UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

VONALDO FEITOSA DE SIQUEIRA

TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA EM PROVAS DO ENEM

JUAZEIRO DO NORTE
2020

VONALDO FEITOSA DE SIQUEIRA

TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA EM PROVAS DO ENEM

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.
Coorientador: Plácido Francisco de Assis Andrade.

JUAZEIRO DO NORTE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na
Publicação Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S596t Siqueira, Vonaldo Feitosa de.
Tópicos de geometria plana em provas do ENEM / Vonaldo Feitosa de Siqueira. – 2020.
125 f.: il. color.30 cm.
(Inclui bibliografia).

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Juazeiro do Norte, 2020.

Orientação: Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa.
Coorientador: Prof. Dr.Plácido Francisco de Assis Andrade.

1. ENEM. 2. Matriz de referência . 3. Geometria.I. Título.

CDD 516

Bibliotecária: Glacinésia Leal Mendonça
CRB 3/ 925

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E
TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Tópicos de Geometria Plana em Provas do Enem

VONALDO FEITOSA DE SIQUEIRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 31 de julho de 2020.

Digite o texto aqui

Banca Examinadora

Maria Silvana A. Costa

Prof.ª Dr.ª Maria Silvana Alcântara Costa
Orientadora

Placido Andrade

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis Andrade
Coorientador - UFCA

Júnio Moreira de Alencar

Prof. Dr. Júnio Moreira de Alencar
IFCE

Dedico este trabalho aos meus pais por acreditarem na ideia de que a educação é o melhor meio de transformação social e por isso sempre me incentivaram.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais que não tiveram muito acesso à educação escolar e mesmo assim incentivaram e proporcionaram a todos seus filhos à educação básica, mostrando a sua importância para trilharem caminhos melhores.

Aos meus irmãos que compartilharam os momentos bons e difíceis desde o início dessa jornada.

Aos meus amigos, colegas de trabalho, pelos incentivos, pelas compreensões e colaborações.

Aos colegas de mestrado que compartilharam esse momento tão importante para todos nós.

A todos os professores do PROFMAT da UFCA.

Em especial à professora Drª. Maria Silvana Alcântara Costa, pela paciência, pelo apoio e pela orientação e por quem eu tenho um enorme respeito.

A todos que fizeram e parte dessa caminhada e continuarão fazendo.

À UFCA pela oportunidade de cursar esse mestrado.

Por fim, agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática – SBM – e a CAPES por proporcionarem essa capacitação aos profissionais da educação básica em todo Brasil.

"Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre".
(Paulo Freire)

RESUMO

O Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM – é atualmente o principal meio de acesso ao Ensino Superior no Brasil. Com isso, os alunos nos anos finais do ensino médio, ou ao concluí-lo, que pretendem ingressar no Ensino Superior, precisam se dedicar à preparação para as provas do ENEM, pois apresentam níveis de conhecimento considerados baixos, conforme dados do próprio ENEM e de outras avaliações adotadas pelo Governo, como as avaliações do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes – PISA – e do Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB. Considerando essa realidade e com o objetivo de contribuir com os estudos daqueles que almejam uma vaga no Ensino Superior, este trabalho apresenta alguns dados sobre o ENEM e conhecimentos básicos de Geometria Plana. Para alcançar esse objetivo, realizamos uma análise da Matriz de Referência do ENEM e das provas aplicadas, de 2009 a 2019, onde buscamos traçar o perfil das questões de Geometria. Os dados dessa análise são apresentados no Capítulo 2 e mostra que as questões de matemática que correspondem a um quarto das provas e em 32% delas são avaliados conhecimentos geométricos. Portanto a Geometria, cobrada nas provas do ENEM, é muito abrangente. Assim, no Capítulo 3, buscamos estabelecer uma sequência didática. Apresentamos algumas noções básicas de Geometria, conceitos fundamentais de ângulos e um estudo sobre triângulos com definições e resultados importantes seguidos de alguns exemplos e finalizamos o Capítulo 3 com uma seção de questões, coletadas do ENEM.

Palavras-chave: ENEM. Matriz de Referência. Geometria.

ABSTRACT

National High School Exam – ENEM – is currently the main means of access to Higher Education in Brazil. With that, students in the final years of high school, or at the end of it, who intend to enter Higher Education, need to dedicate themselves to preparing for ENEM tests, as they have levels of knowledge considered low, according to data from ENEM itself and other assessments adopted by the Government, such as the evaluations of the International Student Assessment Program – PISA – and the Basic Education Assessment System – SAEB. Considering this reality and in order to contribute to the studies of those who aspire to a place in Higher Education, this work presents some data about ENEM and basic knowledge of Flat Geometry. To achieve this goal, we carried out an analysis of the ENEM Reference Matrix and the tests applied, from 2009 to 2019, where we seek to outline the profile of Geometry issues. The data of this analysis are presented in Chapter 2 and it shows that the mathematical questions that correspond to a quarter of the tests and in 32 % of them are evaluated geometric knowledge. Therefore, Geometry, collected in the ENEM tests, is very comprehensive. Thus, in Chapter 3, we seek to establish a didactic sequence. We present some basic notions of Geometry, fundamental concepts of angles and a study of triangles with important definitions and results followed by some examples and we conclude Chapter 3 with a section of questions, collected from ENEM.

Keywords: ENEM. Reference Matrix. Geometry.

LISTA DE FIGURAS

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM – é atualmente a porta de entrada nas instituições federais de Ensino Superior e é também utilizado por instituições privadas e universidades no Exterior, como em Portugal. Foi criado em 1998, tendo como objetivo avaliar o ensino básico no país, porém as inscrições realizadas pelos alunos, ao término da educação básica, para participação no exame eram voluntárias. Conforme [10], a partir desta avaliação, o Ministério da Educação pretendia traçar estratégias para inserções de políticas de estruturação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) com a finalidade de melhorias na educação básica nacional.

Diante do sucesso já nas primeiras edições com adesões de instituições de ensino superior públicas e privadas para utilização das notas em seus exames de seleção, foram implementadas mudanças ano após ano como políticas de acessibilidade, programas de bolsas de estudos em instituições privadas de ensino superior, como o Programa Universidade para Todos – PROUNI – criado em 2004. Em 2008 é que surge a ideia do vestibular unificado para ingresso nas instituições federais e em 2009 cria-se o Sistema de Seleção Unificada – SISU. A seleção unificada pelo SISU começa a valer em janeiro de 2010.

A partir da criação do SISU, a preparação de candidatos a vagas nas instituições federais de ensino muda, dado o nível de exigência e peso para cada área do conhecimento estabelecidos pela matriz de referência. Se preparar para o ENEM passa a ser o foco principal dos alunos nos últimos anos do ensino médio ou para quem já terminou e pretende ingressar no ensino superior ou se autoavaliar.

Inicialmente a prova contava com 63 questões e a redação. A criação do SISU trouxe mudanças importantes quanto à matriz de referência. Na nova formatação o ENEM passou a contar com 180 questões objetivas, 45 para cada área do conhecimento, e a redação. Com essa mudança a área de Matemática e suas tecnologias representa 25% das questões objetivas e ainda tem presença importante na área de ciências da natureza e suas tecnologias. Das questões da área de Matemática a parte de Geometria tem papel relevante para um bom desempenho no ENEM.

Essas informações sobre o ENEM e o SISU podem ser encontradas em [10] e [11].

Diante do exposto buscou-se escrever um texto sobre conteúdos básicos de Geometria Plana e, desta forma, contribuir com o estudo daqueles que almejam uma vaga no Ensino Superior. Em particular, temos como público alvo professores e alunos que fazem parte do Programa de Extensão Edifique Ações, da Universidade Federal do Cariri, que tem como propósito preparar alunos para as provas do ENEM. Vale ressaltar que o cursinho preparatório é oferecido de forma gratuita e disponibiliza 50 vagas para alunos que cursaram integralmente o ensino médio em escolas públicas, conforme [18].

Assim, buscamos, neste texto, traçar o perfil das questões, destacar os conteúdos mais relevantes de Geometria e, em sequência, dissertar sobre alguns destes conteúdos.

Alguns trabalhos de mestrado do PROFMAT foram realizados baseados no ENEM e em Vestibulares, conforme constam nas referências deste trabalho, e serviram de inspiração. As referências [19] e [21] têm como intuito preparar alunos para os vestibulares da Universidade Estadual do Ceará – UECE e do Instituto Tecnológico de Aeronáutica – ITA, respectivamente. São ideias similares e abordam alguns conteúdos também presentes no ENEM.

As referências [20], [22], [23] e [24] são baseadas no ENEM, sendo que as duas últimas possuem maior ligação com este trabalho, pois os seus autores, Érica Ferreira de Alcântara e Matheus Siqueira Araújo Dantas, juntamente com o autor deste trabalho, fizeram uma análise das questões dos ENEM das edições de 2009 a 2019.

Para melhor compreensão, este trabalho foi dividido em três Capítulos. No Capítulo 2 há um breve histórico sobre o ENEM e sua evolução até se tornar o meio de seleção para as Instituições Federais de Ensino Superior – IFES, uma explicação sobre a matriz de referência mostrando a importância da Geometria nas provas do ENEM e as tabelas com resultados da análise das questões.

No Capítulo 3 são abordados os conteúdos básicos de Geometria Plana, considerados fundamentais para um bom desempenho nas provas e que servem de base para conteúdos subsequentes. Iniciamos a abordagem dos conteúdos com noções básicas sobre ponto, reta e plano e seguimos com uma seção dedicada a conhecimentos fundamentais sobre ângulos. Por fim dedicamos duas seções ao estudo de triângulos, dada a sua grande importância para as provas do ENEM e para o estudo de Geometria. Nessa abordagem, apresentamos resultados essenciais, alguns são acompanhados de uma demonstração e outros não. Porém, as referências são indicações para o leitor que tenha interesse em um aprofundamento do conteúdo. Encerramos o Capítulo 3 com uma seção de questões, coletadas do ENEM, em que foram explorados os conteúdos trabalhados, sendo essas questões acompanhadas de uma proposta de solução comentada.

2 O ENEM

Neste capítulo temos como propósito apresentar breve histórico do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, alguns dados da Matriz de Referência do ENEM e resultados da análise das questões de mátemática das edicões do ENEM realizadas nos anos 2009 a 2019.

O texto, neste capítulo, foi baseado nas referências [10], [11], [13], [20], [22] [23] e [24].

Em 1998 foi criado o Exame Nacional do Ensino Médio ENEM, pelo Ministério da Educação, com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. O ENEM é realizado anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP. Desde a sua criação as notas do ENEM foram utilizadas para ingresso de alunos na educação superior. Nesse primeiro ano do exame, conforme [11], 157.211 estudantes se inscreveram e as provas foram realizadas em 184 municípios.

Na primeira edição duas instituições utilizaram as notas nas seleções de ingresso. Dada a credibilidade, em 1999, segundo ano, já houve adesão de 93 instituições para uso das notas. A partir daí investimentos e aperfeiçoamentos de execução foram adotados como incentivos à acessibilidade e inscrições pela internet, por exemplo.

Em 2002 já atingia quase dois milhões de participantes, cerca de dez vezes mais inscritos que no ano da sua criação. Em 2004, com a criação do Programa Universidade para Todos (ProUni), deu-se início ao uso das notas do ENEM para concessão de bolsas de estudos integrais e parciais aos participantes. Em 2005, o número de inscrições chegou a 3.004.491 e desse total de participantes, 67% buscavam ingressar na educação superior. A realização das provas já contava com 729 municípios.

Até 2008 já acontecera várias melhorias e mudanças. Mas, é em 2009 que ocorre a grande mudança com a criação do Sistema de Seleção Unificada (SISU), anunciado no ano anterior, como meio de seleção para ingresso nas instituições federias de ensino superior. De 1998 até 2008 as provas do ENEM eram compostas de 63 questões e uma redação e não eram avaliadas línguas estrangeiras. O ENEM muda de formato e a partir de 2009 passa a ter 180 questões objetivas, 45 para cada área do conhecimento, e a redação, também passa a avaliar língua inglesa ou espanhola de acordo a opção do candidato. A aplicação passa a ser em dois dias e o exame começa a certificar a conclusão do ensino médio. Além disso, as matrizes de referência são reformuladas com base nas Matrizes de Referência do Exame Nacional para Certificação de Competências de Jovens e Adultos (Encceja). Nesta edição, 4.138.025 pessoas se inscreveram no ENEM, aplicado em 5 e 6 de dezembro, em 1.830 cidades.

Em 2013, pela primeira vez, quase todas as instituições federais adotam o ENEM como critério de seleção. Entre parcerias com outros programas de incentivo à educação e pesquisas, como a concessão de bolsas de estudos do programa Ciências sem Fronteiras, o ENEM passa a ser a porta de entrada para instituições federais de ensino, pesquisa e extensão.

2.1 A Matriz de Referência do ENEM

A matriz de referência do ENEM é um documento que apresenta os objetivos de avalição geral e específicos das áreas do conhecimento. É dividida em três partes: 1) eixos cognitivos, que expressam os objetivos comuns a todas as áreas do conhecimento; 2) matrizes de referências para cada área do conhecimento, divididas em competências e habilidades; 3) anexo de objetos de conhecimento associados às matrizes individuais de cada área.

A matriz de referência específica de matemática e suas tecnologias divide essa área do conhecimento em sete partes. Cada parte está associada a uma competência e a algumas habilidades. No total são trinta habilidades distribuídas entre as competências.

No Anexo de objetos de conhecimentos de matemática e suas tecnologias, os conteúdos foram divididos em cinco grupos. Cada grupo pode se associar a uma ou mais competências e pode haver competência que abrange os cinco grupos. Vamos destacar os conteúdos dos cinco grupos associados às sete competências, conforme [12].

I. **Conhecimentos numéricos:** operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

II. **Conhecimentos geométricos:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhanças de triângulos; teorema de Thales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

III. **Conhecimentos de estatística e probabilidade:** representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

IV. **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

V. **Conhecimentos algébricos/geométricos:** plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Das competências, duas delas estarão diretamente ligadas aos conteúdos que serão abordados neste trabalho – os objetos de conhecimento relacionados no grupo (II): a da área dois da matriz de referência, com as habilidades de 6 a 9, e da área três com as habilidades 10 a 14. A matriz na íntegra pode ser encontrada no portal eletrônico: http://portal.inep.gov.br/enem.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

- H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
- H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
- H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
- H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

- H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
- H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
- H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
- H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
- H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

2.2 Análise das Questões de Matemática do ENEM

Passemos a analisar as questões de matemática das provas do ENEM. Inicialmente, para melhor entendimento, vamos enumerar os objetos de conhecimentos geométricos de acordo com o anexo de conteúdos da matriz de referência e às competências das áreas dois e três.

1. Características das figuras geométricas planas e espaciais;
2. Grandezas, unidades de medida e escalas;
3. Comprimentos, áreas e volumes;
4. Ângulos;
5. Posições de retas;
6. Simetrias de figuras planas ou espaciais;
7. Congruência e semelhanças de triângulos;
8. Teorema de Thales;
9. Relações métricas nos triângulos;
10. Circunferências;
11. Trigonometria do ângulo agudo.

A análise das questões de matemática das provas do ENEM entre os anos 2009 a 2019 foi realizada pelo autor e pelos alunos do PROFMAT da UFCA, turma 2018.1, Érica Ferreira de Alcântara e Matheus Siqueira Araújo Dantas, que elaboraram, também, seus trabalhos conclusão baseados no ENEM. A aluna Érica abordou os conteúdos de Conhecimentos Numéricos e apresentou seu trabalho de conclusão, com o Título *"A Matemática Básica em Provas do ENEM"*, em 10 de julho de 2020. O aluno Matheus abordou Conhecimentos Algébricos e apresentou seu trabalho de conclusão, com o Título *"Um Estudo Sobre Funções nas Provas do ENEM"*, em 31 de julho de 2020.

Nessa análise foi possível notar questões envolvendo conteúdos de mais de um dos grupos. Logo, consideramos os conteúdos mais relevantes para a solução da questão analisada. As Tabelas 2.1 e 2.2 a seguir apresentam os resultados dessa Análise.

Tabela 2.1: Análise das questões de matemática nas provas do ENEM de 2009 a 2019.

Objetos de Conhecimento	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	Total Geral
Conhecimentos Algébricos	4	7	6	5	5	5	7	8	7	4	11	69
Conhecimentos Algébricos Geométricos	0	0	1	0	2	1	1	1	2	1	1	10
Conhecimentos de Estatística e Probabilidade	11	9	9	10	7	8	7	7	7	7	6	88
Conhecimentos Geométricos	16	17	12	14	13	15	17	13	14	15	13	159
Conhecimentos Numéricos	14	12	17	16	18	16	13	16	15	18	14	169
TOTAL GERAL	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	495

Fonte: Autor, baseado nas referências [23] e [24].

A Tabela 2.2 refere-se as porcentagens dos quantitativos de questões por objetos de conhecimento, calculadas de acordo com a Tabela 2.1.

Tabela 2.2: Porcentagem por objetos de conhecimento no período levantado.

Objetos de Conhecimento	Total Geral	Média Anual	% Geral
Conhecimentos Algébricos	69	6,3	13,9
Conhecimentos Algébricos Geométricos	10	0,9	2,0
Conhecimentos de Estatística e Probabilidade	88	8,0	17,8
Conhecimento Geométricos	159	14,5	32,1
Conhecimentos Numéricos	169	15,4	34,1
Total Geral	495	45	100,0

Fonte: Autor, baseado nas referências [23] e [24].

Na sequência, seguem as Tabelas 2.3 a 2.7 referentes as 159 questões que avaliaram conhecimentos de Geometria no período de 2009 a 2019, que tem como propósito mostrar a relevância dos conteúdos mais explorados nas provas do ENEM, e também para ajudar o leitor encontrar as questões relativas a algum conteúdo desejado.

Nas questões, destacamos de um a três conteúdos de Geometria considerados os mais relevantes para a solução. A 1ª coluna das tabelas contém a ordem das 159 questões de Geometria no período avaliado, a 2ª coluna contém os anos de realização do ENEM, a 3ª contém os números da questões referentes ao cadernos amarelos das provas a cada ano e as 4ª, 5ª e 6ª colunas contêm os conhecimentos geométricos destacados.

Tabela 2.3: Análise das questões do ENEM - Caderno Amarelo (Parte 1).

Questões	ENEM	Questão Nº	Contéudo 1	Contéudo 2	Contéudo 3
1	2009	136	Grandezas		
2	2009	141	Áreas		
3	2009	145	Ângulos		
4	2009	149	Círculo		
5	2009	151	Congruência	Poliedro	Prisma
6	2009	154	Comprimentos	Semelhança	
7	2009	155	Grandezas	Escalas	
8	2009	157	Volumes	Esfera	Cubo
9	2009	163	Grandezas		
10	2009	164	Áreas	Círculo	Retângulo
11	2009	165	Ângulos		
12	2009	168	Áreas	Semelhança	Escalas
13	2009	169	Grandezas		
14	2009	170	Volumes	Pirâmide	
15	2009	178	Pentágono	Pirâmide	
16	2009	180	Volumes		
17	2010	137	Cone	Cilindro	Planificação
18	2010	138	Circulo	Escalas	Semelhança
19	2010	139	Volumes	Cubo	Paralelepípedo
20	2010	144	Grandezas		
21	2010	146	Volumes		
22	2010	147	Escalas	Grandeza	Perpendicularismo
23	2010	150	Áreas	Retângulo	Perímetro
24	2010	151	Volumes	Cilindro	Semelhança
25	2010	152	Áreas	Semelhança	
26	2010	153	Áreas	Semelhança	
27	2010	157	Volumes	Cilindro	Paralelepípedo
28	2010	158	Volumes	Cilindro	Grandezas
29	2010	162	Volumes	Cilindro	Semelhança
30	2010	164	Comprimentos	Incentro	Bissetriz
31	2010	165	Comprimentos	Círculo	
32	2010	168	Volumes	Cone	Esfera

Fonte: Autor.

Tabela 2.4: Análise das questões do ENEM - Caderno Amarelo (Parte 2).

Questões	ENEM	Questão Nº	Conteúdo 1	Conteúdo 2	Conteúdo 3
33	2010	179	Volumes	Cubo	
34	2011	136	Grandezas	Conversão	Medidas
35	2011	140	Cone		
36	2011	141	Medidas	Conversão	
37	2011	142	Comprimentos	Áreas	Perímetro
38	2011	143	Escalas		
39	2011	144	Cubo	Pirâmide	
40	2011	145	Volumes	Medidas	Proporcionalidade
41	2011	147	Escalas	Comprimentos	
42	2011	154	Ângulos	Polígonos	
43	2011	158	Ângulos		
44	2011	168	Volumes	Cilindro	Proporcionalidade
45	2011	170	Comprimentos	Círculo	Perímetro
46	2012	137	Escalas		
47	2012	139	Volumes		
48	2012	141	Cilindro	Prisma	Planificação
49	2012	147	Áreas		
50	2012	148	Volumes	Paralelepípedo	
51	2012	149	Áreas		
52	2012	151	Áreas		
53	2012	154	Perpendicularismo	Projeção	
54	2012	161	Escalas		
55	2012	162	Perímetro	Losango	Círculo
56	2012	165	Comprimentos	Círculo	Quadrado
57	2012	166	Perpendicularismo	Projeção	
58	2012	176	Volumes	Semelhança	
59	2012	180	Ângulos		
60	2013	144	Áreas	Semelhança	Proporcionalidade
61	2013	145	Volumes	Cilindro	
62	2013	156	Áreas	Trigonometria	
63	2013	159	Volumes		
64	2013	160	Simetria		

Fonte: Autor.

Tabela 2.5: Análise das questões do ENEM - Caderno Amarelo (Parte 3).

Questões	ENEM	Questão Nº	Contéudo 1	Contéudo 2	Contéudo 3
65	2013	163	Grandezas	Medidas	Conversão
66	2013	167	Escalas		
67	2013	169	Cone		
68	2013	171	Áreas		
69	2013	172	Comprimentos	Semelhança	
70	2013	173	Perpendicularismo	Projeção	
71	2013	178	Comprimentos	Círculo	
72	2013	180	Escalas		
73	2014	136	Áreas	Escala	Semelhança
74	2014	137	Comprimentos	Círculo	Perímetro
75	2014	140	Cone	Planificação	
76	2014	145	Paralelepípedo	Planificação	Comprimentos
77	2014	146	Comprimentos	Áreas	Volumes
78	2014	153	Grandezas		
79	2014	154	Perpendicularismo	Projeção	
80	2014	158	Volumes	Cilindro	
81	2014	160	Escalas	Volumes	Semelhança
82	2014	163	Áreas		
83	2014	166	Triângulo	Existência	
84	2014	171	Volumes	Prisma	
85	2014	173	Volumes	Cubo	
86	2014	178	Áreas	Grandezas	
87	2014	179	Volumes		
88	2015	137	Volumes		
89	2015	140	Comprimentos	Círculo	Triângulo
90	2015	143	Comprimentos	Áreas	Volumes
91	2015	144	Comprimentos	Semelhança	
92	2015	145	Áreas		
93	2015	148	Áreas		
94	2015	151	Áreas	Círculo	
95	2015	153	Grandezas		
96	2015	156	Poliedros	Faces	

Fonte: Autor.

Tabela 2.6: Análise das questões do ENEM - Caderno Amarelo (Parte 4).

Questões	ENEM	Questão Nº	Conteúdo 1	Conteúdo 2	Conteúdo 3
97	2015	161	Áreas	Retângulo	Círculo
98	2015	163	Volumes	Cilindro	
99	2015	164	Póligonos		
100	2015	167	Volumes	Cilindro	Cubo
101	2015	171	Áreas	Círculo	
102	2015	172	Volumes		
103	2015	174	Áreas	Volumes	
104	2015	179	Volumes	Paralelepípedo	
105	2016	138	Áreas	Retângulo	
106	2016	143	Escalas		
107	2016	144	Volumes		
108	2016	145	Áreas	Retângulo	
109	2016	146	Volumes	Cilindro	
110	2016	148	Escalas		
111	2016	149	Comprimentos	Esfera	Triângulo
112	2016	152	Poliedros		
113	2016	154	Grandezas		
114	2016	157	Comprimentos	Projeção	
115	2016	158	Volumes	Paralelepípedo	
116	2016	167	Áreas		
117	2016	179	Congruências	Triângulo	
118	2017	137	Áreas		
119	2017	147	Ângulos		
120	2017	150	Volumes		
121	2017	153	Comprimentos		
122	2017	154	Poliedros	Prisma	
123	2017	156	Volumes		
124	2017	157	Comprimentos	Círculo	Triângulo
125	2017	163	Trigonometria		
126	2017	165	Volumes	Escala	Semelhança
127	2017	168	Volumes		
128	2017	172	Áreas	Semelhança	

Fonte: Autor.

Tabela 2.7: Análise das questões do ENEM - Caderno Amarelo (Parte 5).

Questões	ENEM	Questão Nº	Contéudo 1	Contéudo 2	Contéudo 3
129	2017	175	Comprimentos	Círculo	
130	2017	176	Comprimentos		
131	2017	180	Comprimentos	Círculo	Esfera
132	2018	136	Grandezas		
133	2018	139	Ângulos	Triângulo	
134	2018	141	Escalas		
135	2018	142	Áreas		
136	2018	146	Áreas		
137	2018	148	Comprimentos	Círculo	
138	2018	155	Ângulos		
139	2018	157	Comprimentos	Círculo	
140	2018	158	Volumes		
141	2018	169	Comprimentos		
142	2018	170	Trigonometria	Círculo	Cilindro
143	2018	174	Perpendicularismo	Projeção	
144	2018	175	Triângulo	Semelhança	
145	2018	177	Áreas		
146	2018	179	Áreas	Círculo	
147	2019	136	Volumes		
148	2019	139	Perpendicularismo	Projeção	
149	2019	146	Áreas	Círculo	
150	2019	149	Comprimentos	Círculo	
151	2019	151	Áreas	Círculo	Retângulo
152	2019	152	Volumes		
153	2019	161	Poliedros		
154	2019	162	Escalas		
155	2019	167	Medidas	Conversão	
156	2019	169	Volumes		
157	2019	171	Triângulo		
158	2019	178	Volumes	Cilindro	
159	2019	179	Áreas		

Fonte: Autor.

A Tabela 2.8 é um resumo das Tabelas 2.3 a 2.7. Ela contêm a ordem de destaque conforme tabelas 2.3 a 2.7 como necessário para as soluções das questões, o conteúdo e o número de questões em que foram observados.

Tabela 2.8: Conteúdos mais destacados (tabelas 2.3 a 2.7) nas provas do ENEM.

Ordem de destaque	Conteúdo	N. Questões
1º	Volumes	43
2º	Áreas	36
3º	Comprimentos	26
4º	Círculo	23
5º	Escalas	17
6º	Semelhança	16
7º	Cilindro	14
8º	Grandezas	14
9º	Ângulos	8
10º	Triângulos	8
11º	Perpendicularismo	7
12º	Projeção	7
13º	Cubo	6
14º	Paralelepípedo	6
15º	Retângulo	6
16º	Cone	5
17º	Medidas	5
18º	Perímetro	5
19º	Poliedros	5
20º	Conversão	4

Fonte: Autor.

