Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Semigrupos numéricos com multiplicidade fixada e proposta de atividade para o ensino médio com utilização do GeoGebra

por

Ana Luíza Feitosa Rodrigues

Orientador: Matheus Bernardini de Souza

Brasília
2020

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Semigrupos numéricos com multiplicidade fixada e proposta de atividade para o ensino médio com utilização do GeoGebra

por

Ana Luíza Feitosa Rodrigues

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para obtenção do grau de

MESTRA EM MATEMÁTICA

Brasília, 30 de setembro de 2020.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Matheus Bernardini de Souza - FGA/UnB - Orientador

Profa. Dra. Rafaela Fernandes do Prado - IFB - Membro

Prof. Dr. Vinicius de Carvalho Rispoli - FGA/UnB - Membro

Prof. Dr. Victor do Nascimento Martins - DMPA/CCENS/UFES - Suplente

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Fs

Feitosa Rodrigues, Ana Luíza
Semigrupos numéricos com multiplicidade fixada e proposta de atividade para o ensino médio com utilização do GeoGebra / Ana Luíza Feitosa Rodrigues; orientador Matheus Bernardini de Souza. -- Brasília, 2020.
66 p.

Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática) -- Universidade de Brasília, 2020.

1. semigrupos numéricos. 2. multiplicidade. 3. conjunto de Apéry. 4. vetor de Kunz. 5. gênero. I. Bernardini de Souza, Matheus, orient. II. Título.

Aos meus pais e ao Samuel

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por sua graça abundante, sua misericórdia e por ser soberano em todas as esferas.

Aos meu pais, Kátia e Sidnei, que foram sempre meus grandes apoiadores, que lutaram para me dar uma educação de qualidade mesmo em situações adversas. Vocês são o motivo de tudo isso, obrigada por todos os anos de dedicação.

Ao Samuel, pelo apoio incondicional, por não ter me deixado desistir de fazer o exame de admissão do PROFMAT, pelas noites de companhia enquanto eu estudava. Você é minha melhor escolha.

Aos meus avós, pelo apoio financeiro, emocional e pelo apoio em orações. Vocês são a expressão do amor de Deus na Terra.

Aos meus irmãos, Sidnei Júnior e Murilo. Vocês são o motivo pelo qual busco ser melhor todo dia. Obrigada por alegrarem minha vida.

Ao professor Matheus Bernardini por toda sua dedicação e compromisso. Agradeço em primeiro lugar pela paciência, pelo tempo demandado, pelo conhecimento compartilhado, pelas sugestões e por não ter me deixado desistir mesmo em dias de extremo cansaço. Você é um exemplo de professor e pessoa.

Aos demais membros banca examinadora, formada pelos professores Rafaela Fernandes do Prado, Vinicius de Carvalho Rispoli e Victor do Nascimento Martins, por terem aceitado avaliar meu trabalho.

A todos os professores e colegas do PROFMAT, pela parceria durante o curso, pelas boas risadas, pela união da turma e pela troca de conhecimento constante.

A minha família, que sempre esteve na torcida pelo meu sucesso, tanto em dias de vitória, quanto em dias de derrota.

Aos meus amigos, por todos esses anos de amizade, pelas alegrias e pela força que vocês sempre me passaram. Obrigada por acreditarem em mim.

Resumo

O objetivo deste trabalho é analisar propriedades de semigrupos numéricos e seus invariantes focando nos casos em que a multiplicidade está fixada. Existe uma bijeção entre o conjunto de semigrupos numéricos com multiplicidade m fixada e um subconjunto $\mathbb{Z}^{m-1}$, a qual é obtida utilizando o conjunto de Apéry e o vetor de Kunz do semigrupo numérico. Para multiplicidades pequenas $(2, 3$ e $4)$, estudam-se quais outros invariantes fixados podem determinar um único ponto inteiro que está associado a um semigrupo numérico. Por fim foram propostas atividades para o ensino médio inspiradas nos conceitos desenvolvidos e utilizando o GeoGebra.

Palavras-chave: Semigrupos Numéricos; Multiplicidade; Conjunto de Apéry; Vetor de Kunz; Gênero; Raio; Número de Frobenius.

Abstract

The main goal of this work is to analyze properties of numerical semigroups and their invariants, focusing on cases where multiplicity is fixed. There is a bijection between the set of numerical semigroups with fixed multiplicity m and a subset of $\mathbb{Z}^{m-1}$, which is obtained using the Apéry set and the Kunz-coordinate vector of the numeric semigroup. For small multiplicities $(2, 3$ and $4)$, we study which other fixed invariants can determine a unique integer point that is associated to a numeric semigroup. Finally, some activities were proposed for high school students, inspired by developed concepts and using GeoGebra.

Keywords: Numerical Semigroups; Multiplicity; Apéry Set; Kunz-coordinate vector; Genus; Ratio; Frobenius Number.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos semigrupos numéricos, que são subconjuntos de $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \cdots\}$ fechados para adição, que contêm o zero e que têm complemento finito em $\mathbb{N}_0$.

Semigrupos numéricos são estudados desde o final do século 19 por alguns matemáticos. Em 1884, Sylvester [1] resolve o problema das moedas de Frobenius, que consiste em encontrar o maior número inteiro que não pertence ao semigrupo numérico, para o caso de duas moedas. Esse problema e diversos outros da teoria de semigrupos numéricos são de fácil entendimento, mas não de fácil resolução.

Em 2002, Rosales *et al.* [2] estudam sobre semigrupos numéricos com multiplicidade fixada e verificam que as coordenadas do vetor de Kunz devem satisfazer um sistema de inequações. Em 2005, Rosales [3] trabalha com semigrupos numéricos com multiplicidades 3 e 4 e obtém resultados importantes ao fixar outros invariantes.

Em 2008, Bras-Amorós [4] estuda o comportamento da quantidade de semigrupos numéricos com gênero g fixado e conjectura, entre outras coisas, que a razão entre o número de semigrupos numéricos com gênero $g + 1$ e o número de semigrupos com gênero g se aproxima da razão áurea quando $g \to \infty$.

Em 2012, Kaplan [5] faz a contagem de semigrupos numéricos pelo gênero e multiplicidade, a fim de discutir a conjectura de Bras-Amorós. Também, em 2017, ele publica um artigo fazendo um histórico a respeito de alguns problemas em aberto, incluindo os supracitados [6].

Em 2020, Bernardini [7] estuda a contagem de semigrupos numéricos pelo gênero e lacunas pares via vetor de Kunz e semigrupos numéricos de multiplicidade fixada.

Dividimos este trabalho da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** Neste capítulo definiremos semigrupos numéricos e seus invariantes e estudaremos algumas de suas propriedades e resultados importantes.

- **Capítulo 2:** O objetivo deste capítulo é fazer a contagem de semigrupos numéricos com multiplicidade fixada. Começaremos com valores de m pequenos e por fim estudaremos o caso geral.

- **Capítulo 3:** Algumas ideias do Capítulo 1 reaparecem neste capítulo. O objetivo é determinar semigrupos numéricos através de seus invariantes. Neste capitúlo nos concentraremos em semigrupos de mulitplicidades $2, 3$ e 4.

- **Capítulo 4:** Neste capítulo, iremos construir algumas propostas de atividades para o ensino médio, utilizando como contexto o problema das moedas de Frobenius.

Finalizamos o trabalho com algumas considerações finais, incluindo proposta de trabalhos futuros nesse mesmo tema.

Capítulo 1

Propriedades de semigrupos numéricos e seus invariantes

Neste capítulo definiremos o que é um semigrupo numérico assim como seus invariantes. Discutiremos a respeito do conjunto de Apéry de um semigrupo numérico e a respeito da correpondência entre este conjunto e o sistema de geradores. Definiremos também o conceito de vetor de Kunz e como podemos relacionar um semigrupo numérico a um ponto no espaço $\mathbb{R}^n$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Por fim discutiremos a respeito dos semigrupos numéricos com máxima dimensão. As principais referências para este capítulo são o livro escrito por Rosales e García-Sánchez [8] e o artigo do Rosales *et al.* [2].

Neste trabalho utilizaremos as notações $[a, b] := \{x \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq b\}$ e se $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ são inteiros não negativos, então $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \rightarrow\} := \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \cup \{k \in \mathbb{N} : k > s_n\}$.

1.1 Definições e exemplos

Diz-se que um subconjunto S de $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, em que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, é um semigrupo numérico se $0 \in S$, S é fechado para adição e $G(S) := \mathbb{N}_0 \setminus S$, chamado **conjunto de lacunas**, é um conjunto finito.

- Os elementos de $G(S)$ são chamados de **lacunas** e os elementos de S de **não-lacunas**;
- O **gênero** de S, denotado por $g(S)$, é a quantidade de elementos do seu complementar, ou seja, a cardinalidade do conjunto $\mathbb{N}_0 \setminus S$;
- A **multiplicidade** de S, denotada por $m(S)$, é o menor elemento não nulo de S;
- O **condutor** de S, denotado por $c(S)$, é o menor elemento a de S tal que $a+n \in S$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

- O **número de Frobenius** de um semigrupo numérico, denotado por $F(S)$, é dado por $c(S) - 1$. Se $S \neq \mathbb{N}_0$, então $F(S)$ é a maior lacuna de S;

- Diz-se que $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um **sistema de geradores** de S se $S = \{k_1 a_1 + \cdots + k_n a_n : k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}\}$,isto é, todo elemento de S é combinação inteira não negativa dos elementos de A;

- O conjunto A será um **sistema minimal de geradores** se A é um sistema de geradores e nenhum subconjunto próprio de A é um sistema de geradores;

- A **dimensão** de S, denotada por $e(S)$, é a cardinalidade do sistema minimal de geradores;

- Quando A for um sistema de geradores de S usaremos a notação $S = \langle A \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$;

- Seja S um semigrupo numérico e considere $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_e\}$ o sistema minimal de geradores. O **raio** de S é n_2 e é denotado por $R(S)$.

Bem definidos esses conceitos, seguem dois exemplos de semigrupos numéricos e dos cálculos de alguns dos invariantes. O conjunto de geradores e o raio serão calculados na seção 1.2.

Exemplo 1.1 *Seja* $A = \{0, 2, 4\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 6\} = \{0, 2, 4, 6, \rightarrow\}$. *Tem-se que:*

- $0 \in A$*;*

- A *é fechado para adição. É fácil notar que as somas* $0 + 0, 0 + 2, 0 + 4, 2 + 2, 2 + 4, 4 + 4 \in A$. *Agora escolhamos dois números* a *e* $b \in A$*, tais que* $b \geq 6$ *, percebemos que* $a + b \in A$ *pois* $a + b \geq b \geq 6$. *Assim* A *é um conjunto fechado para adição;*

- $G(A) = \{1, 3, 5\}$ *é finito.*

Portanto A *é semigrupo numérico. Além disso,*

- $g(A) = 3$*;*

- $m(A) = 2$*;*

- $c(A) = 6$*;*

- $F(A) = 5$.

Exemplo 1.2 *Seja* $B = \{0, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 5\} = \{0, 3, 5, 6, \rightarrow\}$. *Tem-se que:*

- $0 \in B$*;*

- *B é fechado pra adição. É fácil notar que as somas $0+0, 0+3, 3+3 \in B$. Agora escolhamos dois números a e $b \in B$, tais que $b \geq 5$, percebemos que $a+b \in B$ pois $a+b \geq b \geq 5$. Assim B é um conjunto fechado para adição;*
- *$G(B) = \{1, 2, 4\}$ é finito.*

Portanto, B é semigrupo numérico. Além disso,

- *$g(B) = 3$;*
- *$m(B) = 3$;*
- *$c(B) = 5$;*
- *$F(B) = 4$;*

Observação 1.1 *Seja S um semigrupo numérico de condutor c. Para verificar se vale o fechamento para adição basta fazer a verificação para os elementos em $[1, c-1] \cap S$, já que:*

- *$0 + s = s \in S$;*
- *$a \in S, b \geq c \Rightarrow a+b \geq c$, logo $a+b \in S$;*

A quantidade de testes é dada por $\binom{c-1}{2}$.

Agora observe outros três exemplos de subconjuntos de $\mathbb{N}_0$ que não são semigrupos numéricos:

- $\mathbb{N}$ não é semigrupo numérico pois $0 \notin \mathbb{N}$.
- $D = \{0, 1, 2\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq 4\}$ não é semigrupo numérico pois $1+2 \notin D$.
- $E = \{2n; n \in \mathbb{N}_0\}$ não é semigrupo numérico pois $\mathbb{N}_0 \setminus E$ é um conjunto infinito.

1.2 Conjunto de Apéry

Outro conceito importante que fundamenta esse trabalho é o conjunto de Apéry. Define-se **conjunto de Apéry** de S (com relação a n, com $n \in S$) como $Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$.

Proposição 1.1 *Seja S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Então $Ap(S, n) = \{0, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}\}$, em que $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$, para $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Demonstração: Seja S um semigrupo numérico e $n \in S$. Queremos mostrar que os conjuntos:

$$A = \{s \in S : s - n \notin S\}$$
e
$$B = \{0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}\},$$
$$\text{com } w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}, i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

são iguais.

Para mostrar a igualdade dos conjuntos vamos provar que $A \subset B$ e que $B \subset A$. Vamos começar por $A \subset B$.

Se $a \in A$, então $a \in S$ e $a - n \notin S$. Existe $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tal que $a \equiv i \pmod{n}$. Para provar que a é o menor elemento congruente a i (mod n) deve-se provar que $a - kn \notin S$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por absurdo, supõe-se que existe $k \in \mathbb{N}$ com $a - kn \in S$. Como $n \in S$, tem-se $(a - kn) + (k-1)n = a - n \in S$, o que é um absurdo.

Logo, $a = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$, isto é, a é o menor elemento de S que é congruente a $i \pmod{n}$, donde conclui-se que $a \in B$. Logo $A \subset B$.

Agora vamos provar que $B \subset A$.

Se $b \in B$, então $b = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$ para algum $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$. Se $i = 0$, então $b = 0$. Se $i \geq 1$, então temos:

$$n \equiv 0 \pmod{n}$$
$$b \equiv i \pmod{n}$$
$$b - kn \equiv i \pmod{n}, \forall k \in \mathbb{N}$$

Como $b - kn < b$, então $b - kn \notin S, \forall k \in \mathbb{N}$. Logo $b \in A$ e $B \subset A$.

Como $A \subset B$ e $B \subset A$, conclui-se que $B = A$.

■

Tendo em vista a Proposição 1.1 vamos construir alguns exemplos de conjuntos de Apéry.

Exemplo 1.3 *Seja* $S = \{0, 2, \rightarrow\}$.

Vamos construir o conjunto $Ap(S, 2)$. *Pela Proposição 1.1 tem-se que* $Ap(S, 2) = \{0, w_1\}$, *em que* $w_1 = min\{s \in S : s \equiv 1 \pmod{2}\}$. *Logo, construir o conjunto de Apéry consiste em encontrar o menor elemento congruente a* 1 *módulo* 2 *que pertence a* S. *Como o menor número ímpar de* S *é* 3, *segue que* $Ap(A, 2) = \{0, 3\}$.

Exemplo 1.4 *Seja* $S = \{0, 2, \rightarrow\}$.

Vamos construir o conjunto $Ap(S, 3)$. *Pela Proposição 1.1 tem-se que* $Ap(S, 3) = \{0, w_1, w_2\}$, *em que* $w_i = min\{s \in S : s \equiv i \pmod{3}\}$. *Assim* $Ap(S, 3) = \{0, 2, 4\}$.

Exemplo 1.5 $S = \{0, 3, \rightarrow\}$

A multiplicidade deste exemplo é igual a 3 *e* $Ap(S, 3) = \{0, 4, 5\}$.

Exemplo 1.6 $S = \{0, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\}$

A multiplicidade de S é igual a 4 e o seu conjunto de Apéry é $Ap(S, 4) = \{0, 5, 6, 11\}$.

A próxima proposição visa observar que um conjunto de geradores pode ser obtido pelo conjunto de Apéry, $Ap(S, n)$, trocando-se o zero por n.

Proposição 1.2 *Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$ tal que $Ap(S, n) = \{0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, em que $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n}\}$. Então $S = \langle n, w_1, \ldots, w_{n-1}\rangle$.*

Demonstração: Seja $s \in S$. Se $n \mid s$, então existe $a \in \mathbb{N}_0$ tal que $s = an = an + 0w_1 + \cdots + 0w_{n-1}$. Logo $s \in \langle n, w_1, \cdots, w_{n-1}\rangle$. Se $n \nmid s$, então existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que $s = nk + i$. Pela minimalidade de w_i, existe $\tilde{k} \in \mathbb{N}_0$ tal que $s = w_i + \tilde{k}n = \tilde{k}n + 1 \cdot w_i + \sum_{j \neq i} 0 \cdot w_j \in \langle n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}\rangle$. Por outro lado, $n, w_1, \ldots, w_{n-1} \in S$.

$\blacksquare$

Vamos encontrar o conjunto de geradores e o raio do semigrupo numérico dos Exemplos 1.3, 1.4 ,1.5 e 1.6.

Exemplo 1.7 *Considere o semigrupo numérico S dado no Exemplo 1.3. Vimos que $Ap(S, 2) = \{0, 3\}$.*

Perceba que para obter um sistema de geradores do conjunto S do Exemplo 1.3 basta trocar o elemento 0 do conjunto de Apéry por 2. Logo o sistema de geradores é $\{2, 3\}$ e o sistema minimal de geradores também é $\{2, 3\}$. Portanto, $S = \langle 2, 3\rangle$ e $R(S) = 3$.

Exemplo 1.8 *Considere o semigrupo numérico S dado no Exemplo 1.4. Vimos que $Ap(S, 3) = \{0, 2, 4\}$.*

Perceba que para obter um sistema de geradores do conjunto S do Exemplo 1.4 basta trocar o elemento 0 do conjunto de Apéry por 3. Logo o sistema de geradores é $\{2, 3, 4\}$ e o sistema minimal de geradores é $\{2, 3\}$, já que $4 = 2 + 2$. Portanto, $S = \langle 2, 3\rangle$ e $R(S) = 3$.

