



Bruno de Assis Xarifa

**Lugares geométricos e pontos notáveis do
triângulo: uma proposta de atividades na
perspectiva do modelo van Hiele**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Marcos Craizer
Co-orientador: Prof. Anderson Reis de Vargas

Rio de Janeiro
Setembro de 2020



Bruno de Assis Xarifa

**Lugares geométricos e pontos notáveis do
triângulo: uma proposta de atividades na
perspectiva do modelo van Hiele**

Dissertação apresentada como requisito parcial
para obtenção do grau de Mestre pelo Programa
de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio.
Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

Prof. Marcos Craizer

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Anderson Reis de Vargas

Coorientador

Departamento de Matemática – Colégio Pedro II

Prof. Sinésio Pesco

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Daniel Felipe Neves Martins

Departamento de Matemática – Colégio Pedro II

Rio de Janeiro, 15 de setembro de 2020.

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, da autora e do orientador.

Bruno de Assis Xarifa

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF) em 2016. Atualmente trabalha como professor nas redes privada e pública nos municípios de Maricá e Niterói, estado do Rio de Janeiro.

Xarifa, Bruno de Assis

Lugares geométricos e pontos notáveis do triângulo: uma proposta de atividades na perspectiva do modelo van Hiele / Bruno de Assis Xarifa ; orientador: Marcos Craizer ; co-orientador: Anderson Reis de Vargas. – 2020.

100 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2020.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Lugares geométricos no plano. 3. Pontos notáveis do triângulo. 4. Geometria. 5. van Hiele. I. Craizer, Marcos. II. Vargas, Anderson Reis de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Professor Marcos Craizer e Professor Anderson Reis de Vargas, pelo estímulo, companheirismo e dedicação durante essa jornada.

A Deus que sempre manifestou sua misericórdia sobre minha vida e de minha família, dando-nos força e saúde para o cumprimento de mais uma etapa em nossa jornada.

Aos maravilhosos pais que sempre priorizaram a formação educacional minha e de meus irmãos, por todo amor, carinho, compreensão, e por mais uma vez apoiar meu crescimento, que sem isso não chegaria até aqui.

Em especial, à minha maravilhosa esposa Taiane, por não somente incentivar, mas por tanto doar-se. Sei quantas madrugadas estive comigo nessa estrada, quantos sábados estava comigo de madrugada, e incrivelmente sempre com um sorriso no rosto ante meu desespero dos testes do dia.

Aos maravilhosos professores que me fizeram compreender a magia que a educação promove em nossa formação como seres, em especial aos professores e amigos Emílio e Orozimbo (*In memoriam*).

Aos professores do curso, em especial, à Professora e Coordenadora Christine e às Professoras Kitty e Luana Sá, que iluminaram meu caminho e estimularam minha curiosidade sobre a temática desta dissertação.

À PUC-Rio, PROFMAT e CAPES por terem estruturado, promovido e disponibilizado professores extremamente capacitados para nossa formação.

Àqueles que contribuíram durante a jornada, ao casal André e Paula, ao meu tio Adugan, e aos demais amigos de curso e trabalho que contribuíram para esse momento da minha vida.

Aos parceirinhos meus pets Pantzer e Suzy, pela alegria do dia a dia.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Xarifa, Bruno de Assis; Craizer, Marcos; Vargas, Anderson Reis de. **Lugares geométricos e pontos notáveis do triângulo: uma proposta de atividades na perspectiva do modelo van Hiele**. Rio de Janeiro, 2020. 100p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar uma proposta de atividades para o ensino dos conteúdos de lugares geométricos e pontos notáveis do triângulo, sendo aplicados no oitavo e nono ano escolares, conforme previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). As atividades possuem como base metodológica a teoria elaborada pelo casal de matemáticos Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele, a qual demonstra as relações que aquela metodologia possui com o Construtivismo, ao possuir as principais características das teorias pedagógicas de Piaget, Vygotsky e Ausubel. Tal escolha baseia-se especialmente no fato da teoria ter sido desenvolvida para o ensino de geometria. Além disso, este trabalho discorre sobre as definições e propriedades dos elementos geométricos que serão os objetos das práticas propostas. Estas são orientadas por meio de roteiros que exploram, sob a metodologia adotada, diferentes registros semióticos. A execução de algumas atividades fomenta, por um lado, a manipulação de materiais concretos, e por outro, o uso de tecnologia, no caso, o software de geometria dinâmica Geogebra para realização das construções geométricas. Estas atividades buscam cativar o interesse do aluno pelo processo de descoberta na geometria.

Palavras-chave

Lugares geométricos no plano; Pontos notáveis do triângulo; Geometria; van Hiele.

Abstract

Xarifa, Bruno de Assis; Craizer, Marcos (Advisor); Vargas, Anderson Reis de. **Loci and Notable Points of a Triangle: a Proposal for Activities from the Perspective of van Hiele Model** Rio de Janeiro, 2020. 100 p. Master Thesis - Department of Mathematics, Pontifical Catholic University of Rio de Janeiro.

The main objective of this project is to propose activities for the teaching of geometric locations and notable points of the triangle, being applied at the eighth and ninth years of elementary school, as provided for in the National Common Curricular Base (BNCC). The activities have as methodological basis the theory elaborated by the mathematician couple Dina van Hiele-Geldof and Pierre van Hiele, which demonstrates the relationship that that methodology has with Constructivism, by having the main characteristics of the pedagogical theories of Piaget, Vygotsky and Ausubel. This choice is based especially on the fact that the theory was developed for the teaching of geometry. In addition, this work discusses the definitions and properties of the geometric elements that will be the objects of the proposed practices. These are guided by scripts that explore, under the adopted methodology, different semiotic records. The execution of some activities encourages, on the one hand, the manipulation of concrete materials, and on the other, the use of technology, in this case, the Geogebra dynamic geometry software for the realization of geometric constructions. These activities seek to captivate the student's interest in the process of discovering geometry.

Keywords

Loci in the plane; Notable points of a triangle; Geometry; van Hiele.

Sumário

1. Introdução	14
2. Revisão do referencial teórico pedagógico	16
2.1. O desenvolvimento cognitivo de Piaget	17
2.2. A aprendizagem como atividade social de Vygotsky	20
2.2.1. Teoria de Vygotsky	21
2.2.2. Zona de Desenvolvimento Proximal	22
2.3. A Aprendizagem Significativa De Ausubel	23
2.4. A aprendizagem por níveis dos van Hiele	26
2.4.1. Um pouco sobre o casal van Hiele e sua influência na RME	26
2.4.2. Os níveis de aprendizagem do modelo de van Hiele	27
2.4.3. Propriedades dos níveis	30
2.4.4. Fases de aprendizagem de van Hiele	32
2.5. Observações	33
3. Fundamentação teórica geométrica	35
3.1. Lugar geométrico	35
3.1.1. Circunferência	36
3.1.2. Bissetriz	36
3.1.3. Mediatriz	38
3.1.4. Par de arcos capazes	39
3.2. Pontos notáveis de um triângulo	41
3.2.1. Mediatriz	41
3.2.2. Mediana	43
3.2.3. Altura	45
3.2.4. Bissetriz no triângulo	47
3.3. Circunferência de Apolônio	53
4. Proposta de atividades para o ensino.	54
4.1. Uso de dobraduras para o ensino das propriedades das bissetrizes internas e o incentro de um triângulo	55

4.1.1. Folha de atividades sobre o incentro do triângulo	56
4.1.2. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	59
4.2. Uso de dobraduras para o ensino das propriedades das mediatrizes internas e o circuncentro de um triângulo	61
4.2.1. Folha de atividades sobre o circuncentro do triângulo	62
4.2.2. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	65
4.3. Ensino de medianas e baricentro no triângulo com Geogebra	67
4.3.1. Folha de atividades sobre a mediana e baricentro do triângulo	67
4.3.2. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	69
4.4. Ensino de alturas e ortocentro no triângulo com Geogebra	71
4.4.1. Folha de atividades sobre a altura e ortocentro do triângulo	71
4.4.2. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	74
4.5. Estudo do centro de massa do triângulo com materiais concretos	75
4.5.1. Sugestões para construção dos materiais de apoio	75
4.5.2. Folha de atividades sobre centro de massa	77
4.5.3. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	79
4.6. Ensino do arco capaz como lugar geométrico com Geogebra	82
4.6.1. Folha de atividades sobre o arco capaz	83
4.6.2. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	85
4.7. Uso de fotografia para o ensino da circunferência de Apolônio	87
4.7.1. Folha de atividades sobre a circunferência de Apolônio	89
4.7.2. Análise da proposta de atividade de acordo com o método	91
5. Conclusão e desdobramentos	97
6. Referências bibliográficas	99

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Zona de Desenvolvimento Proximal	20
Figura 3.1 - Lugar geométrico	36
Figura 3.2 - Circunferência	36
Figura 3.3 - Bissetriz	36
Figura 3.4 - Bissetriz como LG	38
Figura 3.5 - Mediatriz - LG	38
Figura 3.6 - Mediatriz como LG	39
Figura 3.7 - Arco Capaz	39
Figura 3.8 - Par de Arcos Capazes	40
Figura 3.9 - Par de arcos capazes – demonstração	41
Figura 3.10 - Cevianas	41
Figura 3.11 - Mediatriz no triângulo	42
Figura 3.12 - Circuncentro	42
Figura 3.13 - Circuncentro em classificações angulares diferentes	43
Figura 3.14 - Mediana	43
Figura 3.15 - O triângulo ΔPMN é medial do ΔABC	44
Figura 3.16 - Baricentro do triângulo	44
Figura 3.17 - Divisão da mediana pelo baricentro	45
Figura 3.18 - Alturas em triângulos nas três classificações angulares	45
Figura 3.19 - Ortocentro	46
Figura 3.20 - Ortocentro em classificações angulares diferentes	47
Figura 3.21 - Incentro	48
Figura 3.22 - Incentro demonstração.	48
Figura 3.23 - Encontro das bissetrizes externas.	49
Figura 3.24 - Teorema da bissetriz interna	49
Figura 3.25 - Teorema da bissetriz interna - demonstração	50
Figura 3.26 - Teorema da bissetriz externa	50
Figura 3.27 - Teorema da bissetriz externa - demonstração	51
Figura 3.28 - Bissetriz interna e externa.	51
Figura 3.29 - Proposição - bissetriz interna e externa.	52
Figura 3.30 - Circunferência de Apolônio	53
Figura 4.1 - Triângulo determinado pelas estradas	58
Figura 4.2 - Triângulo formado pelas ruas	64
Figura 4.3 - Construção do prumo artesanal	76
Figura 4.4 - Equilíbrio dos garfos	76
Figura 4.5 - Equilíbrio de garfos	77
Figura 4.6 - Prumo	77
Figura 4.7 - Determinação do centro de massa	78

Figura 4.8 - Recorte dos objetos	79
Figura 4.9 - Pontos nas construções	80
Figura 4.10 - Determinação das linhas de atuação da gravidade	80
Figura 4.11 - Determinação do centro de massa	81
Figura 4.12 - Equilíbrio dos objetos	81
Figura 4.13 - Centro de massa com material reciclado	82
Figura 4.14 - Teatro de Epidauro	83
Figura 4.15 - Planta de teatro grego	83
Figura 4.16 - Arco capaz I	85
Figura 4.17 - Arco capaz II	85
Figura 4.18 - Arco capaz III	86
Figura 4.19 - Arco capaz IV	86
Figura 4.20 - Arco capaz V	86
Figura 4.21 - Arco capaz VI	86
Figura 4.22 - Arco capaz VII	87
Figura 4.23 - Semelhança de triângulos I	88
Figura 4.24 - Semelhança de triângulos II	88
Figura 4.25 - Semelhanças combinadas	89
Figura 4.26 - Foto dos prédios	89
Figura 4.27 - Esquema dos prédios I	90
Figura 4.28 - Esquema dos prédios II	90
Figura 4.29 - Organização	92
Figura 4.30 - Esquema I	93
Figura 4.31 - Foto do ponto Q	93
Figura 4.32 - Esquema II	93
Figura 4.33 - Foto do ponto P	93
Figura 4.34 - Construção da circunferência	94
Figura 4.35 - Foto produzida no ponto E	94
Figura 4.36 - Foto produzida no ponto F	94
Figura 4.37 - Foto produzida no ponto A	94
Figura 4.38 - Esquema de organização da quadra	95

Lista de Quadros

Quadro 2.1 - Estágios do Desenvolvimento Cognitivo	19
Quadro 2.2 - Níveis de desenvolvimento de Vygotsky	22
Quadro 2.3 - Visões do construtivismo	25
Quadro 4.1 - Níveis e fases do modelo de van Hiele	54
Quadro 4.2 - Aspectos das teorias construtivistas analisadas	54

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Circunferência de Apolônio – Item C	95
Tabela 4.2 – Circunferência de Apolônio – Item E	95
Tabela 4.3 – Circunferência de Apolônio – Item F	95
Tabela 4.4 – Circunferência de Apolônio – Item I	96
Tabela 4.5 – Circunferência de Apolônio – Item J	96

*“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”*

Albert Einstein

1 Introdução

O objetivo deste trabalho é promover práticas para o ensino de dois tópicos da geometria: os principais pontos notáveis do triângulo e os lugares geométricos planos mais usuais no Ensino Fundamental.

A geometria euclidiana sempre foi minha área favorita da matemática, mas, pela minha vivência em sala de aula, observo que os alunos avançam pelos anos escolares apenas decorando os conceitos e fórmulas para avaliações sem perceber as relações que estes possuem com a sua própria realidade.

Embora esses temas estejam previstos no Ensino Básico, também tenho a percepção que tais conteúdos tendem a ser ensinados mecanicamente pelos professores, que muitas vezes enfatizam outros campos da Matemática em detrimento da geometria, onde se desperdiça a oportunidade de contextualizar e tornar mais cativante o ensino aos alunos.

A apresentação sistemática de conceitos fechados, sem que ocorram provocações, somado a práticas de ensino baseadas apenas na repetição enfadonha, diminuem as oportunidades para que os alunos vivenciem o processo de descoberta e causam desinteresse no corpo discente.

Particularmente, acredito ainda que a falta de promoção de atividades de descoberta dificulta a compreensão pelos discentes, daquilo que se entende como avanço científico. E, assim sendo, impede-se uma das principais funções da escola para a sociedade.

Durante o curso do PROFMAT, as professoras Kitty e Luana Sá apresentaram-me o modelo van Hiele, o que me motivou a desenvolver algumas atividades para aplicar em sala de aula sob a perspectiva dessa metodologia.

Espera-se que, durante as atividades, os docentes possam perceber que a forma como se conduz uma prática é tão ou mais importante para o ensino que o conhecimento em si a ser transmitido. Busca-se então, promover algumas práticas com a finalidade de desenvolver o pensamento geométrico pelo aluno e mediar o processo de construção do saber, realizando o intrincado ensino da geometria através de diferentes abordagens pedagógicas. Com este fim, são utilizados a construção de materiais concretos e o estímulo da aprendizagem por meio do uso de recursos tecnológicos através do software de geometria dinâmica Geogebra¹

¹ O Geogebra é um software que combina, através de uma interface gráfica, os conceitos de geometria e álgebra. Por isso, é uma ferramenta extremamente rica em recursos para o ensino de matemática.

Primeiramente, são apresentadas as teorias pedagógicas norteadoras desse trabalho, com suas principais características e elementos, percorrendo as conhecidas teorias construtivistas de Piaget, Vygotsky e Ausubel. Além disso, e em destaque, o modelo de ensino criado pelo casal de matemáticos Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof. Embora a metodologia dos van Hiele seja bem menos difundida do que os já mencionados educadores, ela possui a fundamental e especial característica de ser direcionada ao ensino de geometria, o que despertou o meu interesse em aprendê-la e, por fim, aplicá-la.

No capítulo seguinte verifica-se com maior rigor os conceitos e as propriedades geométricas dos conteúdos que serão desenvolvidos no percorrer das práticas propostas. Durante o ensino básico, vê-se o conceito de Lugar Geométrico permear o estudo de vários objetos da geometria, sem que os alunos percebam a relação daquele com estes. Os pontos notáveis do triângulo são mais frequentemente abordados. No entanto, parece-me que de uma forma muito limitada a decorar nomes e propriedades, sem que se crie significados reais para o estudante.

O último capítulo propõe atividades que buscam alterar aquela percepção do ensino mecânico, em especial nos dois conteúdos supracitados, com a construção dos conhecimentos geométricos por meio da aplicação de diversos tipos de registros semióticos, seja por materiais concretos ou uso de software. As propostas são acompanhadas dos procedimentos de organização, folhas de atividades para o aluno, de sugestões de como o professor deve conduzir a atividade e da análise de como essa condução ocorre intrinsecamente vinculada ao embasamento teórico pedagógico.

É importante ressaltar que o planejamento original deste trabalho previa a aplicação de algumas das práticas propostas nas turmas em que leciono. Contudo, em decorrência da pandemia do COVID-19, tal aplicação tornou-se inviável.

2

Revisão do referencial teórico pedagógico

O processo de ensino aprendizagem é tema de diversos estudos que buscam, principalmente, diminuir as possíveis causas do que se classifica como “fracasso escolar”. Mario Carretero (1997), em seu livro “Construtivismo e Educação”, descreve as características comuns a diversos sistemas de ensino pelo mundo.

Nos anos iniciais, com alunos de cinco a dez anos, apresentam-se aos alunos atividades com jogos e outras atividades com capacidades linguísticas e cognitivas em um grau bem informal. Na fase seguinte, a partir dos dez anos, principalmente de dez a dezesseis anos, os conteúdos tornam-se mais formais, o aluno precisa separar as disciplinas como conhecimentos independentes e cada vez mais são introduzidos conhecimentos acadêmicos. Isso acarreta no menor interesse dos alunos, principalmente pelos métodos de ensino tradicionais. Ao mesmo tempo, o aluno está entrando na adolescência, que é um momento de transformação dos seus desejos e interesses. Ainda que superficial, podemos dizer que nessa fase são introduzidos resumos de conteúdos universitários. Como consequência ocorre um processo contraditório nessa fase, pois o aluno adquire uma grande gama de conhecimentos sobre diversas áreas do conhecimento, mas também é nessa fase em que os alunos começam a apresentar cada vez menor rendimento e mais desestímulo pela permanência na escola.

Em decorrência desse cenário, durante o século XX foram desenvolvidas diversas pesquisas nos campos da educação e da psicologia, que resultaram em diversas metodologias de ensino que são definidas como construtivistas. É importante ressaltar que não existe um único construtivismo, mas interpretações que são mais convergentes do que divergentes. Entre essas visões são notáveis as contribuições de Piaget, Vygotsky e Ausubel.

O construtivismo busca, através de representações das situações reais, criar ferramentas para que o aluno lide melhor com a sua realidade. Nesse contexto, os esquemas que construímos são as ferramentas que nos permitem desenvolver diferentes formas de aplicar o conhecimento. Quando uma criança aprende a falar uma determinada palavra, como *mãe*, por exemplo, ela cria um esquema mental com as posições, a ordem e a intensidade que devem ser acionados os músculos para emitir o som que deseja e assim conseguir uma comunicação efetiva.

Basicamente se pode dizer que é a ideia que sustenta que o indivíduo – tanto nos aspectos cognitivos e sociais do comportamento como nos afetivos – não é um mero produto do ambiente nem um simples resultado de suas disposições internas, mas, sim uma construção própria que vai se produzindo, dia a dia, como resultado da interação entre esses dois fatores. (Carreteiro, 1997, p.10)

Apresenta-se nos tópicos seguintes uma síntese dos trabalhos de alguns dos principais teóricos da educação construtivista, Piaget, Vygotsky e Ausubel. Como suas teorias possuem motivações distintas, torna-se interessante indicar suas diferenças e, principalmente, verificar como elas são complementares.

Piaget desenvolveu uma teoria na qual a evolução cognitiva ocorre em diferentes estágios etários de maturidade, sob a ação de fatores biológicos. Além disso, ele defende que a construção do conhecimento ocorre através dos processos de *assimilação e acomodação*, que serão aqui detalhados posteriormente. Destaca-se no desenvolvimento da aprendizagem na teoria de Piaget, principalmente, a influência de fatores intrapessoais.

Na contramão, vê-se Vygotsky, defensor do processo de aprendizagem baseado principalmente nas relações *interpessoais*, além de criador do conceito da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que indica uma interessante visão sobre o papel do professor.

Já Ausubel desenvolveu a ideia da *aprendizagem significativa*, que defende ser essencial que o ensino dê relevância aos conhecimentos que o aluno possui e a relação entre o que o professor apresenta e a realidade do aluno.

Por fim, vemos que a metodologia desenvolvida pelo casal van Hiele, voltada ao ensino de geometria valoriza os principais elementos das teorias defendidas por Piaget, Vygotsky e Ausubel.

2.1 **O desenvolvimento cognitivo de Piaget**

Jean Piaget desenvolveu estudos em diversas áreas do conhecimento e mesmo tendo sua formação inicial em Biologia na Suíça, enveredou-se aos estudos nos ramos da Psicologia, Epistemologia - área que estuda como o conhecimento é gerado, e por fim, da Educação. Mesmo que seja alvo de críticas por alguns pesquisadores, seus trabalhos são reconhecidos pelos mesmos e ainda amplamente aplicados na área do desenvolvimento cognitivo humano, compreendendo todas as fases da vida, além de abordar o desenvolvimento moral, lógico, social, matemático, entre várias áreas do cognitivo e servindo como base de conhecimento para a Psicologia e Medicina.

Sinalizo que não se pode afirmar tratar-se de uma teoria educativa, pois a pesquisa de Piaget não focou as condições de aprendizagem especificamente no ambiente escolar, mas em mecanismos mentais que cada indivíduo cria para se relacionar com sua realidade. Baseando-se na teoria de Piaget, Robbie Case, um pesquisador neopiagetiano canadense, que durante sua carreira, busca aperfeiçoar a teoria de Piaget, resume sua teoria em:

- a) O desenvolvimento cognitivo pode ser compreendido como aquisição sucessiva de estruturas lógicas, cada vez mais complexas, que subjazem às distintas áreas e situações que o sujeito é capaz de ir resolvendo à medida que cresce. (...) pode ser entendido como um conjunto de bonecas russas que se encaixam umas dentro das outras. De fora, só se vê uma boneca russa, mas, dentro, podem estar várias, que foram integradas dentro da seguinte.
- b) Assim, é possível mostrar que tarefas aparentemente diferentes, tanto em sua forma como em seu conteúdo, possuem uma estrutura lógica similar que permite prever sua dificuldade e oferecer uma perspectiva homogênea do comportamento intelectual. Portanto a teoria de Piaget permitiu mostrar que, no DC (Desenvolvimento Cognitivo), existem regularidades e que as capacidades dos alunos não são algo carente de conexão, mas, sim, que guardam uma estreita relação umas com as outras (...).
- c) Neste sentido, as aquisições de cada estágio, formalizadas mediante uma determinada estrutura lógica, incorporam-se à seguinte, já que tais estruturas possuem uma ordem hierárquica.
- d) Como foi indicado anteriormente, a capacidade de compreensão e aprendizagem da informação nova é determinada pelo nível de desenvolvimento cognitivo do sujeito. Portanto, existem alguns limites para a aprendizagem que são determinados pelas capacidades dos alunos à medida que progredem em seu desenvolvimento cognitivo.
- e) Desta maneira, o avanço cognitivo só pode ser produzido se a informação nova for moderadamente discrepante da que já se possui. (...) se existe demasiada discrepância entre a informação nova e os esquemas do sujeito, é que este não poderá assimilar a informação que se lhe apresenta.
- f) Portanto, postula-se que o que muda ao longo do desenvolvimento são estruturas, mas não o mecanismo básico de aquisição do conhecimento. Esse mecanismo básico consiste num processo de equilíbrio com dois componentes interrelacionados de assimilação e acomodação. (Case apud Carreteiro, 1997, p.22 - 23)

Podemos, sob essa teoria, dividir o processo de aprendizagem em duas atividades: a assimilação e a acomodação. O processo de assimilação compreende o fato de que o indivíduo pode adquirir um novo conhecimento, mas isso não necessariamente evidencia que esse conhecimento tenha se correlacionado com os demais conhecimentos componentes do seu saber. Já o processo de acomodação indica que a pessoa com posse de um novo conhecimento, e principalmente, somado a outros conhecimentos que já

possuía, torna-se capaz de criar e transformar em um novo saber, ampliando assim o conjunto de informações que farão parte de seu saber.

Uma metáfora que simplifica a *assimilação* e a *acomodação*, é imaginar que assimilar um conhecimento é como ingerir um alimento, mas até que o corpo comece a digeri-lo e a transformá-lo em outras substâncias (nutrientes), ele não possuirá importância ao organismo. Entretanto, uma vez que é transformado pelo processo químico da digestão, o corpo absorve seus nutrientes, o que podemos compreender como sendo a acomodação e que, em se tratando de conhecimento, podemos dizer que temos um crescimento consistente do conhecimento do indivíduo.

É essencial que se mantenha o equilíbrio entre a assimilação e a acomodação da informação, uma vez que esses processos não possuem necessariamente uma ordem cronológica e, na maior parte das vezes, ocorrem simultaneamente em assuntos diversos. Um exemplo disso surge quando trabalhamos com conhecimentos de uma área da Matemática e “acidentalmente” estimulamos o desenvolvimento de nossos alunos em outras áreas da disciplina, demonstrando que ensinar é um processo extremamente dinâmico, onde a assimilação e a acomodação se retroalimentam, fazendo evoluir as capacidades do aluno.

