UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS NATURAIS, MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

JOHN NATHAN PEREIRA DE CARVALHO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

MOSSORÓ
2020

JOHN NATHAN PEREIRA DE CARVALHO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre.

Orientador(a): Profª. Dra. Luiza Helena Felix de Andrade

MOSSORÓ

2020

CA331 f

Carvalho, John Nathan Pereira de .
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA / John Nathan Pereira de Carvalho. - 2020.
191 f. : il.

Orientadora: Luiza Helena Felix de Andrade.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2020.

1. Funções Trigonométricas. 2. Proposta Didática. 3. GeoGebra. 4. Aplicações. I. Andrade, Luiza Helena Felix de, orient. II. Título.

JOHN NATHAN PEREIRA DE CARVALHO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E APLICAÇÕES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Programa de Pós-Graduação em Matemática, Departamento de Ciências Naturais, Matemática e Estatística da Universidade Federal Rural do Semi-Árido, como requisito parcial para à obtenção do título de Mestre.

Defendida em: 10 / 07 / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Luiza Helena Félix de Andrade.

Luiza Helena Felix de Andrade, Profª. Dra. (UFERSA)
Presidente e Orientadora

Andrea Maria Ferreira Moura.

Andrea Maria Ferreira Moura, Profª. Dra. (UFERSA)
Membro Examinador Interno à Instituição

Giselle Costa de Sousa

Giselle Costa de Sousa, Profª. Dra. (UFRN)
Membro Examinador Externo à Instituição

Dedico este trabalho, primeiramente, ao Grande Arquiteto do Universo, que é Deus, por ser essencial em minha vida, é Ele o autor do meu destino, o meu guia; À minha mãe Selma, a meu pai João *(in memoriam),* que sempre me orientaram e incentivaram a buscar uma vida digna e de qualidade através dos estudos. À minha filha Bella, que está a caminho.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao Grande Arquiteto do Universo, que é Deus, por ter me ajudado em mais esta etapa da minha vida.

A todos os meus familiares, em especial a minha mãe, e a todos os amigos, pois sem o apoio deles nada disto seria possível.

À minha noiva, que sempre foi compreensiva em relação aos meus estudos, me apoiou e incentivou para a conclusão deste Mestrado.

À minha orientadora Prof. Dra. Luiza Helena Felix de Andrade pela dedicação na ajuda do desenvolvimento desta dissertação.

Aos amigos que foram conquistados no decorrer do curso, compartilhando comigo os momentos de aprendizado, principalmente aos companheiros de viagem, Felipe Gomes e Raul Moésio.

À gestão da EEEP Prof. Walquer Cavalcante Maia, na pessoa do Diretor Tadeu Celedônio, por sempre compreender minhas ausências nas sextas-feiras e pelo incentivo.

A todos os professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT - UFERSA, que fizeram parte deste caminhar, representados pelo coordenador do programa Fabrício de Figueredo Oliveira.

À Prof. Dra. Franceliza Dantas pelas orientações de produção e organização do trabalho acadêmico.

Aos colegas de trabalho e professores de Matemática, Julierme Freitas, Lucas Oliveira e Jorge Michel, pelos incentivos ao longo do mestrado.

À Prof. Dra. Gilvanise Pontes pela disponibilidade e revisão do trabalho.

Ao sobrinho maçônico, João Vitor, aluno do curso de Ciências e Tecnologias da UFERSA, pela ajuda no desenvolvimento do apêndice deste trabalho.

Às professoras Dra. Andrea Maria Ferreira Moura e Dra. Giselle Costa de Sousa, integrantes da Banca Examinadora, pela aceitação, sugestões e comentários que contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

Finalmente, agradecer a todos que contribuíram de forma direta ou indireta, para esta realização.

“Deus é o Geômetra Onipotente para quem o mundo
é um imenso problema matemático.”

Leibniz

RESUMO

Ao olhar para os resultados das diversas avaliações em larga escala que existem no Brasil, que cito, o Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM e o Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB, é notório que a aprendizagem em Matemática não tem acontecido como o esperado. Esse fato tem, a cada dia, incentivado os pesquisadores em Educação Matemática a buscar justificativas e possíveis soluções para o problema. Por exemplo, Brito e Morey (2004) e Feijó (2018), buscaram entender, respectivamente, as dificuldades de alguns professores e alunos no estudo de Trigonometria, concluindo que há necessidade de mudança na metodologia utilizada. Diante do exposto, surgiu o interesse em organizar um material que pudesse ajudar aos professores de Matemática na docência das funções trigonométricas em turmas do ensino médio, utilizando recursos diferentes do livro didático e do quadro branco e apoiando-se em três tendências fundamentais da Educação Matemática, a História da Matemática – HM, Recursos Tecnológicos e Resolução de Problemas. Portanto, este trabalho visou desenvolver uma proposta didática através de um material que atendesse as necessidades conhecidas. Esse material é dividido em 4 aulas e em cada uma delas contemplamos tópicos pré-requisitos para a aula 4 que é a das funções trigonométricas. Nessas aulas, abordamos fatos históricos que contribuíram para o desenvolvimento da Trigonometria, juntamente com uma proposta de apresentação dos conteúdos usando o software GeoGebra e por fim, explanando algumas aplicações das funções trigonométricas no cotidiano e sugerindo questões contextualizadas utilizadas nas ultimas versões do ENEM e de alguns vestibulares. Esperamos que este trabalho possa ajudar no resgate a uma aprendizagem satisfatória do conteúdo.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas, Proposta Didática, GeoGebra, Aplicações.

ABSTRACT

When we look to the results of the wide scale evaluations that exist in Brazil, such as, National High School Exam - ENEM and the Evaluation System of Basic Education - SAEB, it is visible that mathematical learning process is not happening as expected. This fact stimulates researches in mathematical education to look out for reasons and possible solutions to this matter. Brito and Morey (2004) and Feijó (2018) for example, tried to understand respectively the problems faced by students and teachers when studying trigonometry, concluding that there is a necessity in changing the applied methodology. In face of the above, came the concernment in organizing a material which could help math teachers when facing trigonometric function classes on high school, using resources beyond the book and the whiteboard, and standing on the three fundamental tendencies of mathematical teaching. Math history, technological resources and problem solving. Therefore, this work aimed to develop a resource which supply the known necessities. This material is divided in four classes and on each one we cover the required topics to the fourth class, in which we study trigonometrical functions. On these classes, we looked at the historical facts that contributed to the development of trigonometry along with the content presentation proposed by the GeoGebra software. At the end we explained some applications of trigonometrical functions on day-to-day life, also suggesting contextualized questions used on the latest editions of ENEM and some Sat's. We hope that this work may help in rescuing a satisfactory mathematical learning process.

Keywords: Trigonometric Functions, Teaching Proposal, GeoGebra, Applications.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
PISA	Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
OPV	Oposto Pelo Vértice
PGD	Problema Gerador de Discussão
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
ESPCEX	Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ACAFE	Associação Catarinense das Fundações Educacionais
MHS	Movimento Harmônico Simples
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFPR	Universidade Federal do Paraná
NC/UFPR	Núcleo de Concursos / Universidade Federal do Paraná
FGV - SP	Fundação Getúlio Vargas - São Paulo
UNITAU	Universidade de Taubaté
PUCCAMP	Pontifícia Universidade Católica - Campinas
FUVEST	Fundação Universitária para o Vestibular
PUCSP	Pontifícia Universidade Católica - São Paulo
FAAP	Fundação Armando Alvares Penteado
UFRS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
SIMAIS	Sistema Integrado de Monitoramento e Avaliação Institucional
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará
SAEPE	Sistema de Avaliação da Educação de Pernambuco
SAERS	Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul
SAEGO	Sistema de Avaliação da Educação do Estado de Goiás
SAERJ	Sistema de Avaliação da Educação do Estado do Rio de Janeiro
CAED	Centro de Políticas Públicas e Avaliação da Educação
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
FIES	Fundo de Financiamento Estudantil
MEC	Ministério da Educação do Brasil
SISU	Sistema de Seleção Unificada

PROUNI	Programa Universidade para Todos
TRI	Teoria de Resposta ao Item
ANA	Avaliação Nacional de Alfabetização
ANEB	Avaliação Nacional da Educação Básica
ANRESC	Avaliação Nacional de Rendimento Escolar
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
BCM	Batimentos Cardíacos por Minuto

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Alfa
β	Beta
π	Pi
λ	Lambda
$\neq$	Diferente
θ	Teta
$\in$	Pertence
ϕ	Fi
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números Reais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números Inteiros
$\leq$	Menor que ou igual
$\geq$	Maior que ou igual
$\sim$	Semelhante
$\Rightarrow$	Implica

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Ambientação e motivação

O Ensino de Matemática tem sido o centro das atenções de muitos pesquisadores da Educação nos últimos anos. É possível entender essa preocupação quando olhamos para os resultados do SAEB, do ENEM, e ainda para a posição do Brasil no ranking do Programa Internacional de Avaliação dos Estudante – PISA[1]. Todos esses indicadores mostram que o Ensino de Matemática no Brasil não vai bem. Diante deste cenário, surge a necessidade dos professores de Matemática se transformarem em pesquisadores e buscarem estratégias para alcançar melhores desempenhos na aprendizagem de Matemática.

No momento que nos tornamos pesquisadores surge a interrogação: "Qual seria uma proposta que poderíamos oferecer ao Ensino de Matemática, de modo que seja possível atender aos anseios dos nossos pares em suas atividades docentes?". No caso particular do presente trabalho, tomamos a decisão de produzir um trabalho voltado para o ensino de funções trigonométricas, levando em conta as dificuldades enfrentadas pelos educadores e educandos dentre as mais variadas realidades.

Uma vez definida a temática, iniciamos a pesquisa percorrendo um caminho em busca de identificar o comportamento do Ensino da Trigonometria na etapa final da escolaridade básica, o que foi notado certas falhas com a aprendizagem das funções. Também nos preocupamos em entender as práticas realizadas em tais pesquisas consultadas, que citaremos a seguir, para daí partimos para a construção do nosso trabalho.

Para entender as principais dificuldades, fizemos pesquisas nos Google Acadêmico usando a frase: dificuldades no ensino de trigonometria. Encontramos alguns artigos de anais dos principais eventos de Educação Matemática e de revistas, como por exemplo a SBEM e a RPM. A seguir, pesquisamos os trabalhos já produzidos em relação ao tema, a qual teve como base de pesquisa o repositório da CAPES e do PROFMAT e de algumas universidades, como a UFRN.

[1] No PISA 2018, a posição do Brasil no ranking de proficiência em Matemática passou da 65ª para 70ª e aproximadamente 68% dos respondentes da avaliação não possui o nível básico na disciplina (INEP, 2019).

Algumas de nossas pesquisas serão discutidas a seguir.

Em Oliveira (2006) há uma investigação das dificuldades encontradas pelos professores de Matemática que optam por usar atividades nas suas aulas, e, nesse mesmo contexto, as dificuldades enfrentadas pelos estudantes. A proposta foi examinar o Ensino de Trigonometria através de um estudo de caso com alunos de uma escola de Ensino Médio da rede estadual do Rio Grande do Norte, situada em Natal, durante procedimentos de ensino baseadas em sequências de atividades de Trigonometria. A metodologia da pesquisa foi a Engenharia Didática[2] e os questionamentos que orientaram o pesquisador foram: De que ordem e quais são, especificamente, as dificuldades surgidas quando o professor resolve elaborar e aplicar atividades de Trigonometria em suas aulas? Os alunos são ou não receptivos à mudança de metodologia do ensino? Como reagem? De que ordem e quais são especificamente as dificuldades que enfrentam em face da nova abordagem e trabalho com a Trigonometria?

O autor também se encarrega de fazer uma revisão de trabalhos publicados sobre o Ensino de Trigonometria, a fim de verificar os resultados já apontados por outros pesquisadores. Embora várias pesquisas tenham sido visitadas, a de Brito e Morey (2004) merece destaque pois as pesquisadoras verificaram as dificuldades em Geometria e Trigonometria sentidas por cinquenta professores do Ensino Fundamental da rede estadual do Rio Grande do Norte. As autoras concluíram que o fato de que muitas vezes a ausência desses conteúdos em sala de aula é causado pela carência da formação desses educadores, destacando ainda a grande resistência em inseri-los em seus currículos.

> Analisando as dificuldades encontradas pelos professores podemos afirmar que tais dificuldades estão intimamente relacionadas à formação escolar das décadas de 70 e 80 caracterizadas, entre outros aspectos, pelo descaso para com a geometria e a Trigonometria, pela formalização precoce de conceitos geométricos e trigonométricos – quando esses eram estudados - e pela memorização de procedimentos sem a compreensão deles (BRITO; MOREY, 2004, p 31).

Ao fim do trabalho, conclui-se que o uso de atividades no ensino produz resultados positivos para a aprendizagem e para o desenvolvimento de competências no educando. Oliveira (2006) ressalta ainda que se a opção do educador for utilizar estratégias didáticas

---

[2] A Engenharia Didática é uma metodologia empregada em pesquisas que envolvem uma parte experimental, pela possibilidade de analisar situações didáticas. Artigue (1988) afirma que esse termo pode ser comparado ao trabalho do engenheiro que elabora projetos precisos, apoiados em conhecimentos científicos, submete esse projeto a um controle, mas, ao mesmo tempo, precisa trabalhar com objetos mais complexos e tomar decisões não previstas pela ciência. Desse modo, essa metodologia pode auxiliar na análise da forma como o estudante desenvolve uma sequência de procedimentos para resolver um problema proposto (SALAZAR, 2015).

diferente do ensino tradicional, então ele deve estar pronto para enfrentar os desafios na certeza de que, verdadeiramente, seus alunos irão aprender Matemática.

Em Dionizio e Brandt (2011) busca-se identificar a natureza das dificuldades apresentadas pelos alunos do Ensino Médio em Trigonometria. Para isso, foi necessário saber o que ocasiona a falta de compreensão e, se o problema está na aprendizagem dos alunos ou na forma como são apresentados os conteúdos a esses estudantes. Contudo, a pesquisa se concentrou em responder a seguinte pergunta: qual a natureza das dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem da Trigonometria?

Como procedimento de investigação foi realizada uma pesquisa qualitativa, a qual aplicou atividades para resolução a alunos do 2ª série do Ensino Médio de uma escola de Ponta Grossa - PR, envolvendo conteúdos específicos da Trigonometria, com o objetivo de identificar a natureza das dificuldades apresentadas, fundamentando-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica segundo Raymond Duval[3].

Na pesquisa de Dionizio e Brandt (2011) foi constatado que a dificuldade dos alunos do Ensino Médio em Trigonometria está na falta de conceitualização dos objetos matemáticos, pois os alunos não fazem relação da forma de representação com o objeto matemático que está sendo representado. O autor revela, ainda, a necessidade de uma mudança na maneira como o conteúdo de Trigonometria é apresentado aos alunos, para que haja a superação dos fracassos encontrados. Assim sendo, é proposto que o trabalho com a Trigonometria em sala de aula explore os objetos matemáticos por meio de diferentes registros de representação, valorizando a operação cognitiva de conversão e, assim como apontam os PCN’s, faça relação com situações da realidade, para ampliar as formas de representação dos objetos matemáticos, mas que essa relação não seja meramente expositiva mas sim articulada constantemente entre as diferentes formas de representação, para que o aluno tenha condições de conceitualizar esses objetos e não mais ficar preso a determinada forma de representação.

Em Gomes (2011) foi elaborada uma sequência de atividades aliando o Ensino de Trigonometria ao estudo do desenvolvimento histórico deste mesmo assunto. O autor justifica a escolha do tema com anos de experiência na docência, em que já identificou que o estudo da Trigonometria é indesejado pelos alunos. Assim, estrutura seu trabalho de maneira que alcance

[3] Duval (2004) concentra seus estudos na aprendizagem da matemática, segundo os aspectos cognitivos para a compreensão da mesma.

um novo olhar para o tema, tendo como público-alvo atuais e futuros professores, na perspectiva que eles se apropriem e embasem suas atividades em sala de aula.

Gomes (2011) se encarregou de fazer várias análises sobre o que se deve levar em consideração para que as práticas sugeridas no trabalho sejam aplicadas, entre elas são abordadas a falta de formação dos professores, a minúscula literatura disponível à pesquisa da história e a falta de materiais necessários para a realização. A pesquisa foi inserida em 5 eventos destinados a professores de Matemática para obter retornos, através de estudos pilotos, e fazer possíveis alterações.