Exemplo 1.9 *Considere o semigrupo numérico S dado no Exemplo 1.5. Vimos que $Ap(S, 3) = \{0, 4, 5\}$. Seguindo a ideia dos exemplos acima, o sistema de geradores é $\{3, 4, 5\}$ e o sistema minimal de geradores também é $\{3, 4, 5\}$. Portanto, $S = \langle 3, 4, 5\rangle$ e $R(S) = 4$.*

Exemplo 1.10 *Considere o semigrupo numérico S dado no Exemplo 1.6. Vimos que $Ap(S, 4) = \{0, 5, 6, 11\}$. Seguindo a ideia dos exemplos acima,o sistema de geradores é $\{4, 5, 6, 11\}$, o sistema minimal de geradores é $\{4, 5, 6\}$ já que $11 = 5 + 6$. Portanto, $S = \langle 4, 5, 6\rangle$ e $R(S) = 5$.*

1.3 Vetor de Kunz

Bem definido os conceitos de conjunto de Apéry e sistema de geradores, seguimos para a definição de vetor de Kunz de um semigrupo numérico S em relação a $n \in S \setminus \{0\}$.

Sejam S um semigrupo numérico e $n \in S \setminus \{0\}$. Vimos na Proposição 1.2 que $Ap(S,n) = \{0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}\}$. O **vetor de Kunz** de S em n é definido como $Kunz(S,n) = (k_1, k_2, ..., k_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, em que $k_i = \frac{(w_i - i)}{n}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

A partir da definição vamos exemplificar vetor de Kunz.

Exemplo 1.11 *Seja* $S = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$.

Como $Ap(S,3) = \{0, 4, 8\}$, então as coordenadas do vetor de Kunz são:

$$k_1 = \tfrac{4-1}{3} = 1$$
$$k_2 = \tfrac{8-2}{3} = 2$$

Logo o vetor de Kunz deste semigrupo numérico em 3 é $Kunz(S,3) = (1,2)$.

Exemplo 1.12 *Seja* $S = \{0, 4, 5, 6, 8, \rightarrow\}$

Como $Ap(S,4) = \{0, 5, 6, 11\}$, então:

$$k_1 = \tfrac{5-1}{4} = 1$$
$$k_2 = \tfrac{6-2}{4} = 1$$
$$k_3 = \tfrac{11-3}{4} = 2$$

Logo $Kunz(S,4) = (1,1,2)$.

Conseguimos, assim, encontrar o vetor de Kunz para qualquer semigrupo numérico escolhido. A pergunta agora é se a recíproca é verdadeira, ou seja, se dado um vetor com coordenadas inteiras em $\mathbb{R}^n$ ele pode ser associado a um semigrupo numérico?

Para chegar à uma conclusão a respeito da recíproca vamos pensar nas possíveis coordenadas de Kunz para um semigrupo numérico de multiplicidade 3.

Um semigrupo numérico com multiplicidade $m = 3$ será do seguinte formato $\langle 3, 3k_1 + 1, 3k_2 + 2 \rangle$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Logo seu vetor de Kunz será (k_1, k_2).

Note que $3k_1 + 1$ é o menor elemento congruente a 1 módulo 3 do semigrupo numérico. Também temos que $(3k_2 + 2) + (3k_2 + 2) \equiv 2 + 2 \equiv 1 \pmod 3$. Assim, conseguimos construir a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} 3k_2 + 2 + 3k_2 + 2 &\geq 3k_1 + 1 \\ 6k_2 + 4 &\geq 3k_1 + 1 \\ 2k_2 + 1 &\geq k_1 \end{aligned}$$

Analogamente $3k_2 + 2$ é o menor elemento congruente a 2 módulo 3 do semigrupo, também $(3k_1 + 1) + (3k_1 + 1) \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Assim:

$$\begin{aligned} 3k_1 + 1 + 3k_1 + 1 &\geq 3k_2 + 2 \\ 2k_1 &\geq k_2 \end{aligned}$$

Logo, para que um ponto de coordenadas inteiras (k_1, k_2) possa ser associado a um semigrupo numérico de multiplicidade 3, $\langle 3, 3k_1 + 1, 3k_2 + 2 \rangle$, ele precisa satisfazer as inequações :

$$\begin{cases} 2y + 1 & \geq x \\ 2x & \geq y \\ x & \geq 1 \\ y & \geq 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Com o Sistema 1.1 delimita-se uma região em $\mathbb{R}^2$ em que todo ponto inteiro dessa região pode ser associado a um semigrupo numérico. Portanto, perceba que nem todo ponto inteiro de $\mathbb{R}^{m-1}$ está associado a um semigrupo numérico. Para exemplificar tomemos um ponto inteiro fora dessa região. O ponto escolhido será $(0, 5)$ e tentaremos associar esse ponto a um semigrupo numérico.

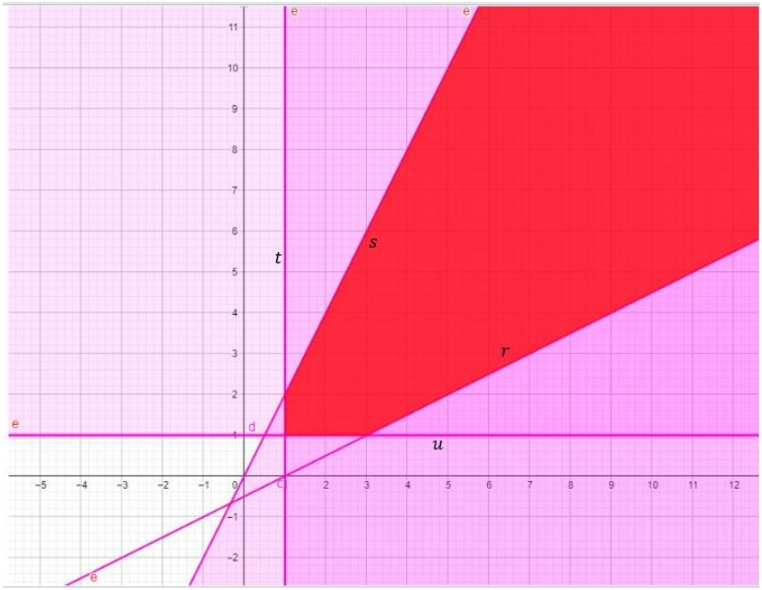
Exemplo 1.13 *Dado o ponto* $(0, 5)$ *vamos mostrar que ele não está associado a um semigrupo numérico.*

Se $k_1 = 0$ *e* $k_2 = 5$ *sabe-se que o menor número congruente a* 1 *módulo* 3 *será igual a* $3 \cdot 0 + 1 = 1$ *e o menor número congruente a* 2 *módulo* 3 *será* $3 \cdot 5 + 2 = 17$. *Uma vez que o número* 1 *pertence ao semigrupo, pela propriedade do fechamento da adição podemos afirmar que o* 2 *também pertence, o que contradiz o fato do* 17 *ser o menor número congruente a* 2 *módulo* 3, *ou seja, não conseguimos estabelecer uma associção entre esse ponto e um semigrupo numérico.*

Graficamente, para que um ponto inteiro em $\mathbb{R}^2$ corresponda a um semigrupo numérico de multiplicidade 3, ele deve estar na região vermelha delimitada pelas retas r, s, t, u exibidas em 1.2 conforme mostra a Figura 1.1.

$$\begin{cases} r : 2y + 1 & = x \\ s : 2x & = y \\ t : x & = 1 \\ u : y & = 1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Figura 1.1: Região obtida com multiplicidade 3



Um semigrupo numérico com multiplicidade $m = 4$ será do seguinte formato $\langle 4, 4k_1 + 1, 4k_2 + 2, 4k_3 + 3\rangle$, com $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$. Logo seu vetor de Kunz será (k_1, k_2, k_3).

Como $4k_1 + 1$ é o menor elemento congruente a 1 módulo 4 do semigrupo numérico e $(4k_2 + 2) + (4k_3 + 3) \equiv 2 + 3 \equiv 1 \pmod 4$, podemos construir a seguinte inequação:

$$\begin{aligned} 4k_2 + 2 + 4k_3 + 3 &\geq 4k_1 + 1 \\ 4k_2 + 4k_3 + 4 &\geq 4k_1 \\ k_2 + k_3 + 1 &\geq k_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Analogamente, $4k_2 + 2$ é o menor elemento congruente a 2 módulo 4 do semigrupo numérico e $(4k_1 + 1) + (4k_1 + 1) \equiv 2 \pmod 4$ e $(4k_3 + 3) + (4k_3 + 3) \equiv 2 \pmod 4$. Assim:

$$\begin{aligned} 4k_1 + 1 + 4k_1 + 1 &\geq 4k_2 + 2 \\ 2k_1 &\geq k_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} 4k_3 + 3 + 4k_3 + 3 &\geq 4k_2 + 2 \\ 2k_3 + 1 &\geq k_2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Da mesma forma, $4k_3 + 3$ é o menor elemento congruente a 3 módulo 4 do semigrupo numérico e $(4k_1 + 1) + (4k_2 + 2) \equiv 3 \pmod 4$. Assim:

$$\begin{aligned} 4k_1 + 1 + 4k_2 + 2 &\geq 4k_3 + 3 \\ k_1 + k_2 &\geq k_3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

As Inequações 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 , $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$ e $k_3 \geq 1$, determinam o sistema de inequações:

$$\begin{cases} y+z+1 & \geq & x \\ 2x & \geq & y \\ 2z+1 & \geq & y \\ x+y & \geq & z \end{cases} \tag{1.7}$$

Este sistema delimita uma região em $\mathbb{R}^3$ que evidencia que todo ponto inteiro nessa região está associado a um semigrupo numérico de multiplicidade 4.

As três figuras abaixo representam a região descrita pelo Sistema 1.7.

Figura 1.2: Região obtida com multiplicidade 4 (com os planos)

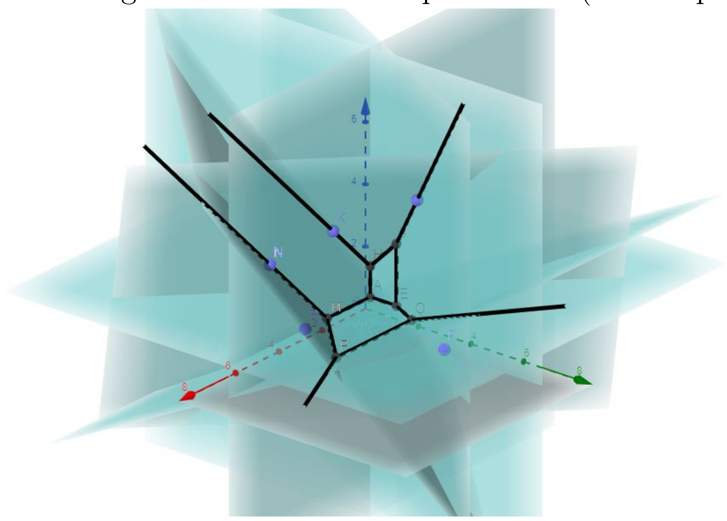


Figura 1.3: Região obtida com multiplicidade 4 (esqueleto)

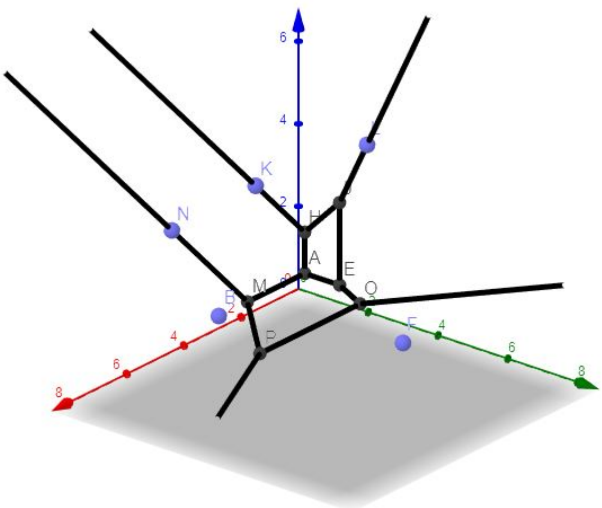
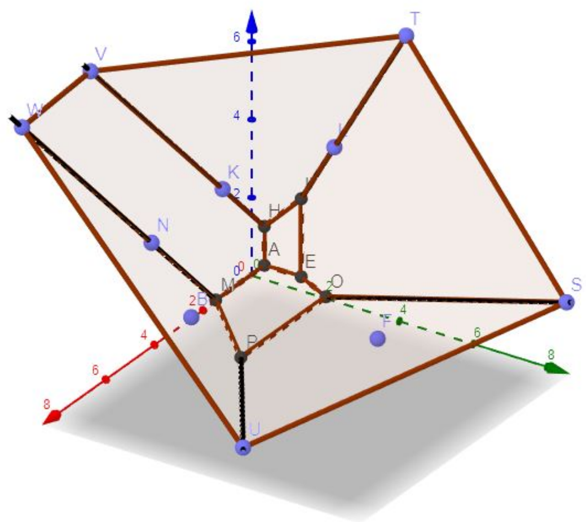


Figura 1.4: Região obtida com multiplicidade 4 (simplificada)



Façamos agora o caso geral, isto é, vamos trabalhar nas inequações para um semigrupo de multiplicidade m. A estrutura é análoga dos casos $m = 3$ e $m = 4$.

Um semigrupo numérico de multiplicidade m será do seguinte formato $\langle m, mk_1 + 1, mk_2 + 2, \ldots, mk_{m-1} + (m-1)\rangle$. Sejam $i, j \in \{1, \ldots, m-1\}$ com $i + j < m$. Pela minimalidade de $mk_i + i$ e $mk_j + j$ constroi-se a seguinte inequação.

$$
\begin{aligned}
mk_i + i + mk_j + j &\geq mk_{i+j} + i + j \\
k_i + k_j &\geq k_{i+j}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Caso $i, j \in \{1, \ldots, m-1\}$ com $m < i + j < 2m$, obtém-se que:

$$
\begin{aligned}
mk_i + i + mk_j + j &\geq mk_{i+j-m} + i + j - m \\
k_i + k_j + 1 &\geq k_{i+j-m}.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Assim para multiplicidade m é possível estabelecer um conjunto de inequações que restringe as possibilidades para o vetor dado pelas coordenadas de Kunz:

$$
\begin{cases}
x_i \geq 1 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\
x_i + x_j \geq x_{i+j} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i + j \leq m-1 \\
x_i + x_j + 1 \geq x_{i+j-m} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i + j > m \\
x_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\}
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

Observe que esse processo explicita uma bijeção entre o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^n$ que satisfazem o Sistema 1.10 e o conjunto de semigrupos numéricos de multiplicidade m.

1.4 Propriedades de semigrupos numéricos

Nesta seção trabalharemos algumas propriedades gerais sobre semigrupos numéricos. Faremos isso através de três proposições e um corolário.

Proposição 1.3 *Sejam S semigrupo numérico e $Ap(S,n) = \{0, nk_1+1, nk_2+2, \cdots, nk_{n-1}+(n-1)\}$, com $k_i \geq 1$ e $n \in S \setminus \{0\}$. Então $g(S) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$.*

Demonstração: Seja $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Como nk_i+i é o menor elemento congruente a i módulo n que pertence a S, podemos afirmar que temos k_i números congruentes a $i \pmod n$ que não estão em S, a saber, $np_i + i$ com $p_i = 0, \ldots, k_i - 1$, podendo então afirmar que esses k_i elementos estão no conjunto de lacunas. A Proposição 1.2 garante que essas serão as únicas lacunas. Assim, fazendo i variar entre 1 e $n-1$, conclui-se que $g(S) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i$.

■

Uma consequência da Proposição 1.3 é a proposição a seguir.

Proposição 1.4 ***(Fórmula de Selmer)*** *Sejam S semigrupo numérico, $n \in S \setminus \{0\}$ e $Ap(S,n) = \{0, w_1, \cdots, w_{n-1}\}$. Então $g(S) = \frac{1}{n}(w_1 + \cdots + w_{n-1}) - \frac{n-1}{2}$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.3 sabemos que $g(S) = k_1+k_2+\ldots+k_{n-1}$. Sabemos também que $k_i = \frac{(w_i - i)}{n}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Substituindo temos:

$$
\begin{aligned}
g(S) &= \frac{(w_1-1)}{n} + \frac{(w_2-2)}{n} + \cdots + \frac{(w_{n-1}-(n-1))}{n} \\
&= \frac{1}{n}(w_1+w_2+\ldots+w_{n-1}) - \frac{1}{n}(1+2+\ldots+(n-1)) \\
&= \frac{1}{n}(w_1+w_2+\ldots+w_{n-1}) - \frac{1}{n}\left(\frac{(1+n-1)(n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n}(w_1+w_2+\ldots+w_{n-1}) - \frac{1}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{n}(w_1+w_2+\ldots+w_{n-1}) - \frac{(n-1)}{2}.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 1.5 *Seja S um semigrupo numérico com número de Frobenius F e $n \in S \setminus \{0\}$. Então $F + n = \max Ap(S, n)$.*

Demonstração: Por definição $F \notin S$ e $F + n \in S$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $F + n \in Ap(S, n)$.

Seja $M = \max Ap(S, n)$. Vamos provar que $F+n = M$. Note que pela definição dos elementos do conjunto de Apéry, $M - n \notin S$. Seja $x > M - n$. Daí, $x + n > M$. Seja $w \in Ap(S, n)$ tal que w e $x+n$ são congruentes modulo n. Como $w \leq M < x+n$ e $x \equiv w \pmod n$, então podemos escrever $x = w + k \cdot n$, com $k \in \mathbb{Z}, k > 1$. Consequentemente $x - n = w + (k-1)n$ pertence a S.

Perceba que como $x - n$ pertence a S, então $x = (x - n) + n \in S$. Assim todo $x > M - n$ é elemento de S. Como $M - n \notin S$, segue, da definição de número de Frobenius que $F = \max Ap(S, n) - n$.

■

Para a próxima proposição, seja X um conjunto $x \in X$. Denotaremos por $x + X := \{x + y : y \in X\}$.

Proposição 1.6 *Seja S um semigrupo numérico de gênero g. Então $2g + \mathbb{N}_0 \subseteq S$.*

Demonstração: Se $g = 0$, então $S = \mathbb{N}_0$. Se $g \geq 1$, então existem pelo menos g não-lacunas em $[1, 2g]$, pois, caso contrário, S teria mais de g lacunas. Sejam $\rho_1 < \ldots < \rho_g$ não-lacunas em $[1, 2g]$ e suponha que existe uma lacuna $l \geq 2g$. Então todos os números $l - \rho_i, i \in \{1, \ldots, g\}$ são lacunas, pois, se não fossem, então $S \ni (l - \rho_i) + \rho_i = l \notin S$. Logo, S teria, pelo menos, $g + 1$ lacunas, o que é uma contradição. Assim, todos as lacunas de S são menores que $2g$.

■

Proposição 1.7 *Seja S um semigrupo numérico de gênero $g > 0$ e condutor c. Então $g + 1 \leq c \leq 2g$.*

Demonstração: A Proposição 1.6 garante a cota superior, $c \leq 2g$. Para encontrar a cota inferior, suponha que existe um semigrupo numérico com condutor c e gênero g que satisfaça $c \leq g$. Então o número de lacunas desse seria no máximo $g - 1$ e isso é uma contradição. Logo, $c \geq g + 1$.