Dada a importância da Geometria para as provas do ENEM, no capítulo seguinte serão apresentados alguns conteúdos, observados no ENEM, considerados essenciais para compreensão de conteúdos subsequentes e questões com soluções comentadas.

3 TÓPICOS DE GEOMETRIA PLANA

Nas provas do ENEM entre 2009 e 2019, cerca de 32% das questões de matemática exploraram conhecimentos geométricos, algo em torno de 14 das 45 questões a cada exame. Esses dados mostram a importância da Geometria nessas provas.

A Geometria está em toda parte, em casa, nas vias públicas, nas artes, em diversas ciências como a engenharia, a arquitetura, a astronomia, em trabalhos como marcenaria, topografia e outros. De fato, analisando as questões das provas, podemos observar que, em grande parte delas, envolve situações do cotidiano.

Logo, iniciaremos a explanação de conteúdos com conceitos básicos envolvendo ponto, reta e plano, e em seguida, ângulos. Em sequência faremos um estudo sobre triângulos, dada a importância desse conteúdo no ENEM e para o estudo de Geometria. Mas antes, vamos falar brevemente sobre a história da Geometria.

Sobre a origem da Geometria não há uma precisão de data ou de lugar. Segundo [14], afirmações sobre a origem da matemática, seja da Aritmética, seja da Geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever. Foi somente nos últimos seis milênios, num período que pode ter coberto milhares de milênios que o homem se mostrou capaz de pôr seus registros e pensamentos de forma escrita. Para informações sobre a pré-história dependemos de interpretações baseadas em poucos artefatos que restam, de evidência fornecida pela moderna antropologia e de extrapolação retroativa, conjectural a partir dos documentos que sobreviveram.

Heródoto e Aristóteles, atribuem a origem da Geometria aos egípcios, devido a necessidade de medições de terras de acordo com as variações das cheias do rio Nilo. Da ideia de necessidade de medir terras, essa área da matemática recebe o nome Geometria.

Para os gregos atribuírem a origem da Geometria aos egípcios, provavelmente reconheciam avanços nessa área em relação a outras civilizações. Mas os gregos deram sua contribuição, desenvolvendo e publicando os conhecimentos em livros. Destaca-se o livro *"Os Elementos"*, escrito por Euclides, que influencia a Geometria até os dias atuais, composto de treze livros ou capítulos, dos quais os seis primeiros são sobre Geometria Plana elementar e os três últimos principalmente sobre Geometria Espacial.

Para o leitor interessado na obra *"Os Elementos"*, indicamos as referências [14] e [25].

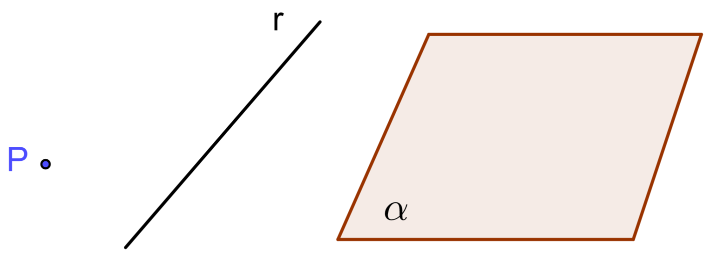
Vamos agora explanar os conteúdos objetos deste trabalho, começando com as noções básicas.

3.1 Noções Primitivas

Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [1], [2], [4], [6], [8] e [9].

Na Geometria, ponto, reta e plano são algumas noções aceitas sem definição, e por isso são chamadas de noções primitivas. Essas noções são a base para a construção de todo conhecimento geométrico.

Figura 1: Ponto, reta e plano.



Fonte: Autor.

Fonte: Autor.

Em geral, denotamos pontos por letras maiúsculas, retas por letras minúsculas e planos por letras gregas. Na Figura 1 temos o ponto A, a reta r e o plano α.

Essas noções são utilizadas para fixar **axiomas** ou **postulados** que são **propriedades** ou **afirmações** aceitas sem demonstrações. Vejamos alguns postulados que serão importantes para os próximos conteúdos abordados.

Postulado 3.1 *Dois pontos distintos no plano determinam uma única reta.*

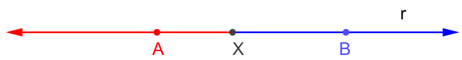
Sejam A e B pontos distintos no plano e r a reta determinada por eles. Denotamos a reta r por $\overleftrightarrow{AB}$ ou escrevemos $r = \overleftrightarrow{AB}$.

Figura 2: Reta determinada por dois pontos.

Fonte: Autor.

Se tomarmos X um ponto pertencente a reta $\overleftrightarrow{AB}$, que esteja entre os pontos A e B, X divide a reta em duas partes, as quais chamamos **semirretas**, e as denotamos uma por semirreta $\overrightarrow{XB}$ com origem X passando pelo ponto B e a outra por semirreta $\overrightarrow{XA}$ também com origem no ponto X passando pelo ponto A.

Figura 3: Semirretas $\overrightarrow{XA}$ e $\overrightarrow{XB}$.

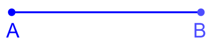


Fonte: Autor.

É natural pensarmos que se um ponto divide uma reta em duas partes, dois ou mais pontos distintos a divide em várias partes. Diante disso vamos a definição de segmento de reta.

Definição 3.2 *Dados dois pontos distintos A e B sobre uma reta r, definimos por* ***segmento de reta*** *AB, indicado por AB, o conjunto formado pelos pontos A e B e pela parte situada entre A e B, sendo A e B seus extremos.*

Figura 4: Segmento de reta AB.

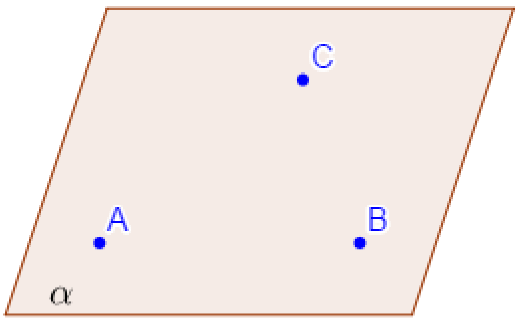


Fonte: Autor.

Para denotarmos a medida de um segmento AB, escrevemos $\overline{AB}$.

Postulado 3.3 *Três pontos distintos não colineares determinam um único plano.*

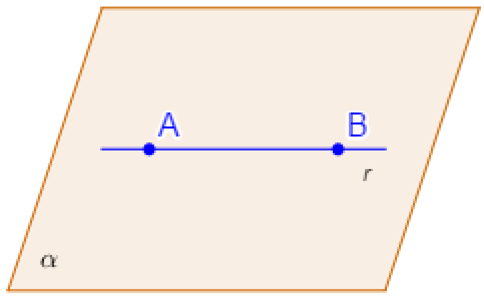
Figura 5: Plano α determinado pelos pontos A, B e C.



Fonte: Autor.

Postulado 3.4 *Se dois pontos distintos estão contidos num plano, a reta r determinada por estes dois pontos também está contida nesse plano.*

Figura 6: Reta $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$.



Fonte: Autor.

A seguir falaremos sobre posições relativas entre ponto e reta, duas retas num mesmo plano, uma reta e um plano.

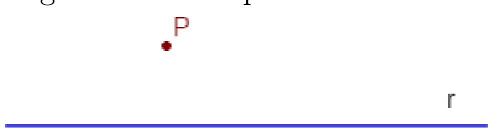
A relação entre um ponto e uma reta é bem simples.

Postulado 3.5 *Dados um ponto P e uma reta r num plano, há apenas duas possibilidades: ou o ponto P pertence à reta r ou P não pertence à reta.*

Figura 7: P pertence à reta r.

Fonte: Autor.

Figura 8: P não pertence à reta r.



Fonte: Autor.

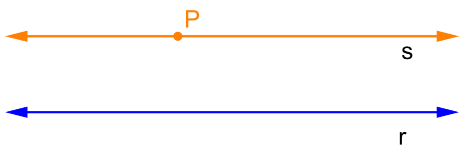
Numa reta há infinitos pontos, assim, é possível afirmar que fora dela também há infinitos pontos.

Definição 3.6 *Dadas duas retas r e s num plano, dizemos que r e s são paralelas se não possuem nenhum ponto em comum.*

Para denotar duas retas paralelas r e s, escrevemos $r \parallel s$.

Postulado 3.7 *Por um ponto P fora de uma reta r passa somente uma reta s paralela a r.*

Figura 9: r e s são retas paralelas, $r \parallel s$.

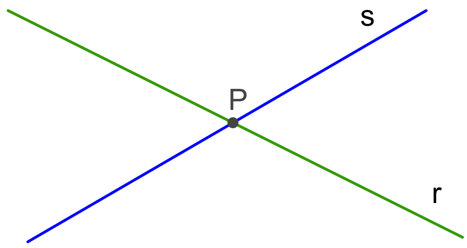


Fonte: Autor.

Definição 3.8 *Dadas duas retas r e s num plano, dizemos que r e s são concorrentes se possuem um único ponto P em comum.*

Sejam r e s retas concorrentes e P o ponto em comum a essas retas, dizemos que a intersecção de r e s é igual a P, ou seja, $r \cap s = \{P\}$.

Figura 10: Retas r e s concorrentes com P.



Fonte: Autor.

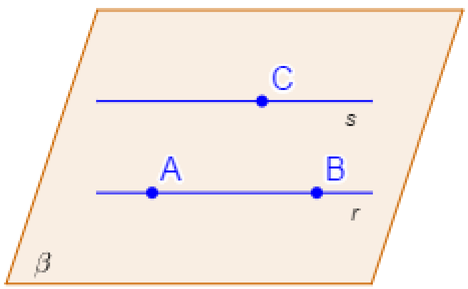
Proposição 3.9 *Dadas duas retas distintas num plano, há somente duas possibilidades de relação entre elas: ou são paralelas, ou são concorrentes.*

A prova dessa proposição pode ser encontrada em [4].

A seguir, apresentamos dois resultados envolvendo os conceitos de retas paralelas e retas concorrentes.

Teorema 3.10 *Duas retas parelelas determinam um único plano.*

Figura 11: Plano determinado por duas retas paralelas.



Fonte: Autor.

Demonstração:

Sejam r e s duas retas paralelas contidas em um plano β. Considere os pontos A e B em r, com A diferente de B, e C um ponto em s.

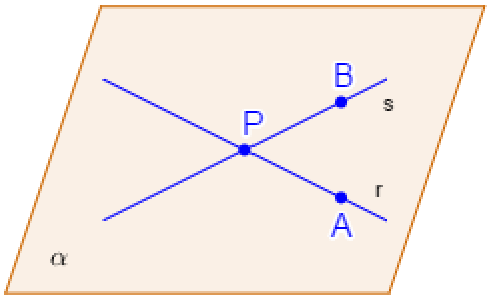
Veja que A, B e C são distintos e não colineares pois r e s são paralelas.

Pelo postulado 3.3, A, B e C determinam um único plano α. Como A, B e C são pontos do plano β, então $\alpha = \beta$.

Portano r e s determinam um único plano. ■

Teorema 3.11 *Duas retas concorrentes determinam um único plano.*

Figura 12: Plano determinado por duas retas concorrentes.



Fonte: Autor.

A demonstração é similar à do teorema anterior.

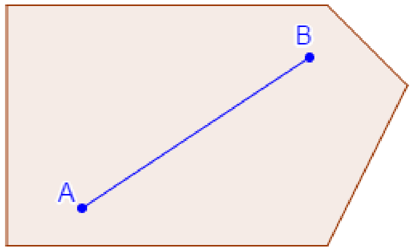
3.2 Ângulos

Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [1], [2], [4], [8] e [9].

Para a compreensão do conceito de ângulos, necessitamos do conceito de regiões planas convexas e não convexas. Vejamos.

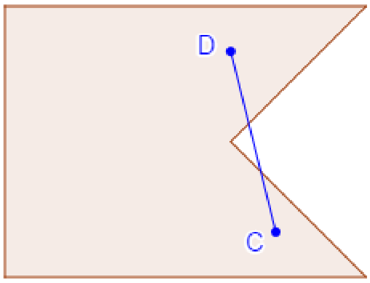
Definição 3.12 *Uma **região** $\mathcal{R}$ de um plano é chamada **convexa** se, para quaisquer dois pontos A, B pertencentes a $\mathcal{R}$, o segmento de reta AB estiver contido em $\mathcal{R}$. Caso contrário, diremos que $\mathcal{R}$ é uma **região não convexa**.*

Figura 13: Região convexa.



Fonte: Autor.

Figura 14: Região não convexa.



Fonte: Autor.

Como podemos notar, o segmento AB na Figura 13 está contido na região limitada. Já na Figura 14, uma parte do segmento CD não pertence à região limitada, o que é suficiente para classificá-la como uma região não convexa.

Definição 3.13 *Dadas duas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *no plano, um* ***ângulo*** *(ou* ***região angular****) de vértice* O *e lados* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas* $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$*.*

Figura 15: Regiões angulares no plano.

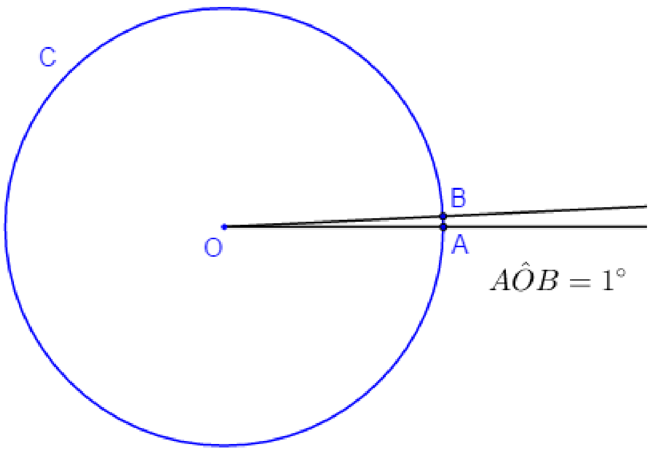
Fonte: Autor, baseada na referência [4].

Pela definição 3.12, o ângulo da esquerda, na Figura 15, é um ângulo convexo e o da direta um ângulo não convexo. Denotamos um ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ por $\angle AOB$ (**lê-se** ângulo AOB). Assumiremos que todo ângulo possui uma medida. Assim a medida do ângulo AOB será denotada por $A\hat{O}B$, por letras maiúsculas utilizando apenas o vértice do ângulo como $\hat{O}$ (quando não houver outro ângulo com o mesmo vértice) ou também por letras gregas.

É importante destacarmos, no texto, sobre qual região estamos nos referindo: se é a região convexa ou a não convexa. Isto pode ser feito através da medida da região angular como veremos a seguir.

A principal unidade de medida que utilizamos para medir um ângulo é o **grau** (símbolo: $^\circ$). Tomando um círculo qualquer com centro no vértice O e dividindo-o em 360 arcos iguais, cada um desses arcos mede 1° (um grau). Na Figura 16, representamos um desses arcos de medida 1°, $A\hat{O}B = 1^\circ$.

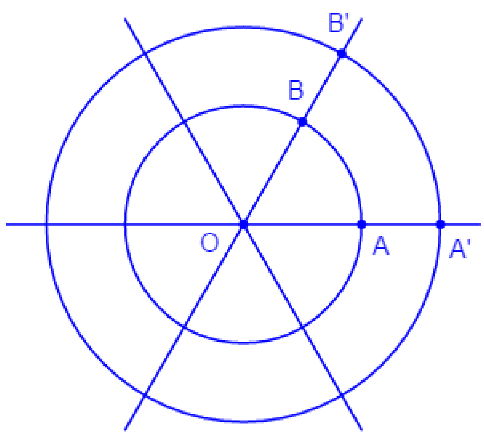
Figura 16: Unidade de medida de ângulos.



Fonte: Autor, baseada na referência [4].

A definição de grau não depende da medida do raio do círculo escolhido. Para isso, considere a Figura 17, onde um círculo de raio $\overline{OA}$ é dividido em seis arcos iguais, depois outro de raio $\overline{OA'} \neq \overline{OA}$ também dividido em seis arcos.

Figura 17: Círculos distintos de centro O divididos na mesma quantidade de arcos.

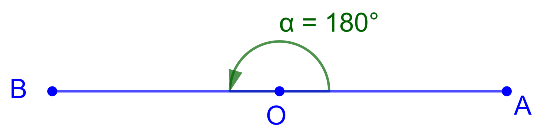


Fonte: Fonte: Autor, baseada na referência [4].

Note que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$. Então, a região angular limitada por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, por exemplo, é a mesma limitada por $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB'}$, ou seja, $\angle AOB = \angle A'OB'$.

Da definição de grau, um círculo completo é dividido em 360 partes cada uma com medida de um grau. Assim um círculo completo corresponde a $360°$. Classificamos os ângulos conforme a sua medida. Primeiro, notemos que se um círculo completo corresponde a $360°$, a metade de um círculo corresponde a $180°$. Esse ângulo de medida $180°$ é chamado de **ângulo raso ou de meia volta**. O ângulo raso pode ser definido como um ângulo formado por duas semirretas opostas.

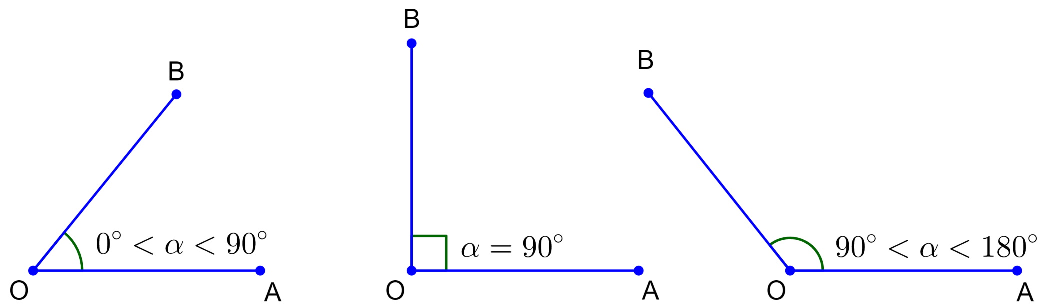
Figura 18: Ângulo raso ou de meia volta, $\alpha = 180°$.



Fonte: Autor.

Um ângulo AOB de medida α, é **agudo** quando $0° < \alpha < 90°$, **reto** quando $\alpha = 90°$ e **obtuso** quando $90° < \alpha < 180°$.

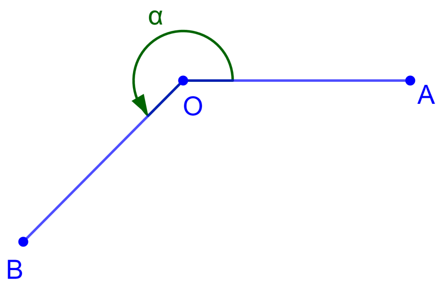
Figura 19: Ângulos agudo, reto e obtuso.



Fonte: Autor, baseada na referência [4].

Se α é a medida de um ângulo AOB, tal que $180° < \alpha < 360°$, o ângulo AOB é chamado **côncavo**, isto é, a região angular é não convexa. Uma observação é que ângulos côncavos são pouco utilizados.

Figura 20: Ângulo côncavo, $180° < \alpha < 360°$.



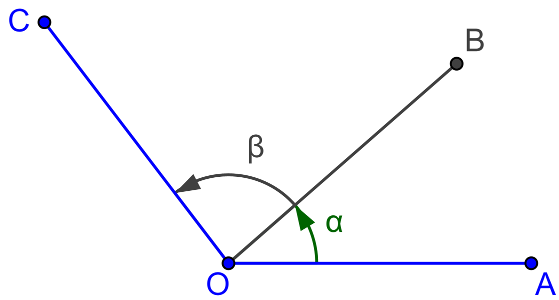
Fonte: Autor.

Observação 3.14 *Quando duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ coincidem, a medida do ângulo AOB é $0°$.*

Às vezes associamos dois ângulos por alguma propriedade. A seguir veremos alguns casos importantes que serão utilizados mais adiante neste trabalho. Começando pela definição de ângulos adjacentes.

Definição 3.15 ***Ângulos adjacentes*** *são dois ângulos consecutivos que não possuem pontos internos em comum.*

Figura 21: Ângulos adjacentes.



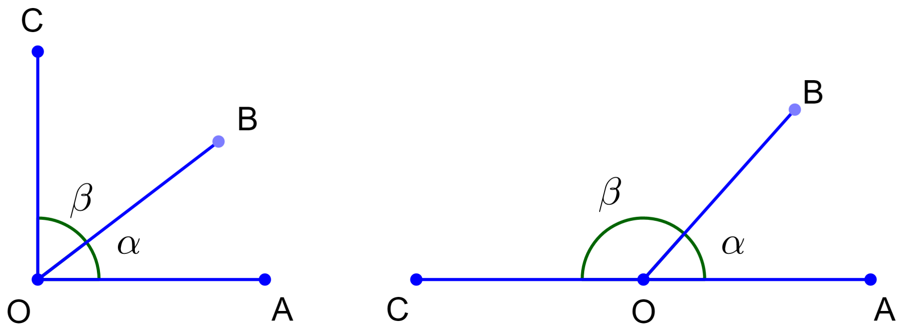
Fonte: Autor.

Observe a Figura 21. Note que a medida do ângulo AOC é igual a soma das medidas dos ângulos adjacentes AOB e BOC, ou seja, $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = \alpha + \beta$.

Vamos agora a dois casos especiais que serão úteis para obtenção de resultados importantes: ângulos complementares e ângulos suplementares.

Definição 3.16 *Sejam dois ângulos AOB e AOC cujas medidas são α e β respectivamente. Se $\alpha + \beta = 90°$, dizemos que AOB e AOC são **ângulos complementares**. Se $\alpha + \beta = 180°$, dizemos que AOB e AOC são **ângulos suplementares**.*

Figura 22: Ângulos complementares, $\alpha + \beta = 90°$ e suplementares, $\alpha + \beta = 180°$.



Fonte: Autor.

Exemplo 3.17 *Sejam α e β, respectivamente, as medidas do ângulo complementar e do suplementar do ângulo cuja medida é $75°$. Calcule α e β.*

Solução:
Como a soma das medidas de dois ângulos complementares é igual a $90°$ e a soma das medidas de dois ângulos suplementares é igual a $180°$, então

$$\alpha + 75° = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - 75° \Rightarrow \alpha = 15°;$$
$$\beta + 75° = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 75° \Rightarrow \beta = 105°.$$

Assim, dizemos que $15°$ é a medida do complementar e $105°$ é a medida suplementar do ângulo de medida $75°$.
Também podemos dizer que $75°$ é a medida do complementar do ângulo cuja medida é $15°$ e suplementar do ângulo cuja medida é $105°$. ◇

Exemplo 3.18 *Sabendo que a medida do suplementar de um ângulo é o triplo da medida do seu complementar, calcule a medida desse ângulo.*

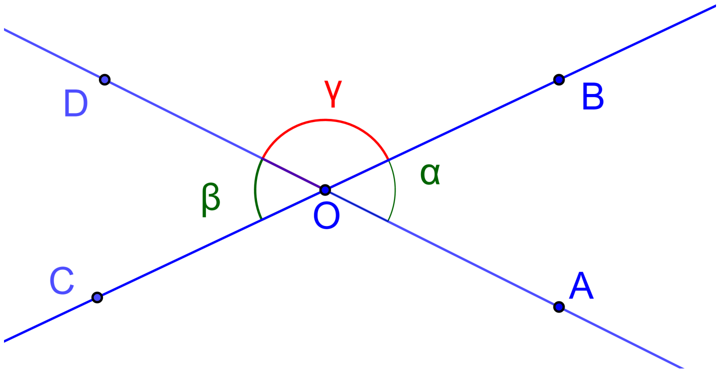
Solução:
Seja α a medida do ângulo procurado, então seu complementar mede $90° - \alpha$.
Como o suplementar é o triplo do complementar, então mede $3(90° - \alpha) = 270° - 3\alpha$.
Logo, somando α e $(270° - 3\alpha)$ que são medidas de ângulos suplementares obtemos

$$\alpha + 270° - 3\alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°.$$

Portanto, $\alpha = 45°$ é o valor procurado. ◇

Definição 3.19 ***Ângulos opostos pelo vértice (OPV)*** *são ângulos em que os lados de um são formados pelas semirretas opostas aos lados do outro.*

Figura 23: Ângulos opostos pelo vétice.



Fonte: Autor.

Proposição 3.20 *Dois ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida.*

Demonstração:
Conforme Figura 23 os ângulos AOB, de medida α, e COD, de medida β, são opv.
Denotemos por γ a medida de BOD. Os ângulos AOB e BOD são suplementares, logo $\alpha + \gamma = 180°$.
Da mesma forma, β e γ são também medidas dos ângulos suplementares COD e DOB, respectivamente.
Segue então que

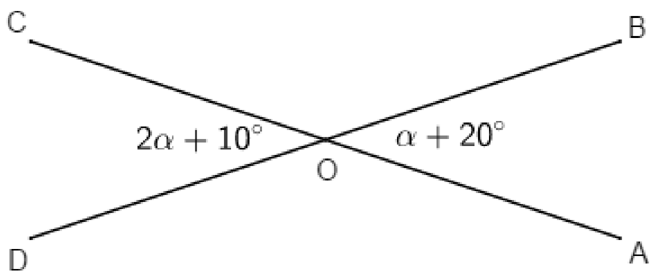
$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 180° \\ \beta + \gamma = 180°. \end{cases}$$

Como $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$. Segue então que os ângulos AOB e COD possuem a mesma medida. ■

Exemplo 3.21 *Determine a medida do ângulo oposto ao ângulo AOB nas Figuras 24 e 25 a seguir.*

a)

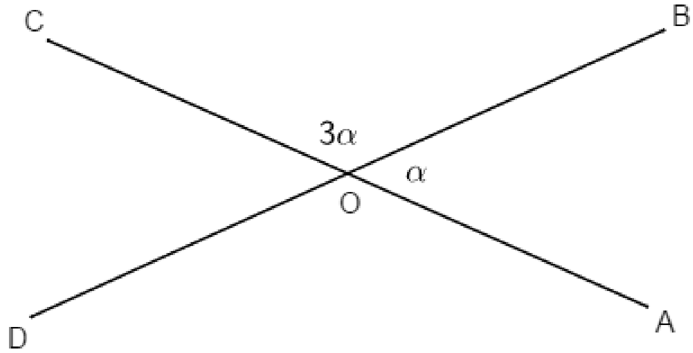
Figura 24: Medidas de ângulos opv.



Fonte: Autor.

b)

Figura 25: Medidas de ângulos opv.



Fonte: Autor.