Quadro 2.1 - Estágios do Desenvolvimento Cognitivo

Estágio / Idade Aproximada	Capacidades
Sensório-motor 0 a 2 anos	Inteligência prática: permanência do objeto e aquisição do esquema meios-fins. Aplicação deste esquema à solução de problemas práticos.
Operacional concreto <i>Subperíodo pré-operatório</i> 2-7 anos	Transição dos esquemas práticos às representações. Manejo frequente dos símbolos. Uso frequente de crenças subjetivas: Animismo, realismo e artificialismo. Dificuldade para resolver tarefas lógicas e matemáticas
Operacional concreto <i>Subperíodo das operações concretas</i> 7-12 anos	Maior objetivação das crenças. Progressivo domínio das tarefas operacionais concretas (seriação, classificação, etc.).
Operacional formal 12-15 anos e vida adulta	Capacidade para formular e comprovar hipóteses e isolar variáveis. Formato representacional e não só real ou concreto. Considera todas as possibilidades de relação entre efeitos e causas. Utiliza uma quantificação relativamente complexa (proporção, probabilidade, etc.).

Fonte: Carreteiro (1997, p.24)

No Quadro 2.1, Piaget classifica as fases de desenvolvimento cognitivo conforme as faixas etárias e as capacidades adquiridas. Esta relação etária com o desenvolvimento cognitivo demonstram a forte ligação de sua pesquisa ao campo biológico.

Contudo, como veremos adiante em relação às teorias de outros pesquisadores, não podemos avaliar os estágios de desenvolvimento da aprendizagem exclusivamente sob essa ótica. Poderemos verificar que as capacidades previstas para serem desenvolvidas e aperfeiçoadas nos estágios mais avançados podem sofrer comprometimento caso não ocorra um bom desenvolvimento nas etapas anteriores. Além disso, a faixa etária não é um componente exclusivo e nem o mais importante para esse desenvolvimento.

2.2

A aprendizagem como atividade social de Vygotsky

Visto como um pioneiro por ter formulado postulados que anos mais tarde foram responsáveis por avanços nos estudos da psicologia dos processos cognitivos, Vygotsky, natural da Bielorrússia (1896), de família judia com boas condições econômicas, viveu o fim do Império Otomano e acompanhou de perto a ascensão da Revolução Russa (1917), inclusive apoiou os bolcheviques. Tendo vivido nesse período, sintonizado com seu contexto social, e observando os avanços da Filosofia e Psicologia, sofreu influência dos trabalhos de Karl Marx, Sigmund Freud, entre outros pensadores.

Iniciou seus estudos em 1912 em Medicina, mas migrou para o Direito e formou-se em 1918. Durante sua formação, cursou paralelamente História e Filosofia. Posteriormente, tornou-se instrutor na Escola de Professores de Gomel (Bielorrússia), onde aprofundou seu interesse pelo processo educacional, lecionou e ampliou seus estudos em Literatura, Estética e História da Arte, assim como em psicologia, preocupando-se especialmente com os problemas de crianças possuidoras de necessidades especiais. Nesse local, fundou um laboratório de psicologia e, durante esse período, realizou pesquisas junto às comunidades rurais, acompanhando o processo de aprendizagem, da transmissão de cultura e do desenvolvimento cognitivo.

Como fruto de suas pesquisas e publicações no ramo da psicologia muda-se para Moscou em 1924, passando a atuar no Instituto de Psicologia, onde, com o apoio de outros pesquisadores, desenvolve sua teoria histórico-cultural dos fenômenos psicológicos.

Com a chegada ao poder de Josef Stalin em 1924, progressivamente os intelectuais da URSS, passaram a sofrer dificuldades no desenvolvimento de seus trabalhos. Ainda que tenha usado a dialética marxista na construção de sua teoria, o fato de seus trabalhos

não serem baseados na luta de classes de Marx, fez com que suas descobertas e publicações sofressem críticas. Devido a isso seus trabalhos foram censurados, em 1936, dois anos após sua morte, em decorrência de tuberculose, doença que já o afligia desde 1925. Como Prestes (2014) comenta, suas publicações mantiveram-se censuradas por vinte anos, fruto de uma acusação por sua “filiação” à *pedologia* (ciência sobre o desenvolvimento da criança). Somente na década de 1950 e 1960 sua teoria começa a chegar à Europa e em seguida aos Estados Unidos, e é divulgada no Brasil já na década de 1970. Embora tenha se disseminado pelo Ocidente, suas principais obras só voltariam a ser efetivamente publicadas na URSS na década 1980, ainda devido às sequelas da censura do período.

Vygotsky teve acesso ao trabalho de Piaget, a quem declarou admiração, mesmo discordando de algumas de suas ideias, inclusive deixou isso registrado em críticas publicadas em 1932. Por outro lado, Piaget viria a lamentar não ter tido acesso às obras de Vygotsky quando este ainda era vivo.

Como se pode concluir, Vygotsky, em seu curto período de vida, realizou uma grande quantidade de trabalhos – foram mais de 200 publicações – mesmo com as dificuldades mencionadas. Ivic (2010), em obra sobre a vida de Vygotsky, classifica-o como um autor de vanguarda e exemplifica com as declarações do filósofo S. Toulmin, que chamava Vygotsky de ‘*Mozart da Psicologia*’.

2.2.1 Teoria de Vygotsky

Uma das críticas realizadas pelos pesquisadores sobre a Teoria de Piaget é que sua teoria não enfatiza a grande influência dos fatores sociais no processo de aprendizagem. Ela não renega esse fator, mas pouco desenvolve sobre o mesmo, restringindo-se, sinteticamente, em afirmar que o conhecimento é desenvolvido num contexto social. Em decorrência disso, a teoria de Vygotsky, que não é necessariamente pedagógica, desempenha um importante papel, uma vez que sua construção é baseada na ideia de que o indivíduo é, antes de tudo, um ser social, compreendendo o conhecimento como um produto social.

Vygotsky defende que os processos psicológicos superiores (comunicação, linguagem, raciocínio etc.) são absorvidos inicialmente num meio social para que sejam posteriormente internalizados pelo indivíduo.

2.2.2

Zona de Desenvolvimento Proximal

Uma das contribuições mais especiais de Vygotsky é o que ele denominou como a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

Vygotsky defende a existência de dois Níveis de desenvolvimento, um real e outro potencial. Vejamos as especificidades de cada um deles no quadro a seguir:

Quadro 2.2 – Níveis de desenvolvimento de Vygotsky

Nível de desenvolvimento	Características
Real	O conjunto de conhecimentos que o aluno pode adquirir ou a capacidade de resolução de um dado problema que um aluno (criança) consegue executar sem que haja auxílio de um indivíduo mais capacitado (professor, aluno com mais proficiência). Nesse nível as estruturas dos conhecimentos a serem desenvolvidos já estão estabelecidas.
Potencial	É o conjunto de conhecimentos que o aluno adquire ou a resolução de um dado problema que o aluno consegue desenvolver desde que haja auxílio de um indivíduo mais capacitado. Nesse nível, a estrutura ainda não está plenamente formada, sendo necessário suporte para formação das novas estruturas.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Pode-se compreender a Zona de Desenvolvimento Proximal, sob o ponto de vista do professor, como sendo o processo de condução do aluno entre dois níveis de desenvolvimento real; o primeiro, que já está solidificado, mas menor, para o seguinte, maior, mas que até ser atingido é considerado potencial. Nesse contexto, pode-se ver que o professor passa a atuar como o mediador dessas fases de compreensão.

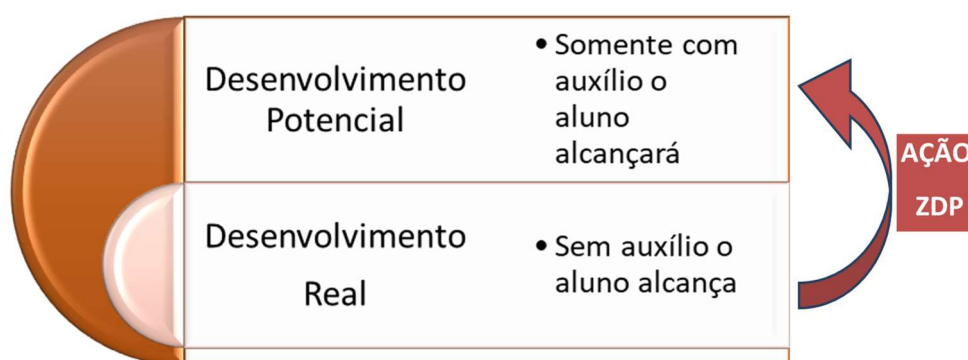


Figura 2.1 - Zona de Desenvolvimento Proximal

Na Figura 2.1 tem-se uma estrutura que demonstra a ação da ZDP, que ocorre em especial na interação entre o professor e o aluno, onde o aluno que já possui conhecimentos interiorizados é estimulado, pelo professor, a ultrapassar seus limites de

conhecimento, assim adquirindo um novo repertório de habilidades. Ou seja, o aluno alcança o seu potencial.

Essa visão sobre os níveis de conhecimento, bem como o processo de migração entre esses níveis é essencial no processo de ensino-aprendizagem em geral, mas se poderá ver adiante que na metodologia de van Hiele, em matemática é essencial.

A importância desse conceito pode ser expresso na seguinte afirmação: “enquanto Piaget sustenta que o que uma criança pode aprender está determinado pelo seu nível de desenvolvimento cognitivo, Vygotsky pensa que é este último que está condicionado pela aprendizagem.” (Carreteiro 1997, p.14). Esta diferença vincula a compreensão de que alunos que são mais expostos à informação, não só a adquirem mais quantitativamente, como também tem aumentada sua capacidade cognitiva qualitativamente.

2.3

A Aprendizagem Significativa De Ausubel

David Ausubel, professor Emérito da Universidade de Columbia, foi um médico psiquiatra de formação, mas atuou a maior parte da vida como psicólogo e pesquisador em educação. Nasceu em 1918, em Nova Iorque, e cresceu indignado com o ensino violento e repetitivo que recebera e, por isso, durante a década de 1960 começou a publicar trabalhos com sua teoria de aprendizagem, com seus resultados no ensino em sala de aula. Após sua aposentadoria, Josph Donald Novack, da Universidade de Cornell, deu prosseguimento à teoria de Ausubel, inclusive alguns sugerem que seria mais adequado dizermos teoria de Ausubel e Novack. Atualmente Novack possui notável influência na teoria e disseminação dos mapas conceituais, além de possuir um Instituto que atende a mais de 400 escolas, NASA etc.

A crítica de Ausubel ao ensino que denominaremos aqui como tradicional, consistia em afirmar que nesse modo de ensinar, o professor tende a não considerar as estruturas de conhecimentos que o aluno já possui. Isto aliado ao frequente uso de atividades repetitivas, sem interconexões e a falta de uma organização da exposição dos conhecimentos com um objetivo claro a ser atingido, promovem uma excessiva mecanização da aprendizagem.

Ausubel entende que cada indivíduo possui uma estrutura cognitiva como o somatório de suas ideias e que os processos cognitivos em ação desencadeam-se baseados nessa estrutura. Para ele, aprender é um processo de compreensão sobre o conteúdo.

A importância de sua teoria recai sobre o fato de que ela está exatamente concentrada na aplicação em sala de aula, refletindo-se na forma como influencia a metodologia de ensino utilizada em vários países. Sua visão defende que o professor deve identificar o que o aluno já sabe e ensinar a partir deste conhecimento prévio. Utilizando a linguagem de Ausubel, pode-se dizer que:

Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos. (Moreira, M.A., 1995, p.152)

Assim na obra de Ausubel, ocorre-lhe que toda nova informação deve ser conectada a uma essencial estrutura cognitiva, ao que os construtivistas denominam como “pontes cognitivas”, ligando esquemas de informações menores a estruturas mais robustas. Estas ligações são conhecidas como processo de ancoragem, onde o aluno percebe que o novo objeto que lhe é apresentado está relacionado a outros conhecimentos. Vinculam-se estes com a realidade do aluno, produzindo significado.

Nesse contexto, compreende-se a ideia dos organizadores prévios, os quais o professor deve proporcionar ao aluno interligando o conhecimento novo ao que o aluno já possui. Essa compreensão permite que possamos correlacionar como o exemplo das bonecas russas citadas no texto sobre a visão piagetiana. Como consequência dos organizadores prévios, torna-se proveitoso o grau de compreensão dos alunos, diminuindo ou até suprimindo a necessidade do esforço do aluno para aprender determinados conceitos.

Quando da sua publicação na década de 1960, Ausubel contrariou a teoria condutista² (behaviorismo), que defendiam um processo de ensino mais fragmentado e sequenciado. “Para Ausubel, aprender é sinônimo de compreender” (Carreteiro 1997, p.15). Nesse sentido, é importante que o aluno perceba que o processo de aprender é tão ou mais importante que o próprio conhecimento em si, tornando essencial a ação do professor, principalmente, como mediador na construção do conhecimento.

A teoria enfatiza a preocupação com termos qualitativos em detrimento dos quantitativos. Frequentemente, no ensino tradicional, o professor só avalia os erros dos

² Sinônimo de behaviorismo: Teoria baseada na psicologia comportamental, que procura interpretar, em situações específicas, mediante observação dos estímulos e da resposta em detrimento da introspecção e da consciência. Esse estudo teve início com L. Bloomfield (1887-1949), seguido por B. F. Skinner (1904-1990).

alunos, ao invés de avaliar o que o aluno construiu durante o processo de ensino aprendizagem, e perde a oportunidade de usá-las como um termômetro para informar o modo que o aluno lida com as novas informações recebidas. Por isso, é mais importante ao professor observar o desenvolvimento interno do aluno, acompanhando as etapas realizadas por ele, as dificuldades de compreensão e aprendizagem apresentadas. Deve-se usar a avaliação não como forma de mensurar pontos apenas, como é demonstrado (*externamente*) pelo aluno ao realizar uma prova de conhecimentos tradicional. Mas como meio de indicar onde é necessário o professor intervir no processo de aprendizagem, para que possa provocar estímulos ao desenvolvimento do aluno cobrindo os déficits identificados, e assim, desenvolvendo as capacidades cognitivas (*internamente*) do aluno.

É importante indicar que o próprio Ausubel sendo crítico à mecanização da aprendizagem com o uso de repetições, afirma que elas se tornam necessárias ao ensino de alguns conteúdos de diversas disciplinas, mas que em um momento posterior, devem ser ancoradas em atividades significativas, caso contrário, aquela aprendizagem resulta em conhecimentos que facilmente se perderão.

Uma divergência interessante entre as teorias de Piaget e Ausubel ocorreu devido a uma famosa frase de Piaget, que afirmara: “tudo o que se ensina à criança se lhe impede descobri-lo” (Piaget apud Carreteiro, 1997, p.17). Segundo essa posição, Piaget defendia que o professor deveria incentivar seus alunos a descobrir novos conhecimentos, evitando expor conhecimentos prontos. Ausubel, diferentemente, inferiu que se devidamente levado em consideração a bagagem de saberes do aluno e suas potencialidades de crescimento, poderíamos ter o professor como agente eficaz na transmissão de conhecimentos.

Carreteiro (1997, p.18-19) discute sobre diferentes visões do construtivismo, resumindo-as em três grupos principais, que podem ser sintetizados, a seguir:

Quadro 2.3 – Visões do construtivismo

Visão	Descrição
Aprendemos sozinhos	Baseada na aprendizagem dissociada do contexto social, focando preponderantemente nas teorias de Piaget e Ausubel.
Sozinhos não aprendemos	O foco da construção do conhecimento está apenas nas trocas sociais entre alunos e professor, uma visão radical da teoria de Vygotsky, desconsiderando alguns elementos essenciais das individualidades dos alunos.
Juntos aprendemos muito melhor	Compreensão intermediária às visões de Piaget/Ausubel e Vygotsky. As trocas de conhecimentos entre alunos de diferentes níveis de saber proporciona uma aprendizagem de melhor qualidade.

Fonte: Elaborado pelo autor

Por fim, podemos dizer que as visões de Piaget, Vygotsky e Ausubel não se esgotam em si, podendo ser consideradas complementares, e seus usos podem e devem ser adaptados pelo professor de acordo com o que procura ensinar e da forma que considerar mais eficaz no ensino.

Há muitos estudos, materiais e técnicas pedagógicas que são focadas em ensino-aprendizagem, mas me parece, pelas minhas experiências como professor, que poucos são difundidos entre os docentes de matemática. Claro que percebo cada vez mais iniciativas, seja através dos cursos de formação ou dos de aperfeiçoamento, como o próprio PROFMAT. Por isso, discorro a seguir sobre o modelo de ensino do casal van Hiele, uma proposta para desenvolvimento do ensino de geometria que visa aglutinar de forma mais prática e harmônica os principais elementos das teorias de aprendizagem já discutidas nesse capítulo, mas com um viés próprio ao ensino da matemática.

2.4

A aprendizagem por níveis dos van Hiele

2.4.1

Um pouco sobre o casal van Hiele e sua influência na RME

O casal de professores secundários Pierre M. van Hiele e Dina van Hiele-Geldof finalizaram suas respectivas teses de doutorado em 1957, ambas direcionadas ao ensino de matemática e de forma que seus trabalhos se complementavam. Enquanto o trabalho de Dina focava nos resultados das aplicações do método desenvolvido de forma experimental em suas turmas, Pierre, em seu trabalho, discorria principalmente sobre as explicações teóricas das causas e processos de desenvolvimento da aprendizagem.

Posteriormente, ele aprofundou os estudos e através de novas publicações divulgou o método desenvolvido inicialmente em colaboração com sua esposa, que falecera pouco depois da conclusão de seu trabalho. Estas teses se complementaram na construção de um modelo de aprendizagem de geometria, mas que pode ser adaptado para outros ramos da matemática e até para outras disciplinas.

Embora a divulgação e o reconhecimento internacional tenham ocorrido de forma gradual, os trabalhos influenciaram o desenvolvimento de modelos de ensino nas décadas seguintes em diversos países. Entre os exemplos dessas aplicações, observa-se seu uso na construção do currículo de geometria na União Soviética ainda na década de 1960, além de também ter sido alvo de experimentos de estudos nos Estados Unidos, nos projetos do

Brooklin, de Chicago e Ohio, na década de 1970. Inclusive, a metodologia tornou-se mais conhecida nos Estados Unidos com a publicação do livro “Mathematics as an Educational Task” de Hans Freudenthal³ (1973).

Freudenthal foi um dos pesquisadores da Educação Matemática Realística - RME que contribuiu para os trabalhos do casal van Hiele, inclusive os orientando, e amplamente utilizou os resultados de seus trabalhos como base em suas próprias pesquisas durante várias décadas. Também desenvolveu contribuições para a fenomenologia, corrente filosófica que defende que o conhecimento é gerado pela forma que a consciência interpreta os fenômenos, sendo uma de suas contribuições sobre sua interpretação da fenomenologia a aplicação na didática matemática.

Ao longo do tempo, reduziu o uso do trabalho dos van Hiele a medida em que desenvolvia suas próprias pesquisas, mas não renegou a importância dos trabalhos do casal. A contribuição para RME por Freudenthal, que dirigia o IOWO (Instituto para Desenvolvimento de Educação Matemática), teve importante papel na reforma do ensino de matemática secundária iniciada no projeto Wiskobas, originado em 1961 pelo governo holandês. Freudenthal afirmava que o matemático, em sua atividade, pensa naturalmente de forma lógico-matemática, preocupado com axiomas, teorias, escrita, e com grande grau de abstração. Consequentemente, o professor de matemática, durante o ato de ensinar, tende a aplicar técnicas matemáticas mais avançadas, bem como usar um linguajar mais acadêmico, impossibilitando uma conexão com a compreensão da realidade do aluno. Por isso, defendia que o ensino deveria ter seus conteúdos adaptados e interligados com o cotidiano do aluno, dialogando com o contexto do aluno e da sociedade.

2.4.2

Os níveis de aprendizagem do modelo de van Hiele

Através de suas experiências pessoais em sala de aula em turmas do primeiro ano da escola secundária (na faixa etária de 12 anos), o casal van Hiele observou a dificuldade de aprendizagem que seus alunos possuíam em geometria, e daí, depreendeu que a principal causa era que ao ensinar os conteúdos previstos no currículo de geometria, o professor desenvolvia conhecimentos em um grau matemático superior ao que os alunos

³ Reconhecido matemático de origem holandesa, formado pela Universidade de Berlim. Atuou na Universidade de Utrecht (UU), Holanda, e além de diversas contribuições à matemática aplicada, fundou o Instituto para o Desenvolvimento da Educação Matemática, que após seu falecimento foi renomeado para “The Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education”.

se encontravam. Michael de Villiers⁴, em versão traduzida de seu artigo por Celina Abar (2010), “Algumas reflexões sobre a Teoria de van Hiele”, traz a seguinte interpretação:

Os van Hiele atribuíram a principal razão da falha do currículo de geometria tradicional ao fato de que o currículo era apresentado em um nível mais alto do que o dos alunos, ou seja, eles não conseguiam entender o professor e o professor não conseguia entender o porquê eles não conseguiam entender!⁵ (Abar, 2010, p. 401)

Em decorrência dessas observações, eles concluíram que o ensino de geometria deveria ser estimulado pelo professor, o qual deveria cada vez mais abandonar a maneira clássica de ensino com a apresentação de conceitos prontos e assumir o papel fundamental de orientador. Dessa forma, o professor poderia conduzir os alunos entre os níveis de pensamento e os conteúdos correspondentes, de forma gradual e identificando durante todo o processo as fases dessa construção de conhecimento, estimulando-os no processo de descoberta através de experimentação.

A partir de seus estudos o casal van Hiele defende que o aprendizado de geometria ocorre em níveis de compreensão e raciocínio geométrico. O processo de aprendizagem foi então agrupado em cinco níveis, que eles numeraram de zero a quatro⁶. Vejamos como estes níveis são classificados conforme suas descrições, as habilidades envolvidas e desenvolvidas.

A. Nível 0: Visualização ou reconhecimento

O aluno utiliza sua percepção visual e não possui uma verbalização para o objeto de estudo. Ele não possui condições de realizar expressões como “*É um ...*”, mas consegue fazer afirmações do tipo “*Parece com um ...*” ou “*Não é um ...*”. Utiliza-se, portanto, de associações com objetos dantes conhecidos, sem conseguir elencar as propriedades geométricas desse objeto. O aluno consegue, por exemplo, fazer associação de um círculo com uma moeda, mas não porque este ‘objeto’ também possui 360° ou que tem um diâmetro cuja medida é o dobro do raio.

⁴ Universidade de KwaZulu-Natal, África do Sul.

⁵ Tradução de Celina A. A. P. Abar – abarcaap@pucsp.br para publicação na Revista Educação Matemática Pesquisa, com permissão do autor, a partir da versão original apresentada no IV Congresso de Professores de Matemática da Sociedade Croata de Matemática, Zagreb, 30 de junho a 02 de julho de 2010.

⁶ Em alguns materiais, principalmente os derivados dos EUA, optou-se pela numeração dos níveis serem atribuídas de 1 a 5, além dessa alteração é comum nas publicações serem utilizados nomenclaturas diferentes para um mesmo nível, mas que não modificam o significado do nível correspondente.

B. Nível 1: Análise ou descrição

O aluno analisa, nomeia e descreve propriedades, aprende simbologias próprias para o objeto de estudo e, com essa bagagem, consegue diferenciar figuras geométricas em agrupamentos (classes). Ele não vê a necessidade de provar suas descobertas. Durante este processo os alunos fazem medições, manuseiam os objetos geométricos materialmente através de construções concretas ou de desenhos, ou ainda, através do uso de softwares de geometria dinâmica, mas de forma que todo o processo ocorra informalmente. Nesse nível, por exemplo, ele consegue dizer que um quadrado tem lados congruentes e ângulos retos, mas ainda não é capaz de observar que o quadrado também é um paralelogramo ou um retângulo. Ele consegue definir um objeto por meio da identificação de suas propriedades, ainda que não as compreenda completamente.

C. Nível 2: Dedução informal (ordenação ou abstração)

Nesse nível o aluno consegue correlacionar as propriedades, verificando a ideia de causa e consequência, por meio de deduções curtas. A partir das descobertas observadas ainda no nível 1 e ao comparar diferentes objetos, que compartilham das mesmas propriedades, o aluno consegue correlacionar as propriedades com as classes de objetos em estudo e também pode desenvolver a comparação entre diferentes classes de objetos que já foram analisados, observando tanto no que essas classes são semelhantes, quanto no que as diferencia.

Van Hiele exemplifica que um aluno após comparar vários paralelogramos e retângulos, no nível 1, pode concluir que os dois possuem pares de lados paralelos e assim, deduzir informalmente que o retângulo também é um paralelogramo. Contudo, nesse nível falta o desenvolvimento de um raciocínio geométrico mais elaborado, uma vez que suas conclusões não são obtidas através de um desenvolvimento formal. Ele até consegue compreender quando lhe é apresentada uma prova formal, contudo não produz a partir desse conhecimento novas provas formais a partir de novos dados. Esta dificuldade de compreensão resulta em complicações no entendimento dos axiomas e definições geométricas e, por isso, o estudante tende a apenas memorizá-los, sem perceber o porquê.

D. Nível 3: Dedução formal

O aluno consegue relacionar as propriedades de diversas figuras, mas vai além disso, já que nesse nível o aluno constrói as provas através de um raciocínio lógico-

dedutivo, ou seja, consegue encadear um conjunto de argumentos que permite comprovar uma teoria. Nesse nível o aluno passa a adquirir uma fluência na linguagem matemática, principalmente em sua leitura. Compreende os axiomas, teoremas, o processo lógico de construção daquela informação que lhe foi apresentada. Ele alcança um nível de conhecimento que vai além da memorização e que o capacita a construir suas provas matemáticas por outros caminhos. Isso indica uma grande evolução, pois o torna um agente criativo no contexto matemático. Por exemplo, após perceber que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles, além de dividir a base ao meio, também divide o ângulo desse vértice ao meio, conclui que ela também é uma bissetriz. Mas além de perceber esse fato, consegue utilizar alguma técnica para comprová-lo, e com essa nova propriedade, é capaz de conectar a outros conhecimentos para chegar em novas conclusões e, se bem estimulado, desenvolve durante todo o processo o interesse em demonstrar o porquê das descobertas.