■

Como consequência dessa proposição temos o seguinte corolário.

Corolário 1.1 *Seja S um semigrupo numérico de gênero $g > 0$ e número de Frobenius F. então $g \leq F \leq 2g - 1$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.7, temos que $g \leq c - 1 = F \leq 2g - 1$.

■

1.5 Semigrupos MED

Considere um semigrupo numérico S com dimensão e e multiplicidade m. É importante notar que $e \leq m$, já que $(Ap(S,m)\setminus\{0\})\cup\{m\}$ é um sistema de geradores que possui m elementos. Se $m = e$ dizemos que S tem dimensão máxima. Quando S tem dimensão máxima, diremos que S é MED (do inglês, *maximal embedding dimension*).

Como se comportam as inequações estudadas na Seção 1.3 quando os semigrupos são ou não MED é o ponto de partida para essa parte do trabalho. Trabalharemos com semigrupos de multiplicidade igual a 3.

Semigrupos numéricos de multiplicidade 3 terão como sistema de geradores $\{3, 3k_1+1, 3k_2+2\}$ com $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Por definição sabemos que para que um semigrupo numérico seja MED sua dimensão precisa ser igual a sua multiplicidade. Para que isso aconteça, o sistema de geradores deve ser minimal, ou seja, para que esse seja MED os geradores não podem ser múltiplos um dos outros, logo:

$$3k_1 + 1 + 3k_1 + 1 \neq 3k_2 + 2$$

e

$$3k_2 + 2 + 3k_2 + 2 \neq 3k_1 + 1$$

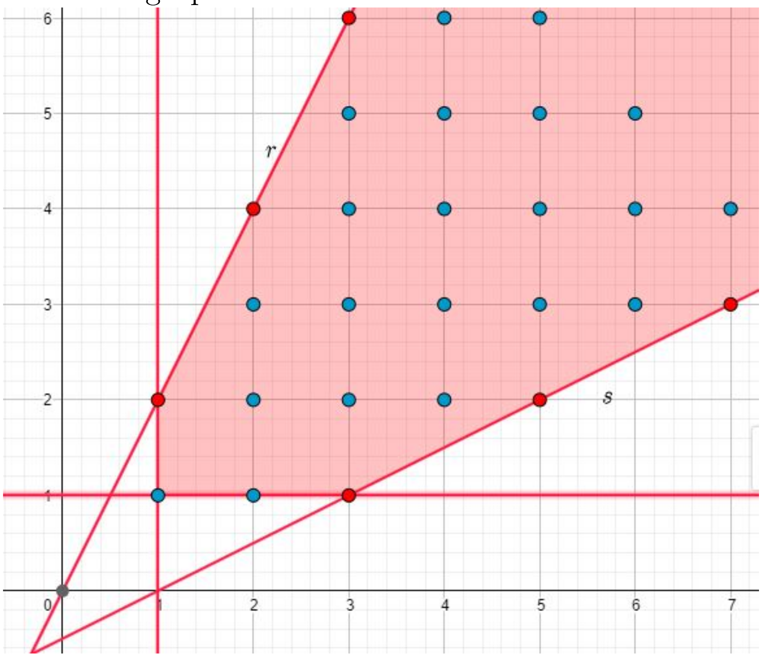
Com isso conclui-se que as inequações estudadas para semigrupos MED de multiplicidade 3 ficam no seguinte formato:

$$\begin{cases} 2k_2 + 1 & > & k_1 \\ 2k_1 & > & k_2 \\ k_1 & \geq & 1 \\ k_2 & \geq & 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

Para o semigrupos numéricos que não são MED teremos duas possibilidades, ou $3k_1 + 1 + 3k_1 + 1 = 3k_2 + 2$ ou $3k_2 + 2 + 3k_2 + 2 = 3k_1 + 1$, concluindo, assim, que uma das inequações se tornará uma equação.

Analisando graficamente observa-se que os pontos inteiros que estão sobre as retas de equações $r : 2x = y$ e $s : 2y + 1 = x$ estão em correspondência com semigrupos numéricos que não são MED, dados pelos pontos destacados em vermelho na figura. Já os que estão na parte interna da região são MED, pontos destacados em azul na figura.

Figura 1.5: Pontos azuis correspondem a semigrupos numéricos MED. Pontos vermelhos correspondem a semigrupos numéricos não MED.



A partir da figura acima serão construídos exemplos de semigrupos numéricos MED e não MED.

Exemplo 1.14 *Escolhendo o ponto* $(4, 2)$ *da região interna da figura, estabelece-se o seguinte sistema de geradores* $\{3, 8, 13\}$ *e* $S = \langle 3, 8, 13 \rangle$*. Esse sistema é minimal e* $e(S) = m(S) = 3$*. Portanto,* S *é MED.*

Exemplo 1.15 *Escolhendo o ponto* $(7, 14)$ *da reta* r*, estabelece-se o seguinte sistema de geradores* $\{3, 7, 14\}$ *e* $S = \langle 3, 7, 14 \rangle$*. Como* $7 + 7 = 14$*, esse sistema não é minimal. O sistema minimal é* $\{3, 7\}$ *e* $S = \langle 3, 7 \rangle$*. Logo* $2 = e(S) \neq m(S) = 3$ *e* S *não é MED.*

Capítulo 2

Contagem de semigrupos numéricos com a multiplicidade fixada

Neste capítulo discutiremos quantos semigrupos numéricos tem gênero g e multiplicidade m. A cardinalidade do conjunto dos semigrupos numéricos com gênero g e multiplicidade m é denotada por $N(m, g)$. Começaremos com m pequeno e gênero fixado, depois passaremos para m e g fixados. As referências para este capítulo são Kaplan [5] e Rosales *et al.*[2].

2.1 Semigrupos numéricos de multiplicidades $1, 2$ e 3

Nesta seção serão encontradas fórmulas para $N(1, g)$, $N(2, g)$ e $N(3, g)$. Sabe-se que o único semigrupo numérico com $m = 1$ é $\mathbb{N}_0$. Como seu complementar é vazio, sabe-se que $g = 0$, assim $N(1, g) = 1$.Vale observar que $N(1, g) = 0$, se $g \geq 1$.

Para $N(2, g)$ faremos primeiro exemplos com $N(2, 1)$ e $N(2, 2)$ para depois concluímos algo sobre $N(2, g)$.

Exemplo 2.1 *Seja S um semigrupo numérico de multiplicidade 2 e gênero 1. Sabemos que o complementar de S tem apenas um número. Esse número é ímpar, pois $2n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $G(S) = \{1\}$. Vamos supor por absurdo que $G(S) \neq \{1\}$. Então $1 \in S$ e pode-se concluir que que $2n+1 \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pois $2n \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $G(S)$ é vazio, o que é uma contradição. Portanto, $N(2, 1) = 1$.*

Exemplo 2.2 *Seguindo o Exemplo 2.1, para $m = 2$ e $g = 2$, temos que o complementar de S é formado por dois números ímpares. Queremos mostrar que $G(S) = \{1, 3\}$. Conforme Exemplo 2.1, se $1 \notin G(S)$, então $G(S) = \emptyset$, o que é uma contradição. Vamos supor por absurdo que $3 \notin G(S)$, isto é, $3 \in S$. Como todo par pertence a S*

tem-se, pelo fechamento da adição, que $2n + 3 \in S$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Logo* $G(S) = \{1\}$, *uma contradição. Portanto,* $N(2, 2) = 1$.

Considere S um semigrupo numérico de multiplicidade m e gênero g. Nos Exemplos 2.1 e 2.2 percebeu-se pontos importantes sobre $N(2, g)$. O primeiro ponto é que $G(S)$ só tem elementos ímpares e o segundo ponto é que $G(S) = \{2k+1 : k \in \{0, 1, \ldots, g-1\}\}$. Podemos suspeitar então que $N(2, g) = 1$, para todo $g \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1 *Seja* S *um semigrupo numérico com multiplicidade* 2 *e gênero* g. *Então* $N(2, g) = 1$.

Demonstração: Por definição sabemos que $Ap(S, 2) = \{0, w_1\}$, em que $w_1 = \min\{k \in S : k \equiv 1 \pmod 2\}$. Logo, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $w_1 = 2k_1 + 1$ e $S = \langle 2, 2k_1 + 1\rangle$.

Pela Proposição 1.3 sabe-se que $g = k_1$. Logo só existe um semigrupo numérico com multiplicidade 2 e gênero g, a saber $S = \langle 2, 2g+1\rangle$, donde concluímos que $N(2, g) = 1$.

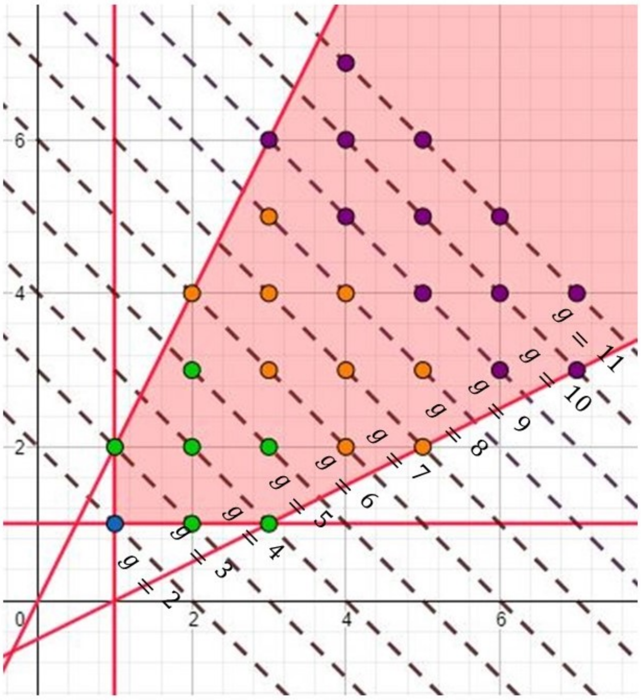
■

Para conseguirmos fazer uma análise gráfica para $N(3, g)$, vamos construir um sistema de inequações partindo das inequações vistas no Sistema 1.1.Vamos incluir o fato de o semigrupo numérico ter gênero g, utilizando a Proposição 1.3. Assim, temos $x, y \in \mathbb{N}$ e outras inequações da seguinte forma:

$$\begin{cases} 2y + 1 & \geq & x \\ 2x & \geq & y \\ x + y & = & g \end{cases} \tag{2.1}$$

Para g fixado, as soluções do Sistema 2.1 estão sobre um segmento de reta. Com isso podemos calcular $N(3, g)$. Na Figura 2.1, um ponto inteiro (x, y) que se encontra na região destacada está associado a um semigrupo numérico com multiplicidade 3, como vimos no Capítulo 1. Se traçarmos a reta $x + y = g$, conseguimos realizar a contagem $N(3, g)$, pois a quantidade de pontos inteiros que estão na região e na reta simultaneamente será a quantidade de semigrupos numéricos de multiplicidade 3 e gênero g.

Figura 2.1: Semigrupos numéricos com $m = 3$ e gênero g



Analisando a Figura 2.1, obtemos os seguintes resultados: $N(3,2) = 1$; $N(3,3) = 2; N(3,4) = 2; N(3,5) = 2; N(3,6) = 3; N(3,7) = 3; N(3,8) = 3$; $N(3,9) = 4$; $N(3,10) = 4; N(3,11) = 4$.

Vamos generalizar o estudo e encontrar $N(3,g)$ para g arbritário com a proposição seguinte:

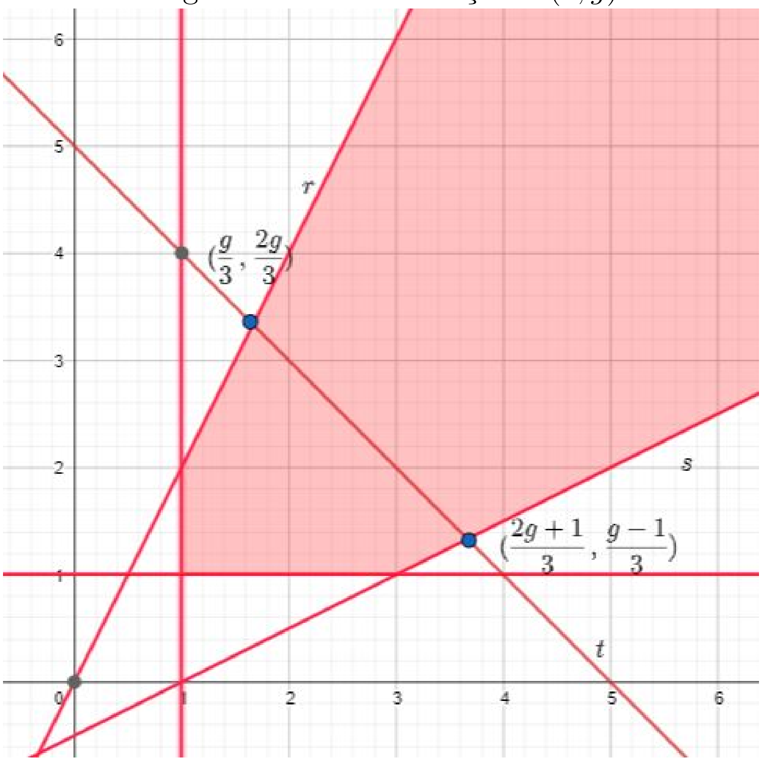
Proposição 2.2 *Seja* $g \equiv L \pmod 3$, *com* $L = 0,1,2$, *então* $N(3,g) = \frac{g+(3-L)}{3}$.
Demonstração: *A partir do Sistema 1.7, considere as retas de equações:*

$$\begin{cases} s : 2y+1 &= x \\ r : 2x &= y \\ t : x+y &= g \end{cases} \tag{2.2}$$

Sabemos que a quantidade de pontos inteiros que estão na reta t e que estão entre as retas s e r é $N(3,g)$.Com isso, para determinar $N(3,g)$, precisamos antes encontrar a intersecção entre as retas t e s, e t e r.

A interseção entre as retas t e s é o ponto $(\frac{2g+1}{3}, \frac{g-1}{3})$, e das retas t e r é o ponto $(\frac{g}{3}, \frac{2g}{3})$. A Figura 2.2 representa bem o que estamos construindo:

Figura 2.2: Demonstração $N(3, g)$



Com isso encontrando essas interseções para fazer a contagem de $N(3, g)$ basta contar a quantidade de pontos inteiros sobre a reta t e entre os pontos $(\frac{2g+1}{3}, \frac{g-1}{3})$, $(\frac{g}{3}, \frac{2g}{3})$, para $g \in \mathbb{N}$. Perceba que se um ponto sobre a reta $x + y = g$ tem uma das coordenadas inteira e como g é natural, então obrigatoriamente a outra coordenada também é inteira. Logo para encontrar um ponto de coordenadas inteiras que satisfaça o Sistema 1.7 precisamos apenas encontrar os valores inteiros para uma das coordenadas que estão limitadas pelos intervalos $[\frac{g}{3}, \frac{2g+1}{3}]$, $[\frac{2g}{3}, \frac{g-1}{3}]$

Vamos então encontrar quantos inteiros estão no intervalo $[\frac{g}{3}, \frac{2g+1}{3}]$.

Se $L = 0$, então $g \equiv 0 \pmod 3$ e $\frac{g}{3} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{2g+1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Assim, a partir do $\frac{g}{3}$ construiremos uma P.A de razão 1, em que o último elemento dessa sequência é o maior inteiro menor que $\frac{2g+1}{3}$.

Para encontrar a quantidade de números inteiros, usaremos o termo geral da P.A, da seguinte forma:

$$\frac{g}{3} + (n - 1) < \frac{2g+1}{3}$$
$$n < \frac{g+4}{3}$$

Logo, para $L = 0$, $n = N(3, g) = \frac{g+3}{3}$.

Se $g \equiv 1 \pmod 3$, então $\frac{g}{3} \notin \mathbb{Z}$ e $\frac{2g+1}{3} \in \mathbb{Z}$. Assim, a partir do $\frac{2g+1}{3}$ construiremos uma P.A de razão -1, em que o último elemento dessa sequência é o menor inteiro maior que $\frac{g}{3}$.

Para encontrar a quantidade de números inteiros, usaremos o termo geral da P.A, da seguinte forma:

$$\frac{2g+1}{3} - (n-1) > \frac{g}{3}$$
$$\frac{g+4}{3} > n$$

Logo para $L = 1$, $n = N(3, g) = \frac{g+2}{3}$.

Se $g \equiv 2 \pmod 3$, *então* $\frac{g}{3} \notin \mathbb{Z}$ *e* $\frac{2g+1}{3} \notin \mathbb{Z}$. *Para fazer a contagem dos termos, consideramos* $\frac{g+1}{3}$, *que é o menor inteiro maior que* $\frac{g}{3}$, *e* $\frac{2g-1}{3}$, *que é o maior inteiro menor que* $\frac{2g+1}{3}$.

Assim para determinar a quantidade de inteiros entre esses dois números, usaremos o termo geral da P.A de razão 1:

$$\frac{2g-1}{3} = \frac{g+1}{3} + (n-1)$$
$$n = \frac{g+1}{3}$$

Assim, para $L \in \{0, 1, 2\}$, *temos que* $N(3, g) = \frac{g+(3-L)}{3}$.

■

Corolário 2.1 $N(3, g)$ *é não decrescente em* g.

Demonstração: Perceba que como $g \in \mathbb{N}$ então $N(3, g)$ é uma sequência. Para provar que ela é não decrescente em g precisamos mostrar que $N(3, g) \leq N(3, g+1)$.

Primeiro vamos mostrar para $g = 3n + L, L \in \{0, 1\}, n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, $g + 1 = 3n + L + 1, L \in \{0, 1\}$. Perceba que $N(3, g) = \frac{g+(3-L)}{3} = \frac{g+1+(3-(L+1))}{3} = N(3, g+1)$.

Agora vamos provar para $g = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$. Consequentemente $g + 1 = 3(n + 1)$. Perceba que para esse caso $N(3, g) = \frac{g+3-2}{3} = \frac{g+1}{3}$ e $N(3, g+1) = \frac{g+1+3-0}{3} = \frac{g+4}{3}$. É fácil ver que $N(3, g) < N(3, g+1)$. De fato, $N(3, g+1) = \frac{g+1}{3} + 1 = N(3, g) + 1$.

Portanto, $N(3, g)$ é uma função não descrescente.