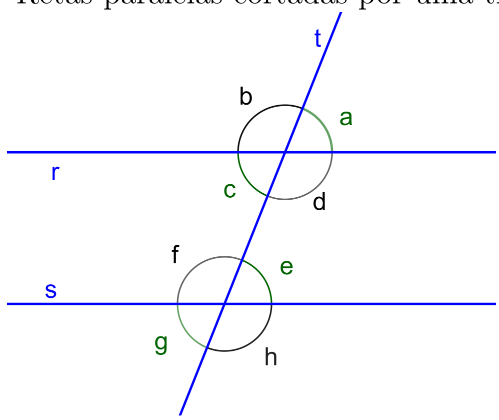
Solução:
a) Como $A\hat{O}B = C\hat{O}D$, então $2\alpha + 10° = \alpha + 20° \Rightarrow 2\alpha - \alpha = 20° - 10° \Rightarrow \alpha = 10°$.
Substituindo o valor de α em $2\alpha+10°$, que é a medida do oposto do ângulo AOB, obtemos

$$C\hat{O}D = 2\alpha + 10° = 2 \cdot 10° + 10° = 30° \Rightarrow C\hat{O}D = 30°.$$

b) Veja que o valor procurado é igual a α e $\alpha + 3\alpha = 180°$, pois α e 3α são medidas de ângulos suplementares.
Então $\alpha + 3\alpha = 180° \Rightarrow 4\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 45°$. ⋄

Agora considere retas paralelas e distintas, r e s, cortadas por uma outra reta transversal t conforme Figura 26.

Figura 26: Retas paralelas cortadas por uma transversal.



Fonte: Autor.

Os ângulos obtidos na Figura 26 são classificados em:

- Correspondentes: a e e; b e f; c e g; d e h.

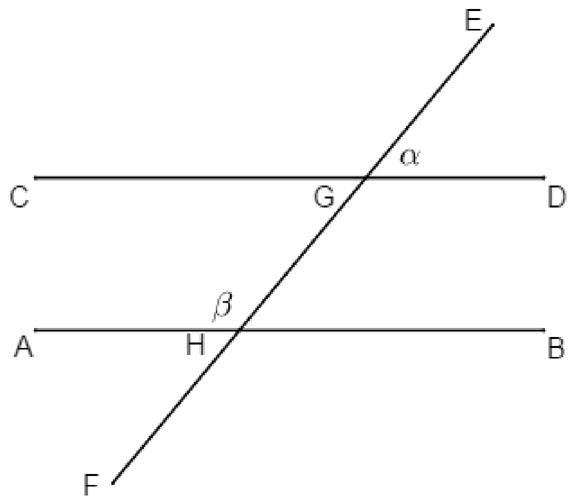
- Alternos internos: c e e; d e f.
- Alternos externos: a e g; b e h.
- Colaterais internos: c e f; d e e.
- Colaterais externos: a e h; b e g.

Os ângulos internos, como o nome sugere, estão entre as duas retas paralelas, logo, os outros são os externos; ao passo que os colaterais estão de um mesmo lado da transversal e alternos em lados alternados da transversal.

Dois ângulos correspondentes possuem a mesma medida. Também possuem a mesma medida dois ângulos alternos internos e dois ângulos alternos externos. Já um par de ângulos colaterais, sejam internos ou externos, são ângulos suplementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 180°.

Exemplo 3.22 *Na Figura 27,* α *vale* 30°. *Calcule o valor de* β.

Figura 27: Medidas de ângulos correspondentes e de suplementares.



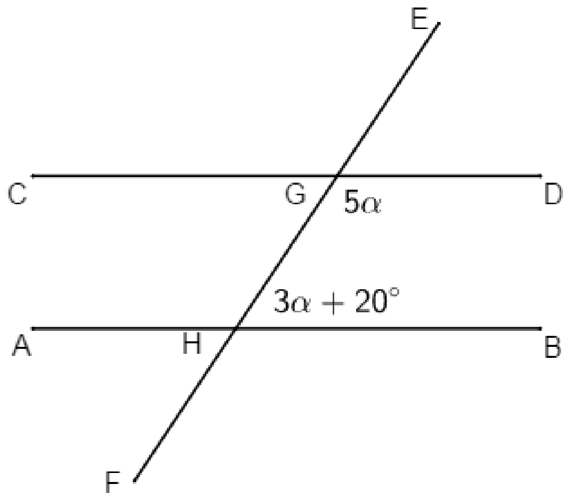
Fonte: Autor.

Solução:
Perceba que os ângulos AHE e CGE são correspondentes, logo possuem a mesma medida, ou seja, $C\hat{G}E = \beta$.
Por outro lado, os ângulos CGE e DGE são suplementares, então $C\hat{G}E + D\hat{G}E = \beta + \alpha = 180°$.
Como $\alpha = 30°$, temos $\beta + 30° = 180° \Rightarrow \beta = 180° - 30°$.
Segue que $\beta = 150°$. ◇

Exemplo 3.23 *Se* 5α *e* $3\alpha + 20°$ *são as medidas de dois ângulos internos colaterais formados por duas paralelas cortadas por uma transversal, calcule a medida de cada um desses ângulos.*

Solução:
Considere a figura 28.

Figura 28: Medidas de ângulos colaterais internos.



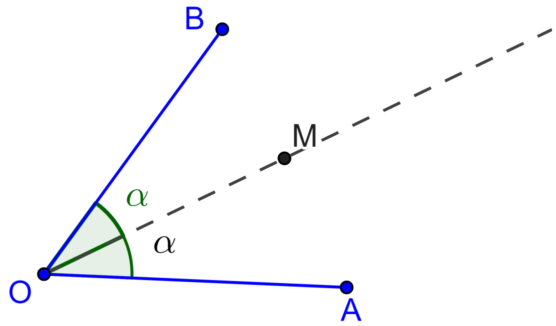
Fonte: Autor.

Como os ângulos FHB e FGD são correspondentes, possuem a mesma medida, logo $F\hat{H}B = 5\alpha$.
Por outro lado, $5\alpha + (3\alpha + 20°) = 180°$, pois 5α e $3\alpha + 20°$ são as medidas dos ângulos suplementares FHB e BHE.
Assim, $5\alpha + (3\alpha + 20°) = 180° \Rightarrow 8\alpha + 20° = 180° \Rightarrow 8\alpha = 160° \Rightarrow \alpha = 20°$.
Substituindo o valor de α em 5α obtemos $5 \cdot 20° = 100°$, substituindo em $3\alpha + 20°$ obtemos $3 \cdot 20° + 20° = 80°$.
Portanto, $100°$ e $80°$ são as medidas dos ângulos internos colaterais FGD e BHE, respectivamente. $\diamond$

Para finalizar esta seção observemos que ângulos podem ser gerados pela divisão de outro por alguma semirreta partindo da mesma origem. Vejamos a definição a seguir.

Definição 3.24 *Chamamos de* ***Bissetriz*** *a semirreta que parte da mesma origem de um ângulo dividindo-o em dois ângulos de mesma medida.*

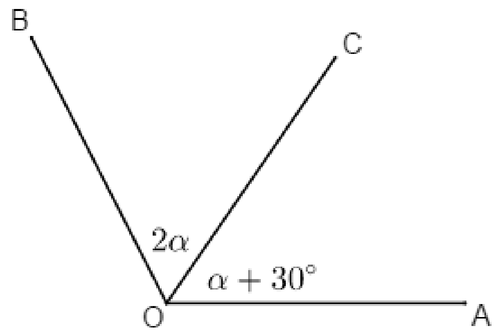
Figura 29: Bissetriz de um ângulo.



Fonte: Autor.

Exemplo 3.25 *Na Figura 30 o ângulo $A\hat{O}B$ está dividido em dois ângulos pela semirreta $\overrightarrow{OC}$. Sabendo que $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, determine a medida $A\hat{O}B$.*

Figura 30: Ângulo AOB dividido pela bissetriz $\overrightarrow{OC}$.



Fonte: Autor.

Solução:
Veja que a medida do ângulo AOB é a soma das medidas dos ângulos AOC e COB, ou seja

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B = \alpha + 30° + 2\alpha.$$

Como $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz do ângulo AOB, então o divide em dois ângulos de mesma medida, logo

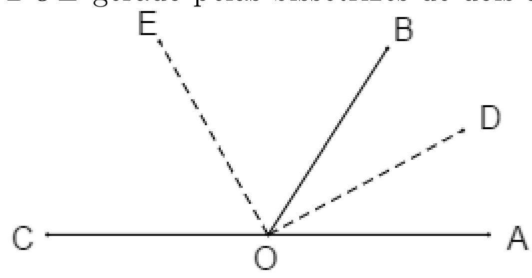
$$2\alpha = \alpha + 30° \Rightarrow \alpha = 30°.$$

Portanto, $A\hat{O}B = A\hat{O}C + C\hat{O}B = (\alpha + 30°) + 2\alpha = (30° + 30°) + 2 \cdot 30° = 120°$. ⋄

Exemplo 3.26 (BASEADO EM [2]) *Encontre a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares.*

Solução:
Considere a Figura 31, onde AOB e BOC são dois ângulos adjacentes suplementares, $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz de AOB e $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz de BOC.

Figura 31: Ângulo DOE gerado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes.



Fonte: Autor.

Veja que a medida procurada é a medida do ângulo DOE formado pelas bissetrizes $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ e pode ser dada por $D\hat{O}E = D\hat{O}B + B\hat{O}E$.
Agora perceba que $D\hat{O}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$ e $B\hat{O}E = \frac{1}{2}B\hat{O}C$.
Logo $D\hat{O}E = D\hat{O}B + B\hat{O}E = \frac{1}{2}A\hat{O}B + \frac{1}{2}B\hat{O}C = \frac{1}{2}(A\hat{O}B + B\hat{O}C)$.
Como $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são medidas de dois ângulos suplementares, segue que

$$D\hat{O}E = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°.$$

Portanto, o ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes suplementares mede 90°. $\diamond$

3.3 Noções Básicas de Perpendicularismo

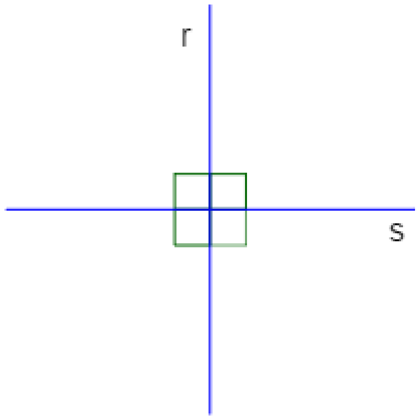
Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [3], [4], [6] e [7].

O objetivo nesta seção é apresentar uma noção básica de perpendicularismo entre duas retas e uma reta e um plano.

Com a definição e classificação de ângulo em mãos, vamos enunciar um caso particular de retas de concorrentes (Definição 3.8).

Definição 3.27 *Duas retas r e s, num plano, são ditas* ***retas perpendiculares*** *quando são concorrentes e determinam quatro ângulos retos.*

Figura 32: Retas perpendiculares.

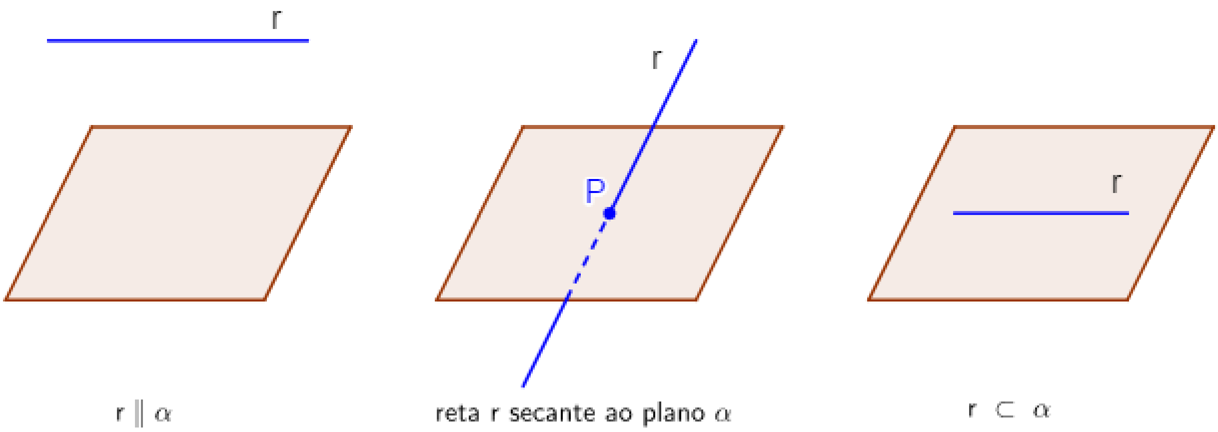


Fonte: Autor.

Para denotar duas retas r e s perpendiculares, escrevemos $r \perp s$ e lemos: a reta r é perpendicular à reta s.

A relação entre **uma reta** r **e um plano** α é, de certa forma, semelhante a de duas retas. Como vimos duas retas distintas, num plano, são paralelas ou concorrentes. Se uma reta r não está contida em um plano α, então r pode ser paralela ao plano α, quando r e α não possuem nenhum ponto em comum; ou r e α podem ser concorrentes, quando possuem um único ponto em comum. No caso da reta r ser concorrente ao plano α, é comum nos referirmos a r como reta **secante** ao plano α.

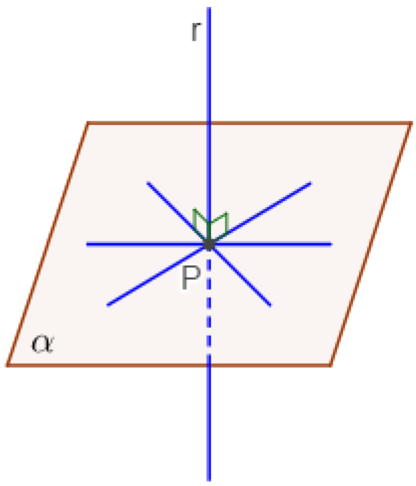
Figura 33: Relações entre uma reta e um plano.



Fonte: Autor.

Definição 3.28 *Dados uma reta r e um plano α, concorrentes num ponto P, dizemos que r e α são* ***perpendiculares*** *quando r é perpendicular a todas as retas de α que passam por P.*

Figura 34: Reta r perpendicular ao plano α, ou $r \perp \alpha$.

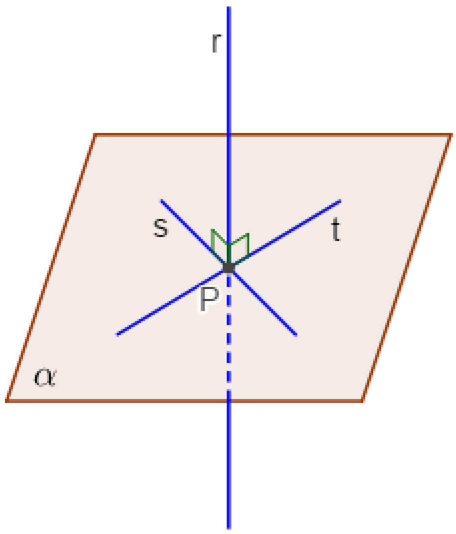


Fonte: Autor.

Convém, diante da definição imediatamente anterior, enunciar o **Teorema fundamental do perpendicularismo**.

Teorema 3.29 *Se uma reta r é perpendicular a duas retas concorrentes, s e t, contidas num plano α, então r é perpendicular ao plano α.*

Figura 35: Teorema fundamental do perpendicularismo.



Fonte: Autor.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [4].

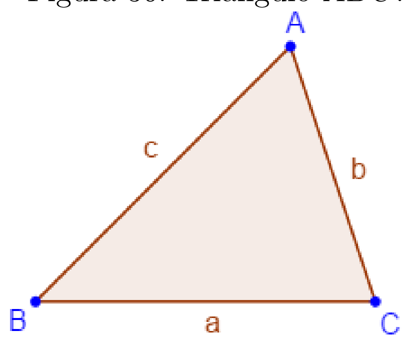
3.4 Triângulos

Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [1], [2], [4], [5] [6], [8], [9], [15], [16], [17], [19].

A primeira figura plana que vamos explorar é o **triângulo**, que é o polígono de três lados.

Definição 3.30 *Dados três pontos A, B e C, não colineares, um **triângulo** é definido pela união dos segmentos AB, BC e CA.*

Figura 36: Triângulo ABC.

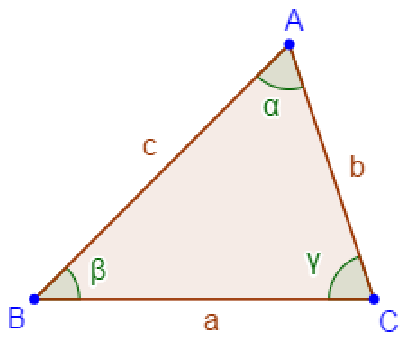


Fonte: Autor.

O triângulo, formado pelos pontos A, B e C, é denotado por triângulo ABC ou simbolicamente $\triangle ABC$.

Na Figura 37 destacaremos os principais elementos do $\triangle ABC$: vértices, lados, medidas dos lados, ângulos internos, perímetro e semiperímetro.

Figura 37: Principais elementos de um triângulo.



Fonte: Autor, baseada na referência [19].

1) Os **vértices** do $\triangle ABC$ são os pontos A, B e C;

2) Os **lados** são os segmentos de retas AB, BC e CA;

3) As **medidas dos lados** são representadas por a, b e c.

4) Os **ângulos internos** são $\angle BAC$, $\angle CBA$ e $\angle ACB$, com medidas α, β e γ, respectivamente;

5) O **perímetro** é dado por $P = a + b + c$;

6) O **semiperímetro** é dado por $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Os triângulos podem ser classificados de duas maneiras: conforme as medidas dos lados e conforme as medidas dos ângulos.

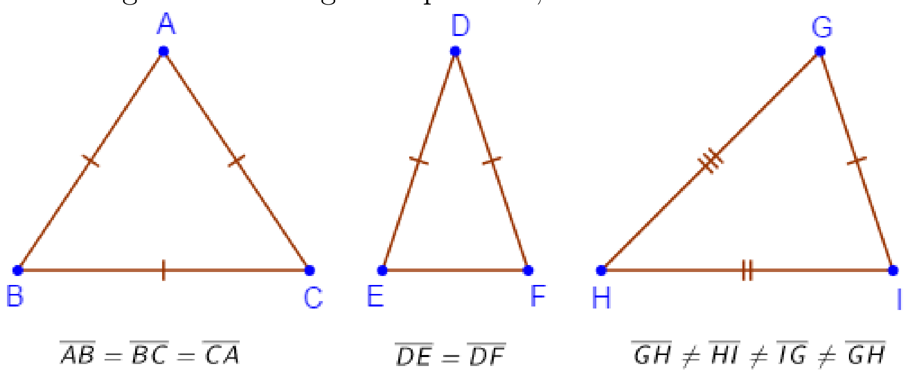
1- Quanto às medidas dos lados há três possibilidades:

I. **Equilátero**, se as medidas dos lados são iguais;

II. **Isósceles**, se as medidas de pelo menos dois lados são iguais e;

III. **Escaleno**, se as medidas dos três lados são diferentes.

Figura 38: Triângulos equilátero, isósceles e escaleno.



Fonte: Autor.

Exemplo 3.31 *Considere as afirmações a seguir sobre um triângulo ABC, onde $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$:*

I - É um triângulo escaleno.

II - É um triângulo equilátero.

III - É um triângulo isósceles.

Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s)

a) I e III apenas.

b) II apenas.

c) II e III apenas.

d) III apenas.

e) I apenas.

Solução:
A afirmação I está errada, pois em um triângulo escaleno as medidas dos três lados são diferentes.
A afirmação II está correta. Se as medidas dos lados de um triângulo são iguais, então é um triângulo equilátero.
A afirmação III está correta. Se as medidas de pelos menos dois lados de um triângulo são iguais ele é classificado como isósceles, logo todo triângulo equilátero é também isósceles.
Portanto, estão corretas apenas as afirmativas II e III.
Resposta: alternativa *c*. ◇

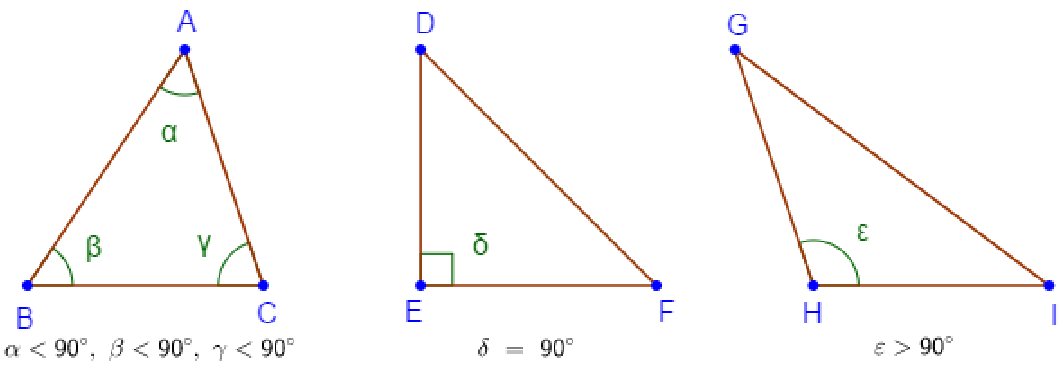
2- Quanto às medidas dos ângulos também há três possibilidades:

I. **Acutângulo**, se os três ângulos são agudos;

II. **Retângulo**, se possuir um ângulo reto e;

III. **Obtusângulo**, se possuir um ângulo obtuso.

Figura 39: Triângulos acutângulo, retângulo e obtusângulo.



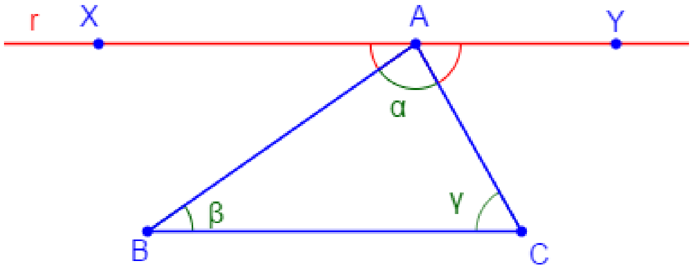
Fonte: Autor.

A seguir apresentaremos um resultado muito importante sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Esse resultado pode ser útil na solução de diversas questões e, também, a partir dele, é possível encontrar uma fórmula para o cálculo da soma dos ângulos internos de qualquer polígono.

Proposição 3.32 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a* $180°$.

Demonstração:
Considere um triângulo ABC. Trace uma reta r paralela ao lado BC passando pelo ponto A e tome os pontos X e Y, conforme a Figura 40.

Figura 40: Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Autor.

Note que $B\hat{A}X = \beta$, pois os ângulos BAX e ABC são alternos internos , e $C\hat{A}Y = \gamma$, pois os ângulos CAY e ACB também são alternos internos.
Logo, substituindo $B\hat{A}X$ por β e $C\hat{A}Y$ por γ temos:

$$\beta + \alpha + \gamma = 180°.$$

■

Exemplo 3.33 *Se* $30°$ *e* $60°$ *são as medidas de dois ângulos internos de um triângulo, qual a medida do outro ângulo interno?*

Solução:
Seja α a medida procurada.
Como a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo é $180°$, então

$$30° + 60° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 30° - 60° = 90°.$$

Portanto, a medida do outro ângulo é $90°$. ◇

Exemplo 3.34 *Sejam* $\alpha + 10°$, $\alpha + 20°$ *e* 2α *as medidas dos ângulos internos de um triângulo. Determine a medida de cada um desses ângulos.*

Solução:
Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, então

$$(\alpha + 10°) + (\alpha + 20°) + 2\alpha = 180° \Rightarrow 4\alpha + 30° = 180° \Rightarrow 4\alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 37,5°.$$

Substituindo o valor de α na expressão que representa a medida de cada ângulo, obtemos

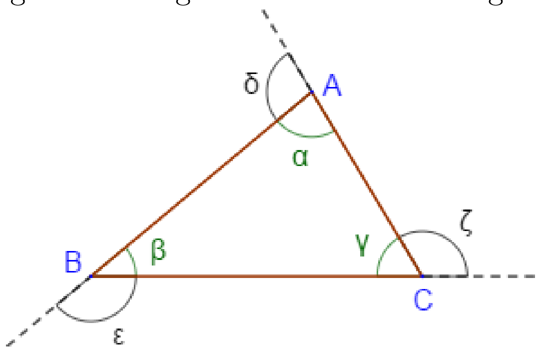
$$\alpha + 10^\circ = 37,5^\circ + 10^\circ = 47,5^\circ;$$
$$\alpha + 20^\circ = 37,5^\circ + 20^\circ = 57,5^\circ;$$
$$2\alpha = 2 \cdot 37,5^\circ = 75^\circ.$$

Portanto, as medidas dos ângulos internos desse triângulo são $47,5^\circ$, $57,5^\circ$ e 75°. $\diamond$

A seguir destacaremos outros elementos importantes no triângulo como ângulos externos e Cevianas. Vejamos.

Definição 3.35 ***Ângulos externos*** *de um triângulo são os ângulos suplementares dos ângulos internos.*

Figura 41: Ângulos externos do triângulo.



Fonte: Autor.

Proposição 3.36 *A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual a soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.*

Demonstração:
Considere a Figura 41. Veja que δ é a medida do ângulo externo sumplementar do ângulo interno de medida α, então

$$\alpha + \delta = 180^\circ.$$

Por outro lado,

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

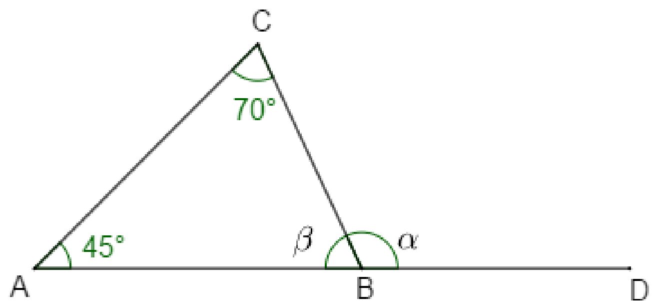
pois α, β e γ são as medidas dos ângulos internos do $\triangle ABC$.
Logo,

$$\alpha + \delta = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \delta = \beta + \gamma,$$

que é o que pretendiamos mostrar. $\blacksquare$

Exemplo 3.37 *Calcule a medida do ângulo externo de medida α no triângulo ABC da Figura 42.*

Figura 42: Medida de um ângulo externo de um triângulo.



Fonte: Autor.

Solução:
Podemos obter α pela Proposição 3.36, então

$$\alpha = 45^\circ + 70^\circ \Rightarrow \alpha = 115^\circ.$$

Ou calcular a medida ângulo interno adjacente representada por β e utilizar a definição de ângulos suplementares.
Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° temos

$$45^\circ + 70^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 115^\circ \Rightarrow \beta = 65^\circ.$$

Utilizando a definição de ângulos suplementares temos

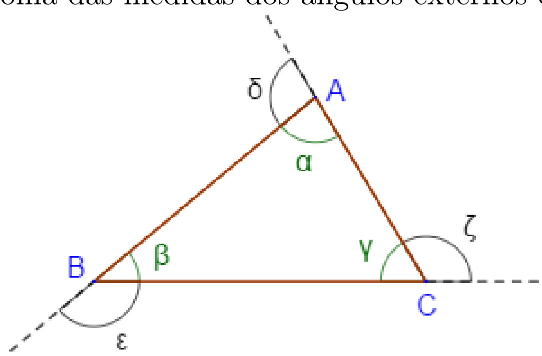
$$\beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 65^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 65^\circ \Rightarrow \alpha = 115^\circ.$$

Portano, $\alpha = 115^\circ$. $\diamond$

Proposição 3.38 *A soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é igual 360°.*

Demonstração:

Figura 43: Soma das medidas dos ângulos externos do triângulo.



