UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE PÚBLICA

ADRIANO MOSER

AS APREENSÕES EM GEOMETRIA NA RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ESPACIAL NA TERCEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

JOINVILLE - SC
2020

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC

CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT

ADRIANO MOSER

AS APREENSÕES EM GEOMETRIA NA RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ESPACIAL NA TERCEIRA SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC) no Centro de Ciências Tecnológicas (CCT) como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogério de Aguiar.

JOINVILLE - SC

2020

Moser, Adriano
As apreensões em geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio / Adriano Moser. -- 2020.
175 p.

Orientador: Rogério de Aguiar
Dissertação (mestrado) -- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Joinville, 2020.

1. Representação semiótica. 2. Geometria Espacial. 3. Apreensões em geometria. 4. Ensino Médio. I. de Aguiar, Rogério . II. Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título

As Apreensões em Geometria na Resolução de Exercícios de Geometria Espacial na Terceira Série do Ensino Médio

por

Adriano Moser

Esta dissertação foi julgada adequada para obtenção do título de

MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de concentração em “Ensino de Matemática”
e aprovada em sua forma final pelo

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
DO CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS DA
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA.

Banca Examinadora:

ASSINADO DIGITALMENTE

Prof. Dr. Rogério de Aguiar
CCT/UDESC
(Orientador/Presidente)

VIA VIDEOCONFERÊNCIA

Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti
UFSC

ASSINADO DIGITALMENTE

Profa. Dra. Silvia Teresinha Frizzarini
CCT/UDESC

Joinville,SC, 30 de setembro de 2020.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço àquele que guia meus passos, minha fonte de sabedoria e força em todos os momentos! Quantas vezes recorri ao meu Amado Deus que é Pai, Filho e Espírito Santo, pedindo forças e luz para permanecer forte nessa fase da vida. Ao término dessa etapa tão importante, agradeço a Deus por estar comigo.

Nesse singelo momento de agradecer, revelo as marcas que algumas pessoas especiais deixaram em meu caminho. Sem elas não teria conseguido. Aos meus pais, Ivone (In Memoriam) e Arari, pelo dom da vida e incentivo, minhas irmãs em especial a minha irmã caçula Franciani Moser que incansavelmente lia minhas produções e com muita paciência apresentava suas sugestões dentro da perspectiva de sua profissão, dado que sendo psicóloga com especialização na área infantil muito contribuiu com seus apontamentos. Em especial, minha esposa Lucilene e minha filha, que me ampararam em toda a caminhada, demonstrando compreensão pelos momentos de ausências e abdicações que foram necessários para que essa etapa fosse concluída.

Ao meu orientador, professor Rogério, que acreditou em mim e com seu saber e paciência sempre me conduziu para que esse trabalho não só fosse único, mas para que fosse fonte de transformação tanto profissional quando pessoal e posso afirmar sem medo que a pesquisa passou a fazer parte da minha vida.

À banca da qual muito me orgulho, professores que são para mim fontes de inspiração. Agradeço a disponibilidade para a leitura de meu trabalho, que de maneira significativa abrilhantaram esta pesquisa com sugestões e apontamentos.

Aos demais colegas do mestrado, pelo convívio e amizade. Aos professores de minha vida, de ontem hoje e sempre, que vivenciam os desafios do saber e aprender, que contribuíram direta ou indiretamente, meu singelo agradecimento.

“A Geometria existe por toda a parte.

É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para

compreendê-la e alma para admirá-la”.

JOHANNES KLEPLER

RESUMO

O foco desta dissertação, considerando os conceitos de Geometria Espacial , está em analisar os registros produzidos por estudantes da terceira série do Ensino Médio por meio de uma sequência de exercícios distribuídos em três blocos de atividades a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica na perspectiva de identificar as apreensões em geometria mobilizadas pelos alunos na resolução de exercícios de Geometria Espacial. A pesquisa de caráter qualitativa ocorreu com onze estudantes do Ensino Médio de uma escola pública do estado de Santa Catarina no qual a aplicação das atividades ocorreu de forma online utilizando-se a Plataforma Google Suite for Education pela ferramenta Meets cujo moderador foi o professor/pesquisador de modo a registrar todo o processo exploratório. Os procedimentos metodológicos foram baseados na Análise Interpretativa que oportunizou estabelecer o contexto do objeto de análise, desenvolver uma compreensão interpretativa do pensamento exposto , estabelecer uma conexão entre ideias expostas no texto e por fim formular um juízo crítico. A opção por questões se deu em virtude de as apreensões em Geometria Espacial serem pouco exploradas pelos professores e se limitou a questões já aplicadas no Exame Nacional do Ensino Médio e na Olimpíada Internacional de Matemática sem Fronteiras. Pela análise das transcrições dos alunos ficou evidente que eles buscavam interagir simultaneamente entre os registros discursivo e figural, atitude está que particulariza os problemas geométricos de acordo com o aporte teórico desta, porém verificou-se que a apreensão perceptiva estava desvinculada da apreensão discursiva o que conduziu os alunos a efetuarem os tratamentos geométricos de forma parcial.

Palavras-chaves: Representação Semiótica. Geometria Espacial. Apreensões em geometria. Ensino Médio.

ABSTRACT

The focus of this dissertation, considering the concepts of Spatial Geometry, is to analyze the records produced by the third-year High School Students through a sequence of exercises distributed in three blocks of activities based on the Theory of Records of Semiotic Representation in the perspective to identify the apprehensions in geometry mobilized by students in solving Spatial Geometry exercises. The qualitative research took place with eleven high school students from a public school in the state of Santa Catarina in which the application of the activities took place online using the Google Suite for Education Platform by the Meets tool whose moderator was the teacher / researcher in order to record the entire exploratory process. The methodological procedures were based on the Interpretative Analysis that made it possible to establish the context of the object of analysis, to develop an interpretative understanding of the exposed thought, to establish a connection between ideas exposed in the text and finally to formulate a critical judgment. The choice for questions was due to the fact that apprehensions in Spatial Geometry are little explored by teachers and was limited to questions already applied in the National High School Exam and in the International Mathematical Olympics without Borders. From the analysis of the students' transcripts it was evident that they sought to interact simultaneously between the discursive and figural registers, an attitude that particularizes the geometric problems according to its theoretical contribution, however it was found that the perceptual apprehension was disconnected from the discursive apprehension, which led the students to perform the geometric treatments in a partial way.

Keywords: Semiotic Representation. Semiotic Representation. Apprehensions in Geometry. High School

ÍNDICE DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DAS ABREVIAÇÕES E SIGLA

BDTD	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN	Parâmetro Curricular Nacional
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história ensina que a grandeza de uma nação é estruturada a partir de sua excelência educacional; não é objetivo dessa pesquisa delinear parâmetros que qualifiquem ou quantifiquem uma educação de qualidade, mas é norteador querer que o ensino no Brasil encontre o caminho para sua plenitude, pois é um anseio comum ver o nosso país como um lugar digno e justo para se viver.

Inserido nesse compromisso social, o ensino da matemática tem como finalidade, a formação integral do cidadão, a fim de capacitá-lo em suas ações de modo que suas decisões sejam prudentes, altruístas e eficientes (BRASIL,1999, p.250).

Em minha trajetória como professor do Ensino Médio notei a pouca ênfase que se dá ao ensino de Geometria Espacial, sendo que na maioria das vezes o ensino desse conteúdo fica restrito a problematização de medidas ou a utilização da figura para explicitar habilidades algébricas.

De acordo com os documentos oficiais, habilidades como: visualização, desenho, argumentação lógica e visualização espacial, podem ser desenvolvidas a partir de um trabalho adequado de Geometria, em particular o ensino da Geometria Espacial, que embora estejamos habituados a figuras geométricas tridimensionais, a transição do plano para o espaço deve ser sistemática e fundamentada em argumentos geométricos consistentes e bem definidos (BRASIL, 1999).

No período de 1970 a 1995, Raymond Duval trabalhou no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática de Estrasburgo, na França onde desenvolveu importantes estudos no campo da Psicologia Cognitiva, vindo a desenvolver a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, teoria esta que fundamentará essa pesquisa na compreensão e identificação das apreensões em geometria – sequencial, perceptiva, discursiva e operatória.

Atualmente são comuns práticas educacionais em sala de aula que buscam superar a deficiência da aprendizagem dos conceitos matemáticos a partir da análise dos erros dos alunos, mas para Duval (2009), é necessário uma abordagem que descreva o processo de aprendizagem matemática no âmbito cognitivo, de modo que exista não só um entendimento melhor quanto aos conceitos matemáticos propostos, mas também um aprimoramento da autogestão da capacidade intelectual do estudante.

O ensino da Geometria é imprescindível na formação cognitiva do aluno na educação básica, tanto que os documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, destacam seu papel na formação das habilidades em compreender, descrever e representar, de forma organizada, a sociedade em que está inserido (BRASIL,1988, p,122).

Restringindo o foco somente para o ensino de Geometria Espacial, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC[1] determina que a criança precisa ter contato com os sólidos geométricos já a partir do 1º ano do ensino fundamental, iniciando assim uma interação entre a linguagem natural e as representações matemáticas (BRASIL, 2017, p.280-305).

Tradicionalmente o tema de Geometria Espacial no Ensino Médio é abordado na terceira série, no qual, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1999), a percepção quanto as representações já estudadas no Ensino Fundamental sobre os sólidos geométricos deveriam favorecer ao desenvolvimento mais amplo da capacidade de abstrair os conceitos, garantindo assim um melhor entendimento da sua própria realidade (BRASIL, 1999, p.252).

Entretanto, como professor, é frequente me deparar com um número significativo de alunos que não possuem a noção de sólidos, ou apresentam dificuldade em relacionar propriedades associadas aos mesmos, entre outras limitações na apropriação do tema.

A compreensão significativa da Geometria Espacial está associada a processos interpretativos específicos dos conceitos geométricos, uma vez que o acesso a esses conceitos estão vinculados estritamente as suas representações, logo, estabelecer um contexto resolutivo eficiente se faz necessário permear processos interpretativos próprios da geometria, que dentro da concepção teórica de Duval é denominado por: apreensões em geometria.

Portanto, o tema dessa pesquisa – as apreensões em geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial no Ensino Médio, vem expor uma vivência desse pesquisador onde durante sua passagem por unidades de ensino, tanto público quanto particular, constatou um significativo número de alunos e alunas que até possuíam habilidades em aplicar fórmulas obtendo acertos em resoluções de problemas, mas eram incapazes de estabelecer relações com a geometria ao seu redor, demonstrando assim parcialidade em sua capacidade interpretativa .

Em função dessa realidade propõe-se o seguinte problema de pesquisa: **Quais as apreensões em geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica?**

Todavia, a fim de buscar uma resposta para o questionamento acima, coloca-se como objetivo geral da pesquisa, identificar as apreensões em Geometria Espacial na resolução de exercícios na terceira série do Ensino Médio.

---

1 A partir desse momento, irei se referir a Base Nacional Comum Curricular, pela sigla BNCC.

Além do objetivo geral dessa pesquisa, cinco objetivos específicos foram elencados:

- Efetuar revisão de literatura;
- Estudar o referencial teórico de registros de representação semióticas;
- Estudar o referencial teórico de geometria espacial;
- Elaborar atividades com problemas de Geometria Espacial e resolvê-los com estudantes da terceira série do Ensino Médio;
- Elaborar um caderno de atividades de Geometria Espacial.

A fim de identificar as apreensões em geometria mais atuantes na resolução dos respectivos exercícios, uma análise a priori se fez necessário no sentido de evidenciar os processos interpretativos próprios do contexto geométrico que coparticipam do processo cognitivo para que a resolução possa contemplar os resultados almejados para cada proposta de exercício, utilizando como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semióticos de Raymond Duval no tocante a geometria.

Para que o leitor se oriente nestas páginas e compreenda a sequência teórica construída, o primeiro capítulo contempla a Introdução onde são apresentadas as motivações, justificativas que nortearam este estudo, a questão de pesquisa e o objetivo em sua maior dimensão.

O capítulo dois contará com a revisão de literatura, delimitada pelos descritores: geometria espacial e registros de representação semiótica destacando dentro desse universo científico, fundamentos que embasam a importância dessa pesquisa para o desenvolvimento de práticas educacionais voltadas ao ensino de Geometria Espacial de modo que exista uma aprendizagem real e plena em significados.

No capítulo três, é feita a exposição da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995, 2005, 2009, 2012a, 2012b, 2012c, 2013, 2014) direcionada para as apreensões em geometria na resolução de exercícios de geometria espacial.

No capítulo quatro é apresentado o tema de Geometria Espacial, delimitado pelas figuras tridimensionais usuais na proposta curricular do ensino médio, discorrendo a partir de definições, teoremas e exemplos.

No capítulo cinco é apresentada a Metodologia da pesquisa destacando os procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa, relatando a caracterização; descrição do campo; participantes; instrumentos de coleta de dados, procedimentos de análise de dados e a organização da metodologia aplicada da pesquisa.

No capítulo seis contando com a análise a priori dos blocos de atividades que representam a ferramenta de exploração desta pesquisa tem como proposito identificar quais as apreensões perspectiva, discursiva, operatória e sequencial que permearão o processo de compreensão e resolução dos exercícios.

No capítulo sete é descrito o processo de análise dos resultados, ou seja, a identificação e classificação das apreensões em geometria implícita na resolução de exercícios de geometria espacial realizados pelos participantes da pesquisa

No capítulo oito discorre a apresentação do produto educacional como sendo um caderno de exercícios da temática de Geometria Espacial com orientações específicas para o professor quanto a proposta de cada atividade no que tange as apreensões em geometria na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Por fim, os dois últimos capítulos contemplam as considerações finais da pesquisa e as referências bibliográficas que cujo acesso formalizaram arcabouço teórico desse trabalho.

2 REVISÃO DE LITERATURAS: GEOMETRIA ESPACIAL

A Geometria Espacial sendo parte integrante do currículo educacional brasileiro, está inserida tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. O raciocínio geométrico é estrutural, dedutivo e tem participação na construção da cognição do aluno, tendo na visualização sua maior interação cognitiva, que segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais "*são importantes na compreensão e ampliação da percepção de espaço e construção de modelos para interpretar questões de Matemática e de outras áreas do conhecimento*" (BRASIL, 1999, p. 257).

Assim sendo, com o intuito de dimensionar quantitativamente os trabalhos relevantes no universo das pesquisas acadêmicas ligadas a geometria, se buscou trabalhos científicos no período de 2012 a 2019 que abordassem estudos na área de Educação Matemática com direcionamento para as apreensões em geometria, a partir da resolução de exercícios de Geometria Espacial sob a análise dos Registros das Representações Semióticas.

Utilizando descritores em consonância com o objetivo desta pesquisa se buscou no Banco de Teses e Dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD , na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior – CAPES e por publicações científicas através do mecanismo de busca – Google Scholar.

Os descritores aplicados foram: ¨Geometria Espacial¨, ¨Registros de Representações Semióticas¨ e "Apreensões em Geometria". O resultado da quantidade de teses e dissertação a partir dos descritores estão disponibilizadas no Quadro 1.

Quadro 1 - Resultado da pesquisa

Descritor	PROFMAT	CAPES	BDTD
Geometria espacial	67	192	93
Registros de Representação Semiótica	5	94	9
Apreensões em Geometria	0	4	3

Fonte: produção do autor, 2020.

Utilizando os descritores individualmente e aplicando somente a restrição quanto ao ano da defesa, entre teses e dissertações totalizou-se 387 trabalhos acadêmicos. Dado ao número elevado de trabalhos e a diversidade que cada descritor oportuniza, uma pré-análise foi realizada por descritor a partir do título e da leitura do resumo. Assim, se estabeleceu os seguintes critérios de escolha ordenados conforme o Quadro 2:

Quadro 2 - Critérios de escolha das pesquisas quanto aos descritores

Descritor	Critérios
Geometria Espacial	• Público alvo: Ensino Médio; • Proposta pedagógica de acordo com a realidade do local de exploração desta pesquisa e em particular com o tema almejado.
Registros de Representação Semiótica	• Propostas com direcionamento para a geometria plana e espacial
Apreensões em geometria	• Todos os trabalhos

Fonte: produção do autor, 2020.

Como resultado geral dessa primeira triagem nos bancos de pesquisas excluindo repetições e aplicando os critérios de escolha acima citados totalizaram 42 trabalhos ordenados pela data da defesa de acordo com o Quadro 3

Quadro 3 - Dissertações e Teses

	Data da defesa	Autor	Título
1	27/09/2019	Cláudia Raquel Alves	Uma estratégia experimental de ensino de Geometria Espacial para o Ensino Médio
2	17/04/2019	Carla Valéria Dionízio de Souza	Geometria Espacial sob a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas
3	05/04/2019	Jucelio Aguiar da Silva	Geometria Espacial: volume de cilindros, cones e esferas através de resolução de problemas
4	15/03/2019	Gilberlania Pereira Santos Silva	Ensino de Geometria Espacial: uma abordagem investigativa
5	26/02/2019	Ricardo Trindade de Penha	Geometria Espacial no Ensino Médio: Aspectos socioculturais, resolução de problemas e o uso de materiais manipuláveis
6	08/12/2018	Cátia Bullmann Luana	Aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial por estudantes do Ensino Médio: Entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação semiótica
6	30/10/2018	Leilyanne Silva de Morais	A sequência de Polya aplicada ao ensino de Geometria Espacial
7	31/07/2018	Franciele Isabelita Lopes Novak	A ambiente dinâmico Geogebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional

8	11/07/2018	Roberta Nara Sodre de Souza	Desconstrução dimensional das formas: Gesto intelectual necessário à aprendizagem de Geometria
9	08/06/2018	Luciano Mateus Fizzon	O uso de jogos e materiais concreto no Ensino de Geometria Espacial
10	28/02/2018	Santiago Thiago Lopes Nascimento	O Ensino dos Sólidos Geométricos: um estudo utilizando modelagem matemática
11	24/08/2017	Priscila Arcego	Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental
12	30/08/2017	Janaina da Silva Correa	Registros de representação semiótica mobilizados na obtenção do volume de um cilindro: uma atividade orientada pelos princípios da modelagem matemática
13	26/05/2017	Franklin Berg Almeida da Costa	Geometria Espacial no Ensino Médio: um questionamento didático ao princípio de Cavalieri
14	12/05/2017	Luciano David Pereira	Projetos de modelagem matemática no ensino para a aprendizagem de Geometria Espacial no 2 ° ano do Ensino Médio
15	22/03/2017	Tatiele Tamara Gehrke	Trilhos matemáticos como contexto para o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio
16	21/12/2016	Zuleide Ferreira de Souza	Geometrias Espacial e Plana: Uma análise dos significados por meio dos registros de representação semiótica
17	14/12/2016	Platão Gonçalves Terra Neto	Possibilidades na conversão entre registros de Geometria Plana
18	24/08/2016	Roberta Lied	Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a teoria de registros de representação semiótica
19	29/08/2016	Mariko Kawamoto	Habilidades de visualização em Geometria espacial: um diagnóstico com alunos de 3º ano do Ensino Médio
20	04/03/2016	Benedito Nazareno de Sousa Monteiro	Utilização de modelos concretos como uma alternativa para o ensino de Geometria Espacial
21	22/02/2016	Samilly Alexandre de Souza	A formulação e resolução de problemas geométricos com base em sólidos geométricos'
22	02/12/2015	Elisabete Marcon Mello	A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval
23	04/12/2015	Filho, Gilberto Beserra Da Silva	Geometria Espacial no Ensino Médio: uma abordagem concreta
24	24/08/2015	Paula Gabrieli Santos de Assunpção	Perímetro e área: uma engenharia didática utilizando o Geogebra sob o olhar das representações semióticas
25	11/08/2015	Ricardo De Souza Tamburini	Livro texto de geometria espacial em nível médio seguindo às orientações curriculares nacionais
26	05/08/2015	Juanbélia Wanderlei De Azevedo Ferreira	Análise da axiomatização da Geometria espacial em livros didáticos do Ensino Médio
27	01/08/2015	Mariana Moran Barroso	As Apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais

28	28/11/2014	Lynk dos Santos Cardia	Uma abordagem do ensino de Geometria Espacial
29	18/11/2014	Eliedete Pinheiro Lino	As transformações geométricas em um jogo interativo entre quadros: um estudo teórico
30	11/11/2014	Herede Norões Botelho	Geometria Espacial métrica: uma abordagem com conceitos básicos, aplicações e reflexões
31	28/08/2014	Fernanda Nogueira	Uma experiência no ensino de Geometria Espacial no terceiro ano do Ensino Médio
32	19/08/2014	Jean Daniel Grillo	Atividades e problemas de Geometria Espacial para o Ensino Médio
33	24/10/2014	Mauro Sergio Santana	O volume dos principais poliedros: metodologia e atividades no esquema de resolução de problemas
34	26/02/2014	Fabiana Chagas de Andrade	Jujubas: uma proposta lúdica ao ensino de Geometria Espacial no Ensino Médio
35	26/02/2014	Luciana De Souza de Moraes	A Geometria Espacial no ensino médio: um estudo sobre o uso material concreto na resolução de problemas
36	27/03/2014	Anágela Cristina Morete Félix	Estudo dos registros de representação semiótica mediados por um objeto de aprendizagem
37	02/05/2013	José Carlos Vieira de Souza	Calculando distância em geometria espacial usando material manipulável como recurso didático
38	12/04/2013	Ricardo Viz Quadrat	Mudando a forma e mantendo o volume: um projeto interdisciplinar com embalagens no ensino de Geometria Espacial
39	10/04/2013	John Wayni Santos Oliveira	Uma nova abordagem no ensino da Geometria Espacial
40	29/03/2013	Adriano Marcos Maia Reges	O ensino da geometria com o enfoque na etnomodelagem
41	30/03/2012	Daiani Lodete Pirola	Aprendizagem em geometria nas séries iniciais: uma possibilidade pela integração entre as apreensões em geometria e as capacidades de percepção visual
42	01/10/2012	José Fernando Possani	Uma sequência didática para o aprendizado do volume do icosaedro regular.

Fonte: produção do autor, 2020

Tomando como parâmetro o objetivo desta pesquisa, uma segunda análise incluindo agora a leitura cuidadosa do sumário e introdução desses textos acadêmicos, considerou-se apenas os que abordavam como eixo de pesquisa: a importância da representação da figura no ensino da Geometria Espacial, os registros de representação semiótica no ensino de geometria plana e espacial e as apreensões em geometria. No quadro 4, segue uma breve descrição desses trabalhos:

Quadro 4 - Resumos

<table>
<tr><th>Nº</th><th>Trabalho</th><th>Autor</th><th>Título</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Dissertação</td><td>Cláudia Raquel Alves</td><td>Uma estratégia experimental de ensino de Geometria Espacial para o Ensino Médio</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Descrição breve:</u> Apresentou uma proposta didática de ensino que prioriza os conhecimentos do cotidiano do aluno a fim de superar a dificuldade dos mesmo em compreender o assunto de Geometria Espacial, logo parte do uso de materiais concretos e construções dos sólidos de modo que incentivando a curiosidade e o interesse pela experimentação resulte numa aprendizagem significativa.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>Dissertação</td><td>Cátia Bullmann Luana</td><td>Aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial por estudantes do Ensino Médio: Entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação semiótica</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Descrição breve</u>: Analisou os registros produzidos por estudantes do 3º ano do Ensino Médio mediante a proposição de uma sequência de ensino envolvendo atividades de tratamento e conversão, considerando conceitos da Geometria Espacial, a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2011, 2013) e na perspectiva da produção da aprendizagem e significações conceituais por Vygotsky (2001, 2008), com o auxílio do software de geometria dinâmica, GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Dissertação</td><td>Franciele Isabelita Lopes Novak</td><td>A ambiente dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Descrição breve</u>: Através da articulação de uma oficina de geometria com a utilização do ambiente dinâmico: Geogebra envolvendo polígonos e poliedros para uma turma de 8º ano visou apontar contribuições cognitivas no trabalho com a Geometria no que diz respeito ao estímulo da visualização de características envolvendo figuras geométricas, indicando quais atividades cognitivas específicas da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval foram presentes.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Tese</td><td>Roberta Nara Sodre de Souza</td><td>Desconstrução dimensional das formas: Gesto intelectual necessário à aprendizagem de Geometria</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Descrição breve</u>: Através de uma sequência de atividades a estudantes do Ensino Médio tendo como foco as apreensões e desconstruções dimensionais apresenta através dos aportes teóricos direcionamentos a partir de problemas que envolvem figuras geométricas, de modo que contemple intencionalmente a desconstrução geométrica no Ensino Básico a fim de possibilitar a aprendizagem dessa operação fundamental à construção dos conceitos em Geometria. Destaca ainda que assim como a desconstrução geométrica, os olhares geométricos e as apreensões em geometria são operações semicognitivas que estruturam a aprendizagem dos conceitos geométricos.</td></tr>
<tr><td>18</td><td>Dissertação</td><td>Roberta Lied</td><td>Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a teoria de registros de representação semiótica</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Descrição breve</u>: Propôs investigar a mobilização de registros de representação semiótica por meio de atividades didáticas envolvendo lugares geométricos com alunos da graduação em Matemática da Universidade de Santa Maria, em dois ambientes de aprendizagem: quando se faz uso de papel, lápis, régua e compasso e do software GeoGebra.</td></tr>
<tr><td>27</td><td>Tese</td><td>Mariana Moran</td><td>As Apreensões em Geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de Registros Figurais</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: A partir da fundamentação da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, apresentou as influências do tipo de registro figural nas apreensões perceptivas, operatórias e discursivas em geometria através de um curso de extensão para professores da Educação Básica da rede pública de ensino, do qual foi abordado conteúdos de geometria por meio dos registros figurais: Materiais Manipuláveis (MM), Softwares de Geometria (SG) e Expressões Gráficas (EG).</td></tr>
<tr><td>32</td><td>Dissertação</td><td>Jean Daniel Grillo</td><td>Atividades e problemas de Geometria Espacial para o Ensino Médio</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: Trabalhou uma proposta didática para aulas de Geometria Espacial no Ensino Médio com experimentos em planificação de sólidos geométricos, particularmente do cubo, com o objetivo de promover a construção abstrata de objetos geométricos de três dimensões destacando a importância da manipulação de materiais quanto a percepção da tridimensionalidade do objeto estudado.</td></tr>
<tr><td>36</td><td>Dissertação</td><td>Anágela Cristina Morete Félix</td><td>Estudo dos registros de representação semiótica mediados por um objeto de aprendizagem</td></tr>
<tr><td colspan="4">Descrição breve: A pesquisa buscou identificar os dois tipos de transformação das representações semióticas, os tratamentos e as conversões, a partir de uma intervenção com um grupo de estudantes tendo a “balança interativa” seu objeto de aprendizagem que na perspectiva da Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval destaca a importância da manipulação entre representações a fim de não haja confusão entre o objeto matemático e sua representação.</td></tr>
</table>

Fonte: produção do autor, 2020.

A quantidade ínfima de resultados de teses e dissertações quando simultaneamente os descritores de “geometria espacial” e “apreensões em geometria” são aplicados, não contradizem a intensa atividade acadêmica no campo da educação matemática a fim de buscar novas práticas pedagógicas no ensino das geometrias, mas expõe uma carência em abordar cognitivamente o processo de aprendizagem da geometria espacial na Educação Básica, principalmente no Ensino Médio evidenciando as apreensões em geometria a partir dos registros de representação semiótica relacionados ao tema. Diante dessa constatação tornou-se necessário a busca por artigos científicos através da ferramenta de busca intitulada por Google Scholar, estabelecendo como descritor “apreensões em geometria” e a partir da leitura cuidadosa do título e resumo; chegou-se aos trabalhos listados no quadro 5 que expõem pontos fundamentais quando se busca compreender o aprendizado do estudante de um nível geral quanto aos conceitos geométricos na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no que tange as apreensões em geometria.

Quadro 5 - Artigos selecionados

<table>
<tr><th>Autor</th><th>Título</th><th>Ano</th></tr>
<tr><td>Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti</td><td>Estudo das apreensões e dos olhares em geometria</td><td>2013</td></tr>
<tr><td colspan="3">Publicado no VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – ULBRA, realizado na cidade de Canoas – Rio Grande do Sul.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Descreve a importância do olhar no processo de aprendizagem dos conceitos geométrico uma vez que o olhar assume cada vez mais um papel decisivo não só no ensino, mas em nossa vida cotidiana e descrevendo de acordo com Duval as apreensões em geometria (perceptiva, discursiva, sequencial e operatória) bem como os olhares icônico (botanista e agrimensor) e os olhares não-icônico (construtor e inventor).</td></tr>
<tr><td>Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti</td><td>Semiosfera do olhar: Um espaço possível para Aprendizagem da Geometria</td><td>2013</td></tr>
<tr><td colspan="3">Publicado na Revista de Ensino de Ciências e Matemática – Acta Scientiae, volume 15, nº 2.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Discorre de formar espaços dinâmicos em que o autor o denomina por semiosfera do olhar se referenciando a Lotman (2005) através da teoria de aprendizagem de Frostig e Horne (1964), Hoffer (1977) conhecida por capacidade espacial e dos olhares icônicos e não-icônicos de Raymond Duval (1995, 2005, 2012a, 2012b) destacando a importância do olhar no processo de aprendizagem em específico no ensino de geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental.</td></tr>
<tr><td>Prof. Dr. Méricles Thadeu Moretti
Prof.ª Dra. Célia Finck Brandt</td><td>Construção de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras</td><td>2015</td></tr>
<tr><td colspan="3">Publicado III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil - São Paulo, v.17, n.3, pp.597-616, 2015</td></tr>
<tr><td colspan="3">Descrição breve: Duval ao discorrer a ideia das apreensões em geometria e dos diferentes olhares sobre o registro figural geométrico, mais precisamente o olhar icônico e não-icônico, oportuniza aos pesquisadores estabelecerem a proposta de um ambiente cognitivo de aprendizagem, tendo como referência a semiosfera de Lotman (2005). A partir de diversos exemplos de problemas geométricos visando contemplar o papel heurístico do registro figural dentro do contexto do exercício, fica evidente a importância de que os tratamentos matemáticos sejam coordenados através das apreensões em geometria e da interação dos olhares. Sincronismos este que segundo os autores é uma boa perspectiva para contemplar a aprendizagem da geometria.</td></tr>
</table>

Fonte: produção do autor, 2020.

Com base no estudo preliminar das pesquisas acadêmicas listadas no quadro 4 e 5, os trabalhos de Alves (2019), Luana (2018), Novak (2018), Souza (2018), Lied (2016), Moran (2015), Grillo (2014), Félix (2014), Moretti (2013a, 2013b) e Moretti; Brandt (2015) apresentam pontos alinhados aos nossos objetivos e, portanto, segue um estudo detalhado das pesquisas acima listadas a fim de determinar pontos de afinidade quanto a importância da abordagem cognitiva no ensino de geometria na perceptiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995).

De acordo com Alves (2019), a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio na percepção dos alunos é algo difícil e temido, sendo comum se deparar com o receio da reprovação por parte deles em algum período escolar. A pesquisadora destaca que parte dessa concepção negativa da disciplina está pelo excesso de manipulações algébricas por parte do professor e sem associação com situações cotidianas.

Como ação, Alves (2019) propõe dentro da temática de Geometria Espacial estabelecer uma sequência didática contrapondo essa realidade negativa, buscando assim garantir não só uma aprendizagem, mas também preparar o estudante de modo que esteja apto a resolver questões em exames de acesso ao Ensino Superior, com destaque para o ENEM.

A escolha do tema, permeia e muito com esta pesquisa, uma vez que destaca a importância do ensino da geometria na formação cognitiva dos estudantes, bem como resgata a reflexão da ênfase exagerada de propostas pedagógicas direcionadas a simples aplicações de fórmulas, limitando assim o potencial temático do objeto matemático a ser estudado.

O uso de embalagens e modelos tridimensionais construídos pelos próprios estudantes na proposta de ensino de Alves (2019), enfatiza a importância da visualização do objeto tridimensional, contrapondo o tradicional desenho em perspectiva no plano, possibilitando assim que conceitos geométricos como, por exemplo, o paralelismo das arestas laterais de um prisma seja observado de forma clara e coerente.

A ênfase da visualização do objeto geométrico tridimensional no ensino também é preocupação da pesquisa de Luana (2018), ao enfatizar a importância do ensino da Geometria na Educação Básica, com ênfase na utilização do GeoGebra para abordar habilidades específicas da Geometria Espacial, que de acordo com sua revisão literária fica evidente a baixa qualidade do processo de ensino e aprendizagem, quando declara que, *“(...) pesquisas têm identificado um elevado grau de dificuldade de aprendizagem no que tange aos conceitos relacionados* (LUANA, 2018, p.45).

Luana (2018) parte do princípio de que, o baixo rendimento dos alunos em medidores de aprendizagem nacionais nos conhecimentos matemáticos, mais especificamente na Geometria Espacial, está vinculado a dificuldade em representar um objeto tridimensional, considerando suas propriedades a partir do uso somente de régua e compasso no processo de ensino.

Se utilizando da Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymond Duval, Luana (2018), deixa evidente que o uso das representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos não é uma opção do professor, dado o fato de que é impossível visualizar um objeto matemático sem uso de sua representação.

De acordo ainda com a pesquisadora, o entendimento da teoria de Duval, evidencia que o uso da tecnologia não só é capaz de corrigir a dificuldade de visualizar o sólido geométrico, mas em particular, o software de geometria dinâmica GeoGebra ao se utilizar de uma janela de uso da representação algébrica e outra da representação figural, cria o que Duval define como essencial para que ocorra o aprendizado matemático – a mobilização de pelo menos dois tipos de representação semiótica.

Entre os processos cognitivos relacionados a aprendizagem dos conceitos geométricos segundo Duval (2003), o trabalho de Luana (2018) mostrou que a visualização dos sólidos geométricos propiciados pela dinâmica do programa GeoGebra se mostrou fundamental para que as apreensões geométricas se dessem de forma mais explicita, favorecendo assim a construção do raciocínio geométrico.

Luana (2018) destaca também que o conhecimento dos conceitos de geometria plana por parte dos alunos participantes da sua pesquisa foi fundamental para a identificação e formação das representações dos sólidos geométricos.

A preocupação com a abordagem eficiente no ponto de vista pedagógico dos conceitos geométricos, principalmente quando tange a geometria 3D está associada a alguns fatores, entre eles a falta de materiais adequados, como régua, compasso, transferidor e também a complexidade do tema, o que justamente expõe o trabalho de Novak (2018), uma vez que seu *"trabalho contempla a geometria e o uso do ambiente dinâmico GeoGebra, por considerar esse recurso um potencializador do desenvolvimento de questões específicas e próprias da geometria"* (NOVAK, 2018, p. 15).

Novak (2018) em sua pesquisa associa o desenvolvimento do pensamento geométrico a base teórica de Raymond Duval (1995), em especial as atividades cognitivas denominadas como apreensões e também os olhares icônicos e não-icônicos, bem como a desconstrução dimensional, evidenciando assim conjuntamente com a esta pesquisa o papel dos registros semióticos na aprendizagem dos conceitos em geometria.

A utilização do ambiente dinâmico GeoGebra com estudantes, segundo Novak (2018) se torna o diferencial quanto a esta pesquisa, mesmo que a temática norteadora seja semelhante em alguns parâmetros, como a abordagem de poliedros por exemplo; os objetivos partem de pressupostos distintos, mas não menos importantes quanto ao papel da visualização dos objetos geométricos como estímulos para as apreensões em geometria.

Vale destacar que Novak (2018) também levanta preocupação quanto a precariedade da formação do professor quanto ao ensino da Geometria no currículo da Educação Básica. A pesquisadora ainda direciona o seu olhar para o fato de que o professor, ao buscar nos livros didáticos uma sequência de ensino que seja capaz de abordar os conceitos de geometria numa dimensão dinâmica e contextualizada sem deixar de lado a base axiomática, se depara com uma realidade em que o conhecimento da geometria se mostra não só desligado da realidade, mas restrito para aplicação imediata de fórmulas.

Souza (2018) em sua tese estabelece que no ensino de Geometria, a resolução de problemas em sua maior parte, têm a desconstrução dimensional das formas como pré-requisito para sua plena realização. A carência desta habilidade cognitiva é destacada pela pesquisadora, principalmente na postura didática de estimular a mudança(s) de dimensão(ões) em atividades geométricas presentes nos livros didáticos brasileiros. Souza (2018) ainda destaca que a resolução de problemas envolvendo conceitos geométricos necessariamente transitam por pelo menos dois registros semióticos caracterizando assim um espaço para o desenvolvimento cognitivo que deve ser explorado pelo educador em sua prática de ensino de modo a favorecer a proficiência geométrica.

A escolha temática de Lied (2016) veio ao encontro da interação da pesquisadora desde o início de sua graduação com trabalhos científicos envolvendo conceitos geométricos e softwares educacionais. Dada a carência de pesquisas com ênfase em construções geométricas associadas com o tema de lugares geométricos, a pesquisadora buscou investigar a mobilização dos registros de representação semiótica através de uma sequência didática envolvendo os conceitos de lugares geométricos a partir de dois distintos ambientes de aprendizagem: o tradicional com o uso de réguas, compassos e papel e outro utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebra. De acordo com Lied (2016), o uso da ferramenta computacional ampliando assim os tratamentos geométricos que os registros figurais oportunizavam, foi marcante para que os estudantes estabelecessem resoluções coerente; o que ela reafirma a partir da Teoria de Registros Semióticos de Duval da necessidade do aluno em transitar coordenadamente entre pelo menos dois tipos de registros, e do qual a dinâmica com que o registro figural pode ser manipulado num software de geometria dinâmica, em particular o GeoGebra, favoreceu e muito não só o entendimento, mas também o interesse por parte dos pesquisados.

A tese de Moran (2015), com a temática centrada nos registros figurais em geometria tendo como aporte teórico a teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, buscou investigar a influência entre o registro figural e as apreensões em geometria (perceptiva, discursiva e operatória) nos processos resolutivos de problemas geométrico por um grupo de professores da rede pública de ensino.

Moran (2015) observou que resoluções voltadas as demonstrações dos registros figurais que autora classifica EG (Expressão gráfica) e SG (Softwares de Geometria) foram mais eficientes quanto a manipulação entre seus pesquisados, já o MM (Material Manipulável) demonstrou mais afinidade quando o problema exigia que o tratamento figural fosse parte do processo resolutivo. Portanto, segundo a pesquisadora, ao utilizar diferentes representações semióticas figurais no processo resolutivo de problemas que envolvam conceitos de geometria, potencializa de modo que *"(...) os tratamentos figurais, a mobilização do registro discursivo da língua formal, as modificações figurais, e também as apreensões discursivas, sejam desenvolvidas, contribuindo com o processo de aquisição dos conhecimentos e com o funcionamento cognitivo do pensamento"* (MORAN, 2015, p. 233).

Logo, no processo de ensino da Geometria é importante, de acordo com Moran (2015), que o professor disponibilize diversos registros figurais tanto durante a abordagem do tema quanto nos processos de resolução de problemas e que, de acordo com a natureza da problemática, a especificidade do registro figural deve ser levado em consideração a fim de maximizar a aprendizagem.

Quanto ao trabalho de Grillo (2014), no decorrer da sua pesquisa afirma que, de sua experiência como professor, é notável que os conceitos de Geometria Espacial estejam entre os temas de maior dificuldade de aprendizagem por parte dos alunos da Educação Básica sendo que a representação ineficiente e a superficialidade com que os professores tratam o tema, assumem papeis decisivos nessa realidade negativa.

Diante desse cenário, Grillo (2014) propõe construir uma proposta pedagógica no qual o aluno seja instigado à resolução de problemas desafiadores, sem deixar de favorecer sua autonomia quanto ao entendimento dos conceitos abordados. A escolha de exercícios e atividades, limitados aos sólidos do cubo e do paralelepípedo, teve no uso de materiais concretos a iniciativa para expor a figura real com o objetivo de favorecer a resolução e o entendimento dos conceitos.

De acordo ainda com Grillo (2014), quando o aluno tem a possibilidade de participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem e se tiver ainda, a possibilidade de materializar uma representação para o conceito, surge uma nova relação entre o aluno e o objeto matemático, ao relatar que "*eles gostaram e as atividades ajudaram a melhorar a compreensão da Geometria Espacial. Isso facilita a aula do professor, pois alunos interessados tendem a não apresentar problemas disciplinares durante as aulas*" (GRILLO, 2014, p.88).

Ao evidenciar a funcionalidade de se utilizar materiais concretos como ferramentas pedagógicas, a fim de auxiliar no desenvolvimento e aprendizado dos sólidos paralelepípedo e do cubo, Grillo (2014) expõe a decisiva necessidade em fazer o aluno se mover cognitivamente entre pelo menos dois registros semióticos. A manipulação do objeto pelos alunos forneceu uma privilegiada representação figural em 3D do objeto matemático a ser estudado que, associando ao registro discursivo e ao registro da figura no ambiente 2D, seja no quadro ou no caderno, criava o ambiente ideal ao aprendizado geométrico.

Buscando compreender a dinâmica dos trabalhos científicos relacionados aos registros de representação semiótica e a aprendizagem matemática, Félix (2014), publica a pesquisa pela qual visa refletir sobre o baixo rendimento dos alunos em medidores nacionais, tendo como base o SAEB.

Segundo Félix (2014), a dificuldade em desenvolver as habilidades matemáticas está relacionada a falta de distinção entre os registros matemáticos e seus respectivos objetos. Esta mesma pesquisa também compartilha da importância que o registro das representações desses conceitos tem sobre o desenvolvimento cognitivo das habilidades, bem como, a própria significância dos objetos matemáticos, uma vez que o único meio de os acessar é através da sua representação.

Félix (2014) coloca o uso da tecnologia a serviço da educação como um fator de alta relevância educacional. Os Parâmetros Curriculares Nacionais definem que o uso de novas tecnologias no ambiente da sala aula são importantes, desde que oportunize a criação de ambientes de aprendizagem em que os estudantes possam não só pesquisar, mas também fazer antecipações e simulações, confirmar ideias prévias, experimentar, criar soluções e construir novas formas de representação mental" (BRASIL, 1998, p. 141 apud Félix, 2014)).

Felix (2014) reafirma a importância em oportunizar ao aluno uma gama maior das representações de objetos da Geometria Espacial, no qual o uso da tecnologia precisa ser utilizada como uma ferramenta educacional que oportunize um registro figural adequado do objeto a ser estudado e por meio da manipulação gráfica promova o uso das apreensões operatórias descritas por Raymond Duval.

Portanto, uma vez que essa pesquisa estabelece como objetivo norteador identificar as apreensões relacionadas aos conceitos geométricos, com a manipulação de figuras tridimensionais que estejam no currículo da educação básica, as abordagens feitas nas pesquisas resgatam a importância de que o educador tenha plena ciência e distinção do objeto matemático, suas representações e os seus níveis de congruência que deseja ensinar, assim como afirma Félix (2014) sobre a *"(...) importância de trabalhar na sala de aula atividades que levem os estudantes a explorarem as diversas formas de representar um objeto matemático, bem como a identificar os tratamentos mais adequados para cada tipo de representação" (Félix, 2014, p. 139).*

Moretti (2013a) expõe que parte das dificuldades relacionadas ao aprendizado das geometrias reside nos diferentes processos cognitivos dos alunos que possuem olhares próprios quando visualizam uma figura geométrica ou um problema de geometria. A Teoria de Registros de Representação Semiótica ao abordar a questão do olhar no ensino de geometria, não se trata de um olhar qualquer, mas sim, daquele que é capaz de construir e caracterizar o pensamento geométrico, sendo classificado como olhares icônicos e não icônicos

A importância dos olhares sobre a problematização geométrica está intimamente relacionada com a atuação imediata e automática da apreensão perceptiva no entendimento das figuras envolvidas, como destaca Moretti (2013a), o que reafirma a necessidade em desenvolver e aperfeiçoar os olhares para as situações em que os conceitos de Geometria Espacial são parte integrante do processo de resolução, olhares estes que, além de transitar do olhar icônico ao não icônico, cognitivamente consubstanciam nas apreensões em geometria: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial (MORETTI, 2013a).

A publicação de Moretti (2013b) vem destacar que, no processo de compreender as geometrias com ênfase a geometria espacial, a dificuldade em representar a tridimensionalidade do objeto matemático tem como consequência imediata também a dificuldade em estabelecer os olhares que gestarão atitudes cognitivas, ou seja, as apreensões em geometria, a fim de formalizar o processo cognitivo de resolução e entendimento da problematização geométrica.

Podemos assim definir que, uma abordagem envolvendo conceitos geométricos precisa levar em consideração se todo o processo de ensino favorece a percepção e aos olhares icônicos e não icônicos que, de acordo com Duval, se movimentam conforme as apreensões em geometria que se faz necessário para compreensão e resolução da problematização, criando um ambiente capaz de desenvolver a proficiência geométrica tão desejada pelos educadores (MORETTI, 2013b).

Diante do papel da visualização quanto a importância do registro figural permeado aos problemas de geometria, Moretti e Brandt (2015) associam um ambiente cognitivo de aprendizagem denominado semiosfera da aprendizagem em geometria, em referência a Lotman (2005), de modo que a interação das apreensões em geometria (perceptiva, sequencial, discursiva e operatória) e dos olhares icônicos (botanista e agrimensor) e não-icônico (construtor e inventor) - ambos apresentados por Raymond Duval (1995, 1997, 2005, 2012a, 2012b) - torne um ambiente capaz de favorecer o entendimento do processo de aprendizagem em geometria.

Os pesquisadores, através de exemplos, evidenciam o quanto a coordenação entre as apreensões são essenciais para que os tratamentos matemáticos sejam coerentes com a proposta do problema e que paralelamente os tipos de olhares sobre a figura estejam vinculadas a apreensão perceptiva e discursiva coordenando de forma eficiente o potencial heurístico que é próprio da imagem em problemas geométricos.

Importante destacar que os autores utilizam de exemplos questões que abordam conceitos de geometria plana, o que diferencia desta presente pesquisa e amplia ainda mais a importância da visualização, dado o fato de que tendo como objetivo a temática de Geometria Espacial a percepção no plano do objeto matemático é subjugado a apreensão discursiva, uma vez que o objeto tridimensional representado no plano apresenta distorções geométricas, como por exemplo, a proporcionalidade das medidas das arestas laterais e da base de um prisma reto quando este é desenhado em perspectiva (MORETTI; BRANDT, 2015).

É possível observar que, das investigações realizadas, em nenhum caso se levantam, de forma consciente, ou como objetivo da investigação, questões voltadas diretamente para a identificação das apreensões em geometria nas resoluções de exercícios de Geometria Espacial tendo como base questões tradicionais do Ensino Médio. Portanto, fica evidente a relevância do nosso estudo no campo da Educação Matemática principalmente no que se refere ao ensino da Geometria, suas representações e implicações cognitivas.

3 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS E A COGNIÇÃO MATEMÁTICA

O ensino da matemática deve levar em consideração a diversidade com que um objeto matemático pode ser representado e, sendo estruturas abstratas exige do educador a atenção quanto a sua metodologia a fim de que o estudante tenha não só a experiência, mas principalmente a certeza de que compreender conceitos matemáticos é uma interação dinâmica entre diversos conjuntos de símbolos.

É importante salientar que as representações semióticas são produções estabelecidas a partir do uso de signos próprios a um sistema de representação, por exemplo uma figura geométrica, uma escritura algébrica, um enunciado em língua natural, um gráfico; são representações semióticas que de acordo com Duval expõe sistemas semióticos distintos quanto a sua significação e funcionamento (DUVAL, 2012c, p. 269).

Portanto, é essencial que o professor tenha clareza de que sua prática pedagógica está sustentada em representações, sejam elas semióticas ou não em que a distinção por parte do estudante entre um objeto e sua representação é ponto fundamental para que ocorra a compreensão do conceito matemático.

Assim, se o processo de ensino estiver pautado sobre a coordenação de no mínimo dois registros distintos entre si, mas correlacionados ao mesmo objeto matemático, para Duval é condição inicial *"(...) para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações"* (DUVAL, 2012c, p. 270).

Entretanto, não é suficiente somente criar propostas pedagógicas que contemplem representações diferente de um mesmo objeto, pois para que exista a distinção cognitiva e eficiente entre o objeto matemático e a sua representação é necessário desenvolver cognitivamente a coordenação, o sincronismo e a autonomia da capacidade cognitiva do estudante quanto aos registros de representação semiótica (DUVAL, 2013).

Sendo assim, diante do papel das representações semióticas no contexto da conceitualização dos objetos matemático, em que a *semíosis* sendo a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e a *noésis* a apreensão conceitual do objeto em questão, logo é possível compreender que *"não há noésis sem semíosis, é a semíosis que determina as condições de possibilidade e de exercício da noésis"* (DUVAL, 2009, p.17).

Ainda pensando na dimensão cognitiva, a compreensão das geometrias para Duval (2003) está associada a processos cognitivos específicos, se diferenciando do aprendizado das outras habilidades matemáticas, pois o estudante precisa simultaneamente interagir entre as representações semióticas da língua natural e figural. Além do mais, a compreensão do conceito geométrico envolvido está associado ao desenvolvimento de um processo cognitivo autônomo, com características bem distintas, uma vez que a resolução de problemas geométricos requer desde os registros figurais para visualizar uma figura e suas respectivas propriedades, como também dos registros em língua natural para enunciar definições, hipótese e teoremas

Então, se o único acesso ao objeto matemático é a partir de seus registros semióticos, compreender o que caracteriza um sistema semiótico é fundamental, no qual Duval (2013) descreve que:

> (...) os sistemas semióticos devem, com efeito, permitir o cumprimento das três atividades cognitivas inerentes a toda representação. Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis com uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 2013, p. 36,37).

Portanto, para que um sistema semiótico possa ser considerado um registro de representação semiótica, é necessário oportunizar as atividades cognitivas definidas por Duval (2009) como formação, tratamento e conversão.

A formação está associada a seleção do conjunto de traços, caracteres, símbolos e também das regras de composição do que se pressupõe demonstrar, independentemente de ser uma representação mental ou um objeto real. Por exemplo, a escolha do tipo do traço (espessura, comprimento), localização no plano, conectividade entre suas extremidades e o ângulo formado por seus segmentos é determinante quando se pretende, através do registro figural, representar um quadrado.

Já a atividade cognitiva do tratamento, se configura na transformação da representação dentro de um mesmo registro, obedecendo assim as mesmas regras de formação, por exemplo, ao se fazer uso do registro numérico para compor uma expressão do perímetro de um retângulo qualquer, no qual num primeiro momento se descriminou as quatro dimensões dos seus respectivos lados, em seguida é expresso o perímetro do mesmo retângulo se utilizando de um único registro numérico. Nota-se, nesse caso, o uso de um restrito sistema de escrita, os números.

E por fim, a conversão que, sob o olhar matemático, se caracteriza em transformar uma representação de um registro para outro, podendo ser esse novo registro capaz de propiciar as atividades de tratamento com uma eficiência maior se comparada ao sistema anterior no qual se encontrava a representação semiótica. Importante destacar que de acordo com Moretti (2014), *"na conversão se conserva a referência ao mesmo objeto, mas não se mantém a explicação das mesmas propriedades deste objeto, ou seja, o conteúdo da representação é diferente"* (MORETTI, 2014, p.119)

Logo, uma representação semiótica precisa contemplar epistemologicamente o objeto matemático que deseja representar, compondo assim um sistema de registros que somente utilizando do seu regimento interno seja possível gerar outras representações, bem como ser capaz de fazer correspondências com outros sistemas diferentes, ampliando assim o entendimento e a visualização do mesmo objeto matemático.

A teoria dos Registros de Representação Semiótica abordada por Raymond Duval apesar de toda a sua complexidade cognitiva, expõe simplicidade ao afirmar que é impossível querer estudar processos correlacionados ao aprendizado matemático sem fazer uso da noção de representação seja ela externa ou interna. De acordo com o autor "*as representações internas, pertencendo a um sujeito, não são comunicadas a um outro pela produção de uma representação externa*" (DUVAL, 2009, p.42). Já as representações externas possuem além da função de comunicação, também duas funções de caráter cognitivo, ou seja, *"a função de objetivação, como todas as representações conscientes, e a função de tratamento"* (DUVAL, 2009, p 42).

Duval (2009) esclarece ainda que a representação consciente é aquela em que a pessoa percebe o objeto, aparece ao sujeito e ele a nota, já a representação inconsciente não ocorre a percepção do objeto por parte do sujeito. Sobre esta última, o mesmo autor descreve que "a *passagem do não-consciente ao consciente corresponde a um processo de objetivação para o sujeito que toma consciência*", processo este fundamental para que ocorra a apreensão conceitual (DUVAL 2009, p 41).

Assim as representações semióticas assumem ao mesmo tempo a caracterização de serem conscientes e externas, que através da percepção de estímulos nos conduz a visão do objeto representado. Em particular no ensino da geometria é comum nos depararmos com um registro figural de um objeto matemático, como por exemplo um hexaedro regular que ao se apresentar na forma de uma expressão gráfica a percepção de suas propriedades é de certa forma confusa quando se busca na representação propriedades geométricas próprias do objeto em si, como a sua ortogonalidade.

Nesse momento então, surge a necessidade de direcionar o papel dos registros semióticos na aprendizagem da geometria destacando entre os processos cognitivos próprios dos objetos geométricos, as interpretações autônomas desencadeadas através do registro figural em que Duval as denomina por apreensões (perceptiva, discursiva, operatória e sequencial).

3.1 A geometria e os registros semióticos

O papel do registro figural, seja mental ou semiótico, é de extrema prioridade no processo de compreensão da geometria, pois o uso da figura permite tanto o acesso ao objeto matemático representado como também cria a possibilidade de estimar propriedades e até mesmo de visualizar processos resolutivos.

Uma vez que a atividade cognitiva que a geometria exige, requer uma coordenação simultânea entre dois registros (figurais e discursivos) e mesmo que um tipo de registro pareça suficiente para a resolução de um determinado problema deve ser papel do professor instigar sempre a busca por outras formas de contemplar o mesmo objeto matemático, favorecendo assim que quando o objeto em questão for de natureza geométrica, o aluno não se utilize das representações figurais como sendo um acessório agregado ao conceito, podendo escolher em utilizar ou não para compreender o conceito geométrico em questão (KLUPPEL, 2014, p. 120).

Essa tendência optativa quanto ao uso do registro figural de um objeto geométrico num processo de compreensão, evidencia uma compartimentalização do conceito, negando assim a mobilidade de pelo menos dois registros, condição mínima para haver o aprendizado segundo Duval.

Cabe então ao professor dimensionar de forma significativa dentro da sua proposta pedagógica, processos de ensino e aprendizagem que valorizem o papel heurístico próprio do registro figural dentro do contexto do ensino da geometria. Contribuindo assim para que o estudante sendo capaz de identificar e caracterizar o registro que lhe é apresentado possa então discernir sobre a necessidade ou não de fazer uso de outros registros a fim de estabelecer o seu processo de compreensão de forma significativa (DUVAL, 2009, p. 54-55).

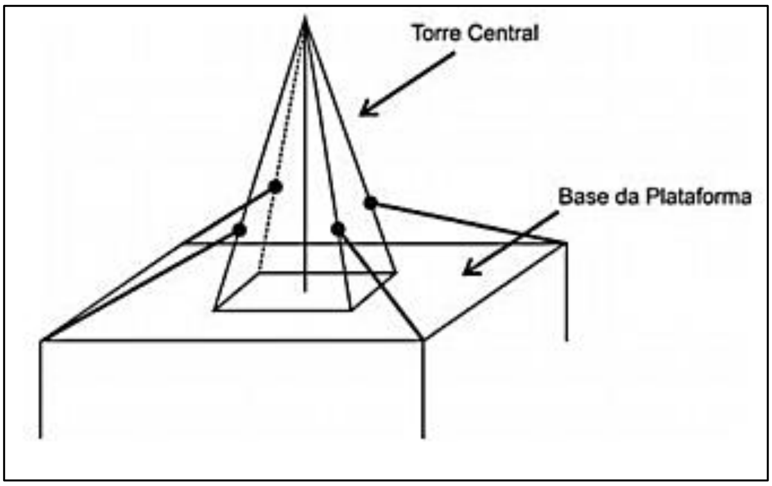
No Ensino de Geometria, em particular os conceitos de Geometria Espacial o uso de imagens têm como papel essencial na visualização, compreensão e resolução de problemas. Um registro figural possui a capacidade de redirecionar o entendimento a respeito de um texto, pode também oferecer uma perspectiva sobre o objeto geométrico que o enunciado não evidenciou, denotando assim o quanto um registro figural pode contribuir para que o estudante alcance o entendimento necessário para executar a resolução da questão.

Portanto, a atitude do professor ao inserir uma figura no contexto de um problema de geometria deve estar atento se a imagem não contém elementos que descaracterizam a sua propriedade heurística, como por exemplo a Figura 1 que ilustra a questão 164 da prova do ENEM do ano de 2010:

Segue abaixo o enunciado da questão e sua respectiva representação figural:

Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor fixar a torre central. **Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular)** e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração:

Figura 1 - Ilustração da questão 164 - Prova ENEM 2010 - adaptada



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}\,m$ e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então qual a medida, em metros, de cada cabo?

É notável dois fatores que colocam o registro figural em desacordo com sua proposta intuitiva de aproximar a situação para o campo visual do estudante. O desalinhamento das terminações dos cabos de sustentação na pirâmide e a discordância visual do ponto de fixação do cabo na torre contradizendo o registro discursivo em destaque no enunciado. Fatores estes com significativo potencial de comprometer a iniciativa quanto aos tratamentos matemáticos necessários para a resolução eficiente da questão. Pois de acordo com Duval (2012a) se uma figura consiste numa organização de elementos num dado campo perceptível é importante no contexto educacional que a configuração desses elementos possa não só favorecer a sua visualização enquanto registro figural, mas principalmente instigar o processo heurístico quanto a sua compreensão (DUVAL, 2012a, p. 121)

Importante ressaltar que a figura num contexto geométrico, por exemplo, deve apresentar-se como um suporte intuitivo eficiente de modo a oferecer novas perspectivas de maneira a auxiliar o processo resolutivo, porém nem sempre é fácil “observar” na figura as propriedades e relações relativas que correspondam ao processo resolutivo desejado.

De fato, o ensino da geometria ao exigir tratamentos distintos quanto a natureza dos registros, se faz necessário então *“uma aprendizagem separada das operações demandadas em cada um destes registros, constituindo desta forma, as condições necessárias para a aprendizagem da geometria”* (KLUPPEL, 2014, p. 120).

Portanto, se os conceitos geométricos são objetos ideias e que seu aprendizado permeia o fato de que o aluno seja capaz de fazer distinção entre o conceito e sua representação, é fundamental que as atividades cognitivas - formação, tratamento e conversão - sejam espontâneas e coordenadas, ao nível que o estudante possa de forma consciente ou não, escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados sejam mais econômicos e mais eficientes quanto a sua compreensão (DUVAL, 2014, p.16).

Nesse processo de aprendizagem que envolve a compreensão em geometria do qual a movimentação dos registros semióticos vinculados a esses objetos geométricos se destacam no universo de formação e estruturação cognitiva, de acordo com Duval (1995, apud ALMOULOUD, 2013) existem três ações que compõem específicas funções epistemológicas sobre o aprendizado, sendo elas:

> Visualização para a exploração heurística de uma situação complexa;
> Construção de configurações, que pode ser trabalhada como um modelo, em que as ações realizadas representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
> Raciocínio, que é o processo que conduz para a prova e a explicação (p. 126).

Importante levantar o fato de que essas atividades cognitivas: visualização, construção e raciocínio, para Duval possuem suas particularidades que as diferenciam, mas em cooperação estabelecem unicidade e complementariedade de tal modo que essa conjuntura quando maximizadas implicam num processo cognitivo eficiente e proativo (ALMOULOUD, 2013).

No estudo e aprendizagem dos sólidos geométricos, por exemplo, o estudante ao se utilizar da visualização para contemplar o registro figural no espaço tridimensional, otimiza a construção na perspectiva pedagógica que estabelece as condições necessárias para a melhor representação do elemento figural como uma figura geométrica de modo a contemplar todo o contexto axiomático. À medida que o processo cognitivo de aprendizagem se encaminha para a prova, seja num caso particular ou no geral, Duval denomina essa atividade cognitiva por raciocínio

No ensino de geometria as resoluções que advém dos problemas, evocam formas de interpretações específicas a fim de que o processo de aprendizagem aconteça de maneira ativa e estável, denominadas por apreensões em geometria, sendo descritas como: perceptiva, , discursiva, sequencial e operatória, no qual essa última, é subdividida em modificação mereológica, modificação ótica e modificação posicional (DUVAL, 1995, apud ALMOULOUD, 2013, p.126-127).

A apreensão perceptiva permite identificar de imediato a partir do registro figural uma forma ou uma figura bidimensional ou um objeto tridimensional. Sua ação se deixa conduzir intuitivamente pelo aspecto visual do que contempla, porém, o fato das figuras geométricas não possuírem um estatuto de registro autônomo e estarem diretamente correlacionadas com o registro discursivo exposto no enunciado, a coloca subordinada a apreensão discursiva. Para Duval essa subordinação entre estas duas atitudes cognitivas podem ser consideradas como uma teorização da representação figural (DUVAL, 1988b, p. 69 apud MORETTI, 2002, p.356).

Na intenção de seguir individualizando o papel das apreensões em geometria de modo a obter um pequeno deslumbre de sua relação com o processo cognitivo exercido numa resolução de problema geométrico, o registro discursivo por sua vez quando exposto no enunciado ou na própria representação figural traz consigo elementos e propriedades que, uma vez identificado o objeto matemático, não só torna possível o entendimento da questão em si, como também estabelece uma base teórica na qual a apreensão discursiva conduz a apreensão perceptiva a olhar para uma figura tendo como eixo norteador aquilo que está exposto no enunciado, caracterizando assim o processo de visualização do objeto.

