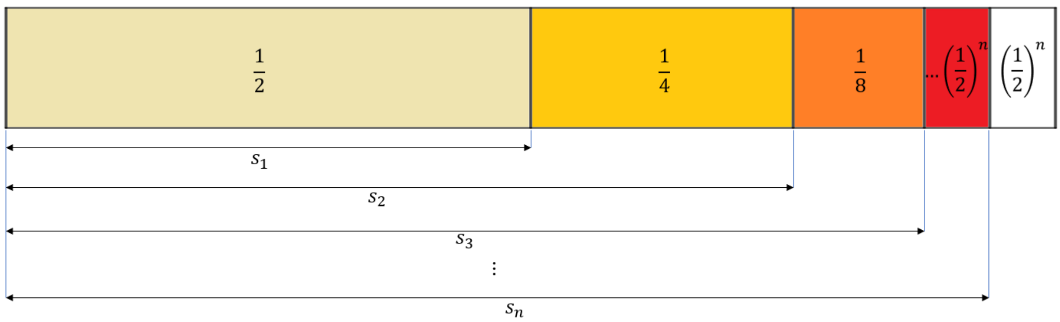
Figura 3.24 – Procedimento da divisão do retângulo de área 1 realizado três vezes.

Fonte: O autor (2020).

Dessa forma, se repetirmos o mesmo procedimento n vezes, ao final iremos obter dois retângulos congruentes de área $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Para construir a sequência $\{s_n\}$, considere que s_n é igual a área de um retângulo equivalente a soma das áreas dos n primeiros retângulos obtidos a partir do procedimento descrito nos parágrafos anteriores, ou seja, $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, ..., $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (ver Figura 3.25).

Figura 3.25 – Representação da sequência $\{s_n\}$.



Fonte: O autor (2020).

Observe que após tomarmos os n primeiros retângulos para formar o retângulo de área s_n, resta uma área igual a $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ dentro do retângulo maior. Em outras palavras, a partir da representação geométrica, podemos observar que a área s_n somada a área $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ é equivalente a área do retângulo maior, ou seja, $s_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

A equação $s_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ representa uma forma possível para calcular as somas dos n primeiros termos da progressão geométrica $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$. Forma que é equivalente a enunciada por Arquimedes na Proposição 23 (ou ***Teorema 2.1***)[44].

Novamente, a partir da construção geométrica da sequência $\{s_n\}$, podemos afirmar que essa sequência é crescente e limitada pela área 1 do retângulo maior. Algebricamente, podemos verificar a validade das afirmações anteriores a partir dos fatos que $s_{n+1} = s_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ e $s_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$, o que implica em $s_{n+1} \geq s_n$ e $s_n \leq 1$ para todo $n > 1$.

Assim, para demonstrar que de fato a sequência $\{s_n\}$ tende a 1 quando n tende ao infinito, vamos mostrar que não existe um número real $L < 1$ tal que $s_n < L$ para todo $n > 1$.

Vamos começar supondo, por absurdo, que exista um número real $L < 1$ tal que $s_n < L$ para todo $n > 1$.

Podemos representar esse fato geometricamente, considerando um retângulo de área L, maior do que os retângulos da sequência $\{s_n\}$, inscrito em um retângulo maior de área 1. Da construção geométrica, devemos ter uma área D que representa a diferença entre o retângulo maior de área 1 e o retângulo de área L. Por meio dos argumentos apresentados por Arquimedes na demonstração da Proposição 24 (ou ***Teorema 2.2***), podemos afirmar que deve existir um retângulo de área $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, onde k é um número natural, tal que sua área é menor do que a área D (ver Figura 3.26).

[44] No Apêndice B deste trabalho, apresentamos uma possível generalização do ***Teorema 2.1***, de forma algébrica, que pode ser utilizado para obter a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q, com $q \neq 1$.

Figura 3.26 – Representação da área $\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Fonte: O autor (2020).