■

2.2 Semigrupos com m e g fixados

Nesta seção estudaremos a contagem de semigrupos com multiplicidade m e gênero g fixados, isto é, $N(m, g)$. Esta seção é baseada em Kaplan [5]. A contagem de semigrupos numéricos será feita utilizando o vetor de Kunz de um semigrupo numérico.

Lembre que uma **composição** de um número inteiro positivo n é uma maneira de escrever n como uma soma de números inteiros positivos, em que a ordem desses números importa. Por exemplo, as composições de 4 são $4, 3 + 1, 2 + 2, 1 + 3, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 1 + 1$.

Proposição 2.3 *Há 2^{n-1} composições de n.*

Demonstração: Seja $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ com $k \in \{1, \cdots, n\}$, $x_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \geq 1$. Vamos utilizar o método traço e ponto para realizar a contagem das soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$. Teríamos n pontos caso $x_i \geq 0$, mas como $x_i \geq 1$, ficamos com $n - k$ bolas e $k - 1$ traços. Dessa forma o total de combinações para um determinado k é $\binom{n-k+k+1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$. Variando k, obtemos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$, como queríamos demonstrar.

■

Proposição 2.4 *Temos que $N(m, g)$ é igual ao número de composições de g em exatamente $m - 1$ partes, $\{k_1, \ldots, k_{m-1}\}$ de modo que $\{0, k_1m + 1, \ldots, k_{m-1}m + (m - 1)\}$ é o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico.*

Demonstração: Para realizar essa demonstração vamos exibir duas funções $f : A \to B$ e $h : B \to A$ e provar que são injetivas. Isso implica em $\#A \leq \#B$ e $\#B \leq \#A$, respectivamente, isto é, $\#A = \#B$.

Sejam $A = \{S$ é um semigrupo numérico : $m(S) = m, g(S) = g\}$ e $B = \{(k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}) : k_1 + \cdots + k_{m-1} = g$ e $\{0, mk_1 + 1, \ldots, mk_{m-1} + (m - 1)\}$ é conjunto de Apéry de um semigrupo numérico$\}$.

Seja $f : A \to B$ tal que $f(S) = Kunz(S, m)$. Vamos provar que f é injetiva. Sejam S e S' semigrupos numéricos com multiplicidade m tais que $f(S) = f(S')$. Assim, $Kunz(S, m) = Kunz(S', m)$, ou seja, S e S' têm o mesmo vetor de Kunz. Logo, $Ap(S, m) = Ap(S', m)$. Assim, pela Proposição 1.2 temos que $S = \langle m, w_1, \ldots, w_{m-1}\rangle = S'$. Portanto, f é injetiva.

Dado $S \in A$, cujo conjunto de Apéry é $\{0, k_1m + 1, \ldots, k_{m-1}m + (m - 1)\}$, em que $k_i \geq 1, i = 1, \ldots m - 1$, temos que $Kunz(S, m) = (k_1, k_2, \ldots k_{m-1})$ e $g(S) = g$. Pela Proposição 1.7, sabemos que $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$, que é uma composição de g em exatamente $m - 1$ partes. Note que $\#A = N(m, g)$ e $\#B$ é a quantidade de composições de g em $m - 1$ partes as quais são as coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico. Assim, $N(m, g)$ é menor ou igual ao número de composições desta forma.

Seja $h : B \to A$ tal que $h(k_1, k_2 \cdots, k_{m-1}) = \langle m, k_1m + 1, \ldots, k_{m-1}m + (m - 1)\rangle$. Vamos provar que h é injetiva, considere uma composição de g em exatamente $m - 1$ partes $k_1, \ldots, k_{m-1}$ e seja $\{0, k_1m + 1, \ldots, k_{m-1}m + (m - 1)\}$ o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico em m. Como duas diferentes composições de g correspondem a dois diferentes conjuntos de Apéry, então h é injetiva. Logo vemos que o número de composições de g, as quais são coordenadas de Kunz de um semigrupo numérico, em $m - 1$ é, no máximo, $N(m, g)$. Portanto, $N(m, g)$ é o número de composições dessa forma.

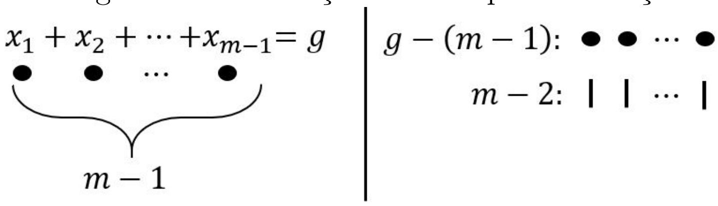
$\blacksquare$

Corolário 2.2 *Sejam m e $g \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$ e $g \geq 1$. Então $N(m,g) \leq \binom{g-1}{m-2}$*

Demonstração: Seja B o subconjunto do conjunto de composições de g. A cardinalidade de B é limitada pela a quantidade de soluções da equação $x_1+x_2+\cdots+x_{m-1} = g$, para $x_i \in \mathbb{Z}$ e $x_i \geq 1$.

Utilizando o método ponto e traço, temos a seguinte configuração:

Figura 2.3: Utilização método ponto e traço



Temos então um total de $g-(m-1)$ bolas e $m-2$ traços, assim o total de soluções é igual a $\binom{g-(m-1)+(m-2)}{m-2} = \binom{g-1}{m-2}$. Portanto $N(m,g) \leq \binom{g-1}{m-2}$

$\blacksquare$

Vimos que existe uma correpondência um a um entre as soluções $(k_1, \ldots, k_{m-1})$ do Sistema 1.10 e o conjunto de semigrupos numéricos com mutiplicidade m.

Agora considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_i \geq 1 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ x_i + x_j \geq x_{i+j} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ x_i + x_j + 1 \geq x_{i+j-m} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} x_i = g \end{cases} \tag{2.3}$$

A Proposição 2.4 garante uma bijeção entre o conjunto de soluções do Sistema 2.3 e o conjunto de semigrupos numéricos com multiplicidade m e gênero g.

Agora notaremos algumas características para semigrupos numéricos de multiplicidade m e gênero g que satisfazem $2g < 3m$. Observaremos resultados para valores de $N(m,g)$.

Proposição 2.5 *Suponha que $2g < 3m$ e que $S = \langle m, k_1m+1, \ldots, k_{m-1}m+m-1 \rangle$ é um semigrupo de gênero $\sum_{i=1}^{m-1} k_i = g$, em que $k_i \geq 1$. Então $k_{m-1} \leq 2$.*

Demonstração: Faremos esta demonstração por contradição. Vamos supor que $\{0, k_1m+1, \ldots, k_{m-1}m+(m-1)\}$ é o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico com gênero $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$, $2g < 3m$ e que $k_{m-1} \geq 3$. Pelo Sistema 1.10, para cada $1 \leq i \leq m-2$, temos que $k_i + k_{(m-1)-i} \geq k_{m-1} \geq 3$. Observe então a seguinte construção:

$$\begin{aligned}
k_1 + k_{m-2} &\geq k_{m-1} \geq 3\\
k_2 + k_{m-3} &\geq k_{m-1} \geq 3\\
&\vdots\\
k_{m-2} + k_1 &\geq k_{m-1} \geq 3
\end{aligned}$$

Somando as inequações temos $2\sum_{i=1}^{m-2} k_i \geq 3(m-2)$.

Adicionando $2k_{m-1}$ aos dois lados da inequação temos

$$2\sum_{i=1}^{m-1} k_i \geq 3(m-2) + 2k_{m-1}.$$

Pela Proposição 1.3 temos que $2\sum_{i=1}^{m-1} k_i = 2g$, portanto

$$2g \geq 3(m-2) + 2k_{m-1} \geq 3m - 6 + 6 = 3m,$$

o que é um absurdo. Portanto, $k_{m-1} \leq 2$.

■

Proposição 2.6 *Suponha que $2g < 3m+2$ e que $S = \langle m, k_1m+1, \ldots, k_{m-1}+m-1\rangle$ é um semigrupo de gênero $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$, em que $k_i \geq 1$. Então $k_i \leq 3$, para cada $i \in [1, m-1] \cap \mathbb{Z}$.*

Demonstração: Faremos esta demonstração por contradição. Suponhamos que $\{0, k_1m+1, \ldots, k_{m-1}m+m-1\}$ é o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico com gênero $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$, $2g < 3m+2$, e que existe algum $r \in [1, m-1] \cap \mathbb{Z}$ com $k_r \geq 4$. Pelo Sistema 1.10, para cada $j \in [1, r-1]$, tem-se $k_j + k_{r-j} \geq k_r \geq 4$. Observe então a seguinte construção:

$$\begin{aligned}
k_1 + k_{r-1} \geq k_r &\geq 4\\
k_2 + k_{r-2} \geq k_r &\geq 4\\
&\vdots\\
k_{r-1} + k_1 \geq k_r &\geq 4
\end{aligned}$$

Somando as inequações acima obtemos $2\sum_{i=1}^{r-1} k_i \geq 4(r-1)$.

Ainda pelo Sistema 1.10, para cada $j \in [r+1, m-1] \cap \mathbb{Z}$ tem-se $k_j + k_{m+r-j} + 1 \geq k_r \geq 4$, isto é $k_j + k_{m+r-j} \geq 3$. Observe então a seguinte construção:

$$\begin{aligned} k_{r+1} + k_{m-1} \geq k_r &\geq 3 \\ k_{r+2} + k_{m-2} \geq k_r &\geq 3 \\ &\vdots \\ k_{m-1} + k_{r+1} \geq k_r &\geq 3 \end{aligned}$$

Somando as inequações acima obtemos $2\sum_{i=r+1}^{m-1} k_i \geq 3(m-r-1)$. Assim, tomando a soma $\sum_{i=1}^{m-1} 2k_i$, obtemos

$$2g = 2k_r + 2\sum_{j=1}^{r-1}(k_j) + 2\sum_{j=r+1}^{m-1}(k_j) \geq 8 + 4(r-1) + 3(m-r-1) \geq 3m+2,$$

pois $r \geq 1$, uma contradição. Portanto $k_i \leq 3$.

■

Para terminar esta seção provaremos o teorema abaixo e será apresentada a Tabela 2.1 construída por Kaplan [5].

Teorema 2.1 *Suponha que $2g < 3m$. Então*

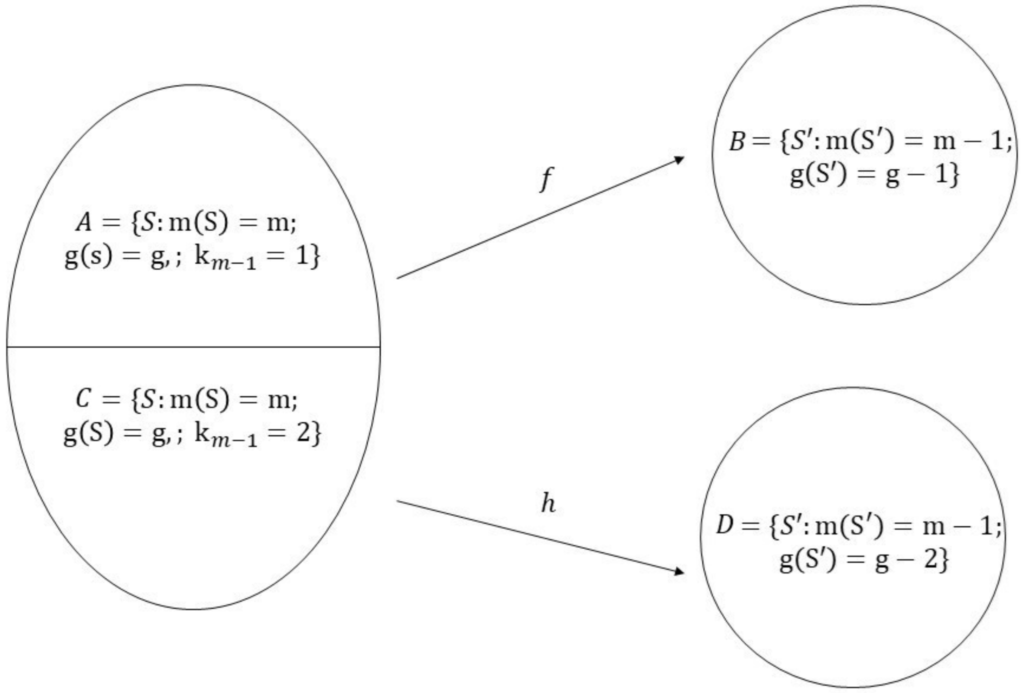
$$N(m-1, g-1) + N(m-1, g-2) = N(m, g).$$

Demonstração: Seja $S = \langle m, k_1m+1, \ldots, k_{m-1}m+m-1\rangle$ um semigrupo numérico de gênero $g = \sum_{i=1}^{m-1} k_i$ com cada $k_i \geq 1$ para todo $i \in [1, m-1] \cap \mathbb{Z}$. Pelas Proposições 2.5 e 2.6, $k_{m-1} \in \{1, 2\}$ e $1 \leq k_i \leq 3$ para todo i.

A ideia central dessa demonstração é o fato que $S' = \langle m-1, k_1(m-1)+1, \ldots, k_{m-2}(m-1)+m-2\rangle$ é um semigrupo numérico de gênero $\sum_{i=1}^{m-2} k_i = g - k_{m-1}$ e multiplicidade $m-1$.

Considere os conjuntos $A = \{S : g(S) = g; m(S) = m, k_{m-1} = 1\}$, $B = \{S' : g(S') = g-1; m(S') = m-1\}$, $C = \{S : g(S) = g; m(S) = m, k_{m-1} = 2\}$ e $D = \{S' : g(S') = g-2; m(S') = m-1\}$. Pela Proposição 2.5, $N(m, g) = \#A + \#C$. Também, $N(m-1, g-1) = \#B$ e $N(m-1, g-2) = \#C$. Perceba que para demonstrar o teorema, basta construir $f : A \to B$ e $h : C \to D$ bijetivas. A Figura 2.4 resume bem o que será feito.

Figura 2.4: Representação das funções f e h



Primeiro provaremos que a função f está bem definida. Suponha que a lei de formação de f seja $f(S) = S'$, em que $Kunz(S, m) = (k_1, k_2, \ldots, k_{m-2}, 1)$ e $Kunz(S', m-1) = (k_1, k_2, \ldots, k_{m-2})$. Como $S \in A$, então S é semigrupo numérico de multiplicidade m, genêro g e $k_{m-1} = 1$. Para garantir que S' seja semigrupo numérico de gênero $g-1$ e multiplicidade $m-1$, isto é, $S' \in B$, ele precisa satisfazer o Sistema 1.10.

Precisamos então provar que $k_i + k_j \geq k_{i+j}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq m-2, i+j \leq m-2$ e que $k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-(m-1)}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq m-2, i+j > m-2$. A primeira condição é válida pois $\{k_1 m + 1, \ldots, k_{m-1} m + m - 1\}$ é conjunto de Apéry de um semigrupo numérico por hipótese. A segunda condição é válida pois, pela Proposição 2.6, sabemos que $1 \leq k_i \leq 3$. Dessa forma $k_i + k_j + 1 \geq 3 \geq k_{i+j-(m-1)}$. De forma análoga podemos provar que h está bem definida para $h(S) = S'$.

Agora provaremos as injetividades de f e h. Sabemos que existe uma bijeção entre as soluções $(k_1, \ldots, k_{m-1})$ do Sistema 1.10 e o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico com multiplicidade m e gênero g. Da mesma forma existe uma correspondência um a um entre as soluções $(k_1, \ldots, k_{m-2})$ e o conjunto de Apéry de um semigrupo numérico com multiplicidade $m-1$ e gênero $g - k_{m-1}$. Portanto perceba que para semigrupos numéricos distintos cujo vetor de Kunz em m seja $(k_1, \ldots, k_{m-1})$, teremos semigrupos numéricos S' também distintos de vetor de Kunz em $m-1$ igual a $(k_1, \ldots, k_{m-2})$, garantindo assim a injetividade de f e h.

Com o intuito de provar a bijetividade das funções f e h, vamos mostrar que as elas são sobrejetivas.

Vamos começar com $S' = \langle m-1, k_1(m-1)+1, \ldots, k_{m-1}(m-1)+m-2\rangle$, um semigrupo numérico de multiplicidade $m-1$ e gênero ou $g-1$ ou $g-2$. Notamos que $2g < 3m$ implica que $2(g-1) = 2g-2 < 3m-2 = 3(m-1)+1$ e portanto, pela Proposição 2.6 podemos ver que cada $k_i \leq 3$. Agora vamos considerar $S = \langle m, k_1m + 1, \ldots, k_{m-2}m+m-2, k_{m-1}m+m-1\rangle$, em que k_{m-1} é ou 1 ou 2 dependendo se o gênero de S' for $g-1$ ou $g-2$. Vamos mostrar que $\{k_1m+1, \ldots, k_{m-2}m+m-2, k_{m-1}m+m-1\}$ satisfaz as inequações. As inequações a serem verificadas são $k_i + k_j \geq k_{i+j}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1$ e $k_i + k_j + 1 \geq k_{i+j-m}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m$. A primeira é satisfeita pela hipótese de que S' é semigrupo numérico, pois $k_i + k_j \geq k_{i+j}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq m-2, i+j \leq m-2 < m-1$. Para $m-1 = i+j$ temos que $k_i + k_j \geq k_{m-1}$ pois $k_{m-1} \in \{1, 2\}$ e $k_j \geq 1$. Para a última condição temos que para $i+j > m-1$ temos que $k_i+k_j+1 \geq 3 \geq k_{i+j-m}$, completando as condições.

Assim, f e h são bijetivas, concluindo assim a demonstração.

■

$g \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	n_g
0	1																			1
1		1																		1
2		1	1																	2
3		1	2	1																4
4		1	2	3	1															7
5		1	2	4	4	1														12
6		1	3	6	7	5	1													23
7		1	3	7	10	11	6	1												39
8		1	3	9	13	17	16	7	1											67
9		1	4	11	16	27	28	22	8	1										118
10		1	4	13	22	37	44	44	29	9	1									204
11		1	4	15	24	49	64	72	66	37	10	1								343
12		1	5	18	32	66	85	116	116	95	46	11	1							592
13		1	5	20	35	85	112	172	188	182	132	56	12	1						1001
14		1	5	23	43	106	148	239	288	304	277	178	67	13	1					1693
15		1	6	26	51	133	191	325	409	492	486	409	234	79	14	1				2857
16		1	6	29	61	163	237	441	559	754	796	763	587	301	92	15	1			4806
17		1	6	32	68	196	301	573	750	1094	1246	1282	1172	821	380	106	16	1		8045
18		1	7	36	80	236	369	737	1015	1534	1841	2074	2045	1759	1122	472	121	17	1	13467

Tabela 2.1: Alguns valores de $N(m, g)$

Capítulo 3

Semigrupos numéricos com multiplicidade pequena

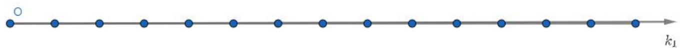
Neste capítulo iremos estudar como outros invariantes podem determinar semigrupos numéricos. No capítulo anterior vimos como as inequações limitam uma região em $\mathbb{R}^n$ e como existe uma correspondência entre os pontos inteiros dessa região e semigrupos numéricos. Neste nos concentraremos em determinar unicamente semigrupos numéricos de multiplicidade 2, 3 e 4. As referências para este capítulo são Rosales [8] e Karakas [9].