Fica claro no texto que as tendências da Educação Matemática estão aí para serem implementadas nas práticas pedagógicas, obviamente, de maneira construtiva para a aprendizagem dos alunos. Deste modo, além da abordagem com a História da Matemática, o autor usa recursos tecnológicos, a partir do software GeoGebra, nas construções geométricas, como se verifica no trecho que segue:

> Além disso, a utilização dessa sequência de atividades pode ser aliada ao uso de alguma ferramenta educacional informatizada. No nosso curso utilizamos o software GeoGebra para a construção de algumas figuras geométricas e gráfico de função seno. Esse recurso foi utilizado como auxiliar durante a resolução e discussão de algumas tarefas das atividades (GOMES, 2011, p 53).

Em suas conclusões, Gomes (2011) sugere ao leitor aplicar as atividades elaboradas com seus alunos, tendo em vista que:

> Para que a utilização desse produto (ou parte dele) seja viável em sala de aula, os professores interessados devem se deter a alguns requisitos básicos: ter conhecimentos em geometria, domínio de cálculos algébricos e com números irracionais, familiaridade com construções geométricas e com o estudo das funções. Sem uma preparação prévia dos participantes com relação a esses conteúdos matemáticos mencionados, nossa proposta ficará bastante limitada (GOMES, 2011, p 53).

Sobre a utilização da História da Matemática como auxilio pedagógico em sala de aula, Fossa (2001) destaca:

> A História da Matemática é uma das formas de se contextualizar o ensino da Matemática escolarizada como possibilidades de situar o conhecimento no tempo e no espaço bem como motivar os alunos para um despertar para a aprendizagem da Matemática (FOSSA, 2001, p.16).

Miguel e Miorim (2004) afirma que abordar a História da Matemática nas aulas permite os alunos:

> Reconhecer a matemática como criação humana; Perceber as razões pelas quais as pessoas produzem matemática; Apropriar-se das ideias da matemática utilitária,

> desenvolvida para resolver problemas práticos, relacionados aos fatos sociais, econômicos e físicos; Considerar a interligação da matemática com outras áreas do conhecimento; A estimulação da curiosidade intelectual e do pensamento abstrato, os quais podem auxiliar no desenvolvimento de conceitos, teorias e generalizações (MIGUEL; MIORIM, 2004, p. 53).

Já em Corradi (2013), a motivação para a pesquisa sobre aprendizagem em Trigonometria é intrínseca, pois a autora reconhece as dificuldades que tinha no assunto enquanto estudante do Ensino Médio, sendo elas resolvidas apenas na graduação, e também pelas dificuldades apresentadas por seus alunos na compreensão de alguns tópicos. Assim, foi despertado o desejo de refletir sobre a aprendizagem da Trigonometria e buscar, como profissional, novas estratégias de ensino e aprendizagem dos temas. É investigado também, na pesquisa, sobre a influência da utilização dos livros didáticos pelos professores no processo de ensino, o que resultou na percepção de que as dificuldades que surgem nos alunos são causadas, principalmente, pelas metodologias utilizadas. Corradi (2013) destaca que:

> Foi possível perceber que há um grande número de docentes que conduzem suas aulas apresentando definições seguidas de listas de exercícios, treinando os alunos para reprodução do conteúdo, muitas vezes apenas decorado e não compreendido. Ainda conforme Fiorentini (1995), Miorim (1998), D'Ambrósio (1993), essa prática não é propícia à aprendizagem por não possibilitar a compreensão e a construção do conhecimento pelo aluno. Penso que os professores precisam de atividades de ensino e aprendizagem e de uma postura diferenciada para trabalhar os conteúdos de Trigonometria, de maneira significativa em sala de aula em que os estudantes passam a ser os protagonistas e o professor o orientador/mediador (CORRADI, 2013, p.21).

A pesquisa foi pensada como uma tentativa de compreender o que aconteceria e qual seria a reação dos alunos da 2ª série do Ensino Médio ao trabalhar com atividades de natureza investigativa, utilizando o GeoGebra, em que o aluno pudesse compreender as propriedades das funções seno e cosseno, motivando a transformação, pelo pensamento, de algo desconhecido em algo familiar, estabelecendo um novo aprendizado e uma reorganização da compreensão.

A autora conclui que o trabalho permitiu aos alunos descobrir padrões, relações, por meio de argumentação, da comunicação matemática e da elaboração de relatórios, oportunizando a eles a produção de significados para a Matemática. Também externa a contribuição para melhoria do aprendizado através de exploração e uso de conceitos matemáticos em níveis diferentes com graus de profundidade variada.

Salazar (2015) partiu da seguinte inquietação: Como a ferramenta tecnológica GeoGebra pode potencializar a aprendizagem dos conceitos das funções trigonométricas no Ensino Médio? Para buscar a resposta, foi elaborado um caderno de atividades envolvendo as funções trigonométricas e a metodologia da pesquisa foi a Engenharia Didática. A aplicação aconteceu em um laboratório de informática, onde cada aluno tinha oportunidade de manipular o software na realização das atividades.

Os resultados dessa pesquisa confirmam que estudar as funções trigonométricas com o apoio de um software como o GeoGebra, permite motivar os alunos, tanto no resgate da autoestima daqueles que demonstram dificuldades, quanto para incentivar outras descobertas aos que têm uma maior afinidade com a Matemática, permitindo que os estudantes descubram os resultados, e criem suas próprias perguntas.

Em Feijó (2018), investiga-se, dentro da Trigonometria, os principais erros e/ou dificuldades apresentados por alunos do 2ª série do Ensino Médio matriculados em escolas públicas do Distrito Federal. A pesquisa contempla dois momentos, o primeiro é um questionário de múltipla escolha sobre Trigonometria e temas correlatos, e o segundo é uma entrevista.

Na pesquisa de Feijó (2018), foi identificado que os alunos apresentam dificuldades em interpretar corretamente as razões trigonométricas, confundindo as razões seno e cosseno entre si, não demonstram ter domínio ou conhecimento do conceito de radiano, nem dos gráficos das funções seno e cosseno. Também é percebido a dissociação entre relação fundamental da Trigonometria e o teorema de Pitágoras, a identificação incorreta do quadrante de determinados arcos, a limitação do domínio das funções trigonométricas ao intervalo [0°, 360°], não reconhecem a existência de ângulos negativos e não conhecem a função de Euler, que é o ponto de partida para a compreensão das funções trigonométricas.

Em suas conclusões, a autora destaca que para que haja um resgate do ensino, e frisa que entende por resgate o envolvimento comprometido de alunos e professores no processo de aprendizagem, cada um desses atores deve cumprir plenamente suas obrigações, caso contrário o desenvolvimento da Trigonometria não será eficaz. Além disso:

> Conclui-se que a Trigonometria é um tópico que carece de atenção por parte dos professores de Matemática, tanto do ensino básico como do ensino superior, dos pesquisadores em Educação Matemática, dos autores dos livros didáticos, dos idealizadores do currículo escolar e, consequentemente, dos alunos. Essa atenção deve ser dada primeiramente pela importância histórica da Trigonometria no desenvolvimento das ciências exatas (FEIJÓ, 2018, p 53).

Depois de visitar todas essas pesquisas, é notório que os profissionais precisam, inicialmente, se inquietar com os atuais resultados e buscar uma mudança de postura na prática docente e na forma de pensar, para somente a partir dessa transformação obter outro cenário para a aprendizagem em Trigonometria. Dentre as mudanças necessárias, lembramos as dificuldades que foram citadas anteriormente nos trabalhos analisados, a qual insere-se a formação continuada para equacionar as lacunas que os próprios docentes têm nos inúmeros conteúdos matemáticos.

Sentimos a necessidade da inserção de resolução de problemas, pois os alunos precisam enxergar muito além de fórmulas e de exercícios que abordam mesmas regras e métodos prescritos ou memorizados. Para Onuchic e Allevato (2011):

> Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos(ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Foi perceptível que os trabalhos já existentes não abordaram as tendências juntas, por exemplo, a História da Matemática, a Resolução de Problemas e o uso de Recursos Tecnológicos. Assim, nasce nosso desafio, trata-las em uma só proposta.

Portanto, o objetivo geral deste trabalho é elaborar uma proposta didática que possa dar suporte aos professores para lecionar o conteúdo de funções trigonométricas no Ensino Médio, levando em consideração as Competências e Habilidade da Base Nacional Comum Curricular – BNCC e as avaliações nacionais de aprendizagem, ENEM e SAEB, atendendo anseios conhecidos e discutidos aqui anteriormente e oferecendo um passeio pelas seguintes tendências: História da Matemática, Recursos Tecnológicos e Resolução de Problemas. O interesse na abordagem dessas tendências é potencializar a proposta, tornando-a mais ampla no sentido da assimilação e aprendizagem do conteúdo. Essa interesse de unir as tendências foi embasada no trabalho de Sousa (2020), ao qual organizou uma aliança entre História da Matemática e Tecnologias através da Investigação Matemática. Destacamos, também, que esta proposta é adaptativa, isto é, ela pode ser manipulada pelo professor de acordo com seu público alvo, montando seu próprio material, retirando ou acrescentando o que achar necessário.

Os objetivos específicos são:

- Apresentar alguns fatos históricos que estimularam o desenvolvimento da Trigonometria, até o aparecimento das funções trigonométricas;
- Entender a organização, a estruturação e os métodos das principais avaliações nacionais de aprendizagem;

- Apontar quais as habilidades das matrizes de referência do ENEM, SAEB e da nova BNCC que este trabalho desenvolve e que são exigidas do aluno para a aprendizagem das funções trigonométricas;
- Construir uma proposta didática com utilização do GeoGebra, fatos históricos, aplicações e questões contextualizada para dar suporte ao educador em suas atividades docentes no ensino de funções trigonométricas;
- Trabalhar aplicações das funções trigonométricas para a melhor compreensão do que se pode ser modelado no cotidiano;
- Apresentar itens já utilizados no ENEM e em vestibulares para fomentar a resolução de questões pelos alunos;
- Elaborar um roteiro com instruções para o uso do GeoGebra.

1.2 Organização da Dissertação

Nosso trabalho foi dividido em seis capítulos. No Capítulo 2, apresentaremos um breve contexto histórico da Trigonometria de modo geral, abordando alguns fatos históricos que fazem parte de seu desenvolvimento. Para sermos mais específicos, falaremos dos povos da antiguidade que tiveram suas contribuições reconhecidas, como os gregos, babilônios, os egípcios e hindus. Já comentamos sobre a importância da História da Matemática no ensino, e tendo em vista que muitos livros didáticos carecem de tal parte, organizamos fatos para que os professores possam se apropriar e compartilhar com os alunos.

No Capítulo 3, abordaremos as principais avaliações em larga escala do nosso país, o ENEM e o SAEB. A necessidade da presença deste capítulo no trabalho é a importância do conhecimento sobre tais avaliações e suas matrizes de referência, isto é, todos os professores devem saber quais as habilidades a serem alcançadas no ensino de determinados conteúdos da disciplina para que haja uma aprendizagem significativa e consequentemente o bom desempenho nas provas. Portanto, refinamos as matrizes mencionadas e abordaremos apenas as habilidades e descritores associados aos conhecimentos das funções trigonométricas, bem como esclarecer o trabalho a ser realizado para atingir a aprendizagem desejada do conteúdo.

O Capítulo 4, parte principal do nosso trabalho, criamos uma proposta de ensino para as funções trigonométricas, utilizando o GeoGebra. Partimos dos conceitos básicos do tema, arcos de circunferência e circunferência trigonométrica. Em seguida, trabalhamos as razões trigonométricas seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente na circunferência com o apoio do *software*, definimos a função de Euler e arcos côngruos. Também desenvolvemos um estudo sobre as funções trigonométricas, dando ênfase nas do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$, pois são as mais comuns na modelagem de situações problemas do dia a dia. Para finalizar o capítulo, abordaremos a metodologia PGD, que consiste em discussões sobre uma situação problema, que é lançada aos alunos antes de abordar o conteúdo de funções. A intenção é que os estudantes já busquem respostas desde o princípio da explicação.

No Capítulo 5, listamos uma série de aplicações das funções trigonométricas no cotidiano, em que citamos, as marés, a roda gigante, a pressão arterial, o MHS, o pêndulo cônico e o jogo de golfe. Podemos utilizar essas aplicações na prática da metodologia PDG. Ainda nesse capítulo, abordaremos questões do ENEM e de vestibulares para que os professores possam utilizá-las como exemplos e exercícios propostos, completando a proposta. No Capítulo 6, encerramos com as conclusões e perspectivas futuras como continuação deste trabalho.

2 VOCÊ SABE COMO SE DESENVOLVEU A TRIGONOMETRIA?

A arte de ensinar Matemática conta com uma tendência muito importante que é a História da Matemática. Segundo Siqueira (2007), o ensino dos conteúdos matemáticos não pode ser distanciado da sua respectiva história, quando abordado em sala de aula, pois os fatos ajudam o aluno a entender como e quais necessidades contribuíram para aquele resultado. Muitos livros didáticos adotados pelo PNLD cumprem as orientações do MEC e trazem em sua estrutura a História da Matemática, porém, em certas coleções essas partes são breves e registram apenas alguns personagens. Contudo, neste capítulo iremos tratar dos registros históricos do surgimento e utilização da Trigonometria desde a antiguidade, abordando sobre os matemáticos que tiveram maiores contribuições para o desenvolvimento desse ramo, a fim de que os docentes tenham em mãos um material mais abrangente acerca do tema, podendo assim explanar melhor essa tendência.

2.1 Contexto histórico da Trigonometria

A Trigonometria é um ramo da Matemática em que sua origem não é precisa, mas existem inúmeros registros desde a pré-história, inclusive relatando que astrônomos babilônicos do século IV e V a.C. já organizavam dados consideráveis de suas observações. É sabido que muitos povos da antiguidade, como os gregos, sumérios, babilônios, romanos, egípcios, chineses e hindus, através de suas culturas e seus matemáticos, puderam contribuir para esse desenvolvimento da Trigonometria. As necessidades da astronomia, por exemplo, que tinham como objetivo construir tabelas que fornecessem, em intervalos de tempo regularmente espaçados, as coordenadas que definissem a posição de um astro, foi um dos motivos que levaram à evolução desse ramo da Matemática. Também havia a crença de que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da Terra, daí surgiu o interesse de relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o respectivo ângulo central associado. Ainda encontramos a exploração da Trigonometria na resolução de problemas, envolvendo a cronologia do tempo, a agricultura, a navegação e a medicina. Em geral os estudos de Trigonometria se organizavam através da trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, estes eram triângulos tomados sobre a superfície de uma esfera, como mostra a Figura 1. No entanto, para esses estudos, foi preciso desenvolver partes da trigonometria plana.

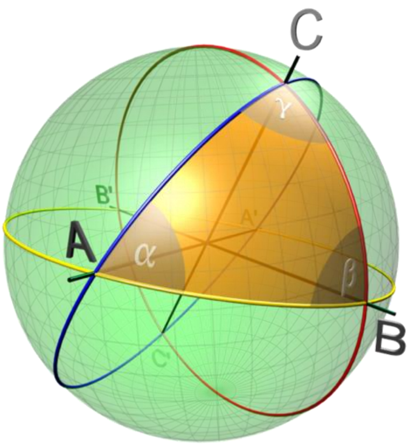


Figura 1 - Triângulo esférico
Fonte: Disponível em <https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:Spherical_triangle_3d.png>

2.1.1 Trigonometria no Egito e Babilônia

Embora não se sabe precisar onde a Trigonometria surgiu, existem indícios de que seu surgimento foi no Egito e na Babilônia, através de cálculos envolvendo as razões entre números e medidas de lados dos triângulos semelhantes. Essas informações estão contidas no Papiro Rhind[4], Figura 2, também conhecido por Papiro Ahmes, cuja data é de aproximadamente 1650 a.C. Seu conteúdo era constituído por 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um outro trabalho mais antigo. O papiro foi adquirido no Egito pelo escocês Alexander Henry Rhind, herdando assim seu nome. Esse tesouro é a principal fonte de informações sobre a Matemática egípcia antiga, suas dimensões chegavam a aproximadamente 5,49 metros de comprimento e 33 centímetros de largura.

[4]O Papiro Rhind foi publicado em 1927 (EVES, 2004).