Considerando a representação geométrica do retângulo de área s_k, das observações anteriores, a soma de sua área com o retângulo de área $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ deveria ser menor do que 1, ou seja, $s_k + \left(\frac{1}{2}\right)^k < 1$, o que é um absurdo, pois já havíamos demonstrado que $s_k + \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$. Algebricamente, para verificar a contradição, poderíamos escrever que $D = 1 - L$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^k < D$. Dado que $s_k + \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$ implica em $\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - s_k$, deveríamos ter $1 - s_k < 1 - L$, que é equivalente a $s_k > L$, ou seja, um absurdo, dado a hipótese que $s_n < L$ para todo $n > 1$.

Portanto, a única possibilidade que resta é a dos termos que formam a sequência $\{s_n\}$ tenderem a 1 quando n tende ao infinito. Que por sua vez, implica, da **Definição 1.7,** que a *série geométrica* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ é *convergente* e sua *soma* é igual a 1.

Acreditamos que essa argumentação, ou outras que possam ser realizadas de maneira análoga, possam contribuir para o ensino da *Convergência* das *Séries Geométricas Infinitas* sem o uso de símbolos ou conceitos, como o de *Limite*, derivados da teoria do *Cálculo Diferencial e Integral*.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas de Sierpinska (1987), Lehmann (1995), Silva (2011) e Lorin (2018) apontam obstáculos epistemológicos enfrentado pelos estudantes ao se depararem com somas infinitas que se assemelham as mesmas dificuldades encontradas por matemáticos ao longo da história. Por isso, o objetivo deste trabalho foi buscar na História da Matemática possíveis potenciais pedagógicos para o ensino das *Séries Geométricas Infinitas*.

Ao longo da pesquisa nos deparamos com diversos textos históricos relacionados ao assunto, mas muitos deles escritos em uma língua de difícil compreensão. Dentre aqueles que conseguimos analisar, escolhemos o texto sobre a *Quadratura da Parábola* por entendermos que o modo como Arquimedes fez uso das séries geométricas se assemelha às dificuldades apontadas pelos autores citados.

A análise dos outros textos, que foram apresentados na Seção 1.1 desse trabalho, contribuíram para uma compreensão melhor do desenvolvimento histórico dos conceitos que envolvem as *Séries Infinitas*. Da mesma forma, esses textos, também se mostraram essenciais para a análise dos argumentos apresentados pelo Arquimedes sobre a *Quadratura da Parábola*.

Em relação ao texto da *Quadratura da Parábola*, durante as nossas pesquisas, não encontramos nenhum outro trabalho dedicado a reproduzir o feito de Arquimedes apenas com argumentos geométricos contemporâneos. Por isso, a opção de apresentar um conjunto de demonstrações contemporâneas, em substituição às vinte e uma primeiras apresentadas por Arquimedes, se deu para que fosse possível compreender o uso da *série geométrica* presente nas proposições 22 a 24. Desta forma, entendemos que as demonstrações apresentadas neste trabalho possam contribuir para pesquisas futuras relacionadas ao texto de Arquimedes.

A abordagem por meio dos argumentos de Arquimedes apresentada no exemplo da Seção 3.3 deste trabalho, em contraposição a forma como a convergência das séries geométricas infinitas são apresentadas nos livros didáticos, mostra que é possível, pelo menos nesse exemplo apresentado, utilizar de argumentos puramente geométricos para demonstrar a convergência de uma série geométrica. Ainda que tenhamos utilizado uma linguagem algébrica para justificar as demonstrações desse exemplo, o fato de não usarmos em nenhum momento a noção de *Limite* demonstra que não é preciso o uso de conceitos derivados do *Cálculo Diferencial e Integral* para o ensino desse tema.

Recentemente, o governo do estado de São Paulo aprovou novas diretrizes para o Ensino Médio, apresentadas no documento intitulado Currículo Paulista – Etapa Ensino Médio (2020). Esse documento, que tem como base as habilidades e competências definidas pela BNCC, estabelece os itinerários formativos que são

> um conjunto de unidades curriculares que possibilita ao estudante aprofundar e ampliar as aprendizagens desenvolvidas na formação geral básica, em uma ou mais áreas do conhecimento, permitindo que vivencie experiências educativas associadas à realidade contemporânea e que promova a sua formação pessoal, profissional e cidadã. (SÃO PAULO, 2020, p. 196).