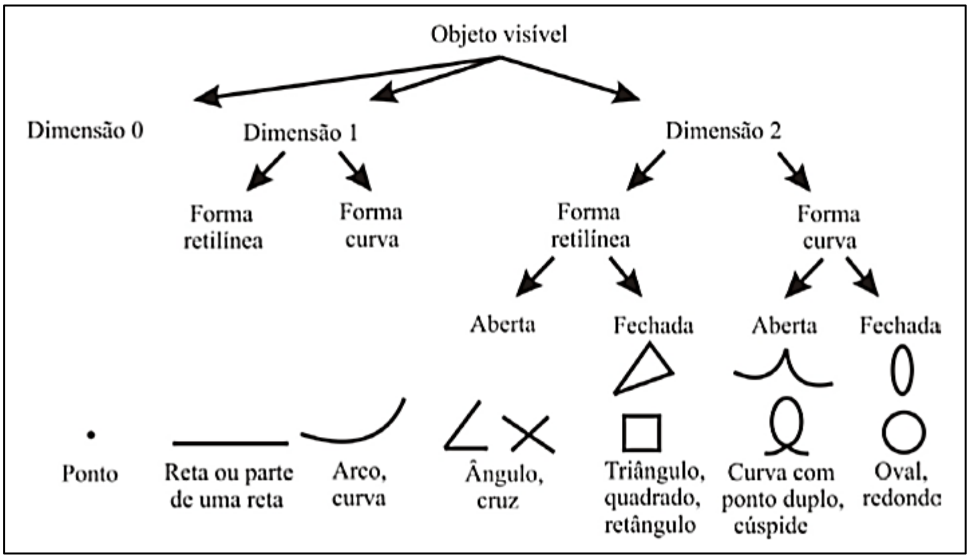
Destaca-se aqui a importância que durante o processo de ensino, as definições sejam bem estabelecidas, os teoremas bem estruturados e demonstrados, as propriedades referentes aos objetos geométricos abordados de forma coerente, porém, sem deixar de associar com o registro figural do objeto geométrico que esteja estudando (ALMOULOUD, 2013, p. 131).

Sobre as apreensões perceptiva e discursiva, Duval (2012a) ainda escreve:

> Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais (DUVAL, 2012a, p. 120, 121).

A organização perceptiva de uma figura, ao ser pautada no entendimento dos elementos figurais que a compõe de acordo com Duval (1988), deve-se levar em consideração que toda figura "*é uma organização de elementos (cf. Figura 2) de um campo perceptivo não homogêneo, constituindo um objeto que se destaca do campo. Dependendo do número de suas dimensões, esses elementos podem ser pontos, linhas ou zonas"* (DUVAL, 2012a, p. 121).

Figura 2 - Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: DUVAL, 1995, p. 177 apud MORETTI, 2015, p. 602.

Portanto a fim de obter uma teorização do objeto geométrico de uma forma significativa e ampla é importante que o olhar do estudante seja capaz de desenvolver uma análise tanto qualitativa (forma retilínea aberta ou fechada, ângulo ou polígono, etc.) quanto quantitativa (0D, 1D, 2D ou 3D) dos elementos que organizadamente compõe o registro figural.

Deve se fazer presente na didática do ensino em geometria o desenvolvimento da percepção de qualquer elemento figural também a partir de suas unidades figurais elementares. Duval descreve numa perspectiva dimensional que uma figura aparentemente reduzida a uma determinada dimensão figural, só é vista como uma figura em matemática se for considerada como uma composição organizada de unidades figurais de dimensão menor (DUVAL, 1995, p. 178, apud SODRÉ DE SOUZA, 2019, p. 325-326).

Portanto é imprescindível que a didática do professor conduza o aluno a desenvolver a função cognitiva da visualização tendo como uma das ferramenta a desconstrução dimensional da figura geométrica, pois como afirma Souza (2018) *"uma figura não é o que vimos a primeira vista, mas sim, o que precisamos visualizar diante das hipóteses de um problema onde perpassam as diferentes dimensões"* (SOUZA, 2018, p. 81).

Moretti (2015) afirma que ¨*a causa de insucesso em muitos problemas em geometria está na dificuldade de olhar uma figura nas dimensões inferiores ao que é dada*¨, como por exemplo, questões que envolvam a necessidade de determinar a diagonal de um poliedro reto-retângulo, ou o volume de uma pirâmide. A representação da figura, seja ela de natureza semiótica ou mental, poderá desencadear uma leitura errônea das unidades elementares figurais, frustrando assim todo o processo de construção e raciocínio de uma correta resolução (MORETTI, 2015, p. 602)

Logo, garantir a presença do registro figural em atividades que envolvam conceitos geométricos apesar de sua declarada importância no papel do processo de ensino e aprendizagem, não é suficiente para se obter a resolução adequada, pois se o aluno não conseguir exercer a função de visualização sobre o registro semiótico da figura dificilmente terá a compreensão necessária para construir um processo resolutivo coerente.

Sendo assim, desconstruir a figura em dimensões inferiores a partir dos seus elementos figurais para Duval (1995) passa a ser fundamental quando se busca um aprendizado significativo, pois a partir da reconfiguração da figura é possível oportunizar novas percepções que poderão ou não serem utilizadas no processo resolutivo de problemas geométricos, caracterizando assim o papel heurístico próprio do registro figural.

A estas operações cognitivas sobre a figura, Duval (1995) as denomina como sendo as apreensões operatórias, que, portanto, estão vinculadas as alterações que podem ser efetuadas na figura e nas novas percepções que essas alterações possam oportunizar (DUVAL, 1995, apud ALMOULOUD, 2013, p. 127).

Como toda figura pode ser modificada de inúmeras maneiras, ou seja, aceita diversos tratamentos matemáticos, Duval explana que:

> Podemos dividi-la em partes que sejam como várias subfiguras, incluí-la em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura: esta modificação é uma modificação mereológica, ela se faz em função da relação parte e todo. Pode-se também aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma modificação ótica, ela transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação, que é realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou alterá-la. Pode-se, enfim, deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca: esta modificação é uma modificação posicional de orientação e do lugar da figura dentro do seu ambiente (em geral o plano fronto paralelo) (DUVAL, 2012a, p. 125).

Quando Duval (2012) descreve as apreensões operatórias, fica evidente a diversidade dos tratamentos que uma figura pode oportunizar em função do contexto em que está inserida. O quadro 6, retrata as apreensões operatórias e suas respectivas transformações:

Quadro 6 - Tipos de apreensões operatória de uma figura

Apreensão operatória de uma figura	
Tipos de modificações figurais	Operações que modificam a figura
Mereológica (relação parte/todo)	• Reconfiguração Intermediária (decomposição de uma figura em unidades figurais elementares, podendo ou não serem combinadas entre si ou em outra figura)
Ótica	• Anamorfose (variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo, mas dinâmico quanto a variação de forma e tamanho) • Superposição (a mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas dinâmico quanto a variação do tamanho)
De posição	• Translação (mesmo tamanho e forma, mas com o mesmo deslocamento orientado a cada unidade elementar da figura no plano visual) • Rotação (mesmo tamanho e forma, mas definido uma unidade elementar (0D) qualquer no plano visual o deslocamento orientado da figura é norteado a partir de uma unidade de medida angular qualquer aplicada a cada unidade elementar (0D) que a compõe)

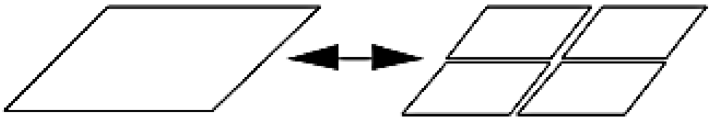
Fonte: produção do autor, 2020.

Quanto a modificação mereológica de um modo geral, em função da dinâmica da natureza elementar que compõe toda representação figural que, uma vez constituída uma reconfiguração intermediária do elemento figural, pode não ser a única para o determinado contexto, destacando novamente a relação heurística que a figura possui num problema de geometria.

Duval (2005, p.21) classifica a modificação mereológica em três casos:

Modificação mereológica estritamente homogênea: a decomposição é feita em unidades da mesma forma do que a figura original, como é possível perceber no exemplo do quadrilátero na Figura 3:

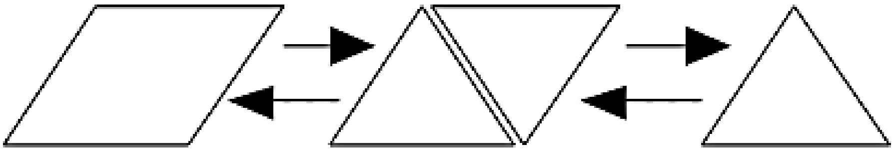
Figura 3 - Modificação mereológica estritamente homogênea



Fonte: Duval, 2005, p. 21.

Modificação mereológica homogênea: a decomposição ocorre se utilizando de unidade figurais diferentes da figura de partida, mas mantendo a mesma forma entre si, o exemplo da Figura 4 tendo o quadrilátero como figura de partida ao ser decomposto e dois triângulos exemplifica de forma clara essa modificação:

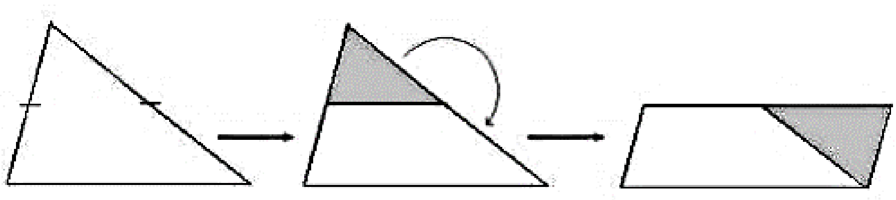
Figura 4- Modificação mereológica homogênea



Fonte: Duval, 2005, p. 21.

Modificação mereológica heterogênea: a decomposição é feita em unidades figurativas de forma diferentes uma da outra não sendo necessariamente perceptível sua reversão, como por exemplo, a ação de dividir um triângulo em duas partes para formar um paralelogramo como indica a Figura 5:

Figura 5- Modificação mereológica heterogênea



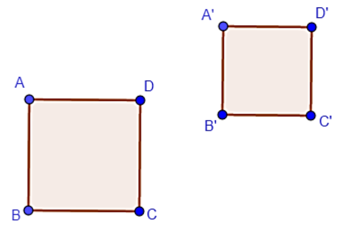
Fonte: Duval, 2005, p. 22.

Importante ressaltar que, mesmo que uma figura geométrica esteja associada a um problema e que inicialmente seja conhecido inúmeras decomposições possíveis para a figura inicial, nem todas as decomposições serão favoráveis ao processo de tratamento matemático que conduzirá a solução do problema. Conforme Duval, em certos casos, os a apreensão perceptiva poderá favorecer ou não o uso eficiente desse tratamento geométrico (DUVAL, 2012c apud SOUZA, 2018, p.84).

Ainda sobre a apreensão mereológica Duval (2005) destaca que o tratamento geométrico através da decomposição mereológica pode ser executado materialmente e/ou graficamente e/ou mentalmente (DUVAL, 2005, p. 22).

Quanto a modificação ótica "*ela transforma a figura em outra, chamada de imagem*" podendo também ser realizada graficamente ou mentalmente estando associada principalmente a percepção de ver a figura em profundidade, *"realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou altera-la"* ao manipular o registro figural em plano fronto-paralelos desencadeando assim novas percepções como por exemplo, a variação do seu tamanho, como mostra o exemplo na Figura 6 (DUVAL, 2012 b, p. 8).

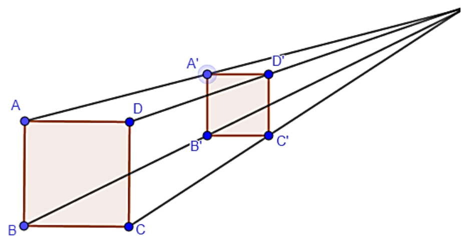
Figura 6 - Modificação ótica do quadrado (ABCD →A'B'C'D')



Fonte: Produção do autor, 2020.

Um outro exemplo do potencial do registro figural quanto variabilidade do uso da modificação ótica é a percepção da figura tridimensional, em que ao se utilizar da justaposição em profundidade de figuras semelhantes modificando o plano em relação ao plano fronto-paralelo é possível ilustrar de modo figurativo a utilização de lentes e espelhos, como mostra a Figura 7:

Figura 7- Homotetia entre os quadrados ABCD e A'B'C'D'



Fonte: Produção do autor, 2020.

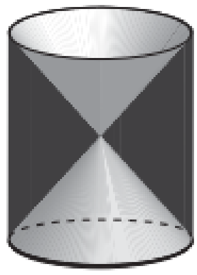
Já a modificação posicional estando relacionada ao deslocamento da figura a partir de um referencial dentro do seu ambiente, seja por translação, rotação e reflexão no plano ou no espaço, mantem tamanho e forma inicial do registro figural, assim como as outras modificações é realizável mentalmente ou graficamente (DUVAL, 2012b, p.8) .

Considerando que a modificação posicional está relacionada ao deslocamento da figura a partir de um referencial mantendo sua forma, o elemento figural da questão 170 (prova amarela) consiste num exemplo em que a apreensão operatória evidencia a interação da modificação posicional no processo de visualização do objeto matemático e por consequência a resolução coerente do problema.

Segue abaixo o enunciado da questão e sua respectiva representação figural:

A figura mostra uma anticlepsidra, que é um sólido geométrico obtido ao se retirar dois cones opostos pelos vértices de um cilindro equilátero, cujas bases coincidam com as bases desse cilindro. A anticlepsidra pode ser considerada, também, como o sólido resultante da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

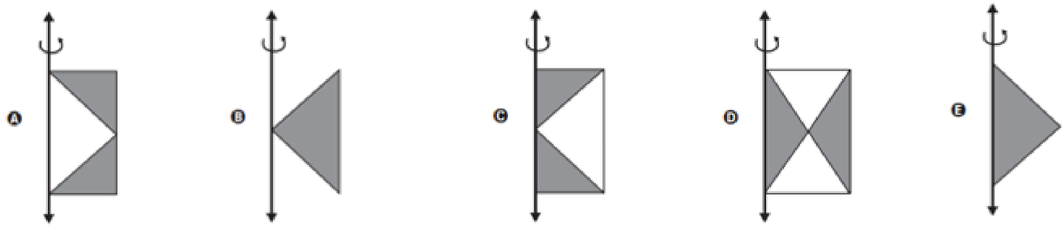
Figura 8 - Componente da questão 170, ENEM 2018



Fonte: Disponível no site: inep.gov.gov.br/educação_basica/enem/provas

A figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado gera uma anticlepsidra como a da figura acima é:

Figura 9 - Alternativas de resolução da questão 170



Fonte: Disponível no site: inep.gov.gov.br/educação_basica/enem/provas

Essa questão ao caracterizar o registro figural tanto na abordagem do problema quanto nas alternativas, evidencia o papel norteador da apreensão perceptiva em comandar os tratamentos geométricos que serão responsáveis pela resolução correta do problema. Essa interação mais direta entre a apreensão perceptiva e operatória resulta no processo que Duval o denomina como visualização (DUVAL, 1997 apud MORETTI & BRANDT, P. 605).

Portanto, os tratamentos geométricos aplicados na Figura 10 de modo que se visualize a figura plana cuja rotação em torno do eixo indicado possa ser considerada a figura geradora da anticlepsidra , a desconstrução do objeto (3D) o reduzindo a uma região plana (2D) com características e propriedades regidas também pela apreensão discursiva configura o primeiro tratamento, para que em seguida a ação cognitiva da modificação posicional (rotação) possa através da visualização confirmar como sendo o item (b) a imagem correta a ser considerada.

Diante das abordagens apresentadas até o momento, não resta dúvida de que os problemas relacionados com o ensino da geometria são privilegiados pela existência das representações figurais em seu contexto de aprendizagem e que naturalmente por permitirem a análise em conjunto com a representação em língua materna contribui para seu papel heurístico tão mencionado nessa pesquisa.

Entretanto, deve existir uma interação entre as apreensões em geometria de modo a ser possível identificar as interpretações que o contexto oportuniza e as modificações que o registro figural permite, uma vez que os tratamentos geométricos vinculados a figura não podem ser subestimados somente pela visão perceptiva, mas sim pela função cognitiva da visualização.

Souza (2019) ressalta a importância dos processos visuais ligados ao ensino de matemática destacando que a representação geométrica possui através das apreensões, principalmente pela apreensão perceptiva de fazer emergir uma forma de pensar capaz de apontar o caminho dos processos resolutivos, pois segundo Duval (1998*),"é por meio dessa apreensão que podemos conseguir ideias para resolver um problema, por exemplo, ao prevermos caminhos de subdivisões, criação de linhas auxiliares, rotações, dentre outros procedimentos, permitimos que a figura possa exercer o seu papel heurístico"* (DUVAL, 1998, p.147 apud SOUZA, 2018, p.329).

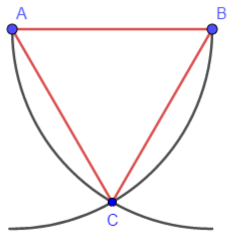
E por fim, mas não menos importante a apreensão sequencial que, de acordo com Duval, refere-se a uma organização cognitiva capaz de construções geométricas através da observação e sincronismo das ações que envolvem a compreensão e visualização da figura geométrica buscando como objetivo formalizar sua representação (DUVAL, 1995 apud ALMOULOUD, 2014, p. 127).

Logo a apreensão sequencial está fundamentada nas ações cuja proposta seja construir ou descrever uma figura geométrica, de modo que tenha como resultante sua representação. Podemos perceber o processo cognitivo relativo à apreensão sequencial por exemplo no processo de construção de um triângulo equilátero ABC a partir de um lado conhecido, por meio de compasso e régua de modo que existe um procedimento metodológico que é necessário seguir:

- Trace um segmento $\overline{AB}$ de comprimento 6 cm;
- Com a ponta do compasso no ponto A e uma abertura igual a $\overline{AB}$ descreva um arco cujo raio será igual à $\overline{AB}$ = 6 cm;
- Em seguida, com a ponta seca no ponto B e mesma abertura $\overline{AB}$ descreva um outro arco, que intersecta o primeiro no ponto C;
- Uma os pontos A, B e C traçando os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ de modo a obter o triângulo equilátero ABC como desejado.

A Figura 10 mostra o resultado dos procedimentos realizados a fim de construir o registro semiótico figural de um triângulo equilátero a partir do uso de compasso e régua, e durante o desenvolver da construção geométrica cada etapa tem o seu papel dentro do contexto axiomático do objeto a ser representado.

Figura 10 - Imagem esperada do processo de construção do triângulo equilátero ABC



Fonte: Produção do autor, 2020.

A interação das apreensões em geometria no processo de aprendizagem descrita por Moretti (2013) compõe de um modo geral o aprendizado dos objetos geométricos, do qual o desenvolvimento do olhar sobre o registro geométrico é essencial para que o estudante ao enxergar os elementos significativos na figura possa correlaciona-los ao discurso em língua natural contemplando assim as ações elementares das funções cognitivas para a compreensão dos conceitos geométricos (HILLESHEIM; MORETTI, 2020, p.2).

Do fato de existir interações entre as apreensões em geometria, Duval (1997; apud Moretti, 2013) destaca algumas conexões entre elas, por exemplo as apreensões perceptiva e discursiva, que se associam coordenando o modo de ver a figura a partir das hipóteses caracterizando assim a figura geométrica; por outro lado o que denominamos por visualização é a conexão entre as apreensão operatória e perceptiva; enquanto que a construção geométrica é o resultado das interações entre as apreensões sequencial, discursiva e perceptiva e pôr fim a demonstração e a heurística representam a conexão entre as apreensões discursiva, operatória e perceptiva. É notável o papel da apreensão perceptiva na construção dessas caracterizações, mesmo quando não explicita sua interação, a percepção visual sobre o registro geométrico é determinante no processo do ensino de geometria (p. 4-5).

Além do mais, Duval (2005) ao afirmar que o olhar sobre a figura está relacionado ao tipo de tarefa que se deseja fazer, sinaliza que as apreensões em geometria também estão vinculadas a atividade que se deseja mobilizar em relação ao objeto geométrico, no qual, para o mesmo autor, existem quatro maneiras de olhar para uma figura geométrica (DUVAL, 2005, p. 9, tradução do autor).

Temos o "olhar do Botânico", que *"é a entrada mais óbvia e imediata"* de modo que o reconhecimento da forma acontece através dos seus contornos, numa perspectiva qualitativa e elementar por exemplo o reconhecimento de um quadrado ou de um triângulo através de seus contornos (DUVAL, 2005, p. 9-10, tradução do autor).

Quanto ao olhar do Agrimensor, o autor destaca a relação histórica sobre o "*aprender a medir comprimentos (...)"*, logo as tarefas que exigem esse tipo de olhar estruturam uma cognição pela qual o estudante precisa fazer relação de uma escala de grandeza para outra de modo que as propriedades geométricas destacadas nesse olhar tem como finalidade serem utilizadas para fins de medição (DUVAL, 2005, p. 10, tradução do autor).

O terceiro olhar denominado por Duval de o olhar do Construtor está estruturado no processo de construção da figura geométrica e, portanto, para o uso de instrumentos como réguas e compasso, uma vez que *"é através do uso de um instrumento que os alunos podem realmente perceber que as propriedades geométricas não são apenas característica perceptivas"* . Atualmente o uso das tecnologias para o ensino de geometria como a partir de softwares de geometria dinâmica, do qual o autor faz destaque para o Cabri Geométre e pela revisão bibliográfica dessa pesquisa o software GeoGebra traz consigo também todas as qualidades para favorecer o desenvolvimento a partir desse olhar sobre a figura geométrica (DUVAL, 2005, p. 10-11, tradução do autor).

O “olhar do Inventor”, representa a interação mais plena com a figura geométrica, sua percepção o leva a adicionar unidades elementares no registro figural dado, portanto a capacidade de desconstrução dimensional é parte integrante desse olhar; essas modificações *“permitirão uma reorganização visual da figura original”* caracterizando assim uma maior eficiência quanto ao processo de resolução, como por exemplo “*a divisão de um triângulo em duas partes de modo a forma um paralelogramo”* (DUVAL, 2005, p. 11-12, tradução do autor).

De acordo com Moretti (2013) importante destacar que *“esses olhares caminham de um lado a outro lado conforme as apreensões em geometria são exigidas. No olhar do botanista, essencialmente é a apreensão perceptiva que é exigida. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do inventor”* (MORETTI, 2013, p. 6). Deste modo, no que tange os objetivos dessa pesquisa, assim como as apreensões, esses olhares também estão presentes nos processos resolutivos das atividades propostas aos pesquisados ampliando a dimensão do entendimento sobre as produções realizadas por eles.

Ainda sobre esses olhares, Duval (2005) os organiza em dois grupos: os olhares icônicos (botanista e agrimensor) e os olhares não-icônicos (construtor e inventor) de modo que segundo o autor existe uma diferença entre a percepção e reconhecimento de uma forma (olhar icônico) e a identificação e o reconhecimento de um objeto geométrico (olhar não-icônico) (DUVAL, 2005, p. 13).

Mesmo não sendo objetivo dessa pesquisa, é relevante destacar que para Duval (2005) o processo de ensino e aprendizagem da geometria deve buscar o desenvolvimento cognitivo de modo que exista a passagem entre esses diferentes olhares, porém neutralizar o mecanismo de iconicidade não é um processo cognitivo imediato que se faz necessário permear por processos de construção geométrica com foco na desconstrução dimensional a fim de que através da apreensão operatória se produza a fecundidade intuitiva das figuras geométricas (DUVAL 2005, p.14).

Contemplar o universo cognitivo das habilidades geométricas a fim de não só deslumbrar de sua natureza, mas cognitivamente estar tão próximo dos objetos geométricos ao passo de reconhece-los tanto em suas propriedade e relações quanto em suas representações, sendo elas semióticas ou não, Duval reconhece que a individualidade de um ato cognitivo não poderia compreender um objeto geométrico em sua totalidade, e desse modo, o autor inclui a ação dos olhares interagindo com as apreensões em geometria permeando sinergicamente também pela desconstrução dimensional da forma.

Existindo heterogeneidade entre essas ações, é possível integrar um espaço de sistemas semióticos capaz de garantir conectividade cognitivas tendo como elemento motriz o olhar, configurando assim segundo Lotman (1990), um espaço de encontro e de convivência que não tem o objetivo de medir forças entre seus integrantes, mas sim otimiza-las com ações no coletivo (LOTMAN, 1990, 123-125).

Nesse contexto, Moretti (2013b) destaca o espaço semiosfera do olhar, "*um lugar de criação para desenvolver atividades que visam a aprendizagem da geometria",* tendo como princípio as interações entre as ações cognitivas identificadas por Duval – os olhares icônico e não icônicos, as apreensões em geometria e a desconstrução dimensional da forma (MORETTI, 2013b, p. 296).

E se o olhar ganha destaque na compreensão e resolução dos problemas geométricos, Moretti (2013b) evidencia que *"o - aprender a ver, torna-se cada vez mais importante não só para a disciplina de geometria, mas para grande parte das nossas atividades cotidianas (MORETTI, 2013b, p.290).* No entanto, como toda habilidade deve ser aprimorada a fim de obter alta qualidade naquilo que se deseja realizar, o olhar precisa estar pautado em todas as ações de aprendizagem que tenha como objeto matemático, um ente geométrico a fim de fazer com que a semiosfera do olhar não seja uma espaço inerte e vazio de descobertas, mas sim um formador do pensamento geométrico.

4 GEOMETRIA ESPACIAL NO ENSINO MÉDIO

A importância do ensino de geometria na educação básica é descrita em vários documentos oficiais, assim como nos Parâmetros Curriculares do Ensino Médio quando descreve que "*(...) as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria"*(BRASIL, 1999, p.257).

Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, as crianças já nos anos iniciais devem ter o contato com figuras geométricas bidimensionais e tridimensionais a fim de que possam identificar as propriedades elementares, com o intuito de nos anos finais possa então ampliar o entendimento e a percepção das figuras geométricas de modo a desenvolver conceitos, como por exemplo, o de congruência e semelhança (BRASIL, 2018, p. 274).

É imprescindível que essas competências relacionadas ao estudo da geometria propiciem ao estudante da Educação Básica, mas especificamente do Ensino Fundamental a capacidade de leitura e interpretação do espaço, para que no Ensino Médio suas habilidades geométricas possam ser potencializadas a tal ponto que permita modelar a realidade e interpretá-la para o bem comum.

Sabemos que essa ainda não é a realidade de muitas escolas brasileiras, LIMA (2006) enfatiza:

> O grande desafio em ensinar Geometria a alunos do 2º grau é fazer a transição do plano para o espaço. Embora estejamos habituados a figuras geométricas tridimensionais (convivemos todo o tempo com planos, cubos, esferas, cones, cilindros, etc.) é no 2ºgrau que tais figuras são estudadas, pela primeira vez de forma sistemática (LIMA, 2006, p. 161).

LIMA (2006) afirma que o aluno até apresenta certa familiaridade com figuras geométricas simples, mas não ocorrendo o mesmo quando se aborda Geometria Espacial, logo, sugere que *"é importante que os conceitos da Geometria Espacial sejam apresentados com cuidado. Uma alternativa é aproveitar a ocasião para apresentar uma formulação axiomática para a Geometria"* (LIMA, 2006, p. 163).

Portanto, é importante que o professor evidencie para seus alunos a consonância axiomática entre as geometrias, ou seja, mostrar que os conceitos primitivos de ponto, reta e plano que estruturam a base euclidiana da Geometria Plana, também estão inseridos na base axiomática da Geometria Espacial diferenciando-se somente pelo conceito primitivo de espaço

(Euclidiano) levando assim ao fato de que todos os resultados válidos para o plano (Euclidiano), também são verdadeiros no espaço (Euclidiano).

4.1 Poliedros

O estudo dos poliedros requer um cuidado especial quanto a sua definição, é imprescindível enquanto professor, estabelecer uma definição que seja adequada ao nível de estudo que se pretende desenvolver. Para essa pesquisa cujo grupo de estudantes são da 3ª série do Ensino Médio, vamos estabelecer uma definição que atenda os objetivos dos documentos norteadores nacionais, de modo mais geral a Base Nacional Comum Curricular - BNCC.

Historicamente, a geometria babilônica por volta do período 2000 a.C. a 1600 a.C. de acordo com Eves (2011, p. 60-61), já possuíam familiaridade com alguns polígonos e algumas representações espaciais, como por exemplo o paralelepípedo (EVES, 2011, p. 60-61).

Assim durante todo o decorrer da história, os poliedros foram utilizados e estudados, mas como relata Lima (2006) "*uma das causas da dificuldade que os matemáticos do passado tiveram para demonstrar teoremas sobre os poliedros, estava justamente na falta de uma definição precisa do significado dessa palavra*" (LIMA, 2006, p.231).

Dada a importância em definir corretamente os poliedros e suas relações, vamos utilizar Lima (2006,p. 230-248) como aporte teórico para todas as considerações a respeito desse sólido geométrico.

<u>Definição:</u> Poliedro é uma reunião de um número infinito de polígonos planos chamados faces onde:

1. Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
2. A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.
3. É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice.

É importante destacar que o item (2) traz a definição de que o lado de um polígono, comum a exatamente duas faces se denomina aresta, e todo vértice do polígono, é também vértice do poliedro.

Já o item (3) caracteriza uma região do espaço denominada de interior do poliedro, e de um modo geral a partir dessa definição nos limitaremos a estudar somente os poliedros convexos, onde para que um poliedro seja considerado convexo vamos admitir que basta que o plano de cada polígono deixe os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Logo, a superfície poliédrica limitada convexa possui:

- Faces: são os polígonos;
- Arestas: são os lados dos polígonos;
- Vértices: são os vértices dos polígonos;
- Ângulos: são os ângulos dos polígonos.

A contagem das faces, dos vértices e arestas de um dado poliedro consiste em relacionar as unidades elementares geométricas que formam o objeto geométrico com seu estatuto. Para isso representaremos por F o número de faces, já o número de vértices, por V e por fim o número de arestas por A. Do fato de que os polígonos que compõe as faces podem variar de acordo com o número de lados, é conveniente que representemos por F_n, sendo $n \geq 3$. Analogamente como os vértices podem ser de gêneros diferentes tomaremos como sua representação V_n de modo a indicar o número de vértices nos quais concorrem n arestas, e de acordo com a definição de poliedro pelo item (2) cada vértice é ponto comum a no mínimo três arestas.

Portanto, é facilmente perceptível as seguintes relações:

$$F = F_3 + F_4 + \cdots + F_n$$

$$V = V_3 + V_4 + \cdots + V_n$$

Como cada aresta do poliedro compõe o lado de duas faces, ao tomarmos a forma planificada desse sólido é de imediata percepção de que cada face triangular destaca três arestas, logo, basta multiplicar o número de triângulos que compõe o poliedro por três para obter o número de arestas, e analogamente o número de quadrilátero por quatro, o número de pentágonos por cinco e assim sucessivamente, e depois somar os resultados de modo a obter um valor que representa do dobro das arestas, ou seja:

$$2.A = 3.F_3 + 4.F_4 + \cdots + n.F_n$$

De forma semelhante podemos contar as arestas observando os vértices do poliedro, ou seja:

$$2.A = 3.V_3 + 4.V_4 + \cdots + n.V_n$$

Quando falamos de poliedros, temos em mente a Relação de Euler ou podemos denominar como Teorema de Euler relacionado aos poliedros. Registra a história que data do 1758 sua descoberta e então muitas demonstrações se fizeram aparecer nas literaturas científicas. Em essência o Teorema de Euler afirma que seja P um poliedro convexo com F faces, A arestas e V vértices. Tem-se necessariamente F- A + V = 2.

Um processo para descrever a demonstração dessa relação foi publicado na Revista do Professor de Matemática – RPM edição 03 em 1983 pelo professor Zoroastro Azambuja Filho e considerando a clareza dos argumentos se faz leitura obrigatória de todo professor que busca uma prática docente inovadora e eficiente.

4.2 Poliedros regulares

O conhecimento de tais sólidos precede milênios, Euclides (cerca de 300 a.C.) ao escrever Os Elementos, mais precisamente o livro XIII dedica-o inteiramente aos sólidos regulares. Boyer (1974) *afirma que "o último livro é inteiramente dedicado a propriedades dos cinco sólidos regulares, fato que levou alguns historiadores a dizer que Os elementos foram compostos como uma glorificação das figuras cósmicas ou platônicas"* (BOYER, 1974, p. 86).

Definição: Um poliedro convexo é dito regular se satisfazer a duas condições:

(a) Todas as suas faces sejam polígonos regulares iguais.

(b) Em cada um de seus vértices incidir um mesmo número de arestas.

Teorema 1: Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Demonstração:

Seja *n* o número de lados de cada face e considere *p* o número de arestas que concorrem em cada vértice. Portanto, temo s:

$$2.A = n.F \qquad (1)$$

$$n.F = p.V \qquad (2)$$

Dividindo a equação (1) por 2 e a equação (2) por p, com p positivo e substituindo na Relação de Euler, obtemos:

$$\frac{n.F}{p} - \frac{n.F}{2} + F = 2$$

$$F = \frac{4p}{2p + 2n - pn}$$

Devemos ter o denominador $2.p + 2.n - n.p > 0$, ou seja, $\frac{2n}{n-2} > p$

Como p $\geq$ 3, desenvolvendo a desigualdade obtemos n < 6 e, portanto, temos os seguintes casos:

n = 3 e p = 3, temos F = 4 (tetraedro)

n = 3 e p = 4, temos F = 8 (octaedro)

n = 3 e p = 5, temos F = 20 (icosaedro)

n = 4 e p = 3, temos F = 6 (cubo)

n = 5 e p = 3, temos F = 12 (dodecaedro)

Portanto, no quadro em seguida listamos os cinco poliedros regulares de acordo com o número de faces, bem como seus respectivos vértices e arestas.

Quadro 7 - Poliedros regulares

POLIEDRO REGULAR	Nº DE FACES	Nº DE ARESTAS	Nº DE VÉRTICES
TETRAEDRO	4	6	4
HEXAEDRO	6	12	8
OCTAEDRO	8	12	6
DODECAEDRO	12	30	20
ICOSAEDRO	20	30	12

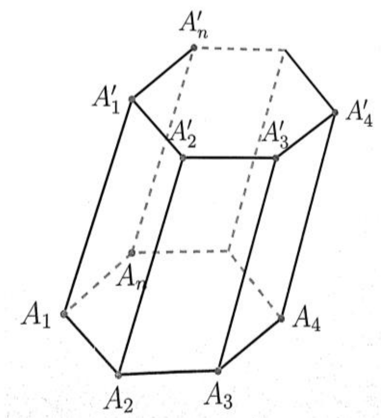
Fonte: produção do autor, 2020.

Em virtude da essencialidade em definir os conceitos fundamentais da Geometria Espacial, em particular os sólidos geométricos denominados por: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, vamos utilizar Muniz Neto (2013,p. 334-552) e também Lima (2006, p.251-267) como aporte teórico para todas as considerações a respeito desse objetos geométrico.

4.3 Prisma

<u>Definição:</u> Considere os polígonos $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$, contidos em planos paralelos de modo que as retas $A_1\acute{A}'_1$, $A_2\acute{A}'_2$, ..., $A_n\acute{A}'_n$, sejam também paralelas. Então, é imediato conforme a Figura 11 que, para $1 \leq i \leq n$, o quadrilátero $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$ é um paralelogramo e que os polígonos $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$ sejam congruentes.

Figura 11 - Prisma de bases $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$



Fonte: Muniz Neto, 2013, p. 347.

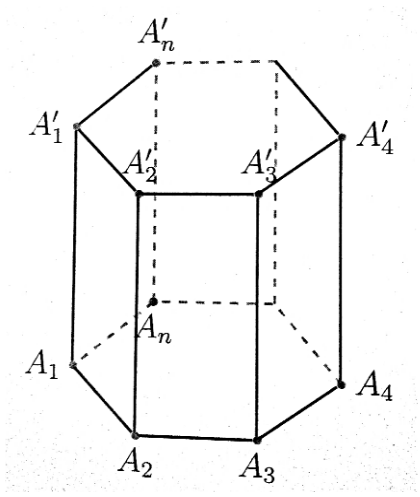
Portanto, o prisma conforme a Figura 11, de bases $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$ é a porção limitada do espaço, delimitada pelos polígonos $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$ e pelos paralelogramos $A_iA_{i+1}A'_{i+1}A'_i$ para $1 \le i \le n$.

A partir da definição, é possível descrever seus elementos, os pontos $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n,}A'_1, A'_2, A'_3, \dots, A'_{n,}$ são os vértices do prisma, já os segmentos $A_iA_{i+1,}$ $A'_iA'_{i+1}$ e $A_iA'_i$ como sendo suas arestas e os segmentos $A_iA'_i$, para $1 \le i \le n$ suas aresta laterais. Os paralelogramos $A_i\,A_{i+1}\,A'_{i+1}\,A'_i$ são as faces laterais do prisma e todo ponto interior de um prisma é o conjunto dos pontos do prisma que não pertencem a nenhuma das faces do mesmo.

Uma vez que as bases do prisma acima definido são polígonos de n lados, dizemos que ele se trata de um prisma de n-gonal. Nos casos para n = 3 e n = 4, é mais comum nos depararmos com as nomenclaturas alternativas do qual são denominados por prisma triangular e prisma quadrangular.

Temos ainda que a altura de um prisma é equivalente a distância entre os planos de suas bases. Um prisma reto é um caso particular onde as arestas laterais são perpendiculares aos planos de suas bases; de modo, se $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$ são as bases de um prisma reto, então $A_1\acute{A}'_1 = A_2\acute{A}'_2 = \dots = A_n\acute{A}'_n$, e tal valor comum coincide com a altura do prisma reto e um prisma é considerado regular conforme Figura 12, se suas bases forem polígonos regulares.

Figura 12- Prisma regular de bases $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e $A'_1A'_2A'_3 \dots A'_n$



Fonte: Muniz Neto, 2013, p. 348.

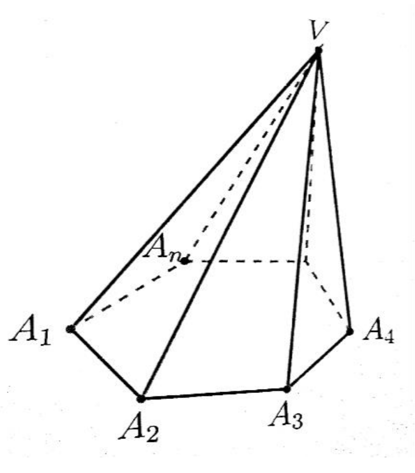
A partir da definição, é possível discriminar seus elementos principais:

- Duas bases poligonais congruentes;
- n faces laterais (paralelogramos);
- n arestas laterais;
- 3n arestas;
- 2n vértices;
- (n+2) faces.

4.4 Pirâmide

Definição: Dados um polígono convexo $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e um ponto V que não pertence ao plano de $A_1A_2A_3 \dots A_n$, definimos a pirâmide $VA_1A_2A_3 \dots A_n$, de vértice V e base $A_1A_2A_3 \dots A_n$, como a porção limitada do espaço, delimitado por $A_1A_2A_3 \dots A_n$r e pelos triângulos VA_iA_{i+1}, para $1 \geq i \geq n$, consideremos ainda os segmentos VA_i e A_iA_{i+1}sendo as arestas e os triângulos VA_iA_{i+1} como as faces laterais da pirâmide, conforme Figura 13. E por fim, temos que o interior de uma pirâmide é o conjunto dos pontos da pirâmide que não pertence a nenhuma das faces da mesma.

Figura 13 - Pirâmide de base $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e vértice V

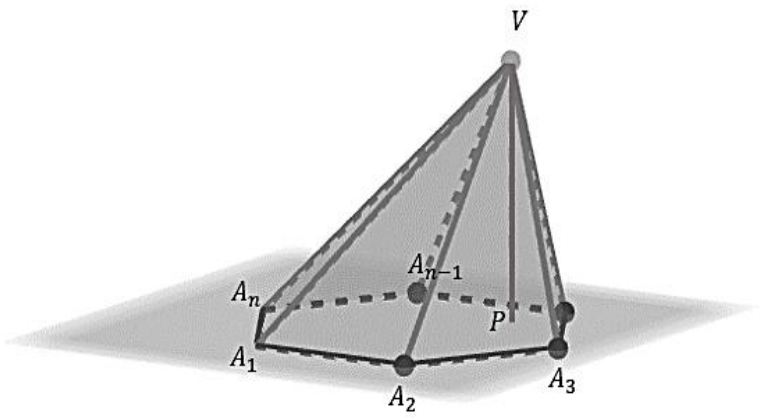


Fonte: Muniz Neto, 2013, p. 335.

Sendo a base da pirâmide acima definida a partir de polígono de n lados, dizemos então que se trata de uma pirâmide n-gonal. Nos casos $n = 3$ e $n = 4$ utilizamos com mais frequência as nomenclaturas alternativas: pirâmide triangular e quadrangular, respectivamente, denotando as bases correspondentes por ABC e ABCD.

Seja P o pé da perpendicular baixada do vértice V ao plano da base $A_1A_2A_3 \dots A_n$ de uma pirâmide $VA_1A_2A_3 \dots A_n$, então o segmento $\overline{VP}$ equivale a altura da pirâmide. A referida pirâmide é dita regular se sua base $A_1A_2A_3 \dots A_n$ for um polígono regular de centro P. Nesse caso, uma vez que $A_i'P = A_{i+1}'P$, temos que $V\hat{P}A_i = V\hat{P}A_{i+1} = 90°$ e $\overline{VP}$ é lado comum, concluímos que então que $VPA_i \equiv VPA_{i+1}$ por LAL e, portanto, que $V\acute{A}_i = V\acute{A}_{i+1}$, para $1 \leq i \leq n$.

Figura 14 - Pirâmide de base $A_1A_2A_3 \dots A_n$ e vértice V com $\acute{VP}$ sendo sua altura



Fonte: Produção do autor, 2020.

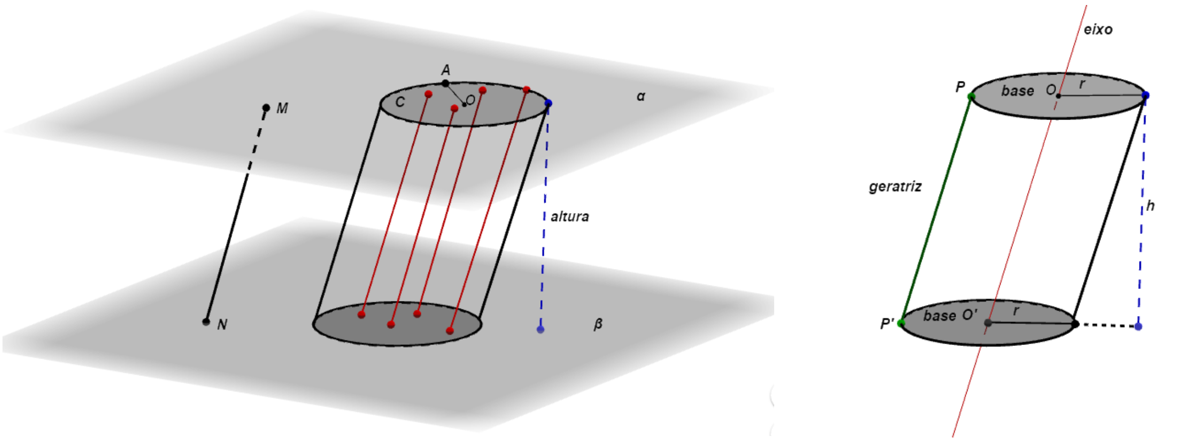
Uma vez definida a pirâmide, podemos identificar seus elementos logo, uma pirâmide possui:

- 1 (uma) base;
- n face laterais triangulares;
- n+1 faces ao todo;
- n arestas laterais;
- 2n arestas;
- n+1 vértices;
- A altura de uma pirâmide é a distância h entre o vértice e o plano da base.

4.5 Cilindro Circular

Definição: Dado dois planos α e β, distintos e paralelos, e um segmento de reta $\overline{MN}$ de modo que a extremidade M pertença ao plano α e a outra extremidade N pertença a β. Considere também um círculo C de centro O e raio r de medida equivalente ao segmento $\overline{AO}$, contido em α, chamamos cilindro circular ou simplesmente cilindro (cf. Figura 15) à reunião de todos os segmentos de reta, paralelos e congruentes ao segmento $\overline{MN}$, que unem um ponto do círculo C a um ponto do plano β.

Figura 15 – Cilindro circular e seus elementos



Fonte: Produção do autor, 2020.

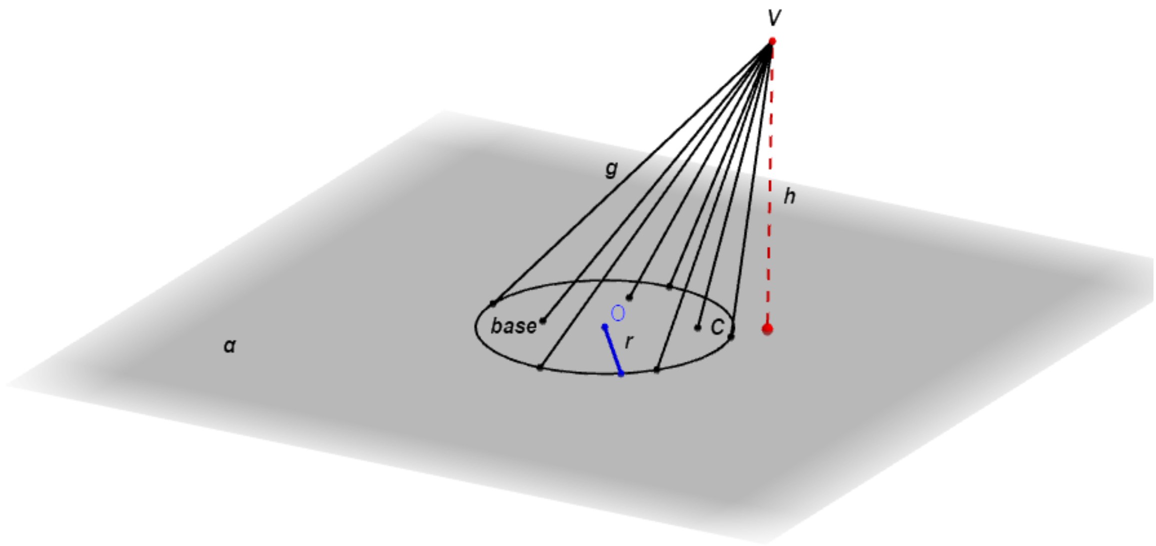
De acordo com a definição, o cilindro possui:

- 2 (duas) bases: círculos congruentes situados em planos paralelos;
- Geratrizes: segmentos com uma extremidade em um ponto da circunferência de centro O e raio r e a outra no ponto correspondente da circunferência de centro O’ e raio r, de modo que r é o raio da base;
- A altura do cilindro é a distância h entre os planos que contém as bases.
- Eixo: segmento que tem como extremidade os centros O e O’ dos círculos que compõe as bases.

4.6 Cone Circular

<u>Definição:</u> Consideremos um círculo de centro O e raio r situado num plano α e um ponto V fora de α. Denomina-se cone circular ou cone à reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo.

Figura 16 – Cone circular e seus elementos



Fonte: Produção do autor, 2020.

A definição de cone circular nos permite identificar seus elementos (cf. Figura 16):

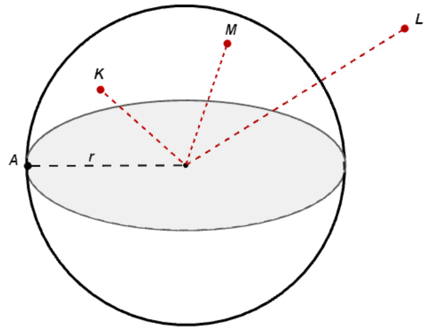
- Uma base: o círculo de centro O e raio r.
- Geratrizes: são os segmentos com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.
- Vértice: o ponto V que não pertence ao plano da base.
- Altura: é a distância entre o vértice e o plano da base.

4.7 Esfera

Definição: Dado um ponto O e um número real positivo r, o conjunto de pontos do espaço, cuja distância a O é no máximo r é chamado de esfera. Todavia o ponto O é considerado como sendo o centro da esfera e o número r sendo o seu raio.

Afirmamos que um ponto P qualquer é interior a esfera se, e só se $\acute{O}P < r$, todavia se $\acute{O}P > r$, o ponto P é tomado como sendo um ponto externo. Para o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é exatamente r se define como sendo a superfície esférica.

Figura 17- Esfera de raio r e centro O

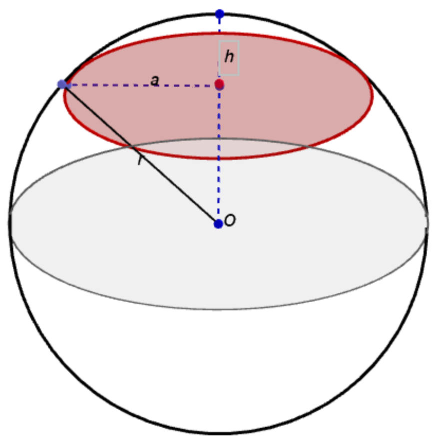


Fonte: Produção do autor, 2020.

Dada a Figura 19, considere a esfera de centro O e raio $\acute{OA}$. Seja ainda $\acute{OM} = \acute{OA} = r$, logo o ponto M pertence a superfície esférica. Todavia $\acute{OK} < r$, então temos que k é um ponto interno a esfera, analogamente $\acute{OL} > r$ donde L é um ponto externo à esfera.

Toda secção plana de uma esfera é um círculo (cf. Figura 18). Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como secção um círculo máximo da esfera.

Figura 18 - Esfera de centro O, raio r, com destaque a superfície da secção



Fonte: Produção do autor, 2020.

Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da secção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2$$

4.8 Volume de figuras espaciais

Considerando as figuras espaciais: prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, como sólidos simples, vamos abordar seus respectivos volumes, que é intuitivo pensar que o volume de um sólido geométrico representa a quantidade de espaço ocupado por ele. De modo que para representar essa "quantidade de espaço" através de uma representação numérica, se faz necessário compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será denominado volume.

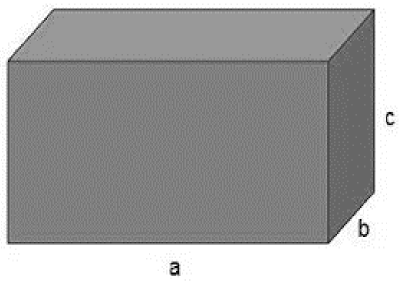
Tomando o fato que, uma unidade de volume será equivalente a um cubo de aresta 1 (um), logo, para cada unidade de comprimento adotada, temos uma unidade correspondente de volume. Se, por exemplo, a unidade de comprimento for o centímetro (cm), então a unidade correspondente de volume será denominada de centímetro cúbico (cm^3).

Portanto, ao se referir que um dado sólido S possui um certo volume V, é semelhante deduzir que essa representação numérica do volume de tal sólido, deve ser o número que exprima quantas vezes o sólido S contém o cubo unitário. Entretanto, esse sólido pode ter a forma bastante irregular, onde não é intuitivo o significado do número de vezes que um sólido contém esse cubo. Logo, vamos então tratar de obter métodos que nos permitam encontrar fórmulas para o cálculo de volumes dos sólidos simples.

4.8.1 O volume do paralelepípedo

O paralelepípedo retângulo (cf. Figura 19) ou como é comumente conhecido por bloco retangular é um poliedro formado por 6 (seis) retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c).

Figura 19 - Paralelepípedo retângulo



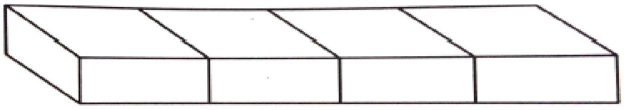
Fonte: Produção do autor, 2020.

O volume desse paralelepípedo retângulo será representado por $V(a,b,c)$ e como o cubo unitário é um paralelepípedo retângulo cujos comprimentos, largura e altura medem 1, então $V(1,1,1) = 1$.

Para obter o volume do paralelepípedo retângulo, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isto quer dizer que se mantivermos, por exemplo, constantes a largura e a altura e se multiplicarmos o comprimento por um número natural n, o volume ficará também multiplicado por n, ou seja:

$$V(n.a,b,c) = n.V(a,b,c)$$

Figura 20 - Paralelepípedos iguais e justapostos



Fonte: Lima, 1998, p. 253.

A Figura 20 mostra 4 paralelepípedos retângulos iguais e justapostos, coladas em faces iguais. Naturalmente, o volume total é 4 vezes maior que o volume de um deles.

Esse fato, constatado para números naturais, também vale para qualquer número real positivo, ou seja, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional â terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$V(a,b,c) = V(a.1,b,c) = aV(1,b,c) = aV(1,b.1,c) =$$

$$abV(1,1,c) = abV(1,1,c.1) = abcV(1,1,1) = abc.1 = abc$$

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Em particular, se a face de dimensões a e b está contida em um plano horizontal, chamaremos essa face de base e a dimensão c de altura. Como o produto $(a \times b)$ representa a área da base, no cotidiano escolar é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área da base pela sua altura.

Volume do paralelepípedo = (área da base) x (altura)

Utilizamos aqui um fato completamente intuitivo (mas na verdade é um axioma) que é o seguinte. Se dois sólidos são tais que possuem em comum, no máximo pontos de suas cascas, então o volume da união de dois é a soma dos volumes de cada um.

Para explicar melhor, dizemos que um ponto P é interior a um sólido S quando existe uma esfera de centro P inteiramente contida em S. Quando P pertence à S mas não existe tal esfera, é o que nos permite usar termos como justapor ou colar dois sólidos. Ainda, permite dizer que se um sólido está dividido em vários outros, então seu volume é a soma dos volumes de suas partes.

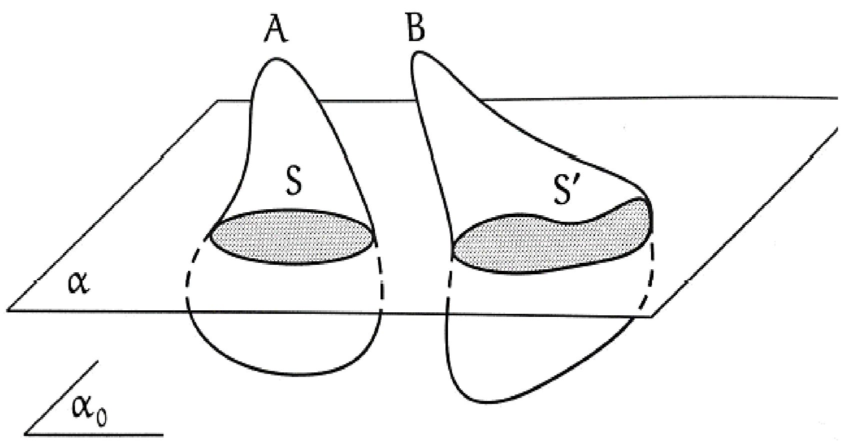
O conceito de proporcionalidade é extremamente importante na Matemática elementar. Em particular na geometria, existem ocasiões em que certos resultados são facilmente verificados quando as medidas são números naturais (ou mesmo racionais), mas o que se torna um problema é estender esses mesmos resultados para números reais. O que resolve essa constrangedora situação é o teorema fundamental da proporcionalidade.

4.8.2 Princípio de Cavalieri

Uma vez estabelecido um método para determinar o volume de um paralelepípedo retângulo pode à primeira vista, dar uma falsa crença que de forma análoga e se utilizando argumentos semelhantes, será possível determinar uma fórmula para os outros sólidos regulares. Entretanto, avançar sem ferramentas adicionais não será possível, logo, tomamos o axioma conhecido como o Princípio de Cavalieri.

Axioma (Princípio de Cavalieri): São dados dois sólidos e um plano (cf. Figura 21). Se todo plano paralelo dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.

Figura 21 - Sólidos seccionados por um único plano, de modo que S = S'



Fonte: Lima, 1998, p. 263.

O volume dos principais sólidos geométricos como prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera são obtidos utilizando-se o princípio de Cavalieri. Embora o princípio de Cavalieri possa ser utilizado para calcular o volume de qualquer sólido existe a dificuldade de se encontrar um sólido mais simples que possa ser usado em comparação com o sólido que desejamos calcular o volume. Para sólidos onde não é factível a aplicação o princípio de Cavalieri existem as ferramentas do cálculo como as integrais simples, duplas e triplas. Para maiores detalhes sobre o princípio de Cavalieri e o cálculo de volumes de sólidos geométricos ver as referências.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo tem como finalidade descrever os elementos metodológicos que conduziram a dissertação em concordância com os objetivos de pesquisa e referenciais teóricos. Para facilitar a leitura e organização dividimos nas seguintes subseções: escolha e caracterização dos sujeitos de pesquisa; fonte de dados; ações da fase exploratória; natureza da pesquisa; Metodologia de Análise.

5.1 Natureza da pesquisa

Esta pesquisa apresenta características que a configuram como uma pesquisa de cunho qualitativo, segundo critérios estabelecidos por Bogdan e Biklen (1991):

> A fonte direta de dados é o ambiente natural onde o fenômeno acontece sendo o investigador, o observador e o principal agente de coleta de dado. A investigação qualitativa procura descrever os fenômenos e os dados coletados sendo que estes são recolhidos em forma de palavras ou imagens e não de números. Os dados podem surgir na forma de transcrições de entrevistas, de notas de campo, de vídeos e outros registos oficiais; os investigadores qualitativos tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando a forma em que estes foram registados ou transcritos; os pesquisadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos (BOGDAN; BIKLEN, 1991, p. 47-48).

Diante dessa perspectiva, a organização, a análise e a interpretação dos dados buscando garantir um olhar que não se limitasse ao estudo das respostas finais dos alunos ou, ainda, a simples verificação se essas respostas estão ou não certas, foram utilizados procedimentos a luz da Análise Interpretativa (SEVERINO, 2007) a qual se configura como uma das modalidades da pesquisa qualitativa. Pois para o autor quando o resultado permeia pelo processo interpretativos o mesmo afirma que:

> Interpretar, em sentido restrito, é tomar uma posição própria a respeito das ideias anunciadas, é superar a estrita mensagem do texto, é ler na entrelinhas, é forçar o autor a um diálogo, é explorar toda a fecundidade das ideias expostas, é cotejá-las com outras, enfim, é dialogar com o autor (SEVERINO, 2007, p. 59).

Segundo Severino (2007) a organização da Análise Interpretativa obedece às seguintes fases: situar o pensamento desenvolvido na unidade na esfera mais ampla do pensamento geral do autor e estabelecer o contexto do objeto de análise, desenvolver uma compreensão interpretativa do pensamento exposto e explicitam-se os pressupostos que o texto implica, estabelecer uma aproximação e uma associação das ideias expostas no texto com outras ideias semelhantes e por fim formular um juízo crítico (SEVERINO, 2007).

A primeira fase consiste em trazer para o universo da análise a base teórica numa perspectiva mais ampla, buscando reduzir a interferência do pesquisador no delineamento do contexto que ocorrerá o contemplamento dos dados, garantindo assim uma aproximação segura e neutra na escolha e uso das unidades e categorias interpretativas.

Quanto a compreensão interpretativa do pensamento exposto e a explicitação dos pressupostos inerentes ao texto, o autor afirma que os pressupostos não precisam estar explícitos no texto, mas estando em consonância com o contexto delineará a categorização dos dados em análise (SEVERINO, 2007).

A próxima etapa permeia uma linha muito tênue com a etapa anterior, uma vez que a aproximação das ideias focais extraídas no texto e sua associação as ideias inerentes ao contexto teórico tecem um ambiente neutro e com real potencial interpretativo.

E por fim, ocorre a formulação de um juízo crítico, que segundo Severino busca determinar de modo lógico o alcance da pesquisa em relação aos seus objetivos norteadores, a partir de critérios inerentes a pesquisa.

Todavia, é de considerar que o processo de análise está imerso num ambiente dotado de flexibilidade e criatividade, características estas próprias das pesquisas de natureza qualitativa, que diferente das pesquisas quantitativas, que são norteadas por procedimentos claros, apesar de toda a organização metodológica, não se pode zerar o risco da imprevisibilidade (GOLDENBERG, 2004, p. 47-58).

5.2 Descrição do local e dos sujeitos da pesquisa

Esta pesquisa visou, a partir de uma intervenção pedagógica composta por 3 blocos de atividades do assunto de Geometria Espacial, identificar as apreensões em geometria dentro do processo resolutivo dos exercícios inseridos no contexto de aprendizagem de estudantes da 3ª série do Ensino Médio da Escola de Educação Básica Manoel Henrique de Assis, município de Penha, Santa Catarina.

A escolha da Escola de Educação Básica Manoel Henrique de Assis para desenvolvimento da pesquisa se deu buscando a simplicidade e logística, uma vez que o pesquisador é professor efetivo dessa unidade escolar podendo assim contribuir com a aprendizagem em Matemática de alunos em seu local de trabalho.

Dialogando com a gestora Marilza Constanci, juntamente com a equipe responsável pela coordenação pedagógica sobre a aplicabilidade da pesquisa na unidade escolar para o ano de

2020, bem como seus objetivos e da importância da análise para o campo da Educação Matemática, consentiram sua aplicabilidade.

Diante do cenário mundial com relação a pandemia do Covid19 levando governos a tomarem medidas de controle, o governo do Estado de Santa Catarina ao estabelecer a suspensão das aulas presenciais em todo o seu território se fez necessário estabelecer novas diretrizes para esta pesquisa no que tange a escolha e método de aplicação.