E. Nível 4: Rigor

Ao alcançar esse nível o aluno já possui uma grande gama de conhecimentos matemáticos e geométricos, comprovado pela facilidade em pensar e escrever na linguagem matemática. Podemos dizer que a capacidade de **abstrair** torna-se uma característica primordial e, segundo van Hiele, temos como consequência do desenvolvimento uma redução da presença de desenhos, objetos e construções para as provas.

O rigor apresenta-se com o uso próprio da linguagem matemática, através do uso de suas estruturas, como axiomas, postulados, lemas, teoremas. Evidencia-se o processo de dedução matemática e consolida-se através de demonstração com provas e contra provas. Avançando, ainda conseguem desenvolver mais de uma prova para uma dada propriedade e refletir sobre geometrias não euclidianas.

2.4.3

Propriedades dos níveis

O processo de aprendizagem possui algumas características gerais:

- O aluno não pode seguir para um nível mais avançado sem que tenha assimilado o nível anterior. Por exemplo, professor precisa verificar se o aluno conseguiu desenvolver-se adequadamente no nível de *Dedução Informal*, para posteriormente conduzi-lo ao nível de *Dedução Formal*. Portanto, exige-se que

respeitemos uma **sequência predefinida** de habilidades desenvolvidas. É importante sinalizar que para diferentes temas o aluno pode estar em diferentes níveis, ou seja, ele pode estar em um nível maior no estudo de círculos do que ele possui no que se refere a triângulos. Contudo, Pierre van Hiele indica que é comum o fato de a proficiência em um tema acelerar o aprendizado em outro.

- A transição entre os níveis depende principalmente do método de ensino e não de outros fatores, como a idade por exemplo. Por isso, o avanço pelos níveis deve ser planejado para, além de respeitar a ordem dos níveis, proporcionar um ambiente de aprendizagem que permita o avanço gradual do aluno. Posto isso, podemos observar que o aluno progride ao ser apresentado a um dado objeto geométrico em etapas. Por exemplo, ele primeiro registra qual é esse objeto, depois observa suas medidas, de comprimento de lados, de ângulos e de áreas, e em seguida pode começar a inferir relações entre os objetos baseado em suas propriedades. Posteriormente, em conjunto com outros conhecimentos, ele poderá deduzir outras características.
- Quando o aluno avança de um nível para os seguintes, o conhecimento que é o alvo a ser desenvolvido no nível anterior torna-se convencional no nível seguinte; o que era novo e até difícil, na visão do aluno, torna-se comum a ele. Quando o aluno avança de um nível inicial em que ele apenas visualizava um objeto e o identificava, num momento posterior, além de reconhecer o objeto (**intrínseco**), ele passa a indicar propriedades (**extrínsecos**).
- Em cada nível de aprendizagem é importante o professor respeitar a **linguagem adequada para o dado nível**. Em determinado momento o aluno pode dizer que um triângulo equilátero não é um triângulo isósceles. Embora esta afirmação seja incorreta, o professor, durante o processo de ensino, pode desconsiderar, momentaneamente, o erro do aluno, a fim de dar prosseguimento a aprendizagem no que é relevante àquele momento. Posteriormente, em momento oportuno, o docente retoma a informação e retifica a informação. Neste momento, ao analisar as propriedades do triângulo equilátero, observa que ele é também um triângulo isósceles e, portanto, carrega todas as suas propriedades, concluindo que não é diferente do triângulo isósceles como afirmado anteriormente. Ou seja, o que é correto num nível, pode não ser em outro.

- Para os van Hiele, a falha de comunicação do professor com o aluno era uma das principais razões das dificuldades de aprendizagem de geometria. Uma característica essencial no modelo é que o professor e os demais recursos educacionais precisam estar adaptados ao nível do aluno, pois se não, o professor parece estar falando outro idioma, aquele momento em que o aluno afirma que “o professor está falando grego”.
- E por fim, para que se dê a construção do entendimento do aluno em dado nível de forma satisfatória, permitindo que ele avance para o nível seguinte, o professor deverá lançar mão das Fases de Aprendizagem, as quais serão discutidas a seguir.

2.4.4

Fases de aprendizagem de van Hiele

Fase 1 – Questionamento ou informação:

Nessa fase o professor propõe a atividade, apresentando as ferramentas pedagógicas constantes do seu planejamento e utilizando linguajar próprio do nível que será desenvolvido. Além disso, é essencial que se crie um diálogo com os estudantes e sejam realizados questionamentos para identificar os conhecimentos que eles já possuem e que subsidiarão a construção do objetivo educacional proposto.

Fase 2 - Orientação Direta ou Guiada:

Fase na qual os alunos passam a manipular o material, observando as orientações específicas que o professor indica. Tais orientações devem ter uma evolução gradual em sua complexidade e as instruções devem resultar em respostas objetivas pelos alunos. Nessa etapa, o professor induz, mesmo que não explicitamente, os fatores aos quais o aluno deve se atentar. Sendo que estas serão devidamente explicitadas nas fases seguintes.

Fase 3 - Explicitação ou Explicação

Em tal fase, os alunos exprimem e debatem com o professor as descobertas das fases anteriores. O professor apresenta e corrige os termos referentes ao conteúdo, os van Hiele afirmaram que é mais importante o aluno se familiarizar com o conceito em si do que desenvolver o conhecimento da nomenclatura específica. Visto que a intervenção do professor deve ser mínima, inicialmente, ele levanta questões sobre o que os alunos observaram na fase anterior, deixando-os debaterem sobre isso, para em seguida, fazer as

possíveis correções na nomenclatura e mostrar que a propriedade que o aluno observou possui determinado nome, mesmo que a esta altura o aluno já saiba da sua existência.

Fase 4 – Orientação Livre

Atividades propostas nesta fase são normalmente mais complexas e devem permitir que o aluno as realize com maior liberdade. Possibilita-se ao discente criar diferentes estratégias e construções para a resolução dos problemas propostos, visto que autonomia e criatividade se tornam o foco. Além disso, a possibilidade de os alunos obterem caminhos e resultados distintos cria a oportunidade de cativar a curiosidade do aluno em identificar as possíveis causas por trás destas divergências. Como ocorre o estímulo a criatividade do aluno para resolver estes problemas, promove-se o amadurecimento de sua compreensão e fomenta-se o processo de acomodação destes saberes e doutros já estudados.

Fase 5 - Integração

Nessa etapa ocorre a consolidação do que foi aprendido. Para isso, o professor retoma e conecta, de forma geral, os objetivos trabalhados nas fases anteriores. É essencial que o professor não introduza novos conhecimentos e nem apresente fatos que possam gerar dúvidas. É um fechamento que sintetiza a aprendizagem e, conseqüentemente, é nessa fase que o professor pode atribuir atividades de fixação como exercícios para casa.

Ao passar pelas cinco fases, o aluno desenvolve a competência e ao participar de forma ativa na aprendizagem desenvolve sua capacidade dedutiva, principalmente pela forma dinâmica que o conteúdo é apresentado.

2.5 Observações

Baseado nos elementos presentes nas teorias desenvolvidas por Piaget, Vygotsky e Ausubel, e principalmente somado à metodologia desenvolvida por van Hiele, observo que a visão construída pelo casal aglutina as principais características dos demais. Porém, com um grande ganho, uma vez que ela cria uma orientação mais aplicada à sala de aula, pois se preocupa em criar uma forma de construir o conhecimento.

Ao se realizar o ensino norteado pelo uso do método de van Hiele, observa-se que isto respeita e aprofunda a visão de Piaget sobre os processos de assimilação e acomodação. Pode-se verificar quando se utiliza a metodologia na construção de

atividades baseando-se no ensino em níveis de aprendizagem. Pelo método, o ensino por níveis deve considerar a aplicação correta das fases de aprendizagem, onde ocorre a apresentação do conhecimento (assimilação) e, durante suas transições, momento em que o conhecimento é consolidado (acomodação).

Durante a aprendizagem pelo método, o professor estimula a autonomia do aluno, que explora e descobre sozinho, na maioria das fases. O docente interfere o mínimo possível na execução das atividades. Contudo nas fases da explicitação e integração, percebe-se ações mais diretas tomadas pelo professor. Na primeira, ele corrige as descobertas dos alunos e apresenta informações as quais o aluno ainda não possui. Na última, após promover o debate com o grupo sobre toda a atividade realizada, ele integra as diferentes descobertas, as conecta e por fim consolida a aprendizagem com os alunos, chamando a atenção a fatos que eles possam não ter percebidos. Isto vai ao encontro do que Vygotsky defende em sua teoria sobre a Zona de Desenvolvimento Proximal. Na evolução pelos níveis de aprendizagem, promove-se situações em que ocorrem oportunidades de trocas de informações entre os alunos, comparando suas descobertas, e destes com o professor, principalmente durante a integração, estimulando as interações sociais previstas por Vygotsky.

Esse processo evidencia a significação por meio de experiências que o aluno desenvolve, e promove a integração de conhecimentos de áreas diferentes, dentro da matemática e, principalmente, ao criar possibilidades para outros campos do conhecimento. Por isso, confirmam-se as ideias defendidas por Ausubel de um ensino significativo, com menos repetições e mais interconexões, promovidas pela atuação do docente na condução do processo de aprendizagem.

3 Fundamentação teórica geométrica

Este capítulo dedica-se às definições, propriedades e respectivas demonstrações dos conceitos geométricos alvos das propostas de atividades que serão apresentadas. Por isso, limita-se a discorrer sobre o que é, habitualmente, apresentado aos discentes do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental, com o devido rigor matemático que nem sempre é trabalhado em sala de aula. As definições, proposições e corolários são baseados no exposto por Antonio Caminha M. Neto no livro Tópicos de Matemática Elementar 2: Geometria Euclidiana Plana.

Inicialmente são apresentados o conceito e alguns exemplos elementares de Lugares Geométricos. Em seguida, trata-se das principais cevianas e pontos notáveis de um triângulo. E, por fim, desenvolve-se o conceito da circunferência de Apolônio, um Lugar Geométrico cuja abordagem não está prevista no Ensino Básico, mas para a qual propomos uma atividade que permite o seu ensino de forma concreta, além de expandir o conhecimento geométrico do aluno.

3.1 Lugar geométrico

Embora a definição de Lugar Geométrico possa ser algo trivial aos docentes de matemática, baseando-me na minha experiência, obtida em sala de aula, percebo que a sua compreensão é abstrata para grande parte dos alunos do ensino básico.

Definição 3.1: Lugar Geométrico é o subconjunto de todos os pontos do plano que possuem uma propriedade específica. Estes pontos obedecem às duas regras adiante:

- a. Todo ponto deste Lugar Geométrico possui esta propriedade específica.
- b. Todo ponto do plano que possui esta propriedade pertence ao Lugar Geométrico.

Ao decorrer deste texto referimo-nos ao Lugar Geométrico por LG.

Devido à dificuldade de compreensão pelos alunos, sugere-se a ilustração da Figura 3.1. Pense no asfaltamento de uma estrada. Observe que o asfalto só pode ser colocado no trajeto da estrada, e a esta é formada somente pelo conjunto de partículas do asfalto. Logo, pela definição de LG, podemos afirmar que a estrada é o LG das partículas do asfalto, uma vez que as duas condições são respeitadas.

Figura 3.1 – Lugar geométrico⁷

Como já afirmado, tenho a impressão de que o conceito de LG é abstrato para maior parte dos alunos. Por isso, acredito que se deva trabalhar os exemplos mais simples de LG e, sempre que possível, vincular os conceitos de LG a exemplos do cotidiano do aluno.

3.1.1 Circunferência

Definição 3.2: Dados um real positivo r e um ponto O do plano, o LG dos pontos do plano que estão à distância r do ponto O é a circunferência de centro O e raio r :

$$\overline{AO} = r \Leftrightarrow A \in \Gamma(O; r).$$

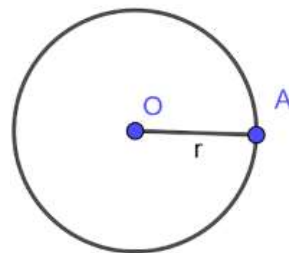


Figura 3.2 - Circunferência

3.1.2 Bissetriz

Definição 3.3: A bissetriz de um ângulo é a semirreta que o divide em dois ângulos congruentes com origem no vértice desse ângulo.

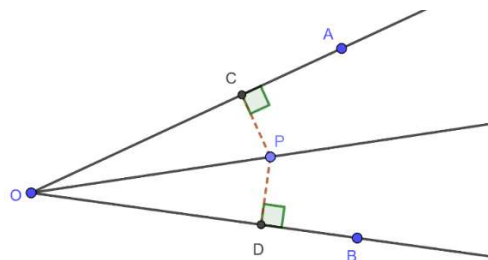


Figura 3.3 - Bissetriz

⁷ Disponível em : <<https://www.gratispng.com/png-7etlq1/>>. Acesso em: 12 mar. 2020

A bissetriz como LG pode ser caracterizada pela seguinte proposição.

Proposição 3.4: Seja $\angle AOB$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então

$$d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow P \in (\text{bissetriz de } \angle AOB)$$

Demonstração:

Seja $\angle AOB$ um ângulo qualquer e P um ponto equidistante às semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , de forma que essa distância seja realizada pelos pontos $C \in \overrightarrow{OA}$ e $D \in \overrightarrow{OB}$, ou seja, os segmentos PC e PD são perpendiculares a \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , respectivamente. Observe que os triângulos $\triangle POC$ e $\triangle POD$ são congruentes pelo caso LLA_o (Lado – Lado - Ângulo oposto, versão particular do caso ALA em algumas literaturas), pois OP é comum aos dois triângulos, $PC \cong PD$ (P equidista de C e D), e $\angle ODP \cong \angle OCP$ (ângulos retos). Daí, segue que $\angle COP \cong \angle DOP$, o que mostra que a semirreta \overrightarrow{OP} divide o ângulo $\angle AOB$ ao meio e, portanto, é a bissetriz.

Reciprocamente, tome como premissa que \overrightarrow{OP} é a bissetriz do ângulo $\angle AOB$, em que P é um ponto arbitrário. Observe que essa semirreta divide o ângulo $\angle AOB$ nos ângulos $\angle AOP$ e $\angle BOP$ de mesma medida. Considere as retas perpendiculares às semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} que contêm P , de forma que as interseções entre as perpendiculares e as semirretas definam os pontos C e D , respectivamente, sobre as semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} . Note que os triângulos $\triangle POC$ e $\triangle POD$ são congruentes pelo caso LAA_o (Lado - Ângulo - Ângulo oposto), pois o segmento OP é comum, $\angle AOP \cong \angle BOP$ e $\angle PCO \cong \angle PBO$. Consequentemente, os segmentos PC e PD são congruentes, ou seja, $d(P, \overrightarrow{OA}) = d(P, \overrightarrow{OB})$. ■

Quando aplicado a retas r e s , concorrentes em E , o conjunto de pontos equidistantes a estas retas concorrentes será o LG denominado bissetriz. No exemplo abaixo, r e s são concorrentes e as retas h e k são bissetrizes, que juntas formam o lugar geométrico dos pontos equidistantes às duas retas.

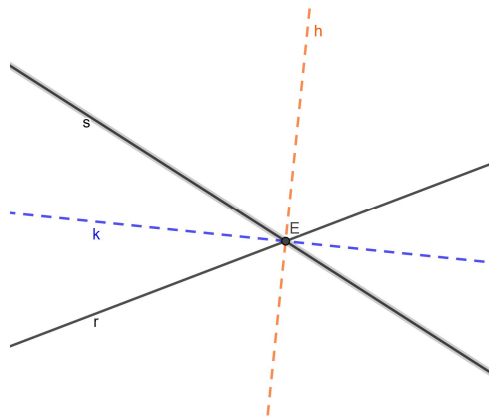


Figura 3.4 - Bissetriz como LG

3.1.3 Mediatriz

Definição 3.5: A mediatriz é a reta perpendicular a um segmento de reta que passa pelo seu ponto médio.

A mediatriz como LG pode ser caracterizada pela seguinte proposição.

Proposição 3.6: Dados os pontos A e B no plano, a mediatriz do segmento AB é o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B.

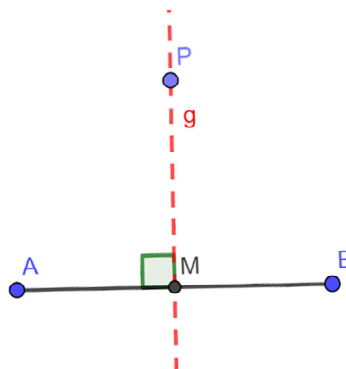


Figura 3.5 - Mediatriz - LG

Demonstração:

Seja AB um segmento qualquer e o ponto P equidistante aos pontos A e B, de forma que a distância de P ao segmento AB seja realizada pelo ponto $M \in AB$, ou seja, o segmento PM é perpendicular a AB. Observe que os triângulos $\triangle PMA$ e $\triangle PMB$ são congruentes pelo caso LLA_0 (Lado – Lado – Ângulo oposto), pois PM é comum aos dois triângulos, $PA \cong PB$ (P equidista de A e B) e $\angle PMA \cong \angle PMB$ (ângulos retos). Daí, segue que $MA \cong MB$, ou seja, M é médio de AB. O que mostra que a reta \overleftrightarrow{PM} é perpendicular ao segmento AB, passa pelo seu ponto médio e, portanto, é a mediatriz do segmento AB.

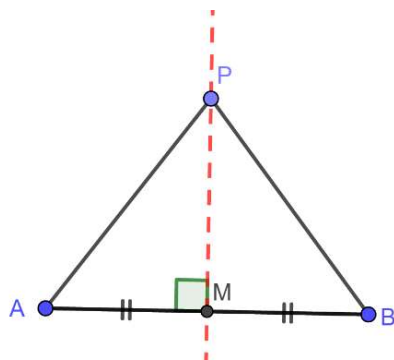


Figura 3.6 - Mediatriz como LG

Reciprocamente, tome como premissa que \overline{PM} é a mediatriz do segmento AB, em que P é um ponto arbitrário e M é o ponto médio de AB. \overline{PM} é perpendicular a AB em M. Observe que essa reta divide o segmento AB nos segmentos AM e BM de mesma medida. Considere os segmentos de retas PA e PB. Note que os triângulos ΔPMA e ΔPMB são congruentes pelo caso LLA_o (Lado - Lado - Ângulo Oposto), pois o segmento PM é comum, $MA \cong MB$ (M ponto médio de AB) e $\angle PMA \cong \angle PMB$ (ângulos retos). Consequentemente, $PA \cong PB$, ou seja, ou seja, $d(P, A) = d(P, B)$.

■

3.1.4 Par de arcos capazes

Definição 3.7: Considere uma corda AB de uma circunferência Π de centro O. Pelo Teorema do ângulo inscrito, a medida do ângulo $\angle APB$ é invariante para qualquer ponto P sobre um dos arcos determinados pela corda AB, visto que

$$\text{med}(\angle APB) = \frac{\text{med}(\angle AOB)}{2},$$

e o ângulo central $\angle AOB$ é fixo. Denomina-se *arco capaz de ângulo α relativo ao segmento AB* o arco APB tal que $\text{med}(\angle APB) = \alpha$.

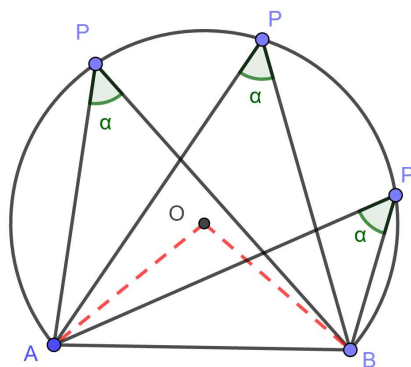


Figura 3.7 - Arco Capaz

O par de arcos capazes relativos ao segmento AB podem ser caracterizados como LG pela seguinte proposição.

Proposição 3.8: O LG dos pontos do plano que enxergam um segmento AB sob um ângulo fixo de medida α é um par de arcos capazes do ângulo α em relação ao segmento AB.

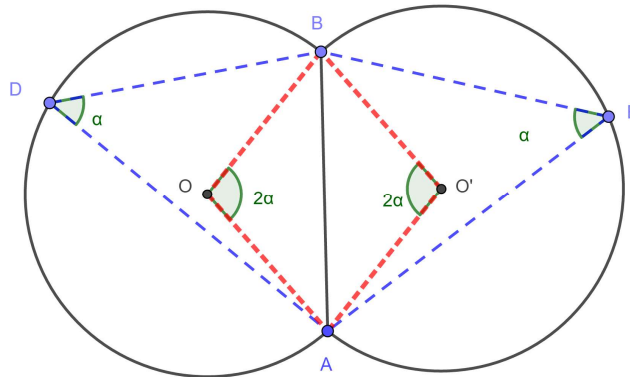


Figura 3.8 - Par de Arcos Capazes

Demonstração:

Observe que todo ponto pertencente ao arco capaz enxerga o segmento AB sob o mesmo ângulo α , pela definição de arco capaz acima. Tome P e P' pontos em semiplanos distintos em relação à reta \overleftrightarrow{AB} e Φ o conjunto de pontos que pertencem aos arcos arc APB e arc AP'B, de forma que $med(\angle APB) = med(\angle AP'B) = \alpha$.

Tome O centro de arc APB e O', de arc AP'B. Portanto, todo ponto $T \in \Phi$, enxerga o segmento AB sob o ângulo α de medida fixa.

Basta então provar que para todo ponto $K \notin \Phi$ tem-se que $med(\angle AKB) \neq \alpha$. Para isso, considere dois casos: K pertencente à região exterior de Φ e K no interior de Φ .

Para K exterior à Φ , tome $AK \cap \Phi = V$, logo $med(\angle AVB) = \alpha$. Aplique o Teorema do ângulo externo ao ΔKBV , obtenha $med(\angle AVB) = med(\angle AKB) + med(\angle VBK)$. Logo, $med(\angle AKB) < \alpha$.

Para K interior à Φ , tome $AK \cap \Phi = R$, logo $med(\angle ARB) = \alpha$. Aplique o novamente o Teorema do ângulo externo ao ΔKBR e obtenha $med(\angle AKB) = med(\angle ARB) + med(\angle RBK)$. Logo, $med(\angle AKB) < \alpha$.

■

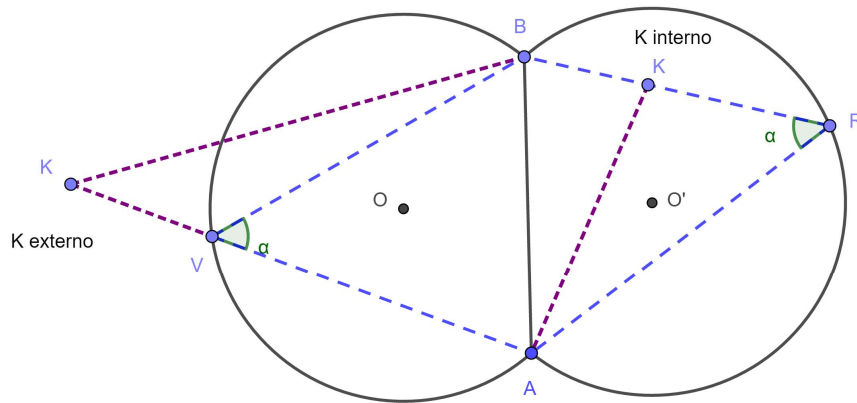


Figura 3.9 - Par de arcos capazes – demonstração

3.2 Pontos notáveis de um triângulo

Alguns dos principais pontos notáveis do triângulo são determinados por suas cevianas. Este tópico dedica-se às cevianas mais conhecidas, com suas definições e algumas de suas propriedades.

Definição 3.9: Denomina-se *ceviana* qualquer segmento de reta que une um vértice de um triângulo à reta suporte determinada pelos outros dois vértices.

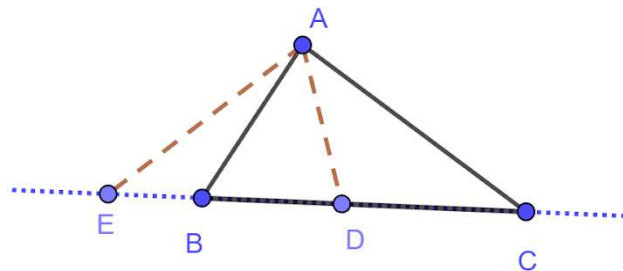


Figura 3.10 - Cevianas

Na Figura 3.10, temos a reta suporte do lado BC do triângulo ΔABC . Os segmentos AD interno ao triângulo e AE externo ao triângulo, são ambos cevianas. Descrevo abaixo as cevianas mais conhecidas e desenvolvidas nos Ensino Básico.

3.2.1 Mediatriz

Pela definição 3.5, observa-se que a mediatriz não pode ser classificada como ceviana, pois é uma reta que não necessariamente contém um vértice do triângulo. Contudo, o encontro das mediatrizes de um triângulo determina um de seus pontos notáveis.

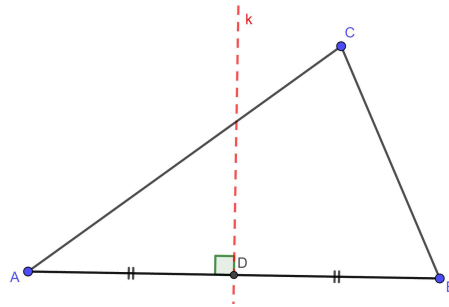


Figura 3.11 - Mediatriz no triângulo

Na figura 3.11, a reta k mediatriz que divide o segmento AB , no seu ponto médio D e que é perpendicular ao segmento AB .

Proposição 3.10: As mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem em um único ponto, a saber, o circuncentro. Além disso, este ponto equidista dos vértices do triângulo e, portanto, é o centro da circunferência circunscrita.