Os estudos históricos-epistemológicos associados à nossa pesquisa, vai de encontro ao desenvolvimento das habilidades relacionadas *ao pensar e fazer criativo* do itinerário formativo da área de Matemática e suas Tecnologias, previsto no Currículo Paulista (2020), pois, para o desenvolvimento dessa habilidade espera-se que

> o estudante participa da prática de idealizar projetos criativos com base nos conceitos fundamentais da Matemática e no uso de diferentes linguagens, identificar e aprofundar um tema ou problema para elaborar, apresentar e difundir a ação. (SÃO PAULO, 2020, p. 209).

Portanto, acreditamos que esse trabalho pode contribuir para o campo da *Educação Matemática* como instrumento de utilização da história da matemática no ensino e aprendizagem das *Séries Geométricas Infinitas*, pelo menos em relação a discussão dada ao conceito de *Convergência* no Ensino Básico. Da mesma forma, esse trabalho contribuiu para a nossa formação acadêmica, não só em relação aos conhecimentos adquiridos durante a pesquisa, mas também em relação a percepção da necessidade de se discutir significados de conceitos utilizados na matemática de maneira menos superficial com os estudantes.

Além disso, gostaríamos de salientar que mais pesquisas nessa área são necessárias. A partir deste trabalho, poderíamos sugerir que se realizem estudos de caso para verificar a efetividade de nossa proposta, assim como, também a realização de outras pesquisas para consolidar modelos que se beneficiem de argumentos geométricos e/ou históricos para o ensino das *Séries Geométricas Infinitas*.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Regina de Cassia Manso de. **Arquimedes e a Quadratura da parábola – Valor Pedagógico das Provas Arquimedeanas**. V COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 26-30 jul. 2010, Recife. 2010.

ASSIS A. K. T.; MAGNAGHI C. P. **O Método de Arquimedes: Análise e Tradução Comentada**. Montreal: Apeiron, 2019.

BAGNI, Giorgio T. **Infinite Series From History to Mathematics Education**. Itália: University of Udine, 2009.

BARLOW, Peter. **A New Mathematical and Philosophical Dictionary**. London: Printed by Whittingham and Rowland, 1814.

BIGODE, Antonio José Lopes**. Livro didático e pesquisa em educação Matemática:** A perspectiva de um professor que também é pesquisador, antes de ser um autor. Revista de História da educação Matemática, v. 4, p. 154-183, 2018.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em 24 ago. 2020.

______. **PNLD 2015: Matemática – Guia de Livros Didáticos – Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 108p. 2014. Disponível em <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico>. Acesso em 24 ago. 2020.

______. **PNLD 2018: Matemática – Guia de Livros Didáticos – Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 122p. 2017. Disponível em <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-livro-didatico>. Acesso em 24 ago. 2020.

______. **Portal do FNDE – Programas do Livro**. Brasília: Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, Ministério da Educação, 2017. Disponível em <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro>. Acesso em 24 ago. 2020.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica**. 3ª ed. São Paulo: Pretince Hall, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FERRARO, Giovanni. **The Rise and Development of the Series up to the Early 1820s**. Itália: Springer, 2008.

HEATH, T. L. **The Works of Archimedes**. Cambridge: At The University Press, 1897.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: Ciência e Aplicações, volume 1**: ensino médio / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. 7ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

LEHMANN, Joel P. **Converging Concepts of Series: Learning from History**. In: SWETZ, Frank et al. Learn from the Masters. Estados Unidos: The Mathematical Associantion of America, 1995. p. 161-180.

LINS, Romolo Campos. **Epistemologia, História e Educação Matemática: Tornando mais Sólidas as Bases da Pesquisa**. Revista de Educação Matemática da SBEM, São Paulo, ano 1, n. 1, p. 75-91, set. 1993.