Para darmos início ao nosso estudo vale relembrar as definições de número de Frobenius e de raio de um semigrupo numérico. Seja S um semigrupo numérico e considere $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_e\}$ o sistema minimal de geradores. O raio de S é n_2 e é denotado por $R(S)$ e o número de Frobenius, denotado por $F(S)$, é a maior lacuna do semigrupo numérico S, para $S \neq \mathbb{N}_0$.

3.1 Multiplicidade 2

A primeira observação que faremos é que semigrupos numéricos com multiplicidade 2 estão completamente determinados pelo número de Frobenius, pelo gênero ou pelo raio. Perceba que existe uma bijeção entre pontos inteiros da parte positiva da reta numérica e semigrupos numéricos de multiplicidade 2, como representado na Figura 3.1. Se um invariante for dado, seja o gênero, o número de Frobenius ou o raio, então o semigrupo numérico fica completamente determinado.

Figura 3.1: Multiciplidade 2 em $\mathbb{R}$



Seja S um semigrupo numérico de número de Frobenius F, raio R e gênero g. Note que como o F pertence ao conjunto de lacunas, podemos afirmar que ele é ímpar. Desta forma é fácil ver que o primeiro ímpar pertencente a S será $F+2$, logo $S = \langle 2, F+2\rangle$.

Pela Proposição 1.3 para S com $m = 2$ temos que $g = k_1$, desta forma S está completamente determinado e $S = \langle 2, 2g+1\rangle$.

Para semigrupos numéricos com multiplicidade 2, o raio R é o menor ímpar pertencente a S e que $R = F + 2 = 2g + 1$, logo $S = \langle 2, R\rangle$.

3.2 Multiplicidade 3

Semigrupos numéricos com multiplicidade 3 não estão completamente determinados por apenas uma invariante. Notaremos no decorrer desta seção que são necessários dois invariantes, dentre estas R, F ou g, para que o semigrupo numérico com multiplicidade 3 seja completamente determinado.

Proposição 3.1 *Seja S um semigrupo numérico com multiplicidade 3, número de Frobenius F e gênero g. Então $Ap(S,3) = \{0 < 3g - F < F + 3\}$.*

Demonstração: Seja S um semigrupo numérico de multiplicidade 3, número de Frobenius F e gênero g. Então $Ap(S,3) = \{0, F+3, z\}$, pela Proposição 1.5. Temos apenas duas possibilidades: $F+3 = 3k_1+1$ e $z = 3k_2+2$ ou vice-versa, em que $k_i \in \mathbb{N}$. Em qualquer uma delas, ao calcular $F + 3 + z$, obtemos

$$F + 3 + z = 3k_1 + 1 + 3k_2 + 2,$$

isto é,

$$z = 3(k_1 + k_2) + 3 - F - 3.$$

Como $k_1 + k_2 = g$, então

$$z = 3g - F.$$

Assim, $Ap(S,3) = \{0, F+3, 3g-F\}$. Além disso, pela Proposição 1.5, $F + 3$ é o maior elemento em $Ap(S,3)$. Portanto, $Ap(S,3) = \{0 < 3g - F < F + 3\}$. Em particular, $S = \langle 3, 3g - F, F + 3\rangle$.

■

Observação 3.1 *Como R é o segundo menor gerador do semigrupo numérico então, se S é um semigrupo numérico com multiplicidade 3, número de Frobenius F e gênero g, então $R = 3g - F$.*

Proposição 3.2 *Se $m = 3$, então $R \not\equiv F \pmod 3$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1 sabemos que um semigrupo numérico S de multiplicidade 3 é tal que $S = \langle 3, 3g - F, F + 3\rangle$.

Se $k_1 \leq k_2$, sabemos que $F+3 = 3k_2+2$. Dessa forma $F \equiv 2 \pmod 3$ e $R = 3g-F$. Logo, $R \equiv 1 \pmod 3$.

Se $k_1 > k_2$, sabemos que $F+3 = 3k_1+1$. Dessa forma $F \equiv 1 \pmod 3$ e $R = 3g-F$. Logo, $R \equiv 2 \pmod 3$. Concluímos então que $R \not\equiv F \pmod 3$.

■

Veremos a seguir uma relação entre gênero e número de Frobenius para semigrupos numéricos de multiplicidade 3.

Proposição 3.3 *Seja S um semigrupo numérico com multiplicidade 3, número de Frobenius F e gênero g. Então $\frac{F+1}{2} \leq g < \frac{2F+3}{3}$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.1, sabe-se que $Ap(S, 3) = \{0 < 3g - F < F + 3\}$. Como $3g - F < F + 3$, então $g < \frac{2F+3}{3}$. Como $2(3g - F) \equiv F + 3 \pmod 3$, então $2(3g - F) \geq F + 3$ e, assim, $g \geq \frac{F+1}{2}$.

■

Teorema 3.1 *Seja F um inteiro positivo maior que ou igual a quatro e não múltiplo de três. Seja g um inteiro positivo tal que $\frac{F+1}{2} \leq g \leq \frac{2F+3}{3}$. Então $S = \langle 3, 3g-F, F+3\rangle$ é o único semigrupo numérico com multiplicidade 3, número de Frobenius F e gênero g.*

Demonstração: Observe que $\{0, 3g-F, F+3\}$ é um conjunto de inteiros incongruentes módulo 3. Como $g < \frac{2F+3}{3}$, temos que $3g - F < F + 3$. Note que se $F \geq 4$, então $\frac{F+1}{2} > \frac{F+3}{3}$. Como $g \geq \frac{F+1}{2} > \frac{F+3}{3}$, então $3g - F > 3$. Se $g \geq \frac{F+1}{2}$, obtemos que $2g \geq F + 1$. Consequetemente $6g \geq 3F + 3$ e, assim, $2(3g - F) \geq F + 3$. Usando a Proposição 3.1, obtemos que $Ap(S, 3) = \{0 < 3g - F < F + 3\}$ e, assim, S é um semigrupo numérico com multiplicidade 3 e número de Frobenius F. Utilizando a fórmula de Selmer (Proposição 1.4), obtemos que $g(S) = \frac{1}{3}(3g - F + F + 3) - \frac{3-1}{2} = g$

■

Provamos no Teorema 3.1 que um semigrupo numérico está completamente determinado pelo seu gênero e número de Frobenius. Faremos agora uma construção geométrica com intuito de concretizar essa ideia.

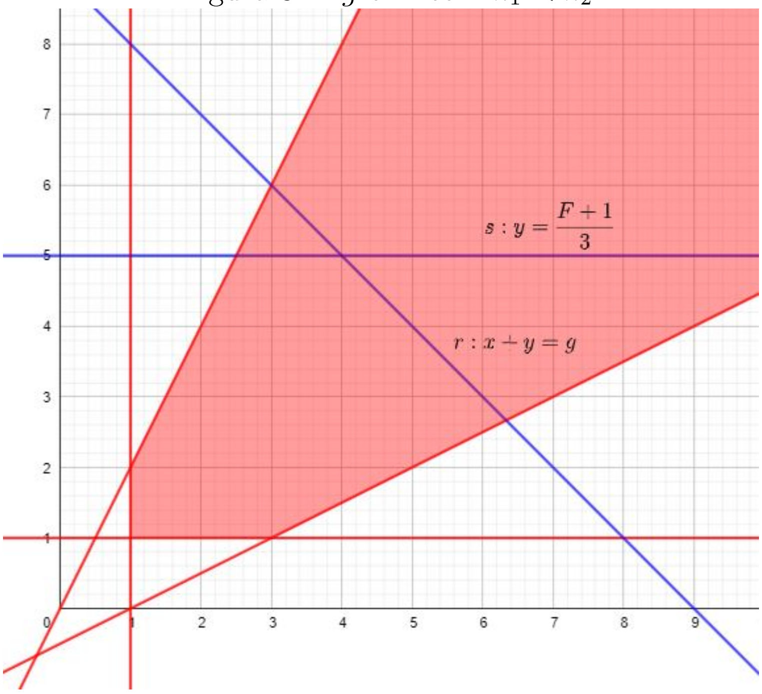
Pela Proposição 3.1, sabe-se que $Ap(S,3) = \{0 < 3g - F < F + 3\}$. Logo, se $k_1 \leq k_2$, sabemos que $3k_2 + 2 = F + 3$. Assim $k_2 = \frac{F+1}{3}$.

Podemos então, estabelecer duas retas:

$$\begin{cases} r: x + y = g \\ s: y = \frac{F+1}{3} \end{cases}$$

Perceba na Figura 3.2 que essas duas retas se encontraram em um único ponto, que representa um semigrupo numérico de gênero g e número de Frobenius F.

Figura 3.2: g e F com $k_1 < k_2$



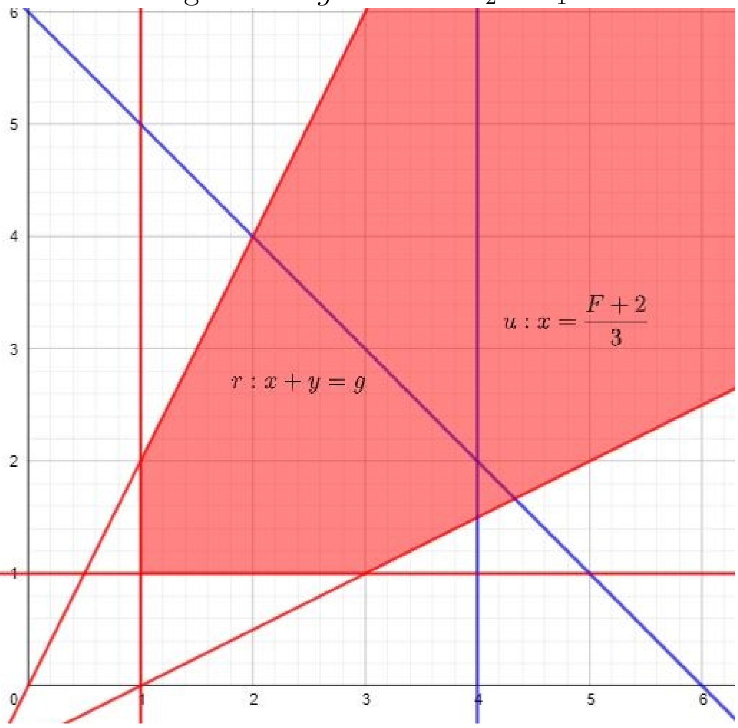
Da mesma forma se fizermos para $k_2 < k_1$, obtemos que $3k_1 + 1 = F + 3$. Assim $k_1 = \frac{F+2}{3}$, estabelecendo assim as seguintes retas:

$$\begin{cases} r: x + y = g \\ u: x = \frac{F+2}{3} \end{cases}$$

Perceba na Figura 3.3 que essas duas retas se encontraram em um único ponto, que representa um semigrupo numérico.

Vamos fixar os invariantes g e $R \not\equiv 0 \pmod 3$ e vamos observar graficamente que quando estão fixadas obtem-se um único semigrupo numérico.

Figura 3.3: g e F com $k_2 < k_1$



Para $k_1 \leq k_2$ temos que $3k_1 + 1 = R$, logo $k_1 = \frac{R-1}{3}$. Assim, construimos as duas retas a seguir:

$$\begin{cases} r : x + y = g \\ t : x = \frac{R-1}{3} \end{cases}$$

Já para $k_2 < k_1$, $3k_2 + 2 = R$, logo, $k_2 = \frac{R-2}{3}$, estabelecemos assim as retas:

$$\begin{cases} r : x + y = g \\ v : y = \frac{R-2}{3} \end{cases}$$

Observe as Figuras 3.4 e 3.5 e perceba que essas retas determinam um único ponto inteiro que corresponde a um semigrupo numérico.

Figura 3.4: g e R com $k_1 < k_2$

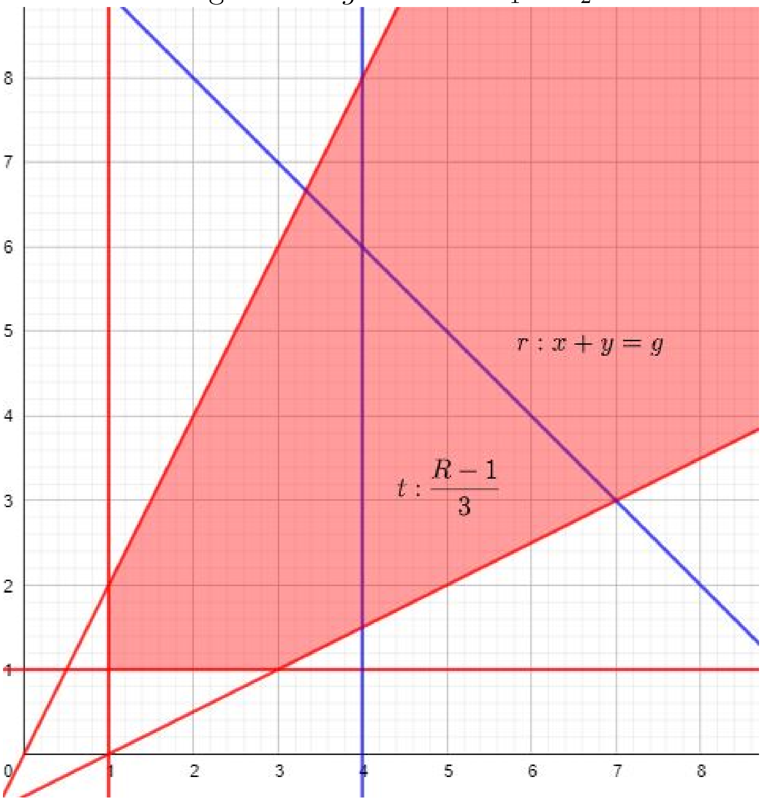
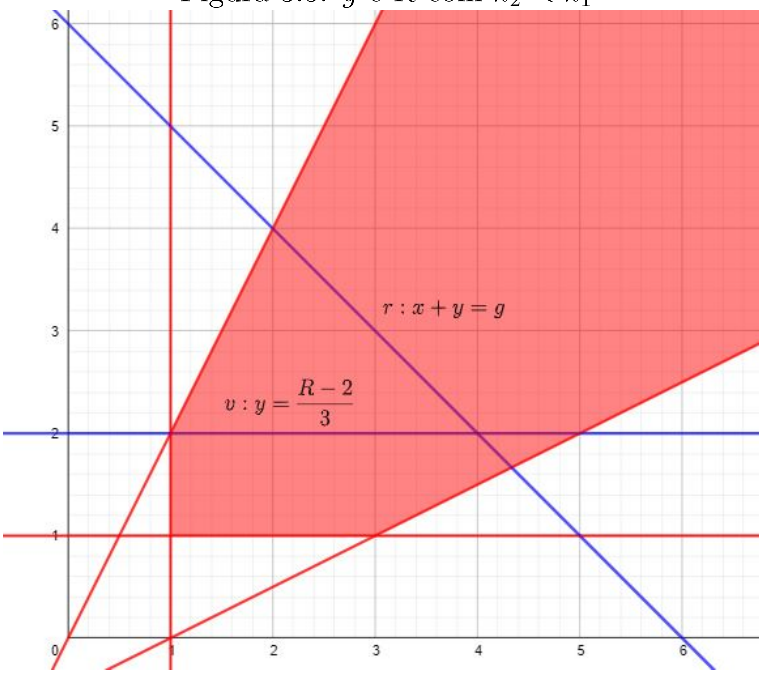


Figura 3.5: g e R com $k_2 < k_1$



Agora vamos fixar os invariantes R e F e observar o seu comportamento gráfico. Para $k_1 \leq k_2$ temos que $R = 3k_1 + 1$ e que $F + 3 = 3k_2 + 2$. Assim $k_1 = \frac{R-1}{3}$ e

$k_2 = \frac{F+1}{3}$ e estabelecemos as seguintes retas:

$$\begin{cases} s : y = \frac{F+1}{3} \\ t : x = \frac{R-1}{3} \end{cases}$$

Para $k_2 < k_1$ temos que $R = 3k_2 + 2$ e que $F + 3 = 3k_1 + 1$. Assim $k_2 = \frac{R-2}{3}$ e $k_1 = \frac{F+2}{3}$ e construimos as retas:

$$\begin{cases} u : x = \frac{F+2}{3} \\ v : y = \frac{R-2}{3} \end{cases}$$

Observe as Figuras 3.6 e 3.7 e perceba que os invariantes R e F determinam um único ponto inteiro que corresponde a um semigrupo numérico.