Fonte: Autor.

Conforme Figura 43 δ, ε e ζ são as medidas dos ângulos externos do $\triangle ABC$ e são suplementares aos ângulos internos de medidas α, β e γ, respectivamente, ou seja,

$$\begin{cases} \alpha + \delta = 180° \\ \beta + \varepsilon = 180° \\ \gamma + \zeta = 180°. \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos:

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\delta + \varepsilon + \zeta) = 540°.$$

Pela Proposição 3.32 $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Logo

$$180° + (\delta + \varepsilon + \zeta) = 540°.$$

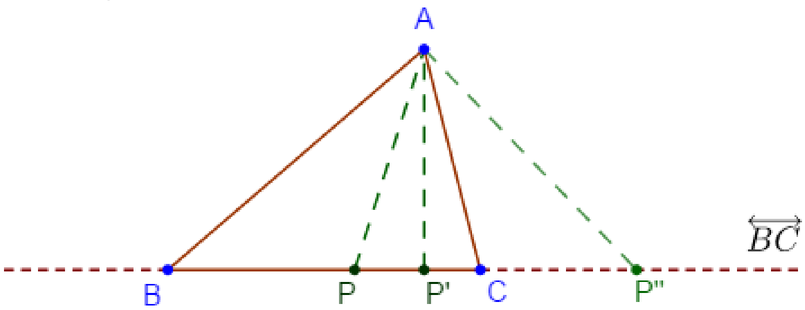
Portanto,

$$\delta + \varepsilon + \zeta = 360°.$$

■

Definição 3.39 *Chamamos de **ceviana** de um triângulo qualquer segmento (ou à reta ou semirreta correspondente) que une um vértice do triângulo a um ponto sobre a reta suporte ao lado oposto a tal vértice.*

Figura 44: Cevianas AP, AP' e AP'' do $\triangle ABC$.

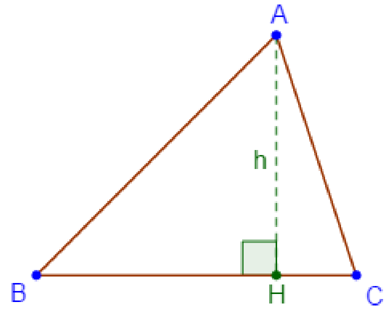


Fonte: Autor.

Das cevianas de um triângulo, merecem destaque três casos particulares: altura, mediana e bissetriz.

Definição 3.40 *A **altura** de um $\triangle ABC$ relativa ao lado BC é o segmento de reta AH, onde H é o pé da perperndicular ao lado BC baixada de A. Analogamente, definimos as alturas relativas aos lados AB e AC.*

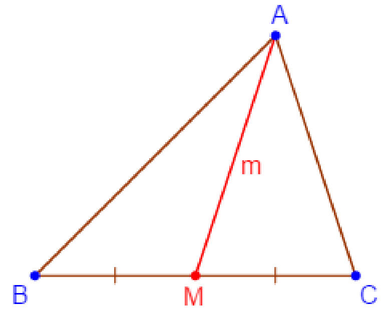
Figura 45: Altura AH do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC.



Fonte: Autor.

Definição 3.41 *A **mediana** de um $\triangle ABC$ relativa ao lado BC é o segmento de reta AM, onde M é o ponto médio do lado BC. Analogamente, definimos as medianas relativas aos lados AB e AC.*

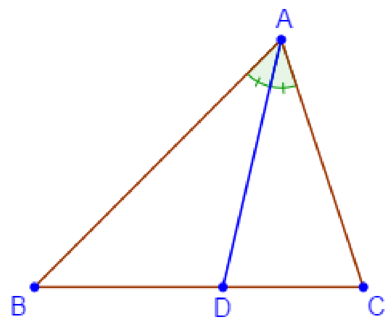
Figura 46: Mediana AM do $\triangle ABC$ relativa ao lado BC.



Fonte: Autor.

Definição 3.42 *A **bissetriz interna** de um $\triangle ABC$ relativa ao ângulo BAC é o segmento de reta AD da semirreta que divide o ângulo BAC em dois ângulos de mesma medida. Analogamente, definimos as bissetrizes relativas aos ângulos ABC e ACB.*

Figura 47: Bissetriz AD do $\triangle ABC$ relativa ao ângulo BAC.



Fonte: Autor.

3.4.1 Condição de existência de um triângulo

Seja um triângulo ABC de medidas dos lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, então valem as seguintes desigualdades:

i. $|b - c| \ < a \ < b + c$;

ii. $|a - c| \ < b \ < a + c$;

iii. $|a - b| \ < c \ < a + b$.

Exemplo 3.43 *Seja um triângulo ABC com medidas dos lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$. Se $a = 3$ e $b = 5$. Quais os possíveis valores de c?*

Solução:
Usando a inequação $|a - b| \ < c \ < a + b$, obtemos:

$$|3 - 5| < c < 3 + 5 \Rightarrow 2 < c < 8.$$

Portanto, a medida do lado AB é c tal que $c > 2$ e $c < 8$. $\diamond$

3.4.2 Congruência de triângulos

Nesta subseção abordaremos um novo conceito que é a congruência de triângulos. Para isto iniciaremos com o conceito de congruência entre segmentos de reta.

Definição 3.44 *Dois ou mais segmentos de reta são ditos* ***congruentes*** *quando possuem mesma medida.*

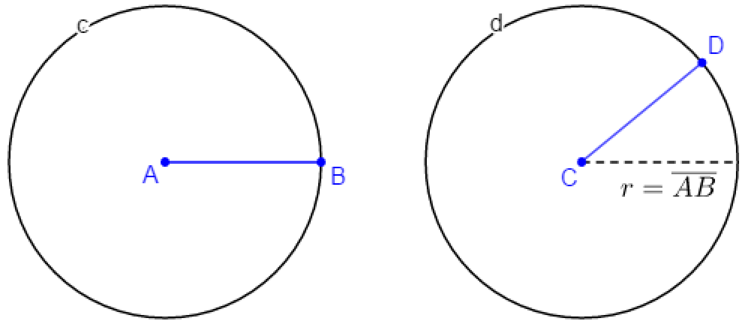
Figura 48: Segmentos congruentes.

Fonte: Autor.

O símbolo "$\equiv$" será utilizado para indicar congruência. Se os segmentos AB e CD são congruentes, escrevemos $AB \equiv CD$ e lemos, AB congruente a CD. Na Figura 48 $AB \equiv CD \equiv EF \iff \overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF}$.

Podemos desenhar dois segmentos de reta congruentes utilizando régua e compasso. Sejam A, B e C pontos distintos no plano. Pelo ponto A desenhamos uma circunferência com centro em A e raio AB, mantendo a mesma abertura do compasso para fazer outro círculo com centro em C, depois tomando D um ponto qualquer da segunda circunferência e trançando o segmento CD, teremos $\overline{CD} = \overline{AB}$, então $AB \equiv CD$.

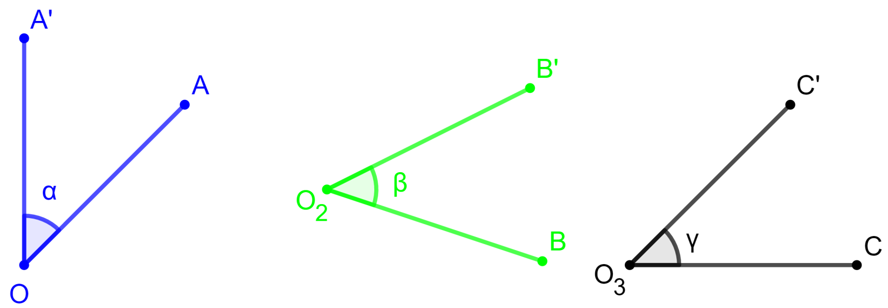
Figura 49: Segmentos congruentes, $AB \equiv CD$.



Fonte: Autor.

Definição 3.45 *Dois ou mais ângulos são ditos* ***congruentes*** *quando possuem mesma medida.*

Figura 50: Ângulos congruentes.



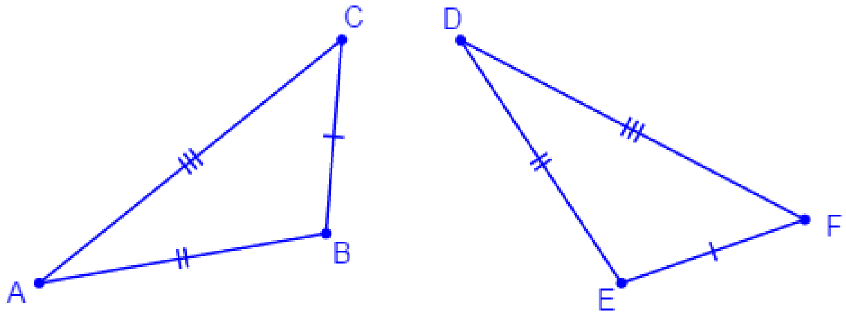
Fonte: Autor.

Na Figura 50, se α, β, γ são iguais, então, $\angle AOA' \equiv \angle BO_2B' \equiv \angle CO_3C'$.

Definição 3.46 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Dados dois triângulos ABC e DEF,

Figura 51: $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$.



Fonte: Autor.

se há uma correspondência entre A e D, B e E, C e F que define a congruência, então, temos seis relações de congruência. Entre os lados, temos

$$\begin{cases} AB \equiv DE \\ BC \equiv EF \\ CA \equiv FD, \end{cases}$$

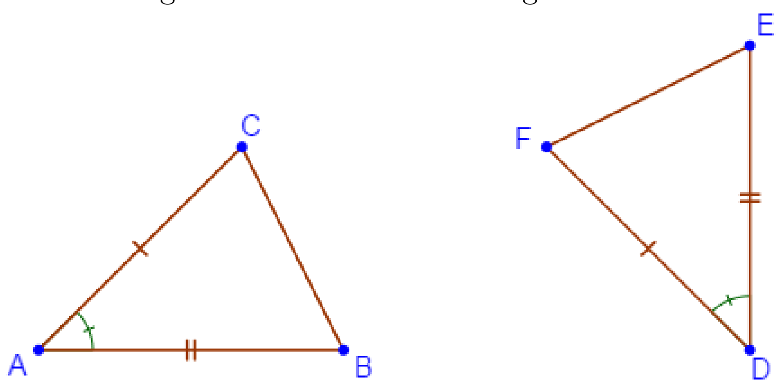
e entre os ângulos,

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F}. \end{cases}$$

Há três casos de congruências entre triângulos, os quais asseguram que a existência de três dessas relações de congruência garantem a implicação das outras três.

i) **Caso LAL:** Dados dois triângulos ABC e DEF, tais que, $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $\hat{A} \equiv \hat{D}$, então $ABC \equiv DEF$.

Figura 52: Caso LAL de congruência.

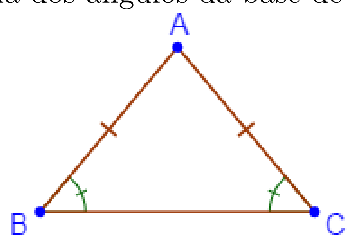


Fonte: Autor.

Vamos a um resultado importante a partir deste primeiro caso.

Teorema 3.47 *Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.*

Figura 53: Congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles.

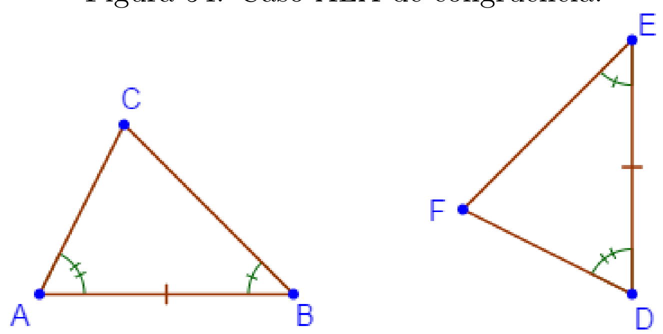


Fonte: Autor.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [2].

ii) **Caso ALA:** Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB \equiv DE$, $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $\hat{B} \equiv \hat{E}$, então $ABC \equiv EFG$.

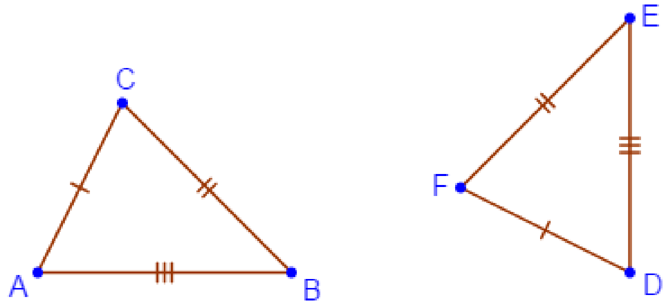
Figura 54: Caso ALA de congruência.



Fonte: Autor.

iii) **Caso LLL:** Dados dois triângulos ABC e DEF, se $AB \equiv DE$, $AC \equiv DF$ e $CA \equiv FD$, então $ABC \equiv EFG$.

Figura 55: Caso LLL de congruência.



Fonte: Autor.

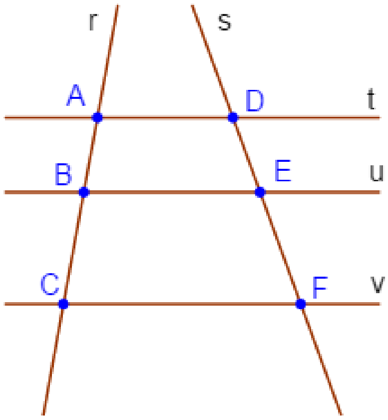
O primeiro caso (LAL) é um axioma. Os casos ALA e LLL decorrem do primeiro, e as provas podem ser encontradas em [9].

3.4.3 Teorema de Thales

O Teorema de Thales é fundamental no estudo da proporcionalidade, com aplicação nos casos de semelhanças de triângulos.

Teorema 3.48 *Os segmentos correspondentes determinados por um feixe de paralelas sobre duas transversais são proporcionais.*

Figura 56: Feixe de retas paralelas sobre duas transversais.



Fonte: Autor.

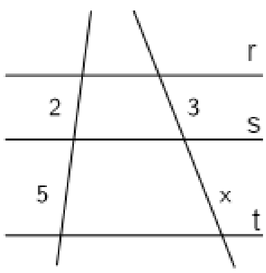
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}.$$

A demonstração do Teorema de Thales pode ser encontrada em [5].

Exemplo 3.49 (BASEADO EM [5]) *Sabendo que as retas r, s e t nas Figuras 57, 58 e 59 são paralelas, determine o valor de x.*

a)

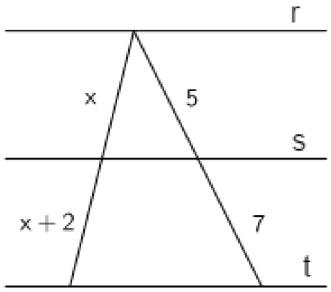
Figura 57: Aplicação do teorema de Thales.



Fonte: Autor, baseada na referência [5].

b)

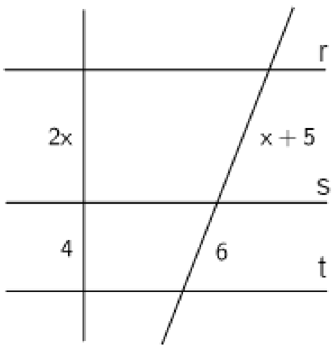
Figura 58: Aplicação do teorema de Thales.



Fonte: Autor, baseada na referência [5].

c)

Figura 59: Aplicação do teorema de Thales.



Fonte: Autor, baseada na referência [5].

Solução:

Pelo teorema de Thales temos em a)

$$\frac{2}{5} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2 \cdot x = 5 \cdot 3 \Rightarrow x = \frac{15}{2};$$

em b)

$$\frac{x}{x+2} = \frac{5}{7} \Rightarrow x \cdot 7 = x \cdot 5 + 2 \cdot 5 \Rightarrow 7x - 5x = 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5;$$

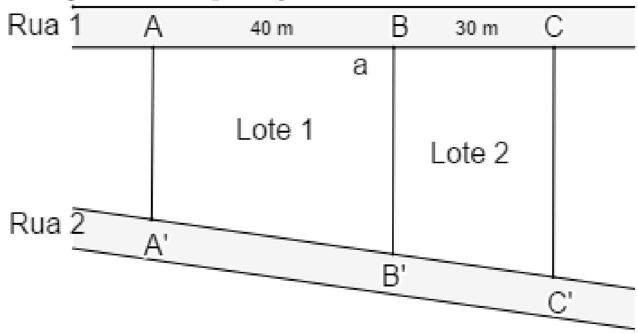
e em c)

$$\frac{2x}{4} = \frac{x+5}{6} \Rightarrow 2x \cdot 6 = 4 \cdot x + 4 \cdot 5 \Rightarrow 12x - 8x = 20 \Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

◇

Exemplo 3.50 (BASEANDO EM [2]) *Em um loteamento, os lotes 1 e 2, conforme a Figura 60, têm frente para a rua 1 e para a rua 2. Sabendo que as laterais dos lotes representadas pelos segmentos AA', BB' e CC' são paralelas e o segmento $A'C'$ mede 100 m, calcule as medidas das frentes dos dois lotes na rua 2.*

Figura 60: Aplicação do teorema de Thales.



Fonte: Autor, baseada em [2].

Solução:
As medidas das frentes dos lotes 1 e 2 solicitadas são representadas pelas medidas dos segmentos $A'B'$ e $B'C'$, respectivamente.
Veja que $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$ e é dado que $\overline{A'C'} = 100\ m$. Ou seja $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = 100$.
Para facilitar, considere $\overline{A'B'} = x$ e $\overline{B'C'} = y$, logo $x + y = 100 \Rightarrow x = 100 - y$.
Aplicando o teorema de Thales para obter x e y, temos

$$\frac{\overline{AB}}{x} = \frac{\overline{BC}}{y} \Rightarrow \frac{40}{100 - y} = \frac{30}{y}.$$

Então

$$\begin{aligned} &40 \cdot y = 30(100 - y) \Rightarrow 40y + 30y = 3000 \\ &\Rightarrow 70y = 3000 \Rightarrow y = \frac{3000}{70} = \frac{300}{7}\ m. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de y na equação $x + y = 100$, obtemos

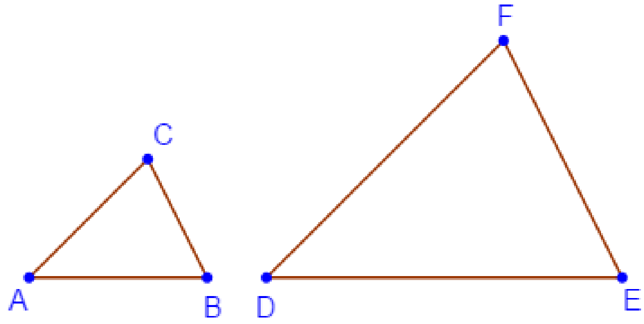
$$x + \frac{300}{7} = 100 \Rightarrow x = 100 - \frac{300}{7} = \frac{700 - 300}{7} = \frac{400}{7}\ m.$$

Portanto, as medidas da frentes dos lotes 1 e 2 na rua 2 são, respectivamente, $x = \frac{400}{7}$ e $y = \frac{300}{7}\ m$. ◇

3.4.4 Semelhança de triângulos

Definição 3.51 *Dois triângulos são ditos* ***semelhantes*** *se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que ângulos correspondentes sejam congruentes e lados correspondentes sejam proporcionais.*

Figura 61: $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$.



Fonte: Autor.

Seja $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$ a correspondência que estabelece a semelhança dos triângulos ABC e DEF, então valem simultaneamente:

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D},\ \hat{B} \equiv \hat{E},\ \hat{C} \equiv \hat{F}, \\ \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}. \end{cases}$$

As razões entre os lados correspondes são iguais a uma constante k, que é chamada de razão de proporcionalidade. Temos,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = k \Rightarrow \overline{AB} = k \cdot \overline{DE},\ \overline{BC} = \ k \cdot \overline{EF},\ \overline{CA} = \ k \cdot \overline{FD}.$$

Se $k = 1$, então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = 1 \Rightarrow \overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{BC} = \overline{EF},\ \overline{CA} = \overline{FD},$$

e somente nesse caso, quando a razão de proporcionalidade é igual a **um**, implica que esses triângulos semelhantes são também congruentes.

Exemplo 3.52 *Um triângulo ABC possui as medidas do lados $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{BC} = 3$ cm e $\overline{AC} = 4$ cm e um triângulo DEF possui medidas dos lados $\overline{DE} = 6$ cm, $\overline{EF} = 9$ cm e $\overline{DF} = 12$ cm. Verifique se ABC e DEF são semelhantes.*

Solução:

Devemos verificar se razão entre os lados correspondes nos dois triângulos é constante, ou seja

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}} = k.$$

Substituindo os valores das medidas dos lados dos triângulos, temos

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Logo ABC e DEF são semelhantes e a razão de semelhança é igual a $\frac{1}{3}$.
Se calcularmos a razão entre DEF e ABC obtemos 3, que é um inverso de $\frac{1}{3}$.

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{AC}} = 3.$$

Portanto, os triângulos ABC e DEF são semelhanetes. $\diamond$

Exemplo 3.53 *Numa feira imobiliária é apresentada uma maquete de um loteamento numa escala de 1 : 200. Nesse loteamento há uma praça em formato triangular. Ao medir os lados dessa praça na maquete verifica-se que medem 15 cm, 20 cm e 25 cm. Determine, em metros, o comprimento real de cada lado dessa praça.*

Solução:
Como a maquete está numa escala de 1 : 200 significa que a razão de semelhança entre as medidas reais dos lados da praça e das medidas na maquete é igual a 200.
Logo para calcular a medida real de cada lado, basta multiplicar a medida de cada lado na maquete por 200.
Então as medidas reais são $200 \cdot 15\ cm = 3000\ cm$, $200 \cdot 20 = 4000\ cm$ e $200 \cdot 25\ cm = 5000\ cm$.
Como 1 metro tem 100 cm, para transformar as medidas obtidas em metros, devemos dividi-las por 100, ou seja

$$\frac{3000\ cm}{100} = 30\ m,\ \frac{4000\ cm}{100} = 40\ m \text{ e } \frac{5000\ cm}{100} = 50\ m.$$

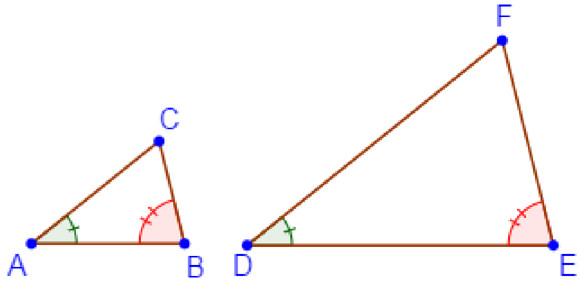
Logo as medidas reais dos lados da praça são $30\ m$, $40\ m$ e $50\ m$. $\diamond$

Para denotar a semelhança de triângulos vamos utilizar o símbolo "$\sim$", então, se ABC e DEF são triângulos semelhantes, escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ e lemos, triângulo ABC semelhante ao triângulo DEF.

Assim como existem três casos de congruência de triângulos, há também três casos de semelhança de triângulos. Vejamos abaixo. Vamos apenas enunciá-los por meio de teoremas, as demonstrações podem ser encontradas em [9].

Teorema 3.54 *Se dois triângulos, ABC e DEF, possuem dois ângulos correspondentes congruentes, então são triângulos semelhantes.*

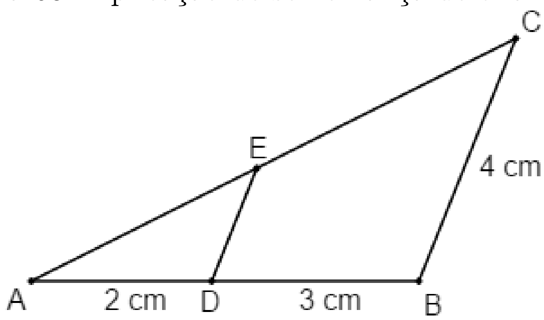
Figura 62: Caso AA de semelhança.



Fonte: Autor.

Exemplo 3.55 *Na Figura 63 $DE \parallel BC$. Calcule $\overline{DE}$.*

Figura 63: Aplicação de semelhança de triângulos.



Fonte: Autor.

Solução:

Note que o $\triangle BAC \sim \triangle DAE$, pois os ângulos BAC e DAE são correspondentes congruentes e, também os ângulos ADE e ABC são correspondes congruentes, pois $DE \parallel BC$. Com isso, os ângulos ACB e AED são correspondentes congruentes.

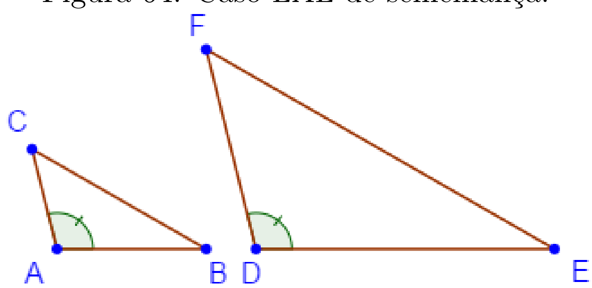
Logo os lados correspondentes são proporcionais. Então

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\overline{DE}}{4} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5 \cdot \overline{DE} = 2 \cdot 4 \Rightarrow \overline{DE} = \frac{8}{5}.$$

◇

Teorema 3.56 *Se dois triângulos, ABC e DEF, possuem dois lados proporcionais com o ângulo entre eles congruentes, então, são triângulos semelhantes.*

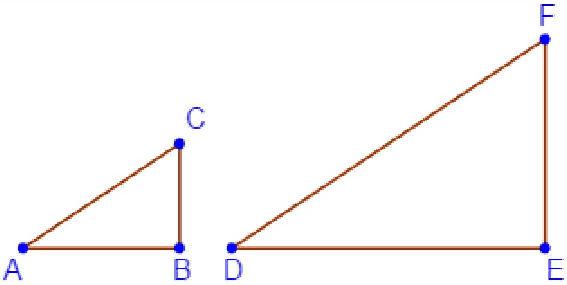
Figura 64: Caso LAL de semelhança.



Fonte: Autor.

Teorema 3.57 *Se dois triângulos, ABC e DEF, possuem os três lados proporcionais, então, são triângulos semelhantes.*

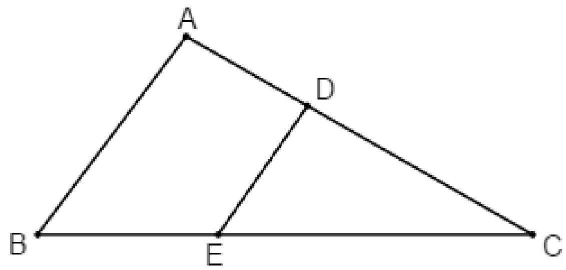
Figura 65: Caso LLL de semelhança.



Fonte: Autor.