A Escola de Educação Básica Manoel Henrique de Assis fazendo parte da rede pública estadual de Ensino, logo compartilha também do sistema de ensino online através da Plataforma *Google Suite for Education*. Sendo este um processo de ensino totalmente online faz com que os estudantes participantes da pesquisa precisam ter acesso a internet de forma não limitada, o que conduziu a ação de não mais organizar os pesquisados por turmas, mas sim de ampliar o convite a todos os estudantes das 3ª séries matriculados regularmente nesta escola e que o professor de matemática seja o próprio pesquisador a fim de que exista através da Plataforma *Google Suite for Education* a comunicação direta entre pesquisador e pesquisados.

Os estudantes convidados, foram, portanto, de turnos distintos (matutino e noturno), com grade curricular comum e o convite aconteceu através do ambiente *Google Suite for Education* num espaço denominado por mural. O convite de forma escrita tinha como objetivo detalhar os pontos essenciais da pesquisa e de quanto a participação deles seria importante tanto para fins científicos, quanto para o próprio desenvolvimento no campo da aprendizagem do tema a ser analisado. Como resultado direto desse convite, 11 estudantes, todos do turno matutino se dispuseram a participar da pesquisa, conforme o Quadro 8.

Quadro 8 - Relação dos pesquisados

Número de estudantes	Gênero Masculino	Gênero Feminino	Turma
02	01	01	3ª Série 01
03	00	03	3ª Série 02
04	02	02	3ª Série 05
02	01	01	3ª Série 06

Fonte: produção do autor, 2020.

A escolha específica por estudantes da terceira série do Ensino Médio se deu em decorrência do período escolar, no qual os conceitos de Geometria Espacial são abordados de forma sistemática. Por uma questão ética, preservaremos os seus nomes e, por isso, no lugar dos nomes usaremos os códigos A_i tal que i é um número natural e $1 \leq i \leq 11$. Independentemente do fato de que no grupo dos pesquisados participe pessoas tanto do gênero masculino quanto do feminino, por não fazer parte dos objetivos da pesquisa, a classificação por gênero não será utilizada.

5.3 Fonte de dados

A fonte de dado da pesquisa são as produções dos alunos. De maneira mais específica a resolução de exercícios de caráter descritivo organizados em blocos de atividades. Cada bloco foi composto por 3 (três) exercícios sistematicamente organizados a partir da sequência temática de Geometria Espacial numa ordem gradual e crescente quanto ao custo cognitivo necessário para as suas respectivas resoluções, pois segundo Goldberg (2012), *“é sempre útil começar com perguntas mais fáceis e não ir longe demais no início. O pesquisador precisa respeitar as limitações do pesquisado quanto ao local (...)”* (GOLDBERG, 2012, p. 90).

Os exercícios aplicados tiveram como banco de dados, questões utilizadas nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio e na Olimpíada Internacional de Matemática sem Fronteiras, bem como questões extraídas da coleção: A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, de organização do professor Elon Lages Lima. A fim de que o objetivo desta pesquisa fosse alcançado com maior êxito, todos os exercícios foram de caráter discursivo, portanto se fazendo necessário adaptações para melhor expor as representações desenvolvidas por parte dos alunos, sendo elas discursivas e/ou figurativas e/ou simbólicas numéricas e/ou algébricas.

5.4 As ações da fase exploratória

As ações desenvolvidas foram distribuídas em três Momentos (M1, M2 e M3). Em função da regularidade dos momentos quanto a sua aplicação e público, é desnecessário sua discriminação individual, portanto segue a descrição conjunta das ações exploratórias.

Ao considerar a regularidade do público que participará desses Momentos (M1, M2 e M3) e também toda a metodologia de aplicação ser idêntica, pode-se destacar então que o fator que diferencia M1, M2 e M3 é o dia de aplicação, em que aconteceu em dias consecutivos.

Em consonância com os pesquisados e através da autorização de seus responsáveis o processo de participação dos momentos exploratórios da pesquisa aconteceu através da Plataforma *Google Suite for Education* com o uso do programa *Meets* de forma que a resolução dos exercícios foi não só acompanhada pelo pesquisador mas também foi gravada para futuras análises quanto a percepção dos pesquisados em relação aos exercícios propostos.

O acesso dos estudantes ao programa *Meets* aconteceu via link enviado para o endereço eletrônico – e-mail de cada pesquisado junto também com os horários disponíveis para participação, conforme o Quadro 9.

Quadro 9 - Horários disponíveis para participar da pesquisa

Horários disponíveis
8:00 às 9:00
10:00 às 11:00
13:00 às 14:00
15:00 às 16:00
17:00 às 18:00
19:00 às 20:00
20:30 às 21:30

Fonte: produção do autor, 2020.

Os blocos de atividades foram enviados via e-mail em três momentos distintos uma vez que o processo exploratório é composto por três blocos de atividades realizados como já afirmado em dias não consecutivos reduzindo assim o cansaço em sua execução.

5.5 Metodologia de análise

No Capítulo 3, já discutimos de maneira teórica e geral a teoria cognitiva desenvolvida por Raymond Duval (1995), a TRRS, sendo que aqui trataremos dos aspectos relacionados a resolução de problemas de Geometria Espacial, direcionando a análise sobre como identificar as operações cognitivas sobre as figuras geométricas que através da sua disposição heurística busca estruturar caminho da resolução. O que para a TRRS no tocante a Geometria, tais operações cognitivas são denominadas por apreensões, sendo que as identificar nas resoluções dos estudantes compõe o objetivo central dessa pesquisa.

As apreensões sendo divididas em perceptiva, discursiva, sequencial e operatória são parâmetros que permitem, de acordo com Duval, compreender a aprendizagem em geometria; o que evidencia a importância em aproximar de forma prática e objetiva o contexto necessário para que, ao contemplar as produções dos alunos, seja possível evocar pressupostos que dentro deste cenário de compreensão cognitiva da aprendizagem favoreça não só categorizar, mas criar uma organização de dados que propicie identificar, analisar e propor ações voltadas ao processo de ensino e aprendizagem da geometria espacial.

Antes de estabelecer os pressupostos e categorias de análise que, de acordo Severino (2007, p.60), favorece a coerência analítica dos resultados, se faz necessário fazer alguns apontamentos.

Primeiramente, que a apreensão perceptiva é associada a interpretação da forma da figura em uma situação geométrica, porém ela não aparece de forma explícita na resolução, uma vez que atua coordenando a visualização do objeto geométrico de modo a expor as visíveis e possíveis operações de tratamento que o registro figural aceita. Portanto, sua identificação está vinculada aos tratamentos geométricos adotados pelo estudante no processo de resolução do exercício.

Um outro ponto importante a destacar é a apreensão discursiva, no qual Duval a coloca como sendo uma ação interpretativa centrada nos registros discursivos, sejam eles apresentados no enunciado ou até mesmo impressos em conjunto com o registro figural. Assim como a apreensão perceptiva, ela não se explicita na resolução, uma vez que sua ação visa coordenar as operações sobre as figuras a partir da interpretação discursiva dos elementos figurais.

Centra-se nesses dois parágrafos, de acordo com Duval (2012b), um ponto que deve compor a análise das resoluções que contenham um registro figural em sua , o fato de que *a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente* (DUVAL, 2012b, p. 120).

Em modelos de problemas de geometria espacial do qual exige do estudante uma sequência de ações com enfoque construtivo manipulando ou não materiais de construção geométrica, têm em seu processo de resolução tratamentos geométricos coordenados e subjugados pela ação cognitiva que Duval (2012b) a denomina como apreensão sequencial. E assim como as apreensões perceptiva e discursiva, sua identificação está vinculada aos tratamentos geométricos adotados.

Portanto, se a exposição dessas três apreensões citadas acima é implícita no processo resolutivo, se faz necessário ampliar o olhar do pesquisador para todo o ambiente do exercício, uma vez que a resolução do problema em si caracteriza pela TRRS os tratamentos e conversões de registros semióticos utilizados pelo aluno.

Importante destacar que as apreensões em geometria envolvidas no processo resolutivo dos exercícios elaborados pelos pesquisados participam de um contexto mais amplo dentro da TRRS. Resumidamente temos que a compreensão do objeto matemático está diretamente ligada a capacidade de coordenação de, ao menos, dois registros de representação, e no tocante a geometria a ação cognitiva necessária a sua compreensão precisa simultaneamente interagir entre os registros discursivos e figurais executando assim tratamentos próprios que coordenados pelas apreensões gestálticas (perceptiva, discursiva e sequencial) tem como propósito heurístico estruturar operações sobre a figura a fim de estabelecer uma resolução para o problema geométrico.

Então, se define que as apreensões operatórias, que podem ser mereológica, ótica e posicional são tratamentos geométricos articulados a partir das possibilidades de modificação que toda figura geométrica possui dada a sua natureza de formação. O que levanta o questionamento de como identificar essas apreensões nos registros discursivos produzidos pelos pesquisados.

Almouloud (2013, p. 127) descreve que *essas modificações são realizadas psiquicamente, mentalmente e graficamente,* diferente das apreensões gestálticas que não são explicitas no discurso escrito pelo estudante, as apreensões operatórias podem ser identificadas permeando os tratamentos gráficos próprios das figuras geométricas.

Porém, é necessário correlacionar as modificações nas figuras dentro de um contexto mais amplo de modo a considerar também as outras apreensões, principalmente a apreensão perceptiva, a fim de caracterizar coerência teórica de acordo com a TRRS. Pois, segundo Severino (2007), é preciso situar as ideias participantes do objeto de estudo sempre num contexto científico mais amplo.

A resultante da dinâmica do aporte teórico dessa pesquisa cujo objetivo primário se sustenta em identificar as apreensões em geometria tendo como fonte de dado, resoluções de exercícios da temática de geometria espacial por um grupo de estudantes conduz a importância de se estabelecer categorias de análise a fim de potencializar a cientificidade metodológica de análise dessa pesquisa.

O quadro 10 apresenta as categorias seguidas de uma breve descrição:

Quadro 10 - Categoria de análise

Categorias	Descrição (DUVAL, 1995)	Código
Apreensão Perceptiva	É a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica	AP
Apreensão Discursiva	É a interpretação dos elementos da figura geométrica privilegiando a articulação dos enunciados levando em consideração a rede semântica de propriedade do objeto	AD
Apreensão Sequencial	É solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura	AS
Apreensão Operatória Mereológica	Está centrada nas modificações possíveis de uma figura em relação da parte e do todo, bem como na reorganização perceptiva que essas modificações sugerem	AOM

Apreensão Operatória Ótica	Está centrada nas modificações possíveis de uma figura a partir da sua transformação em outra considerada sua imagem, assim também no impacto que essas reorganizações perceptivas sugerem	AOO
Apreensão Operatória Posicional	Está centrada nas modificações possíveis de uma figura a partir do seu deslocamento em relação a um referencial e nas consequências perceptivas que essas reorganizações sugerem	AOP

Fonte: produção do autor, 2020.

Ao aproximarmos o contexto da TRRS em relação a compreensão e resolução de exercícios que envolvam temáticas de geometria espacial, identificar as apreensões em geometria na produção de dado construída pelos estudantes pesquisados requer de acordo com a metodologia de análise dessa pesquisa estabelecer alguns pressupostos iniciais a fim de garantir o reconhecimento das apreensões implícitas no processo resolutivo.

O Quadro 11 apresenta os pressupostos seguidos de uma breve descrição:

Quadro 11 - Pressupostos de análise

Pressupostos: Modificações figurais	Descrição (DUVAL, 1995)	Código
Reconfiguração Intermediária	Caracteriza pela decomposição de uma figura em diferentes unidades figurais, podendo ser combinadas em outra figura ou em diferentes subfiguras.	RI
Superposição	Caracteriza pela conservação da forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas com variação de tamanho.	SP
Anamorfose	Caracteriza pela variação da forma enquanto estrutura métrica, mas conservando suas propriedades geométricas a partir de seu estatuto.	AF
Rotação	Caracteriza pela conservação do tamanho e forma, mas o objeto gira em torno de um ponto fixo (centro de rotação).	RT
Translação	Caracteriza pela conservação do tamanho e forma, mas o objeto se desloca mantendo a mesma direção.	TL
Pressupostos: Processos Gestálticos	Descrição	Código
Existência de um registro figural no exercício	Presença de um discurso resolutivo mostrando processos coerentes de resolução através de tratamentos geométricos em decorrência da existência do registro figural.	RF
Existência de um registro discursivo no exercício tanto no enunciado quanto na figura	Presença de um discurso resolutivo mostrando processos coerentes de resolução através de tratamentos geométricos em decorrência da existência da interpretação dos elementos da figura articulando com o discurso do enunciado.	RD
Existência de processos construtivos geométricos que dependem de propriedade geométricas e das	Presença de um discurso resolutivo visando reproduzir uma figura geométrica a partir de	PC

restrições técnicas dos instrumentos de construção	processos tanto de construção geométrica quanto de descrição.	

Fonte: produção do autor, 2020.

Enfim, a escolha de tal Metodologia de Análise se aplica em parte pela pesquisa lidar com processos cognitivos não explícitos na produção exploratória, mas também como destaca Severino (2007), de poder superar a estrita mensagem do texto, através da incrível leitura nas entrelinhas, o que possibilita explorar toda a fecundidade das ideias expostas. Oportunizando assim possibilidades de contribuir para a avaliação tanto da aprendizagem dos alunos quanto do potencial de ensino do nosso caderno pedagógico.

Todavia, na iniciativa de otimizar e expandir a compreensão do instrumento de pesquisa uma análise a priori dos blocos de atividades auxiliará na interpretações das soluções dentro do referencial teórico, ou seja, perpassando por eles a dimensão das apreensões em geometria, segundo a TRRS, para cada exercício se estabeleceu a seguinte organização: o problema; os dados iniciais; a proposta do exercício; resolução comentada.

6 ANÁLISE A PRIORI

6. 1 Relação de Euler - do Bloco de Atividade 1

6.1.1 Exercício 1

Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

Dados iniciais:

i. o sólido geométrico representa um poliedro convexo;
ii. possui 6 faces;
iii. possui 8 vértices.

Proposta do exercício:

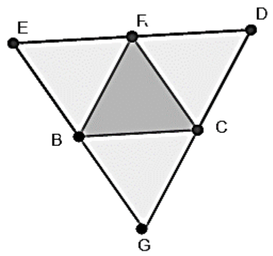
- Determinar o número de aresta do poliedro em questão.

Resolução:

Solução (1): Considerando as informações definidas nos registros discursivos (apreensão discursiva), a construção de um registro semiótico da figura (apreensão perceptiva) com intuito de, pela modificação mereológica (apreensão operatória) obter a solução pedida, exige um padrão de construção (apreensão sequencial) iniciando por polígonos com os menores números de lados. Todavia, a atividade de tratamento em dispor os polígonos no plano, é fundamental uma vez que a planificação de um objeto tridimensional, consiste em dispor todas as figuras planas que formam a superfície do objeto, alocando-as de maneira que represente as dimensões: comprimento, largura e altura. logo, temos:

(a) Poliedro constituído por 4 (quatro) triângulos:

Figura 22 - Representação de um tetraedro ou pirâmide de base triangular

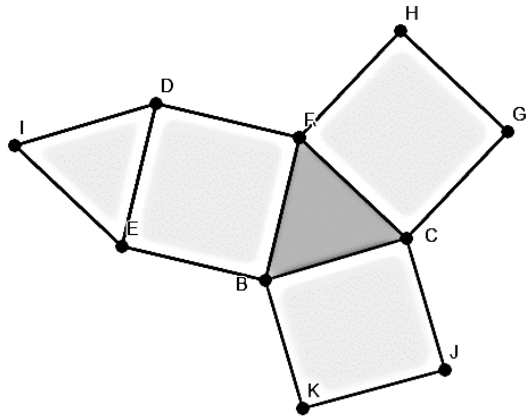


Fonte: Produção do autor, 2020.

<u>Elementos</u>: 6 (seis) vértices, 6 (seis) arestas e 4 (quatro) faces

(b) Poliedro constituído por 2 (dois) triângulos e 3 (três) quadriláteros:

Figura 23 - Representação do pentaedro ou prisma de base triangular

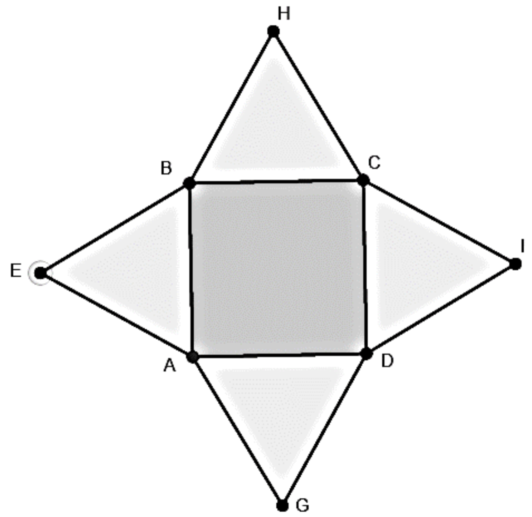


Fonte: Produção do autor, 2020.

Elementos: 6 (seis) vértices, 9 (nove) arestas e 5 (cinco) faces

(c) Poliedro constituído por 1 (um) quadrilátero e 4 (quatro) triângulos:

Figura 24 - Representação do pentaedro ou pirâmide quadrangular

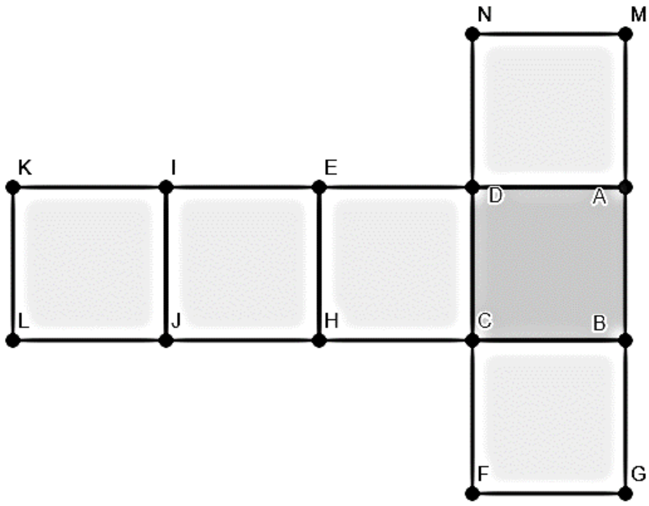


Fonte: Produção do autor, 2020.

Elementos: 8 (oito) vértices, 8 (oito) arestas e 5 (cinco) faces.

(d) Poliedro constituído por 6 (seis) quadriláteros:

Figura 25 - Uma das muitas formas de representação do hexaedro



Fonte: Produção do autor, 2020.

Elementos: 8 (oito) vértices, 12 (doze) arestas e 6 (seis) faces.

Levando em consideração os dados iniciais e a proposta do exercício em determinar o número de arestas de um poliedro convexo de 6 faces e 8 vértices conforme as Figuras 38, 39, 40 e 41 somente a Figura 41 se mostra como uma resolução válida a partir das informações iniciais exposta no registro discursivo.

O processo de registro figural realizado nessa questão com intuito de identificar sua solução, exigiu mais do que a interação entre a apreensão perceptiva (subordinada a apreensão discursiva) e operatória (modificação mereológica), uma organização no processo produtivo se fez necessário caracterizando assim ação da apreensão sequencial. Como consequência, uma vez construída a figura a contagem dos elementos figurais definiu como resposta a expressão: 12 arestas.

Solução 2: Partindo do registro discursivo ao afirmar de que se trata de um poliedro convexo, (apreensão discursiva) segue que do estatuto do objeto matemático o processo de resolução acontece pela aplicação direta da relação de Euler para poliedro convexo, ou seja, existe a congruência operatória entre o discurso e a resolução do problema, logo:

$$F + V - A = 2$$

$$6 + 8 - A = 2$$

$$6 + 8 - 2 = A$$

$$A = 12$$

Conclui então que o número de aresta para o poliedro convexo descrito no enunciado é de número 12. De acordo com o enunciado, um poliedro convexo com 6 faces, 8 vértices e considerando o resultado dado a partir da relação de Euler onde determina um total de 12 arestas, é de se esperar em função da intensa relação da representação usual no ensino, que o aluno venha a pensar em se tratar de um paralelepípedo reto-retângulo restringindo seu campo de percepção. O que reforça a importância, enquanto ambiente escolar, que o professor não se limite somente a casos particulares dentro da geometria, e sim que expanda a representação a partir do estatuto do objeto.

Moretti (2013), expõe que para Duval, não existe uma processo resolutivo ideal tal que possa ter maior relevância quanto ao processo de aprendizagem, a dinâmica consiste em buscar a resolução através do menor custo cognitivo tendo certeza de que entre as apreensões em geometria segundo o autor, a apreensão perceptiva tem sim, um papel pioneiro no encaminhamento heurístico quanto ao processo resolutivo mais eficiente.

6.1.2 Exercício 2

A gravura Melancolia de Albrecht Durer (1514) contém vários objetos e símbolos matemáticos. O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta.

Figura 26 - Gravura Melancolia de Albrecht Durer (1514) adaptada

Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

Identifique e quantifique os elementos (arestas, vértices e faces) do poliedro em questão, sabendo que duas de suas faces são triângulos equiláteros e todas as outras faces são idênticas.

Dados iniciais:

i. O objeto é um poliedro
ii. Uma de suas faces consiste em um losango (quadrilátero com lados congruentes, paralelos e ângulos internos opostos iguais e ângulos internos adjacente suplementares) sem uma ponta, ou seja, um pentágono particular.
iii. Descrição métrica da face pentagonal do poliedro.
iv. A planificação é composta por pentágonos congruentes e dois triângulos equiláteros.

Proposta do exercício:

- Identifique e quantifique os elementos do poliedro (arestas, vértices e faces).

Resolução

Solução (1): A apreensão discursiva indica que temos duas faces iguais a um triangulo equilátero as demais faces são iguais. A apreensão discursiva (faces iguais) e a apreensão perceptiva (visualização do pentágono) indica que as outras faces são faces pentagonais. Portanto o poliedro contém duas faces triangulares e as demais são faces pentagonais. A apreensão perceptiva também indica que o poliedro é convexo. Cada aresta do triângulo será comum a uma aresta de outro polígono. Logo uma aresta do triângulo é comum a outro triângulo ou a um pentágono. No primeiro caso contraria a fórmula de Euler então resta o segundo caso. Portanto temos 3 arestas em comum com pentágonos, como temos 2 triângulos teremos 6 pentágonos, logo o número de faces é 8, 2 triangulares e 6 pentagonais. Daí obtém-se facilmente o total de 18 arestas e 12.

Solução (2): O exercício para sua resolução pode também dispor de um outro processo resolutivo em que se utiliza do estatuto do objeto geométrico. No entanto esse tipo de resolução, não exclui o registro figural, mas através da interação da apreensão perceptiva e discursiva, a figura geométrica passa a compor o processo de solução através da aplicação da relação de Euler para poliedro convexo.

Num primeiro momento a identificação e contagem das faces, no total de 8 (oito), onde 2 (duas) sendo triangulares e 6 (seis) pentagonais estabelece a aplicação da igualdade $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots$e determinando assim o número de aresta, ou seja:

$$2A = 3V_3 + 5V_5$$

$$2A = 3.2 + 5.6$$

$$2A = 6 + 30$$

$$2A = 36$$

$$A = 18$$

Tendo o conhecimento do número de faces e do número de arestas, e se tratando de um poliedro convexo, a relação de Euler para poliedros convexos, é imediata

$$V + F - A = 2$$

$$V + 8 - 18 = 2$$

$$V - 10 = 2$$

$$V = 2 + 10$$

$$V = 12$$

O que leva a concluir que o poliedro convexo exposto na questão possui 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.

Apesar do uso do registro algébrico exigir um custo cognitivo uma vez que o tratamento não é geométrico, mas sim algébrico, a congruência entre o estatuto do objeto e o registro da figura torna para os alunos uma solução mais evidente e com gasto temporal menor.

6.1.3 Exercício 3

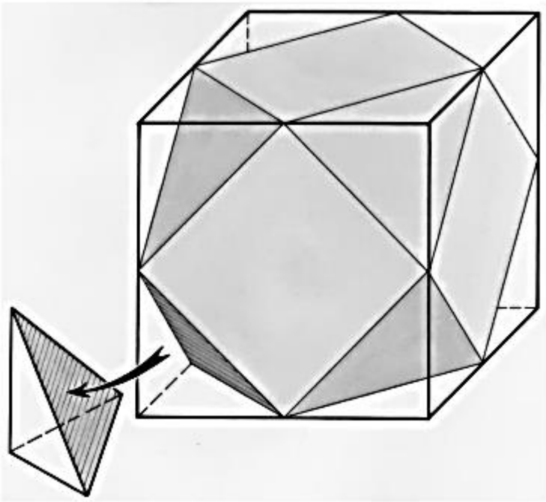
Sobre cada uma das faces de um cubo, desenha-se um quadrado unindo-se os pontos médios das arestas do cubo como mostra a Figura 27. As linhas desenhadas formam oito pirâmides a partir de cada vértice do cubo. Se “recortarmos” as oito pirâmides do cubo, obteremos um poliedro convexo denominado: CUBOCTAEDRO.

Para cada poliedro convexo os matemáticos Euler e Descartes, provaram a seguinte relação:

$$V – A + F = 2$$

Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces. **Mostre que a relação é válida para este cuboctaedro.**

Figura 27 - Cuboctaedro



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html.

Dados iniciais:

i. Poliedros convexos a considerar – cubo, pirâmide de base triangular, cuboctaedro.

Proposta do exercício:

- Confirmar se a relação de Euler é verdadeira para o sólido em questão, ou seja, o cuboctaedro.

Resolução

Esse exercício apesar da interação da apreensão perceptiva sobre a imagem, existe uma predisposição a um processo resolutivo se utilizando de representação discursiva, uma vez que a proposta do exercício é validar ou não a relação de Euler.

Entretanto a boa apresentação do registro figural, favorece a percepção heurística de um processo resolutivo através da apreensão perceptiva (apreensão discursiva subordinada), que pela operação da reconfiguração intermediária desconstruindo dimensionalmente a figura em suas unidades figurais (zonas 2D) denominadas faces do poliedro, é possível assim identificar as 8 (oito) faces triangulares e 6 faces quadradas.

Quanto as arestas, a aplicação direta da relação entre os elementos da figura com base no estatuto dos poliedros, temos que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots + nF_n \text{ com } n \in N \text{ e } n \geq 3\text{, portanto:}$$

$$2A = 3F_3 + 4F_4$$

$$2A = 3.8 + 4.6$$

$$2A = 24 + 24$$

$$2A = 48$$

$$A = 24$$

Quanto aos seus vértices, dada a qualidade do registro figural em expor as unidades elementares que compõe o cuboctaedro é notável que todos os vértices são colocados no meio da aresta do cubo, mentalmente a partir da modificação posicional de rotação se estabelece a relação de que cada aresta do cubo representa um vértice do cuboctaedro, logo, o seu número é igual ao número de arestas do cubo, ou seja, 12.

Por fim, substituindo as grandezas na relação de Euler, segue que:

$$V + F - A = 2$$

$$12 + 14 - 24 = 2$$

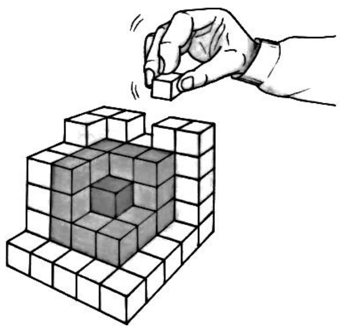
Concluindo então que a relação de Euler para poliedro convexo é válida para o cuboctaedro.

6.2 Prisma e Pirâmide - Bloco de Atividade 2

6.2.1 Exercício 1

Rayane, Bernard e Jeanne brincam com cubos da mesma dimensão. Rayane tem um cubo vermelho de 5 gramas. Bernard circunda o cubo de Rayane com cubos azuis que pesam 8 gramas cada, criando assim um novo cubo. Jeanne coloca cubos verdes, que pesam 12 gramas cada, em torno do cubo de Bernard para formar um novo cubo, totalizando 125 cubos. Calcular a massa total do cubo final?

Figura 28 - Representante figural do cubo em formação



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html.

Dados iniciais:

i. Todas as unidades elementares do cubo possuem a mesma dimensão.
ii. Distinto por cores, ou seja, cubos vermelhos (cinza mais escuro) pesam 5 gramas a unidade, assim como os cubos azuis (cinza mais claro) pesam 8 gramas cada e os cubos verdes (próximos a tonalidade do branco) pesam 12 gramas cada.
iii. A partir de um único cubo vermelho, segue o seu revestimento em seu contorno por cubos da cor azul, obtendo assim o cubo de maior dimensão, e de forma análogo segue revestido o cubo azul com unidades de cubo na cor verde concluindo assim um terceiro cubo utilizando as 125 peças cúbicas nas cores: vermelho, azul e verde.

Proposta do exercício:

- Determinar a massa total do cubo final.

Resolução:

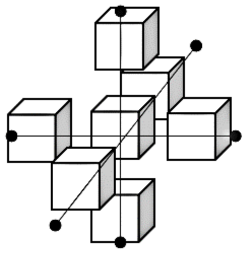
Dada a representação figural desse exercício denotar elementos estruturais de natureza heurística, onde a formação dos cubos maiores acontece a partir do revestimento por uma única camada de elementos cúbicos elementares, oportuniza a apreensão perceptiva se associar a apreensão operatória de tal modo, que o processo de resolução seja pautado simplesmente na manipulação das parte a fim formar o todo.

Moretti e Brandt (2015) chamam atenção para esse fato de que ¨ *a apreensão perceptiva não exige nenhum conhecimento matemático, mas pode comandar a apreensão operatória. As apreensões perceptiva e operatória andam lado a lado e o que resulta da conexão entre elas é o que se chama de visualização*¨. Porém, dada a dinâmica do processo heurístico, a apreensão discursiva é fator decisivo para que a partir das informações dadas, a transformação mereológica possa estabelecer relações válidas com as unidades cúbicas elementares de modo que se desenvolva a correta resolução do problema (MORETTI &BRANDT, 2015, p. 607).

Cubos vermelho, pelo enunciado é utilizado um único cubo, o que leva a soma da massa até o momento ser equivalente à 5 gramas.

Já os cubos azuis ao revestirem o cubo vermelho, em decorrência da compreensão dos elementos geométricos que compõe o registro da imagem o novo cubo deverá dispor de 3 unidades do cubo elementar para compor uma aresta (cf. Figura 29).

Figura 29 - Estrutura dimensional do cubo azul



Fonte: Produção do autor, 2020.

Numa congruência direta com a relação de volume de um cubo qualquer, ou seja, ao associar cada cubo a uma unidade de volume, estabelece a partir do registro matemático a relação: $V = a^3$, sendo Ve a representação respectiva de volume e medida da aresta. Logo:

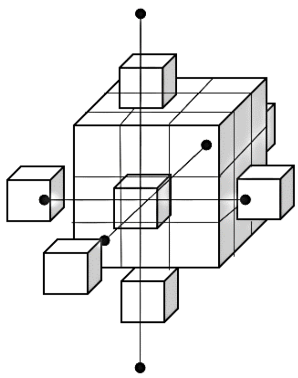
$$V = a^3$$
$$V = 3^3 = 27cubos$$

Ao considerar o total de 27 cubos, se faz necessário desconsiderar a quantidade de cubos vermelhos, restando então 26 cubos a 8 gramas cada, totalizando a massa em:

$$26 \times 8 = 208gramas + 5gramas = 213gramas$$

O uso da relação de volume do cubo por definição representa toda a peça (externo e interno) e que para essa questão específica é necessário identificar somente os cubos que se encontram na parte externa da figura. Da mesma forma, como no cubo formado por cubos elementares de cor azul, (cf. Figura 30), pode-se observar que a próxima figura cúbica possuirá 5 unidades do cubo elementar vermelho por dimensão.

Figura 30 - Estrutura dimensional do cubo vermelho



Fonte: Produção do autor, 2020.

Da relação de volume, temos:

$$V = a^3$$

$$V = 5^3$$

$$V = 125 cubos$$

Por fim, considerando o registro numérico de 125 cubos, o que confirma a informação dada no enunciado, estabelecendo relação abaixo com o intuito de considerar somente a camada externa da figura, temos que:

$$125\ cubos - (26\ cubos\ azuis + 1\ cubo\ vermelho) = 98\ cubos\ verdes$$

Utilizando das informações descritas no enunciado e dos resultados obtido no decorrer do processo de resolução, o Quadro 12 discrimina cor, quantidade e massa dos cubos elementares utilizados.

Quadro 12 - Relação (cor/quantidade/peso) dos cubos

COR	QUANTIDADE	PESO EM GRAMAS POR UNIDADE	PESO TOTAL EM GRAMAS
VERMELHO	**1**	**5**	**5**
AZUL	**26**	**8**	**208**
VERDE	**98**	**12**	**1176**

Fonte: produção do autor, 2020.

Então, o peso total equivale 1389 gramas.

6.2.2 Exercício 2

A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.

Figura 31 - Vista aérea da pirâmide de Quéops

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é?

Dados iniciais:

i. Sólido geométrico – Pirâmide reta de base quadrada.
ii. Medida da aresta da base equivalente a 214 metros.
iii. Face lateral da pirâmide formada por triângulos isósceles de aresta lateral de medida 204 metros.

Proposta do exercício:

- Determinar a altura da pirâmide.

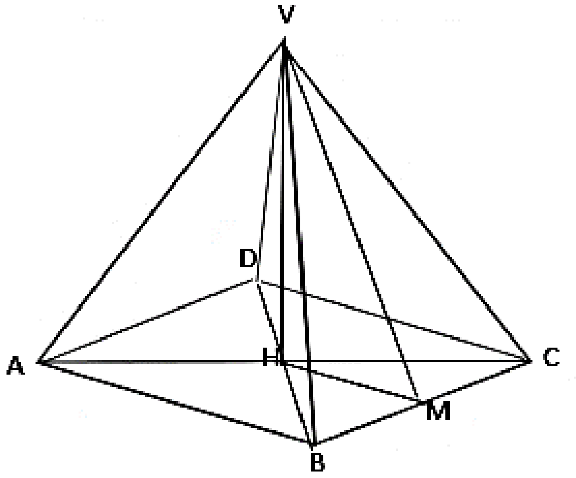
Resolução:

Nessa questão alguns elementos colaboram para que se estabeleça uma proposta heurística para o exercício, a imagem em particular ao trazer como objeto geométrico a famosa pirâmide egípcia de Quéops condiciona a partir da apreensão perceptiva estabelecer alguns registros figurais elementares associados a imagem social do objeto geométrico, como por exemplo sua base quadrada.

Porém dada a vasta variabilidade que uma figura geométrica pode assumir, a apreensão discursiva e a apreensão perceptiva devem levar de forma direta a aplicação do teorema de Pitágoras. Essa passagem para a representação de registros matemáticos, se estrutura a partir da apreensão operatória mereológica, descontruindo dimensionalmente a figura (3D) em figuras (2D), mais especificamente triângulos retângulos, que de acordo com o estatuto da pirâmide regular de base quadrada a intercessão das diagonais (0D) da figura da base coincide com o pé da perpendicular (1D) que passa pelo vértice (0D) da pirâmide.

A existências da congruência operatória entre a figura e o processo resolutivo, estabelece dois processos resolutivos:

Figura 32 - Pirâmide quadrangular regular



Fonte: Produção do autor, 2020.

Solução (1): Considerando que o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado, temos que $\acute{AB} \equiv \acute{AD} = 214m$, logo $\acute{BD}$ é uma das diagonais do quadrado $ABCD$ e, portanto, a partir do teorema de Pitágoras, segue que:

$$\acute{BD} = \sqrt{214^2 + 214^2} = \sqrt{91592}$$

Por outro lado, o triângulo VHB, com ângulo reto em H, possui entre seus lados, o segmento $\acute{BH}$ de medida equivalente a metade da diagonal do quadrado $ABCD$, logo:

$$\acute{BH} = \frac{\acute{BD}}{2} \cong \frac{\sqrt{91592}}{2}m$$

$$\acute{VB} = 204m$$

Novamente pela aplicação do teorema de Pitágoras, se conclui a atividade determinando a altura aproximada da pirâmide, onde $\acute{VH}$ equivale a:

$$\acute{VH} = \sqrt{204^2 - \frac{91592}{4}} \cong \sqrt{18718} \cong 137m$$

Solução (2): Partindo do mesmo princípio, ou seja, identificar um triângulo retângulo de modo que um de seus lados seja o segmento que representa a altura da pirâmide exposta na atividade, considere o triângulo *VHM*, com ângulo reto em *H*.

Importante observar de que o segmento $\acute{HM}$, se utilizando do estatuto do objeto geométrico também pode ser denominado por apótema de um quadrado, onde sua medida é a metade da medida do lado, e se a medida do lado do quadrado é 214 metros, é de fácil entendimento concluir que $\acute{HM}$=107 metros.

Já o segmento $\acute{VM}$ ao representar a altura do triângulo isóscele que compõe as faces laterais da pirâmide, de aplicação imediata do teorema de Pitágoras, temos:

$$\acute{VM} = \sqrt{\acute{VB}^2 - \left(\frac{\acute{BC}}{2}\right)^2} = \sqrt{204^2 - 107^2} = \sqrt{30167} metros$$

E por fim, a medida do segmento $\acute{VH}$ que representa a medida da altura segue também por mais uma aplicação do teorema de Pitágoras, onde:

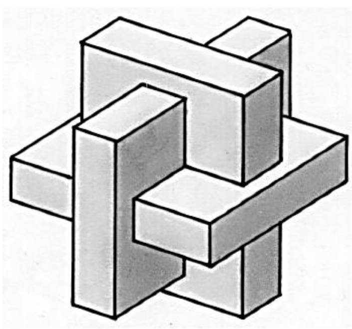
$$\acute{VH} = \sqrt{30167 - 107^2} \cong \sqrt{18718} \cong 137m$$

Vale destacar, que de acordo com o enunciado a proposta do exercício contemplava uma solução aproximada.

6.2.3 Exercício 3

Três paralelepípedos entrelaçados formam um sólido mostrado abaixo. Eles têm a mesma dimensão 2cm x 8cm x 10cm. Calcule o volume do sólido descrevendo sua resposta:

Figura 33 - Três paralelepípedos entrelaçados



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html.

Dados Iniciais

i. O sólido é formado por 3 (três) paralelepípedos com as mesmas dimensões;
ii. A dimensão do paralelepípedo é (2x8x10) cm.

Proposta do exercício

- Calcular o volume do sólido composto pelos três paralelepípedos descrevendo sua resposta.

Resolução

Esse exercício coloca no registro figural um fator que o quantifica numa proporção superior ao registro discursivo dada a natureza heurística desse tipo de problema, ou seja, a manipulação dos três sólidos apresentados no enunciado de modo a formar um único objeto tridimensional favorece o registro da imagem no que tange a busca por uma solução correta do exercício.

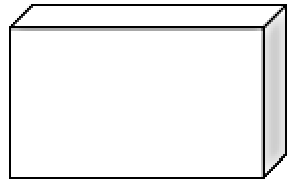
Portanto, a tomada de raciocínio tendo na apreensão perceptiva a identificação imediata da formação do objeto tridimensional a partir dos paralelepípedos descritos no enunciado não desqualifica a importância da apreensão discursiva nesse tipo de exercício, pois uma vez quantificado as modificações que o objeto oportuniza se faz necessário identificar entre elas quais manteriam os dados iniciais e quais teriam um custo cognitivo menor em seu processo resolutivo.

As modificações não são ao acaso, a apreensão operatória mereológica é determinante e a congruência das partes com o paralelepípedo descrito no enunciado favorece várias desconstruções.

Com intuito de favorecer o entendimento, com os paralelepípedos identificados numericamente o processo resolutivo será descrito como:

i. Considerar o paralelepípedo no plano horizontal como sendo o sólido (1);

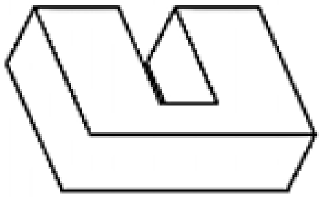
Figura 34 - Sólido (1)



Fonte: Produção do autor, 2020.

ii.Já no plano vertical, tomar o sólido abaixo como o sólido (2);

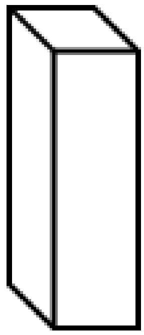
Figura 35 - Sólido (2)



Fonte: Produção do autor, 2020.

iii. E por fim, no plano frontal, o paralelepípedo abaixo como o sólido (3).

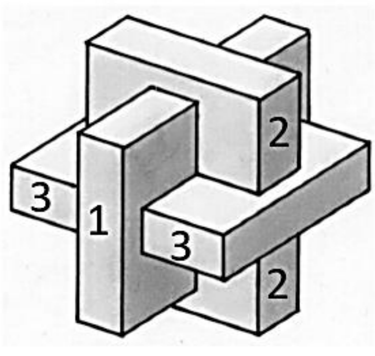
Figura 36 - Sólido (3)



Fonte: Produção do autor, 2020.

Seja a seguinte disposição de partes:

Figura 37 - Composição da figura a partir dos sólidos (1), (2) e (3)



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

Portanto, o olhar sobre a figura tridimensional, pode ser considerada como sendo um sólido composto por 5 (cinco) peças, de modo que:

$$VOLUME_{SÓLIDO} = V_1 + 2V_2 + 2V_3$$

V_1 representa um paralelepípedo com as dimensões (2 × 8 × 10) cm, que pela relação de volume do objeto geométrico é equivalente ao produto das dimensões, ou seja:

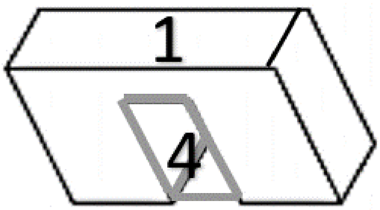
$$V_1 = 2x8x10 = 160cm^3$$

De forma análoga, o sólido (3) apresentando as dimensões (2 x 4 x 8) cm, logo:

$$V_3 = 2x4x8 = 64cm^3$$

O sólido (2) pela desconstrução das partes coordenada pela apreensão perceptiva é intuitivo considerar que seu volume seja a diferença de volume entre dois paralelepípedos, ou seja, $V_1 - V_4$ onde o paralelepípedo (V_4) possui as seguintes dimensões ($2x2x3$)cm,

Figura 38 - Sólido (2) na perspectiva da diferença entre os sólidos (1) e (4)



Fonte: produção do autor, 2020.

Portanto:

$$V_2 = (2x8x10) - (2x2x3) = 64cm^3 - 12cm^3 = 52cm^3$$

Pode-se concluir, que:

$$VOLUME_{SÓLIDO} = V_1 + 2V_2 + 2V_3$$

$$VOLUME_{SÓLIDO} = 160cm^3 + 104cm^3 + 128cm^3$$

$$VOLUME_{SÓLIDO} = 392cm^3$$

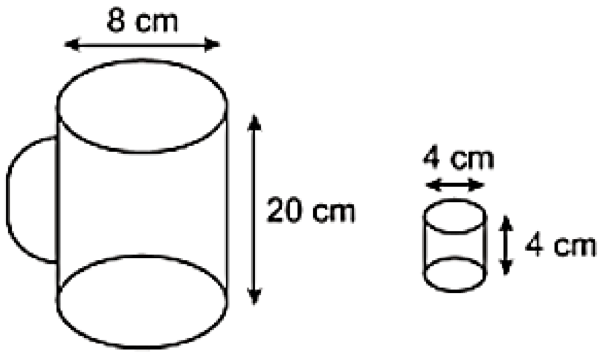
Note que existem outras desconstruções que permitem resolvermos o problema, deixamos a cargo do leitor a exploração de outras desconstruções que levam ao mesmo resultado final

6.3 Cilindro, Cone e Esfera - Bloco de Atividade 3

6.3.1 Exercício 1

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.

Figura 39 - Representação geométrica da leiteira e do copo



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo. Dona Maria está certa nessa decisão? Justifique.

Dados iniciais:

i. Um cilindro (leiteira) com diâmetro medindo 8cm e altura com 20 cm.

ii. Vinte cilindros (copo), onde a unidade apresenta tanto o diâmetro, quanto a altura o equivalente a 4 cm.

Proposta do exercício:

- Verificar se o volume do cilindro (leiteira) considerando as dimensões: diâmetro igual a 8 cm e altura equivalente a 20 cm corresponde ao volume de vinte cilindros (copos) com diâmetro e altura iguais a 4 cm.

Resolução:

Sendo a proposta do exercício de descrever um argumento na forma discursiva sobre uma determinada decisão tomada a partir de objetos geométricos, a visualização inicial permite fortemente equívocos entre considerar as medidas (1D) dispostas na figura e suas respectivas aplicações nos tratamentos matemáticos necessários no decorrer do processo resolutivo.

Portanto, associando a apreensão perceptiva sobre a imagem e sinergicamente regida pela apreensão discursiva temos como resultado imediato sobre o registro figural um aporte teórico, favorecendo assim a apreensão operatória mereológica que em seu processo cognitivo de desconstruir dimensionalmente o cilindro (3D) de imediato expõe o círculo (2D) como uma componente do cilindro em questão, onde a medida do raio (1D) quando vista dentro do estatuto do objeto é capaz de fornecer a propriedade necessário para a resolução desse exercício.

É comum existir confusão envolvendo o cálculo da área de círculo tomando como referência a medida do seu raio, uma vez que seu valor é elevado a uma potência quadrada. Em particular nesse exercício é enganador pensar que o fato de o raio da leiteira ser o dobro em relação ao do copo, na perspectiva da área representa um resultado quatro vezes maior quando comparada com a área do círculo da base do copo.

Contudo para validar ou não a proposta do exercício, o cálculo do volume tanto da leiteira quando do copo se fará necessário, e o volume de um cilindro reto determinado pelo produto entre a área da base pela sua altura, segue que:

i. Área do círculo da base da leiteira representada por A_L;

ii. Área do círculo da base do copo representa por A_C

iii. Altura da leiteira representado por H;

iv. Altura do copo representado por h.

Onde:

$$A_L = 4A_C \text{ e } H = 5h$$

Então:

$$Volume\ da\ leiteira\ (V_L) = A_L.H$$

$$Volume\ da\ leiteira\ (V_L) = 4A_C.5h$$

$$Volume\ da\ leiteira\ (V_L) = 20.A_C.h$$

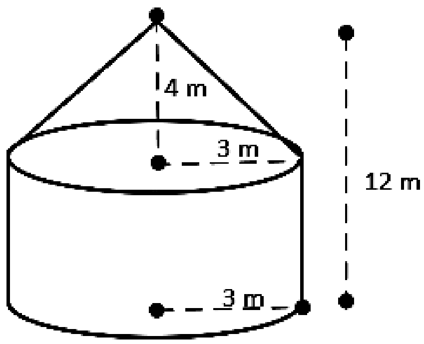
$$Volume\ da\ leiteira\ (V_L) = 20.V_C(Volume\ do\ copo)$$

Porém, o discurso é claro em afirmar que a ação está em abastecer os copos pela metade, e de modo que não exista sobra, logo, a atitude não está correta, uma vez que enchendo a leiteira e cada copo sendo utilizando a metade de sua capacidade será possível servir 40 copos, o dobro que se deseja na atividade.

6.3.2 Exercício 2

Um produtor de soja plantou uma área equivalente a 10 hectares, onde estiva uma produtividade de 55 sacos por hectares (saca de 60 kg). Em sua propriedade existe um silo vertical, conforme a figura abaixo, e seria do seu interesse armazenar toda a sua produção nesse silo. Utilizando os cálculos de volume do cilindro, cone e densidade, será possível armazenar a produção dentro desse silo? Justifique. (Considere a densidade da soja sendo $800 kg/m^3$.)

Figura 40 - Ilustração geométrica do silo de estocagem



Fonte: Produção do autor, 2020.

Dados iniciais:

i. Área plantada corresponde a 10 hectares;
ii. Produção estimada por hectares é de 50 sacas de 60 quilos cada;
iii. Armazenamento num silo, geometricamente composto por um cilindro e um cone, ambos retos;
iv. Dimensão do raio tanto do cilindro quanto do cone é igual a 3 metros;
v. Altura do cone reto equivale a 4 metros;
vi. Altura total do silo é igual a 10 metros;
vii. Densidade da soja é de $800 kg/m^3$.

Proposta do exercício:

- Justificar se é possível armazenar toda a produção nesse silo.

Resolução:

É notório uma rica quantidade de informações tanto na forma de registros semióticos discursivos, quanto no registro figural. A composição do objeto 3D traz em seu contexto dois sólidos geométricos de rotação, é de fácil entendimento que a resolução da atividade não está associada a nenhuma congruência resolutiva, ou seja, não existe uma passagem direta da apreensão operatória para a solução da questão.

A entrada correta no processo resolutivo está associada a interação entre as apreensões perceptiva e discursiva em estabelecer a tomada de operações geométricas de menor custo cognitivo possível dentro da realidade do exercício. Quanto a apreensão operatória deve-se ter clareza que mesmo se tratando de objetos geométricos denominados sólidos de rotação, a exposição dos elementos geométricos no registro figural direciona para a modificação mereológica como sendo a norteadora dos tratamentos geométricos necessários para o processo resolutivo.

Nesse caso, a partir da reconfiguração intermediária ao desconstruir dimensionalmente a ilustração do silo (3D) em um cilindro reto (3D) e um cone reto (3D) se estrutura a partir dos estatutos dos objetos geométricos para contínuas desconstruções em busca de unidades geométricas elementares (2D, 1D e 0D) de modo a ser possível aplicar as relações de volume com o objetivo de estabelecer a máxima estocagem que o silo de estocagem nesse exercício é capaz de armazenar.

Por outro lado, se faz necessário o entendimento que o plantio acontecerá numa extensão plana, que a produção armazenada será quantificada em quilogramas e, portanto, a necessidade de utilizar a grandeza densidade coloca em evidência a falta de congruência em muitas tomadas de ações quanto ao processo resolutivo do exercício.

Essa atividade mantém a apreensão discursiva ativa em todo seu processo heurístico coordenado pela apreensão perceptiva, uma vez que a proposta do exercícios exige o uso de recursos lógicos bem específicos, como por exemplo o raciocínio acumulativo, fundamental em questões se utiliza de transformações entre grandezas, bem como sua análise dentro de um contexto pré-determinado.

A fim de estabelecer o volume de produção, deve se levar em consideração que:

i. a plantação em 10 hectares;
ii. com uma estimativa de 50 sacas por hectares;
iii. cada saca pesando 60 quilos.

Logo:

$$Produção(P) = 10(ha).50\left(\frac{saca}{ha}\right).60\left(\frac{kg}{saca}\right) = 30000kg$$

Portanto, se a densidade representa:

$$Densidade = \frac{800kg}{1m^3}$$

Proporcionalmente, segue que:

$$\frac{800kg}{1m^3} = \frac{30000kg}{x}$$

$$x = \frac{30000}{800} = 37{,}5m^3$$

Uma vez estabelecido o volume da produção a ser armazenada, se utilização dos estatutos das figuras, tanto do cilindro, quanto do cone a fim de determinar seus respectivos volumes, podendo assim afirmar ou não a possibilidade de armazenamento da produção no silo.

Das propriedades do cilindro reto, temos que a relação do seu volume quanto a medida do raio da base e sua altura é:

$$Volume\ Cilindro = V_{CI} = r^2.\pi.h$$

Considerando o valor aproximado para PI (π)≅ 3,14 o volume de armazenamento do cilindro é:

$$Volume\ do\ cilindro = r^2.\pi.h$$

$$V_{CI} = 3^2.3{,}14.6$$

$$V_{CI} = 9.3{,}14.6 = 169{,}56m^3$$

Já o volume do cone reto é expresso como sendo:

$$Volume\ do\ cone = V_{CO} = \frac{r^2.\pi.h}{3}$$

$$V_{CO} = \frac{3^2.3{,}14.4}{3}$$

$$V_{CO} = \frac{9.3{,}14.4}{3} = 37{,}68m^3$$

Por fim, ao acumular o volume do cilindro com o volume do cone, temos:

$$V_{CI} + V_{CO} = 169{,}56m^3 + 37{,}68m^3 = 207{,}24m^3$$

Como a produção esperada é na ordem de 37,5m^3 e a capacidade de armazenamento é de 207 24 m^3, existe um excedente de espaço de 169,74 m^3, logo é afirmativo que a colheita possa ser armazenada no silo descrito no enunciado.

6.3.3 Exercício 3

Assoprando suavemente em uma superfície horizontal com água e sabão, Estela faz uma bolha de sabão de forma semiesférica com um diâmetro de 12 cm. Em seguida, ela assopra uma segunda bolha dentro da primeira. A primeira bolha então fica maior. O volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra. Qual será o diâmetro da bolha interna, quando o diâmetro da bolha maior for de 14cm. Justifique

Figura 41 - Ilustração das semiesferas

Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html.

Dados iniciais:

i. A figura geométrica são semiesferas;

ii. O diâmetro da primeira semiesfera (externa) é igual a 12 cm;

iii. O volume é acumulativo, ou seja, o volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha (semiesfera) que está dentro da outra

iv. Ao assoprar um dentro da primeira semiesfera(externa) é criada um outra de modo que o diâmetro externo passa a ser de 14 cm.

Proposta do exercício:

- Determinar o diâmetro da bolha interna, quando o diâmetro da bolha maior for de 14cm.

Resolução:

Esse exercício ao trazer um registro figural ausente de informações métricas e que evidencia um cenário com elementos geométricos muito intuitivos denota uma atenção para o papel da apreensão discursiva subordinar a apreensão perceptiva.

A visualização do objeto geométrico é determinante para que a entrada na resolução do problema considere que o volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra.

A apreensão operatória mereológica ao descontruir o objeto geométrico (3D) proposto pelo exercício tanto dimensionalmente ao estabelecer o centro dos objetos (0D) e o segmento do diâmetro (1D) quanto a desconstrução por partes, ou seja, a transformação de uma semiosfera cujo diâmetro é igual a 14 cm a partir da acumulação dos volumes da semiosfera anterior que segundo o enunciado tem como diâmetro a medida de 12 cm e outra, interna a essa, cujo diâmetro é o foco da resolução heurística.

Portanto:

$$Volume_{Esfera\,Final} = Volume_{EsferaI\,nicial} + Volume_{Esfera\,interna}$$

Partindo de que o volume da esfera é dado pela expressão:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3.$$

Logo:

$$Volume_{Esfera\,Final} = Volume_{Esfera\,Inicial} + Volume_{Esfera\,interna}$$

$$\frac{4}{3}.\pi.r_F^3 = \frac{4}{3}.\pi.{r_0}^3 + \frac{4}{3}.\pi.{r_I}^3$$

$$r_F^3 = {r_0}^3 + r_I^3$$

$$7^3 = 6^3 + r^3$$

$$r = \sqrt[3]{343 - 216}$$

$$r \cong 5cm$$

Concluindo assim que o diâmetro da semiesfera interna é igual a 10 cm.

O Quadro 13 sintetiza as apreensões em geometria exigidas em destaque nos processos resolutivos dos 9 exercícios apresentado de modo que a solução atendesse a proposta do exercício em questão.

Quadro 13 - Resumo a partir das análises à priori das apreensões em geometria exigidas nos procedimentos utilizados nas resoluções dos 9 exercícios apresentados

ATIVIDADE	APREENSÕES
Atividade 1: exercício1	Solução 1: Perceptiva, discursiva, sequencial e operatória (mereológica) Solução 2: Discursiva
Atividade 1: exercício 2	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica e posicional) Solução 2: Perceptiva e discursiva
Atividade 1: exercício 3	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica e posicional)
Atividade 2: exercício 1	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica)
Atividade 2: exercício 2	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica)
Atividade 2: exercício 3	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica)
Atividade 3: exercício 1	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica)
Atividade 3: exercício 2	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica)
Atividade 3: exercício 3	Solução 1: Perceptiva, discursiva e operatória (mereológica)

Fonte: produção do autor, 2020.

O Quadro 14 estabelece a fonte utilizada para obter os exercícios aplicados na pesquisa através das listas de atividades, como critério de escolha com exceção do exercício de número 1 cuja autoria é do pesquisador, todas os demais problemas são aplicações já ocorrentes dentro do contexto do ensino matemático.

Quadro 14 - Relação dos exercícios com suas respectivas fontes

EXERCÍCIOS	FONTE
Exercício 1 – Atividade 1	Do autor
Exercício 2 – Atividade 1	Questão adaptada da Olimpíada Internacional de Matemática sem Fronteira, 2011
Exercício 3 – Atividade 1	Questão adaptada da Olimpíadas Internacionais de Matemática sem Fronteiras, 2017)

Exercício 1 – Atividade 2	Olimpíada Internacional de Matemática sem Fronteira, 2018
Exercício 2 – Atividade 2	Questão adaptada do Enem, 2016
Exercício 3 – Atividade 2	Questão adaptada do Enem, 2010
Exercício 1 – Atividade 3	Questão adaptada da Olimpíada Internacional de Matemática sem Fronteira, 2011
Exercício 2 – Atividade 3	Questão adaptada do Enem,2016
Exercício 3 – Atividade 3	Questão adaptada da Olimpíada Internacional de Matemática sem Fronteira, 2015

Fonte: produção do autor, 2020.

Ainda discorrendo sobre a escolha das questões que iriam compor os blocos de atividades, se buscou trazer exercícios considerados tradicionais dentro do ensino da temática de Geometria Espacial no Ensino Médio, em que alguns possuíam um registro figural com ampla capacidade heurística, outros nem tanto e também foi escolhido um exercício no qual não existia um registro figural. Essa dinâmica quanto a escolha da variação dos exercícios quanto aos tratamento figurais que as imagens oportunizavam em seu contexto, para essa pesquisa visa expor a importância de não só apresentar uma figura num exercícios, mas sim garantir que o registro figural seja apto para os tratamentos geométricos necessários para o processo de resolução da questão.

7 ANÁLISE A POSTERIORI DAS ATIVIDADES

Neste capítulo iremos analisar os resultados obtidos nas atividades que foram aplicadas, traçando um paralelo entre a análise a priori dos exercícios com o conjunto de registros apresentados pelos estudantes de modo a articular os dados coletados com o referencial teórico apresentado no capítulo 3.

7.1 Descrição da aplicação da pesquisa

Na fase da experimentação, o grupo de pesquisados compostos por alunos da 3ª série do Ensino Médio, em virtude da suspensão das aulas presenciais por decorrência do estado de pandemia gerado pelo COVID19, todos os 11 estudantes que aceitaram participar da pesquisa responderam os três blocos de atividades em suas residências sendo gravado através da ferramenta *Meets* que compõe a Plataforma *Google Suite for Education* nos dias e horários de acordo com o quadro 15 abaixo:

Quadro 15 - Cronograma de aplicação da atividade exploratória

Dias	**Horários disponíveis**							**Tempo do encontro**	**Atividade realizada**
08/06/2020	8:00	10:00	13:00	15:00	17:00	19:00	20:30	1 hora	Bloco de atividade 1
09/06/2020	8:00	10:00	13:00	15:00	17:00	19:00	20:30	1 hora	Bloco de atividade 2
10/06/2020	8:00	10:00	13:00	15:00	17:00	19:00	20:30	1 hora	Bloco de atividade 3

Fonte: produção do autor, 2020.

O estudante, ao acessar o link disponibilizado pelo pesquisador via Plataforma *Google Suite for Education* do programa *Meets*, dentro dos horários programados, era inicialmente instruído sobre o processo de realização da pesquisa e, que ao final da resolução do bloco de atividade faria um breve relato sobre o papel que cada registro figural desencadeou em seu processo resolutivo.

Os blocos de atividades foram enviados por e-mail e via anexo pela Plataforma *Google Suite for Education* no início de cada dia em que aconteceria o encontro, a fim de que houvesse tempo hábil para a sua impressão. O uso de material escrito na fase exploratória visava uma aproximação maior com a realidade usual em que eles estavam acostumados e todos os pesquisados se dispuseram a fazer a impressão bem como de levar o material até a unidade escolar para então o pesquisador pudesse recolher para análise.

7.1 Bloco de Atividade 1 – Momento 1

7.1.1 Exercício 1

Esse exercício tinha como objetivo obter o número de arestas de um poliedro convexo a partir do conhecimento do seu número de faces e vértices. A ausência de um registro figural poderia ser um fator negativo quanto a sua resolução, mas considerando o registro discursivo em expor os valores numéricos relacionados ao número de faces e vértices do objeto geométrico em questão, mesmo que do ponto de vista cognitivo sua representação seja parcial, de acordo com Moretti e Arruda (2002). Sendo didaticamente oportuno que os alunos utilizem da apreensão discursiva (AD) para resolver pela aplicação direta da relação de Euler.

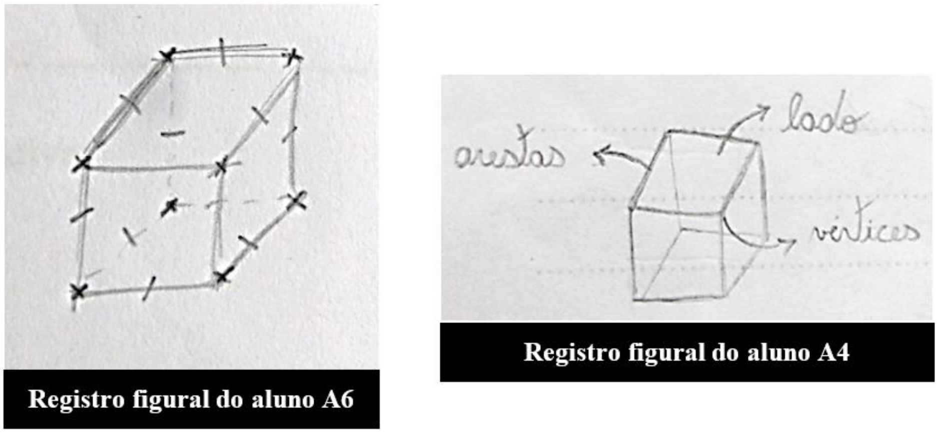
Na análise do exercício 1 constatou-se que todos os 11 participante reconheceram as informações contidas no enunciado bem como o que precisavam determinar, para essa última afirmação com exceção do aluno A1 que não respondeu o item (b) deste exercício que visava identificar o reconhecimento por parte dos alunos da proposta da questão.