Figura 3.6: R e F com $k_1 < k_2$

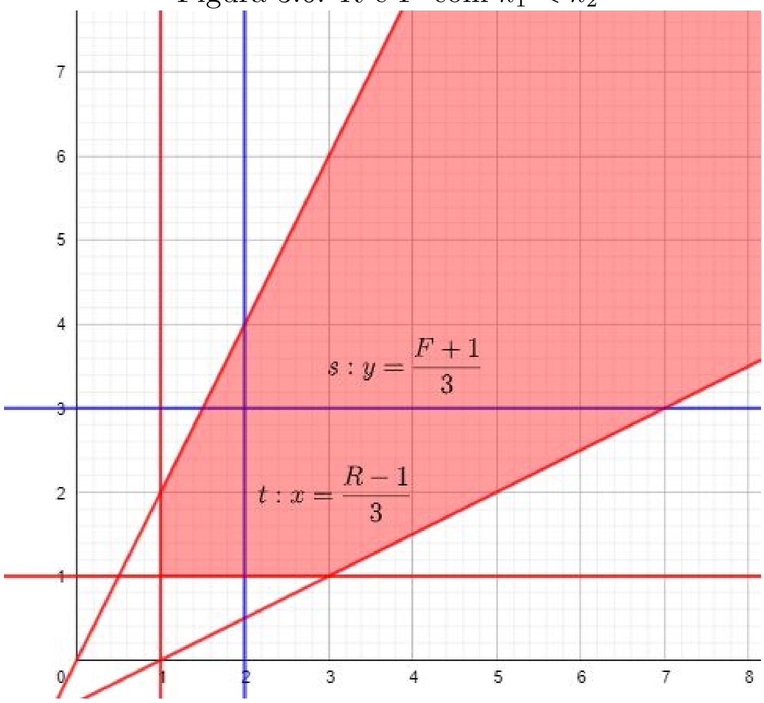
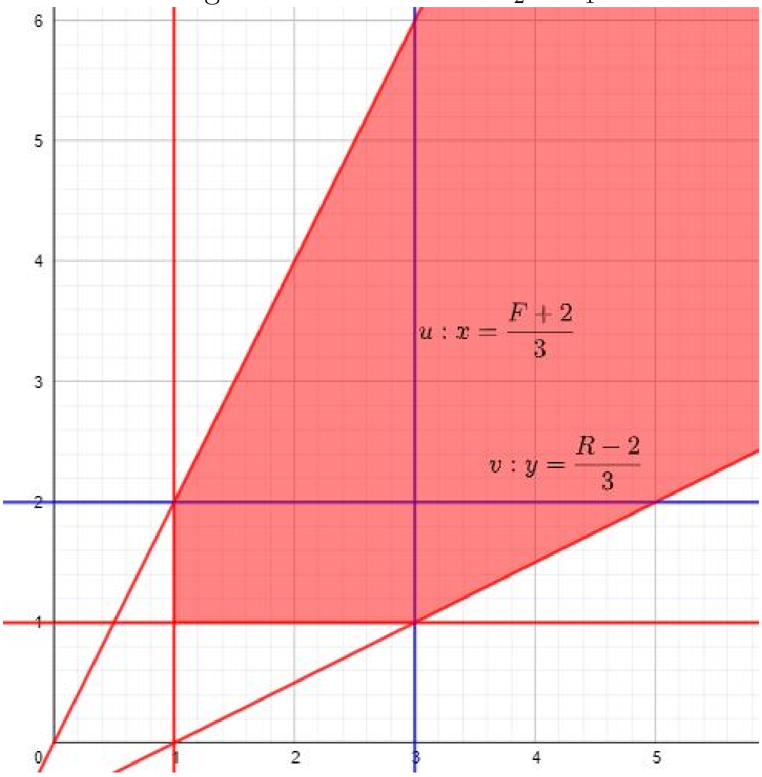


Figura 3.7: R e F com $k_2 < k_1$



3.3 Multiplicidade 4

Semigrupos numéricos com multiplicidade 4 não estão unicamente definidos por dois invariantes, assim como os semigrupos numéricos de multiplicidade 3. Nesta seção obteremos alguns resultados fixando uma das invariante (raio, número de Frobenius e gênero) e depois observaremos o resultado quando duas delas são dadas e assim concluir que semigrupos numéricos com multiplicidade 4 serão unicamente determinados pelo gênero, número de Frobenius e raio.

Proposição 3.4 *Seja S um semigrupo numérico com multiplicidade 4, número de Frobenius F, gênero g e raio R. Então $Ap(S,4) = \{0 < R < 4g - F - R + 2 < F + 4\}$.*

Demonstração: Se $Ap(S,4) = \{0 < w_1 < w_2 < w_3\}$, então $S = \langle 4, w_1, w_2, w_3 \rangle$ e assim $w_1 = R$. Além disso, $F = \max(Ap(S,4)) - 4$, isso implica que $w_3 = F + 4$. Pela Proposição 1.4, temos que $g = \frac{1}{4}(R + w_2 + F + 4) - \frac{3}{2}$, logo $w_2 = 4g - F - R + 2$.

■

Proposição 3.5 *Se $m = 4$, então $R \not\equiv F \pmod 4$.*

Demonstração: Pela Proposição 3.4 sabemos que um semigrupo numérico S de multiplicidade 4 é tal que $S = \langle 4, R, 4g - F - R + 2, F + 4\rangle$.

Pela Proposição 1.1 sabemos que os elementos do conjunto de Apéry são incongruentes entre si. Assim, $R \not\equiv F + 4 \pmod 4$. Portanto, $R \not\equiv F \pmod 4$.

■

Como consequência imediata dessa proposição obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.1 *Dois semigrupos numéricos com multiplicidade* 4 *são o mesmo se, e somente se, tiverem o mesmo número de Frobenius, gênero e raio.*

Mas será que é possível fazer alguma conclusão, para semigrupos numéricos de multiplicidade 4, com apenas um dos invariantes fixadas? A fim de responder esse questionamento segue um lema que auxiliará na construção de alguns exemplos.

Proposição 3.6 *Se S é um semigrupo numérico de multiplicidade* 4*, número de Frobenius F e gênero g, então $\lceil \frac{F+1}{2} \rceil \leq g \leq F - \lfloor \frac{F}{4} \rfloor$.*

Demonstração: Pela cota superior do Corolário 1.1 ($F \leq 2g-1$), temos que $g \geq \frac{F+1}{2}$, como $g \in \mathbb{Z}$ então $g \geq \lceil \frac{F+1}{2} \rceil$. Além disso, como $\{0, 4, 8, \ldots, 4\lfloor \frac{F}{4} \rfloor\} \subset S$, concluímos que $g \leq F - \lfloor \frac{F}{4} \rfloor$.

■

Agora queremos obter informações sobre os semigrupos numéricos com multiplicidade 4 e número de Frobenius F.

Proposição 3.7 *Existe uma quantidade finita de semigrupos numéricos S com multiplicidade* 4 *e número de Frobenius F.*

Demonstração: Pela Proposição 3.4 sabemos que $Ap(S, 4) = \{0 < R < 4g - F - R + 2 < F + 4\}$, logo, se F é dado, vamos ter uma quantidade finita de possibilidades para (g, R).

■

Façamos um exemplo.

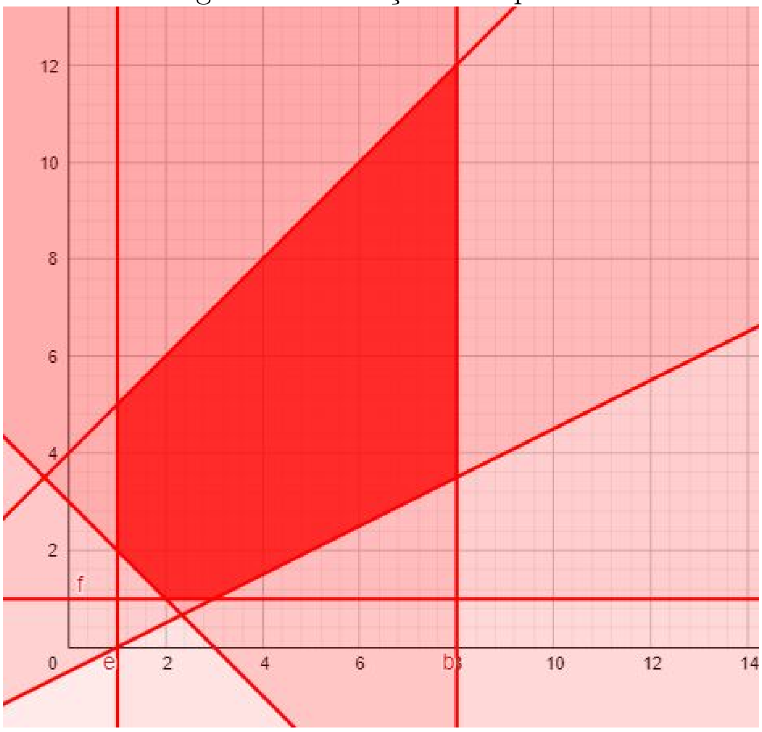
Exemplo 3.1 *Vamos construir os semigrupos numéricos com multiplicidade* 4 *e* $F = 13$.

Note que o maior elemento do conjunto de Apéry é $F+4 = 13+4 = 17 \equiv 1 \pmod 4$. *Logo* $4k_1+1 = 17$, *isto é,* $k_1 = 4$. *Pela Proposição 3.6,* $g \in [7, 10]$. *Escolheremos* $g = 8$, *pois os demais casos são análogos.*

Neste caso, temos que $k_2 + k_3 = 4$. *Assim as possíveis soluções são* $(1, 3), (2, 2)$ *e* $(3, 1)$. *Logo os possíveis S são* $\langle 4, 6, 15, 17\rangle, \langle 4, 10, 11, 17\rangle$ *e* $\langle 4, 7, 14, 17\rangle$.

A Figura 3.8 ilustra graficamente o Exemplo 3.1.

Figura 3.8: Solução exemplo 3.1



Fixaremos agora o gênero e queremos obterinformações sobre os semigrupos numéricos de multiplicidade 4 e gênero g.

Proposição 3.8 *Existe uma quantidade finita de semigrupos numéricos S com multiplicidade 4 e gênero g.*

Demonstração: Seja $S = \langle 4, 4k_1 + 1, 4k_2 + 2, 4k_3 + 3 \rangle$. Pela Proposição 1.3 sabemos que $k_1 + k_2 + k_3 = g$. Como a soma está fixada e k_1, k_2 e k_3 são inteiros positivos, concluimos que existe uma quantidade finita de soluções para essa equação. Com isso, uma quantidade finita de semigrupos numéricos $S = \langle 4, 4k_1 + 1, 4k_2 + 2, 4k_3 + 3 \rangle$ com gênero g.

∎

Observe que a Proposição 3.8 é consequência direta do Corolário 2.2.

Façamos um exemplo.

Exemplo 3.2 *Vamos construir os semigrupos numéricos com multiplicidade $m = 4$ e gênero $g = 5$.*

Como $k_1 + k_2 + k_3 = 5$, as possíveis soluções são $(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ e $(3, 1, 1)$.

Dessas soluções aquelas que satisfazem o Sistema 1.10 são $(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)$ *e* $(3,1,1)$. *Assim há* 4 *semigrupos numéricos, a saber,* $\langle 4,5,10,11\rangle, \langle 4,9,6,11\rangle, \langle 4,9,10,7\rangle$ *e* $\langle 4,13,6,7\rangle$.

Note que a quantidade de semigrupos numéricos encontrado coincide com $N(4,g)$ *da Tabela 2.1.*

Fixemos agora a razão R e vamos observar os resultados.

Proposição 3.9 *Se* $R \equiv 1$ *ou* $3 \pmod 4$, *então existe uma quantidade finita de semigrupos numéricos com multiplicidade* 4 *e raio* R.

Demonstração: Suponha que $R \equiv 1 \pmod 4$. Dessa forma tem-se que $k_1 = \frac{R-1}{4}$ está fixado. Como k_1 está fixado, temos, pelo Sistema 1.7, que $k_2 \leq 2k_1$ e $k_3 \leq k_1+k_2 \leq 3k_1$. Dessa forma, temos uma quantidade finita de possibilidades para k_2 e k_3, isto é, uma quantidade finita de semigrupos numéricos com multiplicidade 4 e raio R. O processo é análogo para $R \equiv 3 \pmod 4$.

■

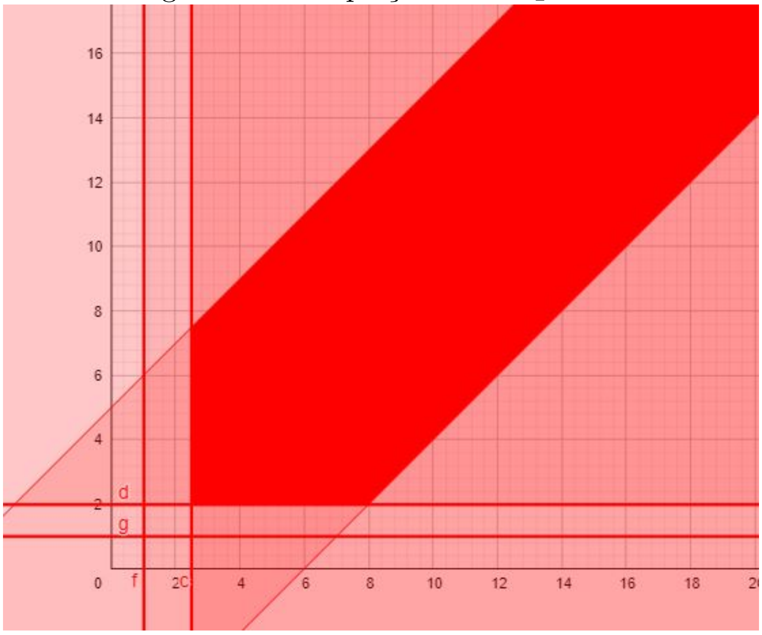
Proposição 3.10 *Se* $R \equiv 2 \pmod 4$, *então existe uma quantidade infinita de semigrupos numéricos com multiplicidade* 4 *e raio* R.

Demonstração: Se o raio está fixado e $R \equiv 2 \pmod 4$ sabe-se que k_2 está fixado. Com apenas o k_2 fixado não é possível limitar k_1 e k_3, visto que teríamos fixados apenas números pares no conjunto de geradores, a multiplicidade 4 e $w_2 = 4k_2 + 2$. Isso garante que existem infinitos semigrupos numéricos com $R \equiv 2 \pmod 4$. De fato, se $l \in \mathbb{Z}, 2l \geq k_1$, então $S = \langle 4, 4l+1, 4k_2+2, 4l+3\rangle$ é um semigrupo numérico com multiplicidade 4 e raio $R = 4k_2 + 2$. Nessas condições, (l, k_2, l) satisfaz o Sistema 1.7.

■

A Figura 3.9 representa graficamente o que acontece quando apenas o k_2 está fixado.

Figura 3.9: Inequações com k_2 fixado



Construiremos dois exemplos a fim de ilustrar cada um dos casos supracitados.

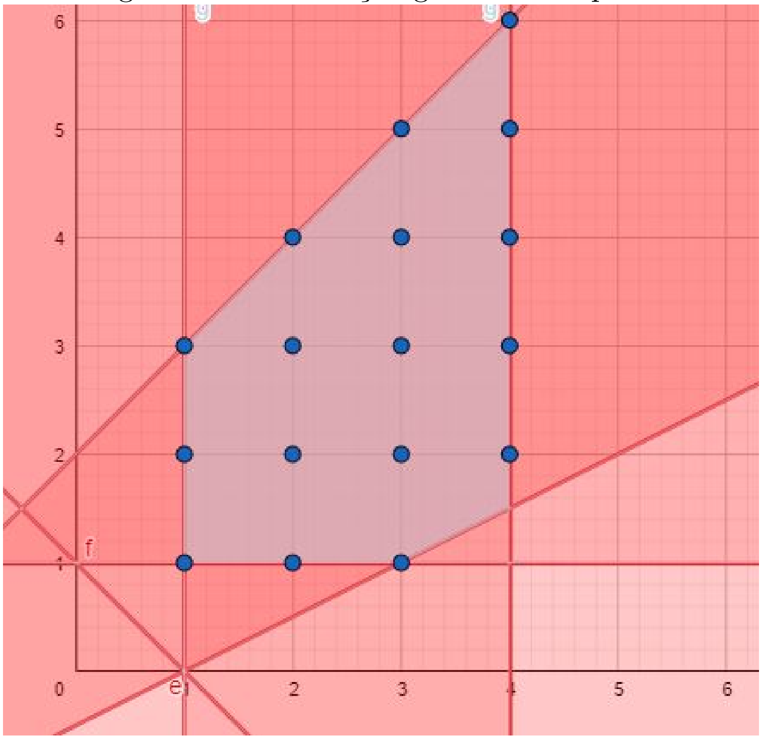
Exemplo 3.3 *Seja* $R = 9 \equiv 1 \pmod 4$*. Sabe-se que* $k_1 = 2$*. Substituindo no Sistema 1.7 temos que :*

$$\begin{cases} k_2 + k_3 & \geq & 1 \\ 4 & \geq & k_2 \\ 2k_3 + 1 & \geq & k_2 \\ 2 + k_2 & \geq & k_3 \end{cases} \tag{3.1}$$

Como consequência direta dessas inequações, temos que $k_2 \leq 4$ *e* $k_3 \leq 6$*. Teremos assim as seguintes soluções para* (k_1, k_2, k_3)*:* $(2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,2,2),$ $(2,2,3), (2,2,4), (2,3,1), (2,3,2), (2,3,3), (2,3,4), (2,3,5), (2,4,2), (2,4,3), (2,4,4),$ $(2,4,5)$ *e* $(2,3,6)$.

A Figura 3.10 apresenta a solução gráfica pra o Exemplo 3.3, perceba que os ponto azuis são as soluções inteiras que foram encontradas.

Figura 3.10: Resolução gráfica Exemplo 3.3



Exemplo 3.4 *Seja $R = 10 \equiv 2 \pmod 4$, sabe-se que $k_2 = 2$. Substituindo nas no Sistema 1.7, temos*

$$\begin{cases} k_3 + 3 & \geq & k_1 \\ 2k_1 & \geq & 2 \\ 2k_3 + 1 & \geq & 2 \\ 2 + k_1 & \geq & k_3 \end{cases} \tag{3.2}$$

Assim, $k_1 \geq 1$, $k_3 \geq 1$ e $-3 \leq k_3 - k_1 \leq 2$.

Perceba que não é possível limitar superiormente nem k_1 nem k_3, assim temos infinitas soluções. A Figura 3.9 ilustra esse resultado.

O corolário abaixo é uma consequência imediata dos resultados acima.

Corolário 3.2 *Existe uma quantidade finita de semigrupos numéricos com $m = 4$ e com dois invariantes fixadas, dentre elas, o número de Frobenius F, o gênero g e o raio R.*

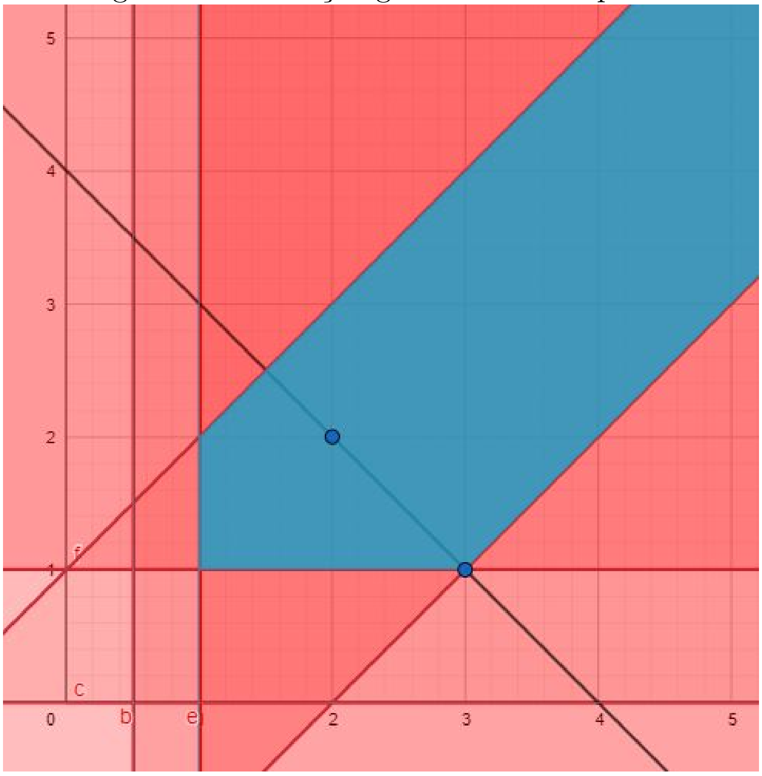
Faremos um exemplo com g fixado e $R \equiv 2 \pmod 4$ fixado e outro com F fixado e $R \equiv 2 \pmod 4$ fixado.