LORIN, João Henrique. **Relações entre Teoremas-em-ação e obstáculos epistemológicos do conceito de infinito**. 2018. 181f. Tese (doutorado). Universidade de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Londrina, 2018

LUCHETTA, Valéria Ostete Jannis. **Uma possível produção de significados para as séries infinitas no livro Elementos de Álgebra de Leonhard Euler.** 2017. 244f. Tese (doutorado). Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Rio Claro, 2017.

MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Ângela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MOISE, Edwin E. **Elementary Geometry – From An Advanced Standpoint**. 2ª ed. Estados Unidos: Addisson-Wesley Publishing Company, Inc., 1974.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON E. F. **Archimedes of Syracuse**. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews. Scotland, Jan. 1999. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Archimedes/>. Acesso em: 16 ago. 2020.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON E. F. **Euclid of Alexandria**. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews. Scotland, Jan. 1999. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/>. Acesso em: 16 ago. 2020.

______. **François Viète**. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews. Scotland, Jan. 2000. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete/>. Acesso em: 16 ago. 2020.

______. **Gregorius Saint-Vincent**. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews. Scotland, Nov. 2010. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Saint-Vincent/>. Acesso em: 16 ago. 2020.

______. **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews. Scotland, Out. 1988. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/>. Acesso em: 16 ago. 2020.

______. **Gottfried Wilhelm von Leibniz**. School of Mathematics and Statistics. University of St Andrews. Scotland, Out. 1988. Disponível em <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/>. Acesso em: 16 ago. 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma Visão Crítica, Desfazendo Mitos e Lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Pitombeiro. **Tópicos de História da Matemática**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

SÃO PAULO. **Currículo Paulista – Etapa Ensino Médio**. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, 2020. Disponível em <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/>. Acesso em: 30 set. 2020.

SIERPINSKA, Anna. **Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits**. In: Education Studies in Mathematics. Vol. 18. Nº 4. p. 371-397. Polônia: Springer, 1987.

SILVA, Camila de Oliveira da. **Um Estudo Sobre a Noção de Limite de Progressões Geométricas Infinitas com Alunos de Ensino Médio**. 2011. 183f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Campo Grande, 2011.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Para Compreender O Mundo 1**. São Paulo: Saraiva, 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de Souza; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. #**Contato Matemática, 1° ano**. São Paulo: FTD, 2016

STEWART, James. **Cálculo: volume 2**. Tradução de Helena Maria Ávila de Castro. Revisão técnica de Ricardo Miranda Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

Apêndice A – CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA PLANA

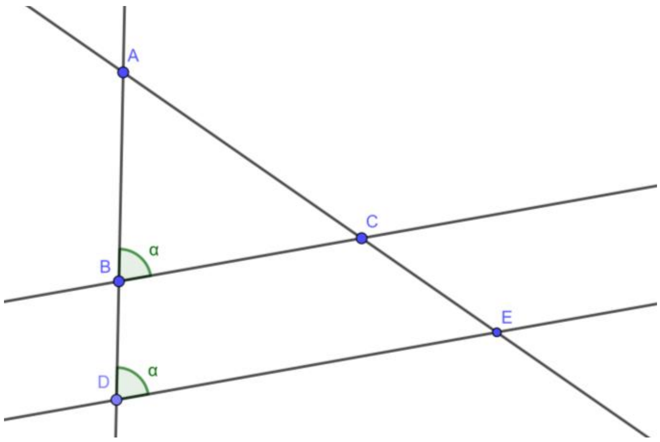
Apresentamos neste apêndice, as definições e teoremas sobre retas paralelas e sobre os critérios AA e LAL de semelhança de triângulos utilizadas neste trabalho. Os mesmos podem ser encontrados em Moise (1974).

Nesse apêndice, assim como no Capítulo 2 deste trabalho, estamos considerando válido todos os axiomas e postulados da *Geometria Plana Euclidiana*, incluindo o *Postulado LAL de congruência de triângulos*, o qual afirma que: *dados dois triângulos, se dois lados de um dos triângulos e o ângulo entre esses lados são congruentes às respectivas partes correspondentes do outro triângulo então esses triângulos são congruentes.*

Definição A.1 – Duas retas são chamadas de **paralelas** se não existem pontos comuns a essas duas retas.