Figura 2 – Uma parte do Papiro Rhind
Fonte: Disponível em <https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Egyptian_A%27h-mos%C3%A8_or_Rhind_Papyrus_(1065x1330).png>

Dentre os 85 problemas do Papiro, quatro contém o termo seqt de um ângulo. Naquela época, os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide usando a razão entre o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical para cada variação de unidade na altura (FOSSA, 2009). Nesse contexto, podemos associar o seqt[5] de uma pirâmide regular ao que hoje identificamos por cotangente do ângulo formado entre a face lateral e a base. As pirâmides egípcias eram construídas de modo que esta inclinação fosse constante, que era aproximadamente 52°. Na Figura 3, o seqt do ângulo é a razão entre OM e OV.

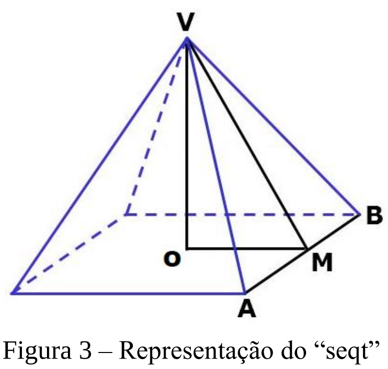


Figura 3 – Representação do “seqt”
Fonte: Elaborada pelo autor

[5] O afastamento horizontal era medido em mão e o vertical em cúbito. Em 1cúbito havia 7 mãos.

Outro fato importante que aconteceu no Egito, porém com a influência do grego Tales[6] de Mileto (624-546 a.C.), Figura 4, foi que quando ele viveu no Egito, atraiu a atenção por calcular a altura de uma pirâmide através da sombra. Segundo Eves (2011), há duas versões de como Tales fez esse cálculo. Uma delas é baseado no relato muito antigo de Hierônimos[7], que afirma: o grego anotou o comprimento da sombra no instante em que esta era coincidente à altura da pirâmide que a projetava. Em seguida, a versão dada por Plutarco[8] revela: ele fixou verticalmente uma vara[9] ao solo, verificou a medida da sua sombra e usou semelhança de triângulos. Porém, ambos os métodos deixam vago como foi calculada a medida integral da sombra da pirâmide, pois ela deve ser considerada desde o centro da base até sua extremidade, o que de certa forma seria impossível de ser identificada. Na Figura 5, observa-se o método de acordo com a versão de Plutarco.

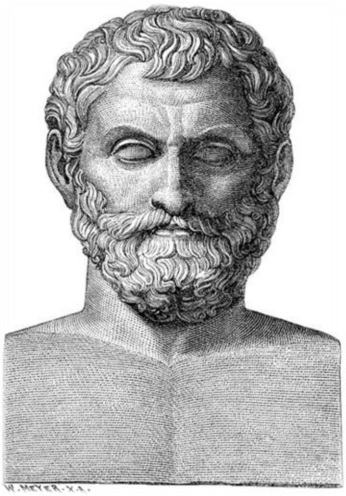


Figura 4 - Tales de Mileto
Fonte: Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Illustrerad_Verldshistoria_band_I_Ill_107.jpg>

[6] Nascido em Mileto, na Grécia, foi um importante pensador, filósofo e matemático. Considerado o "Pai" da Geometria demonstrativa (EVES,2004).
[7] Viveu entre 331 e 440 d.C., discípulo de Aristóteles.
[8] Historiador, filosofo e prosador grego. Viveu entre 46 e 126 d.C.
[9] Conhecido pelos gregos como gnômon ou relógio de sol.

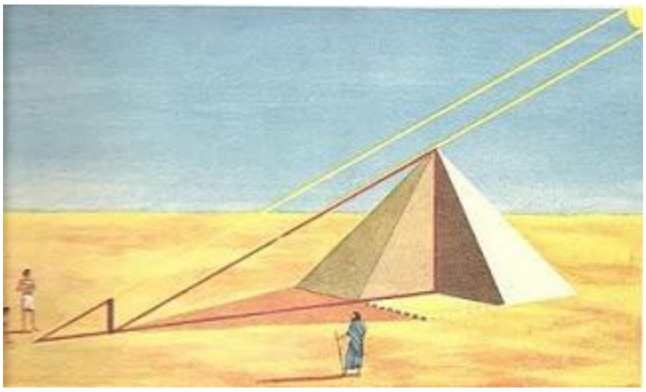


Figura 5 - Ilustração de uma das versões de como Tales mediu a altura da pirâmide
Fonte: (MARTINEZ, 2013)

Mudando o cenário, consideraremos agora as contribuições dos babilônios. Estes por sua vez, segundo Costa (2003), tiveram grandes influências no desenvolvimento da Trigonometria devido as suas observações astronômicas, da qual resultou em um calendário astrológico e tabulas[10], dentre elas uma de eclipses lunares que foi elaborada a partir de 747 a.C. Seus interesses pela astronomia eram justificados por razões religiosas e pela conexão com o calendário e os períodos de plantio e colheita. É dado a eles, também, o reconhecimento do desenvolvimento do sistema sexagesimal e o emprego na medida do tempo e dos ângulos em minutos e segundos.

2.1.2 Trigonometria na Grécia

Na Grécia, foram pensadas diversas técnicas para medir a posição dos astros. Desde Platão (428-347 a.C.), o modelo grego para representar os movimentos celestes se baseava em duas esferas concêntricas. Tinha-se a Terra como uma esfera fixa envolvida por uma outra esfera, de diâmetro muito maior e nesta se encontravam os corpos celestes, como mostra a Figura 6. Na superfície interna da esfera celeste ficavam embutidas as estrelas fixas, que observamos movimentando-se em razão do giro da esfera. Além dos corpos fixos tem os errantes, que incluem o Sol e a Lua, estes passeiam pela superfície da esfera e são chamados de planetas. Para os gregos, todos os corpos celestes, moviam-se, por princípio, uniformemente,

[10] Peça em que os povos antigos faziam seus registros. Uma das tábulas babilônicas mais conhecida é a Plimpton 322 (EVES, 2011, p. 63).

devido a não se imaginar que existissem movimentos perfeitos que tornassem possível a variação da velocidade (ROQUE; CARVALHO, 2019).

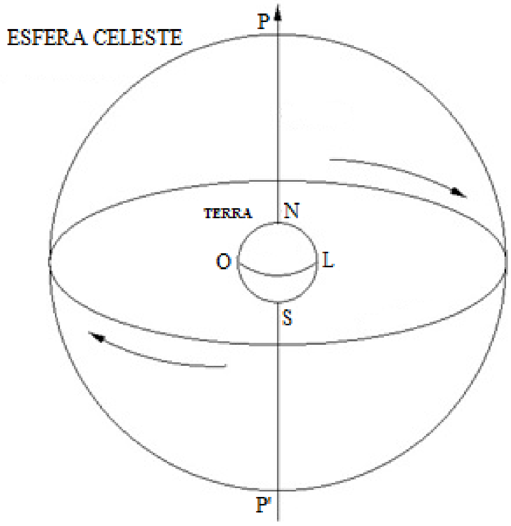


Figura 6 – Representação da esfera celeste
Fonte: Disponível em <http://losporquesdelanaturaleza.com/persiguiendo-a-las-estrellas/>

De acordo com Roque e Carvalho (2019), os astros se movimentavam sobre a superfície esférica, e como era de interesse calcular suas localizações, era utilizado a Trigonometria esférica, que por sua vez necessitava de geometria plana, pois os problemas a serem solucionados envolviam descobrir medidas de lados ou ângulos, sendo dados alguns dos elementos.

Os triângulos esféricos eram estudados na Grécia desde antes de Euclides de Alexandria. Ainda segundo Roque e Carvalho (2019), esse fato pode ser notado pois ele utilizou a geometria esférica em sua obra intitulada *Os Fenômenos*[11]. É necessário destacar que a Trigonometria é composta por conceitos indispensáveis, nesse momento destacamos a importância do ângulo e como calcular sua medida, tendo em vista que são fundamentais em inúmeras situações, por exemplo, na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo, que são números dependentes das medidas dos ângulos agudos do triângulo e não das medidas dos lados.

Compreendemos que a Matemática é bastante ramificada e que os seus desenvolvimentos não ocorreram da mesma forma e nem em um mesmo período, portanto, certamente foi acontecendo gradualmente, aos passos que a sociedade se tornava mais

[11] Obra de Euclides, ainda existente, que focaliza a geometria esférica necessária para a astronomia de observação.

científica, pesquisadora e observadora. Podemos dizer que o avanço da Trigonometria e da geometria estão intimamente ligados. Neste campo, de acordo com Roque (2012), a Grécia obteve grandes sábios, sendo um deles Tales de Mileto (624-546 a.C.), citado antes, que se dedicou aos estudos da semelhança de triângulos que acabou embasando a Trigonometria, e seu discípulo Pitágoras (570-495 a.C.). A este último é atribuído o reconhecimento da primeira demonstração do teorema, que leva seu nome, que diz: *"Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos"*. Este teorema implica na Relação Fundamental da Trigonometria.

Registros indicam que no século V a.C. foi fundada a escola pitagórica, esta, por sua vez, levava o nome de Pitágoras pois ele teria sido seu fundador. Nela, foram feitas várias descobertas, inclusive na área da música, resultando uma relação entre os sons harmônicos emitidos por cordas de mesmo comprimento e pressionadas em partes proporcionalmente diferentes. Essas observações resultaram em uma escala. Com isso, podemos dizer que essas observações eram um prenuncio do surgimento das funções seno e cosseno e de aprofundamentos dos estudos do som (PEREIRA, 2013).

Por volta de 200 a.C., o astrônomo grego Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) encontrava-se interessado em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e o comprimento da Terra. O matemático descobriu a distância entre Siena e Alexandria através do tempo de viagem das caravanas que faziam o trajeto e percorriam cerca de 100 estádios[12] por dia, durante, em média, 50 dias. Segundo Fossa (2009), Eratóstenes também sabia que no solstício de verão do Hemisfério Norte os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície de Siena, pois ao meio dia a luz atingia o fundo de um grande poço, além disso, obeliscos e colunas não faziam sombra. Depois, ele pensou em observar a inclinação dos raios solares em Alexandria no solstício de verão do ano seguinte, obtendo a medida de 7,2°. Assim, ele determinou a mais notável medida da antiguidade para a circunferência terrestre usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o levando a perceber a necessidade de estreitar as relações entre ângulos e cordas. Importante destacar que a descoberta dessa informação foi possível pois se conhecia o conceito de ângulo e de como medi-lo. A Figura 7 ilustra a criatividade do matemático.

[12] Unidade de comprimento usada pelos gregos equivalente a 157 metros.

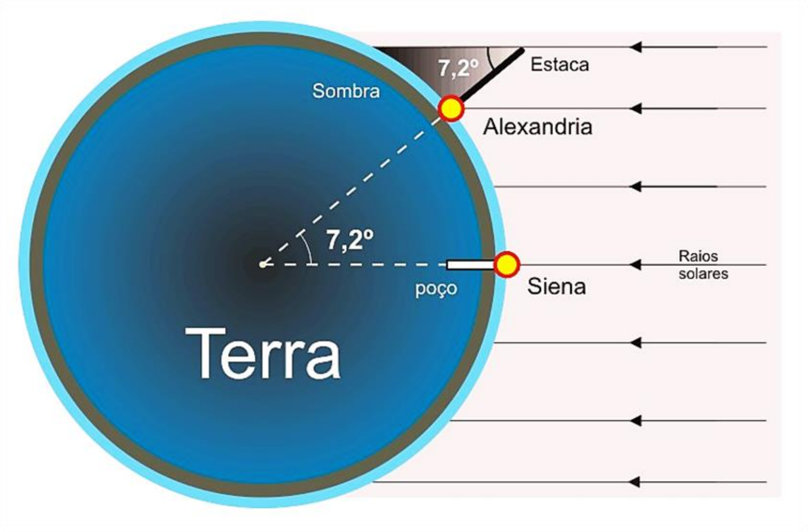


Figura 7 - Método de Eratóstenes para descobrir o comprimento da terra
Fonte: (BORGES; NICOLAU, 2010)

Na segunda metade do século dois a.C., surge Hiparco de Nicéia (180 – 125 a.C.), ele era um observador extremamente cuidadoso e se creditam a ele, em astronomia, segundo Silva (2013), feitos como a determinação, com precisão, do nascer e do ocaso de várias estrelas, usando uma tabela de cordas calculada por ele mesmo. Esta tabela estava inserida em uma obra dividida em 12 livros que foi perdida ao passar do tempo. Coube também a Hiparco, organizar dados empíricos babilônicos, confeccionar um catálogo de 850 estrelas e descobrir e estimar a precessão anual dos equinócios, chegando a obter calendários mais precisos e maior segurança na navegação. A construção da tabela de cordas necessitava de medida de inclinações ou de ângulos, mas até a obra *Os Elementos*, de Euclides (325 – 265 a.C.), os ângulos eram medidos por múltiplos e submúltiplos do ângulo reto. Anos depois, os astrônomos gregos passaram a utilizar o sistema sexagesimal dos babilônios, este sistema dividia a circunferência em 360 partes, cada uma correspondendo a um grau, estabelecendo ainda as subdivisões em minutos e segundos, estreitando a relação com a base sessenta.

Após Hiparco, aparece Claudio Ptolomeu (85-165 d.C.), Figura 8, autor da maior e mais importante obra da Trigonometria da antiguidade que foi intitulada de *Almagesto*. Dividida em treze volumes, nela estão registradas suas observações e conclusões feitas de efemérides astronômicas, foi reconhecida por mais de 2000 anos como o manual da astronomia. Segundo Silva (2013), Ptolomeu desenvolveu o estudo da Trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro volume, que consistiu na construção de uma tabela de cordas que, provavelmente, foi baseada na de Hiparco. Porém, no *Almagesto*, não existia uma tabela contendo as funções seno e cosseno, mas sim a função corda do arco α, representada por $\boldsymbol{crd\ \alpha}$, como se vê na Figura 9, embora esses termos não estivessem contidos no texto. A função corda do arco α era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de medida α, em graus, em um círculo cujo raio é 60.

Figura 8 - Claudio Ptolomeu
Fonte: Disponível em
<https://commons.wikimedia.org/wiki/User:Kanchelskis/Atlante#/media/File:PSM_V78_D326_Ptolemy.png>

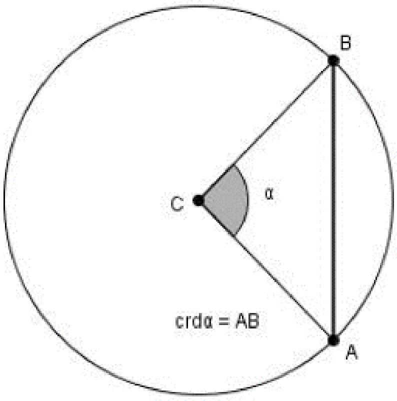


Figura 9 – Representação geométrica da corda
Fonte: (SILVA, 2013)

Ainda de acordo com Silvia (2013), no *Almagesto* são abordadas outras importantes informações, dentre elas há uma teoria para o Sol, para a Lua, para os eclipses, para as estrelas fixas e para os cinco planetas visíveis: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Esta teoria descrevia os movimentos dos planetas e previam os eclipses, melhorando as deixadas por seus antecessores. Também há uma defesa da teoria geocêntrica do universo, escritas sobre mapas por meio de projeções e um resultado que passou a ser conhecido como o Teorema de Ptolomeu, que afirma que se ABCD é um quadrilátero convexo e inscrito num círculo, então a soma do produto entre os lados opostos é igual ao produto das diagonais. Portanto, podemos concluir que, apesar da obra de Ptolomeu ser conhecida como uma cartilha de astronomia, ela pôde contribuir com grandes e valorosas informações para o desenvolvimento da Trigonometria que até hoje são importantes.

2.1.3 Os Hindus

Assim como os babilônios, os gregos e os egípcios, os hindus tinham muito interesse na astronomia. Porém, eles seguiram um caminho um pouco diferente dos anteriores. O que existe nos dias de hoje relacionado aos hindus que pode comprovar suas participações nessa trajetória é o texto Surya Siddhanta, que quer dizer Sistemas do Sol. É datado de aproximadamente 400 d.C. e segundo os próprios hindus seu autor era o Deus do Sol, identificado por Surya. Nele haviam poucas explicações e nenhuma prova ou demonstração, pois por ser escrito por um Deus tudo seria acatado como verdade (COSTA, 2003).