Exemplo 3.5 *Vamos construir semigrupos numéricos com $m = 4, g = 5$ e $R = 6$.*

Perceba que como $R = 6 \equiv 2 \pmod 4$, então $k_2 = 1$ e como $g = 5$, então temos que $k_1 + k_3 = 4$. Dessa forma as soluções para (k_1, k_3) são $(1, 3), (2, 2)$ e $(3, 1)$, mas as *únicas que satisfazem o Sitema 1.7 são* $(2,2)$ *e* $(3,1)$*. Assim os semigrupos numéricos com* $m = 4, g = 5$ *e* $R = 6$*, são* $\langle 4,6,9,11\rangle$ *e* $\langle 4,6,7,13\rangle = \langle 4,6,7\rangle$*.*

A Figura 3.11 representa a solução gráfica do Exemplo 3.5.

Figura 3.11: Solução gráfica do Exemplo 3.5



Exemplo 3.6 *Vamos construir os semigrupos numéricos com* $m = 4$*,* $R = 6$ *e* $F = 13$*.*

Como $R = 6 \equiv 2 \pmod 4$ *e* $F = 13 \equiv 1 \pmod 4$*, sabemos que* $k_1 = 4$ *e* $k_2 = 1$*. Substituindo no Sistema 1.7, obtém-se:*

$$\begin{cases} k_3 + 2 \geq 4 \\ 2k_3 + 1 \geq 1 \\ 5 \geq k_3 \end{cases} \tag{3.3}$$

A segunda equação do Sistema 1.7 é satisfeita, pois $2 \cdot 4 \geq 1$*. Dessa forma* $k_3 \in \{2,3,4,5\}$*. Assim,* $g = k_1 + k_2 + k_3 \in \{7,8,9,10\}$*. Como* $4g - F - R < F + 4$*, Então* $g \in \{7,8\}$*. Portanto os semigrupos numéricos são* $\langle 4,6,11,17\rangle$ *e* $\langle 4,6,15,17\rangle$*.*

Dados R, F e g, sob quais condições existe semigrupo numérico com multiplicidade 4, raio R, número de Frobenius F e gênero g? Pelo Corolário 3.1, quando existir, é único. Para existir, é necessário que:

1. $R \not\equiv F \pmod 4$; $R, F \not\equiv 0 \pmod 4$ e $F > 4$;

2. $\lceil \frac{F+1}{2} \rceil \leq g \leq F - \lfloor \frac{F}{4} \rfloor$;

3. $R < 4g - F - R + 2$, isto é, $2R < 4g - F + 2$;

4. $4g - F - R + 2 < F + 4$, isto é, $4g - R - 2 < 2F$;

5. $R < F + 4$.

Exemplo 3.7 *Queremos verificar se existe o semigrupo numérico com* $m = 4$*,* $R = 7$*,* $g = 13$ *e* $F = 22$*. Se houver, vamos encontrá-lo.*

Vamos verificar se as condições são satisfeitas para os valores escolhidos. Perceba que a primeira condição é satisfeita. Verificaremos as outras três.

Note que substituindo os valores na condição 2 *temos* $\lceil \frac{22+1}{2} \rceil = 12$ *e* $22 - \lfloor \frac{22}{4} \rfloor = 17$*, logo* $\lceil \frac{22+1}{2} \rceil \leq 13 \leq 22 - \lfloor \frac{22}{4} \rfloor$*. Assim a* 2 *condição está satisfeita.*

Observe que $7 < 4 \cdot 13 - 22 - 7 + 2 = 25 < 22 + 4$*. Logo as condições* $3, 4$ *e* 5 *estão garantidas. Concluímos assim que existe um único semigrupo numérico com* $m = 4$*,* $R = 7$*,*$g = 13$ *e* $F = 22$*, e o semigrupo numérico é* $S = \langle 4, 7, 25, 26 \rangle$*.*

Capítulo 4

Proposta de atividades para o Ensino Médio

Este capítulo tem por objetivo arrematar as ideias trabalhadas nos capítulos anteriores e propor algumas atividades para o ensino médio que contemple semigrupos numéricos, suas propriedades e invariantes. Para isso, começaremos com um exemplo do problema das moedas de Frobenius.

Suponha que um país só produza notas de valores 2 e 7. Seria possível realizar uma compra no valor de 5 sem haver troco? As partições de 5 são: $1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+3, 1+2+2, 1+4, 2+3$ e 5. Perceba que em nenhuma dessas partições há apenas combinações de 2 e 7, assim é fácil ver que é impossível realizar um pagamento de valor 5 sem que haja troco.

Ficam as seguintes perguntas: será que existem outros valores que também não podem ser obtidos? A quantidade de valores é finita ou não? Será que existe um valor tal que a partir dele todos os outros podem ser obtidos?

Perceba que para esse exemplo também é impossível realizar uma compra de valores 1 ou 3 sem que haja troco. Para este caso então, o conjunto de valores que não são obtidos é finito, pois a partir de 6 todos os outros valores podem ser obtidos.

Note que o problema supracitado é um exemplo de semigrupo numérico com $G(S) = \{1, 3, 5\}$, $c(S) = 6$ e $F(S) = 5$, mas com um contexto acessível para o ensino médio.

Desse primeiro exemplo já é possível propor uma atividade para o ensino médio. A atividade consiste em separar as turmas em grupos. O mediador entrega a cada equipe um cartão com situações parecidas com a supracitada e pede para que eles respondam as seguintes perguntas:

- Quais são os valores que não podem ser formados?
- A partir de qual valor, todos os seguintes estão inclusos?
- Qual é o maior valor que não pode ser obtidos com os valores dados?

Observação 4.1 *Segue uma sugestão para se colocar nos cartões entregues aos estudantes: Em um país, as pessoas não dão troco em compras de mercadorias e os únicos valores de notas são X e Y. As mercadorias só podem ter preços que possam ser pagos com essas notas sem troco. (Os valores X e Y devem ser escolhidos pelo mediador, lembrando que esses valores precisam garantir que $S = \langle X, Y \rangle$ seja um semigrupo numérico, ou seja, X e Y devem ser coprimos).*

Perceba que é possível introduzir a ideia e conceitos de semigrupos numéricos de maneira simples e que trabalhe com as seguintes habilidades da BNCC [10] do ensino médio.

- **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica;
- **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais;
- **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Acredita-se que o caminho mais intuitivo para aplicação dessa atividade seja iniciar com um problema com duas moedas, como o já apresentadado e trazer alguns exemplos como os exemplos 4.1 e 4.2.

Exemplo 4.1 *Proponha aos estudantes um exemplo com moedas de* 2 *e* 5.

Neste exemplo, além das três perguntas propostas, vale a reflexão sobre a paridade. Mostre aos estudantes que como temos a moeda de 2*, todos os outros valores pares estão inclusos. Além disso, todos os valores ímpares, a partir do* 5*, também estão inclusos.*

Exemplo 4.2 *Depois proponha o exemplo com as moedas* 4 *e* 10 *e inicie uma discussão sobre quais números pares não pertencem ao conjunto de valores. Depois os questione a respeito dos valores ímpares.*

Após a discussão com duas moedas, proponha novas situações, mas agora com três moedas e continue a questionar os estudantes a respeito dos valores que não podem ser formados (conjunto de lacunas), qual valor que a partir dele todos estão inclusos (condutor) e qual o maior valor que não pode ser obtido (número de Frobenius).

A proposta supracitada pode ser aplicada para as três séries do ensino médio. Agora iremos propor uma atividade exclusiva para a terceira série. Esta trabalhará conceitos importantes de geometria analítica.

Ainda utilizando o contexto do problema das moedas de Frobenius proponha aos estudantes que eles suponham três valores de moedas, sendo que uma das moedas tenha valor 3 e as outras duas possuam valores maiores que 3. Neste momento exponha alguns exemplos como estes para os estudantes.

Exemplo 4.3 *Comece com um exemplo em que o mdc dos números seja diferente de 1, como* $\{3, 6, 9\}$*. Reflita com os estudantes que com esses números a quantidade de valores que não podem ser obtidos é infinita, ou seja, essa situação não convém. Neste momento vale ressaltar com os estudantes a importância dos valores serem coprimos.*

Exemplo 4.4 *Mostre um exemplo para os estudantes com mais de três valores, como* $\{3, 4, 5, 7\}$ *e note com eles que o quarto valor não é necessário por que ele é combinação de outros menores.*

Após o momento de escolha dos valor faça as seguintes perguntas:

- É possível determinar o maior valor que está fora dos valores possíveis?
- Se possível, que valor é esse?

Sugere-se que após essa reflexão os conceitos de semigrupo numérico, seus invariantes, conjunto de Apéry e vetor de Kunz sejam definidos com os estudantes. Para melhor compreensão dos estudantes faça paralelos das definições com o problema das moedas de Frobenius.

Depois de bem definidos os conceitos é possível propor uma atividade utilizando o aplicativo GeoGebra. Para isso apresente as inequações para o vetor de Kunz com multiplicidade igual a 3 e explique que o vetor de Kunz (x, y) deve satisfazer as inequações.

$$\begin{cases} 2y + 1 \geq x \\ 2x \geq y \\ x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

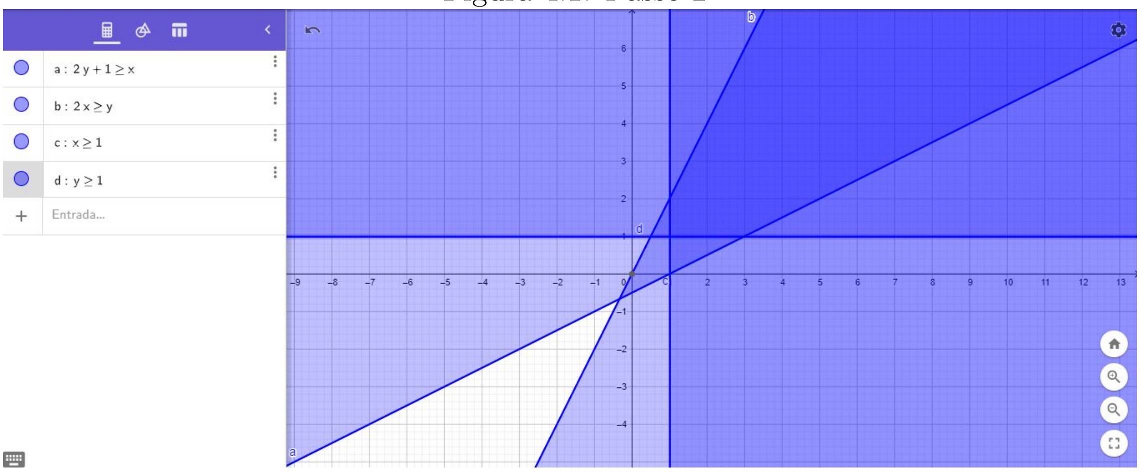
Peça aos estudantes que construam as soluções gráficas das inequações em um papel quadriculado e encontrem qual a região de intersecção destas. Após isso instrua que os estudantes façam a construção no GeoGebra para verificação.

Observação 4.2 *Mostraremos passo a passo como fazer a construção dessas regiões no GeoGebra.*

- ***Passo* 1*:*** *Acesse o aplicativo pelo site geogebra.org, na página inicial clique em "START CALCULATOR";*

- ***Passo* 2*:*** *Insira as inequações no campo de entrada, a Figura 4.1 mostra como deve ficar o resultado.*

Figura 4.1: Passo 2



- ***Passo* 3*:*** *Realize a intersecção das regiões utilizando o comando "$\wedge$", as Figuras 4.2 , 4.3, 4.4 e 4.5 mostrão mais especificamente.*