Demonstração:

Dado o triângulo ΔABC e as mediatrizes r , s e v relativas, respectivamente, aos segmentos BC , AB e AC . Pela proposição da mediatriz como LG, sabe-se que todo ponto de r equidista dos pontos C e B , de s equidista dos pontos A e B , e de v equidista de A e C .

Tome o ponto I , tal que $r \cap s = I$. Logo, $IB \cong IC$ ($I \in r$) e $IA \cong IB$ ($I \in s$). Por transitividade, tem-se $IA \cong IC$, o que implica que $I \in v$.

Como existe uma única reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um dado segmento, tem-se que $r \cap s \cap v = I$ e este é único.

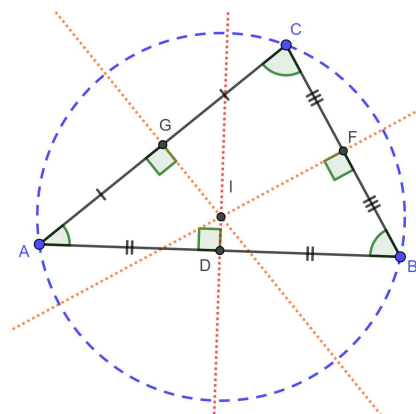


Figura 3.12 - Circuncentro

Da definição 3.2 a circunferência é o LG dos pontos equidistantes de um dado ponto (centro). Como o encontro das mediatrizes equidista dos vértices, tem-se que o circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

■

A posição do circuncentro varia em função da classificação angular do triângulo. Em um triângulo acutângulo, o circuncentro localiza-se no interior do triângulo. Se o triângulo for retângulo, sobre o ponto médio de sua hipotenusa. E para o triângulo obtusângulo, ele é exterior ao triângulo.

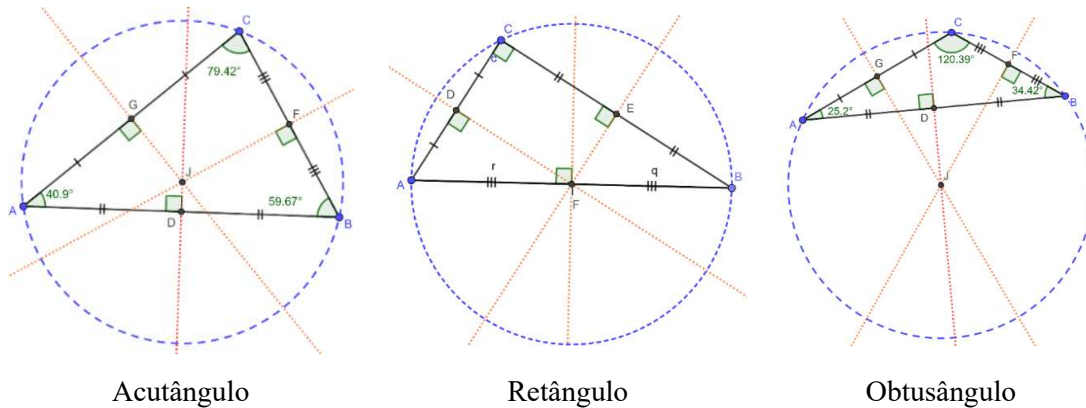


Figura 3.13 - Circuncentro em classificações angulares diferentes do triângulo.

3.2.2 Mediana

Definição 3.11: A mediana é a ceviana que tem como extremos um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a este dado vértice.

Na Figura 3.14, BD é a mediana relativa ao vértice B e D é médio de AC.

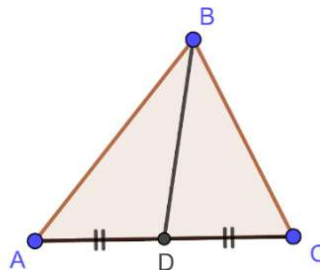


Figura 3.14 - Mediana

Definição 3.12: O segmento cujas extremidades são os pontos médios de dois lados de um triângulo é denominada como **base média**.

Proposição 3.13: A base média de um triângulo mede a metade de um dos lados deste triângulo e é paralela a este.

Demonstração:

Seja dado o $\triangle ABC$, tome-se os pontos P, médio de AB, e M, médio de AC. Logo,

$\overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{2}$ e $\overline{AM} = \frac{\overline{AC}}{2}$, daí, pode-se afirmar $\triangle ABC \sim \triangle APM$, são semelhantes, já que

$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = 2$ e $\angle BAC \cong \angle PAM$ (comum).

Portanto, PM é homólogo ao segmento BC . De forma que, $\frac{\overline{BC}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = 2$, e assim, $\frac{\overline{PM}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$. Além disso, da semelhança, temos que $\angle ABC \cong \angle APM$, e portanto são ângulos correspondentes em retas seccionadas por uma transversal. Logo, $PM \parallel BC$. ■

Definição 3.14: O **triângulo medial** é o triângulo cujos lados são as bases médias dos lados de outro triângulo.

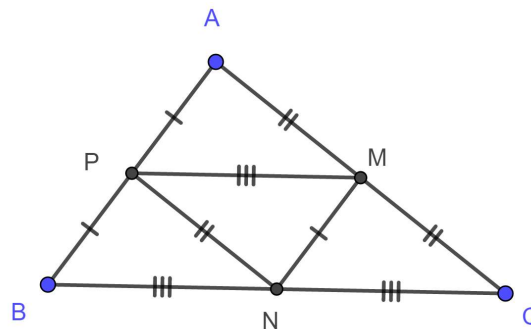


Figura 3.15 - O triângulo $\triangle PMN$ é medial do $\triangle ABC$

Proposição 3.15: As três medianas de um triângulo concorrem em único ponto, denominado **baricentro** do triângulo. O baricentro tem a propriedade de dividir cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2:1.

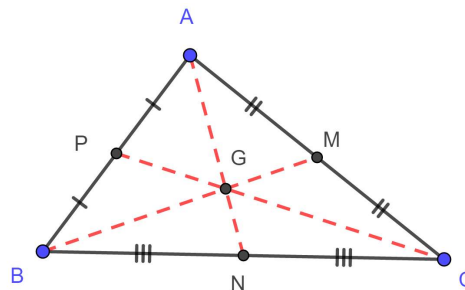


Figura 3.16 - Baricentro do triângulo

Demonstração:

Dado um $\triangle ABC$, tome os pontos médios P , M e N , respectivamente, dos segmentos AB , AC e BC . Seja $CP \cap BM = G$. Trace a base média PM no $\triangle ABC$, relativa ao lado BC . Trace a base média HI no $\triangle GBC$, relativa ao lado BC . Com H , médio de BG , e I , médio de CG . Como PM e HI são bases médias relativas ao segmento BC , tem-se: primeiro que $PM \parallel BC$ e $HI \parallel BC$, logo $HI \parallel PM$. E, em seguida, que $\overline{PM} = \overline{HI} = \frac{\overline{BC}}{2}$. De forma análoga, tem-se o mesmo com PH e MI . Daí, conclui-se que o quadrilátero $PMIH$ é um paralelogramo.

Se $PMIH$ é paralelogramo, G é o encontro de suas diagonais, então infere-se que $PG \cong GI$ e $HG \cong GM$. E se I é médio de CG , então $CI \cong GI$, da mesma forma, H é médio de BG , então $BH \cong GH$. Assim, tem-se:

$$\overline{BG} = \overline{BH} + \overline{HG} = 2 \cdot \overline{HG} = 2 \cdot \overline{GM} \quad \text{e} \quad \overline{CG} = \overline{CI} + \overline{IG} = 2 \cdot \overline{IG} = 2 \cdot \overline{GP}.$$

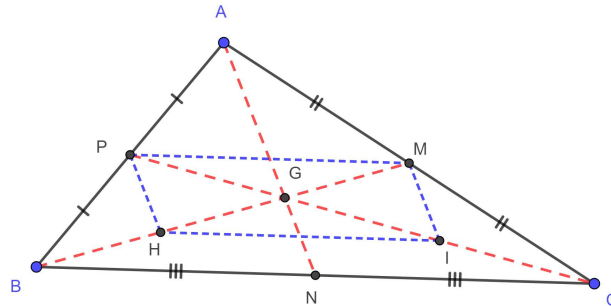


Figura 3.17 - Divisão da mediana pelo baricentro

Agora, tome o ponto R , interseção das medianas AN e BM . Analogamente, obtém-se: $\overline{BR} = 2 \cdot \overline{RM}$ e $\overline{AR} = 2 \cdot \overline{RN}$. Mas, se $\overline{BG} = 2 \cdot \overline{GM}$ e $\overline{BR} = 2 \cdot \overline{RM}$, pelo postulado do transporte de segmentos, tem-se que G e R coincidem.

Ou seja, o encontro das três medianas de um ΔABC ocorre em um único ponto G , que divide as medianas, a partir do vértice, na razão 2:1. ■

3.2.3 Altura

Definição 3.16: Em um triângulo, a altura é o segmento de reta perpendicular à reta suporte do lado oposto. Suas extremidades são dadas pelo vértice e pelo pé da altura, que é a interseção da reta perpendicular com a reta suporte do lado oposto a este vértice.

Tem-se ainda que a altura possui a propriedade de ser o segmento de menor distância do vértice à reta suporte do lado oposto. A posição da altura do triângulo se altera de acordo com a classificação angular do mesmo.

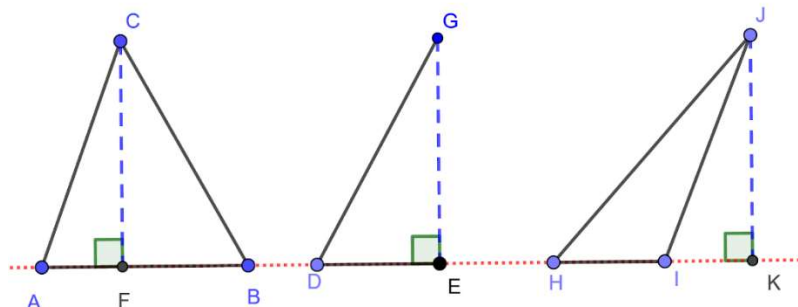


Figura 3.18 - Alturas em triângulos nas três classificações angulares

Na Figura 3.18 o triângulo acutângulo ΔABC , a altura CF é interior ao triângulo. No triângulo retângulo ΔDGE , em que $\angle DEG$ é reto, a altura coincide com o lado GE . No

triângulo obtusângulo ΔJIH , em que $\angle JIH$ é obtuso, a altura JK é exterior. Os pontos F , E e K são denominados “pés das alturas”.

Proposição 3.17: As retas suportes das alturas de um triângulo concorrem em um único ponto, denominado **ortocentro** do triângulo.

Demonstração:

Seja um ΔABC , trace: pelo vértice A , r paralela ao lado BC ; por B , s paralela ao lado AC ; e t paralela a AB passando por C . Sejam os pontos E , F e G , tais que, $r \cap s = E$, $r \cap t = F$ e $t \cap s = G$.

Como $AC \parallel EB$ e $AE \parallel BC$, o quadrilátero $ACBE$ é um paralelogramo, da mesma forma, $AF \parallel BC$ e $AB \parallel FC$. Então, $AF \cong AE \cong BC$, ou seja, A é ponto médio de EF . Analogamente, C é médio de FG e B é médio de GE . Portanto, o ΔABC é medial de ΔEFG .

Tome os pontos, $H \in AB$, $I \in AC$ e $J \in BC$, de forma que as retas \overline{AH} , \overline{BI} e \overline{CJ} são as mediatrizes relativas aos lados do ΔEFG , que concorrem no ponto O , circuncentro do ΔEFG .

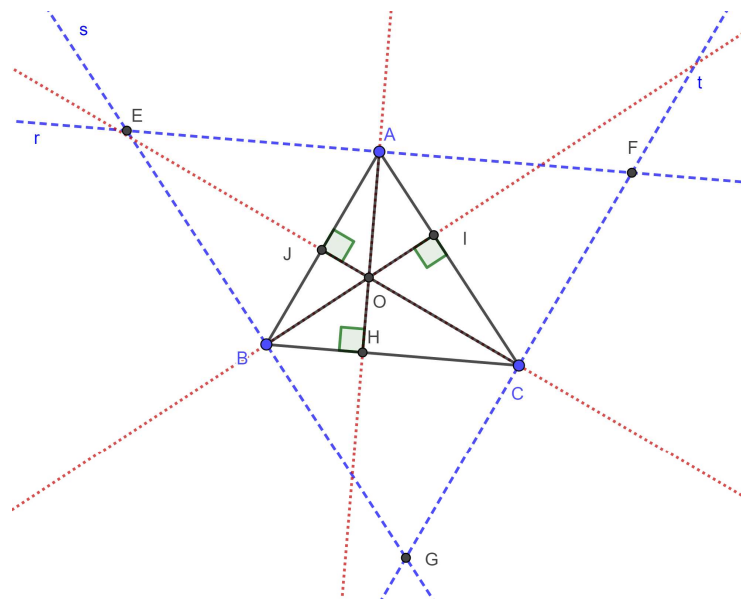


Figura 3.19 - Ortocentro

Se $AB \parallel FG$ e $CJ \perp FG$, então $CJ \perp AB$, pois formam ângulos correspondentes em retas paralelas. Analogamente, $AC \parallel EG$ e $BI \perp EF$, então $BI \perp AC$ e, por fim, $BC \parallel EF$ e $AH \perp EF$, então $AH \perp BC$. Portanto, AH , BI e CJ são as alturas do triângulo ΔABC e concorrem em um único ponto O .

■

Na Figura 3.20, no triângulo acutângulo $\triangle ABC$, as alturas CF , NA e BO são interiores ao $\triangle ABC$, logo o seu ortocentro L é interior ao triângulo. O triângulo $\triangle DGE$ é reto em E , por isso, as alturas GE e DE coincidem com os lados do $\triangle DGE$ e o seu ortocentro coincide com o vértice E . No triângulo $\triangle JIH$, as alturas JK e HR são externas com os pés das alturas K e R sobre as retas suportes dos lados, e o ortocentro do $\triangle JIH$ localiza-se exteriormente no prolongamento das alturas encontrando-se no ponto M .

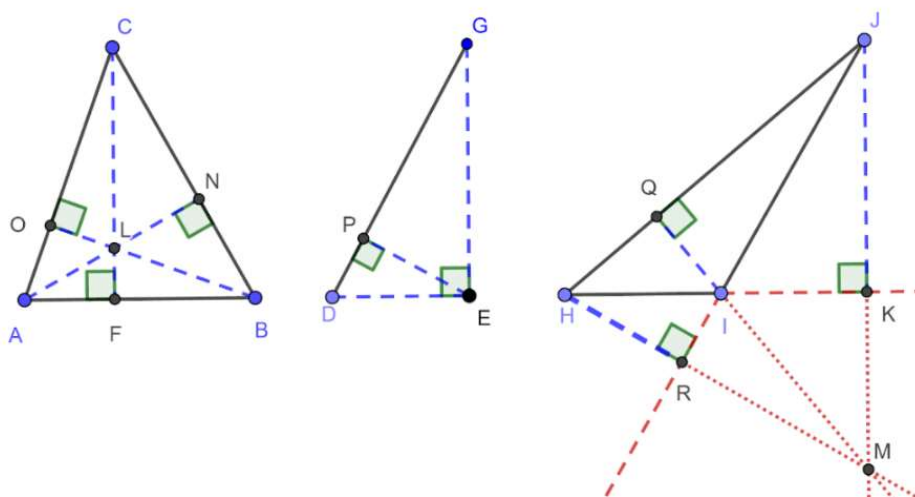


Figura 3.20 - Ortocentro em triângulos com classificações angulares diferentes

3.2.4 Bissetriz no triângulo

A definição de bissetriz já foi trabalhada no item 3.1.2. Em particular, em um triângulo apresenta-se uma subdivisão em relação a região interior ao triângulo (bissetriz interna) e exterior (bissetriz externa).

3.2.4.1 Bissetriz interna

Definição 3.18: A bissetriz interna de um triângulo é a ceviana que divide o ângulo interno em dois ângulos congruentes.

Proposição 3.19: As bissetrizes internas de um triângulo se cruzam em um único ponto, a saber, o incentro. Além disso, este ponto é equidistante aos lados do triângulo e é o centro da circunferência inscrita.

Na Figura 3.21, temos que AE , BF e CD são as bissetrizes internas do triângulo $\triangle ABC$ e I é seu incentro.

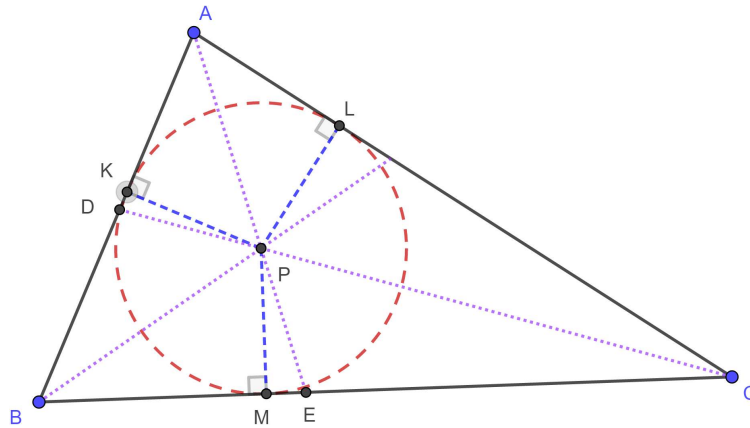


Figura 3.21 - Incentro

Demonstração:

Em um triângulo ΔABC , sejam AE , BF e CD , bissetrizes internas de ΔABC . Tome o ponto P , tal que $AE \cap BF = P$. Além disso, tome os pontos $K \in AB$, $L \in AC$ e $M \in BC$, tais que os segmentos PK , PL e PM representam as distâncias de P aos segmentos AB , AC e BC . Portanto, $AB \perp PK$, $AC \perp PL$ e $BC \perp PM$.

Da propriedade da bissetriz interna como LG , se $P \in AE$, então P equidista dos segmentos AB e AC , logo $PK \cong PL$. Pela mesma propriedade, se $P \in BF$, então P equidista dos segmentos AB e BC , logo $PK \cong PM$. Como $PK \cong PL$ e $PK \cong PM$, tem-se que $PL \cong PM$. Logo, P também equidista dos segmentos AC e BC , ou seja, P pertence a bissetriz do ângulo $\angle ACB$, que é o segmento CD .

Ou seja, $AE \cap BF \cap CD = P$ e, assim, P é o ponto de concorrência das bissetrizes internas. Como P equidista dos pontos K , L e M , P deve ser o centro da circunferência que é determinada pelos pontos K , L e M . Além disso, como $AB \perp PK$, $AC \perp PL$ e $BC \perp PM$, infere-se que os segmentos AB , AC e BC , são tangentes à circunferência, com K , L e M sendo os pontos de tangência.

■

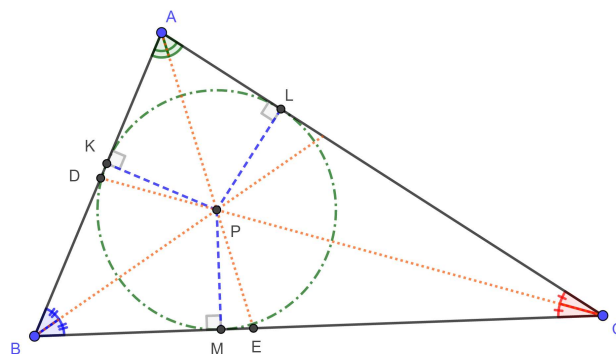


Figura 3.22 - Incentro demonstração.

3.2.4.2 Bissetriz externa

Definição 3.20: A bissetriz externa de um triângulo é a ceviana que divide o ângulo externo de um vértice do triângulo em dois outros ângulos congruentes. As bissetrizes externas relativa a um dos lados do triângulo concorrem em um ponto, a saber, o *ex*-incentro.

Na Figura 3.23, o ponto P é o *ex*-incentro do triângulo $\triangle ABC$ relativo ao lado BC.

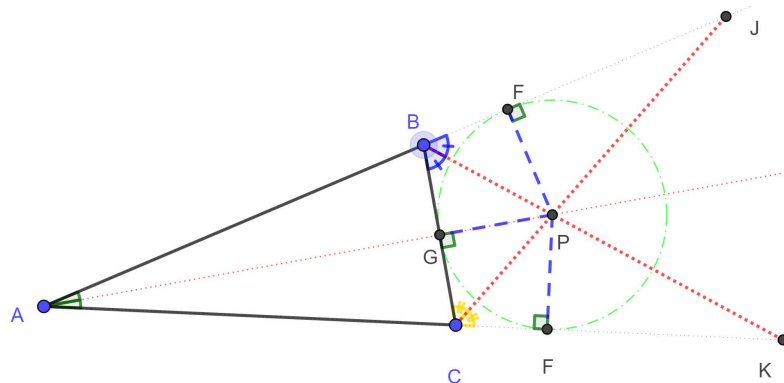


Figura 3.23 - Encontro das bissetrizes externas.

As bissetrizes internas e externas possuem propriedades e teoremas decorrentes do teorema de Tales que serão relevantes ferramentas no estudo da circunferência de Apolônio.

Teorema 3.21 (Teorema da bissetriz interna): Em um triângulo, a bissetriz interna relativa a um de seus vértices divide o lado oposto em partes proporcionais aos lados adjacentes. Em outras palavras, dado o $\triangle ABC$, a bissetriz interna AP determina sobre BC os segmentos BP e CP, de forma que

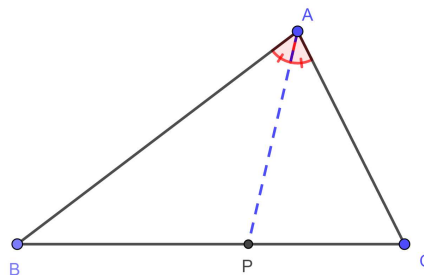


Figura 3.24 - Teorema da bissetriz interna

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}. \quad (I)$$

Demonstração:

Dado o $\triangle ABC$, trace a bissetriz interna AP, P sobre BC. Em seguida, trace a reta r paralela a AP por C. Prolongue o segmento AB até interceptar a reta r em K. Dado que

$AP \parallel KC$, pode-se afirmar que $\angle PAC \cong \angle ACK$ (alternos internos) e $\angle BAP \cong \angle AKC$ (correspondentes). Se $\angle BAP \cong \angle PAC$ (AP bissetriz), então $\angle ACK \cong \angle AKC$ e, portanto, $\triangle AKC$ é isósceles, com $AK \cong AC$.

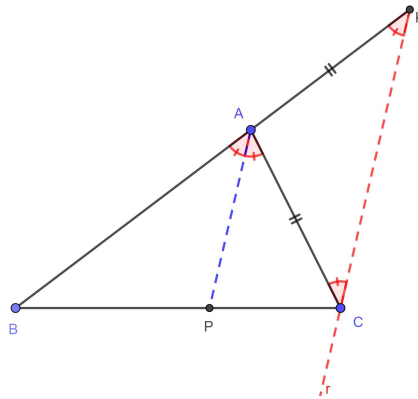


Figura 3.25 - Teorema da bissetriz interna - demonstração

Dado $AP \parallel CK$, pelo teorema de Tales, afirma-se que $\frac{AB}{BP} = \frac{AK}{CP}$. Se $AK \cong AC$, tem-se:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{CP}$$

■

Teorema 3.22 (Teorema da bissetriz externa): Em um triângulo, a bissetriz externa de um de seus vértices determina sobre a reta suporte do lado oposto dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes a esses segmentos. Ou seja, dado o $\triangle ABC$, a bissetriz externa AQ determina sobre BC os segmentos BQ e CQ tais que

$$\frac{AB}{BQ} = \frac{AC}{CQ}, \quad (II)$$

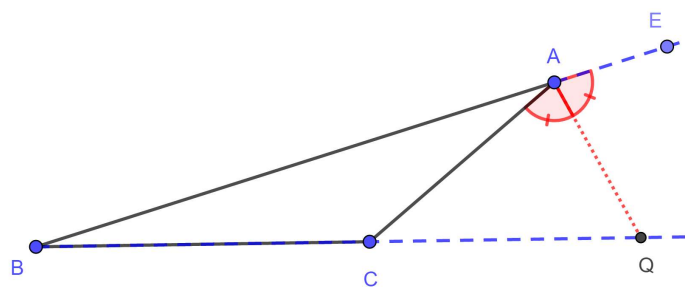


Figura 3.26 - Teorema da bissetriz externa

Demonstração:

Dado o $\triangle ABC$ trace a bissetriz externa AQ, Q sobre \overrightarrow{BC} . Em seguida, trace a reta r paralela a AQ por C, que intercepta o segmento AB em K. Prolongue \overrightarrow{AB} , a partir de A até um ponto E, de forma que A esteja entre K e E. Dado que $AQ \parallel KC$, tem-se que $\angle QAC \cong \angle ACK$ (alternos internos) e $\angle CKA \cong \angle QAE$ (correspondentes).

Dado $\angle EAQ \cong \angle QAC$ (AQ bissetriz externa), conclui-se que $\angle ACK \cong \angle AKC$ e, portanto, $\triangle AKC$ é isósceles, com $AK \cong AC$.

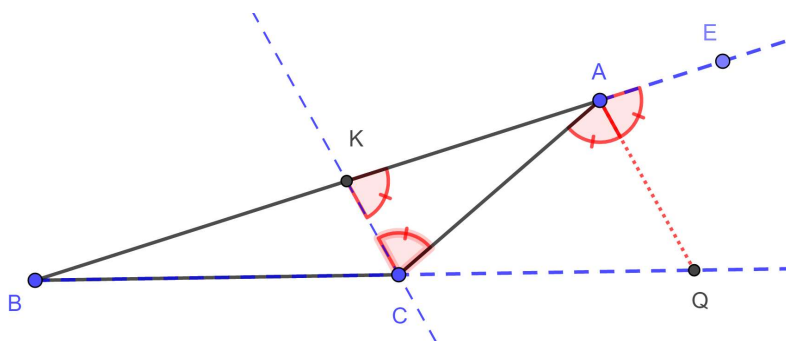


Figura 3.27 - Teorema da bissetriz externa - demonstração

Se $AQ \parallel CK$, do teorema de Tales, afirma-se $\frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CQ}}$. Como $AK \cong AC$, tem-se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}$$

■

Corolário 3.23 (Bissetriz interna e externa): Em um triângulo, ao se traçar as bissetrizes interna e externa de um de seus vértices, essas cevianas determinam sobre a reta suporte do lado oposto, dois pontos que dividem esse segmento harmonicamente.