O Surya permite concluir que os hindus construíram uma nova perspectiva para a Trigonometria, diferente da apresentada por Ptolomeu em sua obra. Isso é notório pois uma nova tabela de cordas foi criada, dessa vez era utilizado apenas metade da corda de um arco, correspondendo assim apenas a metade do ângulo central e dando uma visibilidade para um triângulo retângulo na circunferência, como vemos na Figura 10. Essa meia corda hindu era chamada de *jya*, que era uma das grafias utilizadas para associar a corda. Durante muitos anos essa palavra veio passando por traduções de vários idiomas, muitas até incorretas, chegando ao latim com o termo *sinus*. Daí, hoje, a expressão usada é seno (EVES, 2011). Portanto, com os hindus, a Trigonometria evoluiu bastante introduzindo as funções trigonométricas e aperfeiçoando as tabelas trigonométricas.

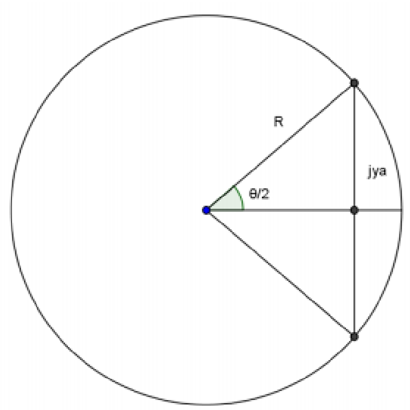


Figura 10 – Representação da meia corda hindu
Fonte: (GOMES, 2011)

Outro fato importante é que alguns matemáticos hindus, por volta de 500 d.C., já utilizavam um sistema decimal[13] e, segundo Costa (2003), após introduzirem os conceitos de semicorda e de seno, demonstraram certas identidades trigonométricas, dentre elas a RFT (Relação Fundamental da Trigonometria) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, onde a medida do arco é 2θ.

Neste momento, já é possível perceber quanta contribuição os diversos povos da antiguidade puderam dar sobre o estudo e desenvolvimento da Trigonometria. Vimos que desde os tempos mais remotos as necessidades da humanidade influenciam nas transformações das condições de pesquisas, sejam na astronomia, ou qualquer outra área. Sendo assim, para finalizarmos nosso contexto histórico trataremos das contribuições mais modernas.

2.1.4 A Trigonometria após o século XIV

Em meados do século XIV, foi possível galgar alguns degraus da escada da evolução da Matemática, em que primariamente as noções de quantidades variáveis e funções são expressas, tanto na Escola de Filosofia Natural do Merton College de Oxford, como também na Escola de Paris. Assim, ficou claro que a Matemática é o principal instrumento para o estudo dos fenômenos da natureza.

[13] Quando o sistema decimal hindu surgiu não havia símbolo para o zero.

Muito tempo se passou e a Trigonometria foi sendo cada vez mais utilizada. No entanto, suas bases não seriam sempre as obras deixadas pelos famosos que citamos anteriormente, a Trigonometria passaria a ser abordada sem estar conectada à astronomia. Esse feito coube a Regiomontanus[14] (1436-1475). Segundo Fossa (2009), ele escreveu a obra *De Triangulis Omnimodes*, publicada em 1533 e constituída por cinco livros, que contempla toda a Trigonometria. Nela é calculada novas tabelas trigonométricas e incrementado o uso da tangente. Na Figura 11, vemos um registro de uma das páginas da obra.

Figura 11 – Obra Tratado sobre triângulos
Fonte: Disponível em <https://impa.br/noticias/sothebys-faz-leilao-de-reliquias-da-matematica-mundial/>

De acordo com Costa (2003), vários nomes ficaram gravados nesse período da História da Trigonometria, tais como Nicole Oresme[15] (1323 -1382), Galileu (1564-1642), Descartes (1596-1650), Napier (1550-1617), Copérnico (1473-1543), Rhaeticus (1514-1576), Viète (1540-1603), John Newton (1622-1678), John Wallis (1616-1703), Sir Isaac Newton (1642-1727) e Thomas Fanten de Lagny (1660-1734). Esse último, foi o primeiro matemático a confirmar a periodicidade das funções trigonométricas.

Mesmo com muitos estudiosos interessados na apuração desse ramo, somente no século XVIII, com Leonhard Euler (1707-1783), Figura 12, é que a Trigonometria assumiu uma nova roupagem. Ele tomou um círculo de raio unitário e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo. No entanto, o que ocorreu foi a transição das razões trigonométricas para funções periódicas, assim originando uma função que carregaria seu nome, Função de

[14] Codinome de Johannes Müller von Königsberg, um dos maiores matemáticos do século XV. Estabeleceu a Trigonometria como uma ciência independente da astronomia.
[15] Autor de *Treatise on the configuration of Qualities and Motions*, que continha a ideia da representação gráfica que explicita a noção de funcionalidade entre variáveis, por exemplo, velocidade e tempo (COSTA, 2003).

Euler ou Função E. Esta função é definida no conjunto dos números reais e a sua imagem é o círculo trigonométrico S_1. Isto é, a cada número real t, a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ do círculo trigonométrico da seguinte maneira: dado um número real $t > 0$, medimos em S_1, a partir do ponto $(1,0)$, um arco de comprimento t, sempre percorrendo o círculo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. A extremidade final deste arco é um ponto (x, y) de S_1, que definiremos como $E(t)$. Para $-t < 0$, $E(-t)$ será a extremidade final de um arco de comprimento t, medido a partir de $(1,0)$, no sentido negativo de S_1 (isto é, no sentido dos ponteiros do relógio).

Figura 12 - Leonhard Euler
Fonte: Disponível em <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2-2.jpg>

A partir dessa função E, é calculado o $sen(x)$ e o $\cos(x)$ em função de uma variável x, $x \in \mathbb{R}$[16]. Esse x é a abcissa dos pontos P do círculo unitário centrado na origem do sistema cartesiano. Contudo, destacamos aqui o que escreveu Elon Lages Lima, em sua obra *Meu Professor de Matemática e outras histórias:* “a função de Euler abriu para a Trigonometria as portas da Analise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas” (LIMA, 2012, p. 37).

Após a construção do contexto histórico da Trigonometria, em que foi possível levantar os registros desde os primeiros indícios até o século XVIII, vamos exprimir aquilo que todos os educadores devem saber sobre os documentos que norteiam o trabalho docente, a BNCC, e sobre as principais avaliações nacionais de aprendizagem do nosso país, o ENEM e o SAEB.

[16] Nessa época o conjunto dos números Reais ainda não era bem definido, mas levemos em consideração uma interpretação moderna do trabalho de Euler.

3 VAMOS CONHECER AS PRINCIPAIS AVALIAÇÕES NACIONAIS

Dedicaremos este capítulo a uma síntese das avaliações do desempenho da aprendizagem dos estudantes ao final do Ensino Médio, dentre elas as que são mais comentadas, no caso, ENEM e o SAEB. Trataremos, também, de apontar quais são as competências e habilidades da BNCC e do ENEM e os descritores do SAEB para nortear os professores no trabalho docente, tendo em vista o que os alunos devem desenvolver para uma aprendizagem satisfatória das funções trigonométricas.

3.1 Avaliações no Brasil

Atualmente no Brasil, contamos com várias avaliações educacionais em larga escala, devido à grande necessidade de se gerar indicadores que orientem os governos na criação de políticas públicas para a melhoria da qualidade do ensino em suas instituições educacionais. Essas avaliações têm revelado enormes deficiências na aprendizagem em Matemática, que tem se propagado ao longo do tempo, principalmente no Ensino Médio. A partir da Figura 13, podemos notar que, entre os anos 1995 e 2017, na proficiência média em Matemática do Ensino Médio, de acordo com o SAEB, não houve grandes variações, chegando a no máximo 289 e no mínimo 267, em uma escala organizada por nível, que vai do nível 1 (225 – 249 pontos) ao nível 10 (450 – 475 pontos). No ano de 2017 a média foi 270, uma das menores na série histórica.

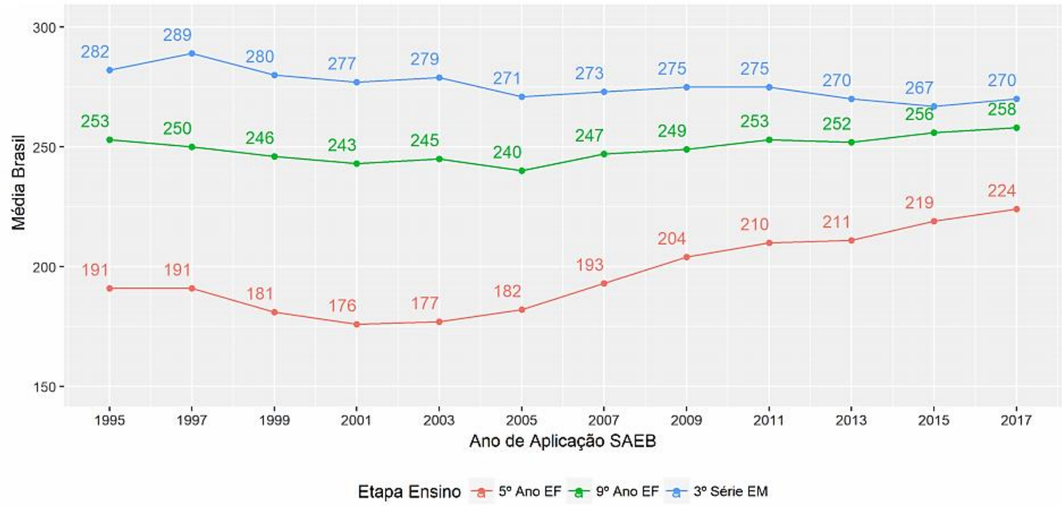


Figura 13 - Evolução das proficiencias médias em Matemática dos estudantes brasileiros 1995 - 2017 no SAEB
Fonte: (INEP, 2018)

Na Figura 14, temos as médias em Matemática dos últimos quatro anos no ENEM. Nos últimos quatro anos verifica-se que o desempenho em Matemática vinha crescendo, apesar de pouco, porém, no ano 2019 houve uma queda de 12,4 pontos em relação ao ano anterior, o que indica além de uma interrupção no crescimento, um declínio. Portanto, esse indicativo sugere uma investigação mais detalhada sobre o Ensino de Matemática.

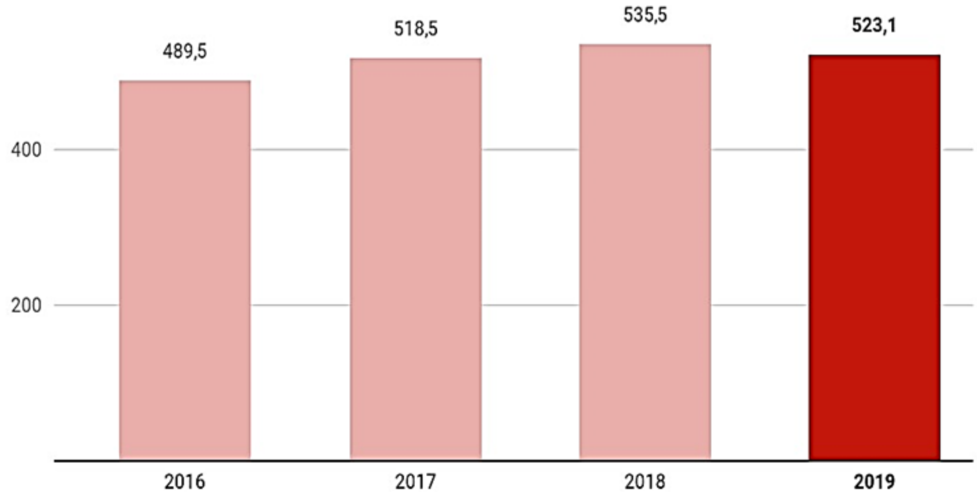


Figura 14 - Nota média dos últimos quatro anos em Matemática no ENEM
Fonte: INEP

Muitas vezes a culpa do baixo desempenho dos educandos é atribuída somente a atuação dos professores, sem que seja feita uma análise sobre a complexibilidade em torno do processo de desenvolvimento humano, o qual sofre grandes influências do meio social, dentro e fora das unidades educadoras.

No contexto das avaliações, quando nos referimos às da sala de aula, ou internas, é comum os relatos dos educadores sobre dificuldades na elaboração dos instrumentos avaliativos adequados aos estudantes. De acordo com Rabelo (2013), essas avaliações são relativamente pobres e apresentam uma diversidade de insuficiências e problemas, satisfazendo uma aprendizagem mecânica e superficial, apesar de os professores acreditarem que estão avaliando aprendizagens profundas e significativas, esquecendo-se que o foco principal deveria ser a avaliação do desenvolvimento de competências no domínio da resolução de problemas, externando assim que as questões e métodos utilizados não são criticamente analisados em relação ao que avaliam.

Perante a situação abordada, muitos estados e municípios têm criado seus próprios sistemas de avaliação, atendendo a algumas peculiaridades e possibilitando comparar seus resultados com os nacionais. Dentre elas, temos no Rio Grande do Norte o SIMAIS, no Ceará o SPAECE, em Pernambuco o SAEPE, no Rio Grande do Sul o SAERS, SAEGO em Goiás e SAERJ no Rio de Janeiro, todos estes organizados pelo CAEd/UFJF. Esses sistemas utilizam como base de orientação uma matriz de referência que os guiam na fase de elaboração de itens. As matrizes servem também de suporte para a análise dos resultados e para os feedbacks.

Para Rabelo (2013):

> Deve-se destacar que a matriz de referência não pode ser confundida com a matriz curricular, pois essa é muito mais ampla e norteia as estratégias de ensino nas escolas, enquanto aquela é utilizada para subsidiar a elaboração de um teste especifico, contemplando apenas as habilidades consideradas fundamentais para a construção da avaliação (RABELO, 2013, p14).

A seguir, faremos uma breve abordagem sobre a Base Nacional Comum Curricular – BNCC e as duas principais avaliações: ENEM e SAEB. Ainda, apontaremos, respectivamente, quais habilidades e descritores das suas matrizes de referência deverão ser desenvolvidos, e como serão, neste trabalho, de modo que alcancemos uma aprendizagem satisfatória em funções trigonométricas.

3.1.1 BNCC

De acordo com Brasil (2015), a BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação - PNE.

No documento, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Na Base, em relação a área de Matemática e suas Tecnologias, é proposto a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade.

Além disso, a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

No Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes, impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior.

Após a abordagem sobre esse documento, vamos destacar a competência especifica e a habilidade que estão associadas com o estudo das funções trigonométricas e que nortearam a organização desta proposta.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA 3

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

HABILIDADE

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

3.1.2 ENEM

O Exame Nacional do Ensino Médio foi implantado em 1998 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira, autarquia vinculada ao MEC, para avaliar individualmente o desempenho por competências dos estudantes ao final da última etapa da educação básica. Sua estrutura é dividida por eixos aos quais fazem parte a interdisciplinaridade e a contextualização dos conteúdos expressos na forma de situações problemas. Com esse formato, ela proporciona não somente a medição das competências e habilidades dos indivíduos, mas também a oportunidade de autoavaliação da sua escolarização, análise das expectativas dos estudos posteriores e adaptação e construção das políticas públicas voltadas à educação.

Do início aos dias atuais, muitas alterações foram realizadas no corpo estrutural do exame, desde as finalidades até à matriz de referência. A partir de 2009, foi ampliado para servir como processo seletivo das instituições de Ensino Superior através do SISU, PROUNI e para financiamento de estudos em universidades não gratuitas através do FIES. Como consequência dessas mudanças, a avaliação teve de recorrer às técnicas oriundas da Teoria de Reposta ao Item – TRI, abrindo a possibilidade de construção de uma série histórica do desempenho dos estudantes e dos egressos do Ensino Médio, permitindo um acompanhamento longitudinal nas quatro áreas avaliadas e redação.

Atualmente existem dois métodos de análise de desempenho em avaliações, a Teoria Clássica dos Testes – TCT e a TRI. Na primeira, o desempenho do candidato é medido pelo número de acertos. A outra, busca priorizar a coerência no levantamento do desempenho dos candidatos, como destaca Rabelo (2013):

> Pela TRI, o grau de conhecimento dos alunos é obtido por meio das características dos itens, de modo que os alunos que acertem um mesmo número de itens de uma prova podem receber notas diferentes em razão de características especificas dos itens acertados. Essas características incluem a discriminação, a dificuldade e a probabilidade de acerto ao acaso (RABELO, 2013, p. 32).