Figura 4.2: Passo 3.1

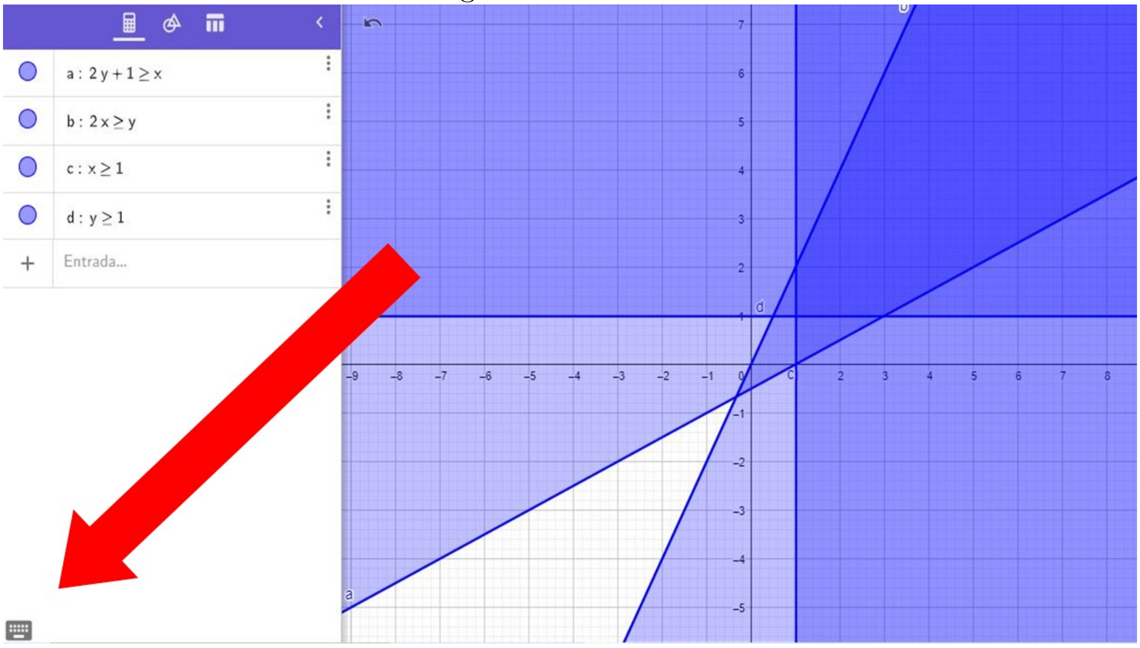


Figura 4.3: Passo 3.2

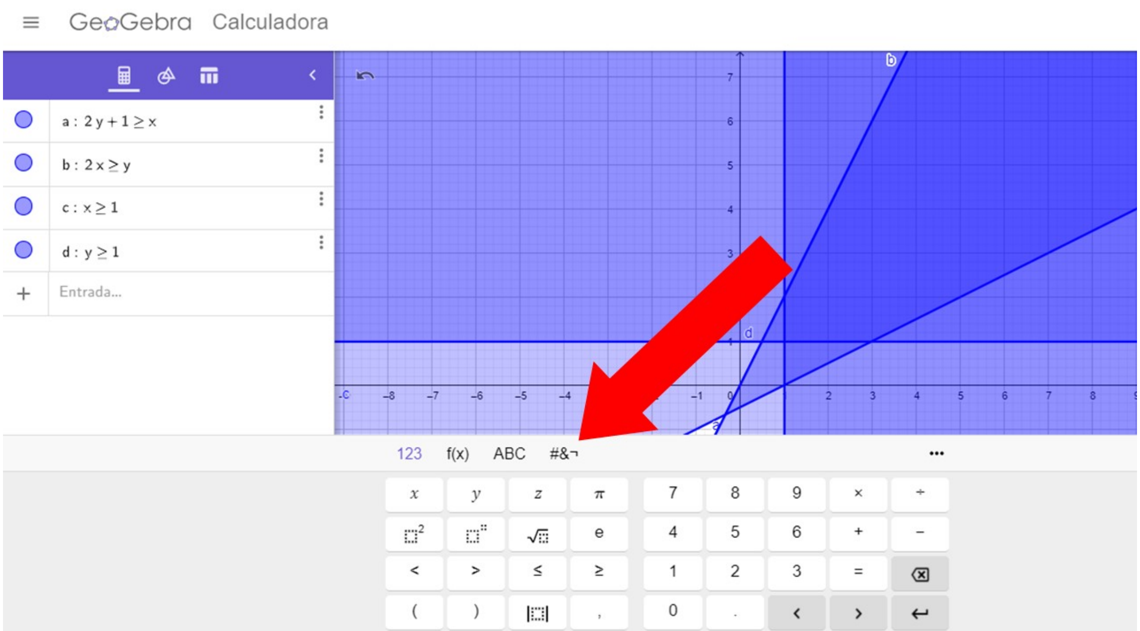


Figura 4.4: Passo 3.3

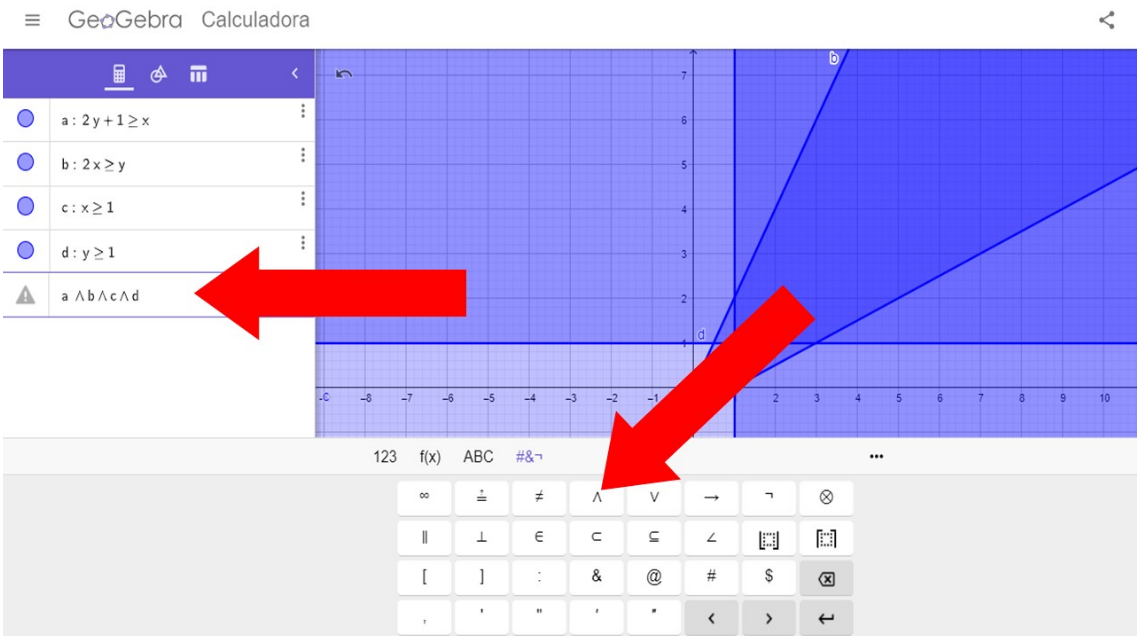
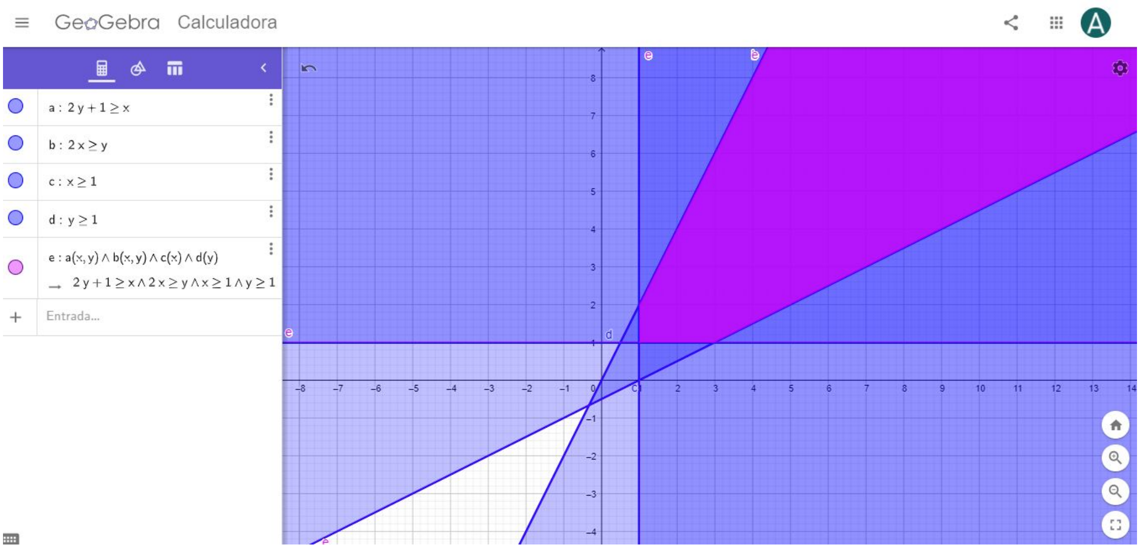


Figura 4.5: Passo 3.4



Com essa região construída peça para que os estudantes encontrem as coordenadas (x, y) dos exemplos criados no início da atividade e verifiquem se o ponto se encontra na região destacada.

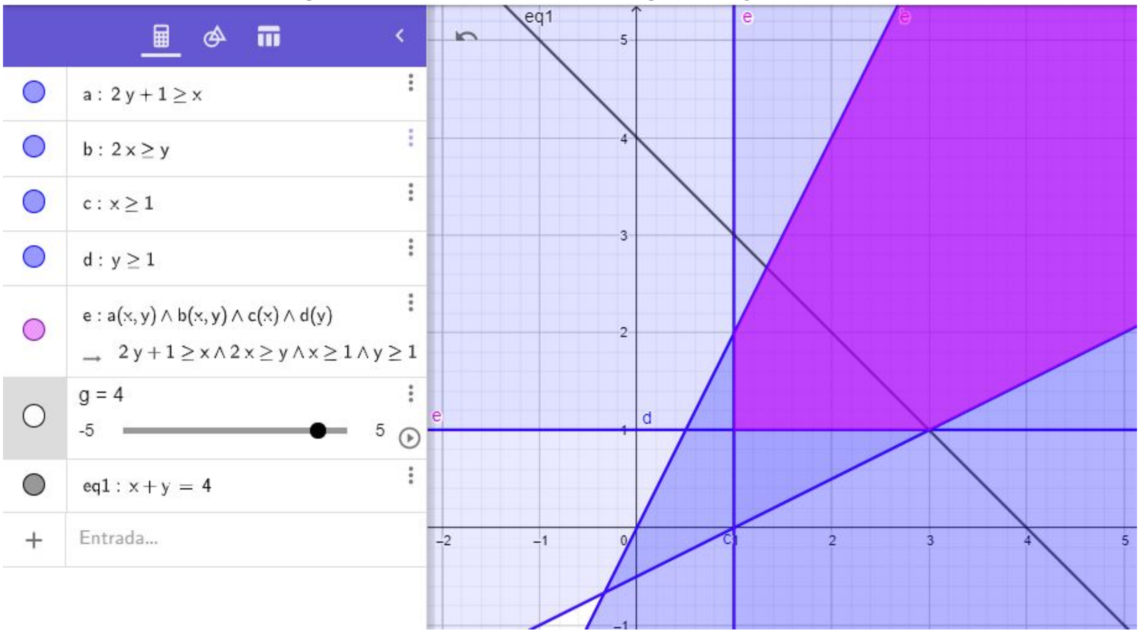
Reflita com os estudantes sobre os pontos que ficaram ou não dentro da região e faça um paralelo com o problema da moeda de Frobenius.

Agora, proponha o caminho reverso, peça ao aluno que escolha um ponto inteiro da região destacada e diga quais são os valores das moedas a partir desse ponto e peça para que ele volte a responder as três perguntas da primeira atividade.

Por último, iremos propor uma atividade que envolva o conceito de gênero de um semigrupo numérico, primeiro mostre ao seu aluno que para o caso $m = 3$, temos que $x + y = g$, aqui vale demonstrar a Proposição 1.3 para este caso específico.

Ainda utilizando o GeoGebra e a construção utilizada na atividade anterior, peça ao aluno que acrescente a equação $x + y = g$ como mostra a 4.6.

Figura 4.6: Atividade com gênero g e $m = 3$



Observação 4.3 *Basta digitar a equação $x + y = g$ que o GeoGebra automaticamente cria o controle deslizante. Recomenda-se que configure o valor de g para que ele varie entre* 0 *e* 10. *Caso o Geogebra não gere automaticamente o controle deslizante, crie primeiro o controle deslizante g e depois digite a equação.*

Depois de feita a construção peça para que o aluno varie o valor de g e destaque os pontos inteiros que pertencem a reta e que estão dentro da região destacada, realizando a contagem. Peça para que o estudante confira o resultado encontrado com o da Tabela 2.1. Recomenda-se que o aluno faça esse procedimento para pelo menos três valores diferentes de g.

Conseguimos assim, construir atividades para ensino médio que trabalham os conteúdos desenvolvidos no decorrer deste trabalho.

Segue uma proposta de roteiro para as atividades apresentadas.

Atividade 1

Público alvo: Todas as séries do ensino médio.
Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos.
Objetivos:

1. Refletir sobre o problema das moedas de Frobenius;

2. Desenvolver habilidade de resolver problemas contextualizados.

Passo-a-passo:

1. Separar a turma em grupos;

2. Entregar a cada equipe um cartão com variações do problema das moedas de Frobenius;

3. Responder as perguntas:

   - Quais são os valores que não podem ser formados?
   - A partir de qual valor, todos os seguintes estão inclusos?
   - Qual é o maior valor que não pode ser obtidos com os valores dados?

4. Discutir com os alunos os resultados para duas moedas;

5. Propor novos problemas com 3 moedas (Uma moeda com valor 3 e as outras com valores maiores que 3);

6. Discutir com os alunos os resultados para 3 moedas.

Atividade 2

Público alvo: 3ª série.
Tempo estimado: 2 aulas de 50 minutos
Objetivos:

1. Refletir sobre o problema das moedas de Frobenius;
2. Desenvolver habilidade de resolver problemas contextualizados;
3. Resolver inequações do 1º grau no plano cartesiano;
4. Representar no plano cartesiano inequaçõoes do 1º grau.

Passo-a-passo:

1. Discutir alguns exemplos com os alunos;
2. Definir semigrupos numéricos e seus invariantes com os estudantes;
3. Apresentar as inequações para o vetor de Kunz com multiplicidade igual a 3 e explicar que o vetor de Kunz (x, y) deve satisfazer as inequações;
4. Realizar a construção da solução no papel quadriculado;
5. Realizar a construção da solução no GeoGebra;
6. Encontrar as coordenadas correspondente ao valor das moedas escolhidas;
7. Discutir com os estudantes sobre os resultados obtidos;
8. Propor o caminho reverso, pedir ao estudante que escolha um ponto inteiro da região destacada e diga quais são os valores das moedas a partir desse ponto e pedir para que ele volte a responder as três perguntas da primeira atividade.

Atividade 3

Público alvo: 3ª série.
Tempo estimado: 1 aula de 50 minutos.
Objetivos:

1. Refletir sobre o problema das moedas de Frobenius;

2. Desenvolver habilidade de resolver problemas contextualizados;

3. Resolver inequações e equações do 1º grau no plano cartesiano;

4. Representar no plano cartesiano inequaçõoes e equações do 1º grau.

Passo-a-passo:

1. Mostrar ao estudante que para o caso $m = 3$, temos que $x + y = g$, aqui vale demonstração para este caso específico;

2. Utilizar o GeoGebra e a construção utilizada na atividade anterior, pedir ao aluno que acrescente a equação $x + y = g$;

3. Variar o valor de g e destacar os pontos inteiros que pertencem a reta e que estão dentro da região destacada;

4. Realizar a contagem dos pontos inteiros destacados;

5. Conferir o resultado encontrado com o da Tabela do Kaplan.

Capítulo 5

Considerações finais

Nesse trabalho, estudamos semigrupos numéricos com multiplicidade fixada a fim de propor atividades contextualizadas para o ensino médio.

Iniciamos definindo semigrupos numéricos, suas inavariantes e seguimos para a definição de Conjunto de Apéry. Dado um semigrupo numérico e $n \in S$, escrevemos $Ap(S,n) = \{0, w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}\}$, em que $w_i = \min\{s \in S : s \equiv i \pmod{n})\}$, para $i \in \{1, \ldots n-1\}$. A partir dessa forma de representação do conjunto de Apéry, estabelecemos uma relação entre ele e o sistema de geradores, percebendo que para se obter o conjunto de geradores, basta trocar 0 por n, ficando assim com $S = \langle n, w_1, \ldots, w_{n-1}\rangle$.

Definimos vetor de Kunz e vimos que existe uma bijeção entre um subconjutno de $\mathbb{N}_0^{m-1}$ e um semigrupo numérico de multiplicidade m. Conseguimos determinar inequações que o vetor de Kunz deve satisfazer. Vimos este sistema para os casos com multiplicidades 3 e 4 e concluímos que para o caso geral o sistema é dado por:

$$\begin{cases} x_i \geq 1 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ x_i + x_j \geq x_{i+j} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ x_i + x_j + 1 \geq x_{i+j-m} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \end{cases} \tag{5.1}$$

Foram estudadas algumas propriedades de semigrupos numéricos, como a igualdade entre o gênero e a soma das coordenadas do vetor de Kunz e a inequação $g \leq F \leq 2g-1$. Definimos também semigrupos numéricos MED e percebemos que quando um semigrupo numérico é MED o Sistema 5.1 fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_i \geq 1 \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \\ x_i + x_j > x_{i+j} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j \leq m-1 \\ x_i + x_j + 1 > x_{i+j-m} \text{ para todo } 1 \leq i \leq j \leq m-1, i+j > m \\ x_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, m-1\} \end{cases} \tag{5.2}$$

Depois de bem definidos semigrupos numéricos e seus invariantes, fixamos a multiplicidade e o gênero, a fim de fazer a contagem de semigrupos numéricos por multiplicidade e gênero, obtendo o número $N(m,g)$. Começamos com multiplicidades pequenas e obtivemos que $N(1,0) = 1, N(1,g) = 0, \forall g \geq 1, N(2,g) = 1$ e $N(3,g) = \frac{g+(3-L)}{3}$, sendo $g \equiv L \pmod 3$, com $L \in \{0,1,2\}$. Seguimos para o caso geral, verificamos que $N(m,g) = N(m-1,g-1) + N(m-1,g-2)$ se $2g \geq 3m$ e mostramos a Tabela 2.1 que Kaplan [5] construiu em seu trabalho utilizando métodos computacionais e o Teorema 2.1.

Com a multiplicidade fixada estudamos quais são as condições para que um semigrupo numérico esteja completamente determinado. Começamos com a multiplicidade 2 e concluímos que basta fixar mais um invariante, dentre gênero, número de Frobenius e raio. Seguindo para multiplicidade 3 estudamos que são necessários mais dois invariantes para que o semigrupo numérico esteja unicamente determinado. Além disso dois resultados foram imporatantes para essa conclusão $Ap(S,3) = \{0 < 3g - F < F + 3\}$ e que $\frac{F+1}{2} \leq g < \frac{2F+3}{3}$.

Para a multiplicidade 4, primeiro estudamos fixando apenas mais uma invariante e concluímos que dado g ou F obtinhamos uma quantidade finita de semigrupos numéricos; caso R seja dado, tínhamos duas possibilidades: se $R \equiv 1$ ou $3 \pmod 4$ a quantidade de semigrupos numéricos também era finita, já para $R \equiv 2 \pmod 4$ a quantidade é infinita. Depois fizemos uma análise duas a duas, e em todos os casos a quantidade é finita. Concluímos então, que dados gênero g, número de Frobenius F e raio R, sob "boas" condições o semigrupo numérico de multiplicidade 4 está completamente determinado. Como $R \not\equiv F \pmod 4$ deve ocorrer, temos que $R = k_a + a$ e $F + 4 = 4k_c + c$ com $\{1,2,3\} = \{a,b,c\}$, sabemos ainda que $k_a + k_b + k_c = g$. Obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4k_a = R - a \\ 4k_c = F + 4 - C \\ k_a + k_b + k_c = g \end{cases} \tag{5.3}$$

O determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é igual a -16.

Logo a solução desse sistema é única.

Finalizamos buscando por condições, isto é, para quais valores de g, F e R temos a existência do semigrupo numérico de multiplicidade 4, gênero g, número de Frobenius e raio R. Concluímos que é necessário que:

1. $R \not\equiv F \pmod 4$; $R, F \not\equiv 0 \pmod 4$ e $R, F > 4$;

2. $\lceil \frac{F+1}{2} \rceil \leq g \leq F - \lfloor \frac{F}{4} \rfloor$;

3. $R < 4g - F - R + 2$, isto é, $2R < 4g - F + 2$;

4. $4g - F - R + 2 < F + 4$, isto é, $4g - R - 2 < 2F$;

5. $R < F + 4$.

A pergunta central é se tal solução satisfaz o Sistema 1.1.

A partir do problema das moedas de Frobenius foram propostas algumas atividades para ensino médio que exercitam os conceitos que foram trabalhados relacionados a algumas habilidades da BNCC.

Por fim, Kaplan [5] estudou contagem de semigrupos numéricos MED e construiu a Tabela 5.1 utilizando de artifícios matemáticos e computacionais. Apesar de termos representado conceitos básicos de semigrupos numéricos MED, não estudamos esse tipo de contagem neste trabalho. Desta forma, deixamos esse tópico como sugestão para trabalhos futuros.

$g \setminus m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	n_g
0	1																			1
1		1																		1
2		1	1																	2
3		1	1	1																3
4		1	1	1	1															4
5		1	2	2	1	1														7
6		1	2	3	2	1	1													10
7		1	2	4	2	2	1	1												13
8		1	3	5	4	4	2	1	1											21
9		1	3	7	5	6	4	2	1	1										30
10		1	3	8	8	9	4	4	2	1	1									41
11		1	4	10	10	14	7	7	4	2	1	1								61
12		1	4	12	13	19	12	10	7	4	2	1	1							86
13		1	4	14	16	25	18	17	9	7	4	2	1	1						119
14		1	5	16	22	35	25	26	16	12	7	4	2	1	1					173
15		1	5	19	24	45	37	39	24	20	12	7	4	2	1	1				241
16		1	5	21	32	56	50	58	37	30	17	12	7	4	2	1	1			334
17		1	6	24	35	74	68	82	59	48	27	23	12	7	4	2	1	1		474
18		1	6	27	43	93	89	111	90	75	41	37	23	12	7	4	2	1	1	663

Tabela 5.1: Alguns valores de quantidades de semigrupos numéricos MED com multiplicidade m e gênero g

Referências Bibliográficas

[1] SYLVESTER, J. J., *Mathematical Questions with their Solutions*, Educational Times **41**, 21 (1884).

[2] ROSALES, J. C., GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A., GARCÍA-GARCÍA, J. I., BRANCO, M. B., *Systems of Inequalities and Numerical Semigroups*, J. Lond. Math. Soc. (2), **65** (3), 611–623 (2002).

[3] ROSALES, J. C., *Numerical Semigroups with Multiplicity Three and Four*. Semigroup Forum **71**, 323–331 (2005).

[4] BRAS-AMORÓS, M., *Fibonacci-like behavior of the number of numerical semigroups of a given genus*, Semigroup Forum **76**, 379–384 (2008).

[5] KAPLAN, N., *Counting numerical semigroups by genus and some cases of a question of Wilf*, J. Pure Appl. Algebra **216** , 1016–1032 (2012).

[6] KAPLAN, N., *Counting numerical semigroups*, Amer. Math. Monthly **163**, 375-384 (2017).

[7] BERNARDINI, M., *Counting Numerical Semigroups by Genus and Even Gaps via Kunz-Coordinate Vectors*. In: Barucci V., Chapman S., D'Anna M., Fröberg R. (eds) Numerical Semigroups. Springer INdAM Series, vol 40. Springer, Cham. (2020)

[8] ROSALES, J. C., GARCÍA-SÁNCHEZ, P. A., *Numerical Semigroups*, Developments in Mathematics, Springer New York (2009).

[9] KARAKAS, H. I., *Parametrizing numerical semigroups with multiplicity up to 5.* International Journal of Algebra and Computation, **28** (1), 69 –95 (2018).

[10] Brasil, Base Nacional Comum Curricular, Brasília: MEC, 2017, Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#medio/a-area-de-matematica-e-suas-tecnologias (acessado em agosto de 2020).