Demonstração:

Dado o $\triangle ABC$, com bissetrizes interna AP e externa AQ relativas ao vértice A .

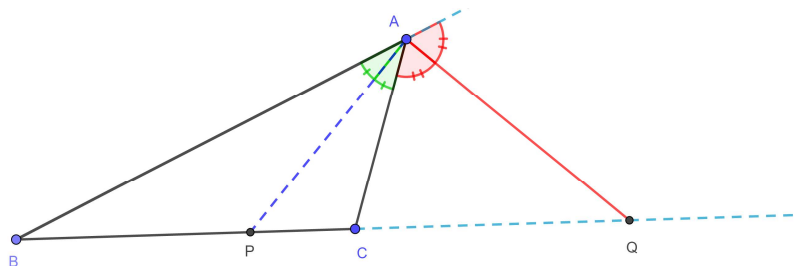


Figura 3.28 - Bissetriz interna e externa.

Pelo teorema 3.21: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$ (I), equivalente a $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}$ (III). E, pelo teorema 3.22,

(II): $\frac{\overline{AB}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}$, equivalente a $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}$ (IV). Logo, de (III) e (IV), conclui-se que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}$$

Portanto, P e Q dividem harmonicamente o segmento BC .

■

Corolário 3.24: O ângulo formado pela bissetriz interna e pela bissetriz externa é reto.

Demonstração:

Dado $\triangle ABC$, tal que $med(\angle BAC) = \alpha$. Trace a bissetriz interna AP , $P \in BC$, e a bissetriz externa AQ , $Q \in \overleftrightarrow{BC} \setminus BC$ e $C \in PQ$. O ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa $\angle PAQ$ é a metade da soma do ângulo interno e externo, que são suplementares. Logo $med(\angle PAQ) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

■

Proposição 3.25: Seja $\triangle ABC$ um triângulo e P e Q pontos sobre a reta \overleftrightarrow{BC} , com $P \in BC$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC} \setminus BC$. Se $\angle PAQ$ é reto e $\frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ}$, então AP e AQ são, respectivamente, as bissetrizes, interna e externa de $\angle BAC$.

Demonstração:

Dado o $\triangle ABC$, com $\angle PAQ$ reto e $\frac{BP}{CP} = \frac{BQ}{CQ}$. Trace a paralela r a \overleftrightarrow{AQ} que passe por P . Os pontos de interseção de r com \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} são os pontos K e T , respectivamente.

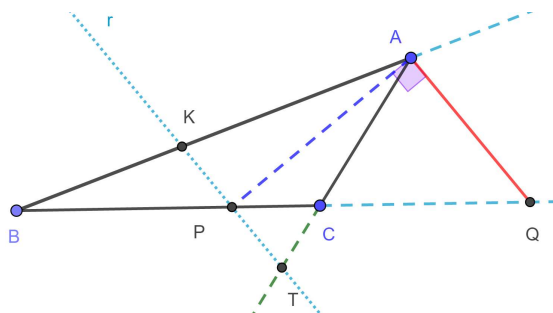


Figura 3.29 - Proposição - bissetriz interna e externa.

Observe as seguintes congruências: $\angle KBP \cong \angle ABQ$ (coincidentes), $\angle BKP \cong \angle BAQ$ (correspondentes), $\angle PTC \cong \angle CAQ$ (alternos internos) e $\angle ACQ \cong \angle PCT$ (opostos pelo vértice). Utilize o caso de semelhança de triângulos AA (ângulo – ângulo) e identifique $\triangle KBP \sim \triangle ABQ$ e $\triangle ACQ \sim \triangle TCP$. Por consequência $\frac{BP}{KP} = \frac{BQ}{AQ}$ e $\frac{AQ}{CQ} = \frac{TP}{CP}$. Das semelhanças e da informação inicial de que $\frac{BP}{BQ} = \frac{CQ}{CQ}$, obtenha $\frac{PK}{AQ} = \frac{PT}{AQ}$, ou seja $PK = PT$, portanto P é ponto médio de KT . Como $TK \parallel AQ$ e $\angle PAQ \cong \angle APT$ (alternos internos) e como $\angle PAQ$ é reto, tem-se $\angle APT$ reto. Logo, AP é simultaneamente mediana e altura no $\triangle KAT$, assim é fácil verificar que AP também é bissetriz interna. Do corolário 3.24, se AP é bissetriz interna do $\triangle ABC$ e $\angle PAQ$ é reto pode-se afirmar que AQ é bissetriz externa do $\triangle ABC$ no vértice A .

■

3.3 Circunferência de Apolônio

Teorema 3.25: Dado um real positivo $k \neq 1$ e pontos B e C no plano, o LG dos pontos A do plano tais que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$ é a circunferência com diâmetro PQ, onde $P \in BC$ e $Q \in \overrightarrow{BC} \setminus BC$ são os pontos tais que

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = k.$$

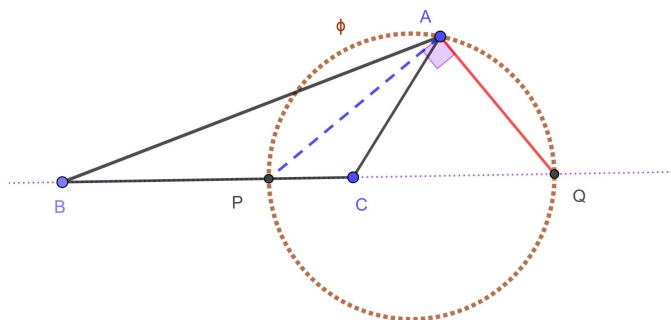


Figura 3.30 - Circunferência de Apolônio

Demonstração:

Dado o ponto $A \notin \overrightarrow{BC}$, tal que $\overline{AB} = k \cdot \overline{AC}$. Tome o ΔABC e sejam D e T pés das bissetrizes, respectivamente, interna e externa relativa ao vértice A, onde $D \in BC$ e $T \in \overrightarrow{BC} \setminus BC$. Do corolário 3.23, obtenha

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{CT}} = k$$

Como D e P $\in BC$, tais que $\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = k$, conclui-se que $D \equiv P$. Analogamente, $\frac{\overline{BT}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = k$, tem-se que $Q \equiv T$. Ou seja, AP e AQ são as bissetrizes interna e externa, respectivamente, do ΔABC em A. Logo, pelo corolário 3.24, $AP \perp AQ$. Determine O, médio de PQ e trace a circunferência Φ que possui os pontos A, P e Q. Como $\angle PAQ$ é reto em A, PQ é diâmetro de Φ e o ponto O é seu centro. Logo, Φ é o LG dos pontos A, tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = k$, $k \neq 1$.

■

4 Proposta de atividades para o ensino

Este capítulo dedica-se à sugestão de atividades para o ensino baseado nas teorias pedagógicas construtivistas e no modelo van Hiele. Em busca de tornar a leitura mais prática, tem-se a seguir o quadro com as classificações dos níveis e fases de van Hiele.

Quadro 4.1 – Níveis e fases do modelo de van Hiele

Código	Nível	Código	Fase
N0	Visualização	F1	Informação
N1	Análise	F2	Orientação Direta
N2	Dedução informal	F3	Explicitação
N3	Dedução Formal	F4	Orientação livre
N4	Rigor	F5	Integração

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nas discussões das práticas também serão indicados, conforme o quadro abaixo, os elementos teórico pedagógicos abordados. Em especial: os processos de Assimilação e Acomodação (AA) de Piaget; a influência das contribuições de atividades realizadas em grupo, que denominaremos como Interação Social (IS); a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky; e a Aprendizagem Significativa (AS) de Ausubel.

Quadro 4.2 – Aspectos das teorias construtivistas analisadas

Código	Nível
AA	Assimilação e Acomodação
IS	Interação Social
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal
AS	Aprendizagem Significativa

Fonte: Elaborado pelo autor.

Após cada atividade, encontra-se a discussão dos resultados esperados na execução de cada item das folhas de atividades. As atividades descritas propostas a seguir visam provocar de forma lúdica o ensino das definições e propriedades do incentro, circuncentro, baricentro, ortocentro, arco capaz e a circunferência de Apolônio.

4.1

Uso de dobraduras para o ensino das propriedades das bissetrizes internas e o incentro de um triângulo

Público Alvo: Alunos do 8º (oitavo) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC (EF08MA17): Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Objetivos: Rever o conceito de bissetriz, reconhecer a bissetriz interna do triângulo, estabelecer o conceito de incentro e suas propriedades.
Duração prevista: 100 minutos
Pré-requisitos: Ângulos, triângulos, segmento de reta, circunferência, uso de construções geométricas elementares com uso de compasso (círculo), esquadros (traçado de perpendiculares), transferidor e régua (medidas).
Material necessário: Folha de atividades, caneta, lapiseira, borracha, régua, papel cartão (pode ser utilizado outro material reciclável que possa substituir o papel cartão), transferidor, esquadro, tesoura, compasso e espelho (somente para o professor).
Organização: Com a turma disposta em pequenos grupos de 4 alunos.
<p>Observações sobre a atuação do docente durante aplicação da atividade:</p> <p>Durante a construção do objeto de estudo, o docente deve estimular a turma a construir triângulos das diversas classificações relativas aos ângulos e lados. Além disso, é interessante que as figuras sejam grandes, pois facilita as etapas de medição e traços que são feitos.</p> <p>Caso observe ser necessário, o professor deve retomar com os alunos como realizar medidas de segmento e ângulos. Os alunos podem apresentar dificuldades com o uso do esquadro, para o traçado de perpendiculares, e do compasso. Sendo este o caso, o docente decide se retomará este conhecimento no início da atividade ou no item que seja demandado o conhecimento. A importância em retomar os conceitos influenciam diretamente no tempo para execução da prática e no engajamento dos alunos.</p> <p>O professor deve orientar os alunos para o acompanharem durante as atividades, sempre estimulando que eles forneçam as repostas. Também é importante evitar o uso de vocábulos que os alunos possam ainda desconhecer.</p> <p>No último item, o docente deve realizar o esquema no quadro junto do uso do espelho para explicitar de forma concreta as congruências das distâncias dos pontos da bissetriz.</p>

4.1.1

Folha de atividades sobre o incentro do triângulo

Folha de Atividades		
Nome:	Matemática	8º ano
Pontos Notáveis no Triângulo – Incentro		

A) Com a régua desenhe um triângulo ABC na folha que lhe foi entregue, marque os pontos A, B e C no interior do triângulo e depois recorte este triângulo.

B) Com a régua meça o tamanho dos lados do triângulo e preencha a tabela abaixo:

Lado	Medida
AB	
AC	
BC	

Tem algo em especial nessas medidas? Este triângulo pode ser classificado como?

C) Com o transferidor meça o tamanho dos ângulos internos do triângulo e preencha a tabela abaixo:

Ângulo	Medida
A	
B	
C	

Você percebeu algo em especial em relação às medidas?

D) Agora realize as dobraduras acompanhando seu professor com atenção:

Junte os lados AB e AC em torno do ponto A e faça a dobra, como o professor demonstra e realize o “vinco”. Repita o procedimento em relação aos lados BC e BA pelo vértice B e também com CA e CB pelo vértice C.

E) Com um lápis ou lapiseira, trace por cima das dobras com um traço bem leve. Em seguida, marque os pontos de interseção (aonde eles se cruzam) entre as dobras e os lados:

- **D** entre B e C. - **E** entre A e C. - **F** entre B e A.

Também determine o ponto de encontro dos traços feitos, usando a letra **I**.

F) Com o transferidor meça o tamanho dos ângulos entre os lados indicados e preencha a tabela abaixo:

Ângulo	$B\hat{A}D$	$C\hat{A}D$	$C\hat{B}E$	$A\hat{B}E$	$B\hat{C}F$	$A\hat{C}F$
Medida						

Você percebeu algo em especial com essas medidas? Explique com suas palavras.

G) Após debater com seus colegas sobre os resultados obtidos no **item F**, complete: Os segmentos AD, BE e CF são os (as) _____ do triângulo.

H) Lembra como traçar perpendiculares com o uso do esquadro? Vamos pôr isto em prática!

Escolha um ponto em AD, BE ou CF, diferente de I e trace uma perpendicular aos dois outros lados vizinhos do triângulo, conforme exemplo do professor.

I) Meça a distância desse ponto aos lados e preencha a tabela abaixo:

Medida 1	Medida 2

Você percebeu algo em especial com essas medidas? Diga abaixo o quê.

J) Debata seus resultados com outros grupos, depois com o professor e complete os espaços abaixo:

A _____ é o conjunto de pontos que estão _____ a dois lados vizinhos. Pode-se afirmar que a bissetriz é um Lugar _____.

K) Meça a distância entre I e os lados AB, AC e BC e preencha a tabela:

Segmento	I até AB	I até AC	I até BC
Medida			

Discuta com os seus colegas e diga o que puderam constatar.

L) Com auxílio de um compasso, trace uma circunferência com a ponta seca em I e com a outra ponta num dos pontos do encontro das perpendiculares que chegam em I com os lados AB, AC ou BC.

M) Discuta com os outros colegas o que acontece no **item L**.

N) Seu professor discute com sua turma as suas descobertas e após alguns comentários informa um nome especial. Qual é este nome?

--

O) Ainda sobre o **ponto I**, complete os espaços abaixo, com base nas suas descobertas:

O ponto I é o encontro das _____ do triângulo. Por isso, ele está a _____ distância dos _____ do triângulo. Além disso, ele é o centro da _____ e recebe o nome de _____.

P) O professor comenta algo importante sobre o ponto I. Existe outro ponto do triângulo que possui as mesmas características do ponto I?

Q) Você conhece o Batman? Pense em qual local ele colocaria seu esconderijo na situação a seguir. Ele deseja proteger três bairros de sua cidade, que são interligados por ruas retas, conforme o mapa abaixo:



Figura 4.1 - Triângulo determinado pelas estradas

Nosso destemido herói, que é o maior detetive do mundo, profundo conhecedor de geometria, escolheu um local que permite acessar de carro da melhor forma possível estas três ruas. Aonde você acha que ele instalou sua base de operações? E por quê?

R) Por fim, observe agora que seu professor mostra um espelho e uma caneta inclinada em relação a este espelho. Depois de seu professor fazer um desenho no quadro e comentar sobre esta situação, diga o que o espelho tem em comum com o que até agora foi estudado:

4.1.2

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

Ao iniciar a atividade o professor pode retomar os conceitos de segmento de reta, perpendicular, raio da circunferência, classificações de triângulos, uso do esquadro, compasso, ou optar por fazê-los à medida que as tarefas demandem esses conhecimentos. Não é necessário ficar “engessado”, uma vez que é importante o professor avaliar como a turma reage a esse tipo de estímulo. Pode-se observar também que nesta fase preliminar ocorre a preparação para o processo de “ancoragem”, previsto por Ausubel, onde se relaciona novos conhecimentos aos antigos **(F1 e AS)**.

Os itens **A, D, E e L**, em que são realizados a construção do triângulo, as dobras, traçados das bissetrizes, perpendiculares e circunferência, referem-se à fase com orientação direta do professor **(N0 e F2)**.

Nos itens B e C da atividade, espera-se que o aluno identifique qual é a classificação do seu triângulo, mas, principalmente, os dados sobre as medidas angulares que serão analisados. Com estes dados o professor pode subsidiar, posteriormente, a discussão de que as propriedades se mantêm nas diversas formas de triângulo e, também, as propriedades da bissetriz. Nestes itens ocorre a análise por meio da orientação direta **(F2 e N1)**.

Para o item F, ao preencher a tabela, é previsto identificar as medidas dos ângulos após traçadas as bissetrizes **(F2 e N1)**. Já na questão, espera-se do aluno que perceba, ao analisar os dados da tabela, a congruência dos ângulos dois a dois. A partir dessa descoberta e com os seus conhecimentos prévios, espera-se que possa conjecturar que os segmentos em questão são bissetrizes **(AS e N2)**.

Em seguida, no item G, o professor deve estimular que os alunos discutam entre si o que esses segmentos são. É provável que alguns alunos não percebam, inicialmente, se tratar da bissetriz, mas ao trocarem informações com os outros alunos alcancem o entendimento. O professor deve, em seguida, confirmar a informação que os segmentos são bissetrizes e apresentar a definição. Como podemos observar, neste item ocorrem vários processos **(IS, AA, F3, N2, ZDP e AS)**.

Posteriormente, no item H, o aluno deve traçar dois segmentos perpendiculares de um ponto qualquer pertencente às bissetrizes, sendo uma orientação livre, já que permitirá criar diferentes construções. **(F4 e N1)**

Para o item I, na fase de preenchimento da tabela e resposta à pergunta, é previsto identificar a congruência dos segmentos traçados no item H (**F3 e N1**).

Baseado na análise do item I, no item J ocorrem vários processos. Primeiramente, o professor fomenta a comparação dos dados obtidos nas tabelas pelos alunos (**IS, F2 e N1**). Depois questiona à turma se conseguiram descobrir alguma propriedade relativa a esses pontos. Espera-se que proponham que os pontos que pertencem às bissetrizes sejam equidistantes aos lados. O professor ratifica a informação ou a apresenta. Em seguida, introduz ou retoma a informação do que é um *Lugar Geométrico*, não sendo esta última a informação mais importante desta etapa. O professor precisa enfatizar mais a característica do que o nome como o método de van Hiele defende (**ZDP, N3 e F3**).

Ainda no item J, se o professor quiser retomar o estudo de congruência de triângulos e perceber que isso não os desestimulará no prosseguimento da realização da atividade, ele pode demonstrar formalmente o postulado da bissetriz como Lugar Geométrico. É importante retomar a problemática inicial enfatizada pelo casal van Hiele sobre o professor se comunicar em nível superior ao do aluno (**N4, F3 e ZDP**).

No item K, a discussão promovida entre os alunos é semelhante ao item I, só que agora, o professor enfatiza que este ponto é equidistante aos três lados, já que é a interseção de três Lugares Geométricos que comungam da equidistância aos lados dois a dois (**IS, F2, F3 e N1**).

Quando na construção da circunferência, item L, o professor deve solicitar que o aluno a realize com mais cuidado, pois os erros que o aluno pode cometer, provavelmente impedem a percepção do objetivo da construção. (**N0 e F2**).

Em seguida, no item M, o aluno compara sua construção com as dos colegas. Após o debate, espera-se que consigam afirmar que a circunferência é tangente aos lados. O professor então ratifica, corrige ou complementa a informação. (**ZDP, N2 e F3**).

Após a comparação, o professor media as descobertas referentes aos itens N, O e P, **contribuindo**, e não informando o aluno. Auxilia a construção da definição formal do incentro e consolida suas propriedades conectando as descobertas realizadas nas etapas anteriores. Por estes itens serem interligados podemos atribuir vários processos (**N3, F3, F5, ZDP, AA e AS**).

No item Q, é o momento de integrar os conhecimentos e aplicá-los numa situação problema simples, mas que consolida um pouco do desenvolvido até o momento (**AS, F5, AA e IS**).

No modelo de van Hiele, há a orientação de não introduzir novos conhecimentos. Mas faz-se oportuno discutir uma aplicação simples como a do item R, que é uma atividade adicional, onde o professor pode explorar um pouco a relação entre simetria, bissetriz e espelhos. Ainda que o conteúdo seja próprio do Ensino Médio, na disciplina de Física, é importante proporcionar, principalmente nesta fase do desenvolvimento infantojuvenil, atividades concretas e com o cotidiano do aluno. Com o uso de um espelho e objetos extensos como a caneta, entre outros, posto em frente com alguma inclinação em relação ao espelho. Pode-se discutir com o auxílio de um desenho no quadro, representando a situação, a formação de ângulos e distâncias côngruas, reforçando a aprendizagem (IS, AS e AA).

4.2

Uso de dobraduras para o ensino das propriedades das mediatrizes internas e o circuncentro de um triângulo

Público Alvo: Alunos do 8º (oitavo) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC (EF08MA17): Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Objetivos: Rever o conceito de mediatriz, reconhecer a mediatriz do triângulo, estabelecer o conceito de circuncentro e suas propriedades.
Duração prevista: 100 minutos
Pré-requisitos: Ângulos, triângulos, segmento de reta, circunferência, uso de construções geométricas elementares com uso de compasso (círculo), esquadros (traçado de perpendiculares), transferidor e régua (medidas).
Material necessário: Folha de atividades, caneta, lapiseira, borracha, régua, folhas de papel cartão de cores diferentes (pode ser utilizado outro material reciclável que possa substituir o papel cartão), transferidor, esquadro, tesoura, compasso e, somente para o professor, duas construções já desenvolvidas como exemplos para o triângulo retângulo e obtusângulo (conforme imagens no item 5.2.2).
Organização: Com a turma disposta em pequenos grupos de 4 alunos.
Observações sobre a atuação do docente durante aplicação da atividade: O professor deve orientar os alunos a evitarem a construção de figuras pequenas, pois pode atrapalhar as etapas de medição e traçados que são feitos durante a execução da atividade. Contudo, deve solicitar que as dimensões do triângulo não ultrapassem a medida de 20 cm, para que consiga utilizar corretamente o compasso.

Além disso, é essencial que o docente oriente a turma a construir triângulos classificados apenas como acutângulo e retângulo. Para contemplar o estudo da mediatriz no triângulo obtusângulo, o docente deve, antecipadamente, construir a figura e em etapa prevista na atividade apresentá-la aos alunos.

Ao critério do professor, retoma-se como se realiza medidas de segmento e ângulos, bem como o uso do esquadro e do compasso. O docente decide se retomará estes conhecimentos no início da atividade ou no item que seja demandado o conhecimento.

O professor deve orientar os alunos para o acompanharem durante as atividades, sempre estimulando que eles forneçam as repostas. Também é importante evitar o uso de vocábulos que os alunos possam ainda desconhecer.

4.2.1

Folha de atividades sobre o circuncentro do triângulo

Folha de Atividades		
Nome:	Matemática	8º ano
Pontos Notáveis no Triângulo – Circuncentro		

A) Com a régua e lápis/lapiseira desenhe um triângulo ABC na folha que lhe foi entregue, marque os pontos A, B e C no interior do triângulo. Não trace lados de medidas muito pequenas, mas evite que os lados ultrapassem 20 cm.

B) Meça os ângulos do triângulo, se um dos ângulos for maior que 90° , refaça o desenho do triângulo, “fechando” um pouco o ângulo que ultrapassou, para que todos tenham medidas iguais ou menores que 90° .

C) Anote na tabela abaixo as medidas dos ângulos do triângulo ABC:

Ângulo	Medida
A	
B	
C	

Você percebeu algo em especial em relação às medidas? Como é classificado este triângulo de acordo com as medidas dos ângulos?

--

D) Com a régua meça o tamanho dos lados do triângulo e preencha a tabela abaixo:

Lado	Medida
AB	
AC	
BC	

Tem algo em especial nessas medidas? Este triângulo pode ser classificado como?

E) Agora recorte este triângulo da folha em que o desenhou e em seguida realize as dobraduras acompanhando seu professor com atenção:

Junte os vértices A e B fazendo uma dobra, como o professor demonstra e realize o “vinco”, com um lápis indique o **ponto F** sobre esta dobra e o segmento AB. Repita o procedimento em relação aos vértices B e C, marcando o **ponto D**. E, por fim, faça a dobra entre A e C, indicando o **ponto E**.

F) Com a régua meça o tamanho dos segmentos entre pontos indicados e preencha a tabela abaixo:

Segmento	BD	CD	CE	AE	BF	AF
Medida						

Você percebeu algo em especial nessas medidas? Explique com suas palavras.

G) Após debater com seus colegas sobre os resultados obtidos no **item F**, complete: Os pontos D, E e F são os (as) _____ dos lados do triângulo.

H) Realize um suave traço sobre as dobras realizadas no **item E**, indique o ponto de encontro com a letra K.

I) Use o transferidor, meça os ângulos indicados na tabela a seguir e a preencha:

Ângulo	BDK	CDK	CEK	AEK	BFK	AFK
Medida						

J) Após debater com seus colegas e seu professor, sobre os resultados obtidos nos **itens F e G**, complete: As retas DK, EK e FK são os (as) _____ dos lados do triângulo.

K) Escolha um ponto P qualquer em uma das retas DK, EK ou FK, diferente de K. Depois trace dois segmentos, ligando o ponto aos vértices do triângulo aos quais a reta divide o lado ao meio. Exemplo: caso você escolha DK, você traçará o segmento PB e PC, pois D é médio de BC.

L) Meça a distância desse ponto aos vértices e preencha a tabela abaixo:

Medida 1	Medida 2

Você percebeu algo em especial nessas medições? Diga abaixo o quê.

M) Debata seus resultados com outros grupos, depois com o professor e complete:

A _____ é o conjunto de pontos que estão _____ a dois vértices vizinhos. Pode-se afirmar que a _____ é um Lugar Geométrico.

N) Trace os segmentos KA, KB, KC. Meça a distância entre K e os vértices A, B e C e preencha a tabela:

Segmento	KA	KB	KC
Medida			

Discuta com os seus colegas e diga o que puderam constatar.

O) Agora com cuidado, cole seu triângulo sobre a outra folha entregue. Em seguida com auxílio de um compasso, trace uma circunferência com a ponta seca em K e com a outra ponta em um dos vértices do triângulo (A, B e C).

P) Discuta com os outros colegas o que você constatou nos **itens N e O**. Em seguida o professor discute com sua turma as suas descobertas e após alguns comentários informa um nome especial. Qual é este nome?