Teorema A.1 (Retas Paralelas) – Se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são retas distintas e os pontos $D \neq B$ e $E \neq C$ pertencem a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}E$ são congruentes então as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são paralelas (ver Figura A.1).

Figura A.1 – Teorema A.1.



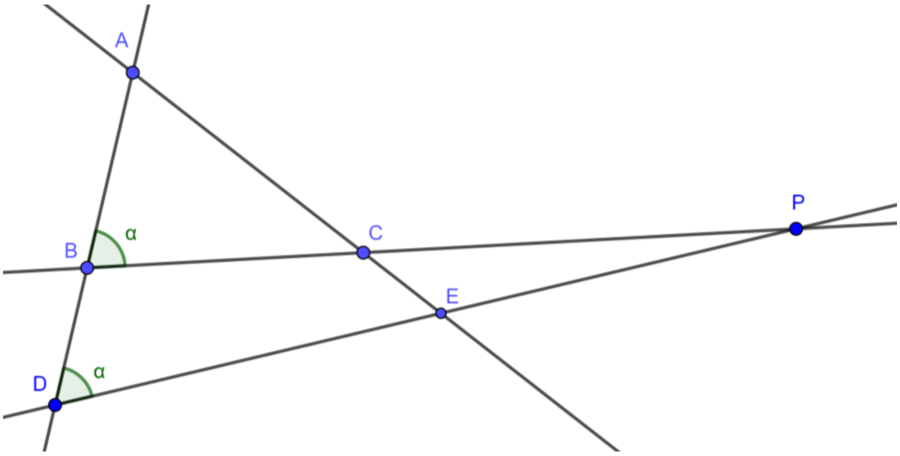
Fonte: O autor (2020).

Demonstração

Considere cinco pontos distintos A, B, C, D e E tais que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ são retas distintas e os pontos $D \neq B$ e $E \neq C$ pertencem a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}E$ são congruentes.

Queremos demonstrar que as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são paralelas. Para isso, vamos supor, por absurdo, que as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ não são paralelas, ou seja, da **Definição A.1**, existe pelo menos um ponto P que pertence as essas duas retas. Logo, os pontos B, D e P formam um triângulo (ver Figura A.2).

Figura A.2 – Demonstração do Teorema A.1.



Fonte: O autor (2020).

Da soma dos ângulos internos do triângulo BDP, temos que $m(D\hat{B}P) + m(B\hat{D}P) + m(B\hat{P}D) = 180°$. Como $m(D\hat{B}P) = 180° - m(A\hat{B}C)$, segue que $180° - m(A\hat{B}C) + m(B\hat{D}P) + m(B\hat{P}D) = 180°$ que é equivalente a $m(A\hat{B}C) = m(B\hat{D}P) + m(B\hat{P}D)$. Como, por hipótese, $m(B\hat{D}P) = m(A\hat{D}E)$, temos que $m(A\hat{B}C) = m(A\hat{D}P) + m(B\hat{P}D)$, o que implica em $m(A\hat{B}C) > m(A\hat{D}E)$, o que é uma contradição, pois $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}E$ são congruentes. Portanto, as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são paralelas. ■

Definição A.2 – Dados dois triângulos ABC e DEF, se os ângulos correspondentes entre esses triângulos são congruentes, ou seja, $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$ e $m(\hat{C}) = m(\hat{F})$, e, além disso, os lados correspondentes entre esses triângulos são proporcionais, ou seja, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, então dizemos que os triângulos ABC e DEF são **semelhantes**.