Pela análise a priori, era esperado que os estudantes a partir da leitura do enunciado buscassem uma resolução pautada na experimentação dos elementos geométricos envolvidos (poliedro convexo, 6 faces e 8 vértices) buscando formar um registro figural válido. Porém, tomando o fato de que um desenho abordando as três dimensões é um fator de dificuldade para muitos alunos, partimos da suposição que o registro figural construído atenderia a definição de planificação do poliedro e portanto, implicaria na interação das apreensões discursiva (AD), perceptiva (AP), operatória mereológica (AOM) e sequencial (AS).

Por outro lado, consideramos também a resolução através da utilização do tratamento matemático intitulado por Relação de Euler uma vez que a ação da apreensão discursiva (AP) ao estabelecer a compreensão sobre o uso deste tratamento matemático estabelece a passagem segura e direta para a solução do problema.

Quanto ao processo resolutivo, 9 estudantes utilizaram a relação de Euler para determinar o número de arestas, do qual o estudante A11 relacionou corretamente o problema com a aplicação da relação acima descrita, porém cometeu equívocos operacionais que desencadearam numa solução não válida para o exercício. Temos ainda os alunos A4 e A6 que reconheceram o objeto geométrico a partir do registro discursivo, mas construíram um registro figural de um hexaedro conforme a Figura 42 para que através da desconstrução dimensional quantificar os elementos 1D denominados por arestas. Tal processo evidencia as apreensões discursiva (AD), operatória mereológica (AOM) e ótica (AOO) através da reconfiguração intermediária (RI) e da superposição (SP). Resolução esta apresentada pelos estudantes A4 e A6 não prevista na pré-análise, mas que se mostrou eficiente para esse exercício.

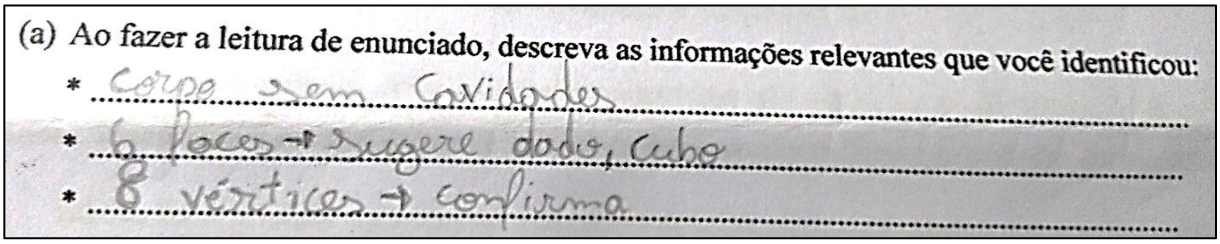
Figura 42 - Registro figural dos Estudantes A6 e A4 relacionados ao Exercício 1 - M1



Fonte: Folha de Registro dos Estudantes A4 e A6, Mom. 1, Exerc. 1, 2020.

As características usuais aplicadas neste exercício de modo a formalizar um hexaedro regular colaborou significativamente para que os alunos A4 e A6 o identificasse e assim pudessem realizar um desenho do objeto, como sugere por exemplo, a resposta do aluno A6 quando lhe é perguntado sobre as informações relevantes identificadas no enunciado da questão:

Figura 43 - Resposta do Estudante A6 relacionado ao item (a) do Exercício 1 – M1



(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações relevantes que você identificou:

* Corpo sem Cavidades
* 6 faces → sugere dado, cubo
* 8 vértices → confirma

Fonte: Folha de Registro do Estudante A6, Mom. 1, Exerc. 1, 2020.

Sugerindo assim a existência de uma congruência semântica entre o enunciado e o registro mental do objeto para os alunos A4 e A6, que a partir da interação das apreensões discursiva e operatória, a ação heurística da figura construída favoreceu não só o reconhecimento das unidades figurais denominadas arestas, mas também possibilitou sua contagem.

De acordo com o estatuto do objeto em questão segue o quadro discriminando quais soluções contemplaram corretamente o objetivo do problema proposto.

Quadro 16 - Parecer das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correto
A2	Correto
A3	Correto
A4	Correto
A5	Correto
A6	Correto
A7	Correto
A8	Correto
A9	Correto
A10	Correto
A11	Incorreto

Fonte: Produção do autor, 2020.

Para termos uma visão mais ampla da produção dos estudantes no exercício 1, elaboramos o Quadro 17 que traz uma síntese das apreensões em geometria identificadas no processo resolutivo a partir da análise posteriori.

Quadro 17 - Análise do Exercício 1 – M1

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1		X				
A2		X				
A3		X				
A4	X	X		X	X	
A5		X				
A6	X	X		X	X	
A7		X				
A8		X				
A9		X				
A10		X				
A11		X				
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional.						

Fonte: Produção do autor, 2020.

Portanto dos 11 pesquisados, 9 desenvolveram a resolução dentro da perspectiva da pré-análise do exercício, enquanto dois alunos contando com a simplicidade do poliedro convexo que norteava essa questão e a intensa participação dessa forma geométrica na escola e no meio social, eles desenvolveram um processo resolutivo não previsto.

7.1.2 Exercício 2

Nesse exercício a presença de um registro figural do qual a representação do objeto matemático ganha destaque na imagem, aflora o objetivo de identificar o papel que essa representação teve no processo resolutivo dos pesquisados. A análise a priori estabelecia duas propostas de resolução para essa questão. A primeira fazendo o uso restrito da imagem com seus elementos figurais, que a interação das apreensões discursiva (AD), perceptiva (AP) e operatória mereológica (AOM) a partir do tratamento da reconfiguração intermediária (RI) e da operatória posicional (AOP) com o tratamento da superposição (SP), favoreceria a identificação e exploração dos elementos da imagem, seja mentalmente ou esboçando uma planificação da objeto matemático.

Por outro lado, a apreensão perceptiva (AP) subordinada a apreensão discursiva (AD) ao otimizar a caracterização das faces do sólido em questão, coordenaria a ação da apreensão operatória mereológica (AOM) através do tratamento da reconfiguração intermediária (RI) de modo a identificar os elementos necessários para a utilização do tratamento matemático (relação de Euler) a fim de concluir o processo resolutivo.

Em particular as primeiras informações que descrevia o objeto geométrico nesse exercício associavam uma caracterização que seria representada também em seu registro figural, sua percepção seria importante na identificação dos elementos da figura no plano não visível. Na frase "*O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta"*, frase esta que compõe o primeiro parágrafo da questão se contextualizaria com a sequência do registro discursivo ao afirmar que esse poliedro possuía duas faces formadas por triângulos equiláteros e as demais por polígonos idênticos.

A importância dessa observação não está somente na percepção da figura, a intepretação dela através da apreensão discursiva (AD) expõe de forma clara como e quantos polígonos fariam a composição do poliedro em questão. Para esse detalhe somente os alunos A5, A8, A9 e A11 destacaram terem observado de modo a compor o conjunto de informações que teriam para resolver o exercício, os demais assim como esses 4 alunos identificaram as outras informações contidas no enunciado.

O item (c) desse exercício perguntava para os alunos sobre o que a figura mais evidenciou ao contemplá-la no primeiro instante. Temos então, que para os alunos A5, A8, A9, A11 afirmaram que a figura triangular tracejada foi destaque em sua primeira percepção visual da imagem, já para os alunos A3, A7, A10, A2, A1, A6, A4 descreveram que a forma clara da apresentação das faces do poliedro se mostrou relevante na figura.

Ao final do processo exploratório durante a descrição por parte dos pesquisados sobre sua experiencia com o bloco de atividade, fez chamar a atenção para a observação de que o tamanho da imagem, bem como sua impressão em tons de cinza foram pontos de sugestão para que se a imagem fosse maior haveria uma maior clareza dos elementos geométricos, uma vez que pelo tamanho esses elementos ficavam muito próximos um do outro e de certa forma não contribuía para a sua resolução, assim como a figura toda em tons de cinza, o uso de cores poderia ser um fator positivo, com exceção dos alunos A1, A3, A10 que afirmaram que o tamanho e sua composição de cor estavam coerente com a proposta.

Assim como no exercício 1 todos com exceção do aluno A1 que não respondeu, identificaram a proposta da questão e de forma unânime destacam que o registro figural foi determinante quanto a compreensão do poliedro afirmado no enunciado, como expressa o aluno A10 em seu comentário ao final da fase exploratória do primeiro dia quando o pesquisador pede para que descreva o papel da figura no exercício:

Quadro 18 - Comentário do Estudante A10 a respeito da figura no Exercício 2 – M1

A10: *"A figura me deu um lado e com todas as informações desse lado, ela me deu as arestas, os vértices e as faces todas desse lado, e foi importante para a resolução."*

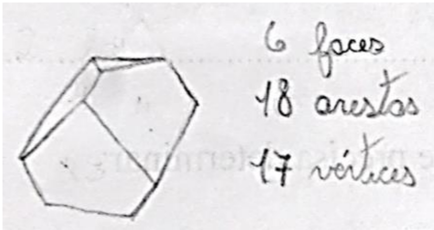
Fonte: Transcrição da gravação de áudio do estudante A10, Mom. 1, Exerc. 2, 2020.

Todas as resoluções seguiram as propostas apresentadas na análise a priori. O estudantes A1, A4, A6, A7 e A9 desenvolveram de um modo geral a solução 1, que consistia em manipular o registro figural sem o uso do tratamento matemático da relação de Euler, enquanto os sujeitos A2, A3, A5, A8, A10 e A11 buscaram operacionalizar a figura a fim de utilizar o recurso da relação de Euler para determinar o elemento da figura de maior dificuldade.

O número significativos dos pesquisados terem buscado manipular a figura através das apreensões perceptiva (AP), operatória mereológica (AOM) e operatória posicional (AOP) evidenciou o papel do registro figural num problema geométrico, como destaca Duval (2012b) sobre a ação imediata e automática da apreensão perceptiva destacando elementos da figura que não necessariamente são os mesmos elementos descritos no enunciado (DUVAL, 2012b, p. 120).

O processo resolutivo quando desvinculado da supervisão da apreensão discursiva (AD) pode conduzir a tomadas de raciocínio equivocadas, o que poderia justificar as conclusões falsas quanto aos elementos do poliedro apresentados pelos alunos A9, A4 e A6. Em destaque a conclusão do aluno A4 que preconiza um esforço em olhar iconicamente para o registro figural limitando assim a desconstrução da figura e por consequência as unidades figurais identificadas podem não contemplar as informações dadas no enunciado. Em particular se o processo resolutivo fosse norteado pela apreensão discursiva (AD), a partir da informação dada no enunciado de que existem duas faces triangulares e considerando que pela percepção visual essas faces não são adjacentes, logo seriam necessárias outras seis faces pentagonais para concluir a face externa do poliedro informado.

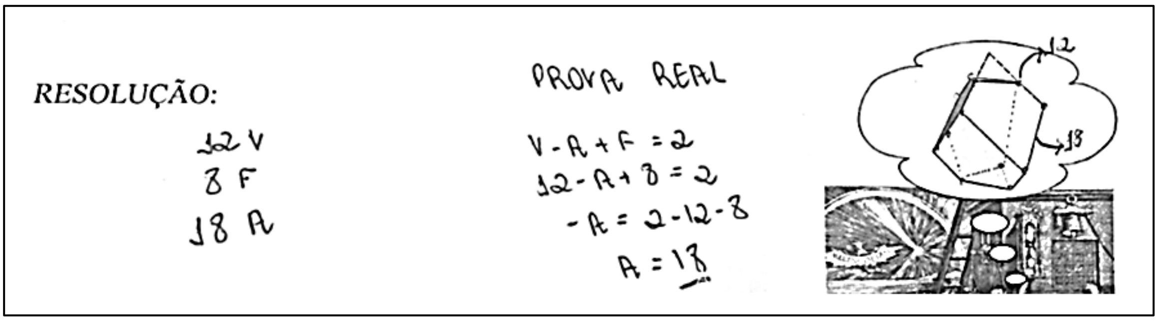
Figura 44 - Resolução do Estudante A4 relacionado ao Exercício 2 – M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A4, Mom. 1, Exerc. 1, 2020.

O estudante A1 ao fazer uso do registro figural do problema utilizando a percepção tridimensional do poliedro e considerando a limitação do plano físico em representar todos os elementos pedidos, se propôs ainda em fazer uso do tratamento matemático a fim de validar seu raciocínio caracterizando assim uma interpretação discursiva dos elementos figurais.

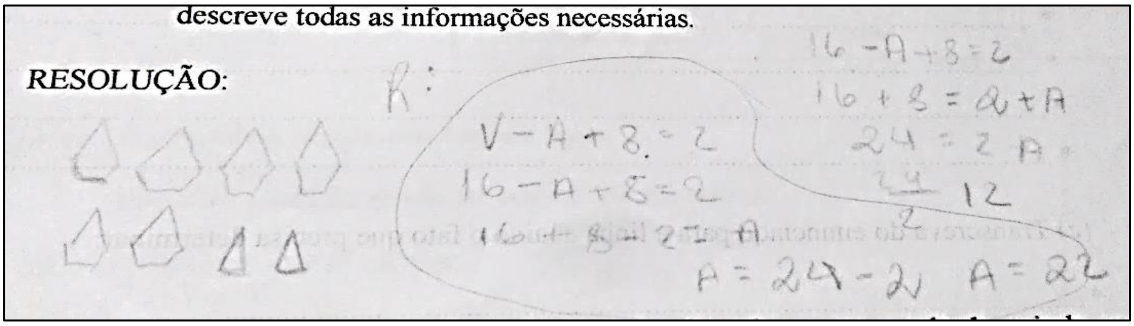
Figura 45 - Resolução do Estudante A1 relacionado ao Exercício 2 – M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A1, Mom. 1, Exerc. 1, 2020.

Quanto ao grupo de alunos que desenvolveram o processo resolutivo buscando o tratamento matemático, A3 e A11 evidenciaram falhas na obtenção dos dados a serem aplicados na relação de Euler, o que caracteriza também a limitação do "olhar" para o registro figural dissociando-o do seu estatuto e portanto suas descobertas podem se mostrar de forma parcial, podendo assim serem insuficientes para concluir corretamente a resolução.

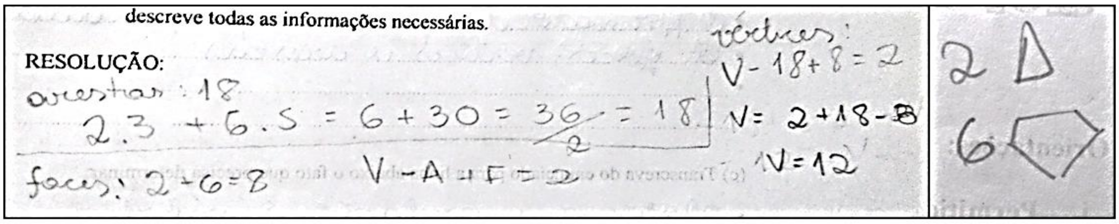
Figura 46 - Resolução do Estudante A11 relacionado ao Exercício 2 – M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A11, Mom. 1, Exerc. 1, 2020.

Por outro lado, a resolução do estudante A8 expos clareza nas relações que envolviam o objeto geométrico e suas representações elementares, confirmando assim a regulamentação dos tratamentos geométricos pela apreensão discursiva (AP), sejam esses tratamentos gráficos ou mentais.

Figura 47 - Resolução do Estudante A8 relacionado ao Exercício 2 - M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A8, Mom. 1, Exerc. 2, 2020.

Quadro 19 - Resultado das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correta
A2	Correta
A3	Incorreta
A4	Incorreta
A5	Correta
A6	Incorreta
A7	Correta
A8	Correta
A9	Incorreta
A10	Correta
A11	Incorreta

Fonte: Produção do autor

Logo, com a interação dos registros com as categorias de análise pré-definidas compõe como resultado o seguinte quadro abaixo:

Quadro 20 - Análise do Exercício 2 – M1

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X	X		X		X
A2	X	X		X		
A3	X			X		
A4	X			X		X
A5	X	X		X		
A6	X			X		X
A7	X	X		X		X
A8	X	X		X		
A9	X	X		X		X
A10	X			X		
A11	X			X		
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional.						

Fonte: Produção do autor, 2020.

A resolução correta desse exercício considerou a interação de várias atitudes cognitivas, e que ambas as soluções apresentadas pelos alunos permearam a interpretação da forma da figura, caracterizando assim a existência de processos gestálticos (RF) pertinente a esse problema. Entretanto, a limitação visual que a exposição plana impõe a um registro tridimensional evidenciou a necessidade de identificar elementos geométricos fora do campo visual, e, portanto, novas percepções precisaram surgir através das apreensões operatórias específicas para cada proposta de solução.

Como já mencionado, esses tratamentos geométricos não precisam se estabelecer na dimensão concreta, podem ser de natureza psíquica e mental, sendo assim pode conduzir a interpretações incompletas quanto ao processo cognitivo realizado pelo aluno em sua tentativa de resolver o problema.

Portanto, numa percepção geral de todos os registros realizados pelos pesquisados, é identificável que permearam pela iconicidade da figura, de modo que todos se utilizaram da apreensão perceptiva em suas tomadas de atitudes, como essa apreensão pode articular as operações geométricas e considerando que todos os alunos se dedicaram a apresentar alguma forma de raciocínio, as resoluções incorretas foram consequências da falta da relação com apreensão discursiva. Duval (2012b) chama atenção para esse fato quando faz a seguinte afirmação: "*eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura* *sem retornar ao enunciado. Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura"* (DUVAL, 2012b, p. 124).

Por fim, o número significativo de resoluções incorretas estão vinculadas sistematicamente a superficialidade com que a apreensão perceptiva (AP) permeou pelo registro figural, uma vez que a apreensão discursiva (AD) não atuando de forma eficaz, a coordenação dos tratamentos sejam geométricos ou matemáticos oportunizaram conclusões descontextualizadas com a proposta do problema.

7.1.3 Exercício 3

Esse exercício em particular, se destaca pela intenção de conduzir o aluno a identificar e quantificar os elementos do poliedro a fim mostrar que a relação de Euler é válida também para esse sólido geométrico. O termo "mostrar" poderia sugerir um nível mais elaborado de resolução, mas em decorrência de não ser comum seu uso na elaboração dos problemas que se aplicam no cotidiano do contexto escolar, pela análise a priori se espera que após a identificação e quantificação do número de vértices, de arestas e de faces, a simples substituição dos valores no tratamento matemático exigido seja a resolução esperada.

A boa intuição que o registro figural oportuniza conduz a expectativa de que a partir da apreensão perceptiva (AP) sobre a forma geométrica exista também a identificação dos aspectos regulares através da apreensão discursiva (AD) sobre os elementos da figura, que na busca pelas informações fora do campo visual o tratamento geométrico (RI) coordenado pela apreensão operatória mereológica (AOM) possa identificar as 8 faces triangulares e 6 faces quadradas.

A pré-análise sugere que tendo em mão essas informações quanto ao número de faces e o tipo do polígono, o reconhecimento do objeto geométrico poliedro em questão, possa estabelecer tratamentos matemáticos capazes de determinar os elementos geométricos faltantes, porém o acesso a essas informações também podem existir pela manipulação da imagem, mesmo que de forma intuitiva e com maiores chances de erro.

Quando indagados no item (a) sobre quais informações ditas no enunciado mais lhe chamaram a atenção, 8 dos 11 alunos reconheceram que o trecho do discurso que colocava a exclusão das pirâmides da figura cúbica como ação formadora do cuboctaedro foi destaque para eles. Para os demais, o reconhecimento de que o cuboctaedro era um poliedro convexo e com isso já era garantido que a relação de Euler seria válida foi o ponto mais notável.

Quanto ao destaque visual da figura, sendo esse o questionamento realizado no item (b) desse exercício, os alunos A2, A4, A5, A8 e A10 afirmaram que a clareza em visualizar os elementos do poliedro foi o que à primeira vista lhe chamaram a atenção. Temos ainda que a identificação da pirâmide ao lado do cubo, registro dos alunos A4, A9, A10 e as formas planas quadrada e triangular do cuboctaedro citadas por A1 e A6 foram pontos notáveis no registro figural. Vale ressaltar que o aluno A11 descreveu que a formação do cuboctaedro através da interação entre as formas do cubo e da pirâmide foi o que mais lhe chamou atenção na figura e por fim os alunos A3 e A7 não responderam a essa pergunta.

O favorecimento heurístico da figura foi fator positivo para que dos 11 pesquisados 10 utilizassem tratamentos geométricos para identificar e quantificar os elementos do poliedro em questão, o aluno A8 foi o único que fez uso também de tratamentos matemáticos para obter as informações de modo a aplicar e validar a relação de Euler como estabelece o exercício.

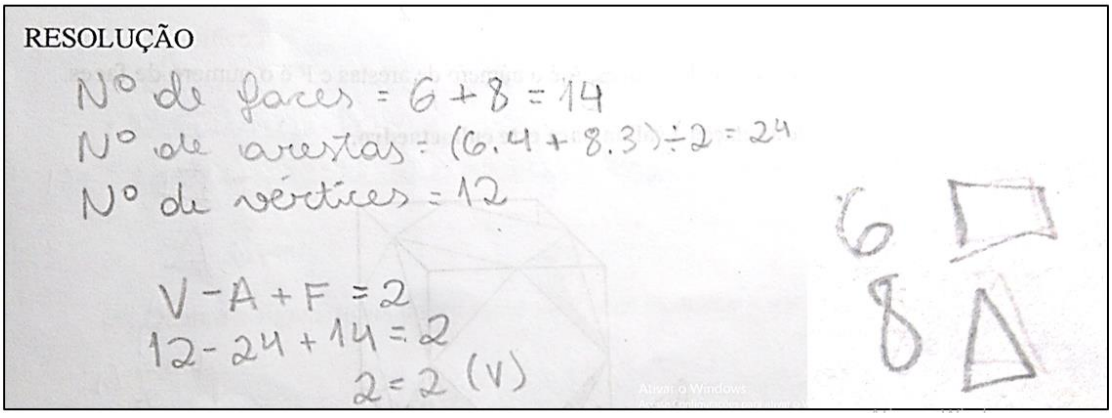
Com exceção dos alunos A1, A3, A7 e A9 que não responderam ao item (c), que tinha como objetivo identificar se existia o entendimento da proposta do exercício, para todos os demais ficou claro de que precisavam identificar o número de arestas, de vértices e faces do cuboctaedro de modo a substituir na relação de Euler e obter uma igualdade válida.

Sobre o processo resolutivo desse exercício pelo grupo de pesquisados, vale ressaltar que para Duval (2012b) a complexidade de se elaborar um registro que caracterize uma demonstração geométrica é algo pertinente ao nosso contexto escolar. O que justifica o fato de que nessa resolução alunos que afirmaram no item (c) que deveriam finalizar com a substituição dos elementos do poliedro na relação de Euler de modo a encontrar uma igualdade verdadeira simplesmente desenvolveram registros desencontrados ou determinaram o número de elementos do objeto mas não aplicaram no tratamento matemático como o exercício pedia (DUVAL, 2012b, p. 135).

Dos 11 pesquisados 9 apresentaram um processo resolutivo válido dentro das perspectivas da análise a priori, dos demais 1 identificou corretamente o número de vértices, de arestas e de faces, porém não construiu um registro válido do tratamento matemático esperado e 1 aluno apresentou erro na contagem e por consequência na validação da relação de Euler

Entre as resoluções corretas, o aluno A8 apresentou evidências de uma maior interação da apreensão discursiva sobre a figura de modo que a apreensão perceptiva e operatória pudessem estabelecer por exemplo, a relação entre a quantidade e o tipo de polígono que compõe o poliedro e o seu número de arestas. O registro figural realizado também por esse aluno reafirma o tratamento geométrico aplicado sobre a figura, pois a identificação de elementos dimensionalmente inferiores ao objeto dado se faz necessário direcionar a percepção para as representações elementares do poliedro sem abrir mão é claro da interação os elementos geométricos.

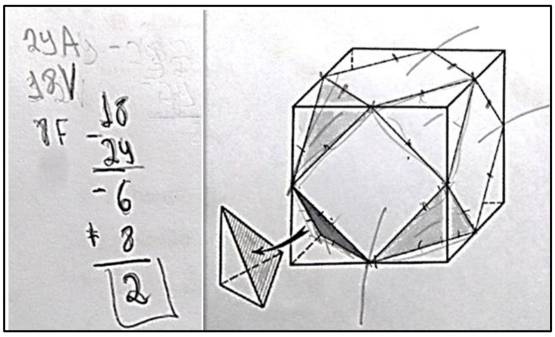
Figura 48 - Resolução do Estudante A8 com registro figural relacionado ao Exercício 3 – M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A8, Mom. 1, Exerc. 3, 2020.

Por outro lado, a apreensão perceptiva sobre a forma, em particular no registro figural desse exercício, instiga resoluções que dentro dos parâmetros coloquiais da relação de Euler estaria aquém quanto à sua disposição das representações do tratamento matemático esperado, como por exemplo, a expressão resolutiva dada pelo aluno A9. Pois a partir da apreensão perceptiva (AP) é fácil identificar e distinguir elementos figurais como faces (2D), arestas (1D) e vértices (0D) e dessa forma a apreensão operatória mereológica (AOM) atua produzindo registros numéricos que evidencia que na ausência da coordenação da apreensão discursiva, os valores que são encontrados são fontes de dúvidas, para se convencer dessa afirmação basta olhar as inúmeras tentativas de registros numéricos nessa e em outras resoluções.

Figura 49 - Resolução do Estudante A9 com manipulação da figura do Exercício 3 – M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A9, Mom. 1, Exerc. 3, 2020.

Ainda sobre a resolução do aluno A9, em seu comentário ao final da fase exploratória do primeiro dia evidencia a sua compreensão do registro figural desse problema (cf. Quadro 21), e por fazer parte do grupo que no item (c) demonstrou evidência de entender a proposta do exercício. A ausência de um registro algébrico que indicasse a aplicação da relação de Euler como é a exigência da questão, não descaracteriza os registros numéricos e os tratamentos executados uma vez que os mesmos expõem de uma forma não convencional a validação do tratamento matemático requerido para esse poliedro justificando assim a validação dessa resolução.

Quadro 21 - Comentário do Estudante A9 a respeito da figura no Exercício 3 – M1

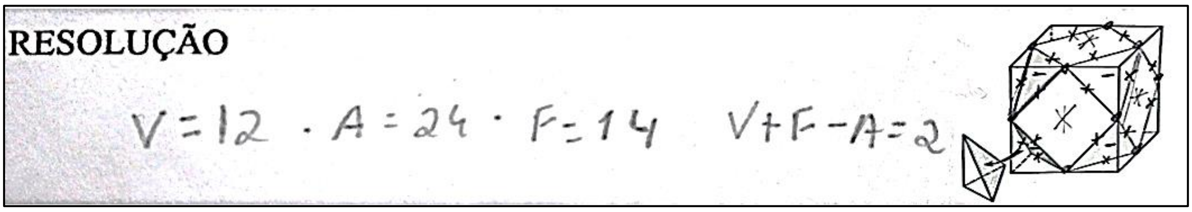
A9: *"Eu acho que a figura do exercício 3 eu consegui entender ela melhor."*

Fonte: Transcrição da gravação de áudio de Estudante A9, Mom. 1, Exerc. 3, 2020.

Caracterizando um processo resolutivo semelhante ao do aluno A9 diferenciando somente pela exposição clara da aplicação da relação de Euler e portanto se utilizando das informações acessadas através do registro figural pela atuação conjunta das apreensões perceptiva (AP), apreensão discursiva (AD) e operatória mereológica (AOM) os alunos A1, A2, A3 A5, A7, A10 e A11 apresentaram sucesso em suas conclusões.

A processo de resolução apresentado pelo aluno A6 de modo que não se restringindo somente em identificar e quantificar corretamente os elementos geométricos necessários para o uso no tratamento matemático exigido, utiliza também de registros algébricos e até expressa algebricamente a relação que deveria aplicar, porém não dá sequência em seu desenvolvimento. Portanto essa ausência da continuidade em substituir o registro algébrico pelo registro numérico identificado pelos tratamentos geométricos sobre a figura não estabelece de acordo com a análise a priori a conclusão se mostra incompleta e não respondendo a proposta do exercício não será caracterizada com correta sua resolução.

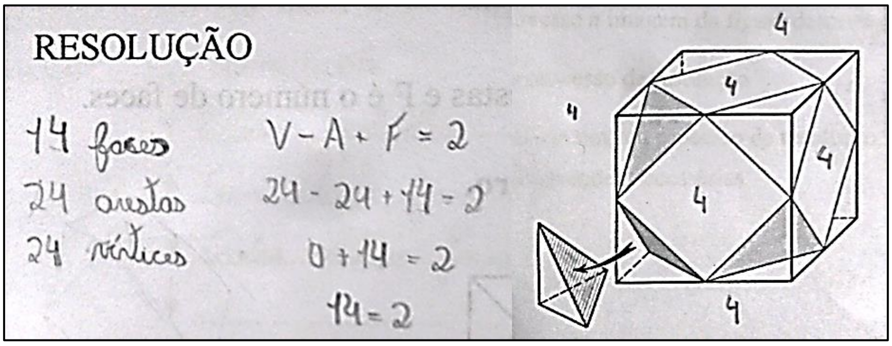
Figura 50 - Resolução do Estudante A6 com manipulação da figura do Exercício 3 - M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A6, Mom. 1, Exerc. 3, 2020.

A resposta apresentada pelo aluno A4 evidência em primeiro lugar uma contagem excessiva do número de vértice do cuboctaedro. Sua manipulação no registro figural do exercício mostra que a face quadrada do objeto foi superestimada no processo de reconfiguração dos elementos geométricos. Caracterizando assim a ação da apreensão perceptiva em coordenar os tratamentos geométricos de modo a se mostrar eficiente para identificar e quantificar o número de arestas a partir das faces quadradas do sólido e ser incapaz de realizar a mesma compreensão para seus vértices. O que evidência de acordo com TRRS a dificuldade em distinguir o objeto matemático de sua representação.

Figura 51 - Resolução do Estudante A4 com manipulação da figura do Exercício 3 - M1



Fonte: Folha de Registro do Estudante A4, Mom. 1, Exerc. 3, 2020.

Vale ressaltar que a resolução do aluno A4, uma vez que no item (b) destaca a qualidade da imagem em identificar os elementos do poliedro nos conduz a afirmar que o papel heurístico do registro figural no processo resolutivo de um problema de geometria pode ser ofuscado caso o estudante apresente dificuldade em diferenciar o objeto matemático de sua representação. Limitando assim a capacidade do aluno de utilizar e adquirir novos conhecimentos, gerando limitação em sua capacidade de compreender conceitos muitas vezes elementares (DUVAL, 2013, p. 21). Diante das análises das resoluções, segue o quadro de acertos:

Quadro 22 - Resultado das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correta
A2	Correta
A3	Correta
A4	Incorreta
A5	Correta
A6	Incorreta
A7	Correta
A8	Correta
A9	Correta
A10	Correta
A11	Correta

Fonte: Produção do autor, 2020.

Esse exercício se mostrou oportuno para expor a dificuldade que os alunos tiveram em desenvolver uma resolução que estruturada no registro da língua natural pudesse contemplar o estatuto do objeto de modo a fazer referência a base axiomática própria do poliedro convexo.

Quadro 23 - Análise do Exercício 3 – M1

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X	X		X		
A2	X	X		X		
A3	X	X		X		
A4	X					
A5	X	X		X		
A6	X			X		
A7	X	X		X		
A8	X	X		X		
A9	X	X		X		
A10	X	X		X		
A11	X	X		X		
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

É possível afirmar que mesmo a exposição plana do cuboctaedro limitar a percepção visual dos elementos geométricos que o definem, a qualidade do registro figural desse problema favoreceu os tratamentos sobre a figura, o que fica evidente ao contemplar o elevado índice de acertos, por outro lado, a apreensão discursiva não deixa de ser essencial na construção da proposta de resolução, principalmente se a parcialidade com que o objeto tridimensional é apresentado for fator de confusão na identificação dos elementos geométricos elementares como aconteceu com a solução apresentada pelos estudantes A4 e A6.

7.2 Bloco de atividades 2 – Momento 2

7.2.1 Exercício 1

Este exercício ao dispor em seu enunciado informações suficientes para que fosse possível executar o processo resolutivo desejado, a existência de um registro figural tem como objetivo identificar sua interação não só na compreensão da proposta do problema, mas principalmente na idealização dos tratamentos geométricos necessários. Uma vez que se trata de manipular cubos de mesma dimensão com o objetivo de rearranjá-los de modo a formar objetos cúbicos maiores.

A coordenação entre discurso e figura coloca de acordo com a análise a priori a interação entre as apreensões discursiva (AD) e perceptiva (AP) sobre a forma, e nesse caso evidenciando a homogeneidade geométrica, o olhar icônico sobre o registro figural pode coordenar a apreensão operatória mereológica (AOM) de modo a permear o processo resolutivo no sentido de arranjar as partes para se obter o todo se utilizando para isso, dá reconfiguração intermediária (RI).

Todos os sujeitos participantes da pesquisa reconheceram a relação entre cor e peso dos das unidades cúbicas transcrita no enunciado, mas para os pesquisados A2, A3, A4, A7, A9 e A11 existia a falta de compreensão da forma como essas unidades cúbicas se rearranjariam.

Vale ressaltar que em suas descrições ao final da atividade exploratória ficou evidente que sem o registro figural teriam dificuldade ou levariam mais tempo para concluir a resolução. Reafirmando assim o papel significativo da coordenação entre o registro discursivo e figural num problema de natureza geométrica.

Como mostra o Quadro 24, em que orientados pelo professor/pesquisador no início, os estudantes ao término da atividade relatavam sua experiencia com os exercícios e em particular descreviam o papel desempenhado pelo registro figural no processo resolutivo.

Quadro 24 - Relato dos Estudantes em relação a figura no Exercício 1 – M2

A1: Ajudou, pois para mim tudo que tem figura fica mais fácil. **A2:** A figura ajudou bastante, tanto a figura quanto o enunciado, as duas se complementaram, acredito eu. **A3:** Orientou sem deixar dúvidas **A4:** Ela foi clara e a diferença de cor me ajudou bastante **A5:** Foi decisiva para resolver a questão, sem ela teria que parar um pouco mais para pensar **A6:** Através da figura e do enunciado a pergunta ficou mais fácil par responder. **A7:** Ela me ajudou muito, porque a partir dela eu consegui visualizar como os cubos estavam dispostos, lendo somente eu não consegui entender. **A8:** Só usei o enunciado para pegar as gramas e o resto eu consegui tudo através da figura. **A9:** Ajudou muito porque deu para contar os quadradinhos e ter uma noção de quantos são, se não tivesse a figura seria um trabalho muito maior. **A10:** Foi importante, pois deu a certeza como os cubos foram arranjados. **A11:** Ajudou bastante, facilitou muito a resolução.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio de todos os participantes, Mom. 2, Ativ. 2, 2020.

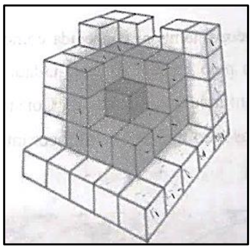
Outro aspecto a considerar no registro figural desse exercício se refere ao item (b) quando o pesquisado é questionado no que tange ao aspecto visual da imagem, ou seja, o que mais veio a se destacar na figura em seu olhar inicial. Nesse ponto, as opiniões se dividem em dois grupos distintos, temos então os estudantes A1, A8 e A9 colocando que a diferença entre os tons de cinza com o cubo de 5 grama no centro revelou clareza na organização das outras unidades, já para os demais participantes afirmaram que o destaque da figura foi de mostrar a organização global das unidades cúbicas.

Com exceção do estudante A1 que deixou em branco o item (c), todos os demais registraram corretamente a proposta do exercício favorecendo assim a imersão no contexto do problema a fim de construir um discurso resolutivo válido.

Quanto à existência de um processo coerente de resolução, dos 11 pesquisados 3 apresentaram falhas que comprometeram a aceitação dos resultados, 3 estudantes fizeram uso maior da intuição em estabelecer as propostas de tratamento tanto geométrico quanto matemático e por fim 5 pesquisados fizeram uma descrição mais operacional sobre as informações enunciadas.

A falha na conclusão que é apresentado pelos estudantes A3 e A9 não estão vinculadas a tratamentos matemáticos que precisariam compor o desenvolvimento da solução, mas ambas estão associadas pontualmente ao tratamento geométrico que subnotificou os elementos da figura. Uma vez que, a apreensão operatória mereológica (AOM) ao se utilizar da reconfiguração intermediária (RI) para decompor a representação figural que por sua vez sendo coordenada pela apreensão perceptiva não considerou as unidades cúbicas azuis que estavam fora no campo visual. O distanciamento com o estatuto do objeto matemático é evidenciado neste caso, pois eles consideraram o cubo azul como uma figura que utiliza 3 unidades cúbicas para compor uma aresta, porém concluem que esse cubo depois de formado utilizou ao todo 16 unidades cúbicas somente, uma distorção clara e facilmente identificável quando se observa a figura e a completa considerando somente o campo visual apresentado.

Figura 52 - Interação na figura realizado pelo Estudante A9 no Exercício 1 - M2

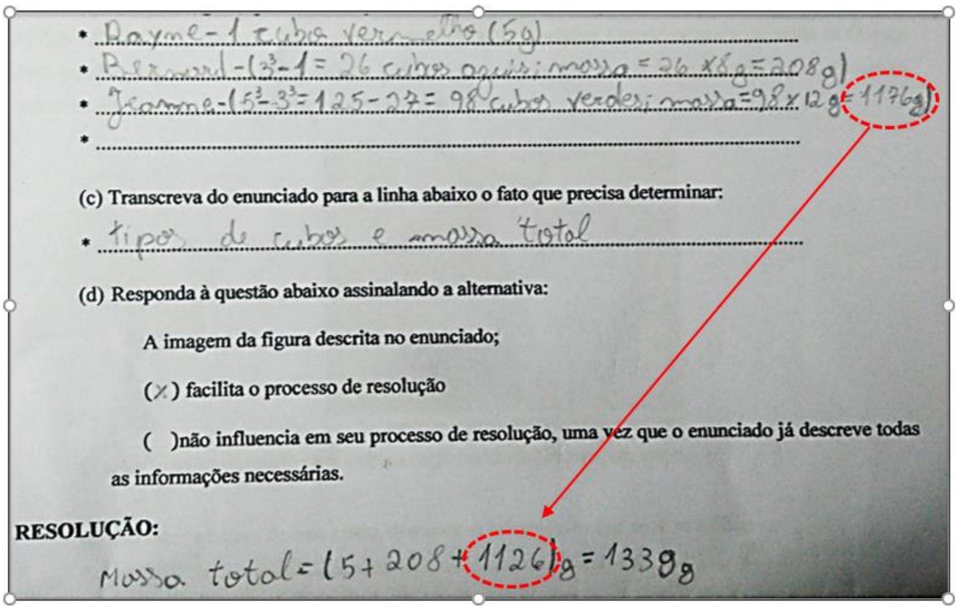


Fonte: Folha de Registro do Estudante A9, Mom. 2, Exerc. 1, 2020.

A Figura 52 mostra que o estudante A9 utilizou restritamente o registro figural para compor as quantidades cúbicas para cada cor como mostra suas marcações e seus registros numéricos, porém a ação parcial em decompor as unidades cúbicas associado ao distanciamento das propriedades geométricas do hexaedro regular desencadeou uma contagem inferior ao valor esperado, ocasionando assim uma solução não válida.

O estudante A6 curiosamente articulou corretamente os tratamentos geométricos e matemáticos, porém em seu discurso resolutivo final apresentou valores que não estavam em sua proposta de raciocínio distanciando do valor final apresentado na análise a priori do exercício. A distância física entre os registros pode ter contribuído para o equívoco da troca do registro numérico na ocasião em que é requerido a quantidade de massa em gramas de unidades cúbicas na cor verde utilizadas ao invés de utilizar o registro de 1176 gramas escreve o número 1126 tendo como consequência uma solução por falta em exatamente 50 gramas.

Figura 53 - Resolução apresentada pelo Estudante A6 no Exercício 1 – M2



- Rayme - 1 cubo vermelho (5g)
- Bernard - ($3^3 - 1 = 26$ cubos azuis; massa $= 26 \times 8g = 208g$)
- Jeanne - ($5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$ cubos verdes; massa $= 98 \times 12g = 1176g$)
-

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- tipos de cubos e massa total

(d) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado;

(x) facilita o processo de resolução

( )não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

Massa total $= (5 + 208 + 1126)g = 1339g$

Fonte: Folha de Registro do Estudante A6, Mom. 2, Exerc. 1, 2020.

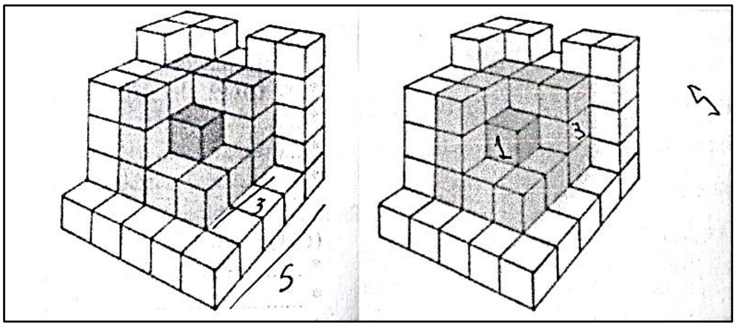
Em coerência com a proposta dessa pesquisa de identificar as apreensões em geometria nas resoluções dos exercícios, a solução apresentada pelo estudante A6 mesmo que para os parâmetros coloquiais o resultado final não seja considerado um valor válido, existiu sincronismo entre o discurso e a figura de modo que as apreensões perceptiva (AP) e operatória mereológica (AOM) correlacionaram-se favorecendo o tratamento geométrico da reconfiguração intermediária (RI) e portanto mesmo sendo categorizada como uma solução incorreta, para os olhos dessa pesquisa se identificou positivamente apreensões em seu processo resolutivo.

Os estudantes A2, A7, A8, A10 e A11 estruturaram suas resoluções apresentando os tratamentos matemáticos mais detalhados evidenciando assim maior clareza e, portanto, domínio sobre as informações que no decorrer do tratamento geométrico iam sendo reveladas.

A aproximação da representação figural ao objeto geométrico idealizado no contexto desse exercício, permeia uma tomada de consciência em que o estudante passa não só a reconhecer, mas também a identificar o momento oportuno de aplicar os tratamentos matemáticos necessários para estabelecer a solução requerida. Nesse caso, além da apreensão perceptiva (AP), a apreensão discursiva (AD) coopera com o tratamento geométrico da reconfiguração intermediária (RI). Tal interação com a apreensão discursiva é positiva em virtude da diversidade de resultados que os tratamentos geométricos podem evidenciar num registro figural.

Mesmo sendo sutil a manipulação na representação figural do exercício pelos estudantes A2 e A10, os registros numéricos na figura quando contemplados numa percepção mais voltada a didática do objeto geométrico em questão, é possível identificar a força conceitual com que a notação do número de unidades cúbicas para cada hexaedro representou na elaboração dos tratamentos matemáticos necessários para a solução desse exercício.

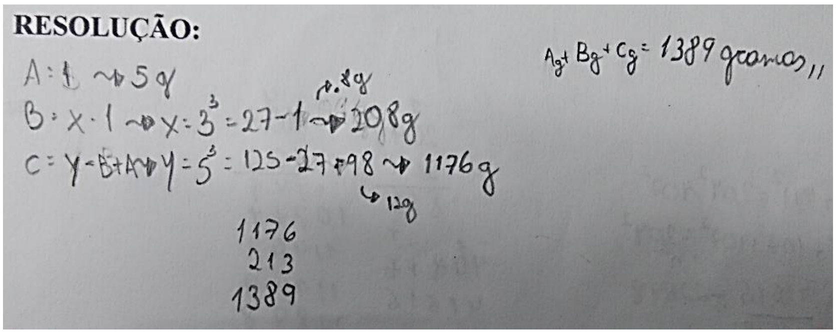
Figura 54 - Interação na figura do Exercício 1 – M2 realizado pelos Estudantes A10 e A2 respectivamente.



Fonte: Folha de Registro dos Estudantes A10 e A2, Mom. 2, Exerc. 1, 2020.

Ao observar os registros numéricos e algébricos utilizados pelos estudantes A2, A7, A8, A10 e A11, é possível constatar sincronia entre os tratamentos matemáticos pertinentes a dinâmica exigida pela proposta do exercício. Direcionando assim a afirmação de que os processos gestálticos ocorreram de forma eficiente e numa perspectiva icônica considerando a eficiência visual do registro figural utilizado nesse exercício não exigindo modelar a figura a partir de seus elementos geométricos para a sua operacionalização. Como exemplo segue a solução do estudante A10.

Figura 55 - Resolução apresentada pelo Estudante A10 no Exercício 1 – M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A10, Mom. 2, Exerc. 1, 2020.

O destaque com que a apreensão perceptiva (AP) atuou através do registro figural coordenando não só a desconstrução das partes do objeto geométrico e a sua recombinação, mas também direcionando os tratamentos numéricos, as resoluções dos estudantes A1, A4 e A5 se diferenciaram pela preferência dos tratamentos serem realizados de forma coordenada porém numa escala de registros escritos menor se comparado com os estudantes A2, A6, A7, A8, A10 e A11.

Apresenta-se a seguir o quadro resumo das resoluções corretas e incorretas.

Quadro 25 - Resultado das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correta
A2	Correta
A3	Incorreta
A4	Correta
A5	Correta
A6	Incorreta
A7	Correta
A8	Correta
A9	Incorreta
A10	Correta
A11	Correta

Fonte: Produção do autor, 2020.

Para melhor representar os resultados verificados nesse exercício, apresentamos o Quadro 26 explicitando as apreensões em geometria identificados nas resoluções dos 11 estudantes pesquisados:

Quadro 26 - Análise do exercício 1 – M2

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X			X		
A2	X	X		X		
A3	X					
A4	X			X		
A5	X			X		
A6	X			X		
A7	X			X		
A8	X			X		
A9	X					
A10	X	X		X		
A11	X			X		
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

7.2.2 Exercício 2

Esse exercício contando com um registro figural que caracteriza uma imagem de uma construção real e de grande popularidade social, pela análise a priori trazia o objetivo de identificar se haveria a transformação dessa figura a partir das apreensões discursiva (AD) e perceptiva (AP) em uma figura geométrica, de modo que a aplicação do tratamento matemático conhecido por teorema de Pitágoras fosse devidamente estruturado com as informações métricas coerentes com a proposta do problema.

Isso porque, o uso restrito das informações métricas dos elementos geométricos da figura descrito no enunciado além de não definir a altura da pirâmide, evidencia parcialidade na compreensão do estatuto do objeto geométrico principal. Os tratamentos matemáticos necessários para uma resolução válida desse exercício exigem tratamentos geométricos que oportunizem um olhar não mais sobre a forma geométrica numa perspectiva icônica da figura, mas a visualização de elementos 0D e 1D que inicialmente não estavam expostos caracterizando assim, atos cognitivos próprios da apreensão operatória mereológica (AOM) através da reconfiguração intermediária (RI).

A análise das resoluções apresentadas pelos pesquisados constatou um número expressivo de soluções parciais que dentro da proposta de resolução construída na pré-análise, essas soluções se classificam como incorretas e todos os sujeitos da pesquisa desenvolveram uma proposta de solução, mas especificamente dos 11 estudantes participantes, 6 realizaram um processo resolutivo válido e existiram 5 soluções parciais.

Considerando que o item (a) buscava identificar quais informações contidas no enunciado que apresentariam destaque durante sua leitura, se mostraram dois grupos de respostas, os estudantes A2, A3, A7, A8, A9 e A10 descreveram reconhecer que além das medidas das arestas da pirâmide, a informação de que as faces laterais desse objeto tridimensional seriam compostas por triângulos isósceles foi comum entre eles, já o grupo formado pelos demais afirmaram que somente as informações das medidas das arestas lhe pareceram mais importantes para a proposta do problema.

A descrição dada pelo segundo grupo, se for levado em consideração o fato de que nenhum desses pesquisados tiveram participação em outros modelos de pesquisa semelhante, afirmação esta constatada informalmente através das conversas realizadas durante todo o processo de convite. É possível supor de que o registro figural estando próximo ao enunciado e portanto compartilhando do mesmo campo visual, a ação da apreensão perceptiva sobre a forma e em particular sobre a regularidade das faces da pirâmide possa ter influenciado na necessidade ou não de registrar a informação quanto ao tipo de triângulo que estaria compondo as faces do sólido em questão.

Quando indagados sobre o destaque perceptível do registro figural, novamente o conjunto de respostas se dividiu em dois grupos bem definidos. O primeiro grupo formado pelos estudantes A1, A2, A3, A4, A6, A8, A10, A11 descreveram nesse item (b) do exercício de que a figura fazia simplesmente o papel de reafirmar o que o enunciado já descrevia, já os demais, A5, A7 e A9 foram claros em desprezar a necessidade dessa representação figural. Como evidencia os seus relatos transcritos ao final da aplicação do segundo bloco de atividade.

Quadro 27 - Relato dos Estudantes A5, A7 e A9 em relação a figura no Exercício 2 – M2

A5: Sinceramente não ajudou muito não, porque no próprio enunciado já fala que ela é uma pirâmide, mas se fosse uma pirâmide diferente talvez seria importante, mas nesse formato, não. Ela está ali só como uma ilustração. **A7:** Para mim foi ilustrativa, pois todo mundo sabe como é essa pirâmide que o enunciado coloca. **A9:** Não ajudou muito, pois só com as informações do enunciado a gente já conseguiria fazer.

Fonte: Produção do autor, 2020.

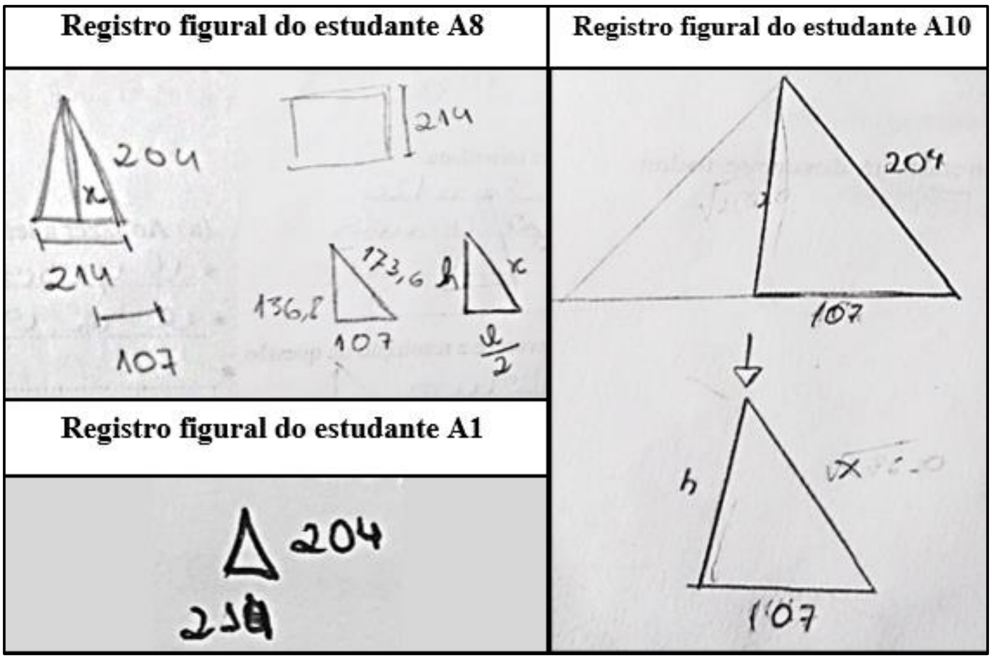
É possível perceber através dos relatos descritos (cf. Quadro 27) um condicionamento do objeto geométrico em questão, pois são unânimes em expressar rotina quanto ao tratamento de pirâmides cuja base seja quadrada e mesmo não sendo o viés dessa pesquisa, é possível identificar por exemplo, através da simples imersão no contexto escolar da Educação Básica, que desde o início da formação de uma estrutura cognitiva geométrica tridimensional, o registro semiótico mais popular para representar uma pirâmide no contexto matemático é através da alusão as pirâmides do Egito. Como consequência direta, uma vez que essas construções possuem de certa forma uma estrutura quadrada formando sua base é possível medir a influência que as representações utilizadas e em particular no meio escolar podem intervir na compreensão global do objeto matemático, que para o aporte teórico dessa pesquisa representa cognitivamente a distinção clara entre o objeto e sua representação.

Com exceção do estudante A1 que se omitiu em expressar sua resposta, todos os demais pesquisados consideraram terem alcançado o entendimento da proposta do exercício, ou seja, a determinação da altura da pirâmide descrita no problema representaria a solução desejada.

Pelos pressupostos de análise pré-estabelecidos quanto aos processos gestálticos pelo simples fato de existir um registro figural (RF) na apresentação do exercício, a identificação de um discurso resolutivo mostrando coerência quanto a coordenação dos tratamentos geométricos e matemáticos somente os estudantes A1, A3, A5, A6, A8, A10 obtiveram êxito nessa ação, e portanto, a amostragem do processo resolutivo imparcial realizados por A2, A4, A7, A9 e A11 dos quais em nenhum momento ocorreu falha no tratamento matemático aplicado, somente a ilusão de que a altura da face encontrada pudesse ser equivalente à altura da pirâmide proposta.

Das resoluções consideradas corretas, os estudantes A1, A8 e A10 construíram registros figurais auxiliares a fim de ter dentro do seu campo visual o processo evolutivo da ação da reconfiguração intermediária (RI) ao descontruir dimensionalmente o objeto geométrico. Cognitivamente a exposição das unidades figurais não configura nenhuma garantia de que as reconfigurações que poderão advir permeará tratamentos matemáticos de modo a caracterizar uma solução que seja considerada correta. O acesso ao estatuto do objeto através da ação conjunta das apreensões perceptiva (AP) e discursiva (AD) constituem uma conduta necessária para coordenar o tratamento geométrico do qual a escolha de elementos (0D) como por exemplo, o ponto médio tanto da aresta da base quanto do segmento que representa a diagonal do quadrado da base são escolhas decisivas para uma solução válida.

Figura 56 - Construções de registros figurais apresentados pelos Estudantes A1, A8 e A10 no Exercício 2 – M2

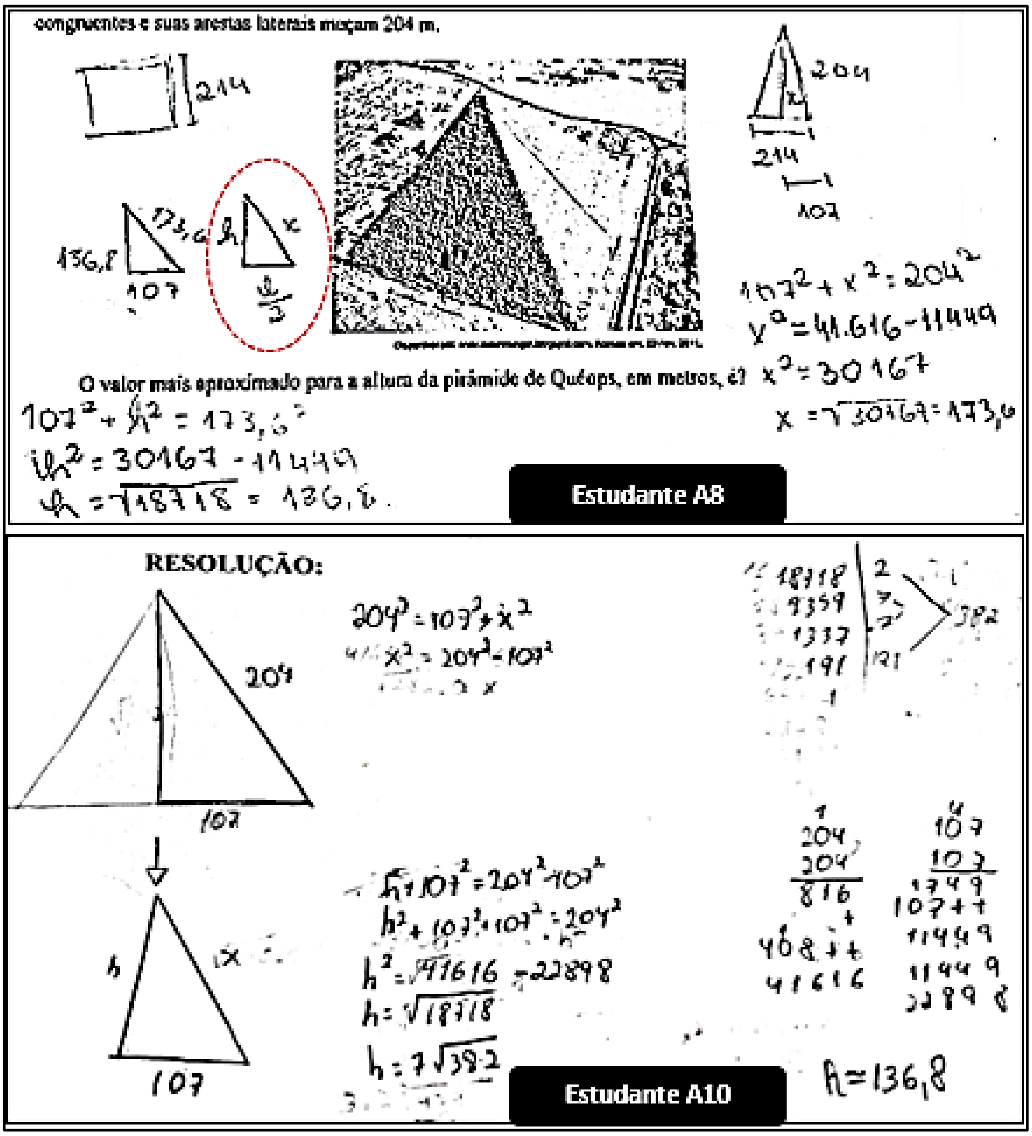


Fonte: Folha de Registro dos Estudantes A1, A8 e A10, Mom. 2, Exerc. 2, 2020.

A partir das construções figurais dos estudantes A8 e A10 é possível identificar que seus processos de resolução se estruturaram em determinar a altura da pirâmide a partir do uso do tratamento matemático conhecido por teorema de Pitágoras, tendo como elementos geométricos a altura da face representando a medida da hipotenusa e como catetos, o segmento que representa o apótema do polígono da base e o segmento que representa a altura da pirâmide, configurando assim a solução 2 idealizada na pré-análise.

A inscrição de naturezas numéricas e algébricas associadas as figuras geométricas desenhadas pelos estudantes acima citados, sugere acima de tudo o controle dos tratamentos tanto geométricos quanto matemático. O fato do sujeito A8 ter feito o uso da letra “x” como representação algébrica num tratamento matemático do qual as letras “h” e “l” também estavam presentes, conforme o destaque feito na Figura 57, em função da rotina do seu emprego no ensino, evidencia, mesmo que discretamente, de que a determinação da altura da pirâmide estava vinculada ao cálculo do valor de x, resultado da coordenação eficiente entre as apreensões perceptivas (AP), discursiva (AD) e operatória mereológica (AOM).

Figura 57 - Resolução apresentada pelos Estudantes A8 e A10 no Exercício 2 – M2

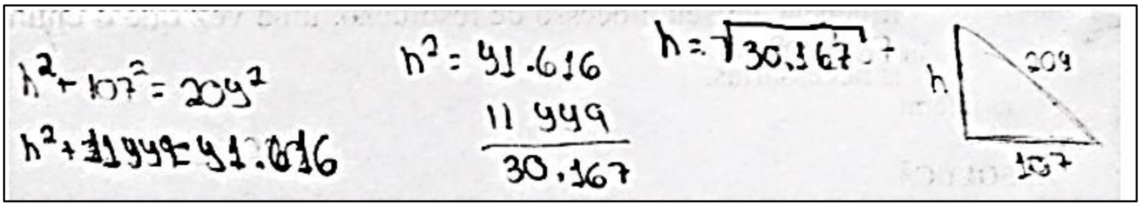


Fonte: Folha de Registro dos Estudantes A8 A10, Mom. 2, Exerc. 2, 2020.

Todas as resoluções consideradas nessa análise como incorretas apresentaram além da parcialidade do tratamento matemático também a incoerência com o elemento geométrico apresentado como solução. Pois quando os estudantes A2, A4, A7, A9 e A11 concluíram seus respectivos processos resolutivos, foram unânimes em utilizar o registro algébrico da letra “h” para expor sua finalização. Porém, ao observar a operação geométrica realizada através dos elementos utilizados, em particular a medida da aresta lateral e a metade da medida da aresta da base que através do tratamento matemático aplicado o valor determinado representa na verdade a altura da face lateral da pirâmide. E dada a caraterização da proposta desse exercício e fazendo uso do estatuto da pirâmide temos que o segmento que representa a sua altura é necessariamente perpendicular ao polígono da base, o que pela particularidade da pirâmide desse exercício, o seu valor não é em hipótese alguma equivalente à altura da face.