A prova é preparada com itens pré-classificados como muito fáceis, fáceis, médios e difíceis. Levando em consideração o fator dificuldade, podemos dizer que, por exemplo, se alguém acerta as questões mais difíceis e erra aquelas consideradas fáceis, é provável que ele tenha acertado ao acaso, que popularmente é conhecido como chutar as respostas. Assim, será possível concluir que há incoerência nas respostas desse candidato. Espera-se que o candidato tenha um bom desempenho nos itens mais simples. Portanto, o TRI faz uma análise estatística, uma espécie de antichute, para calcular uma nota final que indique se houve coerência nas respostas. Considere uma hipotética situação no ENEM: uma questão pede para calcular quanto é 3 mais 3 mais 2 mais 2. O candidato erra e responde 13, em vez de 10. Em outra questão pede que o aluno calcule o perímetro de um retângulo cuja base mede 3 e a altura 2. Ele responde corretamente 10. De acordo com a TRI, a nota final desse candidato seria comprometida, isso porque, se ele não conseguiu efetuar a operação necessária na primeira questão, não teria como saber calcular a resposta da segunda, ou seja, provavelmente acertou ao acaso. Isso tem feito com que muitos estudantes não saiam marcando questões de qualquer maneira.

As áreas avaliadas são:

(i) Linguagens, Códigos e suas Tecnologias (incluindo redação);
(ii) Ciências Humanas e suas Tecnologias;
(iii) Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
(iv) Matemática e suas Tecnologias.

No antigo ENEM, isto é, antes de 2009, cinco competências definiam o que os estudantes ao final da última etapa precisariam dominar, os conhecimentos deveriam possibilitar o domínio de linguagens, a compreensão de fenômenos, o enfrentamento de situações problemas, a construção de argumentações e a elaboração de propostas. Com as mudanças, essas competências passaram a formar os eixos cognitivos básicos, que representam as ações e operações mentais que todos os jovens e adultos deveriam desenvolver como recurso mínimo que os habilitam a enfrentar melhor o mundo ao seu redor.

Já a partir de 2009, o novo ENEM passou a ser constituído por 4 (quatro) provas, cada uma delas com 45 (quarenta e cinco) questões objetivas de múltipla escolha, abordando as áreas de conhecimento citadas anteriormente, e uma proposta de redação. As questões são extraídas de um banco de itens, elaborados sob a supervisão do INEP. Essas questões atendem as predefinições que estão na matriz de referência, como veremos a seguir.

Na matriz de referência[17] da nova versão do exame, cada uma das quatro áreas foi organizada em um conjunto de competências amplas, que na Matemática e suas tecnologias são 7 (sete), e estas desdobradas em habilidades mais especificas, totalizando 30 habilidades para cada área. Como aqui estamos interessados na avalição em Matemática, e mais precisamente no estudo das funções trigonométricas, listaremos somente aquelas que trataremos nesta pesquisa. Compartilharemos também os eixos cognitivos, que são: “ações e operações mentais que os estudantes devem desenvolver como recursos mínimos que os habilitam a enfrentar melhor o mundo que os cercam” (RABELO, 2013, p 61).

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. **Dominar linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. **Compreender fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. **Enfrentar situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. **Construir argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

[17] Disponível em: (BRASIL, 2012).

V. **Elaborar propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

3.1.2.1 Habilidades a serem desenvolvidas no ensino das funções trigonométricas

Como foi mencionado antes, citaremos apenas aquelas habilidades que estão ligadas ao ensino das funções trigonométricas, objeto deste trabalho, e que os estudantes devem desenvolver para resolver as questões das avaliações. Aproveitando o ensejo, sintetizaremos as estratégias utilizadas no Capítulo 4 para desenvolver as aptidões desejadas. As habilidades que trataremos compõem a Competência de área 5:

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Adiante, listamos os objetos de conhecimento, ou seja, os conteúdos que podem ser cobrados.

Objetos de conhecimento associados à Matriz de Referência

• Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• Conhecimentos geométricos**:** características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; Trigonometria do ângulo agudo.

• Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• **Conhecimentos algébricos:** gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; **relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.**

• Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Anteriormente, destacamos o objeto conhecimentos algébricos e os conteúdos que vamos abordar.

As relações entre os eixos cognitivos, as competências e as habilidades podem ser compreendidas de forma mais clara por meio da tabela que segue, nela revela-se a proposta tridimensional do exame:

Competências de área	DL	CF	SP	CA	EP
C1	H1	H2	H3	H4	H5
C2	H6	H7	H8	H9	-
C3	H10	H11	H12	H13	H14
C4	-	H15	H16	H17	H18
C5	**H19**	**H20**	**H21**	**H22**	**H23**
C6	-	-	H24	H25	H26
C7	-	H27	H28	H29	H30

Tabela 1 – Relação entre competências, habilidades e eixos cognitivos
Fonte: (RABELO, 2013, p. 63)

Na próxima seção, abordaremos o SAEB e os descritores relacionados as funções trigonométricas. Também discutiremos como pretendemos desenvolver tais descritores e as habilidades conhecidas antes.

3.1.3 SAEB

O SAEB teve sua primeira aplicação no ano de 1990, sendo o pioneiro dos sistemas avaliativos da educação nacional. Diferente do ENEM, ele acontece a cada dois anos, provas em anos ímpares e resultado em anos pares, e tem por objetivo aferir o desempenho dos estudantes ao final de cada etapa de escolarização, ou seja, 2°, 5° e 9° ano do Ensino Fundamental e 3ª e/ou 4ª série do Ensino Médio. Mas, muitas mudanças aconteceram até os dias atuais, inclusive a fixação de uma mesma sigla em todas as provas, pois até a aplicação de 2017 eram ANA, ANEB e ANRESC, agora todas são identificadas por SAEB.

Visando diagnosticar a educação básica do país e contribuir para a melhoria de sua qualidade, a avaliação conta com dois instrumentos coletor de dados, que são (BRASIL, 2019):

- Testes cognitivos, a serem aplicados aos alunos dos respectivos anos avaliados. Contemplam as áreas do conhecimento Língua Portuguesa (LP) e Matemática (MT). Em 2019, uma amostra de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental também fez provas de Ciências da Natureza (CN) e Ciências Humanas (CH).
- Questionários (Impressos e Eletrônicos), a serem aplicados aos Alunos, Professores, Diretores, Secretários Estaduais e Municipais de Educação. Coletam informações sobre fatores socioeconômicos e de contexto que podem auxiliar a compreender o desempenho nos testes. Portanto, é imprescindível que os Professores da turma e o Diretor, estejam presentes nos dias da aplicação. Na Figura 15, temos mais detalhes dos questionários.

Figura 15 - Questionários do SAEB
Fonte: (BRASIL, 2019)

Em relação ao público alvo da avaliação, a abrangência, a formulação dos itens e a área de conhecimento/disciplinas avaliadas, a Figura 16 detalha:

Público-alvo	Abrangência	Formulação dos Itens	Áreas do Conhecimento / Disciplinas Avaliadas
Creche e pré-escolas da Educação Infantil	Escolas públicas – Amostral (Estudo piloto)	BNCC	
2º ano do Ensino Fundamental	Escolas públicas – Amostral Escolas privadas - Amostral	BNCC	Língua Portuguesa e Matemática
5º e 9º ano do Ensino Fundamental	Escolas públicas – Censitário Escolas privadas - Amostral	Matriz de Referência	Língua Portuguesa e Matemática
9º ano do Ensino Fundamental	Escolas públicas – Amostral Escolas privadas - Amostral	BNCC	Ciências da Natureza e Ciências Humanas
3ª e 4ª série do Ensino Médio	Escolas públicas – Censitário Escolas privadas - Amostral	Matriz de Referência	Língua Portuguesa e Matemática

Figura 16 – Público alvo e outras informações
Fonte: INEP[18]

As provas de Matemática são orientadas por uma matriz de referência e tem como foco a resolução de problemas, pois essa metodologia possibilita o estabelecimento de relações, o desenvolvimento de capacidades de argumentação, a validação de métodos e processos, além de estimular formas de raciocínio que incluem dedução, indução, inferência e julgamento (RABELO, 2013). Essa matriz é dividida em quatro temas: Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações/Álgebra e Funções, Tratamento da Informação; e subdivididas em descritores, que de forma direta indica qual a habilidade uma determinada questão avalia do estudante. O SAEB adota, também, as técnicas oriundas do TRI e os resultados do desempenho nessas avaliações, juntamente com o fluxo escolar, determinam o IDEB das escolas, dos municípios, dos estados e do país.

[18] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/historico.

3.1.3.1 Descritores da Matriz de Referência – Matemática[19]- ligados ao ensino das funções trigonométricas

Da matriz da 3ª série do Ensino Médio destacamos o D5 e o D30. O primeiro está associado as razões trigonométricas no triângulo retângulo que é o ponto de partida do estudo da Trigonometria. Então, para entender a transição das razões trigonométricas para o círculo é indispensável possuir a devida aptidão com o D5, que acreditamos já ter sido ensinado preliminarmente ao conteúdo que estamos abordando. Já o segundo trata de identificar o gráfico das funções seno, cosseno e tangente através das suas propriedades.

3ª Série do Ensino Médio

Tema I. Espaço e Forma

D5 – Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Tema III. Números e Operações/Álgebra e Funções

D30 – Identificar gráficos de funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente) reconhecendo suas propriedades.

É importante perceber que existe uma correspondência entre o descritor D30 e as habilidades H19 e H20, isto pelo fato da investigação das propriedades, seja pela representação algébrica ou gráfica das funções trigonométricas. Assim, quando atendermos as habilidades H19 e H20, estamos atendendo o D30.

Nos capítulos a seguir, desenvolveremos uma estratégia didática para atender as necessidades que são postas pelas avaliações discutidas, partindo de uma proposta de ensino das funções trigonométricas, de pontos pré-requisitos até o estudo das funções, exibindo suas expressões algébricas e gráficas e explorando suas propriedades usando o software GeoGebra, atendendo as necessidades de reconhecimento das relações entre grandezas que usam Trigonometria. Em seguida, traremos aplicações das funções para podermos entender a sua inserção no cotidiano, principalmente dos estudantes. Por último, selecionamos várias questões do ENEM para discutirmos os métodos de resolução de problemas, visando uma apresentação

[19] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/educacao-basica/saeb/matrizes-e-escalas.

para os alunos que os possibilite a concretizarem o conhecimento acerca deste conteúdo e consiga resolvê-las nas avaliações que forem submetidos.

4 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo, desenvolveremos uma proposta didática para os professores de Matemática, da Segunda ou Terceira série do Ensino Médio, lecionar as funções trigonométricas aos estudantes, de modo que possibilite uma aprendizagem necessária para atender todas as necessidades exigidas pela Base Nacional Comum Curricular – BNCC, ENEM e SAEB. Apoiar-nos-emos na metodologia Problema Gerador de Discussão – PGD e num instrumento suficientemente capaz de conectar os conhecimentos algébricos aos geométricos, que é o GeoGebra, nele faremos as construções gráficas das funções em questão. O ponto de partida será apresentar alguns tópicos pré-requisitos.

Para entendermos, já de início, onde podemos observar as funções trigonométricas em situações do dia a dia, chamamos a atenção para o movimento de uma roda-gigante. Não é difícil perceber que esse movimento é circular, e ainda, se fixarmos as observações em uma das cabines, temos que sua altura varia em função do tempo do movimento e que essa altura pertence a um intervalo fechado ao qual chamamos os extremos de altura mínima e máxima. Esse intervalo é a imagem da função. Também considerando que a velocidade da roda seja constante, o tempo em que ela completa uma volta é sempre o mesmo, sendo esse intervalo o período da função. Assim, podemos generalizar o comportamento descrito antes como característico das funções trigonométricas. No Capítulo 5, aprofundaremos o movimento da roda-gigante e abordaremos outras aplicações.

A seguir, abordaremos a importância do uso do GeoGebra em sala de aula, a potencialidade e os benefícios à aprendizagem.

4.1 O uso do GeoGebra como facilitador da aprendizagem

A tecnologia tem avançado cada vez mais na contemporaneidade. Atrelado a esse fato vem a necessidade de novas estratégias para a formação básica da sociedade, principalmente no ensino das ciências exatas. Especificamente, falando do Ensino de Matemática, conta-se com um aliado, o GeoGebra, um dos mais populares e gratuito *softwares* educacionais de

Matemática dinâmica. Devido seus vários recursos, ferramentas e possibilidades de utilização é muito procurado pelos educadores.

Segundo Bortolossi, Rezende e Pesco (2016), o GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter, em 2001, para ser utilizado em ambiente de sala de aula, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, construir, calcular, levantar hipóteses, formular e testar conjecturas, entre outras possibilidades. Escrito em linguagem Java, possibilita estar disponível em várias plataformas, inclusive em Android e iOS, admitindo acesso por *smartphones,* o que atrai mais ainda o público.

Nos dias atuais, dentre muitas discussões sobre o Ensino de Matemática e suas tendências, uma das principais é justamente o uso de ferramentas computacionais em sala de aula. Mas essa utilização precisa, inicialmente, de uma mudança na postura, na prática docente e na forma de pensar de muitos professores. Borba e Penteado (2010), destacam que a maior dificuldade é devido a esses profissionais não quererem sair da zona de conforto, onde quase tudo é conhecido, previsível e controlado. Mesmo descontentes, evitam trilhar um caminho rumo ao desconhecido, pois o novo assusta. Sendo assim, esses defendem o método tradicional, justificando com os resultados alcançados no passado.

Quanto a utilização desse instrumento na educação, de acordo com Kenski (2009), nas ocasiões em que os recursos tecnológicos são bem utilizados no ambiente escolar, eles provocam modificações nas relações entre professores e alunos e, ainda, proporcionam um maior aprofundamento nos conteúdos estudados. Contudo, considerando o que foi dito, é conveniente aos educadores se inquietarem com a carência de estratégias pedagógicas que reflitam em melhores resultados e aprendizagens efetivas, buscando a ajuda da tecnologia como recurso didático, para assim decolarmos rumo a uma educação de qualidade.

Na proposta que estamos exibindo, usamos o GeoGebra para construções de arcos de circunferência, circunferência trigonométrica, representação das razões trigonométricas na circunferência e gráficos de funções com e sem controles deslizantes. Também buscamos materiais de aulas prontos na plataforma do *software,* acessado pelo link https://www.geogebra.org/materials, composto por diversos arquivos disponíveis para *download* e adaptações. A intenção é mostrar que preparar uma aula com metodologias extras, isto é, além do quadro e do livro didático, é possível, basta pesquisar. Deixaremos no Apêndice A instruções para o leitor fazer as construções das apresentações das razões trigonométricas na circunferência e no Apêndice B para a construção dos gráfico das funções do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ com controles deslizantes[20].

4.2 Trigonometria na Circunferência

Aqui abordaremos definições importantes para o desenvolvimento do nosso trabalho. A intenção é usar uma linguagem mais clara e de fácil interpretação para os leitores.

4.2.1 Arcos e Ângulos

4.2.1.1 Arcos de circunferência

Considere uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência.

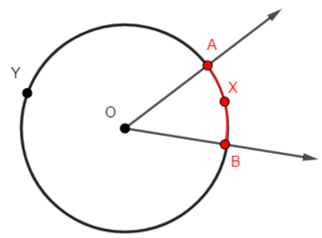


Figura 17 – Arcos de circunferência
Fonte: Elaborada pelo autor

A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um arco de circunferência, que são representados da seguinte forma: arco de circunferência AXB e arco de circunferência AYB A e B são as extremidades do arco, como na Figura 17.

[20] Ferramenta do GeoGebra que permite a variação de um determinado objeto (por exemplo: coeficiente e medida de um ângulo).

<u>Observação:</u> quando não houver dúvidas em relação ao qual arco estamos nos referindo, escrevemos somente AB para representar o arco de extremidades A e B.

Consideremos dois casos particulares:

1) Se A e B são as extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um chamado de *semicircunferência* ou *arco de meia volta*, Figura 18.

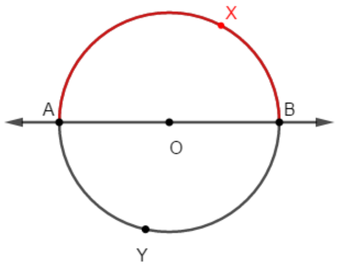


Figura 18 – Semicircunferência ou arco de meia volta
Fonte: Elaborada pelo autor

2) Se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto, que equivale ao *arco nulo*, o outro é a *circunferência* ou *arco de uma volta*, Figura 19.