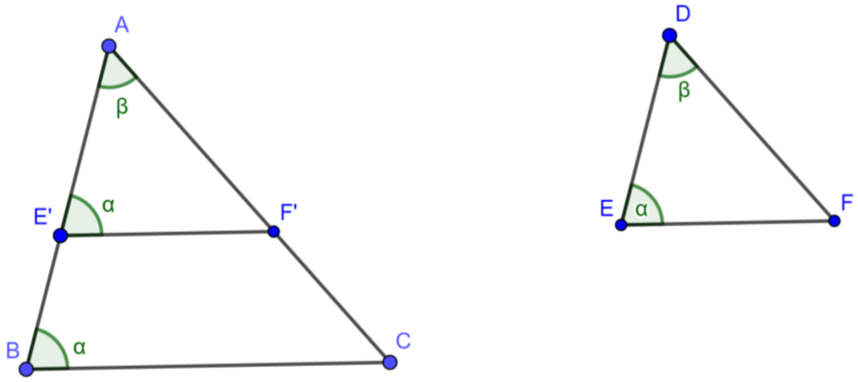
Teorema A.2 (Critério AA de semelhança de triângulos) – Dados dois triângulos ABC e DEF, se pelo menos dois pares de ângulos correspondentes desses triângulos são congruentes então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Demonstração

Considere dois triângulos ABC e DEF, tais que esses triângulos possuem dois ângulos correspondentes congruentes, digamos $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$ e $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$. Logo, $m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{A}) - m(\hat{B}) = 180° - m(\hat{D}) - m(\hat{E}) = m(\hat{F})$.

Considere pontos E' e F' pertencentes as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tal que $AE' = DE$ e $AF' = DF$. O triângulo $AE'F'$ assim definido é congruente ao triângulo DEF (ver Figura A.3).

Figura A.3 – Demonstração do Teorema A.2.



Fonte: O autor (2020).

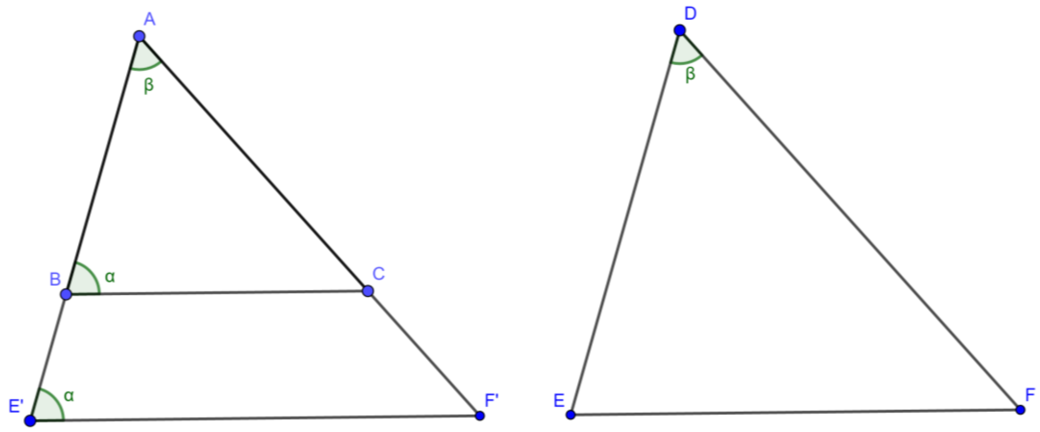
Como os ângulos $A\widehat{E'}F'$ e $A\hat{B}C$ são congruentes, do ***Teorema A.1***, temos que as retas $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Logo, pelo *Teorema de Thales*, temos que $\frac{AE'}{AB} = \frac{AF'}{AC}$, ou seja, $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$. De forma análoga, é possível demonstrar que $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$. Portanto, como os ângulos correspondentes dos triângulos ABC e DEF são congruentes, pois $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$, $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$ e $m(\hat{C}) = m(\hat{F})$, e os lados correspondentes desses triângulos são proporcionas, pois $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, da **Definição A.2**, podemos afirmar que os triângulos ABC e DEF são semelhantes. ■

Teorema A.3 (Critério LAL de semelhança de triângulos) – Dados dois triângulos ABC e DEF, se os ângulos $B\hat{A}C$ e $E\hat{D}F$ são congruentes e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ então os triângulos ABC e DEF são semelhantes.