A seguir segue a resolução apresentado pelo estudante A9 para exemplificar o que foi descrito acima:

Figura 58 - Resolução apresentada pelo Estudante A9 no Exercício 2 - M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A9, Mom. 2, Exerc. 2, 2020.

De um modo geral, a utilização nesse exercício de uma representação figural categorizando uma fotografia de um objeto e levando em consideração da inexistência de um registro discursivo na imagem pode conduzir ao questionamento quanto a sua importância no contexto dessa resolução pois oferece uma maior resistência quanto a aplicação do tratamento geométrico. Porém, a imagem é caminho para que o estudante possa acessar o estatuto do objeto geométrico em destaque e através da apreensão perceptiva é intuitivo que ao contemplar essa imagem venha a intuir que as faces triangulares da pirâmide sejam congruentes entre si e que as arestas laterais possuam também a mesma medida.

Segue abaixo a conclusão quanto as resoluções de acordo com a proposta do exercício.

Quadro 28 - Resultado das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correta
A2	Incorreta
A3	Correta
A4	Incorreta
A5	Correta
A6	Correta
A7	Incorreta
A8	Correta
A9	Incorreta
A10	Correta
A11	Incorreta

Fonte: Produção do autor, 2020.

Através da análise a priori a fim de identificar as apreensões em geometria que tiveram atuação nos processos resolutivos apresentados pelos 11 estudantes nesse exercício, apresentamos o Quadro 29 explicitando as apreensões em geometria identificados:

Quadro 29 - Análise do Exercício 2– M2

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X	X		X		
A2	X					
A3	X	X		X		
A4	X					
A5	X	X		X		
A6	X	X		X		
A7	X					
A8	X	X		X		
A9	X					
A10	X	X		X		
A11	X			X		
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

A observação direta das resoluções evidencia operacionalidade quanto ao tratamento matemático denominado por teorema de Pitágoras, o que condiciona ao fato de que as resoluções incorretas não estão vinculadas a falhas no tratamento matemático, logo, o distanciamento do objeto geométrico representou a fragilidade com que a apreensão discursiva (AD) coordenou as operações. A ausência de figuras geométricas nas folhas de registros dos estudantes A2, A4, A7, A9 e A11 vem a reafirmar o olhar icônico sobre o registro figural limitando os tratamentos geométricos sobre a forma limitando o acesso aos elementos geométricos necessários para a determinação da altura da pirâmide.

7.2.3 Exercício 3

Por meio da análise preliminar, o registro figural desse exercício foi identificado como sendo não só um fator essencial para a sua resolução como também portador de um grande potencial heurístico, estabelecendo assim a atuação determinante da apreensão perceptiva (AP) sobre a forma tridimensional da figura. Porém, sem aproximar a forma geométrica das informações invocadas no enunciado através da apreensão discursiva (AD) as modificações sobre o objeto geométrico poderiam sugerir formas tridimensionais diferentes daquelas que estão a amostra na imagem dada.

Sendo assim, a apreensão operatória mereológica (AOM) e apreensão operatória posicional (AOP) subordinadas aos processos gestálticos tendem através da reconfiguração intermediária (RI) e rotação (RT) reconhecer as formas geométricas a partir do paralelepípedo dado no enunciado.

Porém, é preciso compreender que a identificação dos sólidos não é elementar em função da grande capacidade de decompor esse objeto, recolocando grande peso sobre a apreensão discursiva (AD) em formalizar dentro do estatuto do objeto apresentado a confirmação de não estar omitindo e nem considerando partes que não componham o objeto em destaque na imagem. Em virtude da variabilidade de compor essa figura, somente 2 estudantes apresentaram uma solução que de acordo com análise a priori pode ser considerada correta. Todos os demais omitiram ou consideram partes que não compunham o objeto original.

Em relação ao item (a) dessa questão quando questionados sobre as informações presentes no enunciado sobre quais seriam fundamentais para o processo resolutivo, do grupos de 11 pesquisados, os estudantes A1, A5, A7, A8, A9 e A11 afirmaram que a forma idênticas dos três paralelepípedos e suas dimensões foram destaque no meio do registro discursivo, já os estudantes A2, A3, A4 e A10 além de destacar o que o primeiro grupo evidenciou, relataram que a informação de que os paralelepípedos estavam entrelaçados foi também notório.

Sendo esse registro figural um forte candidato a múltiplas percepções de arranjos quanto a decomposição do objeto principal em objetos secundários através da atuação da apreensão operatória mereológica (AOM), o item (b) ao questionar os destaques com que a imagem revela em seu campo visual, todos os pesquisados afirmaram que a forma de como que eles estavam encaixados foi o fator mais explicito da imagem,

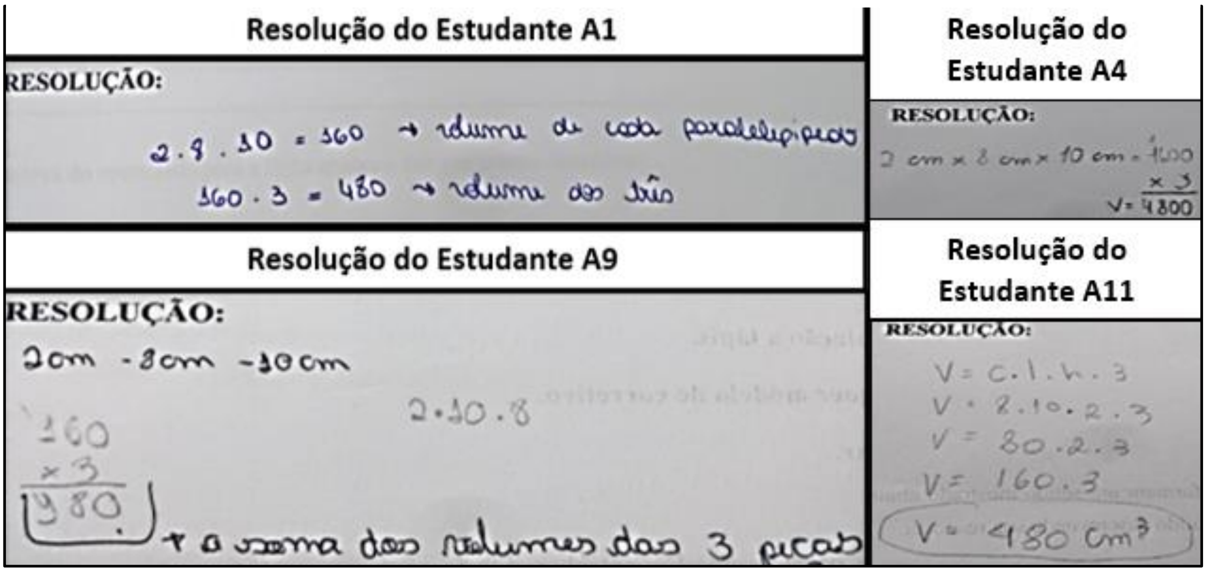
Com exceção do estudante A1 que não respondeu, o item (c) desse exercício buscava identificar a compreensão da proposta do problema do qual todos os demais afirmaram que quantificar o volume do objeto exposto no registro figural representaria a solução esperada.

A necessidade de manipular elementos geométricos não intuitivos, requer mais do que uma simples percepção visual, estabelecendo o uso do “olhar do inventor” a fim de que seja possível através dos tratamentos geométricos identificar os limites de cada sólido bem como a quantidade de partes que o objeto original deverá se decompor para através dos tratamentos matemáticos chegar ao volume total.

Em função da proposta intuitiva que o registro figural traz para si ao idealizar uma simples junção de objetos geométricos idênticos, incentiva o uso desproporcional dos registros discursivos, tornando assim desnecessário os tratamentos geométricos, o que acarreta na simples aplicação da relação de volume do paralelepípedo dito no enunciado. Assim procederam os estudantes A1, A4, A9 e A11 quando apresentaram suas resoluções supondo que o objeto destacado na imagem é a simples composição de três paralelepípedos idênticos e que seus volumes não se alteram pelo fato de estarem entrelaçados.

Como mostra as resoluções apresentadas na Figura 59 abaixo:

Figura 59 - Resoluções apresentadas pelos Estudantes A1, A4, A9 e A11 no Exercício 3 - M2



Fonte: Folha de Registro dos Estudantes A1, A4, A9 e A11, Mom. 2, Exerc. 3, 2020

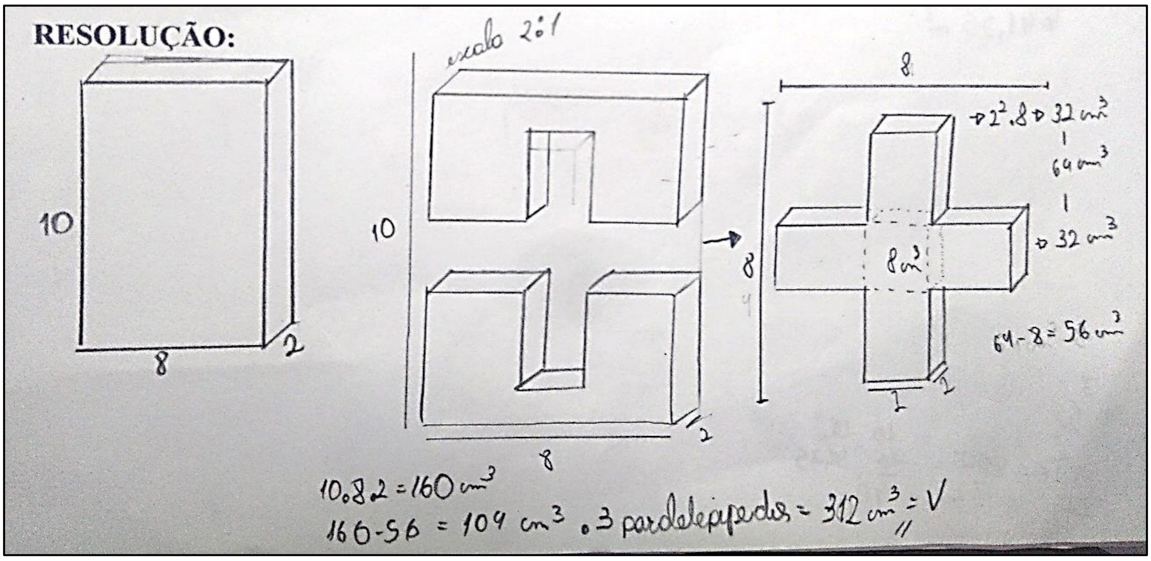
O estudante A10 em seu processo de resolução construiu figuras auxiliares a fim de registrar a partir das transformações geométricas de decomposição e rotação os blocos tridimensionais que representariam os paralelepípedos entrelaçados definido no problema. É possível identificar que a limitação do plano quanto a visualização de um objeto 3D colaborou para a omissão de dois paralelepípedos congruentes entre si cujas dimensões seriam (3x2x2) cm cada nos registros figurais auxiliares.

De fato, a interpretação e coordenação dos tratamentos geométricos para essa figura de acordo com a visualização com que o estudante A10 tomou para si, destaca um grau significativo de dificuldade para associar esses blocos faltantes como sendo a extensão das duas únicas faces do cubo destacado na figura a direita da sua resolução que não possui um bloco adjacente a sua face.

Ao analisar os tratamentos matemáticos descritos por esse estudante a partir da decisão de dividir o objeto geométrico em 6 figuras 3D idênticas, a parcialidade com que as apreensões operatórias atuaram permitindo retirar o mesmo volume em todas as peças sem implicar sua devolução ao objeto final conduziu a um falso volume dos paralelepípedos entrelaçados.

Como mostra a Figura 60:

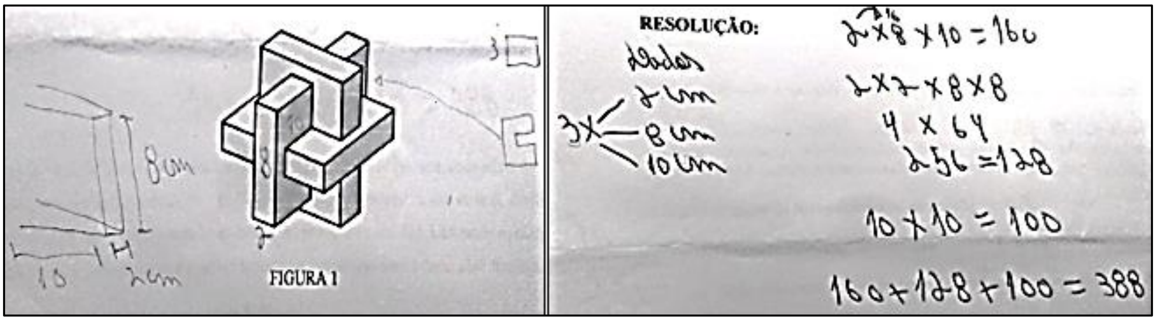
Figura 60 - Resolução apresentada pelo Estudante A10 no Exercício 3 – M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A10, Mom. 2, Exerc. 3, 2020

Assim como o estudante A10, foi possível observar em outras resoluções a construção de registros figurais auxiliares reafirmando assim a capacidade heurística da imagem em intuir modificações a partir das interações entre as apreensões mobilizadas como por exemplo, a resolução apresentada pelo estudante A2 do qual numericamente sua solução é muito próxima da solução almejada, porém ao analisar o desenvolvimento do raciocínio é possível detectar uma ruptura quanto ao estatuto do objeto no momento em deixa de considerar figuras tridimensionais na composição do volume e passa a operacionalizar um resultado de uma figura plana (10x10)cm. Nesse momento se percebe uma perda da significação dos tratamentos geométricos e como os tratamentos matemáticos não podem filtrar esses parâmetros em seus processos operacionais, a adição ocorre, porém o registro numérico alcançado é desconexo com a proposta da análise a priori como sugere a Figura 61.

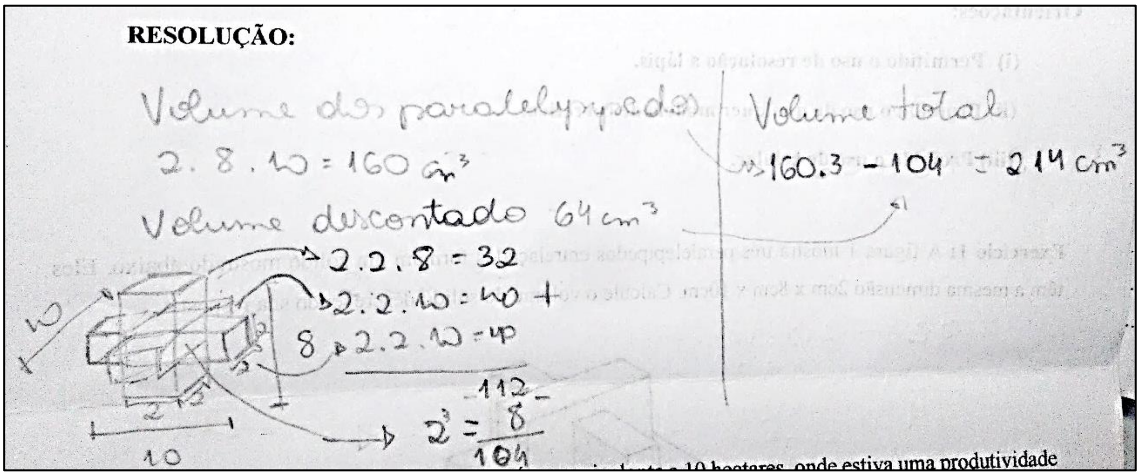
Figura 61 - Resolução apresentada pelo Estudante A2 no Exercício 3 - M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A2, Mom. 2, Exerc. 3, 2020

No caso da resolução apresentada pelo estudante A8 a presença de registros numéricos conflitantes no desenvolvimento da solução deixou evidente que a variabilidade com que o registro figural oportunizava os tratamentos geométricos contribuiu para o distanciamento com o estatuto do objeto geométrico, de modo que as apreensões operatórias mereológica (AOM) e posicional (AOP) sendo coordenadas somente pela apreensão perceptiva (AP) a partir da dinâmica do olhar icônico, estabelece tomadas de decisão de modo que as informações obtidas expõe falhas graves a ponto de existir ao final duas concepções de raciocínio distintas e grandes falhas estruturais quando relacionadas a recombinação das partes para o todo, como mostra a Figura 62 abaixo:

Figura 62 - Resolução apresentada pelo Estudante A8 no Exercício 3 - M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A8, Mom. 2, Exerc. 3, 2020

Nas resoluções que não se utilizaram de nenhum registro figural auxiliar, mas fizeram uso mentalmente de tratamentos geométricos de modo que a recombinação da figura a partir dos novos sólidos pudessem alcançar a solução desejada, nesse perfil temos os estudantes A3 e A7. Ambos apresentaram um registro discursivo que caracteriza a ação das apreensões operatórias previstas na análise a priori, mas dada a variabilidade com que os tratamentos geométricos poderiam interagir no registro figural, a resolução do estudante A3 deixou de considerar blocos retangulares e, portanto, sua solução foi inferior a resposta correta. Por outro lado, a resolução apresentada pelo estudante A7 levou em consideração blocos retangulares que já haviam sido computados ao volume desejado e, portanto, sua solução excedeu a resposta almejada.

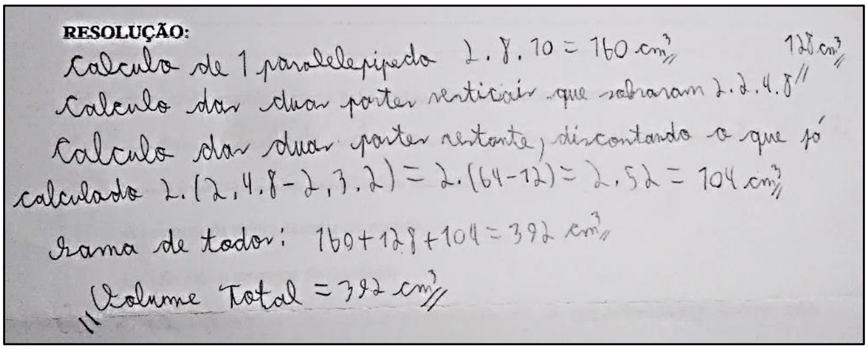
Importante destacar que toda figura dentro de um contexto geométrico possui um imenso potencial para modificações, e que essas operações geométricas podem acontecer graficamente a exemplos dos registros auxiliares dos estudantes A2, A8 e A10 ou mentalmente como por exemplo, as resoluções dos estudantes A3 e A7.

Duval afirma que "*a produtividade heurística depende da congruência entre uma operação e um tratamento matemático possível"* (DUVAL, 2012b, p. 132), tal afirmação é facilmente perceptível a partir do momento que se dá a compreensão da força da expressão "os paralelepípedos idênticos estão entrelaçados". A ausência de um tratamento matemático imediato para a forma original da figura, impulsiona a busca por modificações geométricas, que em particular nesse exercício o olhar do inventor sendo capaz de estabelecer relações a partir dos elementos geométricos 0D, 1D, 2D e 3D da figura em questão, cria um leque de possibilidade de modo que o nível de eficiência sofra variação em cada caso. O que justificaria os tratamentos realizados pelos estudantes A3 e A7 em que ambos ao fazer as modificações a limitação visual do objeto 3D no plano ofuscou tomadas de raciocínio de modo a concluir uma resolução correta com o contexto.

Na análise das resoluções dos estudantes A5 e A6, mesmo apresentando conclusões semelhantes e de acordo com o estudo preliminar essas soluções se classificam como corretas, os tratamentos envolvidos se diferenciam de modo que o processo de resolução apresentado pelo estudante A6 não estando previsto na pré-análise dessa pesquisa, surpreende a relação feita com a linguagem dos conjuntos. Já o estudante A5 apresentou uma resolução dentro das expectativas da análise a priori.

Quanto a resolução do estudante A5, é possível perceber a utilização dos tratamentos geométricos no processo de resolução através do desenvolvimento dos seus tratamentos matemáticos, que em função da ausência de registros figurais auxiliares em sua folha de atividade sugere que toda modificação sobre a figura ocorreu mentalmente sendo seguido por registros numéricos e literários, como evidencia a Figura 63 expondo o campo de resolução desse estudante.

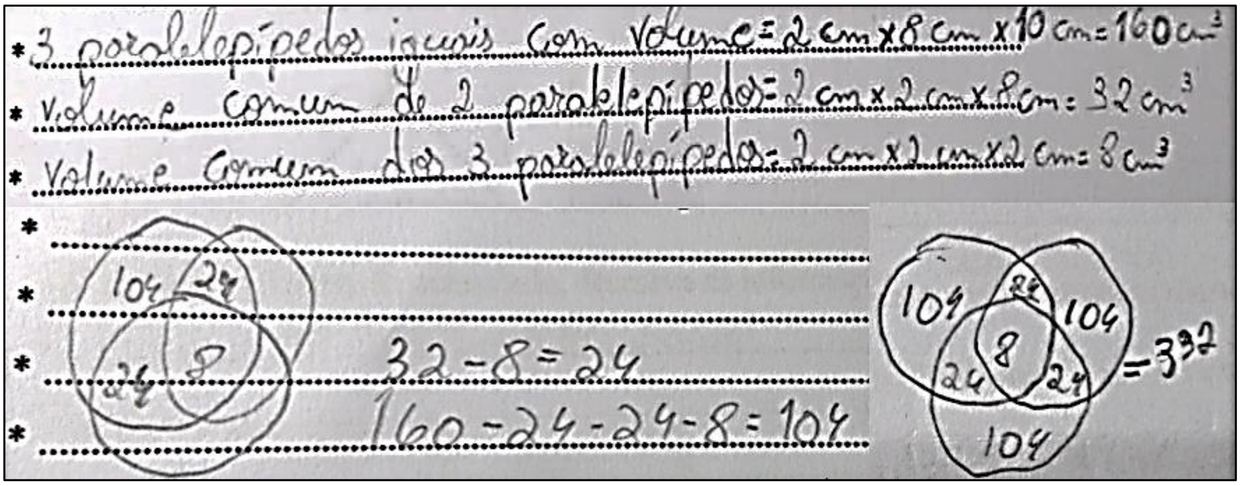
Figura 63 - Resolução apresentada pelo Estudante A5 no Exercício 3 - M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A5, Mom. 2, Exerc. 3, 2020

A resolução apresentada pelo estudante A6 chamou atenção para o fato de que os tratamentos geométricos aplicados a figura por meio da apreensão operatória mereológica (AOM) e posicional (AOP) contou também, com o gerenciamento da apreensão discursiva (AD) porém se utilizando das habilidades de interação entre conjuntos, de modo que a decomposição em partes dos poliedros buscou identificar regiões no espaço comuns aos sólidos entrelaçados, do qual ao denominar os conjuntos que representariam todas relações entre os paralelepípedos se utilizou da representação gráfica a partir do diagrama de *Venn* para descriminar e estabelecer a solução desejada.

Figura 64 - Resolução apresentada pelo Estudante A5 no Exercício 3 - M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A6, Mom. 2, Exerc. 3, 2020

Vale ressaltar que o estudante A10 em seu comentário ao final da fase exploratória do segundo dia quando o pesquisador pede para que descreva o papel da figura no exercício é possível perceber através do seu discurso a atuação positiva do registro figural o ajudando a configurar o seu raciocínio.

Quadro 30 - Comentário do Estudante A6 a respeito da figura no Exercício 3 – M2

A6: *"O destaque para mim é como os retângulos estão encaixados, isso facilita a interpretar melhor e perceber que existe simetria na figura e depois por ser paralelepípedos o seu volume é muito fácil"*.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio do estudante A6, Mom. 2, Exerc. 3, 2020.

No quadro abaixo, apresenta-se um resumo do desempenho do grupo para com esse exercício:

Quadro 31 Resultado das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Incorreta
A2	Incorreta
A3	Incorreta
A4	Incorreta
A5	Correta
A6	Correta
A7	Incorreta
A8	Incorreta
A9	Incorreta
A10	Incorreta
A11	Incorreta

Fonte: Produção do autor, 2020.

A partir da análise de todos os registros disponibilizados pelos 11 pesquisados, pode-se identificar as apreensões em geometria que permearam todo o processo resolutivo construído nesse segundo momento, em particular em relação ao exercício 3 do Bloco de Atividade 2, segue então no Quadro 31 uma síntese da análise posteriori:

Quadro 32 - Análise do Exercício 3– M2

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X					
A2	X					X
A3	X	X		X		
A4	X					
A5	X	X		X		X
A6	X	X		X		X
A7	X	X				
A8	X	X		X		
A9	X					
A10	X	X		X		
A11	X					
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

A quantidade significativa de soluções incorretas nesse exercício em que a ação da apreensão operatória mereológica (AOM) trazia consigo uma significativa relação com as tomadas de decisões coerentes, evidenciou a dificuldade em atuar no espaço tridimensional, uma vez que a percepção visual partindo de uma imagem plana da figura tridimensional exige uma maior capacidade de visualização. Pois, diferente do plano em que a modificação mereológica é feita em 2D, nesse exercício a modificação precisou ser feita em 3D, e vale ainda dispor do fato da expressiva capacidade heurística da figura, contribuindo assim para uma elevada variabilidade quanto a decomposição do sólido.

7.3 Bloco de Atividades 1 – M3

7.3.1 Exercício 1

Com relação a esse exercício, a existência de registros numéricos na figura cria a necessidade de que o processo gestáltico (RD) interaja com o fato de que esses registros denotam medidas que não representam nenhuma proporção com os objetos geométricos inseridos no registro figural destacando assim a necessidade de subjugar a imagem a partir da apreensão perceptiva (AP) e discursiva (AD).

Além do mais, como a proposta desse exercício almeja a elaboração de um discurso argumentativo que valide ou não a ação tomada pela Dona Maria, personagem descrita no enunciado, o acesso a registros numéricos relacionados a capacidade dos objetos do problema deve fornecer subsídios para a sua conclusão. Destacando assim a necessidade de que cada estudante veja o objeto tridimensional a partir de seus elementos geométricos, o que coloca em atuação a apreensão operatória mereológica (AOM) através da reconfiguração intermediária (RI).

Dos 11 pesquisados, somente o estudante A4 apresentou um discurso no qual fazia uso de afirmações desconsiderando fatos expressos no enunciado, os demais utilizaram como previsto na análise a priori dos valores numéricos das capacidades dos objetos para justificar sua resposta com exceção do estudante A2 que demonstrou um registro discursivo semelhante a outros pesquisados, porém em seus tratamentos matemáticos fez uso da ausência da operacionalização do valor do Pi e também atribui as soluções encontradas uma caracterização dimensional errada.

Dada a importância da interação entre o enunciado e o registro figural para o acesso ao seu processo resolutivo, quando questionados no item (a) sobre as informações em tomariam como base para o entendimento do exercício, todos os estudantes definiram que além das formas geométricas envolvidas, destacaram também que deveriam ter que buscar o mínimo de volume da leiteira para garantir que 20 copos tivessem sua capacidade atendida em cinquenta por cento, pois esta era a condição utilizada por Dona Maria.

Quando questionados no item (b) quanto a percepção dos elementos geométricos imersos na imagem, vale ressaltar que dada ao contexto de que as informações métricas relacionadas aos cilindros não estavam expressas no enunciado, mas sim no registro figural os pesquisados A1, A6, A7, A8, A9, A10 e A11 identificaram esses registros como sendo o destaque da imagem, caracterizando assim a familiaridade com a forma geométrica do cilindro. Porém, os estudantes A2, A3, A4 e A5 afirmaram que a imagem dos cilindros e dos registros numéricos foram decisivos.

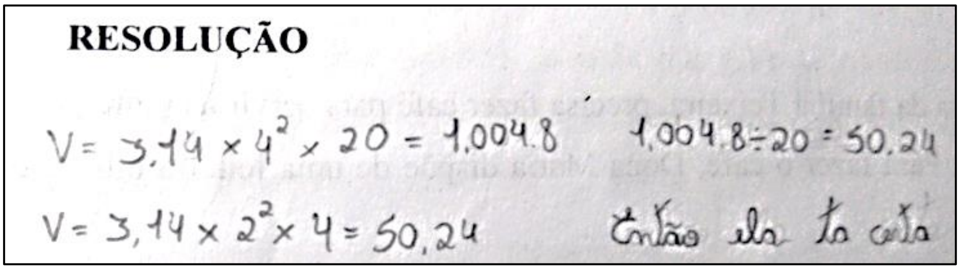
Uma vez que o registro figural apresentado nesse exercício se destaca pela sua desproporcionalidade métrica em relação ao contexto, desse modo inviabiliza a ação individual da apreensão perceptiva (AP) em coordenar os tratamentos geométricos a fim de estabelecer um processo resolutivo confiável.

O item (c) buscando identificar a compreensão por parte dos estudantes sobre o entendimento da proposta do exercício, todos os participantes se mostraram entendidos quanto a necessidade de validar ou não a condição imposta por Dona Maria, favorecendo assim o delineamento do processo resolutivo através da compreensão dos registros dispostos no problema.

Confirmando a pré-análise todos os pesquisados buscaram definir as capacidades individuais da leiteira e do copo, para que ao compará-los pudessem estabelecer uma conclusão argumentativa sobre a necessidade ou não de encher a leiteira. Não ocorreram erros operacionais quanto aos tratamentos matemáticos para definir o volume dos objetos envolvidos o que caracteriza eficiência quanto ao reconhecimento dos elementos geométricos necessários para quantificar a grandeza em questão e portanto podemos definir que a apreensão operatória mereológica (AOM) ao atuar a partir da reconfiguração intermediária (RI) mostrou-se eficaz em sua interação.

O fato de que o estudante A4 ter confirmado a veracidade de que Dona Maria deveria sim encher a leiteira até sua capacidade máxima para poder assim servir 20 copos para os convidados da família Teixeira, evidenciou pela sua resolução e conclusão a neutralidade na atuação da apreensão discursiva (AD) quanto ao fato de os copos deveriam serem servidos com sua capacidade pela metade. No desenvolvimento do raciocínio é possível perceber a associação imediata do volume do copo com a distribuição da capacidade da leiteira em 20 partes iguais, e em nenhum momento deixa expor a particularidade de que o elemento figural 1D que representa a altura do copo deva ser considerado somente até o seu ponto médio (0D) ou seja, cada copo deverá ser servido com sua capacidade pela metade uma vez que o segmento do raio (1D) não pode ser alterado, como revela a Figura 81.

Figura 65 Resolução apresentada pelo Estudante A4 no Exercício 1 - M3


RESOLUÇÃO

$V = 3{,}14 \times 4^2 \times 20 = 1.004.8$ $\quad 1.004.8 \div 20 = 50.24$

$V = 3{,}14 \times 2^2 \times 4 = 50{,}24$ $\quad$ Então ela ta certa

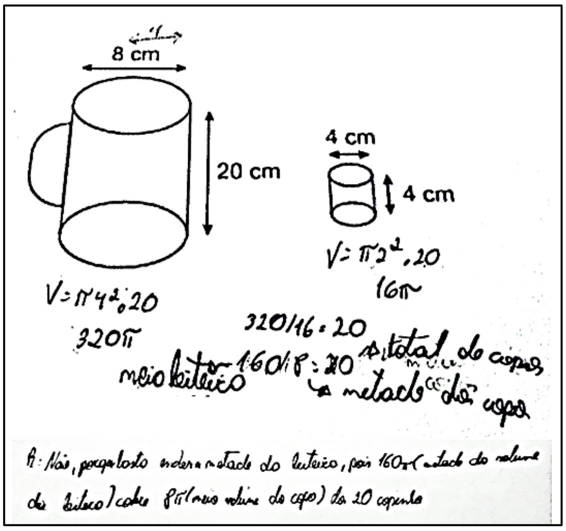
Fonte: Folha de Registro do Estudante A4, Mom. 3, Exerc. 1, 2020.

O processo resolutivo do estudante A2 mesmo que apresentado um registro discursivo semelhante a outros, diferencia-se dos demais pela omissão do registro da constante irracional Pi em seus tratamentos de volume. A ausência dessa constante na operacionalização do volume dos cilindros não altera a relação de proporção entre ambos, mas facilita os tratamentos matemáticos desse processo como é possível observar nas resoluções dos estudantes A3, A5, A10 e A11. O que merece destacar é o fato desse estudante ter comparado o volume dos cilindros a unidades bidimensionais, uma percepção clara do distanciamento cognitivo entre a compreensão entre quantificar o volume e o que esse registro representa dentro do estatuto do objeto geométrico.

Como a proposta desse exercício é se basear no registro discursivo do estudante, a solução apresentada pelo estudante A2 será considerada correta com ressalvas nas interações das apreensões em geometria.

Quanto as demais resoluções, ocorreram através da dinâmica em apresentar um conjunto de registros numéricos que de certa forma validasse o registro na língua natural, de modo a evidenciar o erro da Dona Maria em querer encher a leiteira até sua capacidade máxima. A dificuldade em transcrever uma resolução matemática num discurso que predominando o uso do registro na língua natural em relação aos registros numéricos pudesse reconhecer interação com os tratamentos matemáticos realizados, foi constatado nas conclusões de todo os estudantes pesquisados com exceção da solução apresentada pelo aluno A10 que em comparação com as demais respostas fez uso dos resultados obtidos para argumentar sua conclusão, como mostra a Figura 66.

Figura 66 - Resolução apresentada pelo Estudante A10 no Exercício 3 - M2



Fonte: Folha de Registro do Estudante A10, Mom. 2, Exerc. 3, 2020.

É possível identificar mesmo que seja sutil sua visualização, a coordenação do registro discursivo com os tratamentos matemáticos realizados pelo estudante A10 caracterizam uma iniciação para a uma tomada de consciência de que é necessário articular entre dois registros no qual um deles sendo o seu próprio discurso possa por si só apresentar elementos baseados no estatuto do objeto geométrico em questão a fim de sustentar sua colocação (ALMOLOULD, 2013, p. 128).

Quanto aos demais fica evidente que a carência de conexão entre o registro discursivo e os registros provenientes dos tratamentos matemáticos. Essa dificuldade de produzir um registro discursivo que independente das informações que estejam ao seu redor, para Duval (2013) é sinal de uma aprendizagem que teve nos monorregistros sua maior participação na busca por compreensão do objeto geométrico (DUVAL, 2013, p. 29).

Quadro 33 - Representação dos registros discursivos e seus respectivos tratamentos matemáticos

Estudante	Registro discursivo apresentado como solução do exercício 3 – Bloco de Atividade 2	Tratamentos Matemáticos expressos pelos Estudantes no exercício 3 – Bloco de Atividade 2
A1	“*Se ela quisesse encher os copos sim, porém ela só quer até a metade, não é necessário encher a leiteira*”.	Volume da leiteira: $V \cong 3{,}14.4^2.20 \cong 1004{,}8$ Volume do copo: $V \cong 3{,}14.2^2.4 \cong 50{,}24$

A2	*"Basicamente a Dona Maria só precisaria encher a metade da leiteira e não inteira".*	Volume da leiteira: $$V = 4^2.20 = 320cm^2$$ Volume do copo: $$V = 2^2.4 = 16cm^2$$ $$16 \times 10 = 160cm^2$$ Segue então: $$\frac{320}{160} = 2$$
A3	*"Suficiente encher até a metade da leiteira".*	Volume da leiteira: $$V = \pi.4^2.20 = 320\pi$$ Volume do copo: $$V = \pi.2^2.4 = 16\pi$$ Segue então: $$\frac{320\pi}{16\pi} = 20$$
A4	*"Então ela está certa".*	Volume da leiteira: $$V \cong 3{,}14.4^2.20 \cong 1004{,}8$$ Volume do copo: $$V \cong 3{,}14.2^2.4 \cong 50{,}24$$ Segue então: $$\frac{1004{,}8}{20} = 50{,}24$$
A5	*"Para encher 20 copinhos pela metade, Dona Maria só precisa encher a leiteira até a metade".*	Volume da leiteira: $$V = \pi.4^2.20 = 320\pi$$ Volume do copo: $$V = \pi.2^2.4 = 16\pi$$
A6	*"Dona Maria está errada, deve encher de água apenas até metade da leiteira".*	Volume da leiteira: $$V = \pi.4^2.20 = 320\pi$$ Volume do copo: $$V = \pi.2^2.4 = 16\pi$$
A7	*"Ela está errada, é necessário apenas a metade".*	Volume da leiteira: $$V \cong 3{,}14.4^2.20 \cong 1004{,}8$$ Volume do copo: $$V \cong 3{,}14.2^2.4 \cong 50{,}24$$ Segue então:

		Volume de 20 copos pela metade é igual ao volume de 10 copos cheios: $V_{20copos} \cong 50{,}24.10 \cong 502{,}4$
A8	*“Não, pois se a leiteira é 20 vezes maior que o copinho, ela cheia vai encher 20 copinhos inteiros e se ela que que apenas a metade, então o conteúdo da leiteira dever ser reduzido pela metade também’.*	Volume da leiteira: $V \cong 3{,}14.4^2.20 \cong 1004{,}8$ Volume do copo: $V \cong 3{,}14.2^2.4 \cong 50{,}24$ Segue então: $\frac{1004{,}8}{50{,}24} \cong 20$
A9	*“O volume é 20 vezes o do copo, mas é para encher o copo só pela metade, então meia leiteira é suficiente”.*	Volume da leiteira: $V \cong 3{,}14.4^2.20 \cong 1004$ Volume do copo: $V \cong 3{,}14.2^2.4 \cong 50$ Segue então: $\frac{1004}{50} \cong 20$
A10	*“Não, porque basta encher a metade da leiteira, pois 160π (metade do volume da leiteira) cobre 8π (meio volume do copo) dos 20 copos”.*	Volume da leiteira: $V = \pi.4^2.20 = 320\pi$ Volume do copo: $V = \pi.2^2.4 = 16\pi$ Segue então: Copos cheios: $\frac{320}{16} \cong 20$ Copos cheios até a metade: $\frac{160}{8} \cong 20$
A11	*“Não, ela necessitaria apenas de metade da leiteira com água para encher 20 copinhos pela metade”.*	Volume da leiteira: $V = \pi.4^2.20 = 320\pi$ Volume do copo: $V = \pi.2^2.4 = 16\pi$ Segue então: $\frac{320\pi}{16\pi} = 20$

Fonte: Produção do autor, 2020.

Quadro 34 -Resultado das Resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correta
A2	Correta
A3	Correta
A4	Incorreta
A5	Correta
A6	Correta
A7	Correta
A8	Correta
A9	Correta
A10	Correta
A11	Correta

Fonte: Produção do autor, 2020.

O quadro a seguir apresenta um resumo das análises realizadas no exercício 1 do Bloco de Atividade 3 quanto as apreensões em geometria identificadas nos processos de resolução desenvolvidos pelos 11 estudantes que participaram dessa pesquisa.

Quadro 35 - Análise do Exercício 1 - M3

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X	X		X		
A2	X			X		
A3	X	X		X		
A4	X					
A5	X	X		X		
A6	X	X		X		
A7	X	X		X		
A8	X	X		X		
A9	X	X		X		
A10	X	X		X		
A11	X	X		X		
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

O número significativo de resoluções consideradas corretas evidenciou a interação eficiente entre as apreensões perceptiva (AP), discursiva (AD) e operatória (AO), porém expos uma fragilidade quanto a elaboração de um registro discursivo que por si só seja capaz de sustentar uma afirmação. Conforme o Quadro 34, é perceptível a ausência de argumentos construídos a partir dos tratamentos matemáticos, bem como de informações próprias do objeto geométrico em questão, e portanto, mesmo dando a entender de que a Dona Maria precisava encher a leiteira até a metade, para um número considerável de respostas ficaria o dúvida, porquê? É claro que se olharmos para os tratamentos matemáticos saberíamos o porquê, mas didaticamente é importante que construímos com nossos alunos a prática de elaborar argumentações mais concisas por si só.

7.3.2 Exercício 2

Pela análise a priori é essencial que exista a interação da apreensão perceptiva (AP) sobre as formas das figuras com a apreensão discursiva (AD), uma vez que a imagem contemplando dois objetos geométricos que compartilham de algumas características comuns, como por exemplo a figura plana que compõe as suas respectivas bases, esses objetos possuem identidades geométricas distintas.

A aparente simplicidade das formas geométricas envolvidas não descaracteriza os tratamentos geométricos sobre as figuras tridimensionais inseridas na questão, além do mais é pela atuação da apreensão operatória mereológica (AOM), mais especificamente pela reconfiguração intermediária (RI) que é possível cognitivamente reconhecer elementos geométricos de dimensões inferiores ao objeto estudado.

Em particular, todos os participantes da pesquisa quando compartilhavam sua experiencia com o bloco de atividade e descreviam o papel da imagem em suas tomadas de decisões, foi comum associarem o papel da imagem simplesmente como sendo uma forma para se trazer as medidas para a realidade do exercício, de modo que se as medidas estivessem no enunciado o registro figural seria desnecessário, como relatam os estudantes A1, A7, A8, A10 e, A11.

Quadro 36 - Comentário dos Estudantes A1, A7, A8, A10 e A11 a respeito da figura no Exercício 2 - M3

A1: O que me chamou atenção mesmo foram as medidas.

A7: Mas para obter os dados mesmos, é um cone em cima de um cilindro, se estivesse escrito daria para identificar também.

A8: A importância da figura para mim foi dela trazer as informações de medidas.

A10: De dar as dimensões, pois quanto a imagem do cilindro e do cone estavam no enunciado e são figuras básicas.

A11: Pela facilidade de ter todas as medidas nela.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio dos estudantes A1, A7, A8, A10 e A11, Mom. 3, Exerc. 2, 2020.

Por outro lado, o registro figural para os estudantes A3, A5, A9 foi essencial para a manipulação dos elementos da figura a fim de estruturar uma resolução válida, como mostra o Quadro 36 com os seus relatos.

Quadro 37 - Comentário dos Estudantes A3, A5 e A9 a respeito da figura no Exercício 2 – M3

A3: O que me chamou a atenção foi que deu para ver a diferença da altura do cone e do cilindro bem certinho, me ajudou muito para identificar as medidas. A5: Posso dizer que a composição das figuras mostrando como dividi-las no cálculo fazendo a parte de baixo e depois a parte de cima e as informações de medidas, me ajudou muito. A9: Me deu uma noção do que tinha que fazer, das formas e que tinha que fazer o volume do cone e do cilindro, se não tivesse seria muito difícil associar na cabeça a forma como o silo era.

Fonte: Transcrição da gravação de áudio dos estudantes A3, A5 e A9, Mom. 3, Exerc. 2, 2020.

É possível que o contato rotineiro com uma geometria métrica possa ser um dos motivos para que dentre todos, os registros numéricos compondo a figura tenham se destacado com maior intensidade. Duval (2014) expõe que essa face quantitativa da geometria possui uma inegável importância na aprendizagem dos conceitos geométricos, mas que não deveria ser o única face que os estudantes deveriam contemplar no ensino, pois o desenvolvimento cognitivo da visualização permeia necessariamente pela experiência da desconstrução dimensional, favorecendo assim o reconhecimento das unidades geométricas e suas relações com o objeto representado (DUVAL, 2014, p. 33-34).

A identificação dos registros quantitativos inserido em um discurso representa a primeira ação para que se componha um complexo processo de significação e como consequência de compreensão dos registros observados. No item (a) os estudantes em geral destacaram que no enunciado os registros numéricos representando a área plantada e a sua produtividade seriam as informações mais relevantes, por outro lado, os sujeitos A2, A3, A5, A6, A10 e A11 evidenciaram também o fato de ser conhecido a relação de massa e volume do produto em questão.

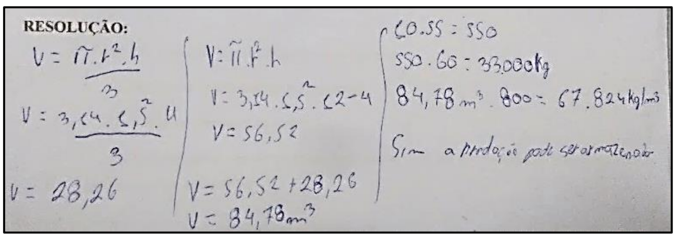
O item (b) buscava identificar os pontos que se destacaram do registro figural dentro do processo resolutivo e como já descrito acima a relação com que os estudantes estabeleceram com a imagem, os pesquisados A1, A2, A4, A5, A6, A7, A8, A10 e A11 apontaram para a percepção das medidas e a sua disposição no registro figural, já os demais além dessas observações afirmaram que as formas geométricas foram fundamentais para o entendimento da questão.

A particularidade desse exercício em expor uma variedade de informações, é imprescindível que exista clareza quanto a proposta da questão. O item (c) buscando extrair a certeza de tinham compreendido a dinâmica do problema temos que todos descreveram corretamente o que deveriam determinar, com exceção dos estudantes A1 e A3 que deixaram em branco esse item.

Para surpresa da análise posteriori, dos 11 pesquisados apenas os estudantes A1, A8 e A9 apresentaram uma tentativa de justificativa para a questão e desses, somente A1 e A9 fizeram uso de um registro discursivo. Como a proposta era de justificar se o silo seria suficiente ou não quanto a sua capacidade para armazenar a colheita descrita, os sujeitos A3, A5, A6 e A10 desenvolveram corretamente os tratamentos pertinentes referentes a resolução numa perspectiva de resultados numéricos porém, não descreveram nenhuma justificativa em registros de língua natural e por fim A2, A4, A7 e A11 baseado pela análise preliminar, suas soluções apresentaram significativas discordâncias e portanto suas resoluções foram consideradas incorretas.

A resolução apresentada pelo estudante A7 sendo uma das resoluções categorizadas como incorreta, se destaca não por discordâncias entre os tratamentos matemáticos, mas sim, na identificação de um único elemento geométrico que sendo equivalente aos dois objetos geométricos intrínsecos no registro figural desencadeou uma sequência de interpretações desvinculadas com a proposta descrita no exercício. O fato de que o segmento (1D) cuja propriedade geométrica representa a distância do ponto central (0D) do círculo da base (2D) a qualquer ponto do perímetro dessa figura plana foi tomado como sendo o segmento que representa a maior distância entre dois pontos dessa mesma circunferência, podendo assim apontar uma sútil ruptura entre a apreensão discursiva (AD) e a apreensão operatória mereológica (AOM).

Figura 67 - Resolução apresentada pelo Estudante A7 no Exercício 2 – M3

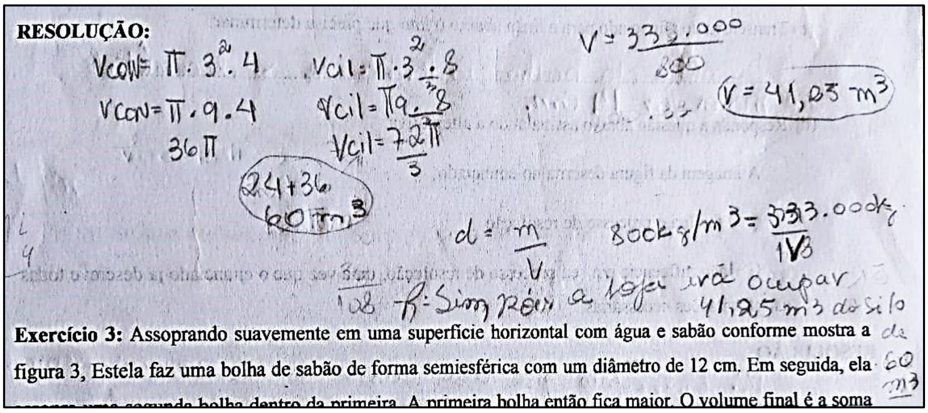


Fonte: Folha de Registro do Estudante A7, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

O estudante A11 demonstrou coerência nos tratamentos matemáticos aplicados na resolução desse exercício, e ao afirmar que a capacidade do silo era suficiente para o armazenamento da colheita não estaria realizando uma falsa afirmação. Porém a base de dados utilizado para construir e sustentar tal fato possui uma distorção quanto a manipulação do estatuto dos objetos, pois ao tomar como verdade que o volume do cilindro deveria ser considerado como sendo a terça parte do cone constrói uma rede de resultados distante da realidade proposta pelo problema.

É possível que o registro figural tendo discordância quanto a escala de medidas das unidades figurais envolvidas, tenha colaborado para que apreensão perceptiva (AP) sobre a forma permitisse sem exercer a atitude da dúvida ao acesso equivocado das propriedades dos objetos geométricos pela apreensão discursiva (AD). Uma vez que tanto o cilindro quanto o cone possuíam a mesma base, porém a altura do cone era a metade da altura do cilindro não sendo difícil dentro das propriedades geométricas intuir que no mínimo a capacidade do cilindro era maior do que a do cone. Na Figura 68 é apresentada a resolução desse estudante.

Figura 68 - Resolução apresentada pelo Estudante A11 no Exercício 2 – M3



Fonte: Folha de Registro do Estudante A11, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

É possível notar na resolução apresentado pelo estudante A4, ao contemplar todos os registros numéricos e algébricos utilizados por ele, que em sua base interpretativa sua solução apresentava uma certa coerência com o fato de que seu último registro numérico ter sido resultado do que suspeitava ser a massa de grãos a serem colhidos que ao serem divididos pela capacidade das sacas que seriam utilizadas obteve o número 55, que no contexto do enunciado representava exatamente a produtividade por hectare.

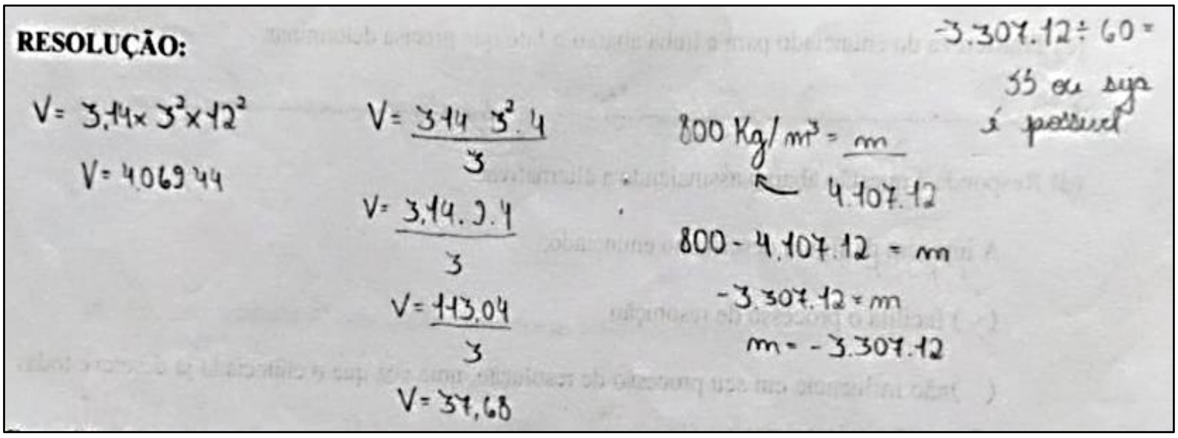
O seu registro discursivo mesmo sendo limitado a poucos símbolos, em sua essência compartilhava da mesma posição da análise a priori, porém não há dúvida do excesso de desacordos cometidos por esse estudante em sua resolução.

Observa-se que o tratamento geométrico coordenado pela apreensão operatória mereológica (AOM) em seu processo de descontruir a figura a fim de conduzir a percepção dos elementos em dimensões inferiores ao objeto dado, teve forte influência da apreensão perceptiva (AP) de modo a trazer para a resolução registros inválidos como por exemplo, a altura do cilindro.

Por outro lado, o uso de uma relação inválida para o volume do cilindro de modo a estabelecer uma vasta diferença quantitativa quando comparado com o volume do cone expõe ausência momentânea da apreensão perceptiva em detectar estranheza entre os valores encontrado e as formas geométricas tridimensionais contempladas no mesmo registro figural.

De um modo geral essa resolução demonstra de acordo com a análise preliminar falhas específicas em todas as apreensões utilizadas em seu processo resolutivo caracterizando assim uma compreensão parcial e confusa quanto aos objetos matemáticos e seus respectivos registros, conforme a apresentação de sua resolução abaixo na Figura 69.

Figura 69 - Resolução apresentada pelo Estudante A4 no Exercício 2 – M 3

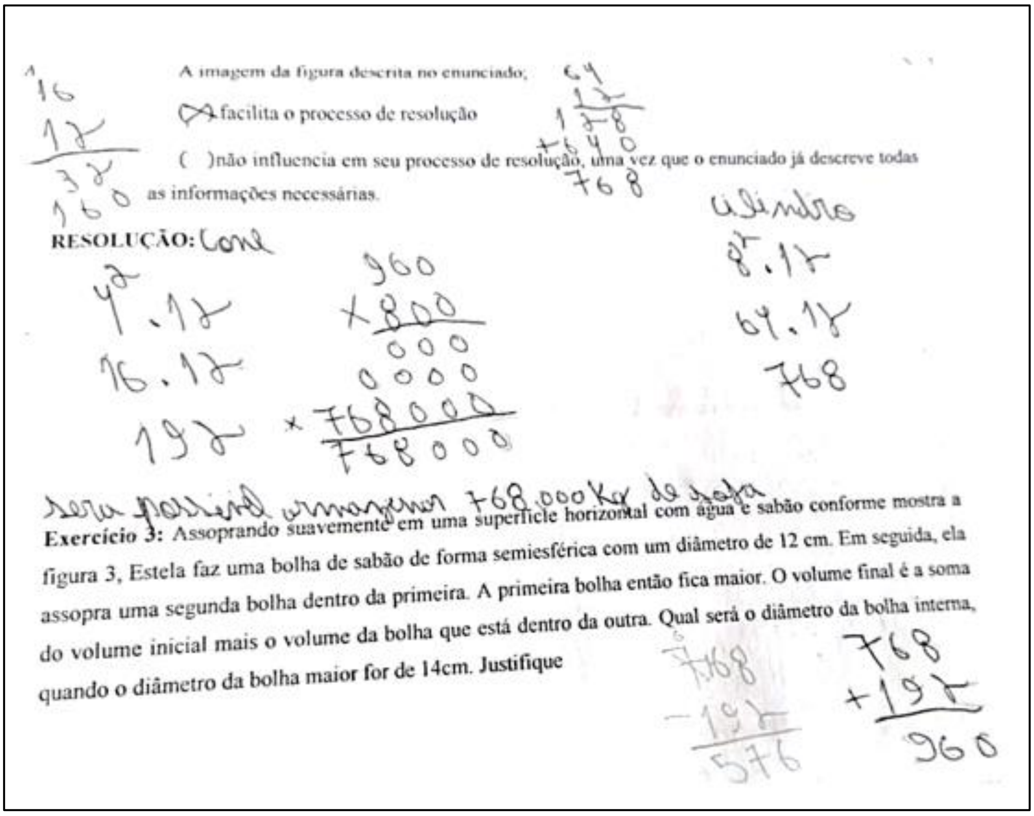


Fonte: Folha de Registro do Estudante A4, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

A resolução apresentada pelo estudante A2 direciona a preocupação de Duval quanto a compartimentalização dos registros e das consequências negativas quanto a diferenciação entre o objeto matemático e suas representações, de modo que fora das situações compartimentalizadas as interações entre as apreensões se dão de forma fragmentada e distante da compreensão dos conceitos relacionados (DUVAL, 2009, p. 82).

É notável que existiu o reconhecimento pela apreensão perceptiva (AP) das formas geométricas envolvidas na estrutura do silo, em vista do tratamento matemático de adicionar os supostos registros numéricos de seus volumes. Quanto a apreensão discursiva é justificável sua completa inoperância no reconhecimentos dos objetos a partir de seu estatuto e pôr fim a apreensão operatória mereológica (AOM) participou de forma pontual e limitada, coordenada somente pela apreensão perceptiva (AP), como por exemplo a decomposição da figura representativa do silo em duas figuras tridimensionais $(3D \rightarrow 3D)$, mas não foi atuante na desconstrução em dimensões inferiores ao objeto dado, como exemplo basta considerar o segmento da altura do cilindro (1D) como sendo a o segmento de todo o objeto cuja representação é o contexto de um silo.

Figura 70 - Resolução apresentada pelo Estudante A2 no Exercício 2 - M3


A imagem da figura descrita no enunciado;

(X) facilita o processo de resolução

( )não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO: Cone

$4^2 \cdot 12$

$16 \cdot 12$

192

Cilindro

$8^2 \cdot 12$

$64 \cdot 12$

768

$960 \times 800 = 768000$

será possível armazenar 768.000 kg de soja

Exercício 3: Assoprando suavemente em uma superfície horizontal com água e sabão conforme mostra a figura 3, Estela faz uma bolha de sabão de forma semiesférica com um diâmetro de 12 cm. Em seguida, ela assopra uma segunda bolha dentro da primeira. A primeira bolha então fica maior. O volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra. Qual será o diâmetro da bolha interna, quando o diâmetro da bolha maior for de 14cm. Justifique

$768 - 192 = 576$

$768 + 192 = 960$

Fonte: Folha de Registro do Estudante A2, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

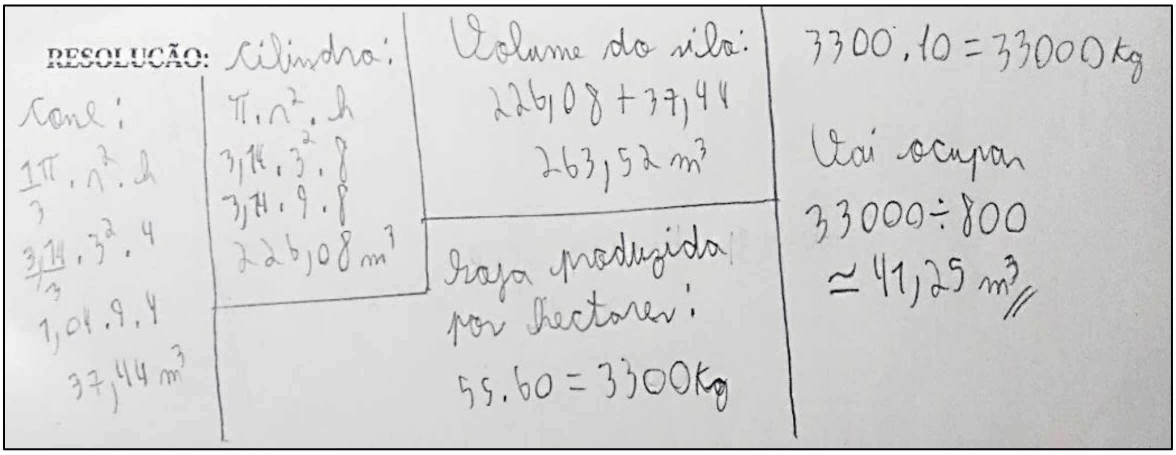
Almouloud (2013) ao refletir sobre o fato de que a maior parte dos problemas envolvendo a aprendizagem de geometria é de natureza didática e linguística, expõe uma realidade cada vez mais frequente em que o estudante apresenta dificuldade em produzir um registro na língua natural de modo que exista fundamentação em seu discurso (ALMOULOUD, 2013, p.130).

Fato este identificado nas soluções apresentadas pelos estudantes A3, A5, A6 e A10 que executaram todos os tratamentos matemáticos necessários para que a partir deles, estabelecer os argumentos necessários para descrever suas justificativas, porém não o fizeram

A organização dos registros numéricos e algébricos e mesmo não havendo registros figurais auxiliares, é possível identificar a partir dos tratamentos realizados a interação entre as apreensões perceptiva (AP), discursiva (AD) e operatória mereológica (AOM). A ausência de um registro discursivo argumentativo estaria vinculada principalmente a falta de prática do qual os problemas não se baseiam somente em resultados numéricos, mas idealizam também uma conclusão discursiva (ALMOULOUD, 2013, p.130).

Como é possível perceber por exemplo, no processo resolutivo apresentado pelo estudante A5 conforme a Figura 71.

Figura 71 - Resolução apresentada pelo Estudante A5 no Exercício 2 - M3



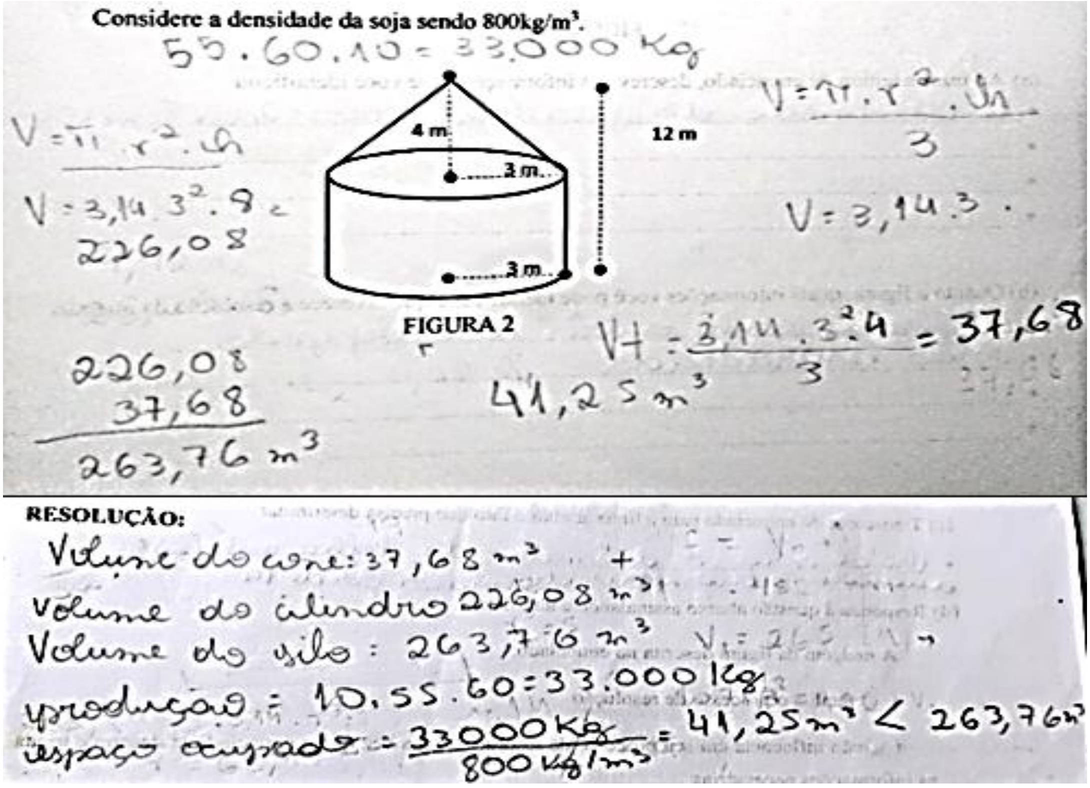
Fonte: Folha de Registro do Estudante A5, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

Por fim, as resoluções que buscaram apresentar uma argumentação ao final dos tratamentos necessários para se compor uma resposta de modo que as representações numéricas fizessem parte do registro argumentativo, temos as soluções apresentadas pelos estudantes A1, A8 e A9.