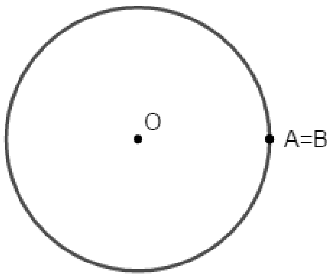


Figura 19 – Arco nulo, circunferência ou arco de uma volta
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.1.2 Comprimento, medida de arcos e o radiano

Para abordamos o conceito de comprimento de um arco, vamos considerar uma noção intuitiva, isto é, para determinar o tamanho desse arco, podemos pegar um pedaço de arame, corda ou de barbante e vamos ajustar sobre a curva. Caso queiramos o comprimento da circunferência basta contornar. Após isso, esticamos e verifiquemos o valor linear desse pedaço. Temos assim o comprimento desejado. Jamais podemos tomar a ideia supracitada como definição. Querendo o leitor mais informações sobre a definição e demonstrações do comprimento da circunferência, basta pesquisar em Barbosa (2012). Aqui admitiremos que o comprimento de uma circunferência de raio 1 é 2π e, consequentemente, da circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$, pois duas circunferências quaisquer são semelhantes (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Passando a falar da medida de um arco, destacamos que as unidades de medidas são graus (símbolo °) e radianos (rad). O grau é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

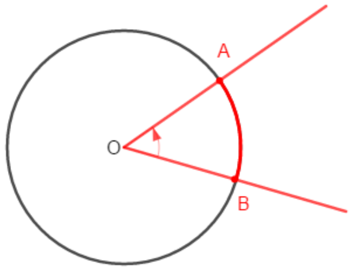


Figura 20 – Ângulo central AÔB e arco $\overset{\frown}{AB}$ subtendido por AÔB
Fonte: Elaborada pelo autor

Considerando a Figura 20, temos que $A\hat{O}B$ é um ângulo central, pois tem o vértice no centro da circunferência, e $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$. Daí, de acordo com Iezzi (1993), definimos a medida de um arco em graus: *a medida de um arco de circunferência, em graus, é igual a medida do ângulo central correspondente.*

Na Figura 21, tomamos duas circunferências concêntricas, isto é, duas circunferências cujos centros sejam coincidentes. Notemos que a medida dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ é a mesma, pois ambos tem o mesmo ângulo central correspondente. Sendo assim, a medida do arco não depende do raio. Porém, os seus comprimentos são diferentes e proporcionais ao raio da circunferência. Para enxergar tal afirmação é suficiente assumir que as duas circunferências são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios.

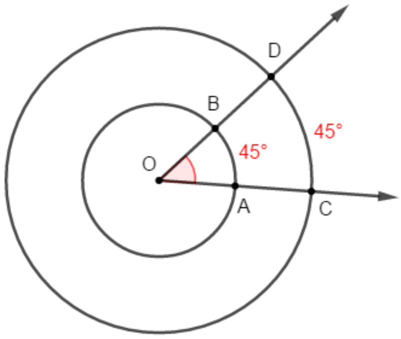


Figura 21 – Circunferências concêntricas
Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, sendo l_1 e l_2 os comprimentos e r_1 e r_2 os raios das circunferências que contém os arcos AB e CD, respectivamente, temos que $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$. Com essa informação e, segundo Carmo, Morgado e Wagner (2005), definimos: *a medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em uma circunferência cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio da circunferência.* Daí, decorre que, se um arco tem comprimento l e a circunferência a qual ele pertence tem raio r, então a medida α do ângulo central correspondente, em radianos, é $\alpha = \frac{l}{r}$, ou seja, $l = \alpha r$.

Inicialmente adotamos que o comprimento de uma semicircunferência de raio 1 é π, isto implica que o comprimento de uma semicircunferência de raio r é $C_{SC} = \pi r$. Como o ângulo central correspondente ao arco de meia volta, em graus, é 180°, podemos concluir que $\alpha = \frac{\pi r}{r} = \pi\, rad = 180°$, ou seja, $\pi\, rad$ equivale a $180°$. Com essa equivalência é possível fazer outras conversões, por exemplo, se $\pi\, rad = 180° \implies \frac{\pi\, rad}{\pi} = \frac{180°}{\pi} \implies 1\, rad = \frac{180°}{\pi} \simeq 57°$.

<u>Observações:</u> quando usamos π sem está associado a medida de um arco, então $\pi \simeq 3{,}14$. Também é importante perceber que se a circunferência tiver raio $r = 1$, desprezando a unidade de medida, o comprimento do arco coincidirá com a medida, em radianos, do ângulo correspondente.

4.2.1.3 Circunferência trigonométrica

Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico, Figura 22, é o nome dado a uma circunferência unitária, isto é, de raio $r = 1$ e consequentemente comprimento $C = 2\pi$, tomada sobre o plano cartesiano ortogonal $x0y$, cujo centro coincide com a origem do sistema, ponto (0,0), ficando dividida em quatro partes chamadas de quadrantes, Figura 23. Aqui ela será representada por λ. Essa circunferência pode ser percorrida em dois sentidos, sentido positivo ou anti-horário e sentido negativo ou horário. Geralmente o sentido escolhido é o anti-horário e o ponto de partida é sempre um ponto fixo $A(1,0)$, chamado de origem dos arcos.

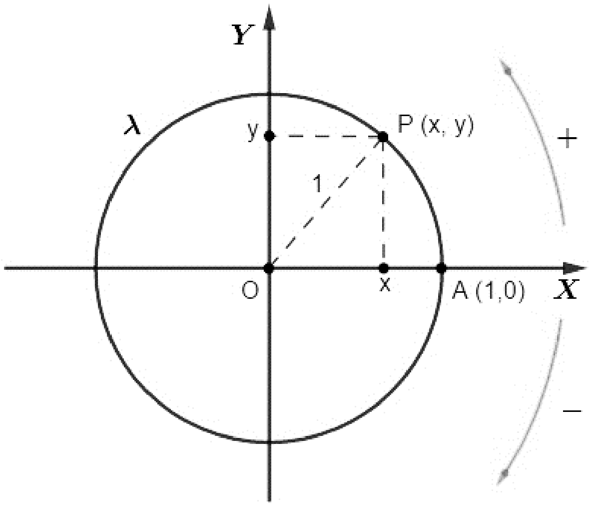


Figura 22 – Circunferência Trigonométrica
Fonte: Elaborada pelo autor

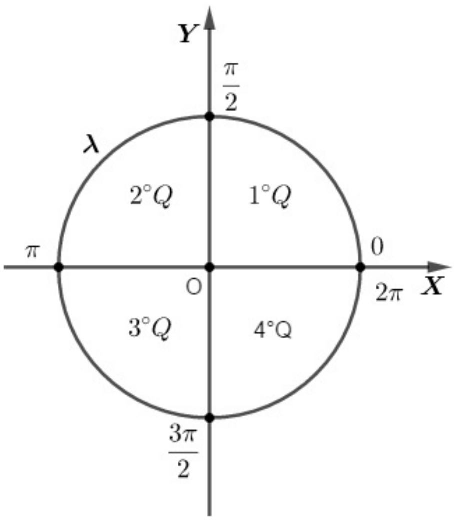


Figura 23 – Divisão da Circunferência Trigonométrica
Fonte: Elaborada pelo autor

Contudo, definiremos a *medida algébrica* de um arco AP desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, acompanhado de um sinal positivo se o percurso de A para B for no sentido anti-horário e negativo em caso contrário. Representaremos a medida por $m\,AP$.

É importante chamar a atenção dos alunos e esclarecer porque o raio é $r = 1$. Uma explicação interessante é:

> Se supusermos $r = 1$ as fórmulas se simplificarão bastante. Tal explicação deverá ser complementada com a observação de que tomar $r = 1$ corresponde a escolher (o comprimento) do raio como unidade de medida. Como todas as linhas trigonométricas são cocientes entre duas medidas, o valor de cada uma delas se mantem inalterado quando se passa de uma unidade para outra. Por isso não faz mal convencionar $r = 1$ (LIMA, 2012).

4.2.2 Razões Trigonométricas na Circunferência

Neste tópico apresentaremos a transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para a circunferência unitária, tratando de uma interpretação geométrica.

4.2.2.1 Seno e Cosseno de um arco

Seja λ a circunferência trigonométrica e AP o arco de medida β. Já sabemos que o ponto $\mathrm{A}(1{,}0)$ é a origem dos arcos e P é a extremidade. Sendo assim, traçando as projeções ortogonais do ponto P sobre o eixo x e sobre o eixo y, determinamos, respectivamente, o ponto C e o ponto S. Note que o triângulo OPC, na Figura 24, é retângulo em C.

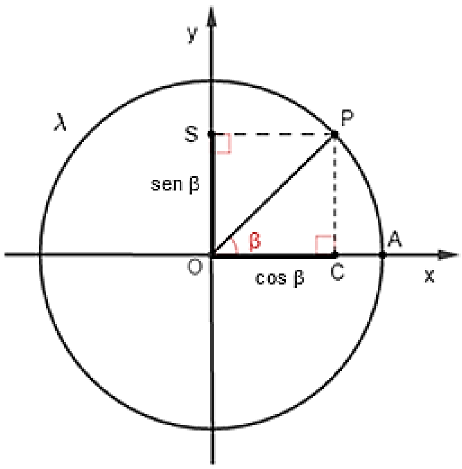


Figura 24 – Seno e Cosseno de um arco
Fonte: Elaborada pelo autor

Sendo assim, do $\triangle\, OPC$, temos: $sen\beta = \frac{\overline{PC}}{\overline{OP}}$. Mas $\overline{OP}$ é o raio da circunferência λ, que é 1. Logo, $sen\beta = \frac{\overline{PC}}{1} \Longrightarrow \overline{PC} = sen\beta$. Como $OSPC$ é um retângulo, então $\overline{PC} = \overline{OS} = sen\beta$, ou seja, a ordenada do ponto P representa o seno de β.

Além disso, do $\triangle\, OPC$, retângulo em C, $cos\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC} \Longrightarrow \overline{OC} = cos\beta$, isto é, a abscissa do ponto P representa o cosseno de β. Portanto, as coordenadas do ponto P pode ser representada por $cos\beta$ e $sen\beta$, ou seja, a extremidade do arco é $P(cos\beta, sen\beta)$.

Ainda, a partir do $\triangle\, OPC$, pelo Teorema de Pitágoras, podemos concluir a conhecida Relação Fundamental da Trigonometria, que segue:

$$\overline{OP}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{OC}^2$$

$$\Longrightarrow 1^2 = (sen\beta)^2 + (\cos\beta)^2$$

$$\Longrightarrow sen^2\beta + cos^2\beta = 1.$$

Concluímos que a medida algébrica dos segmentos $\overline{OS}$ e $\overline{OC}$ equivalem, respectivamente, ao seno e ao cosseno de AP.

4.2.2.2 Tangente de um arco

Para a interpretação da tangente de um arco, Figura 25, tomemos uma reta t, paralela ao eixo y e passando por A. Essa é a reta $x = 1$, tangente a λ. Prolongando o segmento $\overline{OP}$ até interceptar t no ponto T. Perceba que o $\triangle\, OAT$ é retângulo em A. Então, do $\triangle\, OAT$, temos: $tg\beta = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$. Note que $\overline{OA}$ é raio de λ. Logo, $tg\beta = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT} \Longrightarrow \overline{AT} = tg\beta$. Isto é, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ representa a tangente do arco $\overset{\frown}{AP}$. Podemos concluir ainda que, $\triangle\, OCP \sim \triangle\, OAT$, pelo critério AA (Ângulo, Ângulo), pois ambos são retângulo em C e A, respectivamente, e o ângulo β é comum, assim, $\frac{\overline{AT}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Rightarrow \frac{tg\beta}{sen\beta} = \frac{1}{cos\beta} \Rightarrow tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$.

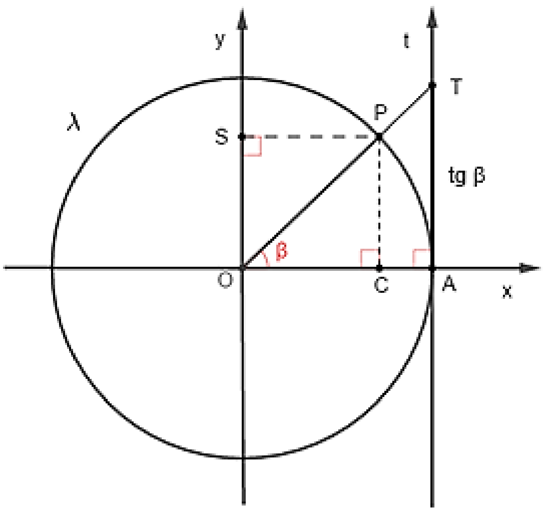


Figura 25 – Tangente de um arco
Fonte: Elaborada pelo autor

Podemos nesse momento, acrescentar algumas relações importantes entre as razões trigonométricas dos ângulos agudos internos do triângulo retângulo. Essas relações serão úteis para provas posteriores nos tópicos 4.2.2.3 e 4.2.2.4. Vejamos a Figura 26.

Tomando o arco $\overset{\frown}{AP}$, sobre a circunferência trigonométrica, e o ponto C, projeção ortogonal de P sobre o eixo das abcissas, determinamos o triângulo OCP, retângulo em C. Portanto os ângulos $\hat{O}$ e $\hat{P}$ são complementares. Daí, se $\hat{O} = \beta$, então $\hat{P} = \frac{\pi}{2} - \beta$. Assim, note que

$$sen\beta = \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow sen\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \qquad (4.1)$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \cos\beta = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \text{ e} \tag{4.2}$$

$$tg\beta = \frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \Rightarrow tg\beta = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}. \tag{4.3}$$

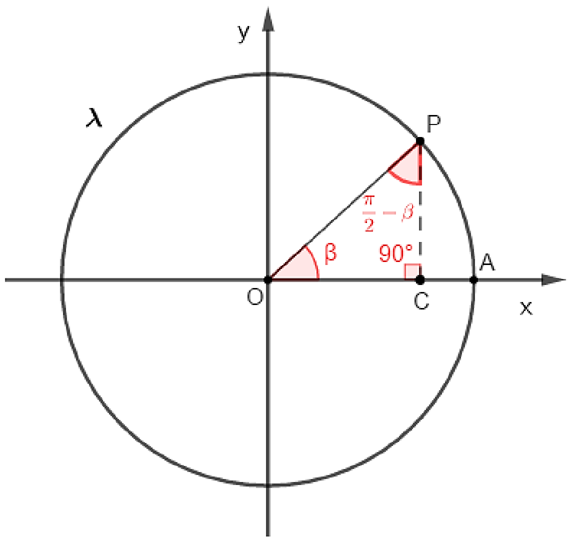


Figura 26 – Razões trigonométricas de ângulos complementares
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.2.3 Cotangente de um arco

Considere uma reta u paralela ao eixo x e passando pelo ponto B, isto é, a reta $y = 1$, ver Figura 27. Seja r a reta suporte do segmento $\overline{OP}$, a interseção de r com u determina o ponto D. Daí, o segmento orientado $\overline{BD}$ é a cotangente do arco AP, ou ainda,

$$cotg\beta = \overline{BD}. \tag{4.4}$$

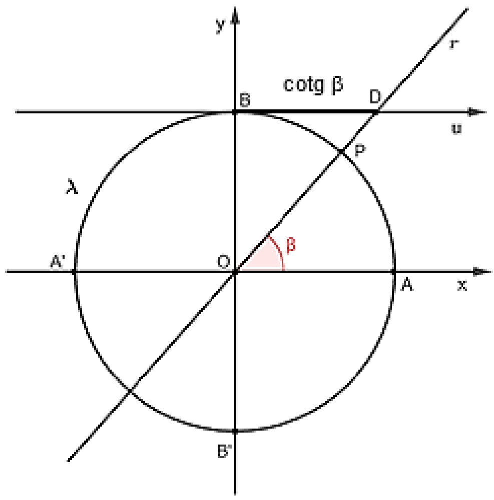


Figura 27 – Cotangente de um arco
Fonte: Elaborada pelo autor

Para mostrar que $cotg\beta = \frac{1}{tg\beta}$, vamos usar os resultados encontrados no tópico 4.2.2.1. Daí, na Figura 28, considere o triângulo OBD, retângulo em $\hat{B}$, sendo $B\hat{O}D = \frac{\pi}{2} - \beta$, então

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}.$$

Mas, de (4.3), $tg\beta = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \Longrightarrow tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{1}{tg\beta}$.