--

Q) Ainda sobre o **ponto K**, complete os espaços abaixo, com base nas suas descobertas:

O ponto K é o encontro das _____ do triângulo. Por isso, ele está a _____ distância dos _____ do triângulo. Além disso, ele é o centro da _____ e recebe o nome de _____.

R) O professor comenta algo importante sobre o ponto K. Existe outro ponto do triângulo que possui as mesmas características do ponto K?

--

S) As ruas de uma cidade podem formar triângulos, como o mostrado no destaque da figura a seguir.



Figura 4.2 - Triângulo formado pelas ruas

Uma antena de celular deverá ser instalada em um ponto dessa região triangular de forma que fique equidistante (na mesma distância) das três ruas. O ponto no qual a antena deve ser instalada é denominado:

- a) baricentro. b) circuncentro. c) incentro. d) ponto médio.

T) Seu professor lhe mostrará dois triângulos, um retângulo e outro obtusângulo. Ele discutirá com vocês algumas características e propriedades sobre esses triângulos. Agora complete as afirmações a seguir de acordo com o que foi debatido:

- O circuncentro do triângulo acutângulo está _____.
- O circuncentro do triângulo retângulo está _____.
- O circuncentro do triângulo obtusângulo está _____.
- No triângulo retângulo o raio da circunferência circunscrita mede _____.

4.2.2

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

Assim como na atividade referente ao estudo do incentro, inicia-se a atividade retomando os conceitos de segmento de reta, perpendicular, raio da circunferência, classificações de triângulos, uso do esquadro, compasso, ou opta-se por fazê-los à medida que as tarefas demandem esses conhecimentos. Esta etapa, preliminar a execução da atividade, visa preparar o aluno por meio da construção de “pontes” com os conhecimentos que ele já possui **(F1 e AS)**.

Os itens A, B, E, H e O, em que são realizados a construção do triângulo, as dobras, traçados das mediatrizes, segmentos e circunferência, referem-se à fase com orientação direta do professor, em especial em relação ao item O **(N0 e F2)**.

Nos itens C e D da atividade, espera-se que o aluno identifique qual é a classificação do seu triângulo quanto aos lados e ângulos. Já no item F, espera-se que o aluno meça as distâncias dos pontos de intersecção das dobras com os vértices e, na sequência, identifique os ângulos entre as mediatrizes e os lados do triângulo no item I **(F2 e N1)**.

Após preencher a tabela do item F e comparar estes dados com os do item D, espera-se que o aluno identifique os pontos de intersecção das dobras (*D*, *E* e *F*) como os pontos médios dos lados e responda no item G **(AS e N2)**.

De forma semelhante, ao preencher a tabela do item I e munido da informação do item G, espera-se que o aluno identifique as retas como as mediatrizes dos lados do triângulo ao responder o item J (**AS e N2**).

Posteriormente, no item K, o aluno deve traçar dois segmentos ligando um ponto das retas do item H a dois dos vértices do triângulo. Devido ao grau de liberdade da execução, ocorre uma orientação livre (**F4 e N1**).

Para os itens L e N, o aluno preenche as tabelas e observa que as distâncias são iguais em ambos. Para o primeiro a análise das congruências das medidas são relacionadas especificamente ao estudo da mediatriz. No segundo, tem-se o ponto de encontro das mediatrizes que tem como consequência a propriedade de ser equidistantes aos três vértices do triângulo, ainda que os alunos desconheçam a nomenclatura matemática destes elementos (**F2 e N1**).

Ao tratar do item M, após a discussão entre os alunos, o professor consolida as informações desenvolvidas até o momento. Apresenta a definição formal da mediatriz. Também é o momento de salientar que a mediatriz não é uma ceviana. Além de discuti-la como LG, é importante que o professor adeque a linguagem e que seja enfatizado mais as propriedades e características do que os termos. Como se pode observar, neste item ocorrem vários processos (**IS, AA, F3, N2, ZDP e AS**). Caso o professor entenda que os alunos não serão desestimulados, ele pode desenvolver por meio de congruência a demonstração da mediatriz como LG (**N4, F3 e ZDP**).

Para o item P, após as descobertas dos itens N e O, o professor estimula um debate sobre o ponto K, chama a atenção sobre ser o centro da circunferência circunscrita e sobre a equidistância aos vértices (**F3, AA, ZDP e N2**).

Analogamente ao item M, mas subsidiando-se em toda a cadeia de tarefas realizadas, retoma-se principalmente as etapas dos itens M, N, O e P para desenvolver o item Q. O professor estimula a discussão sobre circuncentro, contribuindo com os alunos sobre as características descobertas sobre o mesmo, por eles próprios. No debate, enfatiza-se que este ponto é equidistante aos três vértices. Já que é a interseção de três Lugares Geométricos que comungam da equidistância aos vértices dois a dois e, por fim, alcança-se formalidade no conceito (**IS, F3, F5, N3, ZDP, AA e AS**).

No item R, o professor explica sobre a unicidade do circuncentro do triângulo (**F3**).

No item S, é o momento de integrar os conhecimentos e aplicá-los numa situação problema simples, mas que consolida um pouco do desenvolvido até o momento (**AS, F5, AA e IS**).

Por fim, no item T, o professor discute com os alunos sobre a localização do circuncentro em triângulos acutângulos e retângulos. Discute sobre o raio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo medir metade do seu maior lado. Em seguida, apresenta a construção de um triângulo obtusângulo, mostrando o encontro das mediatrizes externamente, oportunidade em que é válido lembrar que não é uma ceviana. (F3, ZDP e N2).

4.3

Ensino de medianas e baricentro no triângulo com o Geogebra

Público Alvo: Alunos do 8º (oitavo) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC: Não há habilidade prevista na BNCC ⁸ .
Objetivos: Retomar o conceito de ponto médio, apresentar propriedades de pontos médios no triângulo, estabelecer o conceito de mediana, estabelecer o conceito de baricentro e suas propriedades.
Duração prevista: 100 minutos
Pré-requisitos: Ângulos, triângulos e segmento de reta.
Material necessário: Folha de atividades, lápis, lapiseira, borracha, computador com o aplicativo Geogebra instalado ou com acesso à internet, através do site: https://www.geogebra.org/classic .
Organização: Com os alunos da turma dispostos em duplas.

4.3.1

Folha de atividades sobre a mediana e baricentro do triângulo

Folha de Atividades		
Nome:	Matemática	8º ano
	Pontos Notáveis no Triângulo – Baricentro	

Orientações iniciais para acesso ao aplicativo de geometria dinâmica Geogebra:

Acompanhe o professor para o acesso e as configurações iniciais para o desenvolvimento da atividade no programa.



Situação 1: Computador sem aplicativo e com acesso à internet:

Acessar o site: <https://www.geogebra.org/classic>



Situação 2: Acessar o aplicativo Geogebra (ícone )

⁸ Embora não esteja previsto na BNCC, registro trecho da mesma sobre o uso: “recursos didáticos como malhas quadriculadas, (...), planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.” (BRASIL, 2018)

Passo a passo para a construção do objeto de estudo:

- A) Use a ferramenta **Ponto**  e selecione três pontos (A, B, C) distintos e não colineares (não alinhados ou não pertencentes a mesma reta).
- B) Use a ferramenta **Segmento de Reta**  para construir os segmentos AB, AC e BC.
- C) O professor indicará aos alunos como observar na barra lateral as dimensões dos segmentos determinados.
- D) Preencha os dados das medidas obtidos no item C na tabela abaixo:

Lado	Medida
AB	
AC	
BC	


- E) No Geogebra, use a ferramenta **Ponto Médio ou Centro**  e selecione o segmento AC determinando o ponto D. Repita o procedimento para o segmento AB determinando o ponto E. Na sequência, o segmento BC determinando F.
- F) Com a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro**  selecione os pares de lados: (A e E), (A e D), (B e E), (B e F), (C e D) e (C e F).

- G) Agora preencha os dados na tabela o dos segmentos entre pontos indicados e preencha a tabela abaixo:

Segmento	AD	CD	AE	BE	BF	CF
Medida						

Analisando o item G, o que você pode observar sobre as medidas dos segmentos?

Logo, o que os pontos D, E e F realizam sobre os segmentos AC, AB e BC respectivamente?




- H) Selecione a ferramenta **Segmento de Reta**  e construa os segmentos DE, DF e EF. Em seguida torne visível os dados com as medidas desses segmentos.

- I) Preencha a tabela:

Segmento	DE	EF	DF
Medida			

- J) Compare os dados da tabela do item G com os dados da tabela do item J. Conseguiu observar alguma característica em especial? O quê?

- K) Após esta descoberta, discuta com seus colegas e seu professor sobre este fato, em seguida, complete a afirmação a seguir: A _____ de um triângulo possui a _____ do comprimento do lado ao qual é _____.

- L) O professor explicará como ocultar elementos. Após a explicação, oculte as informações com as dimensões utilizadas até o momento e, também, os segmentos DE, EF e DF.
- M) Selecione a ferramenta **Segmento de Reta**  e construa os segmentos AF, CD e BF.
- N) Com a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , selecione o ponto em que os segmentos do item N se encontram.
- O) Seu professor faz um comentário sobre este novo ponto obtido. Após este comentário, complete: O ponto (G) é o encontro das _____ e recebe o nome de _____ do triângulo.
- P) Escolha um dos segmentos AE, CD ou BF e oculte os outros dois. Em seguida com a ferramenta **Distância, Comprimento ou Perímetro** , determine as distâncias dos segmentos do vértice do segmento escolhido até o ponto G e desse ponto até o ponto médio. Exemplo: Se você escolher BF, medirá BG e GF. Preencha a tabela a seguir:

Segmento	Medida 1	Medida 2
Medida		

- Q) Você percebeu algo? Caso não, pegue a menor medida no item Q e multiplique por 2. Agora pode perceber algo? Aproveite e pergunte para outros colegas se eles perceberam a mesma coisa. Diga abaixo com suas palavras o que vocês descobriram:

- R) Seu professor, novamente, faz alguns comentários sobre o que vocês descobriram, agora complete: A mediana é a ceviana que _____ os lados do triângulo ao _____. O encontro das _____ é o baricentro. A distância do vértice do triângulo até o baricentro é _____ da distância do baricentro até o lado oposto ao vértice.

4.3.2

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

A atividade tem como objetivo principal estudar o baricentro como o ponto de encontro das medianas do triângulo. Inicialmente, retoma-se o conceito do ponto médio. Avança-se na construção das medianas do triângulo, a propriedade da base média do

triângulo e verifica-se o encontro das medianas, o baricentro. Por fim, verifica-se, experimentalmente, a relação entre a distância do vértice e o baricentro, com a distância entre o baricentro e o ponto médio relativo ao mesmo vértice da mediana observada. O uso do Geogebra torna a atividade dinâmica, já que permite que os alunos construam diferentes triângulos e os alterem durante a atividade, de forma que possam perceber que as propriedades são mantidas.

Inicialmente o professor pode realizar uma explanação sobre o acesso, além de algumas características, visualizações e ferramentas do Geogebra (**F1**).

Os itens A, B, C constituem a etapa de construção do triângulo. O item C, em particular, é uma etapa interessante para explorar a funcionalidade do programa na análise de dados que ficam disponíveis no quadro à esquerda. Nos itens E e F, determina-se o ponto médio e as medidas, no item I a construção da base média, nos itens M e N a mediana e, em O, o baricentro (**N0, F1, F2 e F4**).

Observa-se que há fases diferentes, o professor pode levar algumas questões a serem respondidas durante as construções. Na geração do triângulo ocorrem orientações diretas, já que a ordem da construção torna o preenchimento da folha de atividades coerente. Mas, simultaneamente, os alunos são livres para determinar as dimensões dos lados e ângulos, podendo modificar a figura.

Já nos itens D, G, J e Q ocorrem o preenchimento das tabelas (**N1 e F2**).

Ao responder o item H, espera-se que o aluno identifique o ponto médio como o ponto equidistante aos vértices dos segmentos. Para o item K, a comparação realizada pelo aluno deve possibilitar que ele conjecture que a medida da base média é metade da medida do lado paralelo (**N2 e F4**).

Após a comparação com seus colegas (**IS**) e a participação do professor (**ZDP**), este realiza uma discussão sobre a definição de base média (**F3**) e suas propriedades. Em seguida, ao responder o item L, consolida o conhecimento (**AA, N3 e F5**).

Agora em P, o professor introduz nomenclatura nova definindo a mediana como a ceviana relativa ao ponto médio e que o encontro das medianas é o baricentro (**F3 e N3**).

Para o estudo da propriedade da mediana, após analisar o item Q, o aluno realiza, em N, o cálculo (**N1**), em seguida realiza uma discussão com os colegas (**IS**). O professor não realiza intervenção nesta etapa.

No fechamento, realizado no item R, o professor deve estimular que os alunos consigam consolidar as descobertas das atividades realizadas, que permitirá completar a frase (**ZDP, AA, IS, AS, F5 e N3**).

4.4

Ensino de alturas e ortocentro no triângulo com Geogebra

Público Alvo: Alunos do 8º (oitavo) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC: Não há habilidade prevista na BNCC.
Objetivos: Retomar o conceito de perpendicular, apresentar a altura, estabelecer o conceito de ortocentro e suas propriedades.
Duração prevista: 100 minutos
Pré-requisitos: Ângulos, triângulos, conceito da ceviana e segmento de reta.
Material necessário: Folha de atividades, lápis, lapiseira, borracha, computador com o aplicativo Geogebra instalado ou com acesso à internet, através do site: https://www.geogebra.org/classic .
Organização: Com os alunos da turma dispostos em duplas.

4.4.1

Folha de atividades sobre a altura e ortocentro do triângulo

Folha de Atividades		
Nome:	Matemática	8º ano
	Pontos Notáveis no Triângulo – Ortocentro	

Orientações iniciais para acesso ao aplicativo de geometria dinâmica Geogebra:

Siga as orientações do professor para o acesso e as configurações iniciais para o desenvolvimento da atividade no programa.




Situação 1: Computador sem aplicativo e com acesso à internet:


Acessar o site: <https://www.geogebra.org/classic>

Situação 2: Acessar o aplicativo Geogebra (ícone )

Passo a passo para a construção do objeto de estudo:

A) Realize a construção a seguir:

- Use a ferramenta **Ponto**  e selecione três pontos (A, B, C) distintos e não colineares (não alinhados ou não pertencentes a mesma reta).
- Use a ferramenta **Reta**  para construir a reta BC. Em seguida siga as instruções do professor para formatar as retas (mudar a cor da reta e traço).
- Use a ferramenta **Reta Perpendicular**  selecione o ponto A e o segmento BC.

4. Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**  e selecione a interseção entre as duas retas construídas que fornecerá o ponto D.

5. Com a ferramenta **Ponto em Objeto**  selecione um ponto E qualquer na reta AB.

6. Use a ferramenta **Segmento de Reta**  para construir os segmentos AD e AE.

7. Acompanhe o professor que explicará como poderá identificar o comprimento dos segmentos AD e AE, na janela do programa.


B) Em seguida, arraste o ponto E pela reta BC, e veja se em algum momento o segmento AE tem comprimento menor que AD.

C) Discuta com seus colegas, e depois com o seu professor sobre o que observou. Em seguida, complete a afirmação a seguir:


O segmento que representa a menor distância de um ponto até uma dada reta forma um ângulo _____ com a dada reta.


D) Realize a construção a seguir:

1. Selecione e exclua o ponto E.

2. Use a ferramenta **Reta**  para construir as retas AB e AC. Formate-as da mesma forma que no item A.2.

3. Use a ferramenta **Segmento de Reta**  para construir os segmentos AB, AC e BC.

4. Use a ferramenta **Reta Perpendicular**  selecione o ponto B e o segmento AC. Repita o procedimento para o ponto C e o segmento AB.

5. Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**  para determinar as interseções das retas indicadas a seguir:

i. A reta perpendicular que contém B com a reta AC, determinando o ponto E.

ii. A reta perpendicular que contém C com a reta AB, determinando o ponto F.

iii. O encontro das três retas perpendiculares, determinando o ponto G.

6. Acompanhe seu professor e altere a formatação das retas perpendiculares do item D.4.


7. Com a ferramenta **Segmento de Reta**  construa os segmentos AD, BE e CF.


8. Acompanhe seu professor e realize a troca da formatação (cor e traçado) dos segmentos AD, BE e CF.

E) Seu professor irá fazer um breve comentário sobre os segmentos AD, BE e CF. Em seguida, complete os espaços abaixo sobre esses segmentos:

Os segmentos AD, BE e CF são os(as) _____. São cevianas que formam ângulos _____ com os(as) retas que suportam os lados do triângulo. O ponto de encontro destas cevianas recebe o nome de _____. Os pontos D, E e F são denominados _____.

F) Discuta com seus colegas e seu professor sobre a posição do ponto G em relação ao triângulo. Todos tiveram a mesma resposta? _____

G) Utilize a ferramenta **Ângulo**  e determine os ângulos BAC, ACB e ABC. Tome cuidado para que esses ângulos fiquem na região interna do triângulo. Você observará que as medidas dos ângulos A, B e C se tornarão visíveis.

H) Acompanhe o professor e habilite a exibição da malha  Exibir Malha. Altere as posições dos vértices A, B e C de forma que tenha um triângulo, reto em A. Em seguida, oculte os segmentos AB e AC. O que você pode dizer sobre as alturas desse triângulo?

I) Agora você deve modificar as posições dos pontos A, B e C de forma que você obtenha triângulos com diferentes classificações em relação aos ângulos. Preencha na tabela abaixo com a localização do ponto G em relação ao triângulo.

Classificação angular do $\triangle ABC$	Acutângulo	Retângulo	Obtusângulo
Posição do ponto G			

J) Discuta com seus colegas e com seu professor sobre os resultados do item I. Após essa discussão, você pode inferir uma relação entre a classificação angular do triângulo e a localização das alturas do mesmo e, conseqüentemente, do encontro delas. De acordo com as classificações dos triângulos a seguir, diga a localização das alturas e do ortocentro em relação ao triângulo:

Classificação angular do triângulo	Posição do Ortocentro	Posição das alturas
Acutângulo		
Retângulo		
Obtusângulo		

K) Complete os espaços abaixo com as descobertas realizadas nesta atividade:

A _____ relativa a um vértice é a ceviana **perpendicular** à reta suporte do lado oposto. Além disso, ela possui a _____ distância entre o vértice e a reta suporte do lado oposto. O encontro destas cevianas recebe o nome de _____ e sua posição em relação ao triângulo varia de acordo com a medida dos _____ do triângulo.

4.4.2

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

Diferente das propostas de atividades anteriores, esta estimula mais a manipulação e a visualização da construção do que as medidas de segmentos. A vantagem do uso do Geogebra nesta atividade, principalmente para o aluno, é poder modificar as dimensões do triângulo com muita liberdade, a fim de alterar sua classificação angular e, conseqüentemente, observar que as posições relativas das alturas e o ortocentro variam de acordo com essa mudança. Esta característica resolve a limitação que ocorre, por exemplo, no estudo do circuncentro com uso de dobraduras.

O professor pode, caso julgue necessário, como preparação, retomar o conceito de retas, segmentos de retas, realizar uma explanação sobre o acesso, além de algumas características, visualizações e ferramentas do Geogebra. Além de explicar sobre retas perpendiculares e cevianas, conceitos utilizados em toda a atividade (**F1, AS e F3**).

No item A, realiza-se a construção para verificar experimentalmente que o segmento que determina a menor distância de um ponto a uma reta é perpendicular a esta reta (**F2 e N0**). Em B, o aluno modificará a posição do ponto E, espera-se que ele consiga identificar que o menor segmento possível com um extremo em A e o outro na reta BC seja coincidente a reta perpendicular (**F2, N0, N1**). Em C, após a discussão entre os alunos, prevê-se que em conjunto definam o conceito informalmente (**IS e N2**). O professor define formalmente, e mais detalhadamente, o conceito que os alunos, possivelmente, já compreenderam experimentalmente (**F5, N3, ZDP, AA e AS**).

A partir do item D trabalha-se o conceito da altura do triângulo. Em D realiza-se a construção propriamente dita do triângulo e suas alturas (**F2 e N0**), toma-se o cuidado de formatar os segmentos e retas com características diferentes para que os alunos possam visualizar as distinções. Em E, o professor realiza uma explanação (**F3**) onde ocorre a definição formal (**N3**), nesse momento são inseridas novas nomenclaturas matemáticas e o professor vincula a altura com o objeto de estudo do item A (**AA, ZDP e AS**).

Com o item F, lança-se uma questão (**F1 e IS**) que irá promover uma nova discussão, desenvolvidas nos itens seguintes. Os conflitos das respostas são um bom motivador para a construção do conhecimento sobre a propriedade. Em G, há identificação dos ângulos para viabilizar a atividade (**F2**). Para o item H, anseia-se que o aluno observe duas alturas coincidentes aos menores lados do triângulo retângulo (**N1 e F2**). Em I, o aluno movimentará os vértices do triângulo, em seguida preenche a tabela com as observações (**N1, F1 e F4**).

Por fim, nos itens J e K, realiza-se uma consolidação do estudo. Em J, após a discussão (IS), espera-se que o aluno identifique as posições na tabela. Nesse momento, o professor pode chamar atenção aos detalhes com a posição dos pés das alturas (ZDP e F3). Em K, realiza-se um fechamento do conteúdo estudado e a intervenção do professor é importante, principalmente pelo uso de vocábulos recém apresentados (N3, F5, AA, AS e ZDP).

4.5

Estudo do centro de massa do triângulo com materiais concretos

Público Alvo: Alunos do 8º (oitavo) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC: Não há habilidade prevista na BNCC.
Objetivo: Apresentar o baricentro como centro de massa.
Duração prevista: 80 minutos
Pré-requisitos: Ângulos, triângulos, circunferência, segmento, medianas e baricentro.
Material necessário: Folha de atividades, papel cartão (ou papelão, isopor, outros materiais aproximadamente homogêneos), régua, compasso, borracha, tesoura e lápis/lapiseira. <i>Somente para o professor:</i> Palito de dente, barbante, dois garfos, fita adesiva (opcional), furador de papel, um copo, parafuso (ou prego) na parede (ou outra estrutura em sala que permita dar um laço com o barbante)
Organização: Com a turma disposta em pequenos grupos de 4 alunos.
Observações sobre a atuação do docente durante aplicação da atividade: O professor inicia a atividade explorando o equilíbrio com os garfos, o palito de dente e o copo. Em seguida orienta a construção de um prumo improvisado. Pode ser retomado o conceito de mediana e baricentro.

4.5.1

Sugestões para construção dos materiais de apoio

As construções a seguir são sugestões para auxiliar a atividade. Elas podem ser realizadas de formas diferentes e o docente deve avaliar e adaptar os materiais e recursos que possibilitem realizar os experimentos com os alunos.

- **Prumo artesanal**

Para a construção do objeto para determinação da direção vertical, que funciona como prumo, utiliza-se, neste exemplo, um prego que já se encontrava na parede.

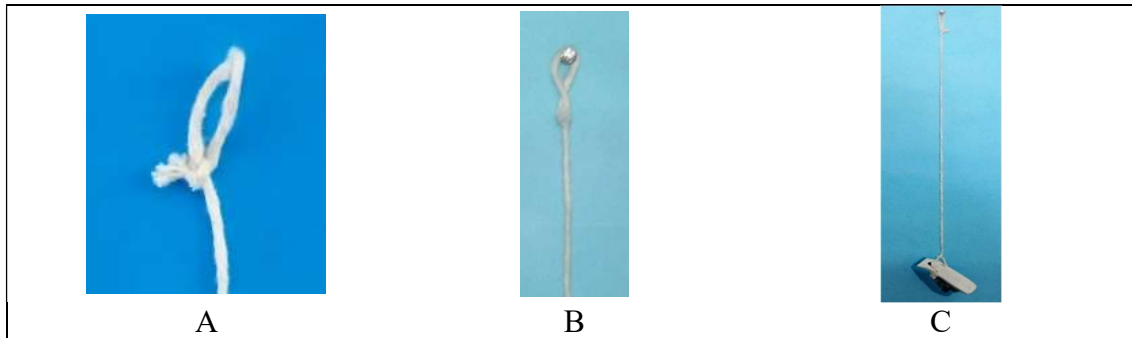


Figura 4.3 - Construção do prumo artesanal

Em seguida, dá-se um nó cego no barbante, a fim de obter um pequeno laço que permita a movimentação do barbante em torno do prego conforme a Figura 4.3 (A e B). O comprimento do barbante na Figura 4.3 é de aproximadamente 50 centímetros, pois deve ser superior ao comprimento das construções da atividade. Em seguida, amarra-se um objeto noutra ponta do barbante para servir de peso. Escolhe-se um objeto que possua peso suficiente que impeça o barbante de sofrer influência de fatores externos, como o vento de um ventilador. Na construção, tem-se um grampeador como peso Figura 4.3 (C).

- **Desafio do equilíbrio dos garfos**

Com dois garfos, um palito de dente e um copo, pode-se construir um exemplo da atuação do centro de massa em corpos. Para a construção siga os passos, encaixe os garfos como na Figura 4.4 (A). Em seguida, insira o palito entre os garfos encaixados pela parte convexa Figura 4.4 (B), de forma que possa segurar o conjunto pelo palito. Com cuidado, posicione o conjunto, com o palito sobre a borda do copo até que o conjunto permaneça em equilíbrio Figura 4.4 (C). Por fim, toque levemente os garfos e/ou movimente o copo e mostre que o conjunto mantém o equilíbrio, mesmo que balance Figura 4.4 (E e F).