Foi possível identificar que o sujeito A8 ao construir sua justificativa não se utilizou de registro na língua natural, mas fez uso de uma expressão numérica do qual destaca a desigualdade a favor da capacidade do silo, na intenção de afirmar positivamente para a possibilidade de espaço para armazenar a colheita dentro do local.

Tendo como base a análise a priori e a clareza com que representação da desigualdade impõe no contexto do processo resolutivo, uma vez que os registros numéricos estavam bem definidos a partir do uso do registro discursivo a solução apresentada configura-se correta.

Figura 72 - Resolução apresentada pelo Estudante A8 no Exercício 2 - M3

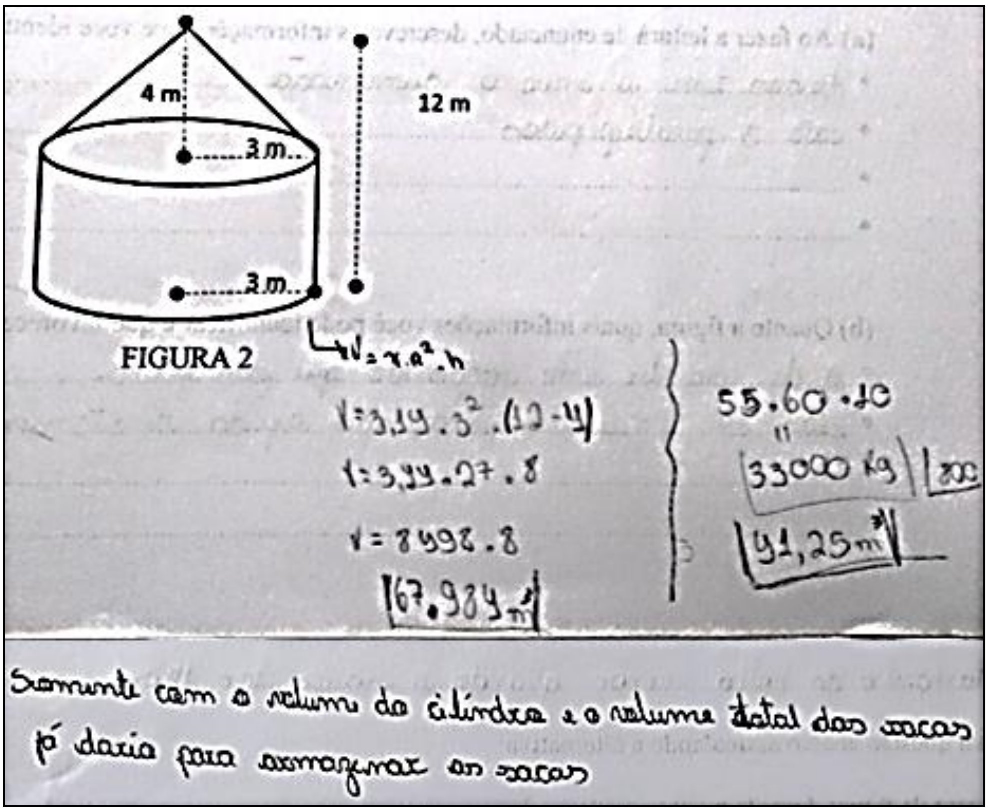


Fonte: Folha de Registro do Estudante A8, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

Quanto as resoluções que apresentaram uma justificativa se utilizando do registro da língua natural, mesmo não havendo um discurso significativo do qual fizesse uso dos registros numéricos determinados, é possível afirmar que o estudante A9 ao se limitar a aplicação da relação de volume do cilindro e do volume de grãos que a plantação poderia fornecer, mostrou ter compreendido o objetivo do problema, pois bastou comparar as grandezas encontradas para que já fosse possível definir uma posição frente a pergunta do exercício.

É possível afirmar que de acordo com a pré-análise a eficiência dos tratamentos geométricos apresentados evidencia uma forte interação da apreensão discursiva (AD) que junto com a apreensão perceptiva (AP) não só coordenaram a ação da apreensão operatória mereológica (AOM) como buscaram o mínimo custo operacional para estabelecer a resolução almejada.

Figura 73 - Resolução apresentada pelo Estudante A9 no Exercício 2 - M3

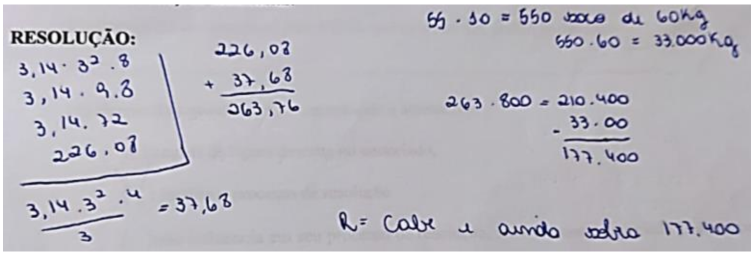


Fonte: Folha de Registro do Estudante A9, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

É possível notar na resolução apresentado pelo estudante A1 um direcionamento diferente dos tratamentos matemáticos, que na análise a priori buscava determinar os registros numéricos equivalentes aos volumes da colheita e do silo. Mas nesse caso, a resolução buscou estabelecer uma relação com a grandeza da massa, do qual ao utilizar o registro quantitativo da densidade do grão para ambos os sujeitos – volume de grão a colher e o volume do silo, foi possível expor de um lado a massa total que representará a colheita e do outro a massa possível do mesmo grão que poderá ser armazenado no silo. A partir da diferença positiva a favor do silo o sujeito A1 conclui afirmando ser possível utilizar a capacidade do silo para atender a expectativa do produtor.

Assim como nas resoluções A8 e A9, as apreensões identificadas na análise a priori para que houvesse não só a compreensão dos tratamentos matemáticos envolvidos, mas também uma solução argumentativa coerente com a dinâmica do exercício. A proposta apresentada pelo estudante A1 ao contemplar esses critérios além configurar uma solução correta, também se atribui as apreensões perceptiva (AP), discursiva (AD) e operatória mereológica (AOM) no desenvolvimento da resolução.

Figura 74 - Resolução apresentada pelo Estudante A1 no Exercício 2 - M3



Fonte: Folha de Registro do Estudante A1, Mom. 3, Exerc. 2, 2020

A seguir, um quadro com os 11 estudantes e o resultado da análise quanto a sua resolução:

Quadro 38 - Resultado das resoluções por estudante

Estudante	Resolução
A1	Correta
A2	Incorreta
A3	Incorreta
A4	Incorreta
A5	Incorreta
A6	Incorreta
A7	Incorreta
A8	Correta
A9	Correta
A10	Incorreta
A11	Incorreta

Fonte: Produção do autor, 2020.

Com base nos dados obtidos, foi possível identificar as apreensões em geometria que permearam o processo resolutivo construído nesse terceiro momento pelos 11 estudantes que participaram dessa pesquisa com relação ao exercício 2 do Bloco de Atividade 3:

Quadro 39 - Análise do Exercício 2– M3

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X	X		X		
A2	X					
A3	X	X		X		
A4	X					
A5	X	X		X		
A6	X	X		X		
A7	X					
A8	X	X		X		
A9	X	X		X		
A10	X	X		X		
A11	X			X		
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

Apesar do Quadro 38 mostrar uma expressiva quantidade de resoluções consideradas incorretas de acordo com a proposta do exercício, metade dessas resoluções falharam em desenvolver um argumento em língua natural, porém seus tratamentos matemáticos se mostraram eficientes e portanto as interações entre as apreensões perceptiva (AP), discursiva (AD) e operatória (AO) não só existiram, como também se mostraram eficientes. Por outro lado, a simples ausência do registro discursivo expõe uma fragilidade no ensino da geometria em desenvolver a prática argumentativa.

As resoluções que apresentaram falhas nos tratamentos geométricos notoriamente foi constatado que os estudantes não contemplavam claramente do estatuto dos objetos geométricos tridimensionais, mostrando fragilidade e até mesmo ociosidade na interação da apreensão discursiva, o que justificaria as escolhas geométricas descontextualizadas para compor os tratamentos matemáticos.

7.3.3 Exercício 3

Com esse exercício, considerando que o registro figural buscou uma aproximação com a realidade descrita no enunciado, tornou-se um fator de grande interesse para essa pesquisa quanto as tomadas de decisões realizadas a partir do olhar icônico sobre a sua forma. Uma vez que os elementos geométricos envolvidos na sua construção gráfica não respondem em escala métrica a situação idealizada.

Por outro lado, ao associar os registros envolvidos nesse problema e dessa forma ter a compreensão que os tratamentos matemáticos estão vinculados ao mesmo objeto geométrico, mesmo que a análise a priori tenha estimado um processo resolutivo baseado na descrição mais completa do raciocínio, ações intuitivas são esperadas nesse exercício.

Quando questionados no item (a) em relação as informações ditas no enunciado que considerariam relevantes no processo resolutivo do exercício, os estudantes A3, A5, A6, A7, A10 e A11 definiram que os diâmetros das semiesferas lhe apresentavam como destaque no discurso, já os demais, ou seja, A1, A2, A8 e A9 além dos diâmetros estabelecidos, a disposição das figuras geométricas também foram destaque quanto a leitura e interpretação do registro discursivo inicial.

A aproximação do registro figural ao contexto real descrito no enunciado desse exercício, tende a não destacar caracterizações que normalmente as figuras geométricas expõe. Como consequência a imagem pode ser subestimada quanto a sua interação com a compreensão dos tratamentos matemáticos necessários para se fazer uma resolução correta. Como sugere o item (b) desse exercício ao querer identificar o pontos relevantes do registro figural, do qual os estudantes A7 e A9 afirmaram não ter encontrado nada que fosse relevante na figura, porém, os demais expressaram que a percepção da forma como as semiesferas estavam envolvidas foi o que se destacou no elemento figural desse problema.

Com exceção do estudante A1 que deixou em branco o item (c) desse exercício, que tinha como objetivo identificar a compreensão sobre a proposta do problema, todos os demais pesquisados evidenciaram que o objetivo se baseava em determinar a medida do diâmetro da bolha interna, o que é favorável para o processo de resolução do exercício.

Quando Duval (2012b) descreve que independente da figura inserida num contexto geométrico vai existir as interações interpretativas sobre ela e que a compreensão gestáltica da imagem está relacionada a eficiência dessas interações (DUVAL 2012, b, p. 120-121). O que justificaria opiniões tão distintas em relação a imagem apresentada nesse exercício como por exemplo dos estudantes A1, A3, A9 e A10

Como já mencionado, cada pesquisado era convidado a descrever a sua experiencia ao final de fase exploratória destacando sempre a sua interação com a imagem contida no exercício, segue no quadro abaixo a transcrição dos estudantes A1, A3, A9 e A10 quanto ao elemento figural do exercício 3, momento 3 – Bloco de Atividade 3.

Quadro 40 - Comentário dos Estudantes A1, A3, A9 e A10 a respeito da figura no Exercício 3 – M3

A1: "A bolhinha pequena é bem menor e assim que li o enunciado eu achei a bolinha do meio era de 2 cm e olhando a figura eu vi que ela era bem menor e poderia ser".

A3: A figura me confundiu um pouco, por lendo o enunciado eu acreditei que a bolha menor tinha a metade do tamanho da maior, mas na figura faz parecer que algo muito menor, então é algo que me deixo muito confusa".

A9: "Nenhum destaque, para mim ela foi ilustrativa, só lendo o enunciado eu já entendi, mesmo antes de ver a figura".

A10: "Foi de confirmar o formato semiesférico, que não estava no enunciado e de que a bolhinha inserida depois estava exatamente no meio".

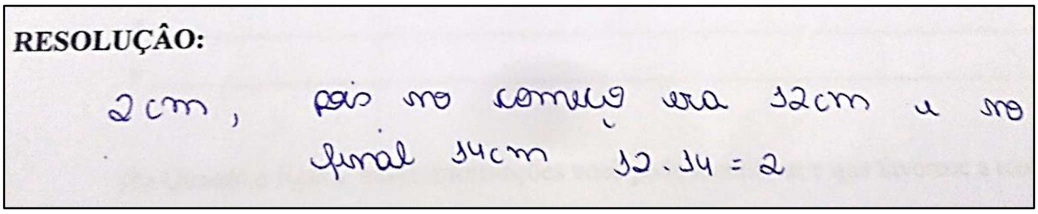
Fonte: Transcrição da gravação de áudio dos estudantes A1, A3, A9 e A10, Mom. 3, Exerc. 3, 2020.

Quanto ao processo de identificação das apreensões em geometria que participaram do desenvolvimento da visualização, construção e raciocínio dos 11 participantes dessa pesquisa com relação a esse exercício, por meio da análise a priori, foram consideradas necessárias para a realização dessa questão as apreensões perceptiva (AP) e discursiva (AD) de modo a coordenar a apreensão operatória mereológica (AOM) através do tratamento geométrico da reconfiguração intermediária (RI) a fim de estabelecer os elementos geométricos necessários para compor a solução. Todo o processo cognitivo aplicado a esse exercício se faz seguindo a iconicidade da figura, mas numa dimensão quantitativa, caracterizando assim o "olhar agrimensor".

Dos 11 participantes, os estudantes A1, A2, A9 e A11 apresentaram resoluções que não existindo conformidade com a proposta do exercício foram categorizadas como incorretas, já os estudantes A3, A4 e A10 realizaram os tratamentos matemáticos esperados porém não expressaram o objetivo técnico da questão, que era de mostrar a medida do segmento que representava o diâmetro da bolha menor, suas estratégias conduziram somente a mostrar a medida do segmento do raio da semiesfera descrita. Por outro os pesquisados A5, A6, A7 e A8 não só atingiram o objetivo como mostraram traços de intuição quanto ao uso dos tratamentos matemáticos.

A resolução denotada pelo estudante A1 quando associada a sua transcrição quanto ao registro figural (cf. Quadro 34) evidencia total controle da ação perceptiva sobre todo o processo resolutivo, de modo que seu campo visual sobre os elementos geométricos se limitando a figura, ao fazer o uso quantitativo das informações numéricas sem acarear com os elementos figurais numa dimensão interpretativa expõe uma solução que de um certo modo satisfaz o desenho da imagem, mas fica distante do estatuto dos objetos geométricos envolvidos, como mostra a Figura 75 abaixo:

Figura 75 - Resolução apresentada pelo Estudante A1 no Exercício 3 - M3

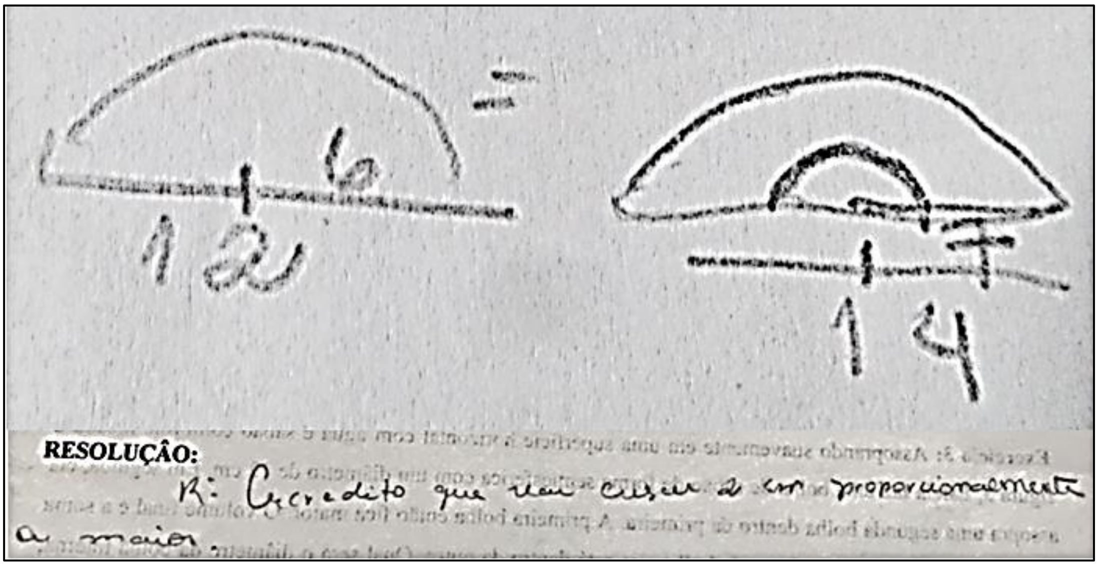

RESOLUÇÂO:

2cm, pois no começo era 12cm e no final 14cm 12 . 14 = 2

Fonte: Folha de Registro do Estudante A1, Mom. 3, Exerc. 3, 2020

De modo muito semelhante ao sujeito A1, o estudante A11 descreve sua metodologia de resolução, denotando novamente a predominância da apreensão perceptiva, bloqueando qualquer ação interpretativa em relação aos elementos figurais intrínsecos no contexto desse problema, como é possível perceber em sua solução.

Figura 76 - Resolução apresentada pelo Estudante A11 no Exercício 3 - M3

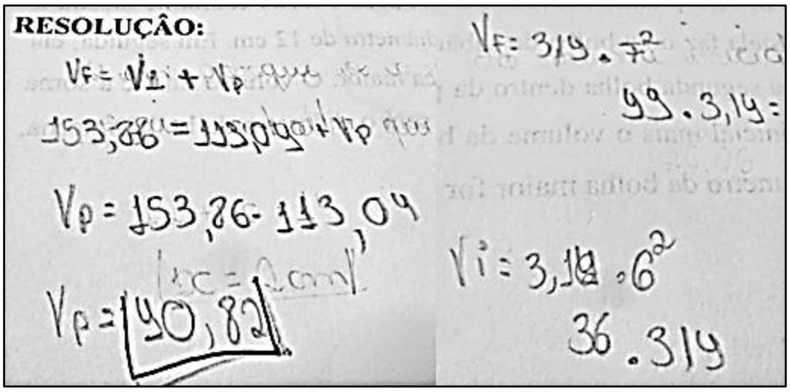


Fonte: Folha de Registro do Estudante A11, Mom. 3, Exerc. 3, 2020

No início de cada etapa exploratória, além do fato de que ao final eles deveriam descrever sua participação, era também reafirmado que existindo dúvida sobre as fórmulas que poderiam ser aplicadas nas resoluções, o professor/pesquisador informaria através do meio utilizado para aplicação da pesquisa. A importância em reafirmar essa situação se sustenta na observação da solução apresentada pelo estudante A9 em utilizar o tratamento matemático para se determinar a área circular, porém o associando ao volume de uma esfera.

É possível constatar desalinhamento entre as apreensões envolvidas na construção dessa proposta resolutiva, uma vez que existe isoladamente indícios de tomadas de decisões coerentes, mas que em conjunto, o resultado fica distante da expectativa para esse exercício, pois mesmo existindo a identificação do segmento correspondente ao raio (1D), o estudante A9 o manipula num tratamento matemático bidimensional e utiliza esse resultado o considerando tridimensional. É clara a disruptura entre os elementos figurais de modo que sua apresentação final da solução evidencia desacordo não só entre conceitos, mas com os registros expressos no exercício, uma vez que o maior diâmetro sendo quantificado por 14 cm, expor o valor de 40,82cm para o diâmetro da bolha menor é no mínimo incoerente com o discurso do problema.

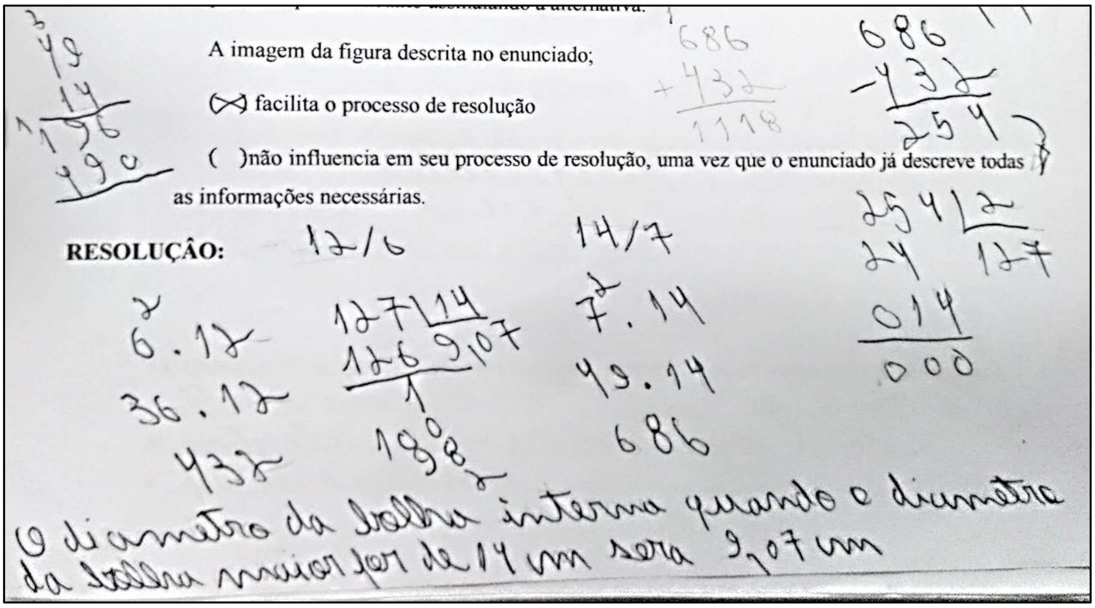
Figura 77 - Resolução apresentada pelo Estudante A9 no Exercício 3 – M3



Fonte: Folha de Registro do Estudante A9, Mom. 3, Exerc. 3, 2020

De forma semelhante ao estudante A9 em relação as discordâncias quanto a manipulação dos elementos figurais, o estudante A2 descreve uma série de tratamentos matemáticos dispondo de quantificações métricas providas por operações sobre o registro figural que numericamente ocorre uma aproximação do valor esperado. Entretanto, a análise da construção do raciocínio mostra uma considerável distorção quanto as propriedades geométricas dos sólidos envolvidos. A proximidade do registro numérico final encontrado por esse estudante com a solução apontada pela pré-análise é possível supor que exista relação com o fato de que suas manipulações sendo realizadas dentro do mesmo elemento geométrico, em particular o segmento que representa a medida do raio (1D), do qual proporcionalmente provém a solução desejada poderia justificar a ocasionalidade.

Figura 78 - Resolução apresentada pelo Estudante A2 no Exercício 3 – M3

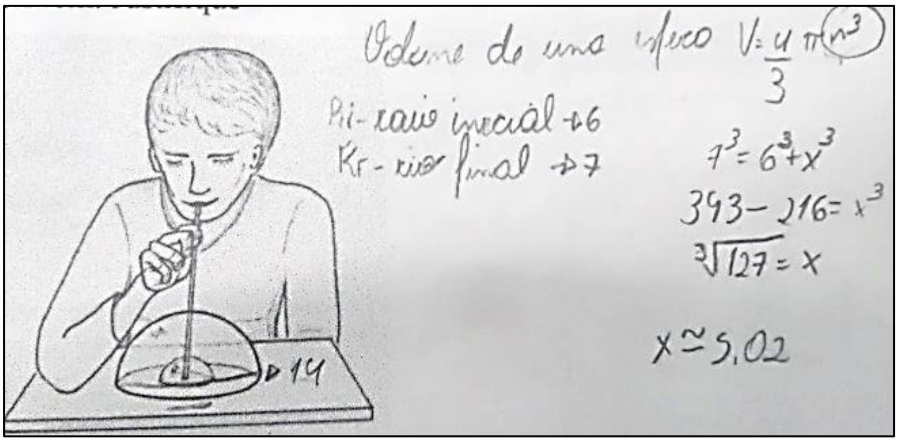


Fonte: Folha de Registro do Estudante A2, Mom. 3, Exerc. 3, 2020

Quanto aos estudantes A3, A4 e A10 por outro lado, as suas resoluções contaram com a interação entre as apreensões de modo que não só conduziram as modificações necessárias geometricamente, dado o fato de que o registro figural nesse exercício ao buscar representar o contexto descrito no enunciado se afasta um pouco da caracterização de um imagem geométrica. É possível identificar através do tratamento matemático aplicado, a compreensão de que se tratando de semiesferas centradas no mesmo ponto e variando somente a medida do raio, de que a ação de estabelecer as relações entre os volumes das semiesferas descritas no registro discursivo presente no enunciado é equivalente a manipular somente as medidas cúbicas dos seus respectivos raios.

Entretanto, mesmo sendo intuitivamente perceptível que os resultados encontrados por esses estudantes seja a medida do raio da semiesfera menor, o fato de não concluírem a solução uma vez que não apresentaram de uma maneira clara a medida do segmento que representa o diâmetro da bolha interna quando o diâmetro da bolha maior for de 14 cm, suas soluções nesse caso foram consideradas incorretas. Na Figura 79 é apresentado como exemplo a solução do estudante A10.

Figura 79 - Resolução apresentada pelo Estudante A10 no Exercício 3 – M3

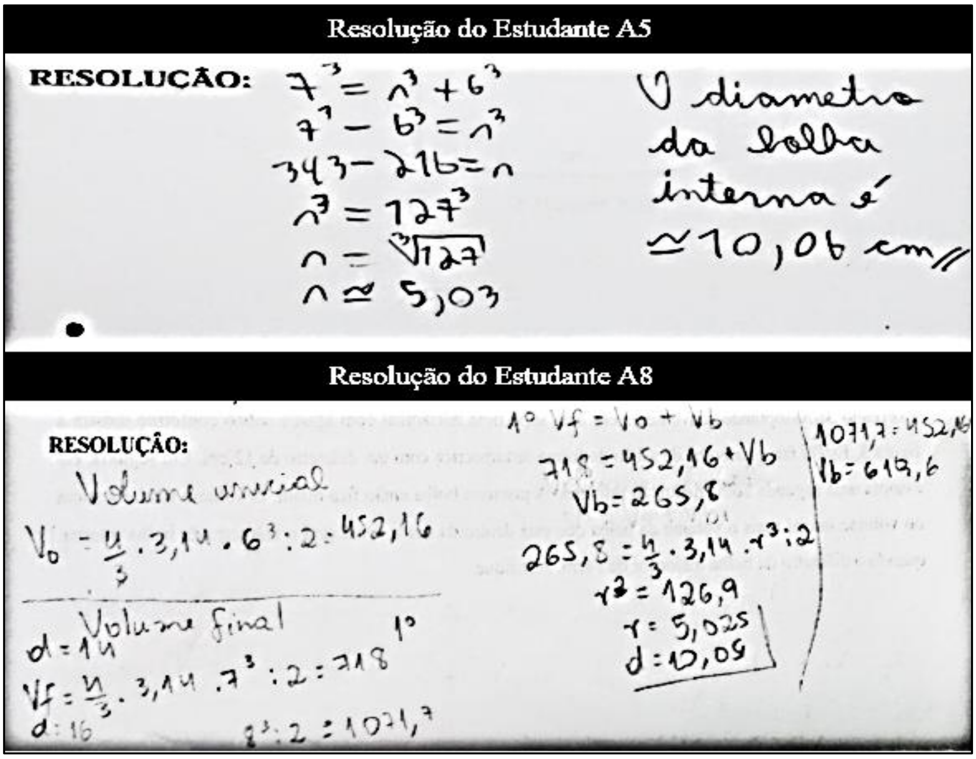


Fonte: Folha de Registro do Estudante A10, Mom. 3, Exerc. 3, 2020

As soluções desenvolvidas pelos estudantes A5, A6, A7 e A8 somente a resolução apresentado pelo sujeito A8 caracteriza semelhança quanto aos tratamentos previstos na análise a priori, os demais incluindo também os sujeitos A3, A4 e 10 buscaram filtrar na relação entre os volumes das semiesferas descritas no exercício somente a grandeza que apresentava variação proporcionando assim uma economia cognitiva quanto aos tratamentos matemáticos a serem aplicados. Entretanto, tal procedimento não abdicou de nenhuma apreensão prevista na análise preliminar para esse exercício.

Importante destacar ainda, que entre as resoluções válidas configuraram-se duas propostas, conforme mostra a Figura 80 ao expor as resoluções dos estudantes A5 e A8.

Figura 80 - Resolução apresentada pelos Estudantes A5 e A8 no Exercício 3 - M3



Fonte: Folha de Registro dos Estudantes A5 e A8, Mom. 3, Exerc. 3, 2020

O quadro 41, apresentado a seguir, foi produzido a partir da análise das resoluções do exercício 3 pertencente ao terceiro Bloco de Atividade, do qual se buscou identificar quais soluções atendiam a proposta do problema, tendo como aporte a análise a priori da questão:

Quadro 41 - Resultado das resoluções por estudantes

Estudante	Resolução
A1	Incorreta
A2	Incorreta
A3	Incorreta
A4	Incorreta
A5	Correta
A6	Correta
A7	Correta
A8	Correta
A9	Incorreta
A10	Incorreta
A11	Incorreta

Fonte: Produção do autor, 2020.

Baseando não só nos registros numéricos e algébricos, mas também nos registros de língua natural, foi possível estabelecer quais apreensões em geometria que nortearam a visualização, a construção e o raciocínio dos participantes dessa pesquisa no que se refere a resolução do exercício 3 do Terceiro Bloco de Atividade.

Quadro 42 - Análise do exercício 3– M3

Estudante	AP	AD	AS	AOM	AOO	AOP
A1	X					
A2	X					
A3	X	X		X		
A4	X	X		X		
A5	X	X		X		
A6	X	X		X		
A7	X	X		X		
A8	X	X		X		
A9	X					
A10	X	X		X		
A11	X					
AP- Apreensão Perceptiva; AD - Apreensão Discursiva; AS - Apreensão Sequencial; AOM - Apreensão Operatória Mereológica; AOO - Apreensão Operatória Ótica; AOP - Apreensão Operatória Posicional						

Fonte: Produção do autor, 2020.

A expressiva quantidade de resoluções consideradas incorretas (cf. Quadro 41) precisa ser contemplada na perspectiva de que das sete soluções que não atenderam a proposta do problema, somente quatro apresentaram distorções quanto a manipulação dos registros, sejam discursivos ou figural. Como consequência imediata as três soluções não validadas configuram a falta da prática em retornar aos registros em língua natural a fim de obter certeza de que atenderam o objetivo do exercício. Por outro lado, a aproximação do registro figural ao contexto do enunciado contribuiu para que as resoluções dos estudantes A1, A2, A9 e A10 desenvolvessem suas operações geométricas e matemáticas baseadas simplesmente na apreensão perceptiva o que justificaria suas conclusões desconexas com a proposta da questão.

8 PRODUTO EDUCACIONAL

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, se apresenta com o objetivo principal de aprimorar a formação do professor de matemática que tem como foco de atuação, a educação básica, logo como parte da proposta do curso, está a criação de um produto educacional que venha a contemplar uma ação pedagógica que tange a pesquisa com a realidade.

8.1 CADERNO DE ATIVIDADES

O produto educacional é um caderno de atividades composto por uma lista de exercícios que abordam os assuntos: poliedro, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera, suas respectivas resoluções e orientações didáticas abordando o processo resolutivo a partir da teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

Utilizando um banco de questões nacionais, com destaque para questões que já foram aplicadas em provas como: Enem, vestibulares e Olimpíadas de Matemática, bem como exercícios extraídos da Coleção - A Matemática do Ensino Médio, vol. 2, de organização do professor Elon Lages Lima e exames de acesso a Instituições Nacionais de Ensino Superior.

O material contemplará de forma sistêmica os assuntos estruturados no aporte teórico dessa pesquisa e que não se caracterizará pela quantidade de exercícios. Tendo como objetivo, abordar dentro do processo resolutivo as apreensões em geometria e suas implicações no desenvolvimento da proficiência geométrica.

Enfim, a escolha dos exercícios contou com todo subsídio teórico pertinente a essa pesquisa e a iniciativa de que cada questão ao olhar do aluno fosse um real desafio, pois segundo Pessoa (2018) *“(...) o desafio representa uma percepção positiva, ou seja, o indivíduo, diante do evento, responde de modo positivo e busca estratégias para solucioná-lo* (PESSOA, 2018, p. 90).

O caderno de atividades é composto por três partes: uma breve introdução da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, propostas de exercícios contemplando as figuras geométricas tridimensionais: poliedro, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera com sugestões direcionadas ao professor quanto a sua aplicação e as resoluções dos exercícios contemplando uma aproximação quanto as apreensões em geometria intrínsecas aos processos resolutivos.

A importância do professor de matemática de querer se aproximar da compreensão da TRRS no contexto de aprendizagem, em particular nos temas que envolve geometria tridimensional, uma vez que o acesso ao seu objeto de trabalho é somente pelas representações, coloca esse caderno de atividades como uma oportunidade de conduzir a realização de exercícios tendo na dimensão a priori orientações que poderão não só construir uma aprendizagem significativa, mas deverão compor o contexto reflexivo do professor no que tange ao uso das representações geométricas como ferramentas essenciais no aprendizado dos alunos.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

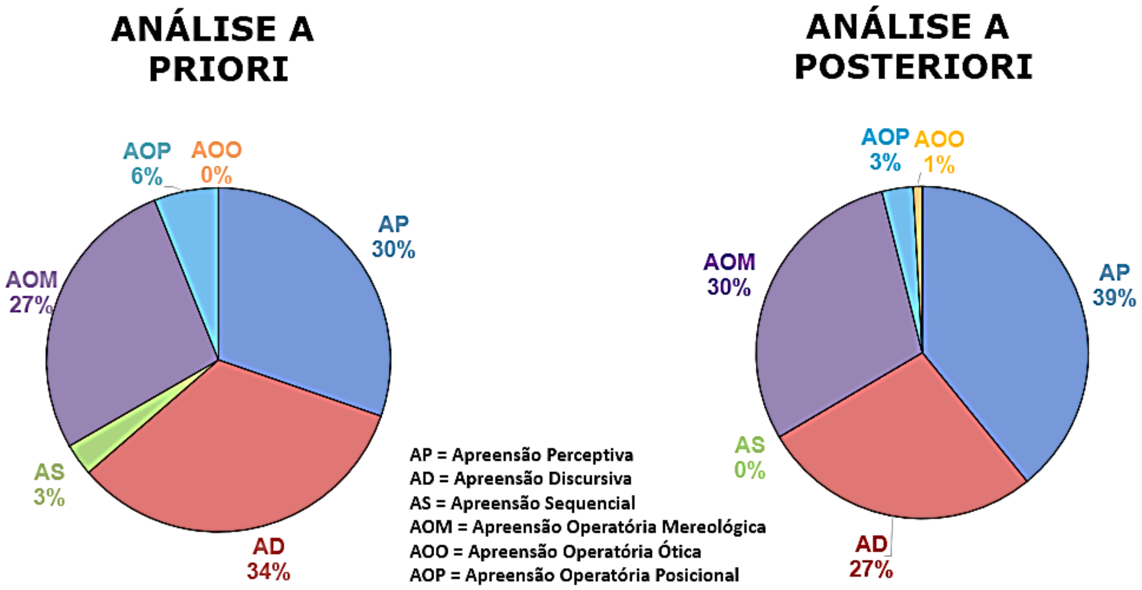
A dificuldade dos estudantes em compreender a temática de Geometria Espacial, afirmação essa formalmente constada na revisão literária desta pesquisa, evidencia o fato de que mesmo que estejamos imersos num mundo tridimensional, o processo de ensino e aprendizagem da Geometria não é intuitivo a passagem do plano para o espaço

Nesse contexto o papel do registro figural assume um caráter investigativo essencial na busca por compreender no âmbito cognitivo as interações interpretativas que no problema geométrico uma imagem pode oportunizar.

Frente a isso, ao longo de toda a pesquisa no mestrado, tínhamos como desafio responder à questão: **Quais as apreensões em geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio na perspectiva da Teoria dos Registros de Representação Semiótica?**

Inicialmente, quanto as atuações evidenciadas das apreensões em geometria dentro do contexto resolutivo dos Blocos de Atividades, o Gráfico 1 ao quantificar essas ações interpretativas tanto na análise a priori realizada dos problemas, quanto na análise a posteriori através das resoluções apresentados pelos pesquisados; a redução identificada da atuação da apreensão discursiva nas resoluções expostas pelos pesquisados caracteriza uma menor coordenação entre os registros discursivos e figurais durante a fase de execução da pesquisa através da resolução dos blocos de atividade.

Gráfico 1 - Apreensões em geometria nas resoluções dos exercícios

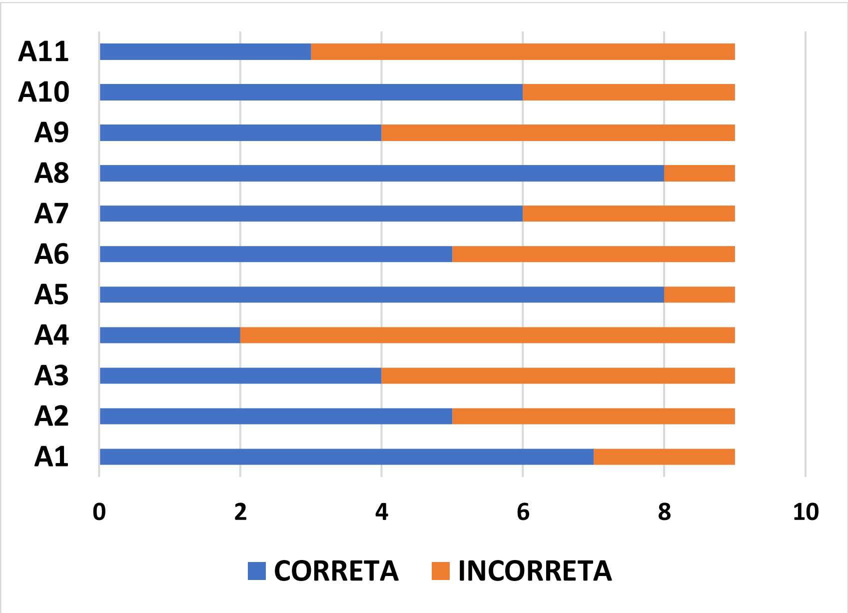


Fonte: Produção do autor, 2020.

Esse fato coloca as operações sobre os registros figurais subjugados a uma maior atuação da apreensão perceptiva, que de acordo com Duval (2012b), o reconhecimento da forma e seus respectivos elementos figurais nesse contexto podem ser superficiais, não estabelecendo um reconhecimento integral dos elementos figurais e, como consequência direta da menor teorização do registro figural geométrico, as ações resolutivas podem se caracterizar desconexas com a proposta original do problema (DUVAL, 2012b, p. 120-121).

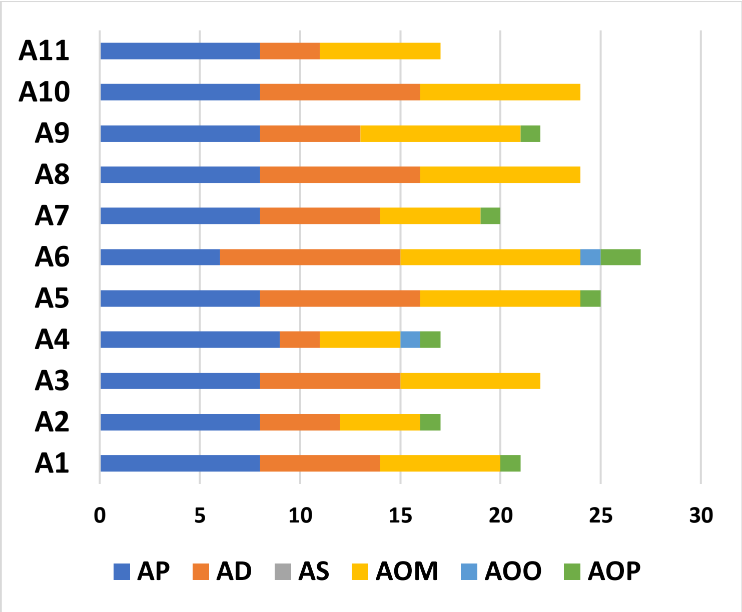
Uma vez que, se tratando de problemas de Geometria Espacial no qual os tratamentos sobre a figura abrangiam também modificações tridimensionais, a limitação bidimensional através da proposta em se realizar as resoluções estritamente no papel, se evidenciou a necessidade de otimizar a capacidade de visualização através da atuação da apreensão discursiva, caracterizando assim uma maior proximidade com o objeto geométrico e portanto, aumentando as chances da resolução se mostrar correta, como evidenciam os Gráfico 2 e o Gráfico 3 abaixo ao mostrar que quanto mais expressiva foi a taxa de resoluções corretas por estudante, maior atuação da apreensão discursiva.

Gráfico 2 - Resoluções corretas e incorretas por estudante



Fonte: Produção do autor, 2020.

Gráfico 3 - Relação das apreensões em geometria mais atuantes por estudante



AP = Apreensão Perceptiva
AD = Apreensão Discursiva
AS = Apreensão Sequencial
AOM = Apreensão Operatória Mereológica
AOO = Apreensão Operatória Ótica
AOP = Apreensão Operatória Posicional

Fonte: Produção do autor, 2020.

De um modo geral, particularizando os momentos exploratórios, partindo do fato de que havia um registro figural compondo a apresentação dos problemas, com exceção do primeiro exercício do Bloco de Atividade 1, a apreensão perceptiva se evidenciou atuante em todos, assim como a apreensão operatória, uma vez que todos os pesquisados mostraram através dos seus registros a existência de tratamentos geométricos. Porém, a apreensão discursiva se mostrou ausente em algumas resoluções e nesses casos em particular, o processo resolutivo se mostrou parcial quanto a proposta do problema, o que conduz a supor que mesmo diante de um registro figural com grande capacidade intuitiva de resolução, a visualização de um objeto 3D exposto num plano 2D exige uma maior capacidade de visualização, de modo que o reconhecimento teórico do objeto geométrico se faz necessário.

Em virtude do contexto mundial ocasionado pela pandemia do COVID 19 levando a suspensão das aulas presenciais, a aplicação dos blocos de atividades aconteceram na modalidade online via conferência, em que todos os pesquisados participaram de forma elogiável buscando interagir ao máximo com as propostas estabelecidas em cada questão. O primeiro exercício do Bloco de Atividade 1 ao se mostrar como sendo o único a não possuir um registro figural, tinha como proposta o acesso ao poliedro descrito através do registro discursivo e todos os pesquisados não só mostraram evidencia do reconhecimento como também alguns reproduziram registros figurais, como por exemplos os estudantes A4 e A6.

No caso específico em que os estudantes eram direcionados a identificar elementos geométricos de dimensão inferior ao objeto dado, como no exercício 2 e 3 do primeiro bloco de atividades, ficou evidente a insistência de querer olhar para figura conservando sua forma tridimensional, e nesse caso foi constatado limitações quanto a eficiência dos tratamentos geométricos o que conduziu a resoluções com elevado grau de incoerência matemática.

O exercício 3 desse mesmo bloco de atividades veio expor uma dificuldade por parte dos pesquisados que de forma recorrente também implicaria em exercícios pertinentes aos outros blocos de atividades. Ficou percebido pelo professor/pesquisador que todos os participantes mesmo afirmando terem reconhecido a proposta do exercício, alguns apresentavam como conclusão registros numéricos dispersos não compactuando como uma abordagem conclusão da questão.

Em geral, ao analisar os registros produzidos pelos estudantes em todos os três Blocos de Atividades, seguindo os pressupostos da TRRS ficou evidente que os alunos buscavam interagir simultaneamente entre os registros discursivo e figural, atitude está que particulariza os problemas geométricos de acordo com o aporte teórico desta pesquisa.

Porém, em virtude da dinâmica dos registros figurais quanto a sua capacidade de reorganização dos seus elementos geométricos elevando o papel de importância das apreensões operatórias quanto as ações resolutivas, se identificou importante nas análises de que a apreensão perceptiva esteja vinculada a apreensão discursiva a fim de poder contemplar integralmente o objeto geométrico em questão, favorecendo assim o acesso a propriedades e tratamentos que não necessariamente precisariam estar visíveis.

Essa relevância da apreensão discursiva de coordenar a apreensão perceptiva está relacionada ao fato de que as operações geométricas no espaço tridimensional exigem do estudante uma maior capacidade de visualização, pois diferente do plano bidimensional do qual a percepção visual da figura pode contempla-la integralmente, nos exercícios que envolvem figuras tridimensionais, a limitação do plano impõe ao estudante a necessidade de manipular o registro figural em 3D, e dada a natureza heurística dos objetos geométricos, existem diversas maneiras de decompor o sólido.

O exercício 3 do segundo bloco de atividades se a apreensão perceptiva sobre a forma não estiver alicerçada na definição do objeto, os tratamentos geométricos conduzirão a soluções com altas probabilidades de erros, como foi constatado nas resoluções apresentadas pelo grupo de estudantes.

É necessário então desenvolver nas ações pedagógicas de ensino a habilidade dos estudantes quanto a visualização tridimensional, pois a partir do momento que existir consistência na ação da percepção tridimensional tendo como referência um plano 2D, a capacidade de reconfiguração em 3D não só será eficiente quanto as resoluções de exercício, mais também favorecerá a compreensão da Geometria Espacial.

Nesse sentido, dentro da temática de geometria, em particular no que tange a Geometria Espacial, uma proposta de exercício que contenha um registro figural deve ser cuidadosamente observado por parte do professor se a figura não está distanciando-se demais da proposta do problema, a ponto de que seja tratada pelo aluno como um acessório, do qual pode decidir usar ou não para acessar os objetos geométricos em questão. Situação essa revelada no exercício 2 do segundo Bloco de Atividade, em que a maioria subestimou o registro figural de modo a achar que sua função era puramente ilustrativa, como consequência a apreensão perceptiva desvinculada da apreensão discursiva conduziu os tratamentos geométricos de forma parcial. Não ocorreram falhas nos tratamentos matemáticos, mas total ausência do estatuto do objeto em questão, como por exemplo as resoluções apresentadas pelos pesquisados A2, A4, A7, A9 e A11.

Enfim, todas as resoluções corretas contemplaram a participação das apreensões e em particular da apreensão discursiva, uma vez que havia a limitação visual do objeto 3D no plano exigindo assim uma significativa capacidade de visualização.

Entretanto, em virtude dos eventos que conduziram essa pesquisa a exercer sua fase exploratória na modalidade online, a sua aplicação em sala de aula se mostra convidativa para novas pesquisas a fim de ampliar o entendimento das apreensões em geometria nas resoluções dos problemas geométricos de natureza tridimensional.

10 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. Ag. **Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125-148. 2013.

ALVES, Cláudia Raquel. **Uma estratégia experimental de ensino de Geometria Espacial para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado), 92 f. – Universidade Federal Rural do Semiárido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2019.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática**; tradução Elza F. Gomide . São Paulo, Edgard Blucher. Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

BRANDT, Célia Finck (Org); MÉRICLES, Thadeu Moretti (Org), **As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação matemática** – Ijuí: /Ed. Unijuí, 2014.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática** – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

______. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília** .Ministério da Educação, Secretária de Educação Média e Tecnológica: Ministério da Educação, 1999.

______. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Brasília: MEC. 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf > Acesso 20 maio 2018.

_____. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Brasília: MEC. 2018. Versão aprovada pelo CNE, novembro de 2017. Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/02/bncc-20dez-site.pdf >. Acesso 23 outubro 2019.

BIKLEN, Knoop Sari; BOGDAN C. Roberto. I**nvestigação Qualitativa em Educação**. Tradutores: Maria João Alvarez; Sara Bahia dos Santos; Telmo Mourinho Batista. Editora: Porto Editora, 1991.

DOLCE, Osvaldo. **Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial, posição e métrica**, 6 ed., São Paulo, Editora Atual, 2005.

DUVAL, R. **Sémiosis et noésis**. 1993. (Préprint do livro publicado com o título “Sémiosis et pensée humaine”. Bern: Peter Lang, 1995).

______. **Les conditions conitives de l’apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnement et coordination de leurs fonctionnements**. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, n. 10, p. 5-53, 2005.

_____. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______. **Diferenças semânticas e coerência matemática.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2012a. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat).

______. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM; PPGECT, 2012b. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat)

______. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento** Trad. Méricles T. Moretti. . Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012 c. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465>. Acesso em: 23 jun. 2020.

______. **Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). 8ª ed. - **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 125-148. 2013.

______. **Rupturas e Omissões entre Manipular, Ver, Dizer e Escrever: História de uma Sequência de Atividades em Geometria**. IN: BRANDT, Célia Finck (Org); MORETTI, Méricles Thadeu (Org.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014 – 256p.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 2011

FELIX, Anágela Cristina Morete. **Estudo dos registros de representação semiótica mediados por um objeto de aprendizagem**. Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, 2014.

FLORES, Cláudia Regina; MORETTI, Méricles Thadeu. **As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração**. Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 1, n. 1, p. 5-13, jan. 2006. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12986>. Acesso em: 03 maio 2020.

GOLDENBERG, Mirían. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais** - 8' ed. - Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRILLO, Jean Daniel. **Atividades e problemas de geometria espacial para o ensino médio**. Dissertação, Universidade Federal de São Carlos, Rio de Janeiro, 2018.

HILLESHEIM, Selma Felisbino; MORETTI, Méricles Thadeu. **Elementos transversais para o aprendizado da geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: uma proposta de currículo possível**. Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 01-20, 2020. Universidade Federal de Santa Catarina. ISSN 1981-1322. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e70277

LIED, Roberta. **Construções com régua e compasso envolvendo lugares geométricos: uma proposta dinâmica aliada a teoria de Registros de Representação Semiótica.** Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Maria - Centro de Ciências Naturais e Exatas. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física, 2016.

LOTMAN, Y. M. **The universe of the mind: a semiotic theory of culture**. Trad. Ann Shukman. Londres: I. B. Tauris & Co. LTD, 1990.

LUANA, Cátia Bulmann. **Aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial por estudantes do Ensino Médio: entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação semiótica**, Dissertação de Mestrado em Educação nas Ciências.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. **Reflexões Sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas Segundo Raymond Duval**. IN: BRANDT, Célia Finck (Org); MORETTI, Méricles Thadeu (Org.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014 – 256p.

LIMA, Elon Lages, **Coleção: A Matemática do Ensino Médio** – Vol. 2, Rio de Janeiro: SBM, 6ª Ed. 2006.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org), **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica** – 8ª Edição, - Campinas, SP: Papirus, 2013

MORAN, Mariana. As apreensões em geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca dos Registros Figurais. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, 2015.

MORETTI, Méricles Thadeu. **Estudo das apreensões e dos olhares em geometria**.VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – ULBRA, Canoas – Rio Grande do Sul, Brasil. 2013a.

______. **Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria.** Acta Scientiae, V.15, nº. 2, p. 289-303, maio/ago. 2013b.

______. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de Matemática.** Contrapontos - ano 2 - n. 6 - p. 423-437 - Itajaí, set./dez. 2002.

MORETTI, Méricles Thadeu e BRANDT, Célia Finck. **Construções de um desenho metodológico de análise semiótica e cognitiva de problemas de geometria que envolvem figuras.** III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.17, n.3, p.597-616, 2015.

MUNIZ NETO, Antônio Carminha, **Geometria**, Rio de Janeiro: SBM, 2013

NOVAK, Franciele Isabelita Lopes. **O ambiente dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymon Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional**. Ponta Grossa, 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação - Área de Concentração: Educação), Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2018.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico**. 23 ed. rev. e atual – São Paulo: Cortez Editora, 2007.

SODRÉ DE SOUZA, Roberta Nara; MORETTI, Mericles Thadeu; ALMOULOUD, Saddo Ag**. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas.** Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em

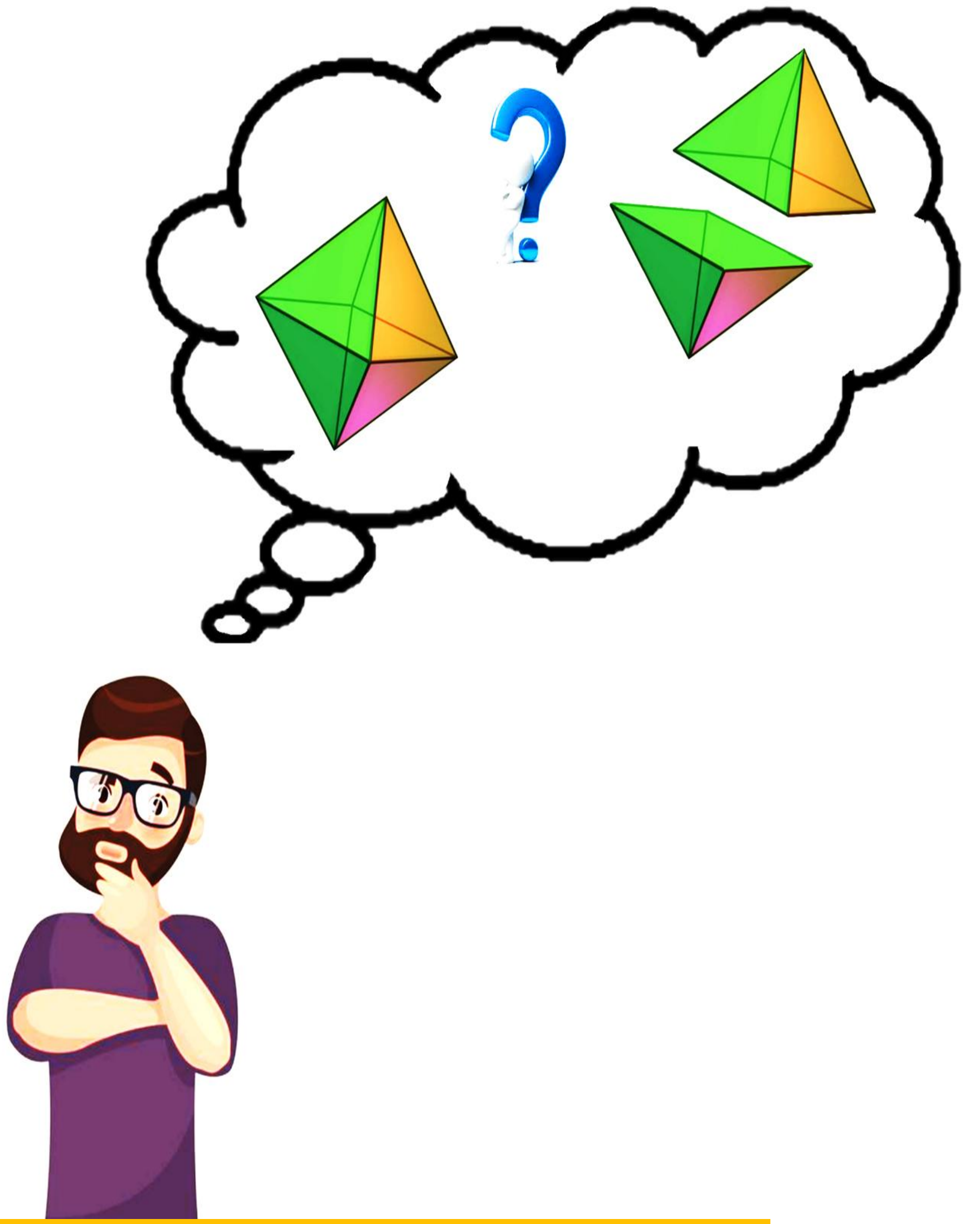
Educação Matemática, [S.l.], v. 21, n. 1, abr. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39101>. Acesso em: 21 mar. 2020.

SODRÉ DE SOUZA, Roberta Nara. **Desconstrução dimensional das formas: gesto intelectual necessário à aprendizagem de geometria**. Tese. 229 p. Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2018.

APÊNDICES

Apêndice (A)

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



APRESENTAÇÃO

Caro (a) professor (a),

O produto educacional foi elaborado por meio da pesquisa de mestrado em matemática intitulada “Apreensões de geometria na resolução de exercícios de geometria espacial na terceira série do ensino médio” desenvolvida no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, tendo como instituição de Ensino a Universidade Estadual de Santa Catarina – UDESC, sob orientação do Prof. Dr. Rogério de Aguiar.

Este produto é um caderno de atividades voltado ao professor com sugestões e questões de geometria espacial voltado aos alunos do Ensino Médio sob o ponto de vista das representações de registro semiótico.

As atividades aqui apresentadas, não têm a pretensão de serem os únicos no trabalho do professor e sim uma sugestão de problemas de geometria a serem trabalhados em sala de aula sob uma nova perspectiva, olhando para as dificuldades, erros e acertos dos alunos. Minha intenção com esse produto é que sirva ao professor em sua prática docente e que possa enriquecer a dinâmica da sala de aula.

Se desejar mais informações acerca do desenvolvimento deste trabalho, poderá consultar o título no banco de dissertações do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Adriano Moser

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Caro (a) Professor (a):

A construção de um corpo de conhecimento a partir do ensino da Geometria Espacial é uma excelente oportunidade de colocar o aluno num contexto que possa desenvolver as habilidades argumentativas lógicas-dedutiva contribuindo para que as competências de raciocínio, análise e visualização sejam melhores desenvolvidas.

A proposta desse produto é apresentar um novo olhar sobre os exercícios de geometria espacial para o Ensino Médio e dar ao professor o discernimento das apreensões em geometria envolvidas nos exercícios e a sua psicodinâmica quanto as suas resoluções, tendo como base o Registros de Representação Semiótica. Além deste, o caderno de atividade contará com um capítulo contendo uma breve reflexão das apreensões em geometria que alicerçam o processo resolutivo dos problemas envolvendo geometria espacial sob o olhar da teoria cognitiva de Raymond Duval – filósofo e psicólogo.

O aporte teórico desse caderno de atividades está disponível para consulta pública no banco de dissertações do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. É recomendável que o educador busque uma leitura integral da pesquisa a fim de cristalizar a estreita relação que existe entre o processo cognitivo de aprendizagem e o papel dos registros de representação dos objetos matemáticos.

E por fim, no último capítulo, apresenta-se todas as resoluções comentadas das questões propostas no caderno de atividade oportunizando ao professor uma análise em caráter preliminar do custo cognitivo de cada exercício, podendo assim escolher a atividade adequada para seus alunos de acordo com o conteúdo a ser ministrado.

2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DE RAYMOND DUVAL

O ensino de matemática deve participar do desenvolvimento da capacidade de raciocínio, análise e visualização, de modo que a escola deixando de ser um ambiente inerte, com conhecimentos já definidos, passa a ser um espaço no qual o conhecimento do cotidiano se relaciona com o conhecimento científico.

O uso da figura geométrica é fundamental para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos geométricos, pois permite que o aluno acesse o objeto matemático representado, e ainda possibilita conjecturar propriedades para que se consiga, então, a resolução de problemas.

Nesse contexto, sendo comum os alunos apresentarem dificuldade quanto a compreensão dos conceitos geométricos, principalmente no que tange a Geometria Espacial e suas representações, a teoria cognitiva do filósofo e psicólogo Raymond Duval (1995) intitulada por Registros de Representação Semiótica será o aporte teórico quanto ao entendimento do funcionamento cognitivo da compreensão em matemática, no que se refere a geometria.

Duval (2004) destaca que o processo de aprendizagem dos conceitos geométricos exige de forma simultânea a mobilização entre os registros discursivos e figurais, fazendo com que se exija mais cognitivamente do aluno se comparado a outros conceitos matemáticos (DUVAL, 2004 apud KLUPPEL & BRANDT, 2014, p. 120).

Em particular, na Geometria Espacial a dificuldade natural em representar o registro tridimensional da figura aumenta consideravelmente a complexidade da compreensão, fato esse facilmente observado em muitos ambientes de ensino.

Considerando que o acesso aos objetos matemáticos passa estritamente pelas suas representações semióticas, o que particulariza a matemática das demais ciências, Duval (2013) destaca a importância do papel do professor em sua prática de ensino de modo a conduzir o aprendizado do aluno a fim de que exista o discernimento entre o objeto matemático e a sua representação; tal atitude passa necessariamente pela mobilização de ao menos dois registros semióticos correlacionados ao mesmo objeto matemático (DUVAL, 2013, p.21).

A interação simultânea e automática entre os registros discursivos e figurais caracteriza o aprendizado geométrico, tornando-o único a ponto de Duval distinguir quatro interações interpretativas sobre a figura, denominando-as como sendo as apreensões em geometria, sendo elas: perceptiva, operatória, discursiva e sequencial.

A apreensão perceptiva é o olhar sobre a figura dentro do contexto de uma atividade matemática com a proposta de buscar as interpretações da figura em si, porém dada a sua natureza heurística, sua ação intuitiva pode conduzir o processo resolutivo de forma inapropriada, ignorando hipóteses dadas pelo enunciado da questão. Por outro lado, a apreensão discursiva busca o entendimento dos elementos da figura geométrica a partir do registro discursivo da questão, levando em consideração o estatuto do objeto matemático e suas propriedades.

Quanto a apreensão sequencial, em atividades que tem como norteador uma construção geométrica ou uma descrição de uma dada figura cujo objetivo seja de reproduzi-la, determinada movimentação dessas estruturas cognitivas caracterizam a ação da apreensão sequencial. A apreensão operatória estando centrada nas possíveis modificações que uma figura de partida pode permitir e suas reorganizações perceptivas que tais modificações provocam, visa potencializar a apreensão perceptiva favorecendo assim a resolução do problema de geometria.