$\Longrightarrow \overline{BD} = \frac{1}{tg\beta}$. De (4.4), segue que $cotg\beta = \frac{1}{tg\beta}$. ■

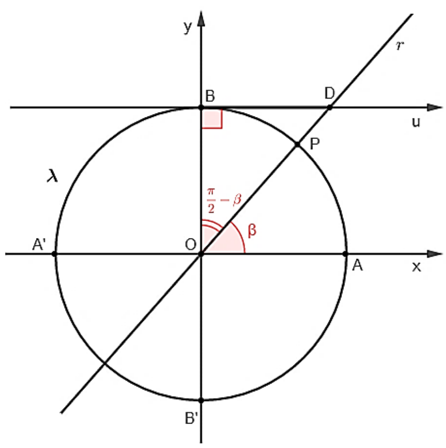


Figura 28 – Cotangente como inversa da Tangente de β
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.2.4 Secante e Cossecante de um arco

Seja r a reta tangente à circunferência trigonométrica λ no ponto P. Essa reta intercepta os eixos x e y nos pontos S e C, respectivamente. Daí, os segmentos orientados $\overline{\text{OS}}$ e $\overline{\text{OC}}$ são, respectivamente, a secante e a cossecante do arco AP, ou ainda, $sec\beta = \overline{\text{OS}}$ e $cossec\beta = \overline{\text{OC}}$, como se vê na Figura 29 e Figura 30, respectivamente.

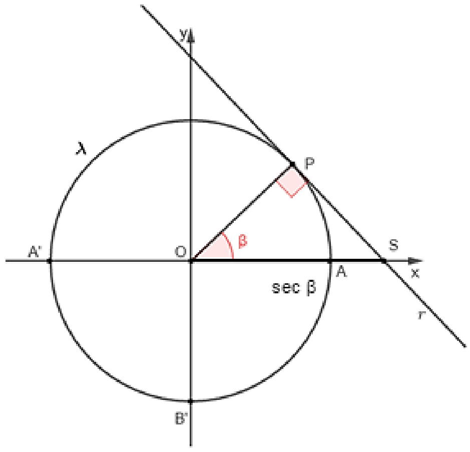


Figura 29 – Secante de um arco
Fonte: Elaborada pelo autor

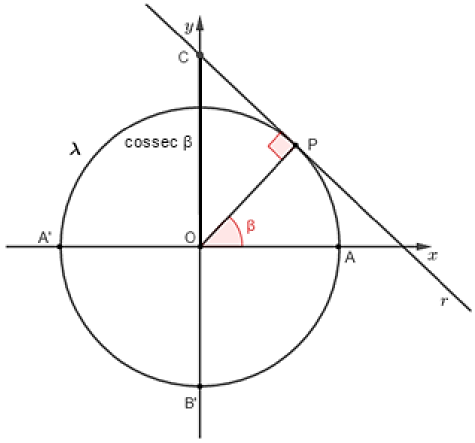


Figura 30 – Cossecante de um arco
Fonte: Elaborada pelo autor

Para mostrar que $sec\beta = \frac{1}{cos\beta}$ e que $cossec\beta = \frac{1}{sen\beta}$, basta usar os mesmos procedimentos da cotangente, isto é, aplicar a razão trigonométrica $cos\beta$ no triângulo OPS da Figura 29 e $sen\beta$ no triângulo OPC da Figura 30.

Considerando as definições previamente apresentadas, trazemos a seguir uma proposta de abordagens das razões trigonométricas com o GeoGebra.

4.2.3 Proposta de abordagem das razões trigonométricas com o GeoGebra

Neste tópico, apresentamos a reprodução de uma animação no *GeoGebra* que fará com que os alunos consigam enxergar a variação da medida algébrica dos segmentos correspondentes ao $cos\beta$, $sen\beta$, $tg\beta$, $sec\beta$, $cossec\beta$ e $cotg\beta$ em função do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida β, vaiando em $0 \leq \beta < 2\pi$. Deixamos disponível um link para acesso à animação na plataforma do GeoGebra. Link: https://www.geogebra.org/m/atudtnae.

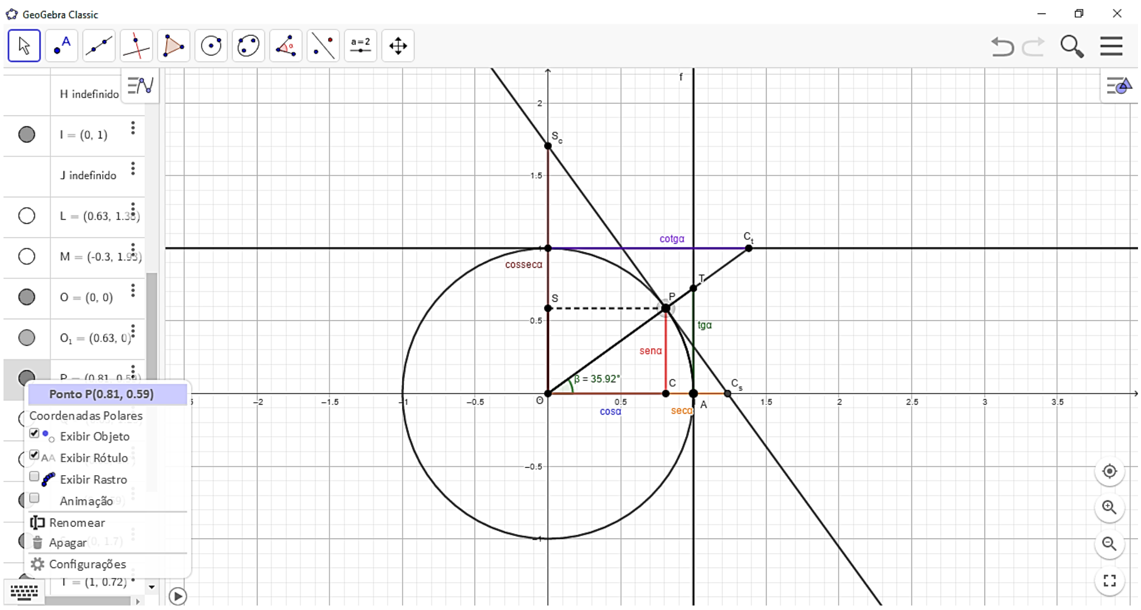


Figura 31 – Razões trigonométricas no 1° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

Observe na Figura 31 as razões trigonométricas do arco $\overset{\frown}{AP} \in 1°Q$. Nela é visível que há um artifício que torna possível a variação automática do arco de medida β, que é a opção animar o ponto P, visto no canto inferior esquerdo. Na Figura 32, Figura 33 e Figura 34, temos as razões no $2°Q$, $3°Q$ e $4°Q$, respectivamente.

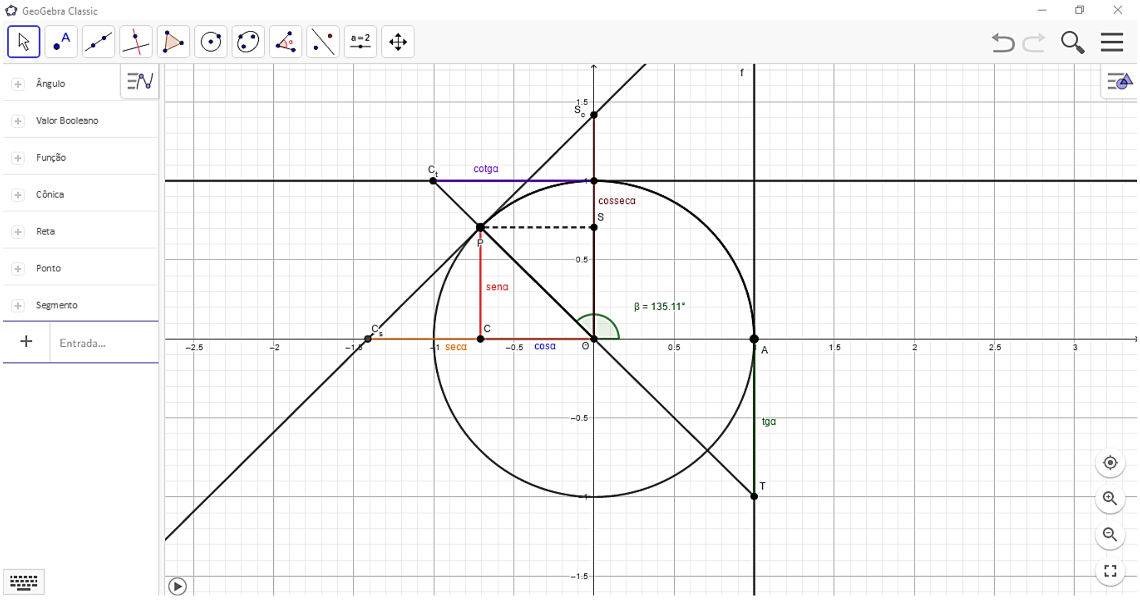


Figura 32 – Razões trigonométricas no 2° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

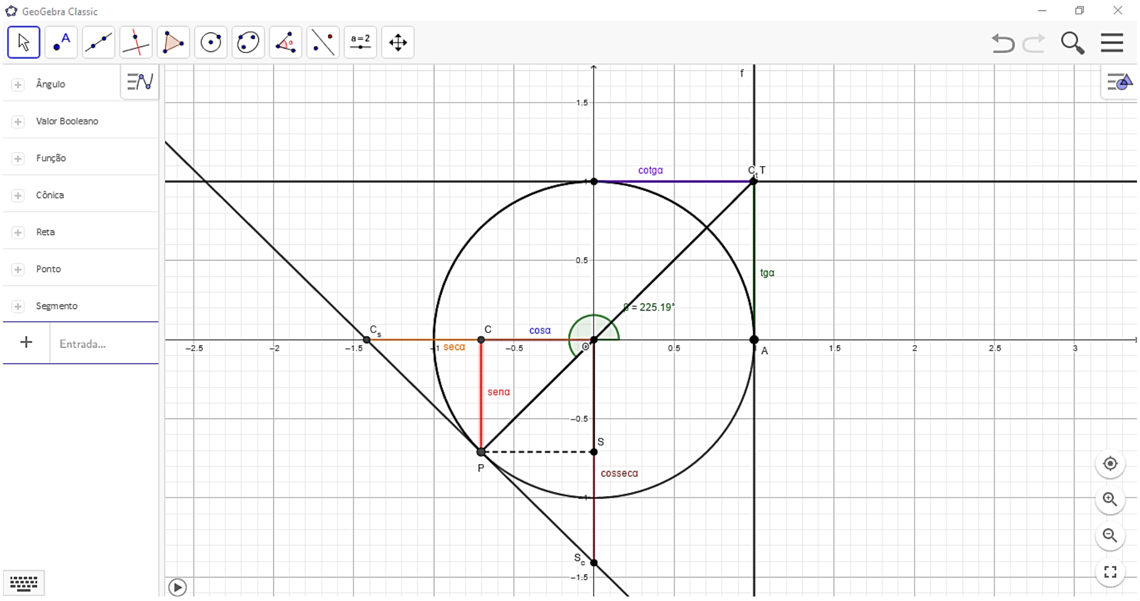


Figura 33 – Razões trigonométricas no 3° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

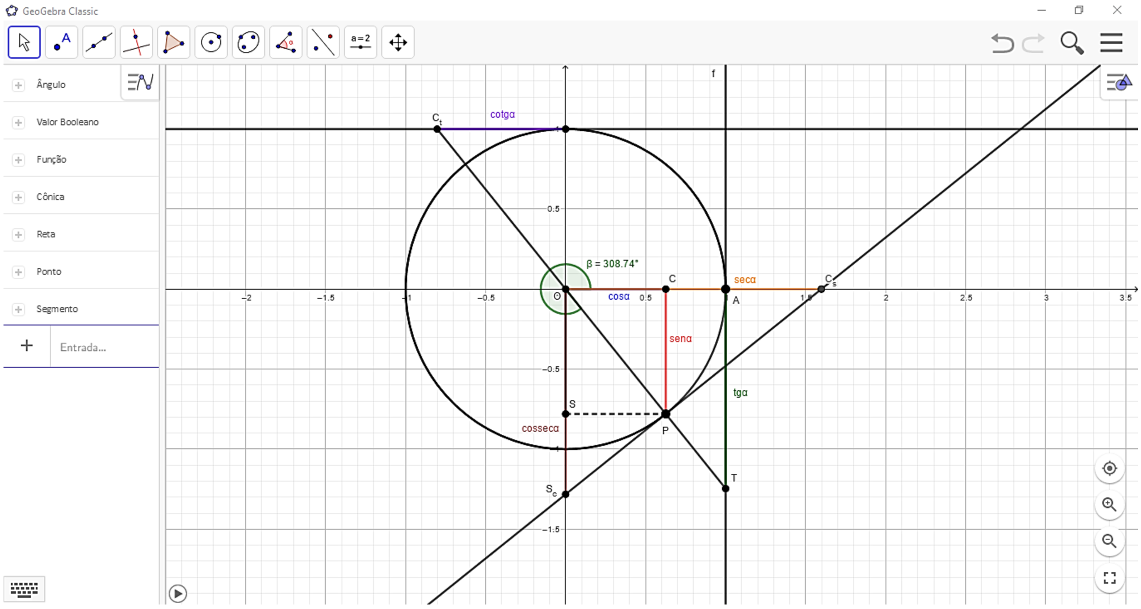


Figura 34 – Razões trigonométricas no 4° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

A partir da apresentação anterior, podemos ressaltar o notório destaque para o sinal das razões em cada quadrante, já que como essas razões são determinadas pela medida algébrica dos segmentos, estes por sua vez podem ser positivos, negativos ou nulos. Daí, como as razões cosseno e seno, interpretadas como coordenadas de um ponto, tem seu sinal dependente do quadrante em que se encontram, como na

Figura 35.

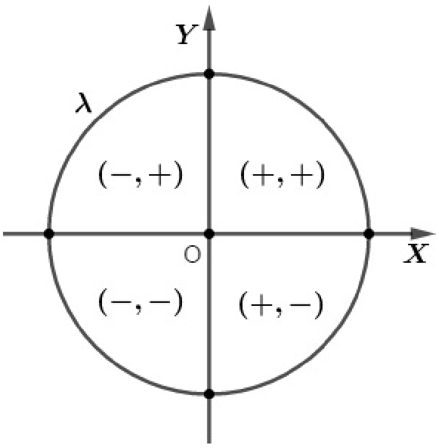


Figura 35 – Sinais do cosseno e seno em cada quadrante[21]
Fonte: Elaborada pelo autor

[21] A ordem é primeiro o sinal do cosseno e o segundo do seno.

Para o sinal da tangente de um arco basta definir o quadrante, usar a relação $tg\ \beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$ e fazer o jogo de sinal. Daí, a tangente tem sinal positivo no 1° e 3° quadrante e negativo no 2° e 4° quadrante. Já para a secante, cossecante e a cotangente, faz-se de modo análogo.

Também conseguimos definir valores para razões trigonométricas de alguns arcos, que chamaremos de notáveis, que são $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, além dos que já conhecemos lá dos triângulos retângulos, o de 30° ou $\frac{\pi}{6}$, 45° ou $\frac{\pi}{4}$ e 60° ou $\frac{\pi}{3}$. Com isso montamos a Tabela 2 a seguir.

	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0
Cotangente	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0	$\nexists$
Secante	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
Cossecante	$\nexists$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

Tabela 2 – Razões trigonométricas dos arcos notáveis
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.4 Reduções ao 1° quadrante

Qualquer que seja o arco que tomarmos sobre a circunferência trigonométrica, é possível determinar o seu quadrante e o sinal das razões trigonométricas. Então, vamos mostrar como encontrar o valor do seno e do cosseno, por exemplo, em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante, isso devido a simetria. Consideremos separadamente os casos em que a extremidade P do arco AP de medida β está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

4.2.4.1 Se P *está no segundo quadrante*, isto é, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$

Traçamos por P uma reta r paralela ao eixo das abscissas que intersecta novamente λ em P'. É claro que $mAP = mP'A' = \beta$ e, portanto, $mA'P = mAP' = \pi - \beta$. Perceba que a ordena dos pontos P e P' é a mesma. Logo, $sen\, AP = sen\, AP' \Rightarrow sen(\beta) = sen(\pi - \beta)$.

Para o cosseno, devemos notar que no segundo quadrante seu sinal é negativo. Assim, $\cos(\beta) = -\cos\,(\pi - \beta)$. Ver Figura 36.