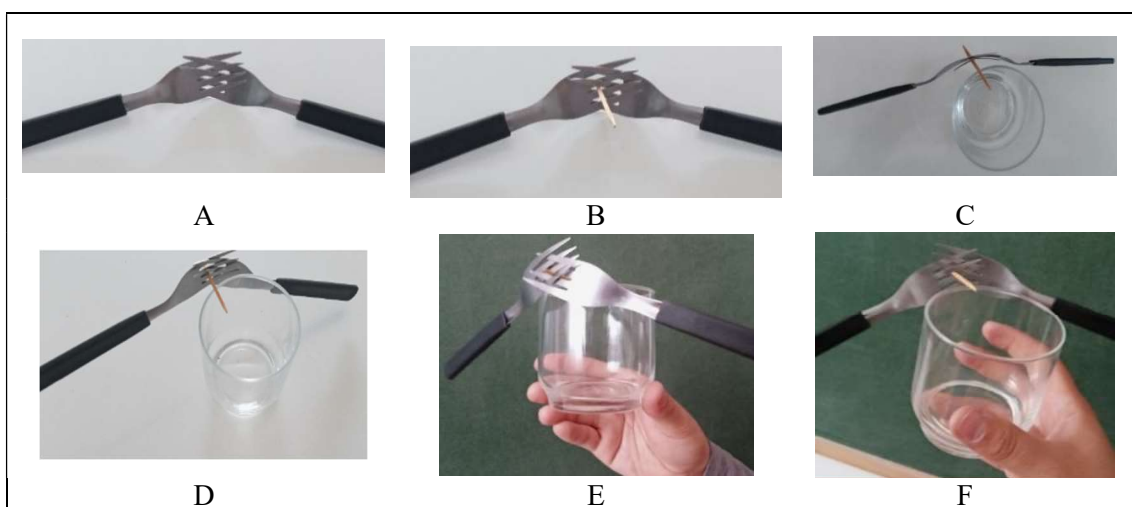




Figura 4.4 - Equilíbrio dos garfos

4.5.2 Folha de atividades sobre centro de massa

Folha de Atividades		
Nome:	Matemática	8º ano
Pontos notáveis no triângulo – centro de massa		

Você já viu diversas situações em que ocorre o equilíbrio de corpos. Isto ocorre até quando nos levantamos. Muitas vezes parece improvável ocorrer o equilíbrio, como você pode ver com os garfos se equilibrando. Vamos realizar algumas experiências sobre isto. Mas antes veja os termos a seguir:

<p>Centro de Massa: O equilíbrio dos corpos é influenciado pela posição do centro de massa. O centro de massa é o ponto onde se considera estar aplicada a força peso.</p>	 <p>Figura 4.5 - Equilíbrio de garfos</p>
<p>Prumo é um objeto frequentemente utilizado na construção civil para garantir que um determinado local se encontra na mesma linha vertical. Baseia-se em um cordão com um peso em sua ponta.</p>	 <p>Figura 4.6 – Prumo⁹</p>

Depois que o professor demonstrar como usar o prumo artesanal construído, realize o que é solicitado nos itens a seguir:

- A. Com as folhas fornecidas desenhe e recorte um círculo, um triângulo e uma figura disforme (veja o exemplo do professor).
- B. Com o auxílio do furador, realize dois pequenos furos em cada figura, e indique o primeiro furo com A e o segundo com B. Prefira posicionar os furos mais próximos as extremidades e tente evitar que eles fiquem opostos ao centro da figura.

⁹ Prumo - <https://joaoanatalino.recantodasletras.com.br/visualizar.php?id=6046365> - Acesso: 20/07/2020

C. Agora, acompanhe o professor em como utilizar o prumo. Primeiro posicione sua figura pelo furo no prego. Em seguida, posicione o prumo e marque um ponto sob o barbante, como na figura a seguir. Repita o procedimento com o outro furo.

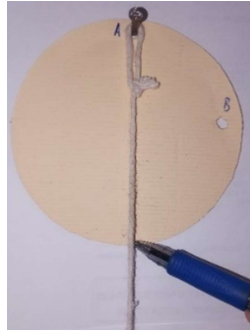


Figura 4.7 - Determinação do centro de massa

D. Com o auxílio da régua, trace duas retas unindo o ponto do furo A com o ponto indicado no item C. Repita o procedimento com o ponto B.

E. Acompanhe o professor ao realizar o procedimento abaixo:

Com o auxílio do lápis, posicione o fim do lápis sob o ponto de encontro das retas o item D com cada uma das figuras obtidas na posição horizontal e responda os itens a seguir:

1. Após realizar o procedimento acima nas três figuras, diga o que ocorreu:

2. A figura disforme também manteve seu equilíbrio mesmo sendo bem diferente das demais. Após conversar sobre isto com seus colegas e professor, responda:

a. O procedimento adotado funciona para todas as figuras construídas?

b. Sobre as linhas traçadas, diga o que elas representam.

c. O encontro das linhas traçadas representa a localização do quê?

3. Em qual local do círculo está o encontro das retas?

F. Agora, analise o triângulo. Com uma régua indique os pontos médios dos lados do triângulo e trace as medianas relativas aos lados. Lembre-se de indicar o encontro das medianas, que é o baricentro.

G. Você pode relacionar a localização do baricentro ao que já foi desenvolvido até o momento? Se sim, explique.

H. Após discutir com seus colegas e o professor sobre o item G, dê a definição do baricentro, como ponto notável do triângulo e com seu significado relacionado ao equilíbrio.

I. Após o professor comentar sobre corpos homogêneos e heterogêneos. As figuras que foram construídas podem ser classificadas como homogêneas e heterogêneas?

4.5.3

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

Esta atividade destaca-se principalmente por correlacionar o conhecimento do aluno sobre o seu meio e a propriedade geométrica do baricentro. Pode-se observar os elementos da teoria de Vygotsky, mas se destaca principalmente quando enxergada sob o viés da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel.

Inicialmente, o professor pode conduzir a construção e apresentação do equilíbrio dos garfos como um desafio. Possivelmente, atrairá a atenção dos alunos para a realização da atividade proposta. Embora essencial para o estudo do centro de massa, a classificação da composição das figuras como homogêneas ou não, pode ser deixada para um segundo momento, já que o material utilizado na atividade é aproximadamente homogêneo, sem perdas para a sua devida realização.

Em seguida, ele pode apontar diversas situações do cotidiano nas quais os alunos percebem o equilíbrio de corpos extensos, além de comentar brevemente o conceito do centro de massa (**F1, F3 e AS**).

Após a construção do prumo artesanal e a explicação do seu uso para a atividade, os alunos farão a construção das três figuras nos itens A, B e C (**F4**). No item A, recorta-se o papel cartão nos formatos do triângulo, círculo e disforme, conforme exemplos da Figura 4.8 – I, II e III, respectivamente.

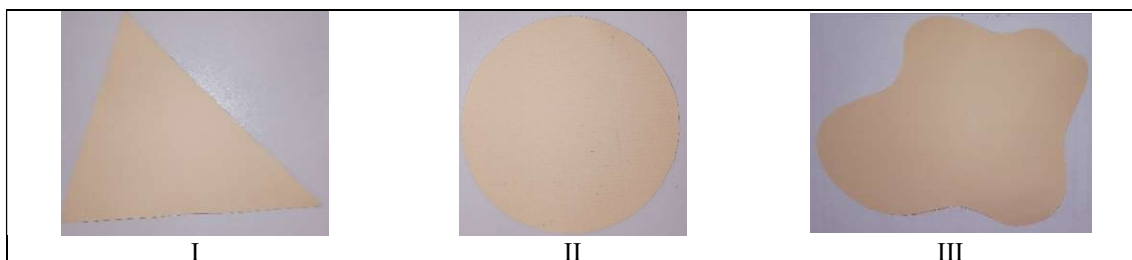


Figura 4.8 - Recorte dos objetos

Em B, os alunos selecionam dois pontos em cada uma das imagens, sinalizando-os com os pontos A e B, e fazem os furos com o furador, como se pode ver na Figura 4.9.

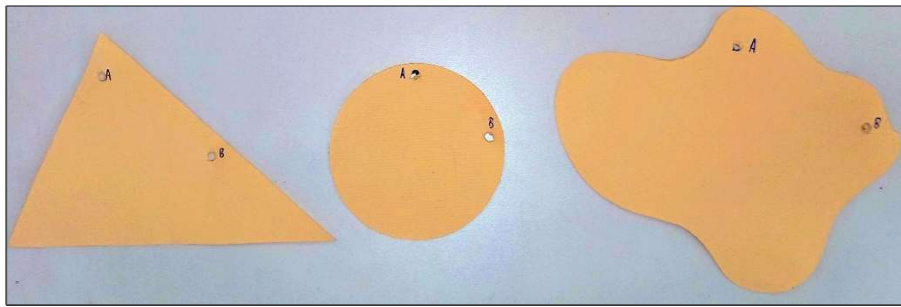


Figura 4.9 - Pontos nas construções

No item C, o aluno posiciona o furo A, em seguida o prumo artesanal e marca um ponto na parte inferior, repete o procedimento para B. Isso é realizado conforme as imagens das Figura 4.10, triângulo (I e IV), círculo (II e V) e disforme (III e VI).

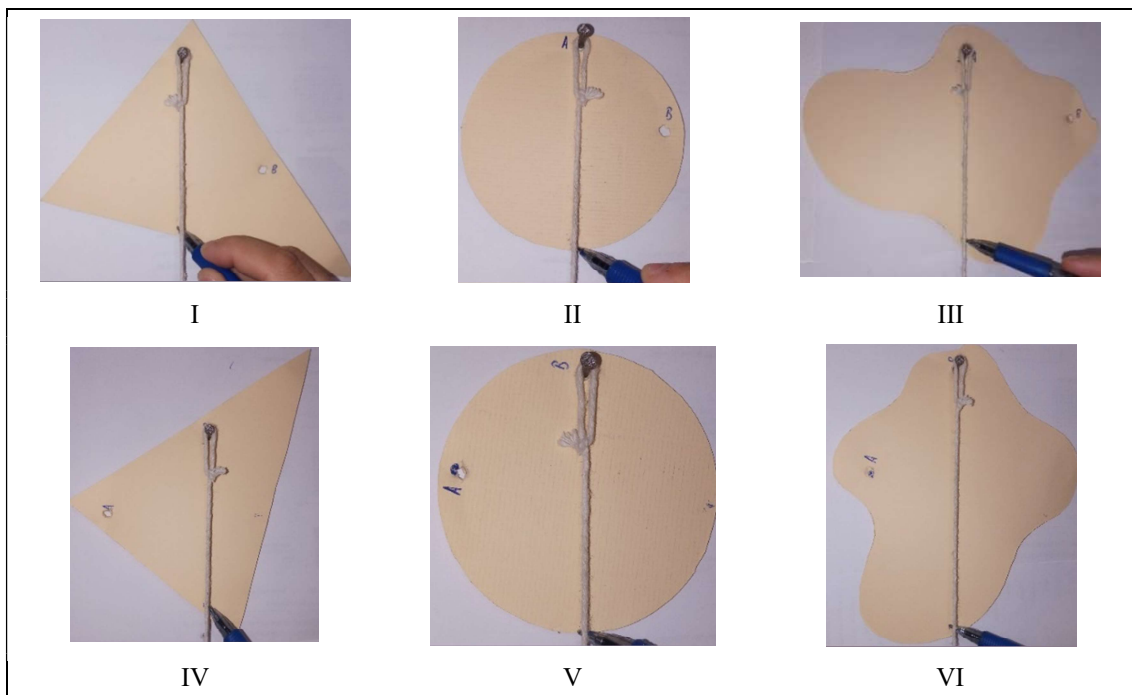


Figura 4.10 - Determinação das linhas de atuação da gravidade

Em seguida, no item D, o aluno traça as retas com extremidades, primeiro, no ponto A e o respectivo ponto indicado no item C. Posteriormente, ele repete o procedimento para B, obtendo os pontos de interseção das retas. Ao realizar o item D, espera-se que o aluno localize o centro de massa, conforme exemplo da Figura 4.11.

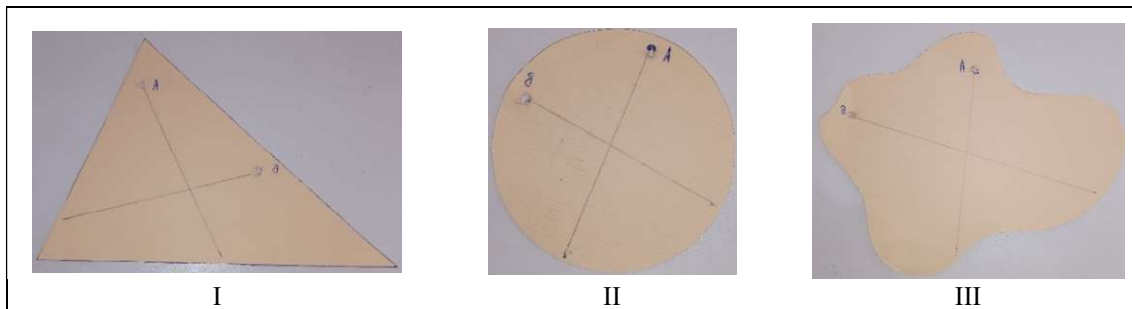


Figura 4.11 - Determinação do centro de massa

No item E, prevê-se que o aluno consiga identificar que o encontro das retas é o ponto de equilíbrio. O uso da figura disforme tem como objetivo mostrar que o procedimento para determinação do centro de massa em objetos planos é válido independente da forma utilizada. As retas traçadas no item D, representam a linha de atuação da força peso. Ao determinar o encontro das duas retas, localiza-se a posição do seu centro de massa.

No item E, verifica-se experimentalmente o centro de massa, ao posicionar as construções sobre o lápis ou a caneta (**F2, AS e N1**), conforme a Figura 4.12. As perguntas são os pontos de partida das discussões (**IS**), enquanto as contribuições do professor, ao conduzir as perguntas e elucidar as dúvidas, servem para consolidar o descoberto, assim como contribuir à compreensão do fenômeno observado (**N2, AA, F3, ZDP**). A observação quanto ao centro do círculo é uma oportunidade para discutir a relação da localização do centro de massa em figuras simétricas.

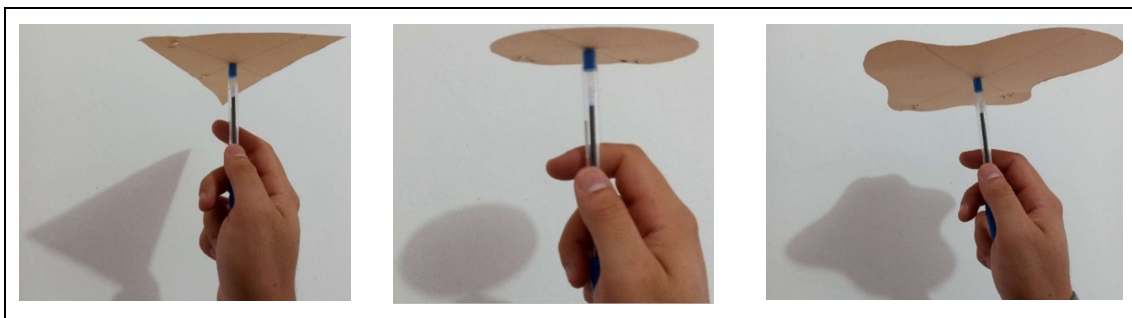


Figura 4.12 - Equilíbrio dos objetos

Esta atividade permite o uso de materiais reciclados, contudo é necessário que o material adotado seja aproximadamente homogêneo, por exemplo, pode-se utilizar um disco de isopor de pizza congelada como objeto circular (ver Figura 4.13).



Figura 4.13 - Centro de massa com material reciclado

Em F, constrói-se as medianas (**F2**) e retoma-se o baricentro com sua definição geométrica (**F1, F3, N1, AA e AS**). Ao ser questionado no item G, espera-se que o discente infira que os pontos são coincidentes e, portanto, o baricentro do triângulo é o centro de massa do triângulo (**N2 e AS**). Correlaciona-se o conceito físico com o matemático.

Em H, ocorre a comparação das conclusões dos alunos (**IS**), a participação do professor como mediador (**ZDP, F3 e AA**), e consolida-se a conclusão do grupo (**F5**). Em I, o professor estimula os alunos a levantarem a questão (**F1**): “*se os objetos tivessem composições diferentes, os experimentos possuiriam o mesmo resultado que os obtidos na atividade E?*”. Finalmente, ele apresenta o significado de homogeneidade (**F3**).

4.6

Ensino do arco capaz como lugar geométrico com Geogebra

Público Alvo: Alunos do 9º (nono) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC: (EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
Objetivos: Retomar o cálculo da medida angular de arcos de circunferências, apresentar o Arco Capaz.
Duração prevista: 50 minutos
Pré-requisitos: Ângulos, triângulos, circunferência, arcos na circunferência, conceito de Lugar Geométrico.
Material necessário: Folha de atividades, lápis, lapiseira, borracha, computador com o aplicativo Geogebra instalado ou com acesso à internet, através do site: https://www.geogebra.org/m/fezavzet
Organização: Com os alunos da turma dispostos em duplas.

4.6.1 Folha de atividades sobre o arco capaz

Folha de Atividades		
Nome:	Matemática	9º ano
	Arco Capaz	

Elizabeth e Daniele irão a uma peça que ocorrerá em um teatro. Este teatro possui uma estrutura conhecida pela humanidade há muitos séculos. Na figura abaixo temos um exemplo desta estrutura no Teatro de Epidauro na Grécia.



Figura 4.14 - Teatro de Epidauro¹⁰

As estruturas dos teatros e anfiteatros dos gregos e romanos possuíam, particularmente, muitos elementos comuns. Pode-se ver seus elementos até no famoso Coliseu de Roma. Abaixo pode-se ver uma planta de uma destas estruturas. Imagine que você está vendo de cima um destas incríveis construções.

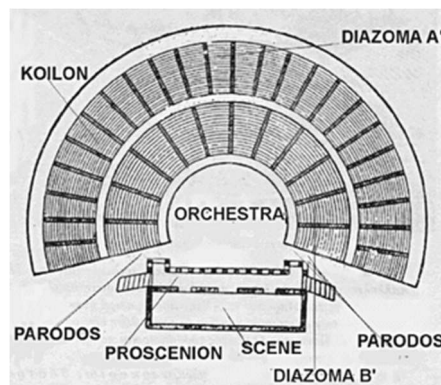


Figura 4.15 - Planta de teatro grego¹¹

Uma característica importante sobre estas estruturas é tornar possível que pessoas que estão na mesma fileira (curva) enxerguem o palco sob o mesmo ângulo, permitindo a visão do palco por uma quantidade maior de expectadores.

¹⁰⁻¹¹ Teatro de Epidauro e Planta de teatro grego - Disponíveis em: <http://www.tuomaquia.com/diferenca-entre-teatro-grego-anfiteatro-romano/> - Acesso: 21/07/2020

Agora, retomemos a situação de Elizabeth e Daniele, que ao chegarem ao teatro ficaram em dúvida qual local selecionar para garantir que ambas pudessem enxergar o palco com a mesmo “campo visual”. “*O palco (segmento) será enxergado sob o mesmo ângulo*”.

Vamos analisar esta situação com uma simulação no aplicativo Geogebra, acompanhe o professor:

A. Acesse: <https://www.geogebra.org/m/fezavzet> .

B. O ponto D representa a posição que Daniele selecionou no teatro. O segmento AB representa o palco. No aplicativo, na parte da esquerda, você pode ver duas caixas de seleção: a primeira permite observar a visão de Elizabeth e a segunda permite visualizar o ângulo de abertura da circunferência. Além disto, há duas barras em que é possível alterar a largura do palco (**a**) e o campo de visão de Daniele (**b**).

C. Altere a posição do ponto D. Pode-se observar que Daniele enxerga o palco com qual ângulo? Este valor muda ao trocar sua posição?

D. Agora habilite a caixa de seleção “Visão de Elizabeth”. E altere as posições dela através do ponto E. Assim como na letra C, com qual o ângulo Elizabeth enxerga o palco? Ele é diferente do que Daniele enxerga?

E. Altere o valor de **a**. As medidas dos ângulos mudam? E o tamanho do pontilhado azul?

F. Selecione **a** com o valor igual a 8. Em seguida altere o valor de **b**. O que acontece com o tamanho do pontilhado azul quando o valor de **b** aumenta e quando diminui?

G. Quando alteramos a fila na escolha do teatro, qual dos dois parâmetros são alterados, **a** ou **b**?

H. Agora habilite a caixa de seleção “**Ângulo Central**”. Percebeu alguma relação da medida do ângulo central com a do ângulo de visão de Daniele. Se sim, o quê?

I. Altere o valor de **b**. O que aconteceu com o valor do “**Ângulo Central**”? Sugira uma relação entre estas medidas?

J. Altere o valor de **b** para 90° . O tracejado azul adquire qual formato?

K. Em seguida, discuta com o professor e seus colegas suas descobertas. Em seguida, complete a expressão abaixo:

O tracejado azul da figura trabalhada representa um _____. Esta construção é o LG dos pontos que enxergam um _____ sob um mesmo _____. Como a medida dos ângulos inscritos numa circunferência é igual à _____ da medida do ângulo central, pode-se afirmar que as medidas dos ângulos deste LG são iguais a _____ do ângulo central.

L. Reflita sobre o que foi estudado e diga com suas palavras qual seria a melhor escolha de lugar em um teatro, com uma construção parecida com a desta atividade:

4.6.2

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

Após a contextualização da proposta de atividade, o aluno irá manipular no Geogebra a simulação da situação em análise. O ideal é realizar esta atividade logo que se tenha desenvolvido o conteúdo “**Arcos na Circunferência**”. Este conteúdo, além de ser retomado (AA), será contextualizado nesta atividade (AS).

Nos itens A e B, ocorre a apresentação dos recursos da atividade. As barras que alteram o tamanho do segmento AB (**a**) e o ângulo (**b**) da visão da Daniele (I). Nas Figuras 4.16 e 4.17, observa-se a visualização quando se acionam os botões em que simulam o ângulo de Visão da Elizabeth, $\angle AEB$, e o ângulo central, $\angle ACB$ (II).

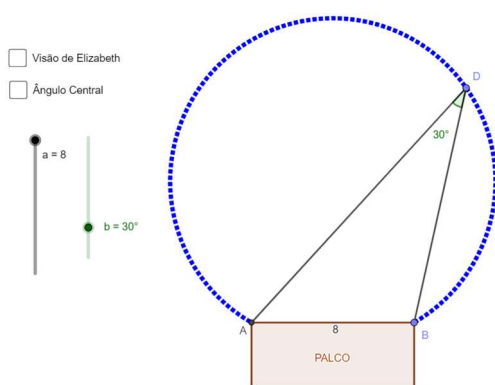


Figura 4.16 - Arco capaz I

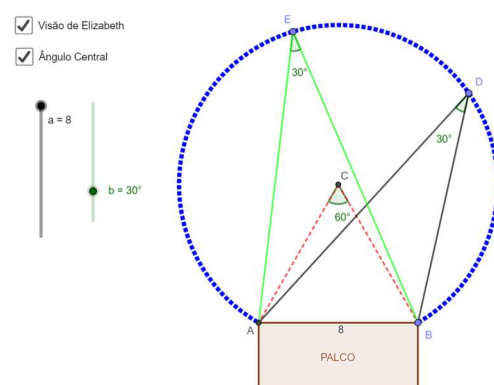


Figura 4.17 - Arco capaz II

Para o item C, espera-se que o discente perceba que a troca da posição do **ponto D** não altera a medida do ângulo (F4 e N1).

Em seguida, no item D, ao manipular a posição do **ponto E** espera-se que seja identificada a congruência entre os ângulos $\angle AEB$ e $\angle ADB$ (**N1 e F4**), ver Figuras 4.18 e 4.19.

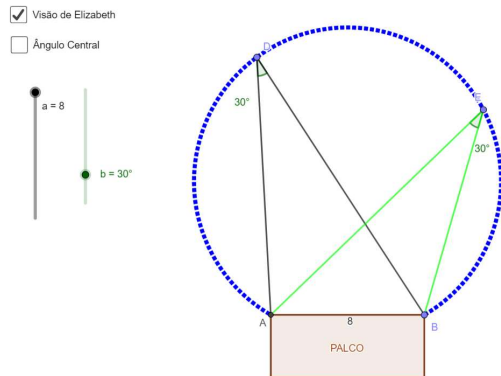


Figura 4.18 - Arco capaz III

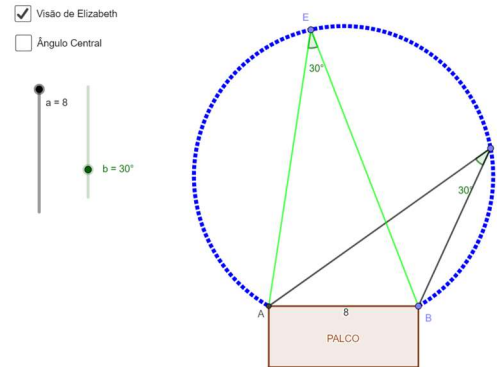


Figura 4.19 - Arco capaz IV

Para o item E, o aluno altera o segmento AB. Contudo, espera-se que ele observe que as medidas angulares não se alteram, mas o comprimento do arco capaz muda de forma diretamente proporcional à mudança do comprimento do segmento.

Já em F, estimula-se que ele perceba que a variação do parâmetro (**b**) influencia o comprimento do arco inversamente, ou seja, quanto maior o ângulo selecionado menor é o arco capaz (**F4 e N1**), observe quando compara-se as Figuras 4.20 e 4.21.