Ao considerar que a maior parte dos problemas que envolvem tanto o ensino quanto a aprendizagem da geometria tem como origem sua didática em coordenar os diferentes tipos de registros, uma prática pedagógica que favoreça a compreensão entre o estatuto do objeto e sua representação geométrica pode neutralizar essa realidade ao aprimorar a função heurística da imagem no contexto geométrico.

Embora existam diversas propostas didáticas quanto ao ensino da geometria espacial para o ensino médio, é importante que o professor permeie sua didática considerando as figuras geométricas como parte intrínseca do processo de ensino e aprendizagem, levando em consideração as apreensões em geometria descritas por Duval, a fim de favorecer de forma significativa o aprendizado dos conceitos de poliedro, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

3 ATIVIDADES

As atividades apresentadas nesse caderno buscam interagir com o cotidiano escolar em que o professor utiliza de questões já aplicadas em sistemas de avaliação, como por exemplo o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, de modo a avaliar tanto quantitativamente quanto qualitativamente a compreensão dos estudantes quanto ao tema ensinado. E nessa perspectiva a proposta é dimensionar o olhar do educador para a interação das representações semióticas no processo de ensino e aprendizagem da temática de Geometria Espacial a partir da identificação das apreensões em geometria que permeiam o processo resolutivo dos exercícios aqui apresentados.

Portanto, após cada exercício será apresentado uma breve orientação ao professor para que direcione sua percepção quanto as interações que as apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial a fim de exista uma compreensão significativa quanto ao processo de resolução que o problema instiga.

3.1 POLIEDRO

3.1.1 Exercício 1

Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

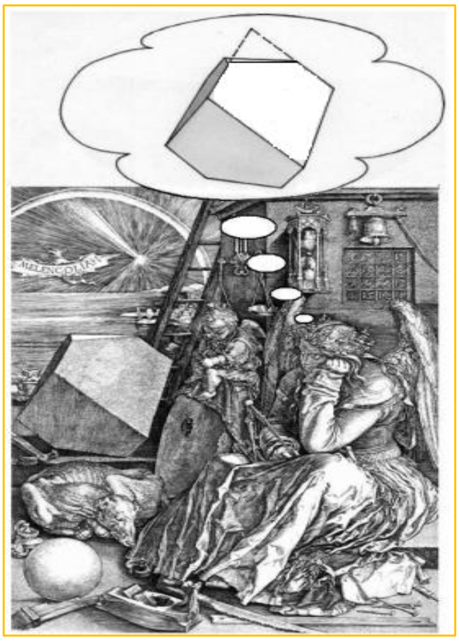
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Em virtude da predominância nas propostas pedagógicas do uso excessivo de fórmulas e soluções que não fazem uso de registros discursivos, principalmente no contexto geométrico é importante que o professor estimule o aluno a identificar no enunciado as informações pertinentes ao objeto geométrico em questão. Seria conveniente que o uso de sólidos poliédricos convexos de modo que o aluno possa ter a percepção visual dos elementos geométricos de dimensões inferiores ao objeto em questão a fim de que a passagem direta do registro em língua natural (enunciado) para o tratamento conhecido como Teorema de Euler seja de forma consciente.

3.1.2 Exercício 2

A gravura Melancolia de Albrecht Dürer (1514) contém vários objetos e símbolos matemáticos. O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta.

Figura 1:Ilustração adaptada gravura Melancolia de Albrecht Dürer (1514)



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

Identifique e quantifique os elementos (arestas, vértices e faces) do poliedro em questão, sabendo que duas de suas faces são triângulos equiláteros e todas as outras faces são idênticas.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Como o registro figural geométrico não contempla um poliedro que esteja no contexto usual do aluno é importante estimular a manipulação das informações que a imagem oportuniza comparando simultaneamente com as afirmações descritas no enunciado. Uma prática funcional é ler com a turma a questão e identificando fatos relevantes de modo a destacar, como por exemplo, na frase que diz: "*O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta".* Sensibilizar para expressões como "poliedro", face é um losango sem uma ponta" é fundamental para que a partir da reflexão das implicações desses termos no contexto do exercício, o acesso a imagem seja coordenada através do estatuto do objeto em questão.

<u>3.1.3 Exercício 3</u>

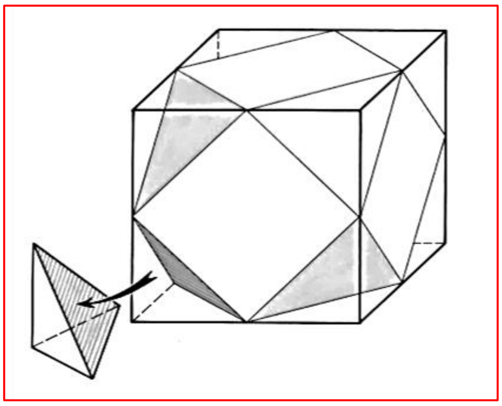
Sobre cada uma das faces de um cubo, desenha-se um quadrado unindo-se os pontos médios das arestas do cubo como mostra a ilustração. As linhas desenhadas formam oito pirâmides a partir de cada vértice do cubo. Se "recortarmos" as oito pirâmides do cubo, obteremos um poliedro convexo denominado: CUBOCTAEDRO.

Para cada poliedro convexo os matemáticos Euler e Descartes, provaram a seguinte relação:

$V - A + F = 2$

Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces. **Mostre que a relação é válida para este cuboctaedro.**

Figura 2: Poliedro Cuboctaedro



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Geralmente a representação dos objetos geométricos espaciais condicionam a tomadas de decisões pelos alunos de modo a permitir percepções equivocadas quanto aos elementos quantitativos inseridos no contexto do problema. Essa questão em particular, a fim de minimizar essas tomadas de decisões equivocadas, conduza o trabalho reunindo os alunos em pequenos grupos e sugira que registrem as informações dadas no enunciado que definam o objeto geométrico exposto no registro figural.

Espera-se que nesse caso que o termo <u>poliedro convexo</u> seja identificado por parte dos alunos. Dando sequência a atividade, num segundo momento o professor discuta no grande grupo de modo a instigar os alunos a afirmarem as propriedades geométricas que caracterizam um poliedro, como por exemplo, a existência de vértices, arestas e faces, bem como a implicação da particularidade desse poliedro ser convexo.

Para a compreensão de um objeto tridimensional é fundamental que o aluno consiga identificar e manipular componentes de dimensões inferiores, o que valorizaria essa etapa de reflexão sobre o objeto geométrico e suas propriedades.

Tendo em mãos o deslumbre do estatuto do objeto, o professor orienta os alunos para que manipulem o registro figural a fim de identificar as informações para então substituir no tratamento matemático exigido de modo a validar a igualdade desejada.

Vale ressaltar que aproximar o objeto geométrico ao seu estatuto favorece a coordenação dos tratamentos geométricos sobre a imagem, reduzindo assim as tomadas de decisões por achismos, em que a percepção visual sobre a figura tende a condicionar essas ações durante o processo resolutivo.

Por fim, mesmo não sendo o objetivo explícito dessa questão, o professor pode com seus alunos em uma etapa final construir o raciocínio para a apresentação do volume do cuboctaedro, é claro que seria necessário estabelecer uma relação entre o cubo com a pirâmide de base triangular declarada tanto no enunciado quanto no registro figural.

3.1.4 Exercício 4

(Adaptada da UNIRIO). Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, com 60 faces triangulares. Determine o número de vértices deste cristal.

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

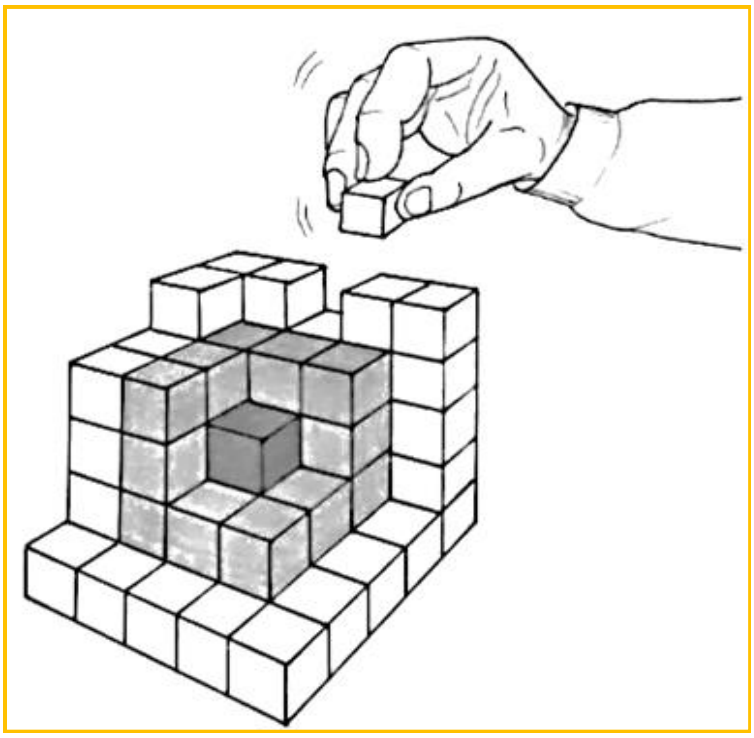
A semelhança com o exercício 1 dessa temática de poliedro se restringe somente ao objeto geométrico em questão, a quantidade expressiva de polígonos que compõe as faces descaracteriza completamente uma iniciativa de desejar construir a solução a partir da elaboração do registro figural desse poliedro. Explique aos alunos que mesmo havendo essa restrição quanto á visualização do objeto, não restringe a necessidade de contemplar o estatuto desse objeto, a fim de que o tratamento geométrico que venha a definir o número de arestas desse sólido permeie na certeza de que por ao o produto do número de faces do poliedro pelo número de arestas do polígono da face não deixe de considerar somente a metade do registro numérico encontrado, uma vez que cada aresta considerada por esse tratamento é adjacente entre duas faces do sólido.

Expor aos alunos que tendo em mãos os registros quantitativos do número de faces e arestas do poliedro, o uso da Relação de Euler é de imediato a forma mais eficiente de concluir a problemática.

3.2 PRISMAS

3.2.1 Exercício 1

Rayane, Bernard e Jeanne brincam com cubos da mesma dimensão. Rayane tem um cubo vermelho de 5 gramas. Bernard circunda o cubo de Rayane com cubos azuis que pesam 8 gramas cada, criando assim um novo cubo. Jeanne coloca cubos verdes, que pesam 12 gramas cada, em torno do cubo de Bernard para formar um novo cubo, totalizando 125 cubos. Calcular a massa total do cubo final?



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

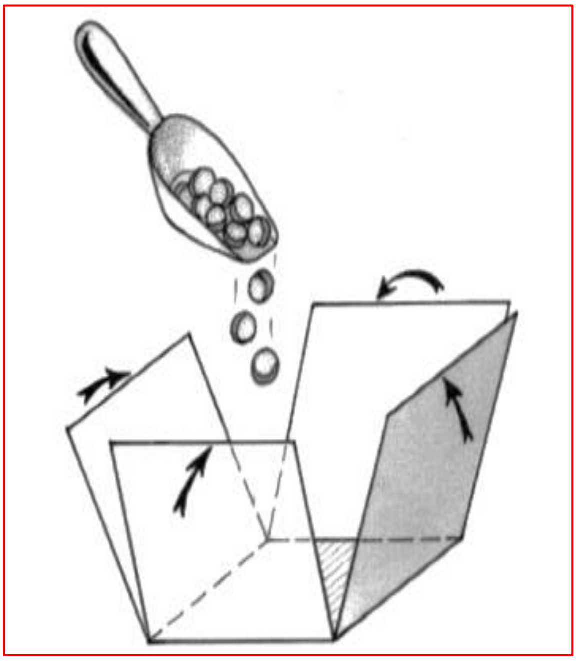
A percepção visual de um registro figural no contexto geométrico é importante que o professor tenha ciência de que a interpretação sobre a figura é dependente de processos cognitivos próprios de cada aluno e por consequência os tratamentos decorrentes dessa interpretação sobre a imagem deve ser ponto de observação e reflexão do educador a fim de que modelando sua pratica pedagógica conduza o estudante a ver o objeto matemático não mais como um aluno, mas da mesma maneira que um professor de matemática contempla, ou seja, através das componentes elementares que toda figura geométrica possui.

Portanto, discuta com os alunos a respeito das consequências sobre o fato de que a formação dos cubos descritos no enunciado está condicionado a revestir um cubo unitário com unidades cúbicas de mesma dimensão. Conduza a reflexão da turma de que mesmo que as unidades cúbicas possuam a mesma unidade, suas cores implicam em pesos diferentes e de maneira poderão quantificar as unidades cúbicas por cor a fim de estabelecer a massa total do objeto formado.

Deve ficar claro para os alunos, de que com exceção do cubo inicial, todos os demais serão formados por unidades cúbicas de pelo menos duas cores distintas. A fim de colaborar na resolução incentive a construção de uma tabela a fim de discriminar o cubo vermelho (inicial), o cubo revestido por unidades cúbicas azuis e por fim o cubo revestido por unidades cúbicas verdes e seus respectivos pesos.

3.2.2 Exercício 2

Utilizando um disco de papel cartão de 10 cm de raio, construí a maior caixa possível, composta por 5 quadrados idênticos, formando uma caixa cúbica sem tampa. Calcule o volume da caixa que eu construí.



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

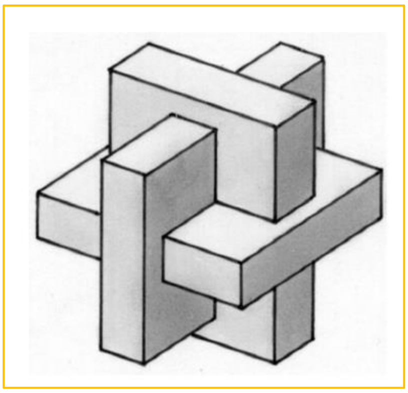
A resolução desse exercício permeia pela utilização das propriedades do objeto geométrico denominado círculo, em particular tomando o diâmetro como sendo um dos lados de um triângulo, qualquer ponto tomado na circunferência de modo a compor os outros dois lados desse triângulo representará um ângulo reto e portanto um triângulo retângulo norteará a determinação da medida do lado do quadrado que irá compor a formação da caixa.

Em virtude dessa atitude não ser intuitiva, cabe o professor solicitar que que os alunos construam a partir dos instrumentos de construção geométrica (compasso e régua) a figura do círculo, porém se existir a indisponibilidade da construção individual, uma única construção no quadro poderá servir como exposição para toda a turma. Nesse caso, explore essa propriedade do arco notável a partir do diâmetro da figura e discuta com os alunos como essa construção geométrica poderá contribuir para a resolução do problema. Permita que os alunos façam em seus cadernos, mesmo não existindo o rigor da construção geométrica suposições para a colocação dos demais segmentos de modo forma os cincos quadrados dentro da figura circular, e é claro evidencie a importância de generalizar o lado do quadrado a fim poder obter através dos tratamentos matemáticos o valor que determinará o maior quadrado e por consequência o maior volume da caixa.

Sempre instigue os alunos a compreensão da proposta do problema de modo que uma vez aplicado o tratamento matemático e determinado a medida do lado do quadrado, pergunte ao grupo se está concluída a questão, uma vez que é comum os alunos depois de alguns tratamentos matemáticos acreditarem terem concluído a questão.

3.2.3 Exercício 3

Três paralelepípedos entrelaçados formam um sólido mostrado abaixo. Eles têm a mesma dimensão 2cm x 8cm x 10cm. Calcule o volume do sólido descrevendo sua resposta:



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR

Em função da elevada capacidade heurística do registro figural desse problema, a fim de construir uma base argumentativa sobre o processo resolutivo necessário para a conclusão desse exercício, sua resolução em grupos vem a otimizar essa proposta, e portanto é uma boa oportunidade ao professor de uma vez organizado os grupos, estimule que ao término da resolução, cada grupo exponha a maneira que se utilizou para dimensionar o volume do bloco de paralelepípedos descrito na imagem

Durante a discussão em grupo, eles devem perceber que o volume do bloco em questão não se define simplesmente triplicando o volume de um único paralelepípedo, uma vez que, esses sólidos se encontram encaixados, e é papel do professor ao acompanhar a resolução que estimule os alunos a desconstruir o bloco em partes de modo que cada parte seja disjunta as demais.

3.2.4 Exercício 4

Uma carga de 100 contêineres, idênticos ao modelo apresentado na Figura 1, deverá ser descarregada no porto de uma cidade. Para isso, uma área retangular de 10m por 32m foi cedida para o empilhamento desses contêineres (Figura 2).

Figura 2

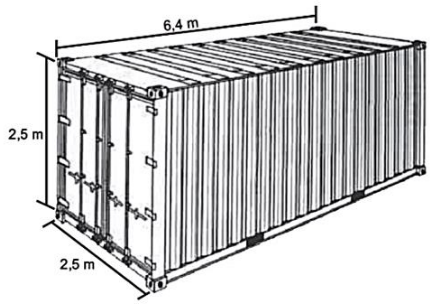


Figura 1

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

De acordo com as normas desse porto, os contêineres deverão ser empilhados de forma a não sobrarem espaços nem ultrapassarem a área delimitada. Após o empilhamento total da carga e atendendo à norma do porto, qual deverá ser a altura mínima a ser atingida por essa pilha de contêineres?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

É importante que, costumeiramente o aluno ao identificar que a proposta do problema está em definir a quantidade de acomodação de um objeto num determinado espaço, o uso da grandeza volume pode parecer coerente nesses tipos de exercício, porém nem sempre a acomodação é estritamente exatamente sob o ponto de vista métrico. A fim de descaracterizar essa intenção, peça aos alunos que na leitura do enunciado se atentem para o fato de que nesse caso a acomodação do objeto se dará numa superfície plana e que executar o tratamento da divisão entre a área do terreno e a área da base do containers, do ponto de vista prático não é a melhor escolha, uma vez que não há garantias de que o espaço será estritamente utilizado em sua totalidade

Discuta com seus alunos qual o modo mais otimizado de dispor os containers sobre o terreno, lembrando sempre que para essa situação não existe a unicidade de acomodação do objeto em questão.

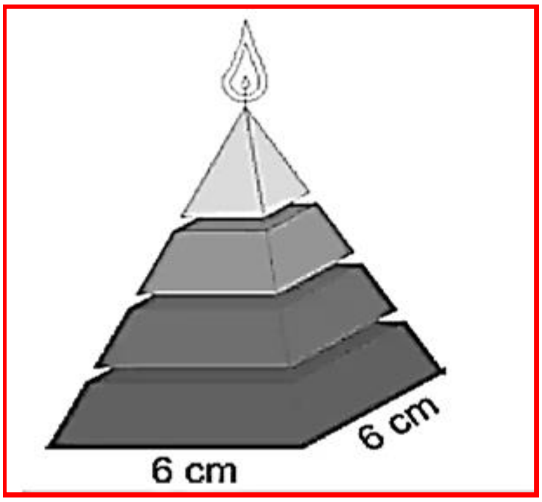
Lembre o aluno que existe critério de segurança quanto ao empilhamento dos containers e um número fixo para acomodação, o que implica em maximizar a quantidade a ser colocada num primeiro momento sobre a superfície plana.

O uso de registro numeral decimal e os tratamentos matemáticos a serem utilizados é uma boa oportunidade do professor identificar dúvidas quanto a esses tratamentos e uma vez existindo, ao final da resolução exponha no quadro a resolução e detalhe passo a passo as operações realizadas e existindo outras formas de representar não deixe também de compor sua explanação.

3.3 PIRÂMIDES

3.3.1 Exercício 1

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos da mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

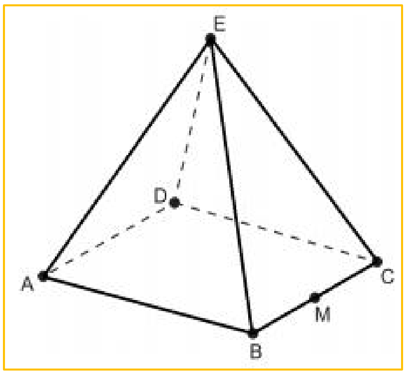
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Quando o foco de um problema geométrico consiste em quantificar o volume de uma pirâmide, é persistente o erro na determinação da sua altura quando está não vem descrito no contexto do problema, dado o fato de que se faz necessário operações geométricos a fim de habilitar a aplicação dos tratamentos matemáticos, como por exemplo o teorema de Pitágoras.

Nessa questão em particular, a riqueza de informações dada no enunciado do problema destaca a oportunidade do professor solicitar aos alunos que destaquem todo registro capaz de caracterizar o objeto geométrico e em seguida leia em voz para o grande grupo somente a proposta do problema e solicite que os alunos participem selecionando somente os dados pertinentes a resolução.

3.3.2 Exercício 2

João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção esse deslocamento no plano da base da pirâmide.



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

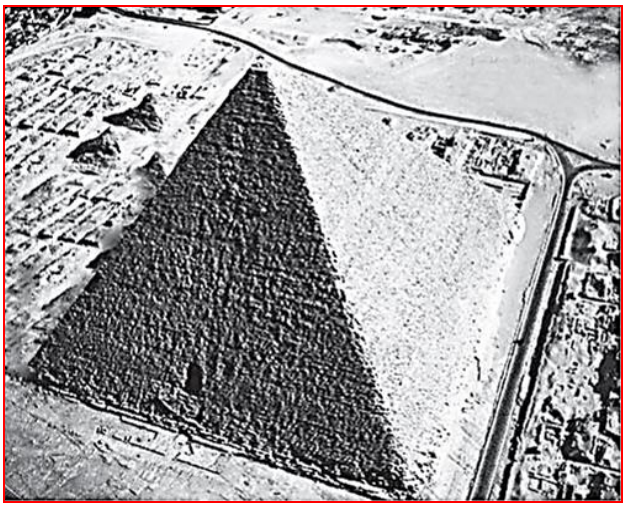
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C. Esboce o desenho que Bruno deverá fazer:

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Essa questão ao estabelecer como proposta um registro figural que represente a partir da projeção ortogonal um deslocamento orientado, têm na visualização a ação responsável em aproximar para o plano o movimento que ao estar expresso no enunciado é importante que o professor permita um ambiente que estimule a concentração e foco, uma vez que a realização de uma proposta resolutiva passa necessariamente pela interação das informações discursivas e figurais.

3.3.3 Exercício 3

A Figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m. O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metro, é?



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

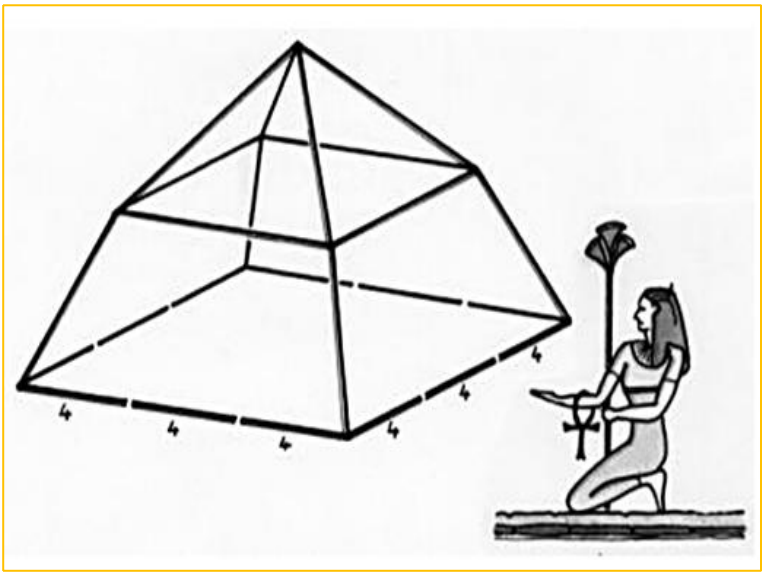
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A fim de reduzir a probabilidade de que o aluno apresente uma grandeza que geometricamente não seja a altura da pirâmide, é fundamental que o professor estimule os alunos a realizarem o desenho desse sólido numa perspectiva que seja de fácil visualização os tratamentos geométricos de modo a favorecer a escolha do triângulo retângulo que servirá como base para a aplicação do teorema de Pitágoras.

Vale ressaltar que caso seja favorável, o professor também realize o desenho da pirâmide no quadro e peça atenção para os alunos a fim de coletivamente identificar as possibilidades de interagir com a figura de modo a obter um triângulo retângulo em que uma das componente dessa figura plana seja a altura da pirâmide. Com o registro figural ainda exposto no quadro, é oportuno que o professor conduza a reflexão a turma sobre as incoerências geométricas que a projeção no plano de um objeto tridimensional evidencia, de modo a fazer valer sempre necessário o acesso ao estatuto do objeto a fim de validar suposições visualizadas na imagem, mas que exista dúvida sobre a sua validade.

3.3.4 Exercício 4

Hugo tem uma caixa cheia de varetas de comprimento 4 e 8 cm. Ele constrói o modelo apresentado abaixo. Ele usa hastes de 4 cm para a base quadrada e hastes de 8 cm para todas as outras. Seu sólido não é uma pirâmide, porque as bordas inclinadas não são linhas retas. Usando mais 4 varetas encontre pelo menos uma forma de transformar o sólido numa pirâmide. Justifique sua escolha.



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Partindo do fato de que a proposta do exercício consiste em manipular elementos geométricos predefinidos a fim de inserir uma modificação controlada na figura original, é conveniente que o professor conduza a resolução a partir da formação de grupos, a fim de favorecer tanto o raciocínio coletivo quanto o argumentativo individual, uma vez que o aluno em seu grupo deverá apresentar fatos que estruturem sua proposta resolutiva a fim de que o grupo compartilhe da sua resolução. O papel do professor quanto a sua participação nos grupos é de garantir que a solução apresentada represente geometricamente uma pirâmide, e nesse caso dada a capacidade heurística da figura de oferecer mais de uma possibilidade de tratamento geométrico de modo validar a preposição geométrica da figura, ao final da atividade, convide os grupos a apresentarem coletivamente suas resoluções.

3.4 CILINDRO

3.4.1 Exercício 1

Um produtor rural perdeu a sua régua graduada para medir o volume de leite no latão que usava em sua propriedade. Como seu filho estava estudando geometria na escola, este produtor pediu sua ajuda. O filho, então, com uma régua simples, mediu o diâmetro da lata, encontrando 30 cm e depois mediu a altura até onde se encontrava o leite, obtendo 60 cm. Sabendo das medidas qual foi o volume de leite em litros encontrado: (adote $\pi = 3{,}1$)

Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

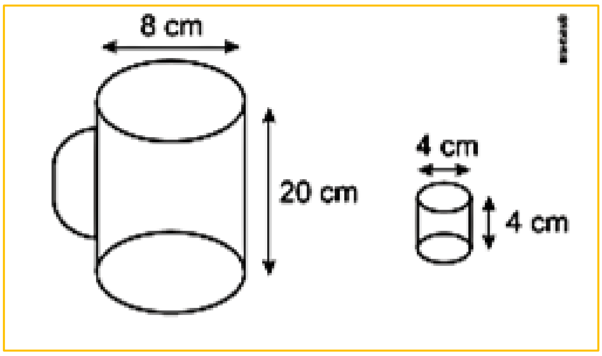
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Didaticamente é oportuno ao professor nesta questão, orientar os alunos a utilizar o registro figural contextualizado, de modo a identificar o objeto geométrico em questão, uma vez que tal informação não é descrita no enunciado reafirmando assim a importância da imagem no processo da compreensão e resolução de um problema geométrico. Cabe ainda ao professor conduzir a turma a desenvolver o hábito de construir um registro figural do objeto a ser estudado, logo, estimule a turma a realizar a ilustração da imagem geométrica do cilindro a fim de registrar numericamente as grandezas relacionadas ao objeto descritas no enunciado, como por exemplo a medida do seu diâmetro e também da altura que deverá ser levado em consideração.

Os alunos devem perceber que através das informações descritas no problema é possível determinar qual objeto geométrico da imagem que deverá ser considerado, uma vez que o objeto em questão é composto por no mínimo três sólidos geométricos com dimensões distintas, dois cilindros e um tronco de cone.

3.4.2 Exercício 2

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo. Dona Maria está certa nessa decisão? Justifique.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A excessiva predominância de problemas geométricos cuja proposta seja a expressão de registro numérico, tem com consequência direta a dificuldade do aluno em apresentar um discurso de modo a validar o seu argumento. Fato este facilmente perceptível nos exercícios propostos pelos livros didáticos por exemplo, estabelecendo assim o papel do professor em fomentar com os seus alunos não só a necessidade desse tipo de resposta para esse problema, mas a importância dentro do contexto de aprendizagem.

O professor pode conduzir individualmente o processo resolutivo, mas ao final é importante que os alunos sejam estimulados a apresentar sua consideração final no quadro a fim de que seja visível a todo a estrutura argumentativa utilizada e com o professor se construa uma proposta de resolução utilizando para isso dos argumentos expostos pelos alunos.

3.4.3 Exercício 3

Muitos restaurantes servem refrigerantes em copos contendo limão e gelo. Suponha um copo de formato cilíndrico, com as seguintes medidas: diâmetro = 6 cm e altura = 15 cm. Nesse copo, há três cubos de gelo, cujas arestas medem 2 cm cada, e duas rodelas cilíndricas de limão, com 4 cm de diâmetro e 0,5 cm de espessura cada. Considere que, ao colocar o refrigerante no copo, os cubos de gelo e os limões ficarão totalmente imersos. (Use 3 como aproximação para π). Qual o volume máximo de refrigerante, em centímetro cúbico, que cabe nesse copo contendo as rodelas de limão e os cubos de gelo com suas dimensões inalteradas?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Para fazer uso desse problema geométrico com sua turma, o professor deve propor que os alunos identifique e destaque no enunciado os objetos geométrico pertinentes ao processo resolutivo, uma vez que a questão contempla objetos geométricos tridimensionais como o cilindro (copo e as rodelas de limão) e também o hexaedro regular (cubos de gelo). Uma outra possibilidade é o professor fazer uma leitura com a turma e juntos identificar os objetos geométricos e num primeiro instante construir no quadro as representações geométricas das figuras e coletivamente identificar as grandezas métricas a fim formalizar nas representações seus devidos registros numéricos, para que posteriormente os alunos possam reproduzir os registros figurais em seus cadernos de modo a conduzir os tratamentos matemáticos necessários.

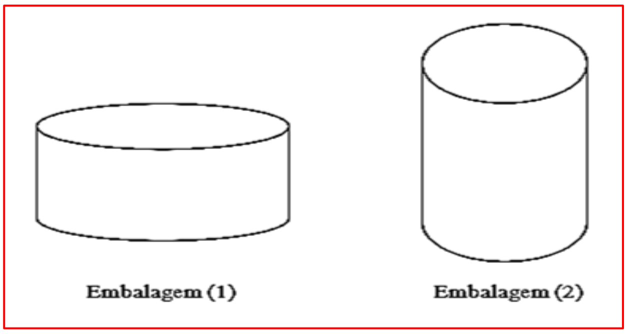
O fato desta atividade propor a identificação de um volume máximo para o copo que inicialmente não está vazio, os tratamentos a serem aplicados necessariamente permeiam a necessidade de uma intensiva coordenação quanto ao volumes que devem ser agregados (rodelas de limão e gelo) bem como nas unidades individuais que cada objeto participa da composição do volume inicial inserido no copo. Tal coordenação parte inicialmente da compreensão do registro discursivo em sua plenitude, desde das afirmativas expostas no discurso até a problemática da questão em si, o que ao final da resolução da turma cabe ao professor reafirmar a importância de fazer a leitura do enunciado de forma integral destacando todas as informações que possam caracterizar os objetos envolvidos no problema.

3.4.4 Exercício 4

Uma determinada empresa preocupada em fazer a escolha certa da embalagem para um de seus produtos levando em consideração seu custo de fabricação. O produto em questão será embalado em latas cilíndricas (cilindros de revolução) de modo que o raio da embalagem (1) é equivalente ao diâmetro da embalagem (2) e quanto as alturas temos que a altura da embalagem (1) é a metade da altura da embalagem (2).

a) Supondo que as duas embalagens sejam feitas do mesmo material, qual delas terá um custo de fabricação menor?

b) Para o consumidor a embalagem (1) seria vendida por 16 reais, já a embalagem (2) por 10 reais, qual das embalagens seria mais vantajosa para o consumidor, supondo que as duas latas estariam cheias?



Fonte: Produção do autor, 2020.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A ausência de registros numéricos é destaque nesse problema, é provável que os estudantes apresentem dificuldades para coordenar os tratamentos matemáticos necessários para se estabelecer uma resposta conclusiva. É oportuno então, que o professor se inclua na responsabilidade juntamente com os alunos em buscar solucionar as problemáticas estabelecidas tanto pelo item (a) ao querer determinar o menor custo de fabricação das embalagens, quanto o item (b) em buscar identificar a embalagem com melhor custo benefício.

A partir desse comportamento, o professor pode contribuir mostrando para o grupo de alunos a postura ideal de confrontar uma atividade geométrica se baseando principalmente no estatuto do objeto geométrico em questão. Nesse caso o professor ler a questão ou buscando a interação dos alunos pode solicitar que eles façam a leitura do problema. Como já afirmado em outras ocasiões, é essencial que o acesso ao registro discursivo da questão seja pautada no reconhecimento e destaque das informações que caracterizam a proposta do problema.

O professor pode simultaneamente com os alunos tomar nota dessas informações a fim de que ao final da leitura os alunos tendo identificados os objetos geométricos ocorra a realização do registro figural primeiramente no quadro pelo professor a fim de que coletivamente se evidencie através de registros algébricos as grandezas envolvidas e suas relações.

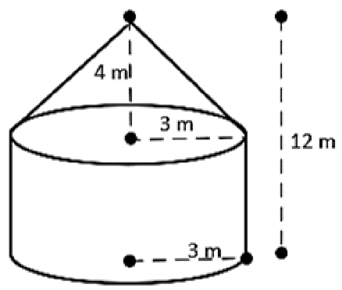
A resolução em si do problema, o professor pode solicitar que os alunos realizem individualmente os tratamentos matemáticos e ao final novamente no coletivo as soluções sejam apresentadas, valorizando assim a atuação do aluno no contexto pedagógico.

3.5 CONE

3.5.1 Exercício 1

Um produtor de soja plantou uma área equivalente a 50 hectares, onde estiva uma produtividade de 55 sacos por hectares (saca de 60 kg). Em sua propriedade existe um silo vertical, conforme a figura abaixo, e seria do seu interesse armazenar toda a sua produção nesse silo. Utilizando os cálculos de volume do cilindro, cone e densidade, será possível armazenar a produção dentro desse silo? Justifique.

Considere a densidade da soja sendo 800kg/m^3.



Fonte: Produção do autor, 2020.

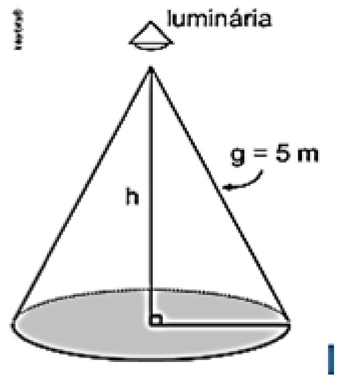
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Considerando a proposta do exercício de buscar através de fatos numéricos um posicionamento frente ao questionamento da capacidade do silo de ser ou não suficiente para o armazenamento da safra, o professor deve ter a percepção de que a situação acima descrita coloca o estudante na obrigação de identificar as informações tanto da produtividade, quanto da capacidade de armazenamento do silo, o que novamente favorece recordar ao aluno da importância de se fazer uma leitura dedicada nos registros discursivos do problema a fim de otimizar a visualização sobre o registro figural e seus respectivos objetos geométricos mostrados.

Diante da quantidade expressiva de grandezas numéricas descritas tanto no enunciado quanto no registro figural, cabe ao professor coordenar em pequenos grupos o processo de leitura, interpretação e resolução do problema descrito, e ao final os estudantes podem apresentar suas resoluções para o grande grupo.

3.5.2 Exercício 2

Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura:



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Sabendo-se que o raio da base mede 4m, qual a altura que deverá ficar a luminária?

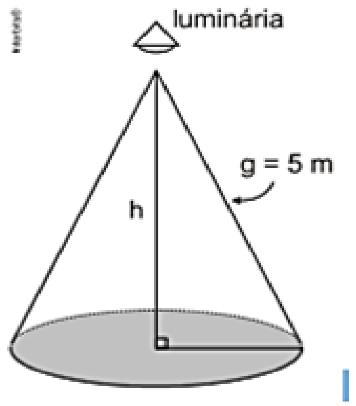
ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Alguns problemas geométricos apresentam uma relação direta quanto ao tratamento matemático necessário para sua resolução, como é o caso dessa questão. Cabe ao professor orientar os alunos da importância trazer acessar o estatuto do objeto geométrico em questão a fim visualizar plenamente não só o tratamento explicito, mas os elementos geométricos que oportunizaram essa ação imediata.

Dada a semelhança do cone reto com a pirâmide regular em relação a determinação da sua altura, é importante que o professor evidencie ao seu aluno a caracterização do perpendicularismo que o segmento que representa a altura desses objetos possui em relação ao plano da base.

<u>3.5.3 Exercício 3</u>

1. Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura:



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28, 26 m^2, considerando $\pi = 3{,}14$, a altura h será igual a:

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Uma característica marcante dessa questão é evidenciar que um registro figural não possui um estatuto próprio, ou seja, o seu papel dentro do contexto do exercício está atrelado ao registro discursivo que fundamenta o problema geométrico.

Nesse caso, é uma boa prática de aprendizagem utilizar um registro figural para diversas abordagens conceituais, e busque dos próprios alunos a participação quanto a modificação do registro discursivo a fim de que eles possam seja estimulados a ver a figura não só a partir de sua forma, mas principalmente através dos elementos geométricos que a compõe.

A maior dificuldade para resolver esse problema está em explicitar o elemento geométrico do raio do círculo da base a partir da sua área, o professor precisa garantir o entendimento quanto a proposta do exercício, para isso peça que eles após a leitura dedicada dos registros pertinentes a questão expresse oralmente qual o objetivo a ser alcançado, qual o tratamento matemático necessário para a sua realização e quanto a esse tratamento se já é conhecido todos os seus componentes.

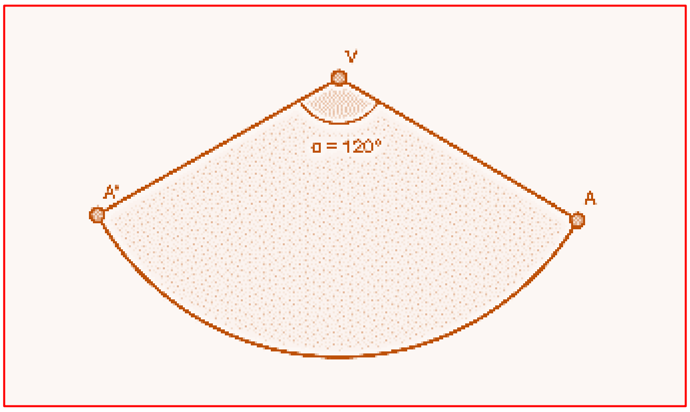
Espera-se que os alunos identifique a medida do raio do círculo da base como sendo a grandeza ausente ao tratamento do teorema de Pitágoras, surgindo então um momento oportuno para o professor instigar os seus alunos sobre como proceder para a sua determinação, quais informações dadas que ainda não compõe o tratamento de resolução, por que seria dada a área do círculo?

Professor, é essencial que todo exercício seja transformado numa atividade de desafio, do qual o aluno precisa compreender que a questão foi construída com o propósito de testa-lo quanto a sua percepção dos fatos e o quanto ele é capaz de redirecionar as informações a fim de conduzir aos tratamentos sejam eles geométricos ou matemáticos de modo a atender a proposta do exercício.

Sendo assim, a participação do professor dentro do contexto da sala de aula se estende muito mais do que a sua simples oratória, sua conduta deve influenciar os alunos a perceber que as atitudes construídas dentro do ensino da matemática de que a habilidade em reconhecer e redirecionar fatos a partir de um objetivo exposto, dentro do contexto social é estritamente uma habilidade louvável.

5.4 Exercício 4

Um copo cônico de papel foi feito a partir de um setor de 12 cm de raio e ângulo central de 120º. Determine o volume desse copo.



Fonte: Produção do autor, 2020.

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

Essa atividade em função do registro figural estar evidenciando a planificação parcial de um cone, a coordenação dos tratamentos geométricos e por consequência de todo o processo de resolução ao exigir uma percepção tridimensional do objeto, o professor pode favorecer essa aproximação do aspecto visual levando para sala de aula recortes dessa imagem, ou se existindo a possibilidade, que os próprios alunos em grupos construam essa figura respeitando as dimensões originais, é claro que essa construção exige a manipulação de instrumentos específicos, como o compasso, régua, transferidor e tesoura.

Com a figura em mãos, os estudantes orientados pelo professor em como manipular de modo a forma o objeto tridimensional idealizado no problema, em seguida o professor coordenando o processo resolutivo sugere aos alunos que exponham suas ideias de como identificar os elementos necessários para o cálculo do volume, espera-se que seja expresso entre outras informações, a necessidade de se determinar a medida do raio e da altura da figura.

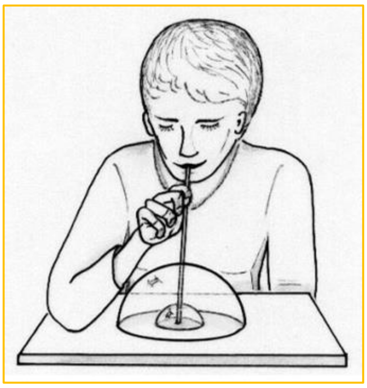
Num primeiro momento, aproveitando o modelo concreto, é conveniente que ainda em grupos os alunos estimem essas medidas a fim obter uma visualização do registro numérico do volume desse copo para que em seguida, cada grupo buscasse estratégias de como proceder teoricamente esse cálculo.

É importante que o professor motive o ambiente com afirmações a respeito das unidades métricas informadas, como por exemplo a indicação do grau do setor circular, ou por exemplo no contexto tridimensional o que representa a medida do raio informado inicialmente. O potencial interpretativo exigido nessa questão a coloca como destaque para que ao final da resolução cada grupo exponha seu processo resolutivo, e o professor poderá até estender o desafio para que cada grupo produza um setor circular e disponibilize para que os outros grupos determinem o seu volume, caracterizando um ensino dinâmico e proativo.

3.6 ESFERA

3.6.1 Exercício 1

Assoprando suavemente em uma superfície horizontal com água e sabão, Estela faz uma bolha de sabão de forma semiesférica com um diâmetro de 12 cm. Em seguida, ela assopra uma segunda bolha dentro da primeira. A primeira bolha então fica maior. O volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra. Qual será o diâmetro da bolha interna, quando o diâmetro da bolha maior for de 14cm. Justifique.



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A caracterização dessa questão em apresentar um registro figural que aparentemente o aluno pode julgar não ser necessário a sua existência, é papel do professor conduzir a reflexão que em problemas geométricos a imagem contextualizada deve ser ponto de partida para a imagem geométrica e que da interação dedicado com o enunciado, dimensionalmente deve ser identificado as informações e sempre que possível estabelecer um registro figural próprio a fim de alocar os dados de forma clara e coerente.

O professor nessa questão, inicialmente pode incentivar a percepção dos alunos fornecendo primeiramente só o registro figural a fim de que coletivamente seja identificado o objeto geométrico e suas propriedades mais comuns para em seguida seja estimado quais os questionamentos que poderiam advir e as estratégias para se responder.

Finalizada essa etapa, o professor poderá seguir com o enunciado e novamente em grupo refletir sobre a proposta agora explicita de modo a verificar com a turma se tinham previsto esse questionamento ou não, e caso essa problemática não havia sido exposta, reflita com o grupo quanto as estratégias a tomar a fim de atender a proposta do problema.

3.6.2 Exercício 2

Supondo que as laranja possuísse o formato de uma esfera de 5cm de raio aproximadamente e que em média a quantidade de suco corresponda a 70% do volume da fruta, em uma lanchonete costuma-se vender 20 copos de suco de laranja de 300 ml por dia, quantas laranjas no mínimo são utilizadas diariamente nessa lanchonete?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A diversidade de grandezas envolvidas que num primeiro olhar poderia ser um fator de dificuldade, o professor deve valorizar o contexto da problemática a fim de ajudar os alunos quanto a coordenação dos tratamentos matemáticos necessários para atender o objetivo desse problema. Uma extensão possível para essa atividade na dimensão de conduzir o aluno a refletir sobre o impacto que a dimensão do raio de uma esfera representa em seu volume, para isso o professor pode sugerir a confecção de uma tabela de modo que fixando as demais grandezas e estabelecendo um crescimento gradual do raio em uma unidade, é de se notar a redução do número de laranjas necessárias numa escala superior ao aumento do raio da laranja utilizada.

Segue abaixo a sugestão da tabela:

Raio da Esfera (cm) - LARANJA	Volume total da Esfera (cm^3)	70% Volume total da Esfera (ml)	Volume desejado (ml)	Nº de laranjas necessárias
5cm				
6cm				
7cm				
8cm				

3.6.3 Exercício 3

Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las. Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3. Qual o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa?

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A caracterização desse exercício em buscar alocar esferas dentro de uma caixa cúbica direciona a atenção do professor a conduzir os alunos a reflexão de que uma vez colocadas dentro da caixa todo o espaço da caixa será ocupado? Tal questionamento realizado pelo professor tem a função de descaracterizar a comparação entre o volume da caixa com o volume da esfera, e, portanto, pode-se sugerir coletivamente que os estudantes identifiquem uma estratégia para responder o número de esferas que essa caixa pode acondicionar. Essas estratégias o professor pode utilizar do quadro para registrar assim como realizar o desenho das figuras geométricas em questão de modo a favorecer a visualização contribuindo assim para o surgimento das propostas resolutivas.

<u>3.6.4 Exercício 4</u>

A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

Suponha que cada esfera tenha 10,5cm de diâmetro e que o bastão tenha 50cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4cm. Se a densidade do ferro é 7,8g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar-se? (Use: $\pi = 22/7$)

ORIENTAÇÕES AO PROFESSOR

A atividade proposta, ao fazer uso de registros numéricos inteiros, decimais e fracionários contribui para compor um processo diagnóstico quanto aos tratamentos matemáticos que deverão ser utilizados a fim de estabelecer o argumento necessário para concluir a proposta do exercício. Além do mais a sequência resolutiva ao permear por dois objetos geométricos distintos conduz a exigência de uma significativa coordenação dos dados o que oportuniza o professor de conduzir a realização desse problema individualmente, mas assumindo o papel de investigador quanto as dificuldades apresentadas de modo a favorecer seu planejamento quanto a revisões pontuais diagnosticas necessárias a partir da sua percepção durante o processo de resolução dos alunos.

4 RESOLUÇÕES COMENTADAS

4.1 POLIEDRO

Exercício 1

Por aplicação direta da relação de Euler para poliedro convexo, temos que:

$$F + V - A = 2$$
$$6 + 8 - A = 2$$
$$6 + 8 - 2 = A$$
$$A = 12$$

Portanto, o poliedro que segundo o enunciado apresenta 6 faces, 8 vértices a partir da relação de Euler, possui um total de 12 arestas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Levando em consideração a ausência de um registro figural nesse problema, espera-se que o aluno ao fazer uso das informações definidas nos registros discursivos (apreensão discursiva) tenha o entendimento de que se trata de um objeto geométrico. Logo, a construção de um registro figural acontece de natureza consciente (semiótica ou mental) ou não, uma vez que, não se acessa um objeto matemático sem se utilizar de uma representação.

Se a representação da figura for inconsciente o estatuto do objeto geométrico em conjunto com suas propriedades implicará na imediata aplicação da Relação de Euler.

Porém, se a representação da figura for consciente e semiótica, a apreensão perceptiva irá favorecer a apreensão operatória (modificação mereológica), assim, manipulando seus elementos geométricos (aresta, vértice e face) sob a coordenação da apreensão sequencial de modo a iniciar por polígonos com os menores números de lados. Todavia, a atividade de tratamento em dispor os polígonos no plano, é fundamental, uma vez que, a planificação de um objeto tridimensional consiste em dispor todas as figuras planas que formam a superfície do objeto, alocando-as de maneira que represente as dimensões: comprimento, largura e altura.

Exercício 2

Totalizando 8 (oito) faces, onde 2 (duas) são triangulares e 6 (seis) pentagonais, de acordo com a igualdade $2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \cdots$, temos que:

$2A = 3V_3 + 5V_5$
$2A = 3.2 + 5.6$
$2A = 6 + 30$
$2A = 36$
$A = 18$

Tendo o conhecimento do número de faces e do número de arestas, e se tratando de um poliedro convexo, através da relação de Euler para poliedros convexos, o número de vértice é:

$V + F - A = 2$
$V + 8 - 18 = 2$
$V - 10 = 2$
$V = 2 + 10$
$V = 12$

Portanto, o poliedro em questão possui 8 faces, 18 arestas e 12 vértices.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro figural presente nesse exercício expõe de maneira destacada o poliedro, ao contrário do que acontece no registro discursivo. Dada a natureza heurística da imagem, o aluno pode se propor a esboçar a planificação do poliedro a fim de contar os elementos da figura (face, aresta e vértice) e solucionar o exercício.

Porém nesse caso é importante para o professor ter o entendimento de que o sucesso da planificação está relacionado a qualidade da interação entre as apreensões perceptiva e discursiva.

Uma vez que do ponto de vista cognitivo a conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva tem como resultado não mais um registro figural anônimo, e sim uma figura geométrica com seu próprio estatuto (definição, propriedade, etc.).

Logo a figura plana do pentágono em destaque na imagem é um forte candidato a ser ponto inicial do esboço da planificação. A apreensão operatória mereológica atua desconstruindo o objeto dimensionalmente em elementos como polígonos (2D), lado (1D) e vértice (0D) e a apreensão posicional busca simultaneamente identificar as faces não visíveis na imagem de modo a ser possível estabelecer no plano todas as figuras que formam a superfície do objeto alocando-as de maneira que represente as dimensões: comprimento, largura e altura.

Por fim o aluno se utilizando do estatuto do objeto matemático possa formalizar a contagem dos respectivos elementos – aresta, vértice e face, dando assim por encerado o exercício.

Por outro lado, o aluno pode se dispor de um processo resolutivo a partir da utilização do estatuto do objeto geométrico. No entanto, esse tipo de resolução não exclui o registro figural, mas através da interação da apreensão perceptiva e discursiva, a figura geométrica passa a ser compor o processo de resolução através da aplicação da relação de Euler para poliedro convexo.

<u>Exercício 3</u>

Sendo 60 faces triangulares, pela relação $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$ segue que:

$$2A = 3F_3$$
$$2A = 3.60$$
$$2A = 180$$
$$A = 90$$

Pela relação de Euler para poliedro convexo temos que:

$$V + F - A = 2$$
$$V + 60 - 90 = 2$$
$$V = 32$$

Logo, o número de vértice do poliedro em questão é equivalente a 32.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Esse exercício apesar da apreensão perceptiva sobre a imagem evocar uma resolução heurística, dado o fato do poliedro trazer consigo algo muito próximo da imagem de um cubo, o aluno pode se dispor a desenvolver um processo resolutivo se utilizando da representação discursiva, uma vez que a proposta do exercício é validar ou não a relação de Euler.

Importante para o professor é ter clareza de que, mesmo que o aluno desenvolva essa solução aparentemente distante do registro figural, a apreensão perceptiva atuou coordenando transformações na figura do tipo mereológica e posicional em nível mental. As transformações oportunizaram não só identificar, mas principalmente quantificar os elementos (face e/ou aresta e/ou vértice) para então, se utilizando do estatuto do objeto geométrico, possa validar ou não a relação de Euler de acordo com a proposta do exercício.

É pertinente descrever ainda sobre as vantagens de uma representação figural, quando ela apresenta um número significativo de elementos geométricos e que, tais elementos destacados na figura, sejam também destaques tanto no enunciado quanto na composição da solução do exercício.

Quando esse fato ocorre, o aluno com dificuldade em diferenciar o objeto da sua representação, coloca a figura como sendo a única comunicação com a solução do exercício.

Porém, o registro figural precisa cognitivamente que a associação das apreensões perceptiva e discursiva transforme a imagem na figura geométrica do poliedro. Desse modo a propriedade heurística própria da imagem geométrica coordenará a apreensão operatória (mereológica e posicional) a fim de esboçar a planificação do poliedro de modo que possa ao identificar os elementos (faces, arestas e vértices) validar ou não a relação de Euler.

Exercício 4

Sendo 14 faces, com 6 (seis) quadrados e 8 (oito) triângulos. O número de arestas é:

$$2A = 3F_3 + 4F_4$$
$$2A = 3.8 + 4.6$$
$$2A = 24 + 24$$
$$2A = 48$$
$$A = 24$$

Quanto aos seus vértices, todos são colocados no meio de um lado do cubo, e, portanto, o seu número é igual ao número de arestas do cubo, ou seja, 12. Substituindo as grandezas na relação de Euler, obtém:

$$V + F - A = 2$$
$$12 + 14 - 24 = 2$$

Concluindo assim, validação da relação de Euler para poliedro convexo, em particular para cuboctaedro.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Importante destacar que a semelhança desse exercício ao primeiro dessa lista de atividade se resume simplesmente a duas ocorrências: a primeira se julga ao fato de abordarem o mesmo objeto matemático e a segunda se baseia na ausência de um registro figural. Porém, a composição elementar desse poliedro impossibilita a construção do registro semiótico seja do poliedro em si ou de sua forma planificada.

Como já descrito anteriormente, o aluno a partir da apreensão discursiva é direcionado a acessar o estatuto do objeto de modo que possa mentalmente, obter registros figurais do próprio objeto geométrico a fim de que, o desconstruindo dimensionalmente, possa estabelecer relações entre seus elementos com intuito de identificar e quantificar o número de vértice e aresta uma vez que a quantidade de faces faz parte do registro discursivo do enunciado.

É comum o aluno diante dessa configuração de exercício não demonstrar iniciativa de resolução. Para o professor essa atitude deve ser reconhecida como sendo a dificuldade do estudante em diferenciar o objeto matemático da sua representação. Para minimizar esse problema é importante que o professor construa situações de ensino e aprendizagem que sejam pautados na clareza e completude das definições, teoremas e proposições, porém favorecendo sempre as figuras geométricas com seu papel heurístico. Desse modo as apreensões em geometria contribuirão para uma aprendizagem fundamentada tanto nos conceitos e habilidades geométricas quanto no raciocínio lógico-dedutivo.

4.2 PRISMAS

Exercício 1

Quanto aos cubos vermelho, pela hipótese é utilizado um único cubo, logo a soma da massa até o momento corresponde a 5 gramas. Já os cubos azuis ao revestirem o cubo vermelho, tem como formação um novo cubo de aresta cuja medida da aresta é de 3 unidades elementares do cubo, a partir da relação $V = a^3$, segue que:

$$V = a^3$$

$V = 3^3 = 27\ cubos$ cubos de 8 gramas cada, totalizando a massa em:

$$26 \times 8 = 208\ gramas + 5\ gramas = 213\ gramas$$

Da mesma forma, a próxima figura cúbica possuirá 5 unidades elementares de cubo por dimensão. Da relação de volume, temos:

$$V = a^3$$

$$V = 5^3$$

$$V = 125 \ cubos$$

Por fim, subtrair a quantidade do cubo de aresta com dimensão 3 unidades, ou seja:

$$125 \ cubos - (26cubos \ azuis + 1cubo \ vermelho) = 98cubos \ verdes$$

Concluindo a relação de massa do cubo com 125 unidades, temos:

Quadro 1: Relação: cor e quantidade de cubos

COR	QUANTIDADE	PESO EM GRAMAS POR UNIDADE	PESO TOTAL EM GRAMAS
VERMELHO	**1**	**5**	**5**
AZUL	**26**	**8**	**208**
VERDE	**98**	**12**	**1176**

Fonte: Produção do autor, 2020.

Então, a atividade tem como expectativa que os alunos concluam registrando um peso total de 1389 gramas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O contexto deste exercício ao envolver um elemento figural (cubo elementar) num processo de construção acumulativa com regras bem definidas no enunciado, pode sugerir num primeiro momento, que este registro figural seja optativo quanto ao sucesso da compreensão e resolução do exercício. No entanto, sua ausência compromete a todos que cognitivamente apresentam resistência em contemplar os objetos geométricos envolvidos, consequência direta da dificuldade em diferencias um objeto matemático de sua representação.

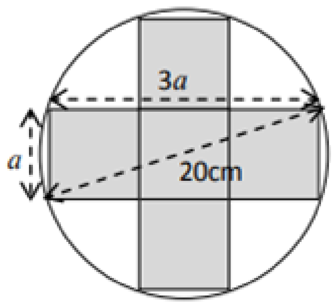
Além do mais a figura apresentada neste exercício possui congruência semântica ao enunciado do problema, o que favorece a sua produtividade heurística, logo o início do processo resolutivo adquire uma pluralidade de tratamentos geométricos e matemáticos que juntos caracterizam uma resolução clara e coerente.

Portanto, a representação figural desse exercício ao denotar elementos estruturais de natureza heurística, no qual a formação dos cubos maiores acontece a partir do revestimento por uma única camada de elementos cúbicos elementares, o aluno pode construir a solução a partir de registros discursivo mediante tratamentos numéricos tradicionais.

Tal atitude é oportunizada em função da apreensão perceptiva se associar a apreensão operatória de tal modo, que o processo de resolução seja pautado simplesmente na manipulação das partes a fim formar o todo. A essa associação cognitiva imediata entre as apreensões perceptiva e operatória para Duval, o resultado é o que comumente chamamos de visualização. Porém, dada a dinâmica do processo heurístico, o aluno ao construir seu processo resolutivo de modo a satisfazer a proposta do exercício, ele está operando também a partir da apreensão discursiva, pois é um fator decisivo para que a partir das informações dadas, a transformação mereológica e posicional nesse exercício possa estabelecer relações válidas com as unidades cúbicas elementares de modo que se desenvolva a correta resolução do problema.

Exercício 2

Pela aplicação direta do teorema de Pitágoras, tomando o diâmetro de 20 cm com sendo correspondente a medida da hipotenusa e seus catetos sendo representado algebricamente por $3a$ e a, segue que:



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$20^2 = (3a)^2 + a^2$$

$$a = \pm\sqrt{40}$$

Considerando a medida da aresta do cubo uma medida positiva e aplicando a relação que determina o volume do cubo, temos que:

$$V = a^3$$

$$V = (\sqrt{40})^3$$
$$V \cong 253cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

É comum que um registro figural possua elementos cuja função seja estritamente estabelecer para o exercício um grau de contexto; identificar esses elementos favorece o uso da imagem de forma coerente e funcional. A leitura do aluno deve destacar a completude do registro discursivo em relação à proposta do exercício, logo o registro figural pode num primeiro momento parecer um acessório decorativo e que seu uso é de caráter optativo.

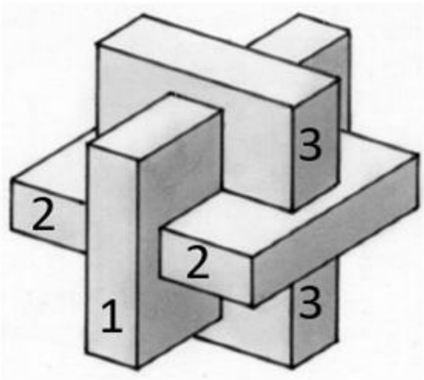
Para a teoria de Registros de Representação Semiótica as figuras formam um suporte intuitivo nos passos da resolução dando uma visão mais heurística de como explorar os elementos geométricos envolvidos. Além do mais, o único acesso ao objeto matemático é pela sua representação, portanto, por mais que simples uma figura aparenta ser é papel do professor estimular os alunos a explorá-la levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial.

A resolução desse exercício requer ação conjunta das apreensões perceptiva e discursiva estabelecendo uma teorização da representação figural a partir da compreensão das formas geométricas envolvidas e das informações disposta no enunciado, essa nova imagem seja semiótica ou não, Duval a denomina por figura geométrica.

O aluno a partir do esboço da figura geométrica deve perceber que o processo resolutivo permeia o uso de unidades geométricas dimensionalmente menor, como por exemplo, a aplicação da medida do diâmetro (1D) na relação conhecida por teorema de Pitágoras, a fim de determinar a medida da aresta (1D) da caixa (3D). A apreensão operatória mereológica ao desconstruir a figura dimensionalmente se aporta na teorização do objeto geométrico, mas a apreensão perceptiva tem aqui a responsabilidade de coordenar o que e onde desconstruir.

Exercício 3

Entre algumas estratégias possíveis, tomemos o paralelepípedo (A), conforme a figura abaixo:



Fonte: http://matematicasemfronteiras.org/provas.html

O volume do paralelepípedo (1) é o produto de suas dimensões, então segue que $v = 2 \times 8 \times 10 = 160cm^3$. Considere o agora o paralelepípedo (2) dividido em duas partes de dimensões $(8 \times 2 \times 4)cm$ cada, logo como volume total do paralelepípedo (2) é $v = 2(8 \times 2 \times 4) = 128cm^3$. E por fim, seja o sólido (3), dividindo em duas partes iguais, temos que cada parte consiste na diferença de dois paralelepípedos, portanto o volume do sólido (3) é $v = 2[(8 \times 2 \times 4) - (3 \times 2 \times 2)] = 104cm^3$. Portanto, adicionando os volumes, temos $160cm^3 + 128cm^3 + 104cm^3 = 392cm^3$.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

A figura nesse exercício expõe a manipulação dos três sólidos apresentados no enunciado de modo a formar um único objeto tridimensional favorecendo o registro da imagem no que tange a busca por uma solução correta para o problema, porém dada a natureza heurística dessa problematização, os alunos podem apresentar várias formas distintas de resolução, o que reafirma o potencial operacional de uma imagem.