Exemplo 3.58 *Considere a figura 66.*

Figura 66: Aplicação de semelhança de triângulos.



Fonte: Autor.

Sabendo que $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{DE} = 4$ e $\overline{DC} = 5$. Calcule as medidas de AC e EC.

Solução:

Como $\triangle ABC \sim \triangle DEC$, então

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{10}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AC}}{5}.$$

Veja que a razão de semelhança é dada por $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$. Logo

$$\frac{10}{\overline{EC}} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3 \cdot \overline{EC} = 2 \cdot 10 \Rightarrow \overline{EC} = \frac{20}{3};$$

$$\frac{\overline{AC}}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 5 \Rightarrow \overline{AC} = \frac{15}{2}.$$

Portanto $\overline{AE} = \dfrac{15}{2}$ e $\overline{EC} = \dfrac{20}{3}$. ◇

3.4.5 Pontos notáveis do triângulo

Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [1], [2], [4] e [8].

Vamos destacar quatro pontos notáveis de um triângulo: circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro. Mas antes vamos apresentar uma definição importante.

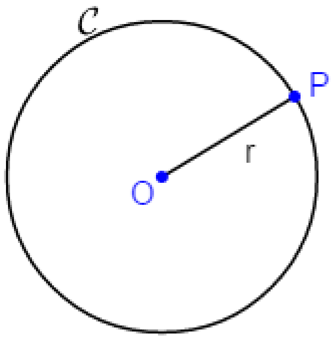
Definição 3.59 *Dada uma propriedade $\mathcal{P}$ relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** dos pontos que possuem a propriedade $\mathcal{P}$ é o subconjunto $\mathcal{L}$ do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*

(a) Todo ponto de $\mathcal{L}$ possui a propriedade $\mathcal{P}$.

(b) Todo ponto do plano que possui a propriedade $\mathcal{P}$ pertence a $\mathcal{L}$.

Definição 3.60 *o **circulo** é o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja distância a O é r.*

Figura 67: Círculo $\mathcal{C}$ de centro O e raio r.

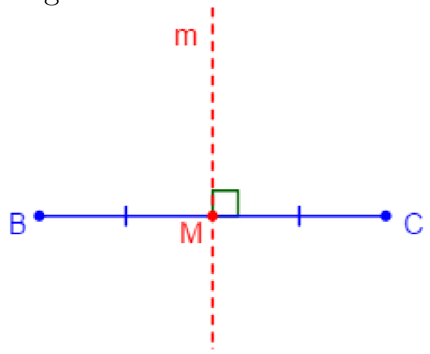


Fonte: Autor.

Note que se P está a uma distância r de O, então P pertence ao círculo $\mathcal{C}$ e se P pertence ao círculo $\mathcal{C}$, está a uma distância r de O.

Definição 3.61 *Seja BC um segmento de reta e M o seu ponto médio. Chamamos de **mediatriz** do segmento BC a reta perpendicular a BC que passa por M.*

Figura 68: Mediatriz de BC.



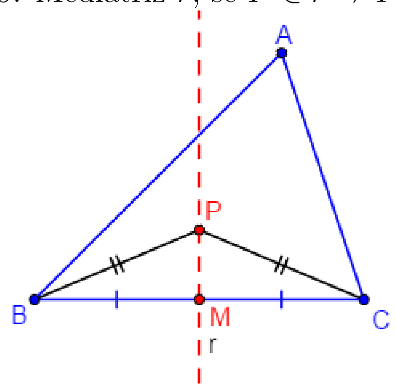
Fonte: Autor.

O resultado a seguir assegura que os pontos da mediatriz de um segmento BC estão a uma mesma distância dos pontos B e C. Vejamos.

Proposição 3.62 *Todos os pontos P de uma mediatriz de um segmento de reta BC são equidistantes de B e C.*

Demonstração:
Considere a Figura 69.

Figura 69: Mediatriz r, se $P \in r \Rightarrow \overline{PB} = \overline{PC}$.



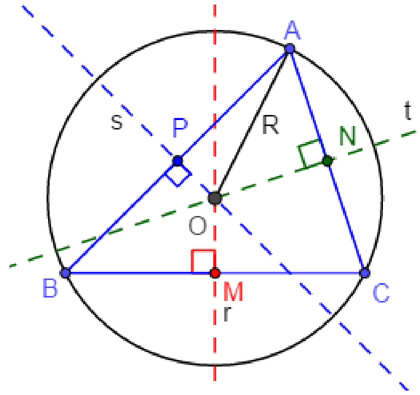
Fonte: Autor.

Se $P = M$, não há o que provar.
Se P é um ponto da mediatriz de BC e distinto de M, temos MP perpendicular a BC.
Logo os ângulos BMP e CMP são retos.
Então os triângulos BMP e CMP são congruentes pelo caso LAL, pois $BM \equiv CM$, $\angle BMP \equiv \angle CMP$ e MP é comum aos dois triângulos, o que implica $PB \equiv PC$.
Portanto $\overline{PB} = \overline{PC}$. ∎

A seguir apresentaremos o primeiro ponto notável de um triângulo ABC.

Definição 3.63 *O **circuncentro** de um triângulo ABC é o ponto de interseção entre as retas mediatrizes referentes aos três lados AB, AC e BC.*

Figura 70: O é o circuncentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Autor.

Normalmente utilizamos O para representar o circuncentro de um triângulo.

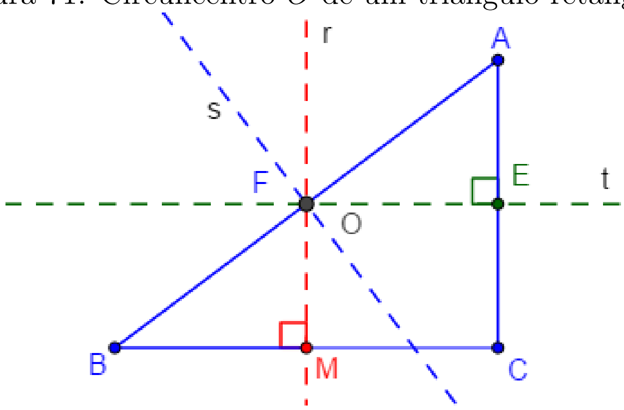
Proposição 3.64 *Seja O o circuncentro de um triângulo ABC, então $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.*

Demonstração:
Considere a Figura 70.
Como O pertence a mediatriz de BC, pela Proposição 3.62 $\overline{OB} = \overline{OC}$.
Por outro lado O também pertence a mediatriz de AB, novamente pela Proposição 3.62 $\overline{OA} = \overline{OB}$.
Logo $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. ■

Como consequência da Proposição 3.64 o circuncentro O é o centro de um círculo que contém os três vértices de um triângulo ABC. Nesse caso chamamos o círculo de círculo circunscrito no triângulo ABC.

Quando o triângulo é retângulo, o circuncentro pertence à hipotenusa, coincidindo com seu ponto médio.

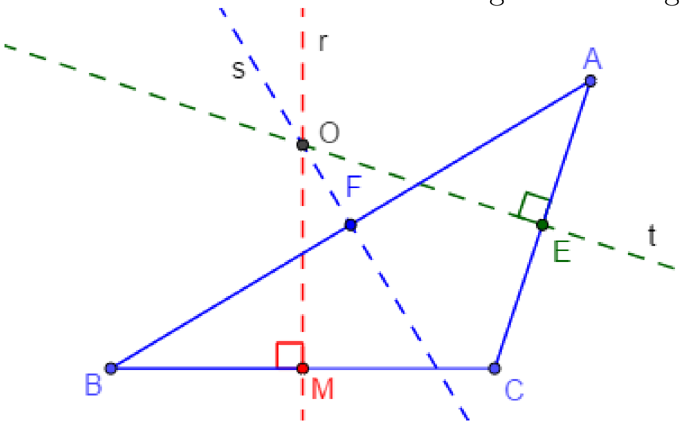
Figura 71: Circuncentro O de um triângulo retângulo.



Fonte: Autor.

E quando possui um ângulo obtuso, o circuncentro fica localizado fora da região triangular.

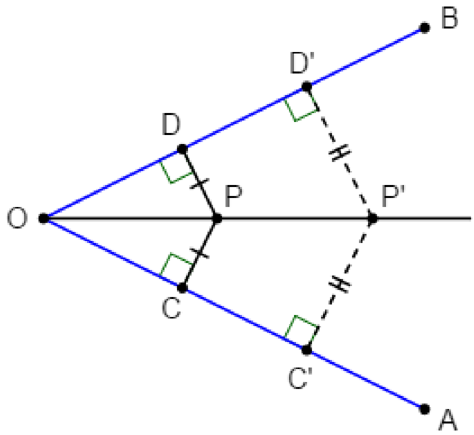
Figura 72: Circuncentro O de um triângulo obtusângulo.



Fonte: Autor.

Proposição 3.65 *Todos os pontos P da bissetriz interna de um ângulo AOB são equidistantes de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.*

Figura 73: Distância de um ponto da bissetriz aos lados do ângulo.

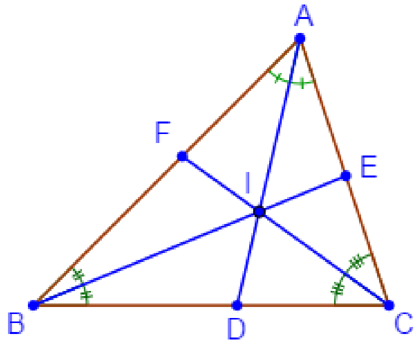


Fonte: Autor.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [4]

Definição 3.66 *O ponto de intersecção das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado de **incentro**.*

Figura 74: I é o incentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Autor.

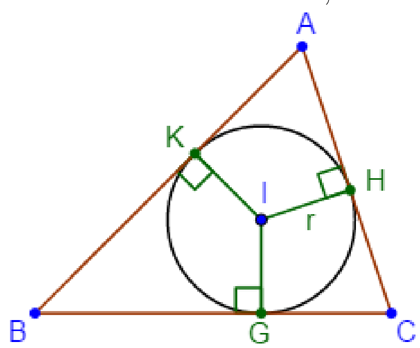
Normalmente utilizamos a letra I para representar o incentro de um triângulo.

Proposição 3.67 *Seja I o incentro de um triângulo ABC, então I é equidistante dos lados AB, AC e BC.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em [4]

Como o incentro I de um triângulo está a mesma distância de qualquer um de seus lados, se traçarmos um círculo com centro em I e raio de medida igual a essa distância, o círculo terá um único ponto em comum com cada lado do triângulo e será chamado de **círculo inscrito** no triângulo.

Figura 75: Círculo inscrito no $\triangle ABC$, $r = \overline{IG} = \overline{IH} = \overline{IK}$.

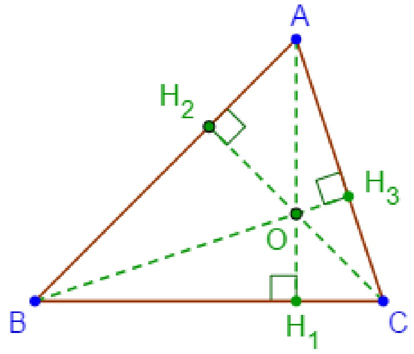


Fonte: Autor.

Na sequência vamos apresentar os outros dois pontos notáveis, como informado no início dessa subseção, utilizando uma linguagem sem muito formalismo.

Definição 3.68 *As alturas de um triângulo, relativas a cada um de seus lados, se encontram num único ponto chamado de **ortocentro** do triângulo.*

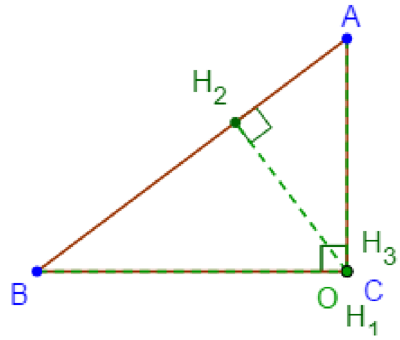
Figura 76: O ponto O é o ortocentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Autor.

O ortocentro de um triângulo pode coincidir com um dos vértices, quando o ângulo nesse vértice for um ângulo reto.

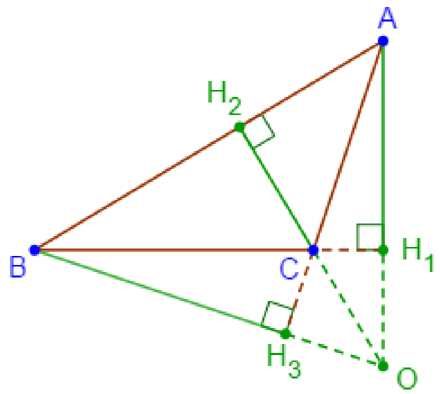
Figura 77: Ortocentro O coincidente com o vétice C.



Fonte: Autor.

Se o triângulo possuir um ângulo obtuso, então o ortocentro situa-se fora do triângulo. Neste caso o ortocentro O é obtido pela intersecção das retas suporte às alturas. Na Figura 78, $A\hat{C}B > 90°$.

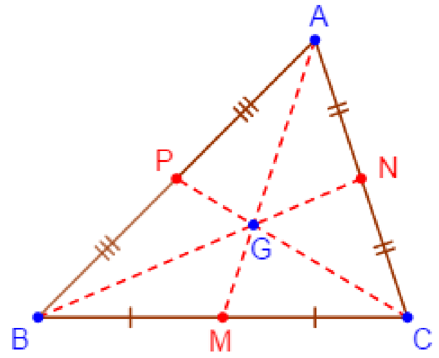
Figura 78: Ortocentro O externo à região triangular.



Fonte: Autor.

Definição 3.69 *A intersecção das três medianas AM, BN e CP, do $\triangle ABC$, conforme Figura 79, é chamada de* ***baricentro*** *do triângulo.*

Figura 79: G é o baricentro do $\triangle ABC$.



Fonte: Autor.

Normalmente o baricentro é representado pela letra G de "gravidade", devido esse ponto ser considerado o centro de gravidade do triângulo.

Ao leitor interessado em se aprofundar no assunto tratado nessa subseção indicamos as referências [2] e [4].

3.5 Relações Métricas nos Triângulos

Para o desenvolvimento dessa seção, nos baseamos nas referências [2], [4], [5], [6], [8], [14], [19], [21], [26], [27] e [28].

3.5.1 Triângulos retângulos

Os triângulos retângulos têm grande importância na nossa vida. Eles aparecem, por exemplo, nas construções, em trabalhos como topografia, podem ser utilizados para cálculos de distâncias inacessíveis. São figuras simples e o estudo das relações de seus elementos pode ser bastante útil.

Um triângulo é definido como triângulo retângulo quando possui um ângulo reto. Os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Uma das relações mais importantes num triângulo retângulo é a relação atribuída ao filósofo e matemático grego **Pitágoras**, onde o quadrado da medida hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos.

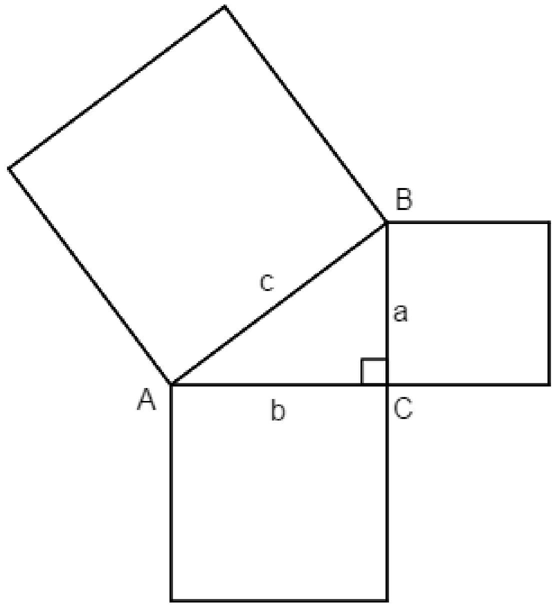
Vejamos o triângulo de lados 3, 4, 5 unidades de comprimento que era utilizado como esquadro em construções pelos egípcios. A palavra esquadro na Construção Civil significa a perpendicularidade entre superfícies e é muito comum até os dias de hoje.

Para saber mais sobre a relação entre triângulos retângulos e esquadro na construção civil, indicamos a referência [26].

Entre muitas demonstrações possíveis do teorema de Pitágoras, vejamos uma a partir de semelhanças entre triângulos retângulos.

Teorema 3.70 *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.*

Figura 80: Relação pitagórica: $a^2 + b^2 = c^2$.

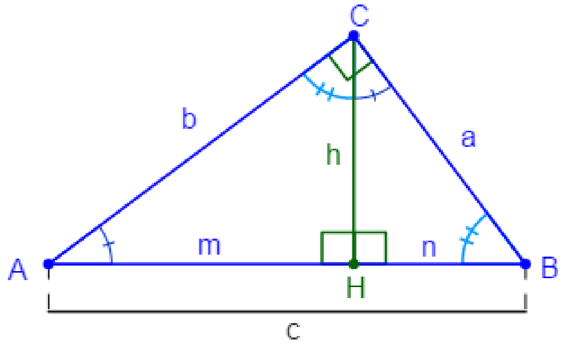


Fonte: Autor.

Demonstração:

Considere o triângulo ABC, retângulo em C, conforme a Figura 81.

Figura 81: Semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor, baseada em [5].

Denote por CH a altura relativa ao lado AB. Note que os triângulos ABC, ACH e CBH, são semelhantes, pois tem os ângulos internos respectivamente congruentes. Logo, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais.
Dessa semelhança destaquemos algumas relações métricas importantes no triângulo ABC. De $\triangle ABC \sim \triangle CBH$, destaquemos duas relações,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CB}{BH} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{n} \Rightarrow a^2 = cn, \tag{3.1}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CH} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{a}{h} \Rightarrow hc = ab. \tag{3.2}$$

De $\triangle BAC \sim \triangle CAH$,

$$\frac{BA}{AC} = \frac{CA}{AH} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = cm. \tag{3.3}$$

E de $\triangle AHC \sim \triangle CHB$,

$$\frac{AH}{HC} = \frac{CH}{HB} \Rightarrow \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = mn. \tag{3.4}$$

Somando os resultados obtidos nas equações 3.1 e 3.3, membro a membro, obtemos,

$$a^2 + b^2 = cn + cm \Rightarrow a^2 + b^2 = c(m + n).$$

Como $m + n = c$, chegamos a

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{3.5}$$

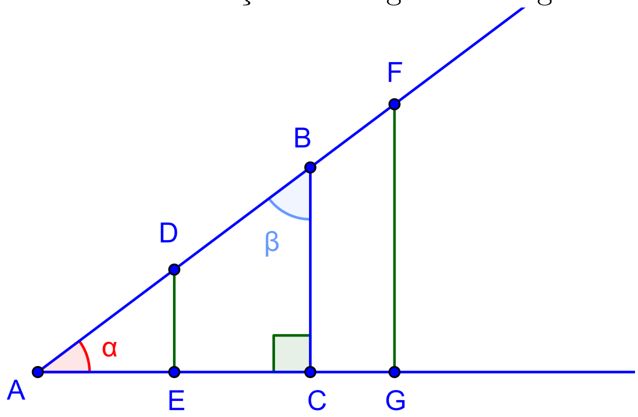
que é a relação de Pitágoras. ∎

3.5.2 Trigonometria do ângulo agudo

Nesta subseção temos como objeto de estudo as três razões trigonométricas básicas relacionadas aos dois ângulos agudos de um triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente.

Seja ABC um triângulo retângulo com o ângulo reto em C, tracemos os segmentos DE e FG paralelos a BC, com extremidades nas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ conforme Figura 82.

Figura 82: Semelhança de triângulos retângulos.



Fonte: Autor.

Como $DE \parallel BC \parallel FG$, então $A\hat{E}D = A\hat{C}B = A\hat{G}F = 90°$ e α é a medida de um ângulo comum aos três triângulos AED, ACB e AGF, então AED, ACB e AGF são semelhantes pelo caso AA de semelhança. Logo, os lados correspondentes são proporcionais, então podemos aplicar o teorema de Thales.

Da semelhança dos triângulos AED, ACB, AGF, vamos destacar três casos de proporcionalidade, dos lados dos triângulos, relacionados ao ângulo α:

(1) A igualdade das razões entre as medidas do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa, de cada triângulo,
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AF}};$$

(2) A igualdade das razões entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo α e da hipotenusa, de cada triângulo,
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}};$$

(3) E a igualdade das razões entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente ao ângulo α, de cada triângulo,
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}}.$$

Essas igualdades são chamadas de **razões trigonométricas**. Perceba que elas dependem apenas da medida do ângulo α. A razão em (1) é chamada **seno do ângulo** α, em (2), **cosseno do ângulo** α e em (3), **tangente do ângulo** α.

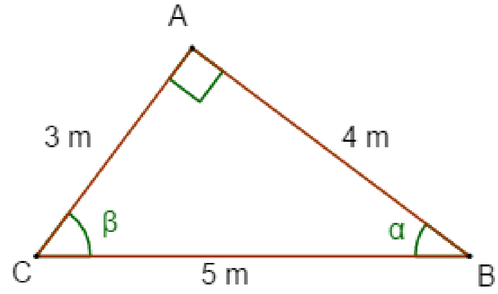
$$sen\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ da\ hipotenusa}, \tag{3.6}$$

$$cos\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ adjacente}{medida\ da\ hipotenusa}, \tag{3.7}$$

$$tg\ \alpha = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto}{medida\ do\ cateto\ adjacente}. \tag{3.8}$$

Exemplo 3.71 (BASEADO EM [5]) *No triângulo retângulo ABC da Figura 83, α e β são as medidas dos ângulos agudos. Conhecendo-se as medidas dos lados AC, AB e BC determinemos os valores do seno, cosseno e da tangente dos ângulos de medidas α e β.*

Figura 83: Razões trigonométricas.



Fonte: Autor, baseada em [5].

Solução:
Veja que AC é o cateto oposto ao ângulo de medida α e AB é o cateto adjacente. Logo

$$sen\ \alpha = \frac{3}{5} = 0,6, \quad cos\ \alpha = \frac{4}{5} = 0,8, \quad tg\ \alpha = \frac{3}{4} = 0,75.$$

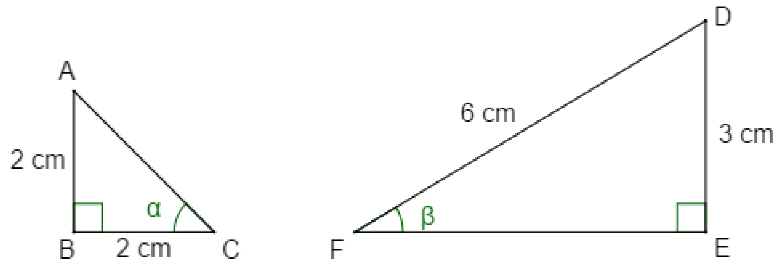
Similarmente AB é o cateto oposto ao ângulo de medida β e AC é o cateto adjacente. Logo

$$sen\ \beta = \frac{4}{5} = 0,8, \quad cos\ \beta = \frac{3}{5} = 0,6, \quad tg\ \beta = \frac{4}{3} \cong 1,33.$$

◇

Exemplo 3.72 *Calcule o seno, o cosseno e a tangente de α no triângulo ABC e de β no triângulo DEF, dados na Figura 84.*

Figura 84: Razões trigonométricas



Fonte: Autor.

Solução:
Para calcular o seno, o cosseno e a tangente de α, primeiro calculemos a medida da hipotenusa do triângulo ABC aplicando o teorema de Pitágoras.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ cm.$$

Logo,

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$cos\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{2}{2} = 1.$$

E para calcular o seno, o cosseno e a tangente de β no triângulo DEF, calculemos a medida do cateto adjacente ao ângulo de medida β, também aplicando o teorema de Pitágoras.

$$\overline{DF}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{EF}^2 \Rightarrow 6^2 = 3^2 + \overline{EF}^2 \Rightarrow \overline{EF}^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow \overline{EF} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}\ m.$$

Então

$$sen\ \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

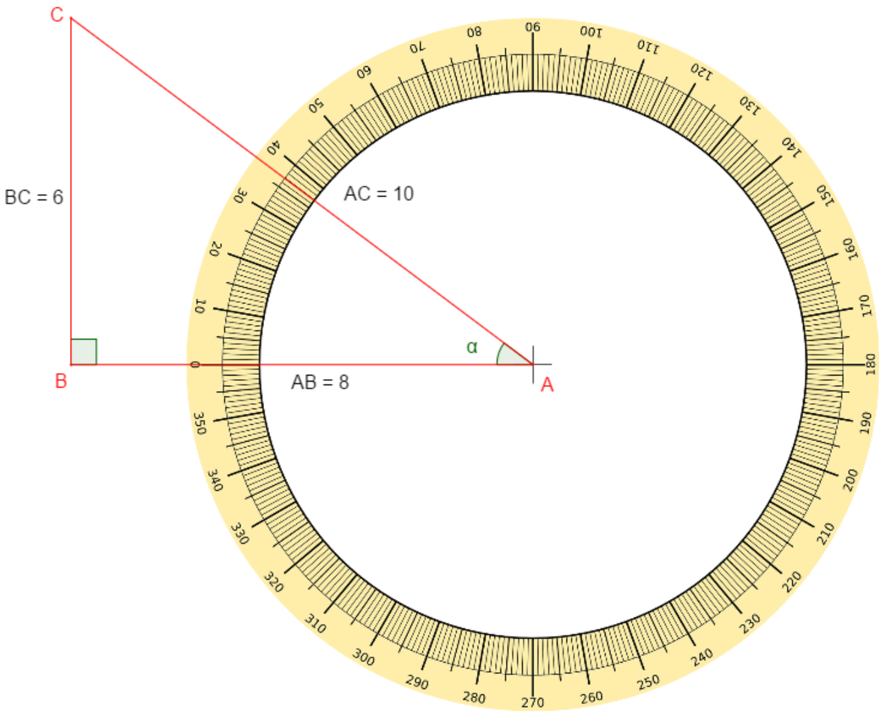
$$cos\ \beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

◇

Exemplo 3.73 *Podemos medir com um transferidor um ângulo de um triângulo retângulo, em que se conhecem os lados, e aplicar as relações trigonométricas desejadas para esse ângulo; ou desenhar um triângulo retângulo com o ângulo desejado usando o transferidor, régua e compasso, medir os lados e aplicar as relações trigonométricas.*

Figura 85: Triângulo retângulo (6, 8, 10).



Fonte: Autor, adaptada da referência [28].