Demonstração

Considere dois triângulos ABC e DEF, tais que os ângulos $B\hat{A}C$ e $E\hat{D}F$ são congruentes e $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. Considere pontos E' e F' pertencentes as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente, tais que $AE' = DE$ e os ângulos $A\widehat{E'}F'$ e $A\hat{B}C$ são congruentes (ver Figura A.4).

Figura A.4 – Demonstração do Teorema A.3.



Fonte: O autor (2020).

Do ***Teorema A.1***, as retas $\overleftrightarrow{E'F'}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas. Como $AE' = DE$, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ e do *Teorema de Thales*, $\frac{AB}{AE'} = \frac{AC}{AF'}$, então temos que $AF' = DF$. Logo, os triângulos $AE'F'$ e DEF são congruentes, ou seja, os ângulos $D\hat{E}F$ e $A\hat{B}C$ são congruentes. Portanto, como os triângulos ABC e DEF, possuem dois pares de ângulos correspondentes congruentes, pelo ***Teorema A.2***, temos que esses triângulos são semelhantes. ■

Apêndice B – GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA 2.1

Neste apêndice, apresentamos uma possível generalização do ***Teorema 2.1 (Soma dos termos da progressão geométrica de Arquimedes)*** baseado nos argumentos de Arquimedes encontrados em Heath (1987).

Teorema B.1 – Se $\{a_n\}$ é uma progressão geométrica de razão q, com $q \neq 1$, então existe um número real p tal que $\sum_{n=1}^{k} a_n + p \cdot a_k = (1+p) \cdot a_1$, onde $p = \frac{q}{1-q}$.

Demonstração

Considere $\{a_n\}$ uma progressão geométrica de razão q. Da **Definição 1.5**, temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ para todo $n \geq 1$. Considere p um número real tal que $p = \frac{q}{1-q}$. Observe que $1 + p = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$, o que implica em $(1+p) \cdot q = p$. Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, temos que $(1+p) \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ ou $a_{n+1} + p \cdot a_{n+1} = p \cdot a_n$, para todo $n \geq 1$.

Logo, $a_2 + p \cdot a_2 = p \cdot a_1$, $a_3 + p \cdot a_3 = p \cdot a_2$, assim sucessivamente até $a_k + p \cdot a_k = p \cdot a_{k-1}$.

Somando membro a membro os termos dessas equações, obtemos, $a_2 + a_3 + \cdots + a_k + p \cdot a_2 + p \cdot a_3 + \cdots + p \cdot a_k = p \cdot a_1 + p \cdot a_2 + \cdots + p \cdot a_{k-1}$, que é equivalente a $a_2 + a_3 + \cdots + a_k + p \cdot a_k = p \cdot a_1$. Portanto, somando o termo a_1 a ambos os membros dessa última equação, temos que $\sum_{n=1}^{k} a_n + p \cdot a_k = (1+p) \cdot a_1$, onde $p = \frac{q}{1-q}$. ■

Desse último resultado, ao isolarmos a soma $\sum_{n=1}^{k} a_n$ obtemos a expressão $\sum_{n=1}^{k} a_n = (1+p) \cdot a_1 - p \cdot a_k$ que é equivalente ao resultado soma dos k primeiros termos de uma progressão geométrica obtido no ***Teorema 1.1***. Pois, sabendo que $p = \frac{q}{1-q}$, e $a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$, temos que a expressão $\sum_{n=1}^{k} a_n = (1+p) \cdot a_1 - p \cdot a_k$ é equivalente a $\sum_{n=1}^{k} a_n = \frac{1}{1-q} \cdot a_1 - \frac{q}{1-q} \cdot a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$.

A partir desse resultado também é possível obter o valor da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para $0 < q < 1$, pois, dado que $\sum_{n=1}^{k} a_n = (1+p) \cdot a_1 - p \cdot a_k$ e $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = 0$, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (1+p) \cdot a_1 = \frac{a_1}{1-q}$, que coincide com o valor obtido no ***Teorema 1.2***.