Portanto, a tomada de raciocínio do aluno tendo na apreensão perceptiva a identificação imediata da formação do objeto tridimensional a partir dos paralelepípedos descritos no enunciado, não desqualifica a importância da apreensão discursiva nesse tipo de exercício, pois uma vez quantificado, as modificações que o objeto oportuniza se faz necessário identificar entre elas quais manteriam os dados iniciais e quais teriam um custo cognitivo menor em seu processo resolutivo.

As modificações não são ao acaso, a apreensão operatória mereológica é determinante e a congruência das partes com o paralelepípedo descrito no enunciado favorece várias desconstruções.

Ao professor cabe aqui a sugestão que, exercícios dessa mesma dinâmica possam ser colocados como proposta para os alunos que através de materiais comuns (caixas de papelão por exemplo) construam novos sólidos a fim desenvolverem as habilidades heurísticas pertinentes aos objetos geométricos.

Exercício 4

No primeiro momento vamos determinar quantos contêineres cabem na Figura (Superfície plana), logo:

Comprimento: 32 ÷ 6,4 = 5 contêineres

Largura:10 ÷ 2,5 = 4 contêineres

Assim, cabem 4 x 5 = 20 contêineres na superfície disponível.

Dependendo da altura do “reservatório de contêineres” da Figura 2 poderemos ter várias camadas de 20 contêineres. Mas de acordo com a proposta do exercício que busca a menor altura possível, basta distribuir os 100 contêineres de 20 em 20, lembrando que esse valor representa a disposição máxima no plano, portanto 100 ÷ 20 = 5 estabelece que a altura mínima será de 12, 5 metros.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

A abordagem desse modelo de exercício que busca resgatar a aplicabilidade das habilidades matemáticas colabora com restrição a produtividade heurística do processo resolutivo, uma vez que nem todo aluno será deslocado para o contexto exposto no registro discursivo. Portanto, cabe ao professor em sua prática de ensino estabelecer para o aluno que o estatuto do objeto geométrico sobrepõe ao contexto em que está inserido.

A qualidade dos elementos figurais presentes nas imagens leva a apreensão perceptiva desenvolver operações cognitivas como o reconhecimento dos objetos geométricos inseridos no exercício e também a escolha e coordenação dos tratamentos necessários para o processo de resolução. Na apreensão discursiva (subordinada à apreensão perceptiva) aplica-se teorização da imagem dos objetos geométricos de modo que a determinação da altura mínima estabelece a desconstrução dimensional e a ocupação de forma organizada (apreensão operatória mereológica e posicional).

Assim como no exercício anterior, o professor pode remodelar o contexto, conservando os elementos geométricos a partir de situações simples como, por exemplo, ao associar uma quantidade limitada de livros didáticos de uma mesma disciplina, e o desejo de organizá-los num espaço limitado – exemplo: a mesa do professor. Atitudes simples, mas com um nível de percepção visual elevado contribuem de forma significativa o desenvolvimento do olhar resolutivo sobre os problemas geométricos.

4.3 PIRÂMIDES

Exercício 1

A resolução poderia ser desenvolvida pela relação direta do volume de tronco de uma pirâmide, mas considerando a percepção da figura e o contexto da questão, trataremos a solução por diferença de pirâmides.

Portanto, temos que o volume de parafina gasto na nova vela corresponde à subtração do volume da pirâmide maior, com aresta da base de 6 cm e altura de 19 – 3 = 16 cm, pelo volume da pirâmide menor, com 1,5 cm de aresta da base e 4 cm de altura. Então:

$$V_{maior} - V_{menor}$$

$$\frac{1}{3}(6 \times 6 \times 16) - \frac{1}{3}(1{,}5 \times 1{,}5 \times 4)$$

$$192cm^3 - 3cm^3 = 189cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

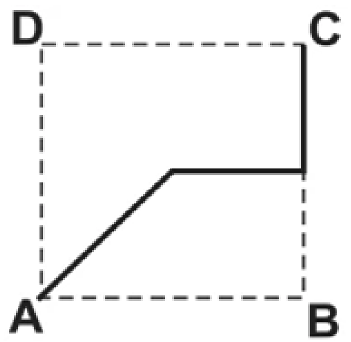
Contracenando com o registro discursivo com uma expressiva carga de informações, o registro figural, apesar de não dispor de muitos elementos descritivos seu mal-uso pode favorecer uma tomada de decisão pelo aluno de modo que o custo cognitivo seja aumentado consideravelmente quando se busca atender a proposta do exercício tomando como figura geométrica o tronco de pirâmide.

Portanto, a visualização (apreensão perceptiva e operatória) do objeto geométrico deve ser subordinada a apreensão discursiva de modo que o tratamento a ser efetuado seja com intuito de buscar a diferença entre pirâmides. A desconstrução em partes (modificação mereológica) coordenada pela apreensão perceptiva direciona o processo heurístico a novamente se utilizar da modificação mereológica desconstruindo agora dimensionalmente os objetos geométricos (3D) em elementos geométricos como arestas (1D), pé da perpendicular (0D) e consequentemente a altura (1D) de modo que, usando do estatuto das pirâmides, seja possível determinar seus respectivos volumes podendo assim estabelecer a diferença entre eles, o que atende a proposta do exercício.

É sugestivo que o professor construa com seus alunos o processo resolutivo direto considerando para isso como objeto geométrico o tronco de pirâmide. Uma vez que nenhuma representação possui a totalidade do objeto matemático, logo desenvolver essa prática pedagógica ampliaria a percepção construtiva da formação dos objetos geométricos pertinentes a esse exercício.

Exercício 2

Considerando a pirâmide regular e que segundo o enunciado (discurso e figura) o ponto E corresponde ao único ponto mencionado que não pertence a base da pirâmide devendo então ser projetado sobre a base. Se utilizando da definição de projeção ortogonal, o trajeto descrito por João partindo do ponto A, passando por E, em seguida deslocando até o ponto M e por fim, seguindo até o vértice C, sempre em linha reta corresponde a seguinte figura abaixo:



Fonte: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Em sua grande maioria, exercícios dessa natureza (projeção no plano) priorizam o olhar sobre o conjunto dos registros semióticos envolvidos no problema, uma vez que a apreensão perceptiva sobre a imagem ao coordenar as apreensões operatórias (mereológica, ótica e posicional), precisa ser orientada pela apreensão discursiva, já que as diretrizes do deslocamento sobre o objeto geométrico estão inseridas no enunciado do problema.

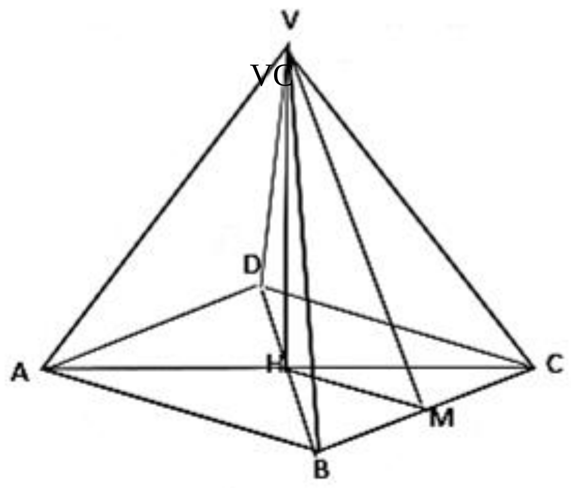
Portanto, a expectativa do professor quanto a resolução não só desse exercício, mas de todos que compartilham da mesma natureza é de que o aluno, a partir da apreensão perceptiva sobre o registro figural, tenha certeza de que o registro de saída (solução) não necessariamente precise apresentar congruência com o registro de entrada (entrada).

Nas operações de tratamento desencadeadas pela apreensão perceptiva subordinando a apreensão discursiva de imediato, temos a desconstrução dimensional, o que possibilita a modificação ótica das unidades figurais através da superposição sobre o plano que, de acordo com a especificidade do tratamento, de forma mais discreta mas não menos importante, a modificação posicional torna evidente a projeção sobre o plano em decorrência de um certo deslocamento orientado no espaço.

Considerando que os exercícios que contemplam projeções no plano estimulam as diversas perspectivas de olhar para um objeto geométrico e que particularmente cada projeção visual do objeto é única quanto aos elementos que a compõe, atividades dessa natureza devem compor diariamente o portfólio do professor de matemática

<u>Exercício 3</u>

Seja o triângulo retângulo VHM com ângulo reto em H. Temos então que o segmento $\acute{HM}$, é apótema da base quadrada onde $\acute{HM}$=107 metros.



Fonte: Produção do autor, 2020.

Já o segmento $\acute{VM}$ ao representar a altura do triângulo isóscele que compõe as faces laterais da pirâmide, da aplicação imediata do teorema de Pitágoras, temos:

$$\acute{VM} = \sqrt{\acute{VB}^2 - (\frac{\acute{BC}}{2})^2} = \sqrt{204^2 - 107^2} = \sqrt{30167} metros$$

E por fim, a medida do segmento $\acute{VH}$ que representa a medida da altura segue também por mais uma aplicação do teorema de Pitágoras, onde:

$$\acute{VH} = \sqrt{30167 - 107^2} \cong \sqrt{18718} \cong 137m$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Nessa questão alguns elementos colaboram para que se estabeleça uma proposta heurística para o exercício. Primeiramente temos que considerar que a imagem para o aluno não o insere num contexto novo, uma vez que traz como objeto de estudo a famosa pirâmide egípcia de Quéops. Por consequência, a apreensão perceptiva terá uma menor resistência em estabelecer alguns registros figurais elementares do objeto geométrico, como por exemplo sua base quadrada.

Ainda dentro da proposta heurística que a imagem dessa questão oportuniza, é pertinente estabelecer um cenário em que existam alunos com dificuldade em associar uma representação discursiva ao estatuto do objeto. Poderiam eles a partir de um registro figural contextualizado intuir pela apreensão perceptiva hipóteses capazes de operacionalizar os tratamentos matemáticos necessários para a construção da resolução.

Como por exemplo, o fato de o aluno considerar a partir da visualização da imagem que o vértice da pirâmide tem sua projeção no plano da base exatamente na interseção de suas diagonais. Resultado este também visto através da figura geométrica da pirâmide gerada pela associação das apreensões perceptiva e discursiva.

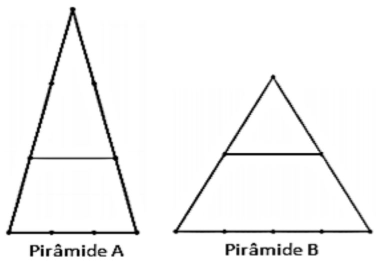
Logo, através da modificação mereológica, desconstruindo dimensionalmente a figura (3D) em figuras (2D), mais especificamente triângulos retângulos, que de acordo com o estatuto da pirâmide regular de base quadrada a intercessão das diagonais (0D) da figura da base coincide com o pé da perpendicular (1D) que passa pelo vértice (0D) da pirâmide.

Espera-se do aluno nesse exercício a aplicação imediata do teorema de Pitágoras dada a congruência dos elementos geométricos envolvidos.

<u>Exercício 4</u>

A partir das informações dadas na questão, existe duas maneiras de adicionar os 4 segmentos de 4cm cada de modo se obter uma pirâmide.

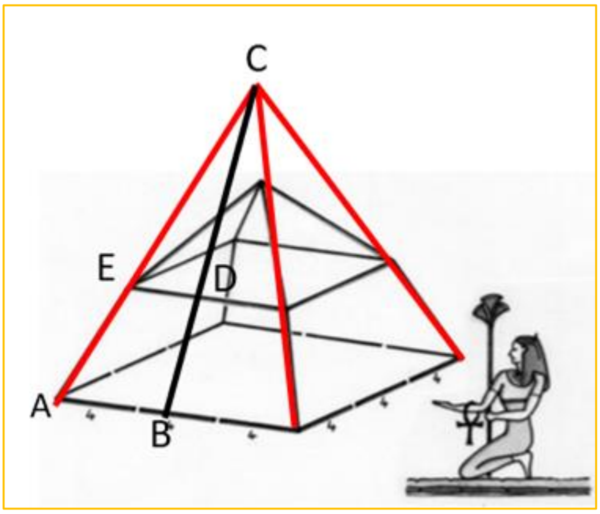
FACE LATERAL DAS PIRÂMIDES



Fonte: Produção do autor, 2020.

Na pirâmide A, temos a adição do segmento de medida igual a 4 cm na aresta da base (a), logo, $a = 4 \times 4 = 16cm,$ já na pirâmide B conforme o enunciado temos a adição do segmento de medida 8cm na aresta lateral (b).

Uma forma dos alunos argumentar poderia ser por semelhança de triângulos, onde vamos descrever para o caso da pirâmide A, sendo análogo para o outro caso.



Fonte: Produção do autor, 2020.

Portanto, considere o triângulo ABC (cf. Figura acima), com ângulo reto em B e o triângulo CDE, com ângulo reto em D, pelo estatuto de pirâmide reta é de considerar que os alunos associem os triângulos por semelhança pelo caso AA, onde o segmento os segmentos $\acute{A}C$e $\acute{C}E$ pertencem a mesma aresta, o que implica que < BAC é equivalente < DCE, assim como <ABC e <CDE são ângulos retos por construção, logo:

Sendo $\acute{A}B = 4cm$, $\acute{E}D = 6cm$, $\acute{A}C = 16cm$e $\acute{A}E = x$, temos:

$$\Delta ABC\Delta EDC \leftrightarrow \frac{\acute{A}B}{\acute{E}D} = \frac{\acute{A}C}{\acute{C}E} \leftrightarrow \frac{4}{6} = \frac{16}{x} \leftrightarrow x = 24$$

O que confirma o fato de ao adicionar um segmento de medida 8cm na aresta lateral cujo tamanho era de 16 cm, sua medida total passa a corresponder 24 cm, validando assim o objeto geométrico denominado- pirâmide regular de base quadrangular.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Dada a estrutura peculiar do exercício em supor uma limitação quanto aos procedimentos a serem executados, uma vez que, disponibiliza duas opções bem definidas de segmentos para compor a pirâmide. Além do mais, o registro discursivo já denota positivo para a existência da pirâmide, restando então para o aluno vincular as informações do enunciado aos processos cognitivos de resolução que toda figura geométrica oportuniza.

Antes de discorrer sobre as apreensões em geometria para esse exercício, devo chamar a atenção para a simplicidade estrutural do problema. Situações desta natureza envolvendo tomada de decisão são excelentes propostas de atividades matemáticas, principalmente quando envolvem objetos geométricos com seus estatutos já definidos. A partir de materiais comuns, como o uso de palitos de madeira ou algo similar com tamanhos pré-definidos pelo professor ou não, é possível evocar a turma a provar a possibilidade de construir determinados sólidos geométricos.

Tendo em vista o fato de a imagem expor os elementos figurais de modo privilegiado, a apreensão perceptiva e a apreensão discursiva disponibilizam vários processos resolutivos com seus respectivos tratamentos geométricos. Para o aluno essa dinâmica deve ser vista como uma consequência direta das informações transmitidas pela imagem.

O processo de resolução tem seu ponto de partida na ação da apreensão operatória mereológica, que coordenada pela apreensão perceptiva estabelece a desconstrução dimensional do objeto (3D) como sendo o tratamento geométrico que possibilitará agregar os quatros segmentos descritos no enunciado. Reconfigurando os elementos geométricos em triângulos (2D) e utilizando as relações próprias do estatuto das pirâmides com o objetivo de validar as alterações na figura a fim de associar o objeto formado a uma pirâmide de base quadrada.

4.4 CILINDRO

Exercício 1

A resolução consiste numa aplicação direta da relação de volume de um cilindro reto, de acordo com o enunciado temos que o diâmetro equivale a 30cm e altura da coluna de leite corresponde a medida de 60cm, logo:

$$V = \pi \times r^2 \times h$$
$$V = \pi \times 15^2 \times 60$$
$$V = 13500\pi cm^3$$

Se utilizarmos uma aproximação para π, e considerarmos $1cm^3 = 1ml$, temos então que quantidade de leite é equivalente a 42,390 litros, adotando $\pi \cong 3{,}14$.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro figural neste exercício pode num primeiro momento sugerir que sua importância dentro do contexto resolutivo do problema seja ínfima, dada a ausência de informações métricas a respeito do objeto matemático representado.

Porém, tomando um olhar mais atento, se percebe que o registro discursivo em nenhum momento descrimina a forma do recipiente que é armazenado o leite. Podemos supor que, alguns alunos arriscariam a forma cilíndrica como sendo a forma idealizada nesse exercício, seja pelo contato com outros exercícios semelhantes, ou por já terem tido contato social com a atividade contextualizada no exercício.

Mas no geral, o registro figural necessariamente não precisa estar respaldado em informações métricas, mas sim expor a partir da apreensão perceptiva o objeto matemático relevante a proposta do exercício.

Portanto a resolução desse problema permeia a interação das apreensões perceptiva e discursiva como gesto intelectual inicial a fim de que, possa ocorrer a desconstrução dimensional da forma cilíndrica (3D) em figuras elementares capazes de operacionalizar os tratamentos matemáticos comumente vistos pelos alunos como sendo as fórmulas de aplicação em geometria espacial, em particular a que determina o volume de um cilindro.

<u>Exercício 2</u>

Sendo que validar ou não a tese, passa pela análise do volume, onde o volume de um cilindro reto implica no produto entre a área da base pela sua altura, o que nessa atividade mostra que:

i. **Área do círculo da base da leiteira representada por A_L;**
ii. **Área do círculo da base do copo representa por A_C**
iii. **Altura da leiteira representado por H;**
iv. **Altura do copo representado por h.**

Onde:

$$A_L = 4A_C \text{ e } H = 5h$$

Então:

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = A_L.H$$

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = 4A_C.5h$$

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = 20.A_C.h$$

$$Volume\ \ da\ \ leiteira(V_L) = 20.V_C(Volume\ \ do\ \ copo)$$

Porém, o enunciado da questão afirma que o objetivo está em abastecer os copos pela metade, e de modo que não exista sobra, logo, a atitude não está correta, uma vez que enchendo a leiteira cheia e cada copo utilizando a metade de sua capacidade será possível servir 40 copos, o dobro que se deseja na atividade.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O aluno diante deste exercício pode expressar um certo desconforto em produzir seu discurso argumentativo, uma vez que em seu cotidiano escolar problemas de geometria espacial se resumem a um desdobramento de fórmulas e como gesto conclusivo decidir em qual alternativa marcará o x. Porém, desenvolver no aluno a habilidade argumentativa, além de favorecer o desenvolvimento das funções cognitivas, contribui ainda para a sua organização intelectual que por experimentação passa a categorizar cognitivamente cada ação do raciocínio lógico-dedutivo.

Adaptações nos exercícios são ações simples e de grande impacto no desenvolvimento do registro discursivo no aluno. Como este exercício extraído do Exame Nacional do Ensino Médio cuja proposta é descrever um argumento na forma discursiva sobre uma determinada decisão tomada a partir de objetos geométricos.

Inicialmente é importante evidenciar que, quando o aluno permite que as propriedades heurísticas da imagem restrinjam a dinâmica da interação entre as apreensões perceptiva e discursiva, é bem provável que se desenvolva um processo resolutivo equivocado e distorcido da realidade do exercício.

Portanto, a ação da apreensão perceptiva sobre a imagem, sinergicamente regida pela apreensão discursiva precisa estar firmada no estatuto do objeto matemático envolvido.

Desse modo a apreensão operatória mereológica em seu processo cognitivo de desconstruir dimensionalmente o cilindro (3D) oportuniza identificar elementos figurais dimensionalmente inferiores que, dentro das definições do objeto geométrico sua manipulação em tratamentos matemáticos resultará no processo resolutivo correto desse exercício.

Exercício 3

Fazendo por etapa, temos:

i. Volume do copo: $V = \pi \times r^2 \times h = 3 \times 3^2 \times 15 = 405cm^3$

ii. Volume do cubo de gelo: $V = a^3 = 2^3 = 8cm^3$

iii. Volume da rodela de limão: $V = \pi \times r^2 \times h = 3 \times 2^2 \times 0{,}5 = 6cm^3$

Como segundo o enunciado, as duas rodelas de limão e os três cubos de gelo já ocupam parte do volume do copo, então pela diferença entre volumes se define o volume máximo de refrigerante que pode ainda ser colocado no copo, ou seja:

$$V_{refrigerante} = V_{copo} - (3 \times V_{gelo} + 2 \times V_{limão}) = 405 - (3 \times 8 + 2 \times 6) = 369cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Não é difícil se deparar com exercícios envolvendo geometria espacial que não apresentam um registro figural. Em concordância com a pesquisa, a existência de um registro figural potencializaria algumas operações cognitivas que explorariam soluções para a resolução do problema. Porém, é importante que o professor sempre evidencie o papel dos registros semióticos no processo de ensino, principalmente no que se refere a geometria.

Considerando que o registro discursivo tem um forte apelo ao contexto e que o processo resolutivo precisa se dividir por etapas, dado a sua composição de objetos geométricos sugerir a existência de dois cilindros distintos (copo e a rodela de limão) e um cubo (gelo), é possível a ação de esboçar os objetos espaciais de modo a impor um princípio de organização quanto aos tratamentos matemáticos em cada caso favorece a ação da apreensão sequencial nesse caso.

Independente por qual objeto espacial se inicia, a sinergia entre a apreensão discursiva e a apreensão perceptiva ocorrerá a fim de coordenar as modificações sobre o objeto geométrico. Normalmente acontece em processos para se determinar volume e a desconstrução dimensional, visto a importância que os elementos, a se utilizar nas fórmulas, sejam obtidos a partir das definições e axiomas próprios dos objetos estudados, desse modo os resultados serão coerentes com a proposta do exercício.

Portanto, independentemente do exercício apresentar ou não um registro figural, o professor precisa durante o processo de ensino enfatizar para que exista voluntariamente o trânsito entre no mínimo duas representações semióticas, o que na geometria já é algo próprio do objeto geométrico.

Exercício 4

Item (a): a resposta almejada passa pelo cálculo da área total da figura, destacando algumas representações:

- Embalagem (1), medida do raio, representada por "R" e sua altura por "h";
- Embalagem (2), medida do raio, representada por "r" e sua altura por "H";
- Área do círculo da base da embalagem (1) será equivalente a representação A_1 e de forma análoga A_2 representará a área do círculo da base da embalagem (2).
- S_1 é a representação da área total da superfície da embalagem (1)
- S_2 é a representação da área total da superfície da embalagem (2)

A partir das hipóteses se conclui que:

$$R = 2r \text{ e } H = 2h$$

Portanto, determinando a área superficial da embalagem (1) temos:

$$S_1 = 2.A_1 + 2.R.\pi.h$$

$$S_1 = 2.(2r)^2.\pi + 2.(2r).\pi.h$$

$$S_1 = 8.r^2.\pi + 4.r.\pi.h$$

Quanto a embalagem (2), analogamente:

$$S_2 = 2.A_2 + 2.r.\pi.H$$

$$S_2 = 2.r^2.\pi + 2.r.\pi.2.h$$

$$S_2 = 2.r^2.\pi + 4.r.\pi.h$$

A análise das expressões que determinam as áreas superficiais, em relação a área lateral as duas embalagens possuem a mesma superfície, porém a embalagem (1) têm a área da base equivalente ao quádruplo quando comparada a área da base da embalagem (2), e portanto o custo maior de produção será aquela que tiver a maior área superficial e logo, será a embalagem (1).

Item (b): O processo resolutivo é fundamentado pela capacidade de cada embalagem, uma vez que a hipótese afirma que ambas as embalagens estão sendo consideradas com seus respectivos volumes máximos, e a embalagem (1) ao custo de 16 reais, já a embalagem (2) ao custo de 10 reais, valores esses definidos para o consumidor.

$$Volume\ \ embalagem(1) = V_1 = A_1.h$$

$$Volume\ \ embalagem(2) = V_2 = A_2.H$$

Onde:

$$V_1 = (2r)^2.\pi.h$$

$$V_1 = 4.r^2.\pi.h$$

E:

$$V_2 = r^2.\pi.2.h$$

$$V_2 = 2.r^2.\pi.h$$

É possível percebe que a embalagem (1) possui o dobro da capacidade se comparada a embalagem (2), no entanto, para o consumidor seu custo não corresponde ao dobro do custo da embalagem (2), então, a embalagem (1) possui um melhor custo/benefício para o consumidor.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

É de se esperar que o aluno apresente dificuldade para determinar um processo resolutivo visto que, a ausência de registros numéricos aumenta consideravelmente a necessidade de que a apreensão discursiva, ao subjugar os registros figurais através da apreensão perceptiva, se estruture firmemente no estatuto do objeto geométrico.

O uso do registro algébrico pode ser outro fator que venha fazer com os alunos apresentem resistência em desenvolver os tratamentos geométricos e matemáticos necessário para se obter os resultados de modo a poderem formular a resolução através do registro discursivo argumentativo.

Entretanto, é papel do professor estimular o aluno a valorizar a ação das apreensões discursivas e perceptivas, uma vez que, para o item (a), o tratamento geométrico parte em desconstruir o objeto (3D) dimensionalmente a fim de visualizar sua extensão no plano de modo que, uma vez identificando as unidades geométricas elementares possa se utilizar dos tratamentos matemáticos obtendo assim, grandezas quantitativas que irão compor a base argumentativa do discurso.

Quanto ao item (b), exige uma sequência de procedimentos heurísticos já muito comentado nesse caderno, uma vez que a interpretação já iniciada no item (a) participa ativamente na ação das apreensões discursiva e perceptiva em operacionalizar as figuras de modo a obter os seus respectivos volumes, e de forma análoga, uma vez possuindo as grandezas cognitivas, sua comparação é imediata e intuitiva quanto ao melhor custo benefício do ponto de vista do consumidor.

4.5 CONES

Exercício 1

Estabelecendo o volume da produção para uma plantação de 55 hectares, tendo uma estimativa de 50 sacas por hectares, e cada saca pesando 60 quilos, logo seu produto determinar o peso total da produção.

$$Produção(P) = 55(ha).50\left(\frac{saca}{ha}\right).60\left(\frac{kg}{saca}\right) = 165\ 000kg$$

Portanto, se a densidade da soja dada na questão representa:

$$densidade = \frac{800kg}{1m^3}$$

Proporcionalmente, segue que:

$$\frac{800kg}{1m^3} = \frac{165000kg}{x}$$

$$x = \frac{165000}{800} = 206{,}25m^3$$

Uma vez estabelecido o volume da produção a ser armazenada, basta determinar seus o volume do silo, podendo assim afirmar ou não a possibilidade de armazenamento da produção no silo.

Partindo, das propriedades do cilindro reto, temos que a relação do seu volume quanto a medida do raio da base e sua altura é:

$$VolumeCilindro = V_{CI} = r^2.\pi.h$$

Considerando o valor aproximado para PI (π)≅ 3,14 o volume de armazenamento do cilindro é:

$$V_{CI} = r^2.\pi.h$$

$$V_{CI} = 3^2.3{,}14.6$$

$$V_{CI} = 9.3{,}14.6 = 169{,}56m^3$$

Já o volume do cone reto é expresso como sendo:

$$Volume\ \ do\ \ cone = V_{CO} = \frac{r^2.\pi.h}{3}$$

$$V_{CO} = \frac{3^2.3{,}14.4}{3}$$

$$V_{CO} = \frac{9.3{,}14.4}{3} = 37{,}68m^3$$

Por fim, ao acumular o volume do cilindro com o volume do cone, temos:

$$V_{CI} + V_{CO} = 169{,}56m^3 + 37{,}68m^3 = 207{,}24m^3$$

Como a produção esperada é na ordem de 206,25m^3 e a capacidade de armazenamento é de 207 24 m^3, existe um excedente de espaço de 0,99 m^3, logo é afirmativo que a colheita possa ser armazenada no silo descrito no enunciado.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Exercícios que envolvam mais de um objeto geométrico são oportunos quando se busca observar a capacidade do aluno em diferenciar não somente o objeto matemático de suas representações, mas também correlacionar unidades geométricas entre os dois objetos.

Dada a clareza heurística do recurso visual da imagem, a apreensão perceptiva ao subordinar a apreensão discursiva apresentará os tratamentos pertinentes a cada objeto geométrico, pois mesmo possuindo unidades geométricas elementares equivalentes pelo estatuto de cada objeto, os tratamentos geométricos e matemáticos possuem suas particularidades.

Em vista que, a entrada correta no raciocínio resolutivo implica numa sequência didática particular para esse problema, a ação da apreensão sequencial também é requerida e, portanto, coordenará em conjunto com as apreensões discursivas e perceptivas as operações geométricas de modificação mereológica.

A construção dimensional sendo uma das ações da apreensão operatória mereológica visa identificar os elementos geométricos necessários de modo a quantificar grandezas como: área e volume; uma vez que, de acordo com o enunciado são componentes indispensáveis para compor o discurso argumentativo da solução.

Exercício 2

Pela aplicação direta do teorema de Pitágoras, temos que:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

$$h = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$h = \sqrt{16} = 4metros$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro figural desse exercício é de uma natureza heurística muito intuitiva. Nos elementos figurais que compõe a imagem, independente dos registros discursivos, os alunos são compelidos pela apreensão perceptiva a pressupor que em algum momento do processo resolutivo a aplicação do teorema de Pitágoras será realizada, caracterizando assim a forte influência que uma imagem impõe numa situação que envolva conceitos geométricos.

É evidente que apreensão perceptiva estabeleça com a apreensão discursiva a ação imediata da aplicação do teorema de Pitágoras, mas cognitivamente, sua percepção passa pela desconstrução dimensional, uma vez que elementos como hipotenusa e catetos são entes geométricos de dimensão um.

Outro fator que favorece essa percepção imediata é a congruência entre os registros geométricos uma vez que o problema já expõe as unidades métricas de cada componente do teorema a ser aplicado.

Casos assim, devem ser trabalhados não somente com a intenção de resolvê-los matematicamente, mas também de estudar os elementos geométricos dispersos no problema e suas implicações na figura geométrica.

Exercício 3

Considerando que se faz necessário a determinação do raio da base do cone, para que com a aplicação direta do teorema de Pitágoras seja possível determinar a medida da altura, logo:

$$A_{BASE} = \pi . r^2$$
$$28{,}26 = 3{,}14 . r^2$$
$$\frac{28{,}26}{3{,}14} = r^2$$
$$9 = r^2$$
$$3 = r$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$
$$h = \sqrt{5^2 - 3^2}$$
$$h = \sqrt{25 - 9}$$
$$h = \sqrt{16} = 4 \ metros$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Apesar de utilizar o mesmo registro figural do exercício anterior, a ausência da congruência entre os elementos figurais de entrada e saída colocam o processo de resolução num contexto no qual o aluno provavelmente encontrará dificuldade em desenvolver a resolução do exercício.

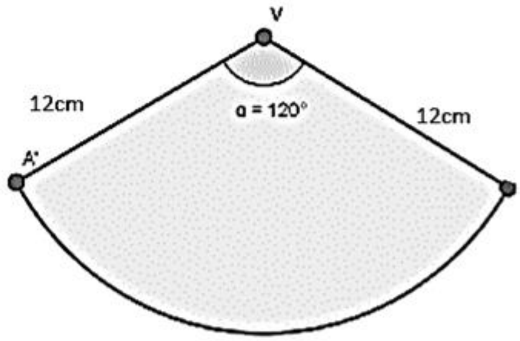
Importante destacar que o registro figural ainda instiga de forma intuitiva a aplicação imediata do teorema de Pitágoras, porém a falta da unidade geométrica do raio condiciona que se explore heuristicamente a figura através das apreensões perceptiva, discursiva e operatória.

Inicialmente as apreensões perceptiva e discursiva juntas coordenando os registros tanto discursivos quanto figurais integram uma rede de definições e propriedades que conduzem a necessidade de desconstruir o objeto (3D) em unidades elementares dimensionalmente menores.

Uma vez que, identificado as unidades geométricas elementares do sólido que tenham relações com as informações descritas no enunciado, é possível através de tratamentos matemáticos determinar a medida do raio e por consequência aplicar o teorema de Pitágoras, concluindo assim a resolução do exercício.

<u>Exercício 4</u>

Observando a figura abaixo e estabelecendo as hipóteses, temos:



Sendo a área de um setor circular uma parte proporcional da área do círculo, uma relação direta de proporção deve ser conduzida pelos alunos a fim de determinar a medida do raio.

Logo, se a área de um círculo representa:

$$Área_{círculo} = \frac{\propto}{360}\pi.R^2 \leftrightarrow \alpha = 360^0$$

A área do setor, é dada pela expressão:

$$Área_{setor} = \frac{\propto}{360}\pi.R^2$$

Portanto:

$$Área_{setor} = \frac{\propto}{360}\pi.R^2$$

$$Área_{setor} = \frac{120}{360}.3{,}14.12^2$$

$$Área_{setor} = 150{,}72cm^2$$

Considerando que a área da superfície é:

$$Área\ \ superficial_{CONE} = Área_{setor\ circular} = \pi.r.g$$

Onde o raio do setor circular é a medida da geratriz do cone, que pela hipótese temos que:

$$raio_{setor\ circular} = geratriz = g = 12cm$$
$$Área\ \ superficial_{CONE} = \pi.r.g$$
$$150{,}72 = 3{,}14.r.12$$
$$150{,}72 = 37{,}68.r$$
$$r \cong 4cm$$

Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2}$$
$$h = \sqrt{12^2 - 4^2}$$
$$h = \sqrt{144 - 16}$$
$$h = \sqrt{128} \cong 11{,}3cm$$

E, por fim, para determinar o volume do copo, basta que se estabeleça relação:

$$Volume_{CONE} = \frac{\pi.r^2.h}{3}$$
$$Volume_{CONE} = \frac{3{,}14.4^2.11{,}3}{3}$$
$$Volume_{CONE} = \frac{567{,}712}{3} \cong 189{,}2cm^3$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Os dados iniciais retratados nos registros semióticos têm como particularidade sua dimensão ser inferior à proposta do exercício. A figura evidencia uma região plana (2D) bem definida a partir do objeto que representa. Por outro lado, o registro discursivo complementa uma unidade geométrica da imagem a partir da medida do segmento que representa o raio (1D).

Contudo a proposta do exercício está em determinar o volume do copo a ser construído com os dados já apresentados. Vale destacar para o professor que exercícios desta natureza não são imediatos e costumam trazer dificuldade para o aluno proceder a um processo resolutivo coerente.

A apreensão perceptiva sobre a imagem ao estabelecer o olhar para o setor circular como sendo uma parte de um todo (círculo), orienta a ação da apreensão operatória mereológica a se utilizar das partes para se chegar ao todo. Um tratamento matemático imediato que reflete essa ação é o uso da regra de três.

Dada a extensão e as variedades dos tratamentos, é de fácil percepção a atuação da apreensão sequencial coordenando a ordem com que as operações precisam ser feitas. Além do mais, a necessidade de projetar a tridimensionalidade na figura a fim de potencializar a apreensão perceptiva com o objetivo de que as operações alcancem os resultados esperados, as apreensões operatórias (ótica e posicional) também compõe as operações cognitivas necessárias.

O que coloca esse exercício numa escala alta de dificuldade é em função da excessiva quantidade de tratamentos geométricos e matemáticos que a resolução exige. Como suporte a gama de operações cognitivas terem próximo a si a visualização do objeto geométrico que se deseja alcançar, contribui para o sucesso do processo resolutivo.

O que protagoniza o papel do professor em incentivar o aluno a se manter sempre próximo do seu olhar é o objeto matemático que se deseja explorar numa resolução de problema.

4.6 ESFERA

Exercício 1

Pelo enunciado temos uma semiesfera cujo diâmetro é igual a 14 cm a partir da acumulação dos volumes da semiesfera anterior que tem como diâmetro a medida de 12 cm e outra, interna a essa, cujo diâmetro é o foco da resolução.

Portanto, vale a seguinte igualdade:

$$Volume_{Esfera\ Final} = Volume_{Esfera\ Inicial} + Volume_{Esfera\ \ interna}$$

Partindo de que o volume da esfera é dado pela expressão:

$$V = \frac{4}{3}.\pi.r^3.$$

Logo:

$$Volume_{Esfera\ Final} = Volume_{Esfera\ Inicial} + Volume_{Esfera\ interna}$$

$$\frac{4}{3}.\pi.r_F^3 = \frac{4}{3}.\pi.{r_0}^3 + \frac{4}{3}.\pi.{r_I}^3$$

$$r_F^3 = {r_0}^3 + r_I^3$$

$$7^3 = 6^3 + r^3$$

$$r = \sqrt[3]{343 - 216}$$

$$r \cong 5cm$$

Concluindo assim que o diâmetro da semiesfera interna é igual a 10 cm.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Nesse exercício, ao trazer um registro figural ausente de informações métricas, a postura do aluno deve se voltar ao reconhecimento do objeto geométrico que se busca estudar e estar atento as evidencia heurísticas do registro figural.

Visto que a visualização do objeto geométrico é determinante para que a entrada na resolução do problema considere que o volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra.

O que leva as apreensões perceptivas e discursivas serem responsáveis em coordenar a desconstrução do objeto geométrico (3D) proposto pelo exercício, tanto dimensionalmente ao estabelecer o centro dos objetos (0D) e o segmento do diâmetro (1D) quanto a desconstrução por partes, ou seja, a transformação de uma semiosfera cujo diâmetro é igual a 14 cm a partir da acumulação dos volumes da semiosfera anterior que segundo o enunciado tem como diâmetro a medida de 12 cm e outra, interna a essa, cujo diâmetro é o foco da resolução heurística.

<u>Exercício 2</u>

Dimensionando o volume unitário aproximado da laranja, que por suposição possui a forma de uma esfera de raio igual a 2,5cm e utilizando $\pi \cong 3{,}14$, segue que:

$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times 2{,}5^3$$

$$V \cong 65cm^3$$

Considerando 70% do volume, temos que $0{,}70 \times 65 \cong 45{,}5cm^3$, de modo que sua capacidade por fruta seja equivalente a 45,5 ml aproximadamente. Se o contexto trabalha com 20 copos de 300ml cada, portanto:

$$20 \times 300 = 6000ml, \text{ onde } \frac{6000ml}{45{,}5ml} \cong 132 \text{ laranjas.}$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

O registro discursivo desse exercício destaca a necessidade de que os tratamentos matemáticos sejam feitos numa determinada ordem e que mesmo tendo como ponto inicial um objeto geométrico (esfera), seu contexto coloca o aluno em contato com situações matemáticas que predominam a comparação entre grandezas (regra de três).

É evidente que apreensão discursiva e a apreensão perceptiva terão participação ativa no processo de resolução uma vez que, existe um objeto geométrico e sua representação figural seja ela semiótica ou não, estabelece os desdobramentos cognitivos operacionais pertinentes para esse modelo de problema geométrico.

A determinação de volume de um sólido geométrico estabelece a sua desconstrução dimensional, uma vez que elementos dimensionalmente menores são essenciais para o tratamento matemático que tem como produto final a quantificação do volume do sólido. As modificações ótica e posicional quando requeridas atuam na modificação a partir transformação da figura em outra (maior, menor, diferente) que é reconhecida ainda como sua imagem ou em sua orientação e disposição no espaço.

Deve ser do conhecimento do professor que as apreensões em geometria são sinergicamente associadas e que em todo o caderno de exercício o registro delas foi buscando evidenciar as que possuem um papel determinante quando se tem como objetivo a resolução de um exercício que envolva objetos geométricos.

Nesse modelo de exercício a modificação mereológica (sob coordenação das apreensões discursiva e perceptiva) ao oportunizar a quantificação da grandeza volume, os tratamentos matemáticos a seguir tem como único objetivo readaptar para uma nova realidade.

Exercício 3

Sendo que a aresta do cubo pode ser determinada através da raiz cúbica do seu volume, logo:

$$a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{13824} = 24cm$$

Como o raio da esfera é de 6 cm, segue que a seu diâmetro é igual a 12 cm. Comparando com a dimensão da caixa cúbica, ou seja 2 no comprimento, 2 na largura e 2 na altura. Totalizando $2^3 = 8$ bolas.

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Considerando que o processo resolutivo desse exercício não está cognitivamente vinculado a uma relação semântica entre as unidades elementares geométricas expressas no enunciado, faz com que o aluno precise de uma maior aproximação do estatuto do objeto geométrico.

A apreensão perceptiva subordinada a apreensão discursiva estabelece a partir da modificação mereológica as transformações necessárias para que ao final se quantifique a grandeza cuja representação equivale a medida da aresta do cubo (caixa).

Por lado, ao relacionar os objetos geométricos disposto no enunciado, a ação da apreensão operatória posicional é solicitada a fim de obter as informações finais quanto ao processo resolutivo do exercício, porém vale destacar que toda operação sobre a figura possui coordenação direta com as apreensões perceptiva e discursiva.

Exercício 4

Fazendo por etapa, temos:

i. Volume da esfera: $V_E = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3 = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 5{,}25^3 = 606{,}375cm^3$
ii. Volume do cilindro (haste): $V_C = \pi \times r^2 \times h = \frac{22}{7} \times 0{,}7^2 \times 50 = 77cm^3$
iii. Volume a ser levantado: $V_T = V_C + 2 \times V_E = 77 + 2 \times 606{,}375 = 1.289{,}75cm^3$

Por fim se utilizando da relação da densidade do ferro dada no enunciado, segue que:

$$d_{FERRO} = 7{,}8 \frac{g}{cm^3}$$

Então:

$$Peso \ \ a \ \ ser \ \ \ levantado = V_T \times d_{FERRO} = 1289{,}75 \times 7{,}8 \cong 10kg$$

APROXIMANDO O OLHAR PARA AS APREENSÕES EM GEOMETRIA

Esse exercício possui alguns componentes que o tornam interessante para o professor que antes de sua aplicação conduza seus alunos a pensar no motivo da expressão do *pi* estar no registro numérico fracionário (qual a vantagem) ou até mesmo sobre as transformações de medida que o exercício estabelece (qual a vantagem).

O registro figural apesar de ter um caráter intuitiva e não geométrico, é suficiente para que ao identificar os objetos geométricos pela ação imediata da apreensão perceptiva, a apreensão discursiva busca interpretar os elementos figurais acessando seus respectivos estatutos para então estabelecer as apreensões operatórias necessárias para o processo de resolução.

Nesse caso, temos etapas que evidencia a participação da associação na apreensão sequencial com mais clareza, também em conjunto com as demais operações cognitivas coordenando a modificação mereológica em cada sólido de modo a obter como produto final os seus respectivos volumes.

Os tratamentos matemáticos a seguir se fazem necessário em decorrência do problema buscar nas aplicabilidades das habilidades matemáticas o interesse do aluno, até por que, como já descrito em outros comentários, a contextualização encoraja atitudes intuitivas por parte dos alunos o que numa perspectiva o estimula a desenvolver a habilidade e conjecturar.

5. CONSIDERAÇÕES

Apresentei neste caderno de atividades alguns exercícios de geometria espacial analisados sob a ótica dos registros de representação semiótica procurando fornecer um olhar sobre o porquê dos erros dos alunos e enfatizando a visualização como um processo indispensável para resolução de exercícios de geometria espacial, espero que este material contribua de maneira significativa para processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial no ensino médio.

Maiores informações sobre o processo de pesquisa e criação deste produto estão na dissertação do autor que pode ser encontrado em https://www.udesc.br/cct/profmat/defesas.

Para entrar em contato com o autor para maiores esclarecimentos e/ou troca de informações enviar e-mail para adrianofisico@hotmail.com

Professor(a), sinta-se à vontade para alterar, complementar e adaptar esse produto para que fique de acordo com a realidade de suas turmas.

Bom trabalho!

6 REFERÊNCIA

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência.** Trad. Méricles T. Moretti. REVEMAT, v.7, n.1, Florianópolis: UFSC/MTM; PPGECT, 2012b. (Disponível em http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat)

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANÍSIO TEIXEIRA – INEP . **Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM**. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em 01/03/2020.

KLUPPEL, Gabriela Teixeira; BRANDT, Célia Finck. Reflexões Sobre o Ensino da Geometria em Livros Didáticos à Luz da Teoria de Representações Semióticas Segundo Raymond Duval. In: MORETTI, Méricles Thadeu (Org.). **As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática**. Ijuí: Ed. Unijuí, 2014 – 256p.

LIMA, Elon Lages, **Coleção: A Matemática do Ensino Médio** – Vol. 2, Rio de Janeiro: SBM, 6ª Ed. 2006.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org), **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica** – 8ª Edição, - Campinas, SP: Papirus, 2013

REDE DO PROGRAMA DE OLIMPÍADAS DO CONHECIMENTO – REDE POC. **Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras.** Disponível em: <http://matematicasemfronteiras.org/provas.html>. Acesso em: 01/03/2020.

Apêndice (B)

BLOCO DE ATIVIDADE 1

E.E.B. Manoel Henrique de Assis.

Penha, abril de 2020.

Professor responsável: Adriano Moser

Aluno (a): ....

Terceira série: .... Turno: ....

ORIENTAÇÕES:

i. **Permitido o uso de resolução a lápis.**
ii. **Proibido o uso de qualquer modelo de corretivo.**
iii. **Proibido o uso de celular.**

Exercício 1: Obter o número de arestas de um poliedro convexo que tem 6 faces e 8 vértices.

(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações relevantes que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que se precisa determinar:

- ....

(c) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

Se a questão trouxesse a imagem da figura descrita do enunciado, **isso:**

( ) facilitaria o processo de resolução

( ) não influenciaria em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

Exercício 2: A gravura Melancolia de Albrecht Durer (1514) contém vários objetos e símbolos matemáticos. O anjo olha pensativo para uma face do poliedro, notando que a face é um losango sem uma ponta.

Considerando que o poliedro dado possui duas faces que são triângulos equiláteros e todas as outras são idênticas. Identifique e quantifique os elementos (arestas, vértices e faces) do poliedro em questão.

(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações importantes que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que se precisa determinar:

- ....

(d) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

( ) facilita o processo de resolução

( ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

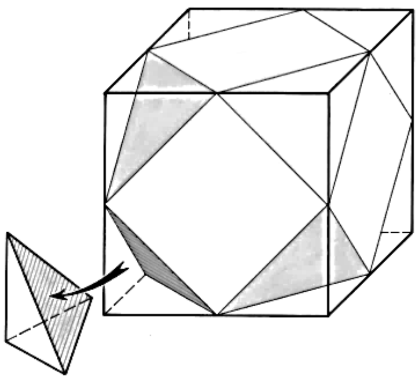
Exercício 3: Sobre cada uma das faces de um cubo, desenha-se um quadrado unindo-se os pontos médios das arestas do cubo como mostra a ilustração. As linhas desenhadas formam oito pirâmides a partir de cada vértice do cubo. Se "recortarmos" as oito pirâmides do cubo, obteremos um poliedro convexo denominado: CUBOCTAEDRO.

Para cada poliedro convexo os matemáticos Euler e Descartes, provaram a seguinte relação:

$$V - A + F = 2$$

Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.

Mostre que a relação é válida para este cuboctaedro.



(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d) Responda a questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

( ) facilitou o processo de resolução;

( ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

BLOCO DE ATIVIDADE 2

E.E.B. Manoel Henrique de Assis.

Penha, abril de 2020.

Professor responsável: Adriano Moser

Aluno (a): ....

Terceira série: .... Turno: ....

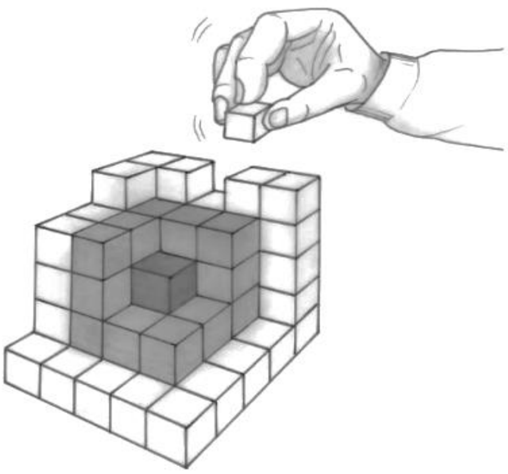
ORIENTAÇÕES:

(i) Permitido o uso de resolução a lápis.

(ii) Proibido o uso de qualquer modelo de corretivo.

(iii) Proibido o uso do celular.

Exercício 1: Rayane, Bernard e Jeanne brincam com cubos da mesma dimensão. Rayane tem um cubo vermelho de 5 gramas. Bernard circunda o cubo de Rayane com cubos azuis que pesam 8 gramas cada, criando assim um novo cubo. Jeanne coloca cubos verdes, que pesam 12 gramas cada, em torno do cubo de Bernard para formar um novo cubo, totalizando 125 cubos. Calcular a massa total do cubo final?



(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d)Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

(   ) facilita o processo de resolução

(   ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

Exercício 2: A figura mostra a pirâmide de Quéops, também conhecida como a Grande Pirâmide. Esse é o monumento mais pesado que já foi construído pelo homem da Antiguidade. Possui aproximadamente 2,3 milhões de blocos de rocha, cada um pesando em média 2,5 toneladas. Considere que a pirâmide de Quéops seja regular, sua base seja um quadrado com lados medindo 214 m, as faces laterais sejam triângulos isósceles congruentes e suas arestas laterais meçam 204 m.

O valor mais aproximado para a altura da pirâmide de Quéops, em metros, é?

(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

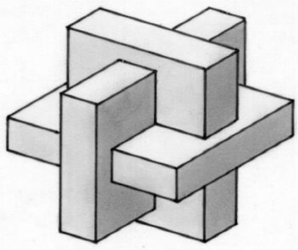
A imagem da figura descrita no enunciado:

(   ) facilita o processo de resolução

(   ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

Exercício 3*:* A Figura abaixo mostra três paralelepípedos entrelaçados formam um sólido mostrado abaixo. Eles têm a mesma dimensão 2cm x 8cm x 10cm. Calcule o volume do sólido descrevendo sua resposta:



(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d)Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

(   ) facilita o processo de resolução
(   ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO

BLOCO DE ATIVIDADES 3

E.E.B. Manoel Henrique de Assis.

Penha, abril de 2020.

Professor responsável: Adriano Moser

Aluno (a): ....

Terceira série: .... Turno: ....

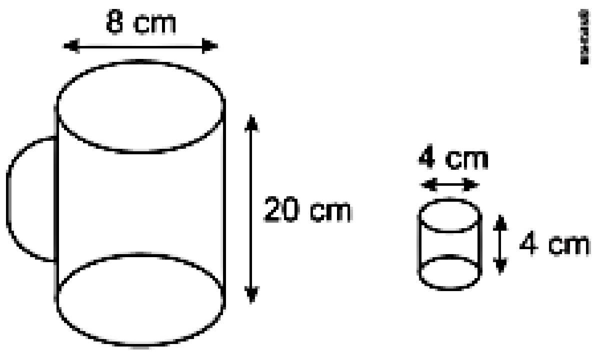
ORIENTAÇÕES:

(i) Permitido o uso de resolução a lápis.

(ii) Proibido o uso de qualquer modelo de corretivo.

(iii) Proibido o uso de celular.

Exercício 1: Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

<u>Dona Maria está certa nessa decisão? Justifique.</u>

(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....

ii. ....

iii. ....

iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

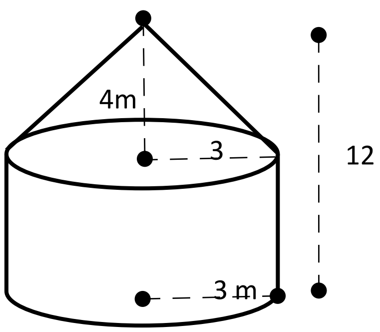
(   ) facilita o processo de resolução

(   ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

Exercício 2: Um produtor de soja plantou uma área equivalente a 10 hectares, onde estiva uma produtividade de 55 sacos por hectares (saca de 60 kg). Em sua propriedade existe um silo vertical, conforme a Figura abaixo, e seria do seu interesse armazenar toda a sua produção nesse silo. Utilizando os cálculos de volume do cilindro, cone e densidade, será possível armazenar a produção dentro desse silo? Justifique.

Considere a densidade da soja sendo 800kg/m^3.



(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....
ii. ....
iii. ....
iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

(   ) facilita o processo de resolução

(   ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÃO:

Exercício 3: Assoprando suavemente em uma superfície horizontal com água e sabão conforme mostra a Figura abaixo, Estela faz uma bolha de sabão de forma semiesférica com um diâmetro de 12 cm. Em seguida, ela assopra uma segunda bolha dentro da primeira. A primeira bolha então fica maior. O volume final é a soma do volume inicial mais o volume da bolha que está dentro da outra. Qual será o diâmetro da bolha interna, quando o diâmetro da bolha maior for de 14cm. Justifique

(a) Ao fazer a leitura de enunciado, descreva as informações que você identificou:

i. ....

ii. ....

iii. ....

iv. ....

(b) Quanto a figura, quais informações você pode identificar e que favorece a resolução da questão:

i. ....

ii. ....

iii. ....

iv. ....

(c) Transcreva do enunciado para a linha abaixo o fato que precisa determinar:

- ....

(d) Responda à questão abaixo assinalando a alternativa:

A imagem da figura descrita no enunciado:

(   ) facilita o processo de resolução

(   ) não influencia em seu processo de resolução, uma vez que o enunciado já descreve todas as informações necessárias.

RESOLUÇÂO:

ANEXOS

ANEXO 1 – Declaração da instituição participante

UDESC
UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

cepsh Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

GABINETE DO REITOR

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DAS INSTITUIÇÕES ENVOLVIDAS

Com o objetivo de atender às exigências para a obtenção de parecer do Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos, os representantes legais das instituições envolvidas no projeto de pesquisa intitulado " **As apreensões em geometria na resolução de exercícios de geometria espacial na terceira série do ensino médio**" declaram estarem cientes com seu desenvolvimento nos termos propostos, lembrando aos pesquisadores que no desenvolvimento do referido projeto de pesquisa, serão cumpridos os termos da resolução 466/2012, 510/2016 e 251/1997 do Conselho Nacional de Saúde.

Local, 31 /01 /2020 .

Ass: Pesquisador Responsável

E.E.B Manoel Henrique de Assis
Diretora da Escola
Maritza Constanzi
Matrícula: 325163-2-03

Ass: Responsável pela Instituição de origem

Nome: Maritza Constanzi
Cargo: Diretor
Instituição: EEB Manoel Henrique de Assis
Número de Telefone: 33452449

Ass: Responsável de outra instituição

Nome: Sérgio Henrique Pezzin
Cargo: Diretor de Pesquisa e Pós-Graduação
Instituição: UDESC

Avenida Madre Benvenuta, 2007, Itacorubi, CEP 88035-901, Florianópolis, SC, Brasil.
Telefone/Fax: (48) 3664-8084 / (48) 3664-7881 - E-mail: cepsh.reitoria@udesc.br / cepsh.udesc@gmail.com
CONEP- Comissão Nacional de Ética em Pesquisa
SRTV 701, Via W 5 Norte – Lote D - Edifício PO 700, 3º andar – Asa Norte - Brasília-DF - 70719-040
Fone: (61) 3315-5878/ 5879 – E-mail: conep@saude.gov.br

ANEXO 2 – Termo de Consentimento

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

cepsh Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

GABINETE DO REITOR

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

O(a) seu(sa) filho(a)/dependente está sendo convidado a participar de uma pesquisa de mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade do Estado de Santa Catarina – UDESC, intitulada **"As apreensões em geometria na resolução de exercícios de geometria espacial na terceira série do Ensino Médio"** do acadêmico Adriano Moser, tendo como objetivo identificar as apreensões em geometria nas soluções apresentadas nas atividades propostas pelo acadêmico que é também professor dele(a), e com a autorização da direção da escola.

O(a) seu(ua) filho(a)/dependente não terá despesas e nem será remunerado pela participação na pesquisa. Os riscos destes procedimentos serão mínimos, havendo a possibilidade de cansaço para responder os exercícios, para minimizar esses riscos, serão divididos em três blocos de atividades, cada bloco terá três exercícios referente ao tema: Geometria Espacial e serão aplicados na própria escola em suas respectivas salas de aula obedecendo o horário escolar. A identidade do(da) seu(ua) filho(a)/dependente será preservada pois cada indivíduo será identificado por um número.

Os principais benefícios relacionados a este estudo serão de participarem de aulas diferenciadas com conteúdos preparatórios para o ENEM que promoverão melhoria da aprendizagem. Trabalho em equipe e retorno quanto erros cometidos com profícua discussão em relação ao conteúdo e a forma de resolução. Em se tratando de uma pesquisa estruturada dentro dos rigores necessários para sua aceitação no meio científico, existe também o benefício empírico do qual ao fazer parte da intervenção em sala de aula estarão contribuindo para que a temática de Geometria Espacial seja melhor abordada em sala de aula.

A pessoa que estará acompanhando os procedimentos será o mestrando Adriano Moser, sendo este também professor efetivo das turmas.

Solicitamos a sua autorização para o uso dos dados do(a) seu(ua) filho(a)/dependente, como as resoluções das atividades que serão/foram realizadas em sala de aula para a produção de uma Dissertação de Mestrado. A privacidade do(a) seu(ua) filho(a)/dependente será mantida através da não-identificação do nome. O(a) senhor(a) poderá solicitar o não uso das resoluções das atividades

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

cepsh Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos

GABINETE DO REITOR

do(a) seu(ua) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento, sem qualquer tipo de constrangimento.

Este termo de consentimento livre e esclarecido é feito em duas vias, sendo que uma delas ficará em poder do pesquisador e outra com o sujeito participante da pesquisa.

Mestrando Adriano Moser
Telefone: (47) 988327001
Endereço: Avenida Getúlio Vargas, 189
Centro, Balneário Piçarras – SC

Professor Orientador Rogério de Aguiar
Telefone: (47) 40097836
Endereço: Rua Paulo Malschitzki, 200
Campos Universitário Prof. Avelino Marcante
Bairro Zona Industrial Norte – Joinville - SC

Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos – CEPSH/UDESC
Av. Madre Benvenuta, 2007 – Itacorubi – Florianópolis – SC - 88035-901
Fone: (48) 3664-8084 / (48) 3664-7881 - E-mail: cepsh.reitoria@udesc.br / cepsh.udesc@gmail.com
CONEP- Comissão Nacional de Ética em Pesquisa
SRTV 701, Via W 5 Norte – Lote D - Edifício PO 700, 3º andar – Asa Norte - Brasília-DF - 70719-040

TERMO DE CONSENTIMENTO

Declaro que fui informado sobre todos os procedimentos da pesquisa e, que recebi de forma clara e objetiva todas as explicações pertinentes ao projeto e, que todos os dados a respeito do meu(minha) filho(a)/dependente serão sigilosos. Eu compreendo que neste estudo, as medições dos experimentos/procedimentos de tratamento serão feitas em meu(minha) filho(a)/dependente, e que fui informado que posso retirar meu(minha) filho(a)/dependente do estudo a qualquer momento.

Nome por extenso ____

Assinatura ____________________ Local: ______________ Data: ___/___/___ .

Fone: (61) 3315-5878/ 5879 – E-mail: conep@saude.gov.br

ANEXO 3 – Consentimento para fotografias e vídeos e gravações (maiores de 18 anos)

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

CEP Comitê de Ética em Pesquisas Envolvendo Seres Humanos - Udesc

GABINETE DO REITOR

CONSENTIMENTO PARA FOTOGRAFIAS, VÍDEOS E GRAVAÇÕES

Permito que sejam realizadas fotografia, filmagem ou gravação de minha pessoa para fins da pesquisa científica intitulada **"As apreensões em Geometria na resolução de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio"** e concordo que o material e informações obtidas relacionadas à minha pessoa possam ser publicados eventos científicos ou publicações científicas. Porém, a minha pessoa não deve ser identificada por nome ou rosto em qualquer uma das vias de publicação ou uso.

As fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade do grupo de pesquisadores pertinentes ao estudo e, sob a guarda dos mesmos.

___________________, _____ de ____________ de _______

Local e Data

____

Nome do Sujeito Pesquisado

____

Assinatura do Sujeito Pesquisado

Avenida Madre Benvenuta, 2007, Itacorubi, CEP 88035-901, Florianópolis, SC, Brasil.
Telefone/Fax: (48) 3664-8084 / (48) 3664-7881 - E-mail: cepsh.reitoria@udesc.br
CONEP- Comissão Nacional de Ética em Pesquisa
SRTV 701, Via W 5 Norte – Lote D - Edifício PO 700, 3º andar – Asa Norte - Brasília-DF - 70719-040
Fone: (61) 3315-5878/ 5879 – E-mail: conep@saude.gov.br

ANEXO 4 - Consentimento para fotografias e vídeos e gravações (menores de 18 anos)

UDESC UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA

CEP Comitê de Ética em Pesquisas Envolvendo Seres Humanos - Udesc

GABINETE DO REITOR

CONSENTIMENTO PARA FOTOGRAFIAS, VÍDEOS E GRAVAÇÕES

Permito que sejam realizadas fotografia, filmagem ou gravação de meu filho/dependente para fins da pesquisa científica intitulada "As apreensões em geometria nas resoluções de exercícios de Geometria Espacial na terceira série do Ensino Médio", e concordo que o material e informações obtidas relacionadas ao meu filho/dependente possam ser publicados eventos científicos ou publicações científicas. Porém, o meu filho/dependente não devem ser identificado por nome ou rosto em qualquer uma das vias de publicação ou uso, e que as fotografias, vídeos e gravações ficarão sob a propriedade e guarda do grupo de pesquisadores do estudo.

___________________, _____ de ____________ de _______

Local e Data

____

Nome do Responsável pelo Sujeito Pesquisado

____

Assinatura do Responsável pelo Sujeito Pesquisado