Na Figura 85, temos um triângulo retângulo ABC*, reto em* B*, de catetos 6 e 8 unidades de medida e hipotenusa 10 unidades. Veja que* $6^2 + 8^2 = 10^2$*. Posicionando um transferidor centrado em* A *e o cateto* AB *passando pelo* $0°$*, observa-se que o ângulo* BAC *mede* $\alpha \cong 37°$*.*

Considerando $\alpha = 37°$*, calcule o seno, o cosseno e a tantente de* $37°$*.*

Solução:

Utilizando as equações das razões trigonométricas, obtemos

$$sen\ 37° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{6}{10} = 0,60,$$

$$cos\ 37° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{8}{10} = 0,80,$$

$$tg\ 37° = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{6}{8} = 0,75.$$

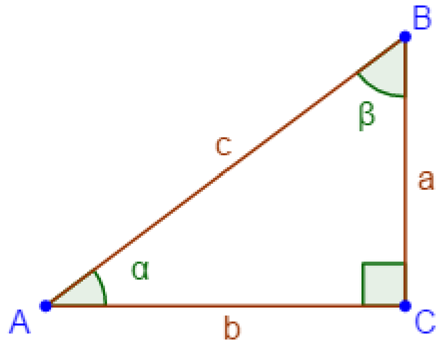
Conferindo por uma tabela trigonométrica, considerando quatro casas de segurança após a vírgula, temos: $sen\ 37° = 0,6018$, $cos\ 37° = 0,7986$ e $tg\ 37° = 0,7535$. Isso mostra que, mesmo manualmente, se consegue um bom resultado. Para as tabelas, como vemos em livros, são utilizados métodos mais eficientes, algoritmos que também são utilizados em calculadoras e computadores.

◇

Conhecendo as razões trigonométricas, vejamos as relações entre seno, cosseno e tangentes de ângulos agudos.

Considere o triângulo ABC retângulo em C conforme Figura 86.

Figura 86: $\triangle ABC$, retângulo em C.



Fonte: Autor.

Tabela 3.9: Seno, cosseno e tangente de α e β.

α	β
$sen\ \alpha = \dfrac{a}{c}$	$sen\ \beta = \dfrac{b}{c}$
$cos\ \alpha = \dfrac{b}{c}$	$cos\ \beta = \dfrac{a}{c}$
$tg\ \alpha = \dfrac{a}{b}$	$tg\ \beta = \dfrac{b}{a}$

Fonte: Autor.

Note que os ângulos de medidas α e β são complementares, logo

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \beta = 90° - \alpha.$$

Veja que sen $\alpha = \dfrac{a}{c}$ e cos $\beta = \dfrac{a}{c}$, então sen α = cos β. Substituindo $\beta = 90° - \alpha$ na última igualdade, obtemos:

$$sen\ \alpha = cos\ \beta = cos\ (90° - \alpha). \tag{3.9}$$

Veja também que cos $\alpha = \dfrac{b}{c}$ e $sen\ \beta = \dfrac{b}{c}$, então $cos\ \alpha = sen\ \beta$. Substituindo $\beta = 90° - \alpha$, obtemos:

$$cos\ \alpha = sen\ \beta = sen\ (90° - \alpha). \tag{3.10}$$

Podemos relacionar a tangente de um ângulo α com o seno e o cosseno de α. No triângulo ABC, Figura 86, temos $sen\ \alpha = \frac{a}{c}$, $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$ e $tg\ \alpha = \frac{a}{b}$. Segue então que

$$sen\ \alpha = \frac{a}{c} \Rightarrow a = c \cdot sen\ \alpha, \tag{3.11}$$

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \cdot cos\ \alpha. \tag{3.12}$$

Substituindo 3.11 e 3.12 na equação da tangente de α, obtemos

$$tg\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{c \cdot sen\ \alpha}{c \cdot cos\ \alpha} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}. \tag{3.13}$$

Portanto, a tangente de α é a razão entre o seno e o cosseno de α, isto é,

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}. \tag{3.14}$$

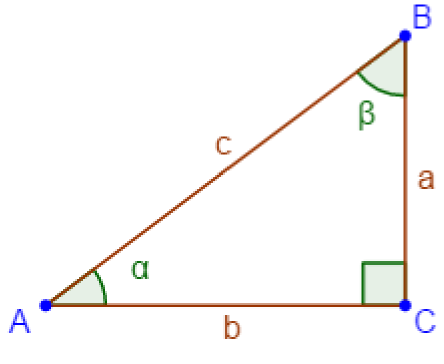
A seguir apresentaremos a relação fundamental da trigonometria.

Teorema 3.74 *Seja α a medida de um ângulo agudo qualquer, então*

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1. \tag{3.15}$$

Demonstração:

Figura 87: $\triangle ABC$, retângulo em C.



Fonte: Autor.

Considere a Figura 87. Vimos que sen $\alpha = \frac{a}{c}$ e o cos $\alpha = \frac{b}{c}$. Temos então que

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2}. \tag{3.16}$$

Pelo teorema de Pitágoras,

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{3.17}$$

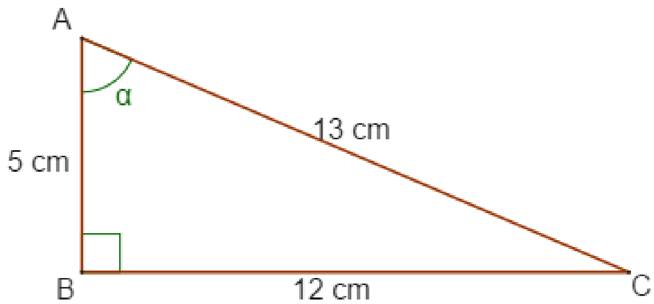
Substituindo 3.17 em 3.16 obtemos

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1. \tag{3.18}$$

Portanto, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$. ◇

Exemplo 3.75 *Considere a Figura 88. Calcule* $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha$.

Figura 88: Triângulo ABC.



Fonte: Autor.

Solução:
Veja que $sen\ \alpha = \dfrac{12}{13}$ e $cos\ \alpha = \dfrac{5}{13}$, logo

$$sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1.$$

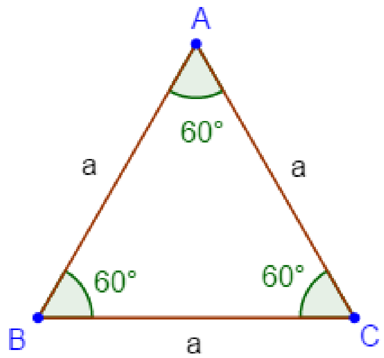
Portanto, $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1$. ◇

3.5.3 Ângulos notáveis

Podemos calcular as razões trigonométricas de alguns ângulos que são chamados de ângulos notáveis.

Apresentamos, a seguir, como se calcula seno, cosseno e tangente dos ângulos de medidas 30°, 45° e 60°. Iniciemos com os ângulos de medidas 30° e 60°. Considere ABC um triângulo equilátero, logo $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$, e seja a a medida dos três lados.

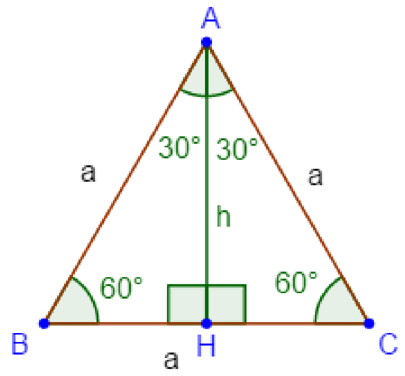
Figura 89: Triângulo equilátero ABC.



Fonte: Autor.

Trace uma bissetriz AH, conforme Figura 90, dividindo o ângulo $\hat{A}$ que mede 60° em dois ângulos de medida 30°. Assim, o triângulo ABC é decomposto em dois triângulos retângulos em H. Pelo caso ALA os triângulos ABH e ACH são congruentes.

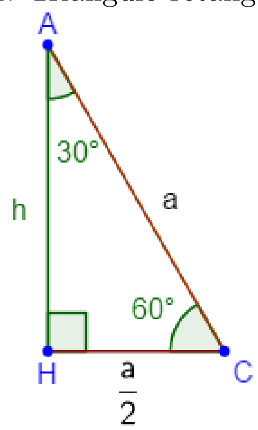
Figura 90: Triângulo equilátero ABC dividido pela bissetriz AH.



Fonte: Autor.

O triângulo ABC é equilátero, então a bissetriz AH é também altura e mediana, logo $\overline{BH} = \overline{CH} = \frac{a}{2}$. Considere o triângulo AHC, conforme Figura 91.

Figura 91: Triângulo retângulo ACH.



Fonte: Autor.

Podemos aplicar o teorema Pitágoras no triângulo retângulo ACH para obter h em função de a.

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} h = \frac{\sqrt{3}a}{2}. \quad (3.19)$$

Perceba que $h = \dfrac{\sqrt{3}a}{2}$ é a altura do triângulo equilátero ABC de lado a.

Com as medidas dos três lados em mãos, calculemos o seno, cosseno e a tangente dos ângulos de medidas 30° e 60°.

1. $sen\ 30° = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow sen\ 30° = \dfrac{1}{2}$;

2. $cos\ 30° = \dfrac{h}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow cos\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3. $tg\ 30° = \dfrac{\frac{a}{2}}{h} = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow tg\ 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

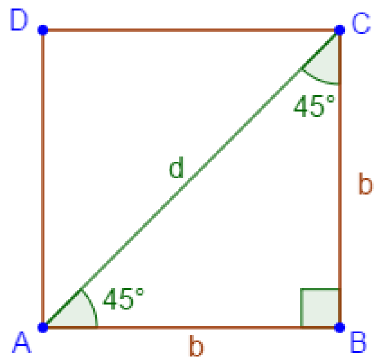
4. $sen\ 60° = \dfrac{h}{a} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow sen\ 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

5. $cos\ 60° = \dfrac{\frac{a}{2}}{a} = \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow cos\ 60° = \dfrac{1}{2}$;

6. $tg\ 60° = \dfrac{h}{\frac{a}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow tg\ 30° = \sqrt{3}$.

Vamos agora ao cálculo do seno, cosseno e tangente de 45°. Observe a Figura 92.

Figura 92: Quadrado $ABCD$ dividido pela diagonal d.



Fonte: Autor.

Note que o quadrado $ABCD$ está dividido pela diagonal d em dois triângulos isósceles congruentes, ambos de catetos b e hipotenusa d, um ângulo reto e dois ângulos de medida 45°. No triângulo ABC são conhecidas as medidas dos catetos, logo podemos calcular a medida da hipotenusa aplicando o teorema de Pitágoras.

$$b^2 + b^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 2b^2 \Rightarrow d = \sqrt{2b^2} \Rightarrow d = b\sqrt{2}. \tag{3.20}$$

Veja que a diagonal d de um quadrado de lado b é dada por $d = b\sqrt{2}$, qualquer que seja o valor de b. De posse das medidas dos catetos e da hipotenusa do $\triangle ABC$, calculemos o seno, cosseno e a tangente de $B\hat{A}C = B\hat{C}A = 45°$.

1. $sen\ 45° = \frac{b}{d} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $cos\ 45° = \frac{b}{d} \Rightarrow cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3. $tg\ 45° = \frac{b}{b} = 1 \Rightarrow tg\ 45° = 1$.

Segue tabela com o resumo das razões trigonométricas dos ângulos notáveis de medidas 30°, 45° e 60°.

Tabela 3.10: Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°.

30°	45°	60°
$sen\ 30° = \frac{1}{2}$	$sen\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos\ 60° = \frac{1}{2}$
$tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$tg\ 45° = 1$	$tg\ 60° = \sqrt{3}$

Fonte: Autor.

Existem mais ângulos notáveis que podem ser vistos quando se estuda ângulos pelo ciclo trigonométrico. Para o leitor interessado em aprofundar seus estudos nesse assunto indicamos as referências [6] e [8].

3.5.4 Seno e cosseno da soma

A partir do conhecimento dos valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, podemos calcular diversos outros valores, realizando operação de soma e diferença de dois ângulos em que se conhecem os valores.

Aqui vamos enunciar as fórmulas para os cáculos do seno e cosseno de ângulos obtidos pela soma ou diferença de dois ângulos de medidas α e β.

Proposição 3.76 *Sejam α e β as medidas de dois ângulos agudos. Então*

a) $sen\ (\alpha + \beta) = sen\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \beta \cdot cos\ \alpha$;

b) $sen\ (\alpha - \beta) = sen\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \beta \cdot cos\ \alpha$;

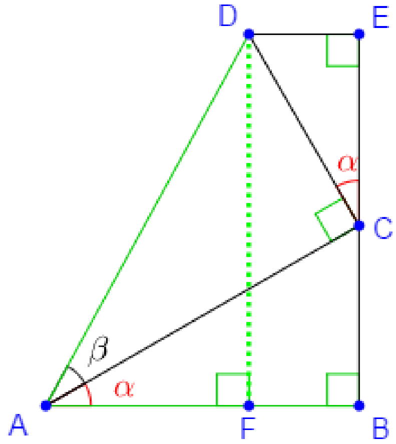
c) $cos\ (\alpha + \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$;

d) $cos\ (\alpha - \beta) = cos\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \alpha \cdot sen\ \beta$.

Vamos apresentar as demonstrações para seno e cosseno de $(\alpha+\beta)$. As demonstrações para seno e cosseno de $(\alpha-\beta)$ são análogas.

Demonstração: Considere a Figura 93.

Figura 93: Seno da soma de dois ângulos.



Fonte: Autor.

a) **seno de** $(\alpha+\beta)$

A partir da Figura 93, os triângulos ABC e ACD são retângulos, logo

$$sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},\ cos\ \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},\ sen\ \beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \text{ e } cos\ \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}.$$

Perceba que,

$$\begin{aligned} sen\ (\alpha+\beta) &= sen\ (B\hat{A}C + C\hat{A}D) = sen\ B\hat{A}D = sen\ F\hat{A}D = \frac{\overline{FD}}{\overline{AD}} \\ &= \frac{\overline{BC}+\overline{CE}}{\overline{AD}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}}. \end{aligned}$$

Escreva $\overline{BC}$ em função do seno de α e $\overline{CE}$ em função do cosseno de α:

$$\begin{aligned} sen\ \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \quad &\Rightarrow \quad \overline{BC} = \overline{AC} \cdot sen\ a \\ &\Rightarrow \quad \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos\ \alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \quad &\Rightarrow \quad \overline{CE} = \overline{CD} \cdot cos\ \alpha \\ &\Rightarrow \quad \overline{CE} = \overline{CD} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \end{aligned}$$

Então,

$$
\begin{aligned}
sen\ (\alpha+\beta) &= \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{CE}}{\overline{AD}}\\
&= \frac{\overline{AC}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{CD}\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}}{\overline{AD}}\\
&= \frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}\\
&= \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}+\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\\
&= sen\ \alpha\cdot cos\ \beta+sen\ \beta\cdot cos\ \alpha.
\end{aligned}
$$

Portanto, $sen\ (\alpha+\beta)=sen\ \alpha\cdot cos\ \beta+sen\ \beta\cdot cos\ \alpha$.

c) **cosseno de** $(\alpha+\beta)$
Perceba também que,

$$
\begin{aligned}
cos\ (\alpha+\beta) &= cos\ (B\hat{A}C+C\hat{A}D)=cos\ B\hat{A}D=cos\ F\hat{A}D=\frac{\overline{AF}}{\overline{AD}}\\
&= \frac{\overline{AB}-\overline{FB}}{\overline{AD}}\\
&= \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}-\frac{\overline{FB}}{\overline{AD}}.
\end{aligned}
$$

Escreva $\overline{AB}$ em função do cosseno de α e $\overline{FB}$ em função do seno de α e note que $\overline{FB}=\overline{DE}$,

$$
\begin{aligned}
cos\ \alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad &\Rightarrow \quad \overline{AB}=\overline{AC}\cdot cos\ \alpha\\
&\Rightarrow \quad \overline{AB}=\overline{AC}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sen\ \alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} \quad &\Rightarrow \quad \overline{DE}=\overline{CD}\cdot sen\ a\\
&\Rightarrow \quad \overline{DE}=\overline{CD}\cdot\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.
\end{aligned}
$$

Então,

$$\begin{aligned}
cos\ (\alpha+\beta) &= \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{FB}}{\overline{AD}} \\
&= \frac{\overline{AC}\cdot\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}}{\overline{AD}} - \frac{\overline{CD}\cdot\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}}{\overline{AD}} \\
&= \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}{\overline{AD}\cdot\overline{AC}} - \frac{\overline{CD}\cdot\overline{BC}}{\overline{AD}\cdot\overline{AC}} \\
&= \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \\
&= cos\ \alpha\cdot cos\ \beta - sen\ \alpha\cdot sen\ \beta.
\end{aligned}$$

Portanto, $cos\ (\alpha+\beta) = cos\ \alpha\cdot cos\ \beta - sen\ \alpha\cdot sen\ \beta$. ■

A seguir, uma aplicação das fórmulas seno e cosseno da soma.

Exemplo 3.77 *Calcule o seno e o cosseno de* $75°$ *e use os resultados para calcular o seno e o cosseno de* $15°$ *e as tangentes desses dois ângulos.*

Solução:

a) seno de $75°$.

Note que $75 = 45 + 30$, como conhecemos os senos e cossenos de $45°$ e $30°$, então:

$sen\ 75° = sen\ (45° + 30°) = sen\ 45°\cdot cos\ 30° + sen\ 30°\cdot cos\ 45° \Rightarrow$

$sen\ 75° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$sen\ 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

b) cosseno de $75°$.

$cos\ 75° = cos\ (45° + 30°) = cos\ 45°\cdot cos\ 30° - sen\ 30°\cdot sen\ 45° \Rightarrow$

$cos\ 75° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \Rightarrow$

$os\ 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

c) seno de $15°$.

Veja que $15° = (90° - 75°)$, então,

$sen\ 15° = cos\ (90° - 15°) = cos\ 75°)$, então pelo item *b*)

$sen\ 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$

d) cosseno de 15°.

$cos\ 15° = sen\ (90° - 15°) = sen\ 75°$, então pelo item a)

$cos\ 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

e) tangente de 15°.

Sabemos que $tg\ 15° = \dfrac{sen\ 15°}{cos\ 15°}$, então usando c) e d),

$$tg\ 15° = \frac{sen\ 15°}{cos\ 15°} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$$

$\Rightarrow tg\ 15° = 2-\sqrt{3}$.

f) tangente de 75°.

Similarmente ao item e) temos,

$$tg\ 75° = \frac{sen\ 75°}{cos\ 75°} = \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{8+2\sqrt{12}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2+\sqrt{3}$$

$\Rightarrow tg\ 75° = 2+\sqrt{3}$.

◇

3.5.5 Tangente da soma e da diferença

Se para um ângulo de medida γ, a tangente é dada por $tg\ \gamma = \dfrac{sen\ \gamma}{cos\ \gamma}$, para $cos\ \gamma \neq 0$, tomando $\gamma = \alpha+\beta$ vamos determinar a $tg\ (\alpha+\beta)$ a partir dos valores de $tg\ \alpha$ e $tg\ \beta$. Veja que

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{sen\ (\alpha+\beta)}{cos\ (\alpha+\beta)}.$$

Substituindo as fórmulas do seno e do cosseno da soma, temos a seguinte expressão

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{sen\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \beta \cdot cos\ \alpha}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}.$$

Dividindo o numerador e o denominador da equação acima por $cos\ \alpha \cdot cos\ \beta \neq 0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
tg\ (\alpha+\beta) &= \frac{\dfrac{sen\ \alpha \cdot cos\ \beta + sen\ \beta \cdot cos\ \alpha}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta - sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}} \\
&= \frac{\dfrac{sen\ \alpha \cdot cos\ \beta}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta} + \dfrac{sen\ \beta \cdot cos\ \alpha}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}}{\dfrac{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta}{cos\ \alpha \cdot cos\ \beta} - \dfrac{sen\ \alpha \cdot sen\ \beta}{cos\ \beta \cdot cos\ \beta}} \\
&= \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$tg\ (\alpha+\beta) = \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}. \tag{3.21}$$

Repetindo o procedimento utilizado para a tangente da soma obtemos a seguinte expressão para a tangente da diferença

$$tg\ (\alpha-\beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}. \tag{3.22}$$

Essas fórmulas valem para quaisquer ângulos agudos de medidas α e β. Quando se trabalha com ângulos de maneira geral, é necessário restringir os ângulos em que o cosseno valer 0 (*zero*).

Exemplo 3.78 *Podemos calcular a tangente de* $15°$ *utilizando os valores das tagentes de* $30°$ *e* $45°$*, que são conhecidos.*

Solução:

Veja que $15° = 45° - 30°$, então

$$
\begin{aligned}
tg\ 15° &= tg\ (45° - 30°) \\
&= \frac{tg\ 45° - tg\ 30°}{1 + tg\ 45° \cdot tg\ 30°} \\
&= \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \\
&= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} \\
&= 2 - \sqrt{3}
\end{aligned}
$$

◇

3.5.6 Lei dos cossenos

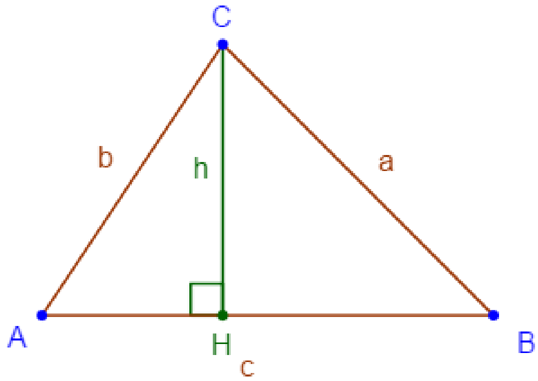
A lei dos cossenos estabelece, conforme a proposição a seguir, relações métricas entre os lados de qualquer triângulo. Neste texto apresentaremos este resultado apenas para triângulos acutângulos.

Proposição 3.79 *Em um triângulo acutângulo ABC de medidas dos lados $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, são válidas as seguintes relações:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \ \cdot cos\ \hat{A};$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \ \cdot cos\ \hat{B};$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \ \cdot cos\ \hat{C}.$$

Demonstração:
Considere o triângulo ABC acutângulo e CH a altura relativa ao lado AB de medida h conforme a Figura 94.

Figura 94: Lei dos cossenos num triângulo ABC acutângulo.



Fonte: Autor.

Note que podemos aplicar o teorema de Pitágoras nos triângulos ACH e CBH. Para o triângulo CBH, perceba que $\overline{BH} = c - \overline{AH}$. Logo

$$a^2 \quad = \quad h^2 + \overline{BH}^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + (c - \overline{AH})^2.$$

Pelo triângulo AHC temos: $sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot sen\ \hat{A}$ e $cos\ \hat{A} = \dfrac{\overline{AH}}{b} \Rightarrow \overline{AH} = b \cdot cos\ \hat{A}$, então

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cdot sen\ \hat{A})^2 + (c - b \cdot cos\ \hat{A})^2 \\ &= b^2 \cdot sen^2\ \hat{A} + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \hat{A} + b^2 \cdot cos^2\ \hat{A} \\ &= b^2 \cdot (sen^2\ \hat{A} + cos^2\ \hat{A}) + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos^2\ \hat{A}. \end{aligned}$$

Como $sen^2\ \hat{A} + cos^2\ \hat{A} = 1$, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ \hat{A}.$$

Analogamente, para os lados AC e AB e suas respectivas alturas, temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \ \cdot cos\ \hat{B}; \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \ \cdot cos\ \hat{C}. \end{aligned}$$

Conhencendo-se as medidas dos lados de um triângulo, podemos calcular o cosseno de cada ângulo. Tomando a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot\ cos\ \hat{A}$, então

$$cos\ \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}.$$

Nesse caso, temos uma consequência importante da lei dos cossenos: $\hat{A}$ é agudo se, e só se,

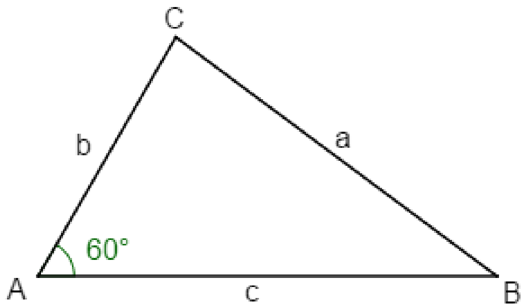
$$cos\ \hat{A} > 0 \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2.$$

A seguir dois exemplos de aplicações da lei dos cossenos.

Exemplo 3.80 *Em um terreno de formato triângular, dois de seus lados medem 30 m e 50 m e formam um ângulo de* $60°$*. Calcule a medida do terceiro lado desse terreno.*

Solução:
Considere $b = 30$ m e $c = 50$ m, conforme a Figura 95.

Figura 95: Aplicação da lei dos cossenos.



Fonte: Autor.

Então o valor da medida do outro lado, que está oposto ao ângulo de medida $60°$, é representado por a. Logo vamos utilizar a equação

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\ 60°.$$

Substituindo os valores de b, c e o cosseno de $60°$, obtemos

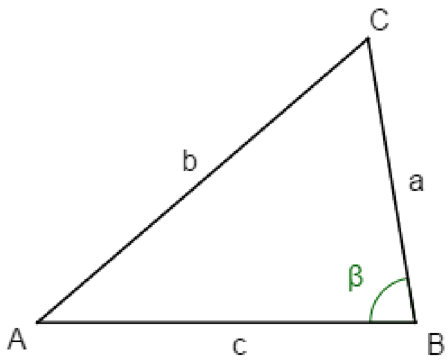
$$\begin{aligned} a^2 &= 30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 900 + 2500 - 1500 = 1900 \\ \Rightarrow a &= \sqrt{1900} = \sqrt{100 \cdot 19} = 10\sqrt{19} \text{ m.} \end{aligned}$$

Portanto, a medida do terceiro lado desse terreno é $10\sqrt{19}$ m. ◇

Exemplo 3.81 *Num triângulo cujos lados medem 4 cm, 5 cm e 6 cm, qual o valor do cosseno do ângulo oposto ao maior lado?*

Solução:
Considere o triângulo ABC conforme a Figura 96.

Figura 96: Aplicação da lei dos cossenos



Fonte: Autor.

Seja a = 4 cm, c = 5 cm e b = 6 cm. Assim, β é a medida do ângulo oposto ao maior lado de medida b.
Logo, para calcular $cos\ \beta$, utilizemos a relação

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\ \beta.$$

Então

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot cos\ \beta.$$

Segue então que

$$36 = 16 + 25 - 40 \cdot cos\ \beta.$$

Logo

$$cos\ \beta = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}.$$

Potanto, o valor do cosseno do ângulo oposto ao maior lado é $\frac{1}{8}$. ◇

3.5.7 Lei dos senos

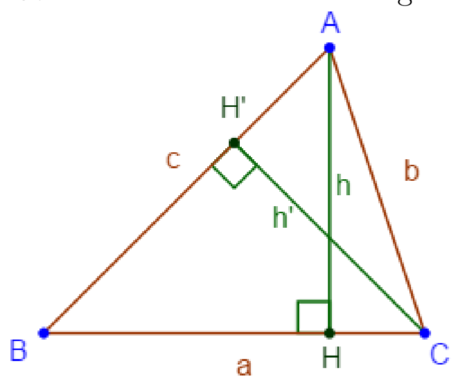
A lei dos senos estabelece num triângulo igualdade das razões entre o valor da medida de um lado e o seno oposto a ele. É uma proposição de demonstração simples e pode ser muito útil para o cálculo da distância entre dois pontos, principalmente em situações que surgem alguns obstáculos entre esses pontos, como um lago, um rio ou um penhasco.

Proposição 3.82 *Em um triângulo ABC qualquer, as medidas dos lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:*

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}.$$

Demonstração:
Considere o triângulo ABC, conforme Figura 97, e AH a altura relativa ao lado BC. Fazendo $h = \overline{AH}$, temos

Figura 97: Lei dos senos num triângulo ABC.