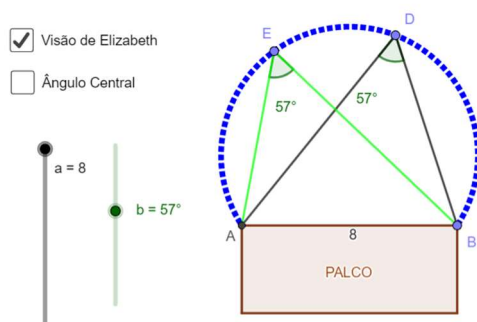


Figura 4.20 - Arco capaz V

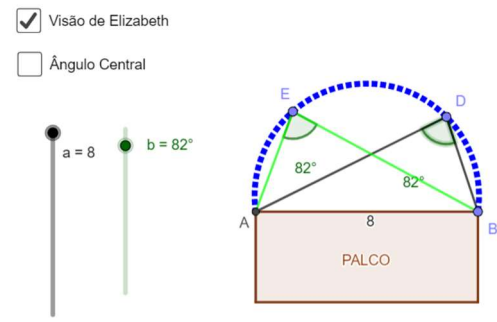


Figura 4.21 - Arco capaz VI

Ao responder o item G, prevê-se que o aluno consiga concluir que o tamanho do palco não sofre alteração, mas sim o ângulo de visão e, como uma consequência do que foi descoberto em F, possa perceber que o tracejado azul (fileiras) está relacionado com o ângulo de visão (campo de visão) (**N1 e F4**).

Em H e I, espera-se que ele conclua que o ângulo central é o dobro do ângulo de visão (**N2 e F4**), ver Figura 4.22.

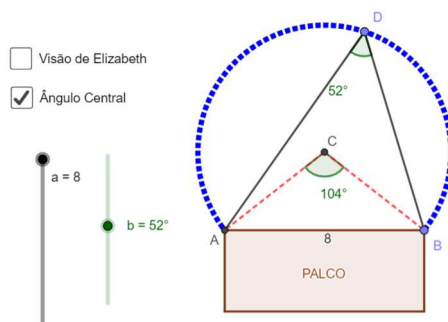


Figura 4.22 - Arco capaz VII

Ao alterar o valor do ângulo b para 90° , no item J, o aluno deve identificar que o arco configura uma semicircunferência. Nesta etapa, o professor retoma a propriedade do triângulo retângulo inscrito na circunferência, já que verifica experimentalmente que sua hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência (F2 e N2).

Quando em K, após discutir com os colegas (IS), o professor realiza a explicação consolidando as descobertas já realizadas pela turma (AS, F3, ZDP e N3). O aluno completa com a definição formal do arco capaz e da propriedade da medida do ângulo inscrito que é relacionado ao LG (F5).

4.7

Uso de fotografia para o ensino da circunferência de Apolônio

Público Alvo: Alunos do 9º (oitavo) ano do Ensino Fundamental.
Habilidade BNCC: Conteúdo não previsto na BNCC.
Objetivos: Apresentar a circunferência de Apolônio e suas propriedades.
Duração prevista: 100 minutos
Pré-requisitos: Segmentos, circunferência, semelhança de triângulos, razão e proporção.
Material necessário: Folha de atividades, lápis, lapiseira, borracha, giz, barbante, instrumento de medição (trena), câmera (celular). Materiais utilizados na demonstração que podem ser substituídos: prego (ou outro objeto que permita a rotação do barbante usado como compasso), martelo, dois bancos, tripé, espelho, lona, tecido (lençol) ou cartolina.
Preparação prévia para atividade: Antes da realização da atividade trabalha-se em sala de aula conforme descrito a seguir. Recomenda-se criar exemplos numéricos e contextualizados para exemplificar.

Em primeiro lugar retoma-se junto ao grupo de alunos duas situações de semelhança de triângulos em particular, com triângulos retângulos. Em ambas as construções, o segmento EC representa o menor objeto e MB o maior.

Na primeira imagem, o segmento NQ representa a altura da câmera em relação ao solo. Visto que há dois pares de ângulos congruentes pode-se afirmar que ΔNMT é semelhante ao ΔNED . Daí, segue que: $\frac{ED}{MT} = \frac{QC}{QB}$

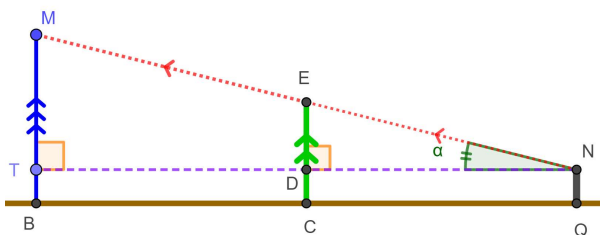


Figura 4.23 - Semelhança de triângulos I

Na segunda imagem, o segmento UP representa a altura da câmera em relação ao solo. Utilizando-se do caso de semelhança Ângulo – Ângulo – Ângulo, pode-se afirmar que ΔEDU é semelhante ao ΔMTU . Daí, segue que: $\frac{ED}{MT} = \frac{PC}{PB}$

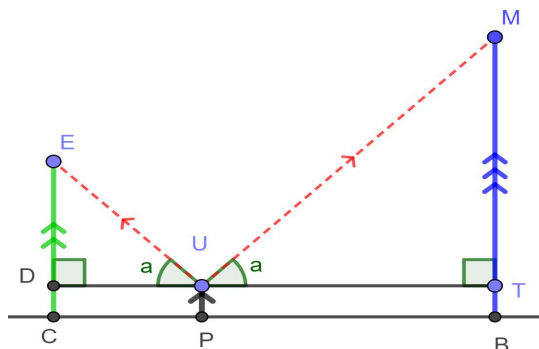
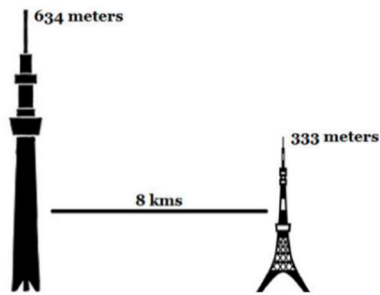
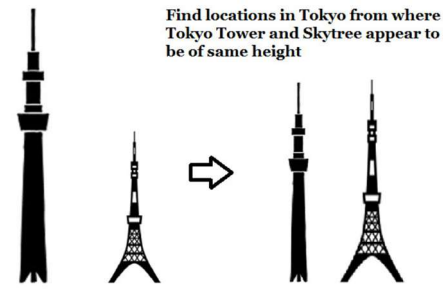


Figura 4.24 - Semelhança de triângulos II

Enfim, a imagem a seguir simula a situação em que se constrói a simetria do ΔUTM em relação à reta UP e a relaciona à primeira semelhança. Esta discussão será aplicada durante a atividade, embora não seja o foco da atividade trabalhar com semelhança de triângulos.

Figura 4.27 - Esquema dos prédios I¹³Figura 4.28 - Esquema dos prédios II¹⁴

Aplicando geometria, o fotógrafo consegue determinar o exato local para produzir a fotografia, afim de criar a percepção de que as edificações possuem a mesma altura, ainda que uma possua quase o dobro da altura da outra.

Vamos para a quadra a fim de descobrir que técnica é esta, na prática!

A. Preparação inicial:

Escolha a trave que permita uma melhor iluminação para tirar as fotos e posicione a lona sobre esta trave. Com o auxílio do giz, sinalize na quadra o centro da trave com a letra B. Em seguida, posicione os bancos, empilhados pelos assentos, próximo à marca de pênalti. Durante o procedimento essa posição pode ser alterada para melhorar as fotos produzidas. Cubra os bancos ou circunda-os com o tecido/papelão de forma que fiquem em destaque. Sinalize com giz este local, no chão da quadra, com a letra C.

B. Use a marcação da quadra, a trena ou um fio de barbante esticado no centro da trave passando pelos bancos para criar uma linha que permita posicionar o tripé para tirar a foto. Afastando o tripé, a partir do ponto C, verifique na câmera o local, o mais preciso possível, em que o objeto no ponto B ‘desaparecerá’ atrás do que está no ponto C. Sinalize com giz este local, no chão da quadra, com a letra Q.

C. Esta situação assemelha-se ao esquema já estudado. Com o auxílio da trena, realize as medidas das alturas da câmera e dos objetos em análise, além das distâncias destes até a câmera. Em seguida, preencha os dados das alturas na tabela. A altura relativa será a medida do objeto diminuído da altura do tripé.

Altura em B		Relativa de B		Altura do tripé		QB	
Altura em C		Relativa de C		QC		BC	

D. Agora, posicione o tripé, ainda alinhado, entre a trave e os bancos. Um de seus colegas irá posicionar o espelho atrás do banco refletindo a imagem da trave. Movimento

¹³ Esquema dos prédios I: Disponível em: <<https://bit.ly/2EnF174>> - Acesso em: 20/07/2020

¹⁴ Esquema dos prédios II: Disponível em: <<https://bit.ly/3j5k8hb>> - Acesso em: 20/07/2020

o tripé, pela linha, até que, o mais preciso possível, a imagem da trave atinja a altura dos bancos. Sinalize com giz este local, no chão da quadra, com a letra P.

E. Meça as distâncias PC, PB, PQ e preencha a tabela:

PC		PB		PQ	
----	--	----	--	----	--

F. Com uma calculadora, calcule e preencha as razões da tabela abaixo. Em seguida, responda se há alguma relação entre seus valores.

QB/QC		PB/PC		Relativa de B/ Relativa de C	
R:					

G. Determine o ponto médio do segmento PQ. Sinalize com giz o local com a letra O. O professor mostrará como traçar uma circunferência com centro em O. Após a construção da circunferência, observe que ela passa pelos pontos P e Q. Agora, selecione três pontos (A, E e F) sobre a circunferência, diferentes de P e Q, conforme orientação do professor.

H. Com o tripé sobre os pontos A, E e F, fotografe simultaneamente os objetos nos pontos B e C. Vocês conseguiram o mesmo efeito nas fotografias que o fotógrafo?

--

I. Preencha a tabela a seguir com as medidas dos segmentos:

AB		EB		FB	
AC		EC		FC	

J. Calcule a razão dos segmentos na tabela abaixo:

AB/AC		EB/EC		FB/FC	
-------	--	-------	--	-------	--

Compare os resultados obtidos no item F com os do item J e diga o que se pode afirmar sobre estes valores.

--

K. Após discutir com seus colegas e seu professor sobre o item K. Complete a afirmação a seguir:

A circunferência de _____ é o LG dos pontos em que a razão das distâncias a outros dois pontos dados fixos é um valor _____.

4.7.2

Análise da proposta de atividade de acordo com o método

A circunferência de Apolônio é um conteúdo raramente desenvolvido no Ensino Básico. Contudo, como se pode concluir da atividade proposta, permite revisitar diferentes temas da matemática. O uso da fotografia demonstra uma prática em que a matemática é aplicada, sem que a maior parte das pessoas nem perceba (AS).

A preparação que ocorre antecipadamente sobre semelhança de triângulos é fundamental para o desenvolvimento da atividade. Recomenda-se que o docente já aplique atividades contextualizadas, para que torne a prática mais facilmente compreensível (**F1** e **AA**). Devido à escala e aos materiais utilizados, o professor precisa atentar para uma execução mais cuidadosa das medidas e fotografias. Pode-se antecipar junto aos alunos eventuais erros que possam ocorrer nos cálculos, que devem ser aproximados pelo professor.

No item A, desenvolve-se a construção inicial, na qual o professor deve realizar previamente a escolha de materiais que sejam de fácil visualização. Além disso, ele deve fazer anteriormente as medidas e cálculos para determinar tanto as alturas como a distância entre os objetos, a fim de evitar o risco destas dimensões dificultarem a identificação das propriedades desejadas durante a atividade ou não possuir espaço físico para a sua devida aplicação. O uso da quadra é recomendável por ser um local amplo e bem nivelado. O uso do tripé é recomendável para manter o padrão da altura e diminuir eventuais erros. Manter a posição centralizada facilita o traçado da circunferência posteriormente.

Na Figura 4.29, temos a construção inicial, com o posicionamento dos bancos e a cobertura da trave e dos bancos, a fim de se destacarem. A quadra em questão possui uma suave marcação em que estão alinhados o centro da trave e a marca do pênalti. Na referida construção, a distância entre os objetos é dada por $\overline{BC} = 5,13 \text{ m}$.



Figura 4.29 - Organização

No item B, realiza-se a construção de dois triângulos semelhantes, como no esquema da Figura 4.30, determinando o ponto Q. O propósito é conseguir na câmera uma imagem como a da Figura 4.31.

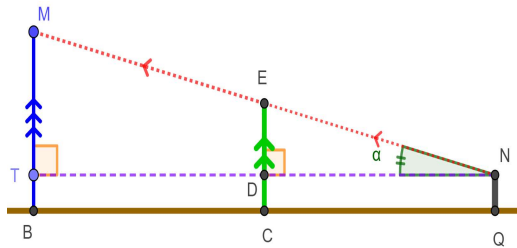


Figura 4.30 – Esquema I



Figura 4.31 – Foto do ponto Q

Em D, usa-se o espelho entre os objetos, conforme a Figura 4.32. Ao posicioná-lo sobre o ponto C, verifica-se que a construção da imagem obtida no reflexo do objeto sobre o ponto B no espelho, sob a visão da câmera, tem a sua distância ($\overline{PB'}$) igual à distância da câmera até o objeto (\overline{PB}), consegue-se obter o ponto P. O docente deve acompanhar esta etapa com muita atenção (**F2**, **F3** e **N0**). O objetivo é produzir uma imagem como a da Figura 4.33, em que a altura dos bancos na imagem é igual à altura da trave. Embora o uso do espelho dificulte um pouco a precisão, ele é fundamental para obter uma imagem que mostre simultaneamente os dois objetos.

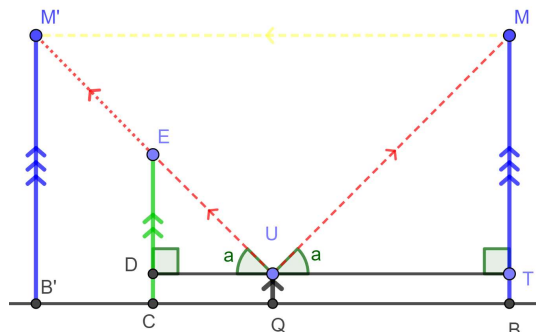


Figura 4.32 – Esquema II



Figura 4.33 – Foto do ponto P

As construções representadas pelas Figuras 4.31 e 4.33, só são possíveis ao considerarmos o Princípio da Propagação Retilínea da Luz. Além disso, as semelhanças de triângulos são obtidas pela lei de reflexão de espelhos baseada na característica do ângulo de incidência do raio ser congruente ao ângulo de reflexão.

Com este modelo desenvolvido, nos itens C e E, são tomadas as medidas indicadas com auxílio da trena (**F2** e **N1**). Estes dados serão utilizados durante as comparações das razões do item F. Neste momento, espera-se que o aluno possa concluir que as razões das alturas relativas coincidam com as razões das distâncias da câmera para P e Q (**N2**). A intervenção do professor nesta etapa, retomando as semelhanças, permite que ocorram

F3, AA e ZDP. Ao realizar esta etapa, o professor deve sinalizar as razões obtidas no item F, como ponto de atenção para as razões que serão obtidas nos itens seguintes.

Em G, determina-se o centro O da circunferência, ponto médio do segmento PQ. Desenha-se a circunferência e, em seguida, os alunos selecionam aleatoriamente três pontos (A, E e F) sobre o ela (**F4**).



Figura 4.34 - Construção da circunferência

Depois de produzidas as fotografias em H, espera-se que o discente perceba que as fotos das construções criam a percepção de que a altura da trave no centro é a mesma que a dos bancos, de forma semelhante ao resultado obtido pelo procedimento do fotógrafo (N0). Como a trave é muito larga pode dar a percepção quando considerada totalmente em comparação com os bancos.

As imagens seguintes apresentam as fotografias produzidas em pontos A, E e F arbitrários da circunferência previamente construída.



Figura 4.35 - Foto produzida no ponto E



Figura 4.36 - Foto produzida no ponto F



Figura 4.37 - Foto produzida no ponto A

Já em I, toma-se as distâncias de A, E e F aos pontos B e C (**F2** e **N1**), para que em J seja possível calcular as razões e verificar que são iguais a uma constante, e que esta constante é a mesma encontrada no item F (**N2**).

Na Figura 4.38, tem-se o esquema proposto para a atividade, como a visão de cima da quadra.

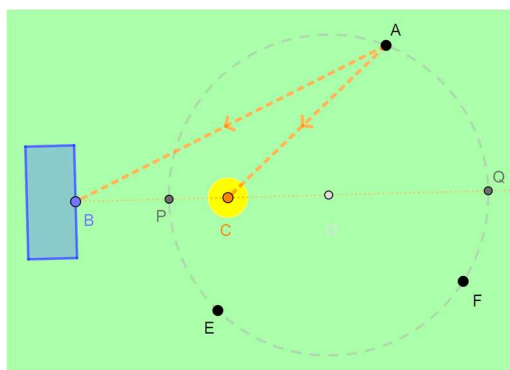


Figura 4.38 - Esquema de organização da quadra

Por fim, em K, após a discussão dos alunos entre si (**AS**) e com o professor, este apresentará o conceito de circunferência de Apolônio e suas propriedades (**F3**, **ZDP** e **N3**). Realiza-se o fechamento revisitando os conceitos (**AA** e **F5**).

Na execução experimental, além das fotos exemplificadas anteriormente obtive as medidas descritas nas tabelas seguintes.

Para o item C, obtive os dados da altura da trave, dos bancos sobrepostos e do tripé. E, além disso, as distâncias da câmera até a trave e aos bancos quando está alinhada e exterior ao segmento BC, na posição que a foto cria a percepção de que os bancos estão na mesma altura da trave.

Tabela 4.1 – Circunferência de Apolônio – Item C

Altura em B	2,1 m	Relativa de B	1,2 m	Altura do tripé	0,9 m	QB	8,7 m
Altura em C	1,4 m	Relativa de C	0,5 m	QC	3,6 m	BC	5,05 m

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o item E, obtive as distâncias da câmera até os bancos e até a trave, quando a foto dos bancos e o reflexo do espelho aparenta ter a mesma altura.

Tabela 4.2 – Circunferência de Apolônio – Item E

PC	1,5 m	PB	3,55 m	PQ	5,05 m
----	-------	----	--------	----	--------

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para o item F, calculei as razões das distâncias da câmera aos objetos e entre as alturas dos objetos desconsiderando a altura do tripé.

Tabela 4.3 – Circunferência de Apolônio – Item F

QB/QC	2,41	PB/PC	2,37	Relativa de B/ Relativa de C	2,4
-------	------	-------	------	------------------------------	-----

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que as razões obtidas são aproximadamente equivalentes entre si. Da definição da circunferência de Apolônio, adotei as razões QB/QC e PB/PC como iguais e, daí, tracei a circunferência de centro e diâmetro PQ . Sobre esta circunferência selecionei três pontos arbitrários A , E e F , produzi as fotos e medi as distância destes pontos à trave (B) e aos bancos (C) , obtendo os dados na tabela referente ao item I, descritos a seguir.

Tabela 4.4 – Circunferência de Apolônio – Item I

AB	7,2 m	EB	8,5 m	FB	5,9 m
AC	3,1 m	EC	3,6 m	FC	2,5 m

Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, calculei as razões correspondentes ao item J da atividade, de forma que obtive os valores:

Tabela 4.5 – Circunferência de Apolônio – Item J

AB/AC	2,32	EB/EC	2,36	FB/FC	2,36
-------	------	-------	------	-------	------

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao calcular as razões, observa-se que os valores resultam em dados aproximados. Por isso, é importante mostrar aos alunos que esses erros são causados pelos mais variados motivos: a irregularidade do solo, a dificuldade ao se traçar perfeitamente a circunferência, o uso da trena, o posicionamento do espelho ou dos objetos que não ficam perfeitamente centralizados, dentre outras possibilidades.

Mesmo assim, acredito que os valores das razões obtidas com as devidas aproximações atendem ao modelo, corroboram o ensino da teoria da circunferência de Apolônio e ratificam-na por meio da prática.

5 Conclusão e desdobramentos

Embora o modelo de van Hiele não tenha a mesma projeção do que outras teorias de aprendizagem, sua contribuição ao se dedicar ao ensino da matemática e, essencialmente, da geometria, demonstra sua importância para a prática dos docentes da disciplina.

Ao estruturar a aprendizagem em fases e níveis, cria parâmetros a serem atingidos, onde se garante o desenvolvimento de um processo de ensino aprendizagem significativo e adequado às demandas do discente.

Entendemos que, embora soem divergentes, as teorias pedagógicas de Piaget, Vygotsky e Ausubel devem ser compreendidas como complementares, e ainda que sejam fascinantes, elas não se encerram em si. Seus elementos e características podem e devem ser adequados às necessidades de aprendizagem do aluno pelo professor. Este, em sua atuação, deve compreendê-las como ferramentas a serem aplicadas para que o conhecimento não se limite a ser algo repassado, ante isto, defenda o conhecimento como uma construção do indivíduo.

Neste trabalho, percebe-se a existência de uma relação prática entre o defendido pela teoria de Piaget como destaque: *as fases de desenvolvimento da aprendizagem, os processos de assimilação e acomodação*, além da *compreensão do papel do professor como o estimulador de descobertas*, e os objetivos defendidos pelo casal van Hiele.

Podemos ver também que ao se aplicar o modelo do casal, durante o percurso pelos níveis e fases de aprendizagem, corrobora-se a visão de Ausubel, que defendia o *ensino significativo, contextualizado* e que, principalmente, *vinculasse os saberes e conhecimentos do discente aos novos propostos pelo docente*.

Ao estimular a atuação do professor como mediador, diferente da noção de apenas expositor de dados e informações, vê-se que o modelo propicia ao docente agir como o navegador da *Zona de Desenvolvimento Proximal* de Vygotsky. Uma vez que o aluno se desenvolve sozinho até seus próprios limites, a ação didática do docente promove o discente a níveis que antes ele não alcançaria.

Durante a jornada de aprendizagem promovida pelo método, a construção do conhecimento é sinalizada pelos saltos entre os níveis: o aluno visualiza sem ainda entender o objetivo do que faz, analisa o material ou os dados, daí conjectura informalmente, comprova sua hipótese formalmente e, como já sinalizado, alcança, em

alguns casos com rigor, a compreensão daquilo que estuda. O docente atua como cultivador dos questionamentos e provocações que permitem a evolução do aluno.

Para que tudo isso seja possível, precisa-se que no decorrer dos níveis, os estímulos do professor perpassem pelas fases, por exemplo, ao informar e questionar os discentes, onde são criadas as raízes daquilo que se propõe à compreensão do aluno. Na execução de orientações diretas, o docente induz o discente a observar objetivos específicos. Na explanação o professor apresenta o que é desconhecido e formaliza o que é descoberto. Ao executar a orientação livre o professor promove a criatividade, a divergência de resultados e novas descobertas. Por fim, na integração ocorre o fechamento e consolidação do apresentado.

As atividades com materiais concretos permitem uma quebra do que é convencional no ensino da matemática, assim como no uso de software, onde se vincula o uso prático de tecnologias para o ensino da matemática. Esta postura pretende atrair a atenção do aluno. Os Lugares Geométricos e os pontos notáveis do triângulo recebem uma abordagem diferente e contextualizada no ensino, bem diferente da atenção lhes dedicada costumeiramente. Por isso, acredito que tais atividades contribuem para a mudança da visão majoritária de nossos alunos de como a matemática funciona. Além de que, embora, não tenha sido o objetivo do proposto aqui, elas apresentam aos alunos formas de pensar próximas do pensamento científico já em classes do oitavo e nono ano escolar. Estas pretensões vêm ao encontro do que a BNCC defende em seu texto.

Por fim, infelizmente, devido às consequências da pandemia do COVID-19 não pude realizar as atividades com as turmas em que leciono neste ano. Entretanto, fica o desejo e o compromisso de publicar, posteriormente, artigo com o resultado das aplicações das atividades propostas assim que possível.

6

Referências bibliográficas

ALVES, George de Souza; SAMPAIO, Fábio Ferrentini. **O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica**. Rio de Janeiro: Relatório Técnico Nce, Ufrj, 2002. 10 p.

ASSIS, André Koch Torres. **Arquimedes, o centro de gravidade e a lei da alavanca**. Montreal: Apeiron, 2008.

CARDOSO, Eduarda de Jesus. **Teoria de Van Hiele aplicada ao ensino de funções**. 2015.

CARRETERO, Mario. **Construtivismo e Educação**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. 98 p. Tradução de Jussara Haubert Rodrigues.

FERRARI, Márcio. **Lev Vygotsky, o teórico do ensino como processo social**. 2008. Disponível em: <<https://novaescola.org.br/conteudo/382/lev-vygotsky-o-teorico-do-ensino-como-processo-social>>. Acesso em: 22 jun. 2020.

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves; BURIASCO, Regina Luzia Corio de. **Educação Matemática Realística: uma abordagem para os processos de ensino e de aprendizagem**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 237-252, abr. 2016.

IVIC, Ivan; COELHO, Edgar Pereira. **Lev Semionovich Vygotsky**. Recife: Massangana, 2010. 140 p.

KALEFF, Ana Maria; HENRIQUES, Almir de Souza; REI, Duke Monteiro; FIGUEIREDO, Luiz Guilherme. **Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele**. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro - SP, v. 9, n. 10, p. 21-30, jun. 1994.

MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. São Paulo: Epu, 1999. 248 p.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2013. 464 p.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

PASSOS, Adriana Quimentão. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e Gepema: Algumas Aproximações**. 2015. 148 p. Tese (Doutorado) - Curso de Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PÉRTILE, Karine. **O Modelo Van Hiele no Desenvolvimento do Pensamento Geométrico: uma análise de obras do programa nacional do livro didático para o ensino médio**. 2011. 87 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciências e Matemática, PUC-RS, Porto Alegre, 2011.

PRESTES, Zoia Ribeiro. **80 anos sem Lev Semionovitch Vigotski e a arqueologia de sua obra**. Revista Eletrônica de Educação, São Carlos, v. 8, n. 3, p. 5-14, 2014.

Vojkuvkova, I. **The van Hiele Model of Geometric Thinking**. In WDS'12 Proceedings of Contributed Papers: Part I — Mathematics and Computer Sciences (eds. J. Safrankova and J. Pavlu), Prague, Matfyzpress, pp. 72-75, 2012