Fonte: Autor.

$$sen\ \hat{B} = \frac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot sen\ \hat{B},$$

$$sen\ \hat{C} = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot sen\ \hat{C}.$$

Logo, $c \cdot sen\ \hat{B} = b \cdot\ sen\ \hat{C}$, que é equivalente a

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}.$$

Agora considere h' a medida da altura CH' relativa ao lado AB, então:

$$sen\ \hat{B} = \frac{h'}{a} \Rightarrow h' = a \cdot sen\ \hat{B},$$

$$sen\ \hat{A} = \frac{h'}{b} \Rightarrow h' = b \cdot sen\ \hat{A}.$$

Logo, $a \cdot sen\ \hat{B} = b \cdot\ sen\ \hat{A}$, que é equivalente a

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}.$$

Como $\dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$ e $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$, obtemos

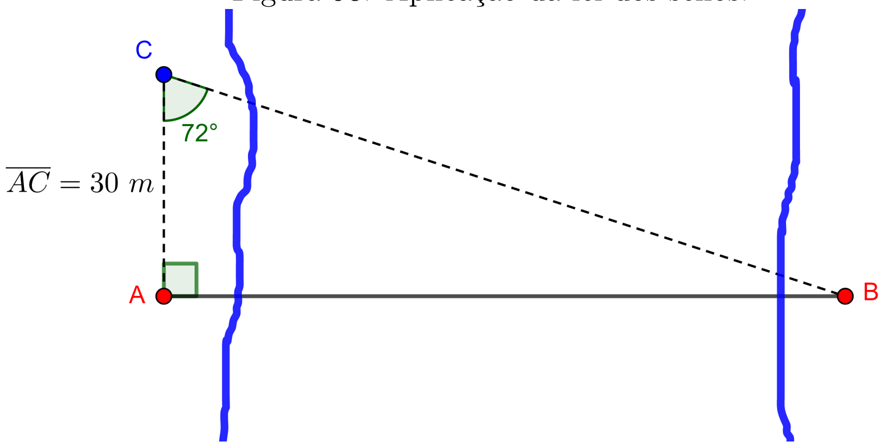
$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}.$$

■

A seguir, um exemplo de como aplicar a lei dos senos.

Exemplo 3.83 *Pretende-se construir uma ponte sobre um rio. A equipe técnica responsável, fazendo um estudo preliminar, escolhe o lugar que considera adequado. Então, a partir de um ponto do outro lado, próximo à margem, resolve estimar o comprimento da ponte. Dispondo de uma trena, um transferidor e uma calculadora, lembra que pode utilizar a lei dos senos.*

Figura 98: Aplicação da lei dos senos.



Fonte: Autor.

Solução:

1º Passo: A equipe chama de ponto B a marca avistada do outro lado do rio e coloca um bastão no ponto A;

2º Passo: com o comprimento total da trena que é de 30 metros coloca outro bastão, formando um ângulo reto com AB e o chama de ponto C;

3º Passo: com o auxílio do transferidor mede o ângulo $A\hat{C}B$ e constata que mede 72°, e utilizando a soma dos ângulos dos internos de um triângulo, tem-se que $A\hat{B}C = 18°$;

4º Passo: com $\hat{C}$ oposto ao lado AB e $\hat{B}$ oposto a AC, pode-se usar a relação

$$\frac{\overline{AB}}{sen\ \hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{sen\ \hat{B}};$$

5º Passo: usando a calculadora, tomando quatro dígitos significativos para seno de 72° e 18°, conclui que:

$$\frac{\overline{AB}}{sen\ \hat{C}} = \frac{\overline{AC}}{sen\ \hat{B}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{sen\ 72^\circ} = \frac{30\ m}{sen\ 18^\circ} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{0,9510} = \frac{30\ m}{0,3090} \Rightarrow \overline{AB} \cong 92,33\ m.$$

Então, $\overline{AB} \cong 92,33\ m$ é o valor estimado para o comprimento da ponte. ◇

Com esse método é possível determinar distâncias cuja medição direta não é possível. Há um instrumento de medição chamado **teodolito**, Figura 99, que é muito utilizado nessas ocasiões. É um instrumento óptico que realiza leituras digitais ou eletrônicas fazendo triangulação de pontos e medidas dos ângulos com muita rapidez e precisão.

Figura 99: Teodolido eletrônico.

Fonte: Disponível em [27].

Para mais informações sobre o instrumento teodolito, indicamos as referências [26] e [27].

Vamos agora destacar questões das provas do ENEM, de 2009 a 2019, que abordaram conteúdos apresentados neste trabalho.

3.6 Questões do ENEM

As questões apresentadas nesta seção foram coletadas das provas do ENEM de 2009 a 2019 e podem ser encotradas no portal eletrônico: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos.

As questões estão acompanhadas de uma proposta de solução comentada. Nas soluções de algumas questões, as figuras foram editadas pelo autor para fins didáticos.

1. (*ENEM 2018*) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em oito partes iguais.

Figura 100: Rosa dos ventos.

Fonte: ENEM 2018.

Uma câmera de vigilância está fixada no teto de um shopping e sua lente pode ser direcionada remotamente através de um computador, para qualquer sentido. A lente da câmera está apontada inicialmente no sentido oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a terceira mudança, ele é orientado a reposicionar a câmera com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual a mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmera?

a) 75° no sentido horário.

b) 105° no sentido anti-horário.

c) 120° no sentido anti-horário.

d) 135° no sentido anti-horário.

e) 165° no sentido horário.

Solução:

A questão informa que há quatro mudanças angulares na câmera nos sentidos horário ou anti-horário.

Considere as mudanças no sentido anti-horário como positivas e no sentido horário como negativas.

Assim, da posição inicial O para a final NO há uma mudança de $-45°$, pois como são oito sentidos, de um para outro a diferença é de $45°$.

Então, somando os valores dos ângulos nas quatro mudanças o resultado é $-45°$. Chame x o valor da última mudança que é o valor procurado, logo:

$$135° + (-60°) + 45° + x = -45° \Rightarrow x = -165°.$$

Portanto, a última mudança foi de $165°$ no sentido horário.

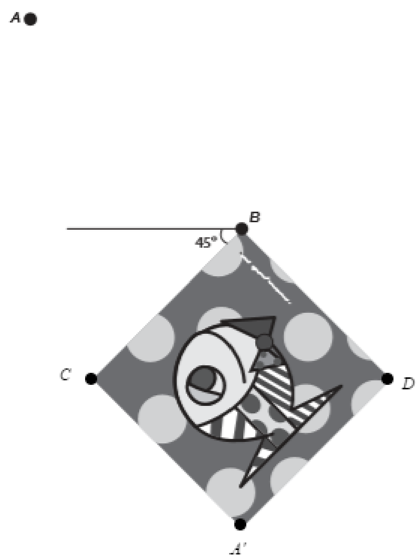
Resposta: alternativa *e*. ◇

2. (*ENEM 2017*) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de $45°$ com a linha do horizonte.

Figura 101: O peixe.

Fonte: ENEM 2017.

Figura 102: O peixe.



Fonte: ENEM 2017.

Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente a parede, no menor ângulo possível inferior a 360°. A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de

a) 90° no sentido horário.

b) 135° no sentido horário.

c) 180° no sentido anti-horário.

a) 270° no sentido anti-horário.

a) 315° no sentido horário.

Solução:

Veja que a tela ao se desprender do ponto de fixação B fez um giro no sentido anti-horário.

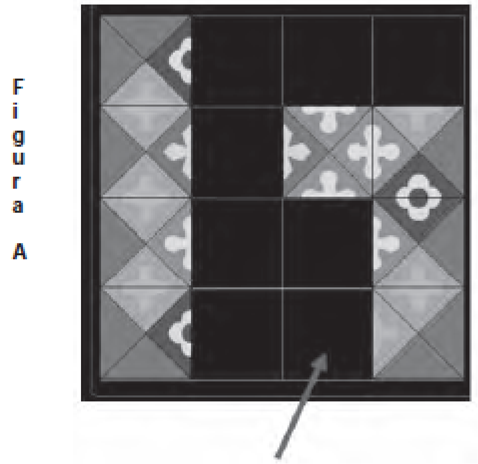
Considere C a ponta de cima da Figura 101 que fica na frente do peixe. Como normalmente os lados de uma tela são horizontais e verticais, BC é vertical, logo forma um ângulo de 90° com o lado BD.

Após o giro, BC forma um ângulo de 45° abaixo da horizontal, conforme a Figura 102. Logo, para voltar ao lugar inicial com o menor ângulo, deve fazer um giro de $45° + 90° = 135°$ no sentido horário.

Resposta: alternativa b. ◇

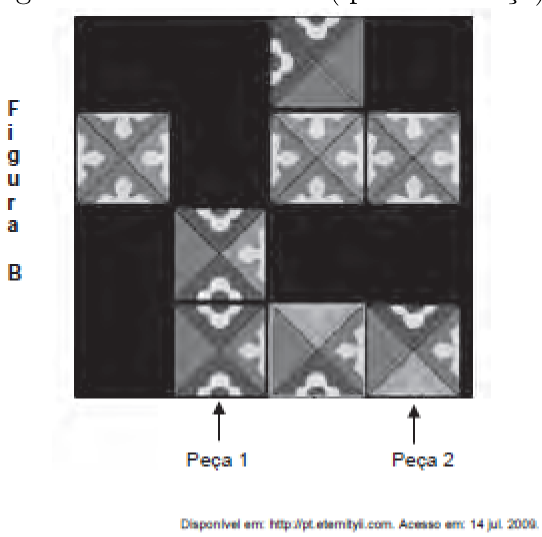
3. (*ENEM 2009*) As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra cabeça que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças na figura do tabuleiro B. As peças são retiradas do tabuleiro B e colocadas no tabuleiro A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.

Figura 103: Tabuleiro A (quebra cabeça).



Fonte: ENEM 2009.

Figura 104: Tabuleiro B (quebra cabeça).



Fonte: ENEM 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.

b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.

c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.

d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.

e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

Solução:

Observe que ao montar o quebra cabeça conforme Figura A as partes iguais de duas peças ficam juntas de forma simétrica.

Veja que a peça indicada na Figura A deve ser colocada com o triângulo mais claro voltado para a direita.

Note que somente a peça 2, das duas opções indicadas na Figura B, possui o triângulo em questão, então devemos utilizá-la e girá-la 90° no sentido anti-horário para que o triângulo mais claro fique voltado para a direita.

Resposta: alternativa c. ◇

4. (*ENEM 2009*) Rotas aéreas são como pontes que ligam duas cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Figura 105: Mapa do Brasil e algumas Capitais.

SIQUEIRA, S. **Brasil Regiões**. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

Fonte: ENEM 2009.

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135° no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília – DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

a) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.

b) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.

c) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.

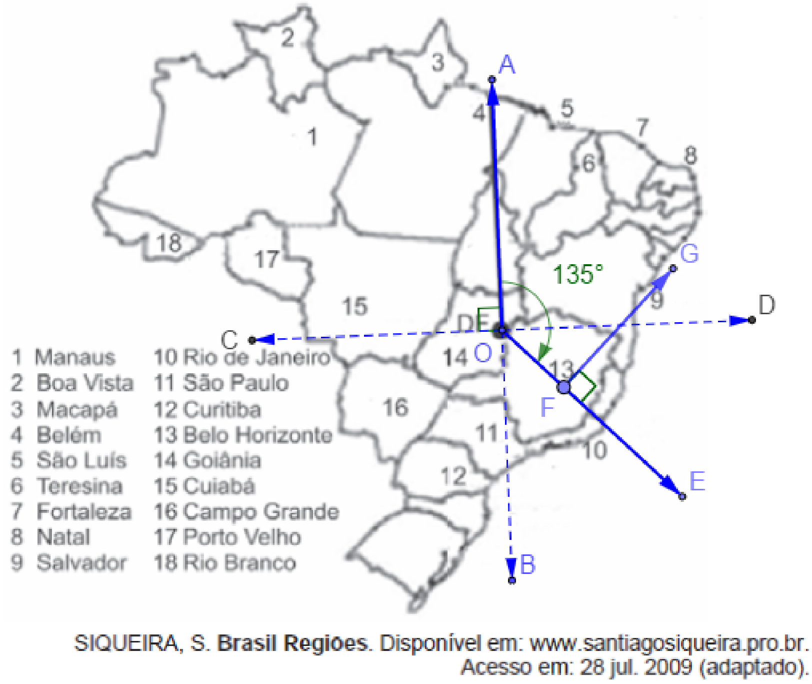
d) Goiânia, e em seguida embarcou para Rio de Janeiro.

e) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

Solução:

Considere a Figura 106.

Figura 106: Mapa do Brasil e algumas Capitais.



Fonte: ENEM 2009, editada pelo autor para a solução.

Seja $\overrightarrow{OA}$ a direção Brasília – Belém (avião AI).

Trace a semirreta $\overrightarrow{OB}$ oposta a $\overrightarrow{OA}$ e a reta $\overleftrightarrow{CD}$ perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ passando por O.

Veja que o ângulo de medida 135° no sentido horário, sendo $\overrightarrow{OA}$ um dos lados, é o ângulo AOE, onde $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo DOB e o divide nos ângulos DOE e EOB, ambos de medida 45°.

Daí, vê-se que $\overrightarrow{OE}$ que representa o avião AII, está na direção do número 13 que representa Belo Horizonte (capital de Minas Gerais).

Agora considere F representando Belo Horizonte e trace o ângulo de 90° a partir de $\overrightarrow{FE}$, no sentido anti-horário, obtendo o ângulo EFG.

Assim, $\overrightarrow{FG}$ é a direção do avião AIII partindo de Belo Horizonte e está na direção do número 9 que representa Salvador (capital da Bahia).

Portanto, Carlos viaja de Brasília para Salvador com uma conexão em Belo Horizonte.

Resposta: alternativa *b*. ◇

5. (*ENEM 2012*) Em fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para o Sistema de Posicionamento Global) com longitude de $124^\circ\ 3'\ 0''$ a leste do Meridiano de Greenwich.

   Dado 1° equivale a $60'$ e $1'$ equivale a $60''$.

   PAVARIM, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado).

   A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude na forma decimal é

   a) $124,02^\circ$.

   b) $124,05^\circ$.

   c) $124,20^\circ$.

   d) $124,30^\circ$.

   e) $124,50^\circ$.

   Solução:

   Precisamos transformar as partes dadas em minutos e segundos da localização do vulcão em grau na forma decimal e somar com a parte dada em graus.

Como a parte em segundo vale 0 (*zero*), só temos que transformar os minutos.

É dado que $60' = 1°$, então $3'$ equivale a $\left(\frac{3}{60}\right)^{\circ} = \left(\frac{1}{20}\right)^{\circ} = 0,05°$.

Somando esse resultado a $124°$ obtemos

$$124° + 0,05° = 124,05°.$$

Resposta: alternativa *b*. ◇

6. *(ENEM 2018)* O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.

Figura 107: O remo de assento deslizante.

Fonte: ENEM 2018.

Nesta posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outros extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos forma um triângulo ABC cujo ângulo BAC tem media de $170°$. O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

a) retângulo escaleno.

b) acutângulo escaleno.

c) acutângulo isósceles.

d) obtusângulo escaleno.

e) obtusângulo isósceles.

Solução:

Pede-se o tipo de triângulo formado pelos pontos A, B, C, na Figura 107, quanto as medidas dos ângulos e dos lados.

Como a medida do ângulo BAC é $170°$, o $\triangle ABC$ é obtusângulo.

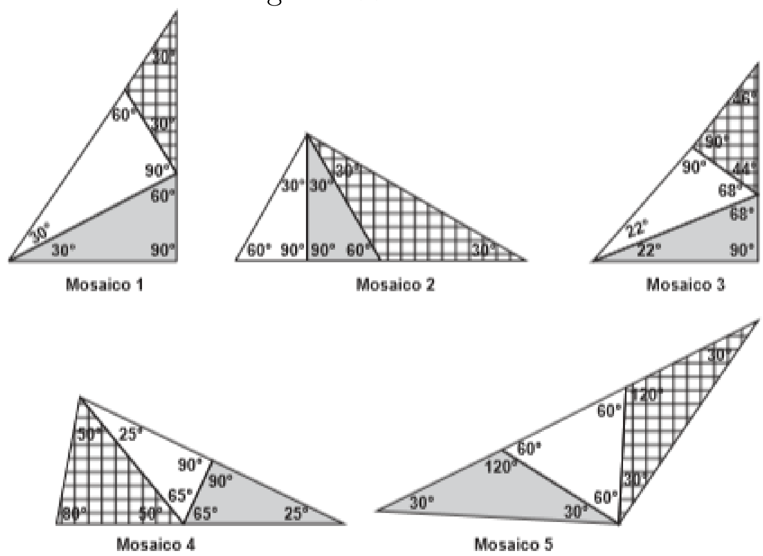
Como os remos devem possuir a mesma medida, então $\overline{AB} = \overline{AC}$, logo, o $\triangle ABC$ é isósceles.

Portanto, o triângulo formado pelos vértices $A,\ B,\ C$ é obtusângulo isósceles.

Resposta: alternativa *e*. ◇

7. *(ENEM 2016)* Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.

Figura 108: Mosaicos.



Fonte: ENEM 2016.

Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Solução:

Dentre os mosaicos de 1 a 5, pede-se para identificar aqueles que possui as seguintes características:

1ª) seja retângulo;

2ª) contenha dois triângulos retângulos congruentes na sua construção e

3ª) contenha um triângulo isósceles.

Pela primeira caraterística, descartamos os mosaicos 4 e 5 que não tem formato de triângulo retângulo. Resta analisar os mosaicos de 1 a 3.

O mosaico 1 é retângulo, possui dois triângulos retângulos e um isósceles. Porém, os triângulos retângulos não são congruentes. Veja que o lado comum aos dois triângulos retângulos é oposto a ângulos de medidas diferentes em cada triângulo. Logo não atende todas características pretendidas.

O mosaico 2 é retângulo, possui dois triângulos retângulos e um isósceles, e podemos verificar que os dois são congruentes, pois o lado comum está entre ângulos de mesma medida, caso ALA. Então, atende as características pretendidas.

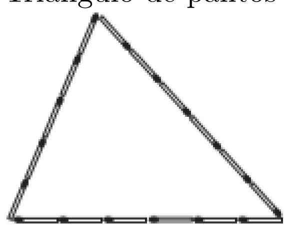
O mosaico 3 é retângulo, mas possui somente um triângulo retângulo na sua construção, logo não atende todas características pretendidas.

Portanto, o mosaico 2 é o único que satisfaz às condições desejadas.

Resposta: alternativa *b*. ◇

8. *(ENEM 2014)* Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.

Figura 109: Triângulo de palitos de fósforos.



Fonte: ENEM 2014.

A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

a) 3

b) 5

c) 6

d) 8

e) 10

Solução:

Pede-se a quantidade de triângulos que podem ser construídos, tal que a soma das medidas dos três lados seja igual a 17 unidades, sendo a medida de cada lado um número natural, pois os palitos possuem o mesmo comprimento.

Como um lado é dado e deve ter 6 unidades, então a soma das medidas dos outros dois é igual 11.

Mas é preciso verificar as condições de existência de um triângulo, onde a medida de qualquer um dos lados deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois.

Logo, nesse caso todos os lados devem ser menores ou iguais a 8 unidades.

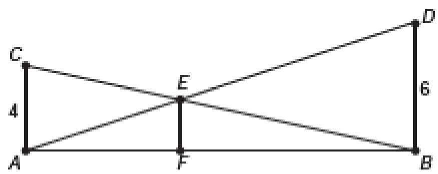
Então as possibilidades para as medidas dos dois lados não dados são: 8 e 3; 7 e 4; 6 e 5.

Portanto, há três possibilidades para as condições dadas.

Resposta: alternativa a. ◇

9. (*ENEM 2013*) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.

Figura 110: Haste de sustentação de postes.



Fonte: ENEM 2013.

Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

a) 1 m.

b) 2 m.

c) 2,4 m.

d) 3 m.

e) $2\sqrt{6}$ m.

Solução:

Veja que $FE \parallel AC \parallel BD$, pois são segmentos perpendiculares ao solo que é representado por AB.

Destaquemos duas relações de semelhança de triângulos a partir da figura em questão.

Relação 1: $AEC \sim DEB$, então

$$\begin{cases} \angle CAE \equiv \angle BDE, \text{ (alternos internos);} \\ \angle ACE \equiv \angle DBE, \text{ (alternos internos);} \\ \angle AEC \equiv \angle DEB, \text{ (opv.).} \end{cases}$$

Relação 2: $AFE \sim ABD$, então

$$\begin{cases} \angle AFE \equiv \angle ABD, \text{ (correspondentes);} \\ \angle AEF \equiv \angle ADB, \text{ (correspondentes);} \\ \angle EAF \equiv \angle DAB, \text{ pois são iguais.} \end{cases}$$

Veja que a razão de semelhança k, entre os triângulos AEC e DEB, é igual a $\frac{4}{6}$, pois 4 e 6 são medidas de dois lados correspondentes.

Perceba que FA e FB são as alturas dos triângulos AEC e DEB, respectivamente, logo

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{4}{6} \Rightarrow \overline{FA} = \frac{4}{6} \cdot \overline{FB}.$$

Utilizando a relação de correspondência $\frac{\overline{EF}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{DB}}{BA}$ obtemos

$$\frac{\overline{EF}}{\frac{4}{6} \cdot \overline{FB}} = \frac{\overline{DB}}{\frac{4}{6} \cdot \overline{FB} + \overline{FB}} = \frac{6}{\frac{10}{6} \cdot \overline{FB}}.$$

Segue então que

$$\frac{\overline{EF}}{4} = \frac{6}{10}.$$

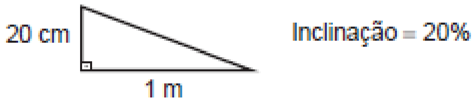
Logo

$$\overline{EF} = \frac{6 \cdot 4}{10} = \frac{24}{10} = 2,4\ m.$$

Resposta: alternativa *c*. ◇

10. *(ENEM 2018)* A inclinação de uma rampa é calculada da seguinte maneira: para cada metro medido na horizontal, mede-se x centímetros na vertical. Diz-se, nesse caso, que a rampa tem inclinação x%, como no exemplo da figura:

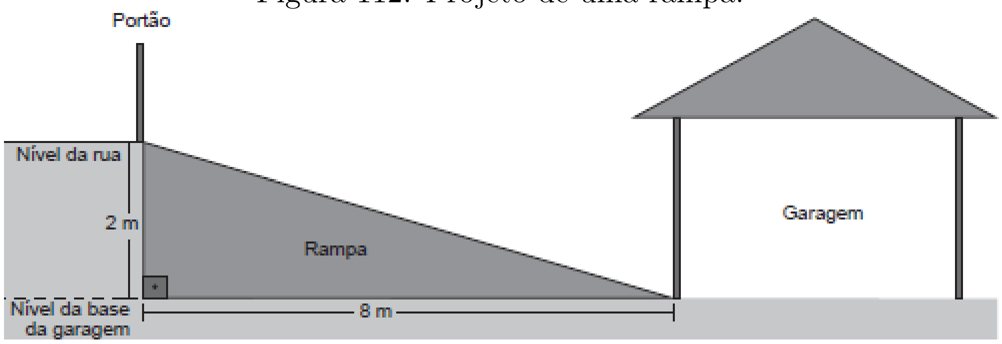
Figura 111: Norma de inclinação de rampa.



Fonte: ENEM 2018.

A figura apresenta um projeto de uma rampa de acesso a uma garagem residencial cuja base, situada abaixo do nível da rua, tem 8 metros de comprimento.

Figura 112: Projeto de uma rampa.



Fonte: ENEM 2013.

Depois de projetada a rampa, o responsável pela obra foi informado de que as normas técnicas de município onde ela está localizada exigem que a inclinação máxima de uma rampa de acesso a uma garagem residencial seja de 20%.

Se a rampa projetada tiver inclinação superior a 20%, o nível da garagem deverá ser alterado para diminuir o percentual de inclinação, mantendo o comprimento da base da rampa.

Para atender às normas técnicas do município, o nível da garagem deverá ser

a) elevado em 40 cm.

b) elevado em 50 cm.

c) mantido no mesmo nível.

d) rebaixado em 40 cm.

e) rebaixado em 50 cm.

Solução:

Para atender as normas técnicas nesse caso, o responsável deve calcular a variação vertical máxima para a rampa de comprimento igual a 8 metros conforme a Figura 112 dessa questão.

Assim, pode usar a semelhança de triângulos, considerando um triângulo de comprimento 1 m e altura 0,2 m de acordo com a norma do município.

Chame de h a variação vertical, então

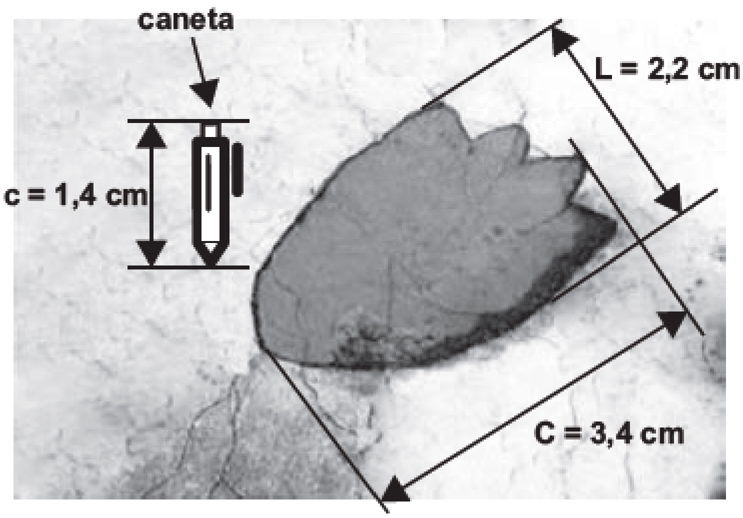
$$\frac{h}{8\ m} = \frac{0,2\ m}{1\ m} \Rightarrow h = 0,2 \cdot 8\ m \Rightarrow h = 1,6\ m.$$

Portanto, como no projeto inicial a variação vertical entre o nível da rua e da garagem era de 2 m, para atender a norma do município deve-se elevar o piso da garagem em pelo menos 0,4 m.

Resposta: alternativa a. ◇

11. *(ENEM 2015)* Um pesquisador, ao explorar uma floresta, fotografou uma caneta de 16,8 cm de comprimento ao lado de uma pegada. O comprimento da caneta (c), a largura (L) e o comprimento (C) da pegada, na fotografia, estão indicados no esquema.

Figura 113: Fotografia de uma pegada.



Fonte: ENEM 2015.

A largura e o comprimento reais da pegada, em centímetros são, respectivamente, iguais a

a) 4,9 e 7,6.

b) 8,6 e 9,8.

c) 14,2 e 15,4.

d) 26,4 e 40,8.

e) 27,5 e 42,5.

Solução:

Devemos calcular as medidas reais L e C.

Veja que podemos encontrar essa razão entre as medidas reais e as medidas na foto dividindo a medida real da caneta, 15,8 cm, pela medida $c = 1,4\ cm$ na foto. Seja r essa razão, então

$$r = \frac{16,8}{1,4} = 12.$$

Portanto o valor real da medida da largura da pegada é

$$L = 12 \cdot 2,2\ cm \Rightarrow L = 26,4\ cm.$$

E da medida do comprimento é

$$C = 12 \cdot 3,4\ cm \Rightarrow C = 40,8\ cm.$$

Resposta: alternativa *d*. ◇

12. *(ENEM 2018)* Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X.

Os valores possíveis para X são, apenas,

a) $X > 1500$.

b) $X < 3000$.

c) $1500 < X < 2250$.

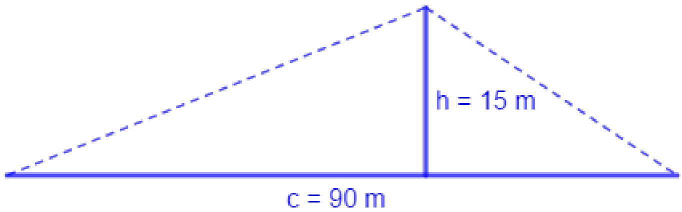
d) $1500 < X < 3000$.

e) $2250 < X < 3000$.

Solução:

Para resolver esta questão, considere a esteira de 90 m de comprimento como sendo a base de um triângulo, e o guindaste de 15 m de altura como sendo a altura desse triângulo.

Figura 114: Simulação de uma esteira e um guindaste.



Fonte: Autor.

Veja que a razão entre as medidas da altura do guindaste e do comprimento da esteira é $\frac{15}{90} = \frac{1}{6}$.
Logo, para o navio ser representado no material publicitário, deve-se manter, no desenho, a mesma razão de $\frac{1}{6}$ entre as medidas da altura do guindaste e do comprimento da esteira.

Se o desenho fosse feito com a altura guindaste igual a 1 cm, o comprimento da esteira mediria 6 cm, como o comprimento do guindaste deve ser menor que 1 cm, o comprimento da esteira será menor que 6 cm.

Se o desenho fosse feito com o comprimento da esteira igual a 4 cm, a altura de guindaste mediria de $\frac{1}{6} \cdot 4 \text{ cm} = \frac{2}{3}$ cm. Mas como o comprimento da esteira deve ser maior que 4 cm, a medida da altura do guindaste será maior que $\frac{2}{3}$ cm.

Assim, a medida da altura do guindaste no desenho pode variar entre $\frac{2}{3}$ cm e 1 cm e a medida do comprimento da esteira pode variar entre 4 cm e 6 cm.

Para a escala de 1 : X, temos X mínimo quando o desenho for o maior possível e X máximo quando o desenho for o menor possível. Então calculando a razão de semelhança entre a medida real do comprimento da esteira e as medidas possíveis no desenho, temos

$$X > \frac{90\ m}{6\ cm} = \frac{90 \cdot 100\ cm}{6\ cm} = \frac{9000}{6} = 1500 \text{ e}$$

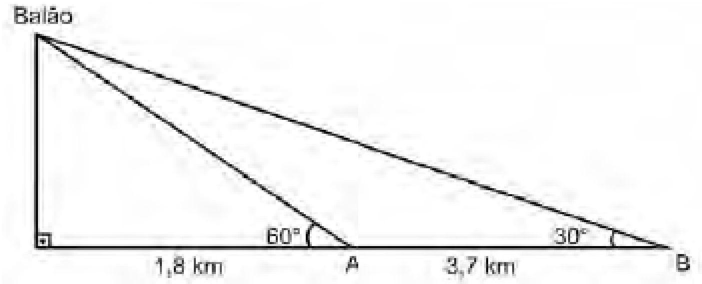
$$X < \frac{90\ m}{4\ cm} = \frac{90 \cdot 100\ cm}{4\ cm} = \frac{9000}{4} = 2250.$$

Portanto, 1500 < X <2250.

Resposta: alternativa *c*. ◇

13. *(ENEM 2010)* Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do Programa Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da cama de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto.

Figura 115: Triângulo representado por dois pontos e um balão.



Fonte: ENEM 2010.

Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km

b) 1,9 km

c) 3,1 km

d) 3,7 km

e) 5,5 km

Solução:

Pede-se a altura aproximada em que se encontrava o balão que é a distância do balão à reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Uma possibilidade para calcular essa distância é aplicar a relação trigonométrica da tangente no ângulo de medida 60°. O cateto adjacente mede 1,8 km, a medida d do cateto oposto é o valor procurado e $tg\ 60° = \sqrt{3}$. Então,

$$tg\ 60° = \frac{d}{1,8\ km} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{d}{1,8\ km} \Rightarrow d = \sqrt{3} \cdot 1,8\ km$$

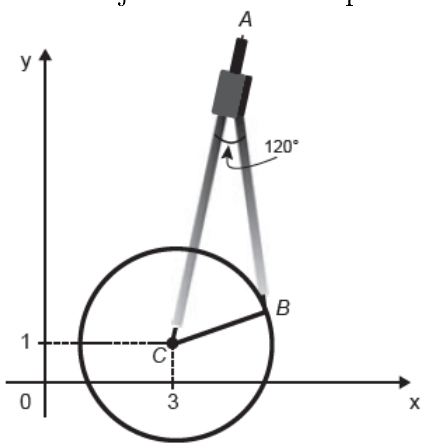
Considerando $\sqrt{3} \cong 1,73$, temos

$$d \cong 1,73 \cdot 1,8\ km \cong 3,114\ km.$$

Resposta: alternativa c. ◇

14. *(ENEM 2017)* Uma desenhista projetista deverá desenhar uma tampa de panela em forma circular. Para realizar esse desenho, ela dispõe, no momento, de apenas um compasso, cujo comprimento das hastes é de 10 cm, um transferidor e uma folha de papel com um plano cartesiano. Para esboçar o desenho dessa tampa, ela afastou as hastes do compasso de forma que o ângulo formado por elas fosse de 120°. A ponta seca está representada pelo ponto C, a ponta do grafite está representada pelo ponto B e a cabeça do compasso está representada pelo ponto A conforme a figura.

Figura 116: Projeto de uma tampa de panela.



Fonte: ENEM 2017.

Após concluir o desenho ela o encaminha para o setor de produção. Ao receber o desenho com a indicação do raio da tampa, verificará em qual intervalo este se encontra e decidirá o tipo de material a ser utilizado na sua fabricação, de acordo como os dados.

Tipo de material	Intervalo de valores do raio (cm)
I	$0 < R \leq 5$
II	$5 < R \leq 10$
III	$10 < R \leq 15$
IV	$15 < R \leq 21$
V	$21 < R \leq 40$

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O tipo de material a ser utilizado pelo setor de produção será

a) I.

b) II.

c) III.

d) IV.

e) V.

Solução:

Para solucionar essa questão, devemos calcular a medida do raio R da tampa a partir da figura imediatamente anterior e utilizar o quadro dado na questão para verificar qual intervalo o raio R pertence.

Na figura do desenho da tampa, o raio da tampa é a medida do segmento BC. Os segmentos AB e AC são representados pelas hastes do compasso, ambos medem 10 cm e formam um ângulo de medida 120°. Como o triângulo BAC é isósceles, então os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são congruentes e medem 30°.

Traçando a bissetriz do ângulo BAC o dividimos em dois ângulos de medida 60°.

Seja D a intersecção da bissetriz com BC, então formamos dois triângulos congruentes ABD e ACD pelo caso ALA. Logo, $\overline{AB} = \overline{AC}, \overline{AD} = \overline{AD}$, $\overline{BD} = \overline{DC}$.

Assim, podemos usar a relação trigonométrica do seno de 60° nos dois triângulos para calcular as medidas de BD e DC que somadas dá o valor medida de BC.

$$\overline{BC} = \overline{BD}+\overline{DC} = sen\,60°\cdot\overline{AB}+sen\,60°\cdot\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\ cm+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 10\ cm = \sqrt{3}\cdot 10\ cm.$$

Considerando 1,7 para aproximação de $\sqrt{3}$, obtemos $\overline{BC} \cong 17\ cm$.

Resposta: alternativa d. ◇

15. (ENEM 2018) Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulo isósceles, como ilustra a figura.

Figura 117: Quebra-cabeça.

Fonte: ENEM 2018.

Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm.

O quebra-cabeça quando montado resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

a) 14.

b) 12.

c) $7\sqrt{2}$.

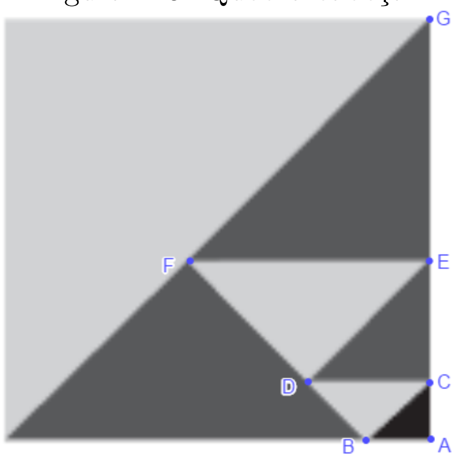
d) $6 + 4\sqrt{2}$.

e) $6 + 2\sqrt{2}$.

Solução:

Determinemos alguns pontos na figura para facilitar a visualização.

Figura 118: Quebra-cabeça.



Fonte: ENEM 2018, editada pelo autor para a solução.

Determinemos a medida do lado do quadrado pela soma das medidas dos segmentos AC, CE e EG.

A medida de AC é dada e vale 2 cm.

Como cada triângulo é retângulo isósceles, devemos calcular a medida da hipotenusa de cada triângulo que é a medida do lado do próximo triângulo.

Pelo teorema de Pitágoras

$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ cm;

$\overline{CE} = \overline{CD} = \sqrt{\sqrt{8}^2 + \sqrt{8}^2} = \sqrt{8+8} = \sqrt{16} = 4$ cm;

$\overline{DE} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ cm;

$\overline{EG} = EF = \sqrt{\sqrt{32}^2 + \sqrt{32}^2} = \sqrt{32+32} = \sqrt{64} = 8$ cm.

Portanto, a medida do lado do quadrado é $\overline{AG} = \overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EG} = 2 + 4 + 8 = 14$ cm.

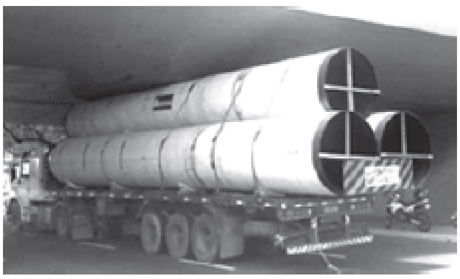
Resposta: alternativa *a*. ◇

16. (*ENEM 2017*) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Lourenço da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo Para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

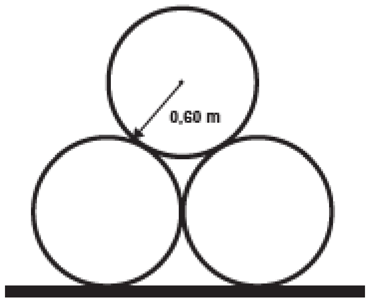
Figura 119: Caminhão com carga entalado num viaduto.



Fonte: ENEM 2017.

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

Figura 120: Visão traseira da carga do caminhão.



Fonte: ENEM 2017.

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor que do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

a) 2,82.

b) 3,52.

c) 3,70.

d) 4,02.

e) 4,20.

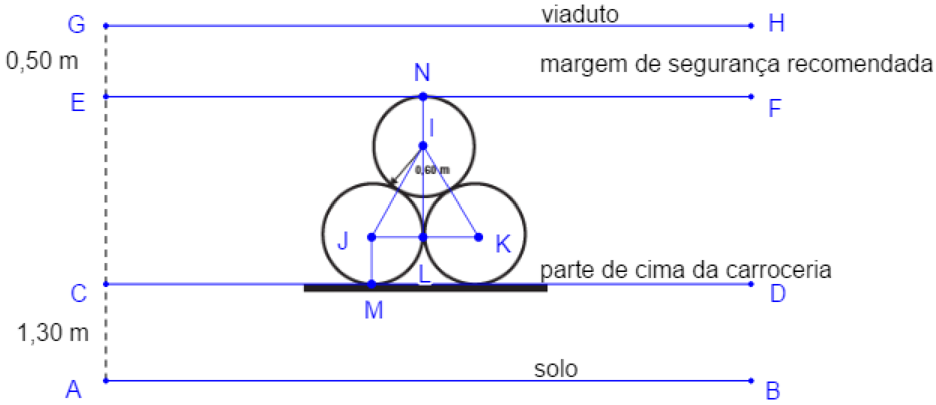
Solução:

Para o caminhão passar com segurança, sob o viaduto, é recomendada uma margem de segurança de 0,5 m entre a parte superior da carga e o viaduto.

Então devemos calcular a altura total da carga e somar com 0.5 m.

Para melhor visualização, considere a Figura 121 onde os segmentos AB, CD, EF e GH são paralelos e representam, respectivamente, o solo, a parte superior da carroceria do caminhão, a parte superior da carga e o viaduto.

Figura 121: Visao traseira da carga do caminhão.



Fonte: ENEM 2017, editada pelo autor para a solução.

Perceba que a altura mínima de um viaduto considerada segura para a passagem do caminhão com carga em questão pode ser obtida pela soma $\overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EG}$.

Como $\overline{AC}$ e $\overline{EG}$ são dadas, falta calcular $\overline{CE}$ que é a altura da carga. Veja que

$$\overline{CE} = \overline{NI} + \overline{IL} + \overline{JM} = 0,60 + \overline{IL} + 0,60.$$

A medida $\overline{IL}$ é dada por $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{IJ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1,20 = 0,60\sqrt{3}$, pois $\overline{IL}$ é a altura do triângulo equilátero IJK e $\overline{IJ} = 2 \cdot 0,60 = 1,20$ é a medida dos lados.

Logo,

$$\overline{CE} = 0,60 + 0,60\sqrt{3} + 0,60 = 1,20 + 0,60 \cdot \sqrt{3}.$$

Considerando 1,7 para aproximação de $\sqrt{3}$ temos

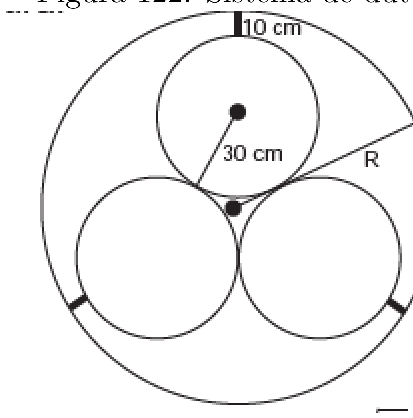
$$\overline{CE} = 1,20 + 0,60 \cdot 1,7 = 1,20 + 1,02 = 2,22.$$

Portanto, $\overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EG} = 1,30 + 2,22 + 0,50 = 4,02$ m.

Resposta: alternativa d. ◇

17. (*ENEM 2013*) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:

Figura 122: Sistema de dutos.



Fonte: ENEM 2013.

Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$. O valor de R, em centímetros, é igual a

a) 64,0.

b) 65,5.

c) 74,0.

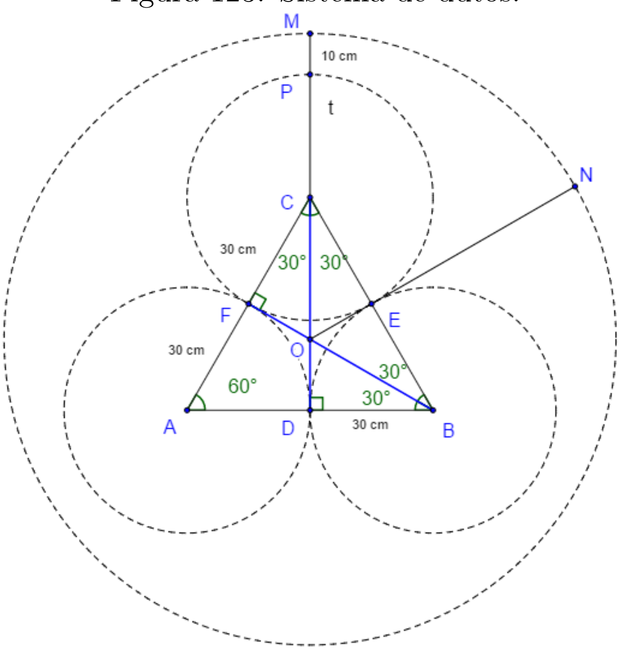
d) 81,0.

e) 91,0.

Solução:

Considere a Figura 123 onde foram marcados alguns pontos.

Figura 123: Sistema de dutos.



Fonte: ENEM 2013, editada pelo autor para a solução.

A questão pede a medida R conforme a Figura 122.

Como os canos internos possuem raios que medem 30 cm, então os pontos que representam seus centros determinam um triângulo equilátero cuja medida dos lados é 60 cm.

Perceba que o raio R é igual a $\overline{ON} = \overline{OC} + \overline{CP} + \overline{PM}$.

Como $\overline{CP} = 30$ cm e $\overline{PM} = 10$ cm, resta calcular $\overline{OC}$ e somar a esses valores.

Uma forma de calcular o valor de $\overline{OC}$ é pela semelhança entre os triângulos CDA e CFO. Veja que possuem ângulos correspondentes congruentes.

Sabemos que a altura $\overline{CD}$ do triângulo equilátero ABC é dada por

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 60 \Rightarrow \overline{CD} = 30\sqrt{3}.$$

Utilizando a relação $\dfrac{\overline{OC}}{\overline{CF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CD}}$, obtemos

$$\frac{\overline{OC}}{30} = \frac{60}{30\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{OC} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}.$$

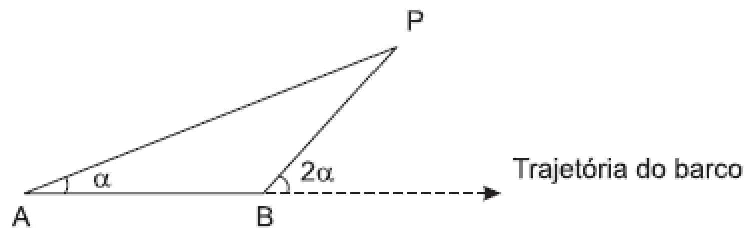
Considerando 1,7 para aproximação de $\sqrt{3}$, implica $\overline{OC} = 20 \cdot 1,7 = 34$ cm.

Portanto $R = \overline{OM} = 10 + 30 + 34 = 74$ cm.

Resposta: alternativa *c*. ◇

18. (*ENEM 2011*) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra a situação:

Figura 124: Distância de um barco até uma praia.



Fonte: ENEM 2011.

Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar no ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância $\overline{AB} = 2000$ m. Com base nesse dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1000 m.

b) $1000\sqrt{3}$.

c) $2000\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m.

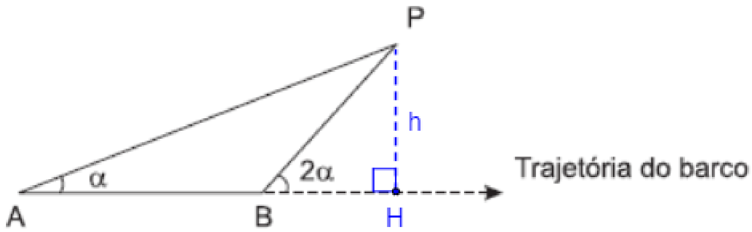
d) 2000 m.

e) $2000\sqrt{3}$.

Solução:

Note que pelas informações dadas na questão, a distância solicitada é a distância do ponto P a reta $\overleftrightarrow{AB}$, que equivale a medida h da altura PH do triângulo ABP em relação ao lado AB.

Figura 125: Distância de um barco até uma praia.



Fonte: ENEM 2011, editada pelo autor para a solução.

Veja que os ângulos BAP e BPA são congruentes, pois o ângulo externo PBH mede $2\alpha = B\hat{A}P + B\hat{P}A = \alpha + B\hat{P}A \Rightarrow B\hat{P}A = \alpha$.

Logo, o triângulo ABP é isósceles com $\overline{AB} = \overline{PB}$. Então $\overline{AB} = \overline{PB} = 2000$ m.

Como $\alpha = 30°$, $2\alpha = 60°$.

Assim, podemos utilizar a equação do seno de $60°$ para calcular o valor de h, já que h é a medida do cateto oposto do ângulo de medida $60°$ do triângulo retângulo BHP e temos a medida da hipotenusa. Ou seja

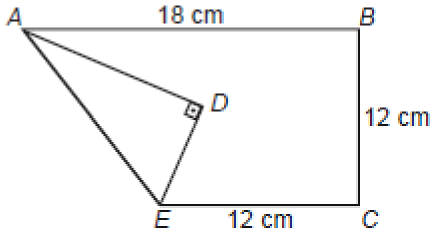
$$sen\ 60° = \frac{h}{2000} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{2000} \Rightarrow h = 1000\sqrt{3}.$$

Resposta: alternativa b. ◇

19. *(ENEM 2019)* Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte *origami* (ori = dobrar, kami = papel),

que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base de *origami* é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do *origami*, utilizando uma folha de papel de 18cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.

Figura 126: Arte origami.



Fonte: ENEM 2019.

Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é

a) $2\sqrt{22}$ cm.

b) $6\sqrt{3}$ cm.

c) 12 cm.

d) $6\sqrt{5}$ cm

e) $12\sqrt{2}$ cm

Solução:

Pede-se o comprimento AE, onde AE é a hipotenusa do triângulo retângulo ADE.

$\overline{AD} = 12$ cm, pois é o comprimento do lado menor do retângulo e

$\overline{DE} + \overline{EC} = 18 \text{ cm} \Rightarrow \overline{DE} = 6$ cm.

Aplicando Pitágoras

$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2 \Rightarrow 12^2 + 6^2 = \overline{AE}^2 \Rightarrow \overline{AE} = \sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$

Resposta: alternativa *d*. ◇

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como propósito a elaboração de um material sobre conteúdos básicos de Geometria Plana para alunos que buscam uma preparação para o ENEM. Em particular, para estudantes e professores que participam do Programa de Extensão Edifique Ações da UFCA.

Logo, a estratégia de elaboração consistiu inicialmente numa análise das provas de matemática do ENEM desde a criação do SISU em 2009 até o exame de 2019, com a finalidade de destacar as questões de Geometria e os principais conteúdos abordados em cada uma delas.

Após a análise das provas, foi realizada a pesquisa bibliográfica visando encontrar um bom material para explanação dos conteúdos elencados neste trabalho. Observamos que há grande quantidade de material a ser desenvolvido, logo apresentamos apenas uma parte e deixamos como sugestão de trabalho os conteúdos não explorados neste trabalho os quais constam nas tabelas apresentadas no capítulo 2. Analisando essas tabelas nota-se que os conteúdos foram inseridos, considerando-se a relevância para um bom desempenho dos alunos nas provas do ENEM.

Nota-se também que o foco principal do ENEM é o cálculo de distância, perímetros, áreas e volumes. Porém, em parte relevante das questões que envolvem esses cálculos, também são exploradas conversões de medidas ou escalas, em outras questões exploram-se conhecimentos fundamentais de ângulos, congruências, semelhanças e relações métricas nos triângulos.

Conhecimentos sobre triângulos são essenciais nas provas do ENEM e para os assuntos subsequentes da Geometria Plana, então começamos com algumas noções básicas da Geometria e ângulos, e dedicamos a maior parte deste trabalho ao estudo de Triângulos, finalizando com uma seção sobre relações métricas nos triângulos.

Um fator muito relevante nas provas do ENEM é a contextualização dos conteúdos com situações práticas. Pois de acordo com a matriz de referência, trabalhar leitura e interpretação de situações cotidianas são objetivos do ENEM. O que faz as provas, com textos longos, possuírem um estilo único se comparado a outras provas de seleção.

Diante do exposto, espera-se que o material elaborado seja utilizado por alunos e professores de cursinhos preparatórios e, também, do ensino médio que buscam uma preparação para as provas do ENEM.

REFERÊNCIAS

[1] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar:** Geometria Euclidiana Plana v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria Plana. vol.9. 7ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2005.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática:** Geometria Espacial, Posiçao e Métrica v. 10. 7ª ed. São Paulo: Atual, 1993.

[4] MUNIZ NETO, Antônio Carminha. **Geometria**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

[5] BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**, V. 1. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2010. (Manual do Professor)

[6] BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**, V. 2. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.(Manual do Professor)

[7] BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**, V. 3. 1ª ed. São Paulo: Moderna, 2010. (Manual do Professor)

[8] CASTILHO, João Carlos Amareante e GARCIA, Antônio Carlos de Almeida. **Matemática sem Mistérios:** Geometria Plana e Espacial. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

[9] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] <http://portal.inep.gov.br/enem>. Acesso em 18 de Maio de 2020.

[11] <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem/historico>. Acesso em 18 de Maio de 2020.

[12] <http://portal.inep.gov.br/web/guest/enem-outros-documentos>. Acesso em 18 de Maio de 2020.

[13] <http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos>. Acesso em 18 de Maio de 2020.

[14] BOYER, Carl B. **História da Matemática**, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide - 2ª ed. São Paulo: Blucher, 1996.

[15] LIMA, Elon Lages. **Medida e Forma em Geometria**. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[16] <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital1/index.html>. Acesso em 03 de Junho de 2020.

[17] <http://www.inmetro.gov.br/legislacao/rtac/pdf/RTAC002050.pdf>. Acesso em 03 de Junho de 2020.

[18] <https://www.ufca.edu.br/noticias/curso-edificar-preparatorio-intensivo-para-o-enem-esta-com-inscricoes-abertas-para-selecao-de-professores-ate-9-de-marco/>. Acesso em 30 de junho de 2020.

[19] OLIVEIRA, Marcelo Lopes de. **A Matemática no Vestibular da UECE**. 90f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2019.

[20] FERREIRA, Edson Martins. **Análise da Abrangência da Matriz de Referência do ENEM com Relação às Habilidades Avaliadas nos Itens de Matemática Aplicados de 2009 a 2013**. 64f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade de Brasília, 2014.

[21] ALVES, Samuel Pereira. **Um Estudo Sobre a Matemática Presente no Vestibular do ITA**. 90f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2018.

[22] FILGUEIRAS, Cícero Wilton Santana. **A Importância dos Conteúdos de Matemática Pouco Cobrados no ENEM**. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2019.

[23] ALCÂNTARA, Érica Ferreira de.**A Matemática Básica no ENEM**. 222f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2020.

[24] DANTAS, Matheus Siqueira Araújo. **Um Estudo Sobre Funções em Provas do ENEM**. 153f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal do Cariri, 2020.

[25] EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**; tradução e introdução de Irineu Bicudo. – São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[26] <https://portalconstrucaofacil.com/esquadro-alinhamento-nivel-e-prumo/>. Acesso em 31 de julho de 2020.

[27] ZILKHA, Esther. **Utilização do GeoGebra na Construção de Instrumentos: Teodolito.** (PROFMAT-IMPA). Rio de Janeiro, 2014.

[28] <https://pixabay.com/pt/vectors/transferidor-círculo-escala-graus-158657/>. Acesso em 17 de agosto de 2020.