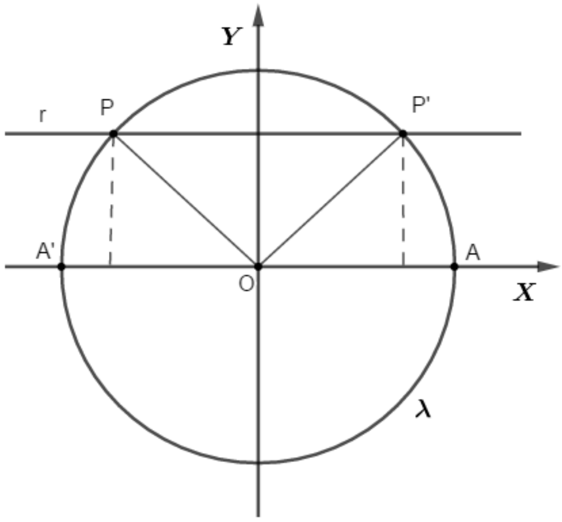


Figura 36 – Arcos simétricos do 1° e 2° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.4.2 Se P *está no terceiro quadrante*, isto é, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

Tomando a reta r que liga os pontos O e P, ela intersecta λ em P' e obtemos: $mAP' = mA'P$, pois os respectivos ângulos centrais são OPV. Daí, como $mAP = \beta$, então $mAP' = mA'P = \beta - \pi$. Portanto, já que o seno de um arco do terceiro quadrante é negativo, segue que $sen\ AP = -sen\, AP' \Rightarrow sen(\beta) = -sen(\beta - \pi)$.

Para o cosseno, basta observar o sinal, donde temos que $cos(\beta) = -cos(\beta - \pi)$. Ver Figura 37.

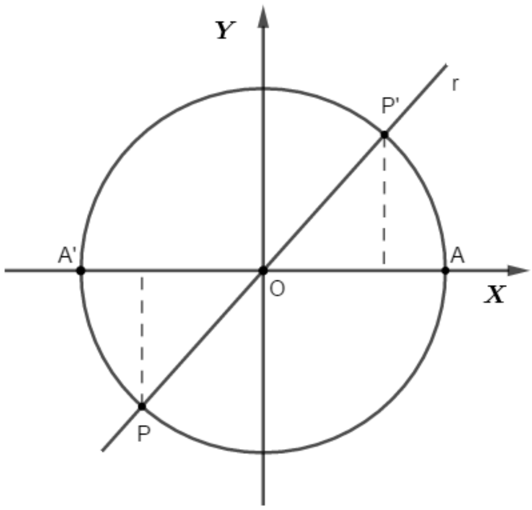


Figura 37 – Arcos simétricos do 1° e 3° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.4.3 Se *P está no quarto quadrante*, isto é, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

Tomando a reta r paralela ao eixo das ordenadas, passando por P, tal reta intercepta λ no ponto P'. Assim, temos: $mAP' = mPA$. Como $mAP = \beta$, então $mPA = mAP' = 2\pi - \beta$. Daí, já que o seno de um arco do quarto quadrante é negativo, segue que $sen\, AP = -sen\, AP' \Longrightarrow sen(\beta) = -sen(2\pi - \beta)$.

Para o cosseno, basta observar que o sinal nesse intervalo é positivo, donde temos que $cos(\beta) = cos(2\pi - \beta)$. Ver Figura 38.

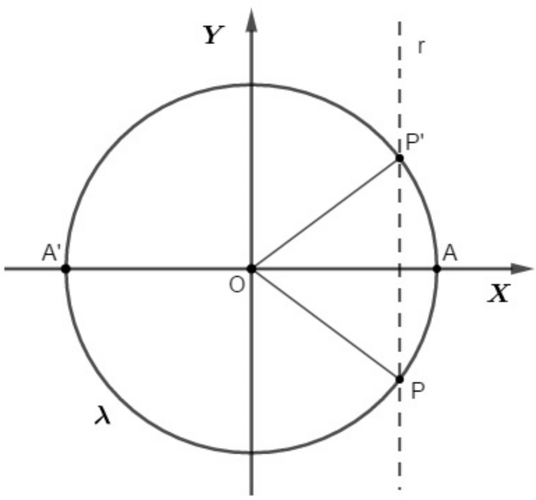


Figura 38 – Arcos simétricos do 1° e 4° quadrante
Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, após termos conhecido as razões trigonométricas na circunferência, em um intervalo de 0 a 2π, vamos passar a estudar um artificio que permitirá calcular as razões trigonométricas em um intervalo maior e assim passarmos a tratá-las como funções trigonométricas.

4.3 A Função de Euler

Até aqui, conhecemos as razões trigonométricas de ângulos pertencentes ao intervalo de $0°$ a $360°$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos, estão naturalmente definidos o seno, cosseno e tangente de números reais do intervalo $[0,2\pi]$. A tarefa seguinte é tentar ampliar estas razões para que elas possam ser definidas para todos, ou para quase todos, os números reais e assim passarmos a tratá-las como funções, de modo que seja conservado as relações básicas $cos^2\beta + sen^2\beta = 1$ e $tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$ (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

A relação fundamental $cos^2\beta + sen^2\beta = 1$ sugere que, para todo ângulo β, os números $cos\,\beta$ e $sen\,\beta$ são as coordenadas de um ponto da circunferência λ. Escrevemos então que $\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Imprescindível o lembrete de que para todo ponto $(x,y) \in \lambda$ tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$, que implica em $-1 \leq cos\beta \leq 1$ e $-1 \leq sen\beta \leq 1$.

Com o objetivo de definir as funções $cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, devemos associar cada número real c a um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo. O número c desempenhará, portanto, o papel de medida do ângulo, que pode ser em graus ou radianos. Esta segunda é mais conveniente pois coincide com o comprimento do arco.

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E: \mathbb{R} \longrightarrow \lambda$, que faz corresponder a cada número real c o ponto $E(c) = (x,y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1,0)$.
- se $c > 0$, percorremos sobre a circunferência λ, a partir do ponto $(1,0)$, um caminho de $comprimento\ c$, sempre andando no sentido positivo. O ponto final do caminho será chamado de $E(c)$.

- se $c < 0$, $E(c)$ será extremidade final de um caminho sobre λ, de comprimento $|c|$, que parte do ponto $(1{,}0)$ e percorre λ sempre no sentido negativo.

A função de Euler $E: \mathbb{R} \longrightarrow \lambda$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificável a um fio inextensível[22], sobre a circunferência λ, pensada como um carretel, de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1{,}0) \in \lambda$ (LIMA *et al.*, 2012). Observe a Figura 39.

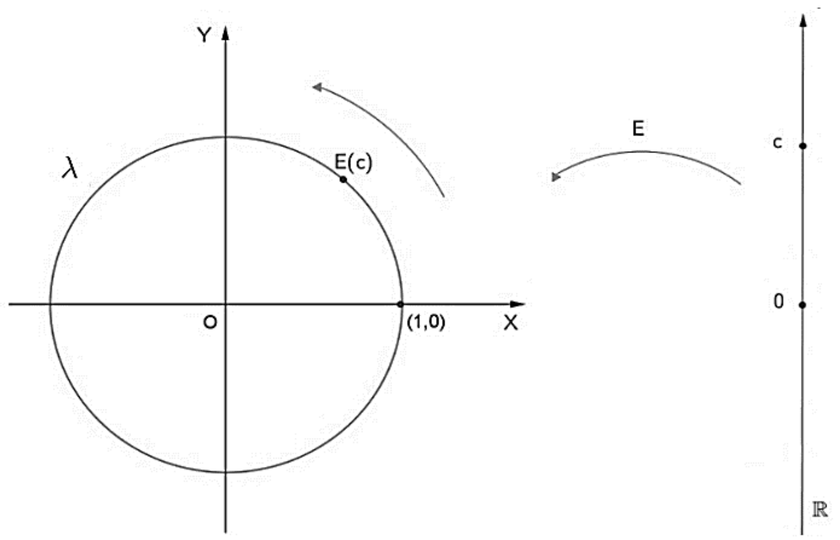


Figura 39 – Representação da Função de Euler
Fonte: Elaborada pelo autor

Cada vez que o ponto c descreve na reta um intervalo de comprimento l, sua imagem $E(c)$ percorre sobre a circunferência λ um arco de comprimento l. Em particular, como a circunferência unitária λ tem comprimento igual a 2π, quando o ponto c descreve um intervalo de comprimento 2π, sua imagem $E(c)$ da uma volta completa sobre λ, retornando ao ponto de partida, A. Se $c > 0$ e $c > 2\pi$, então será necessário dar mais de uma volta sobre a circunferência trigonométrica. De modo análogo, acontece se $c < 0$. Nesse caso, como a medida é orientada, o ângulo pode ter medida negativa, como vemos na Figura 40.

---

[22] Que não se consegue estender; que não se consegue aumentar em comprimento, encompridar.

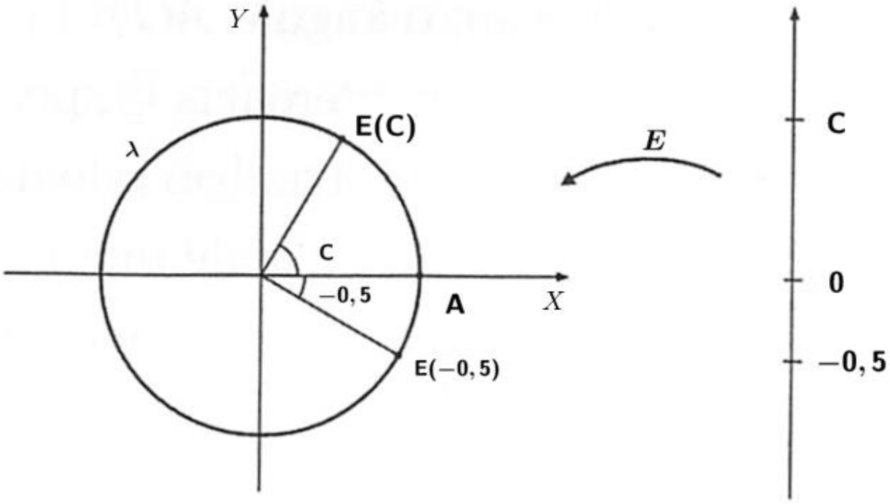


Figura 40 – Representação de um arco de medida negativa
Fonte: Elaborada pelo autor

De qualquer forma, $E(c)$ é um ponto bem definido de λ. Por outro lado, dado um ponto $P \in \lambda$, extremidade de um arco, ele é a imagem pela função E de uma infinidade de números reais, como mostra a Figura 41, todos da forma

$$c + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \qquad 0 \leq c < 2\pi.$$

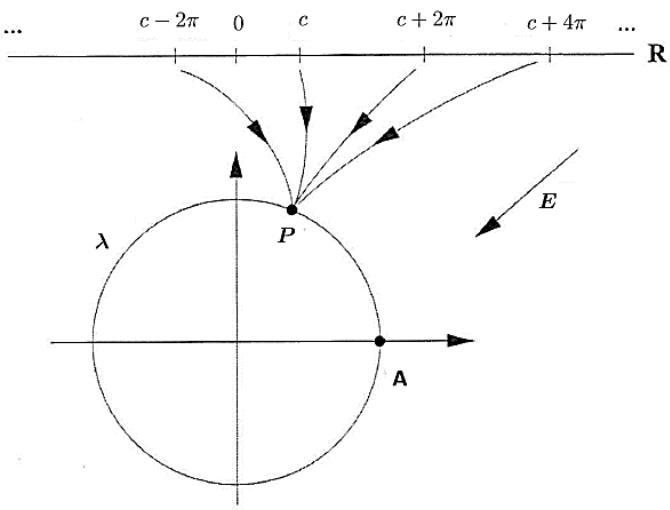


Figura 41 – Representação de arcos côngruos
Fonte: Adaptado de (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005)

Assim sendo, para todo $c \in \mathbb{R}$, tem-se $E(c + 2\pi) = E(c)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(c + 2k\pi) = E(c)$, seja qual for $c \in \mathbb{R}$. Certas vezes, costuma-se exprimir este fato dizendo que $c + 2k\pi$ são as várias determinações do arco AP ou que c e $c + 2k\pi$ são *arcos côngruos*. Podemos exemplificar o que foi dito antes tomando o arco $AP = \frac{19\pi}{4}$. Note que, $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$. Então, o comprimento desse arco equivale a duas voltas completas e mais $\frac{3\pi}{4}$. Dizemos que $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{19\pi}{4}$ são arcos côngruos. Sendo assim, para determinar as razões trigonométricas de um arco é conveniente que tomemos sua primeira determinação positiva, que é o arco da primeira volta no sentido positivo.

Para ajudar ainda mais na interpretação dos arcos côngruos, na ideia da função de Euler e razões trigonométricas, trouxemos uma apresentação do GeoGebra que encontramos em https://www.geogebra.org/m/vykepyjm. Nas figuras que seguem mostraremos suas funcionalidades e abrangência do que vimos sobre os arcos de circunferência.

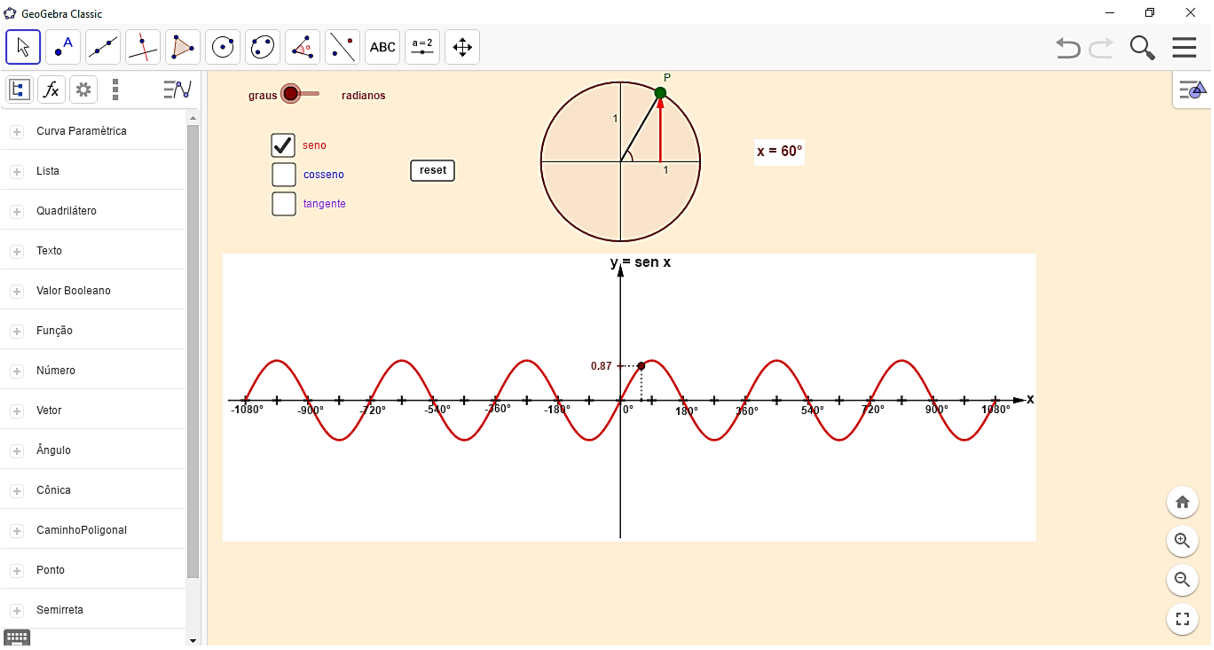


Figura 42 – Apresentação de arco trigonométrico com 60°
Fonte: GeoGebra/Materiais

Vejamos na Figura 42 que essa apresentação possui opção de escolha da unidade de medida, escolha da razão trigonométrica e um campo que mostra a medido arco. A circunferência trigonométrica possui um ponto P que pode ser movido manualmente e com isso muda a medida do arco. Abaixo da circunferência tem o gráfico com um ponto destacado em que suas coordenadas são a medida do arco e sua razão trigonométrica.

Outra funcionalidade interessante é a possibilidade de mostrar arcos maiores que uma volta tanto no sentido positivo como no sentido negativo. Com isso, fica mais fácil perceber como determinamos os arcos côngruos e porque eles têm razões trigonométricas iguais, assim como os simétricos tem razões iguais ou opostas. Na Figura 43, temos um arco de 780° que é da 3ª volta e côngruo de 60°. Já na Figura 44, temos um arco negativo de medida $-60°$. A Figura 45 representa um arco de $-\frac{31\pi}{3}\ rad$ que está sendo substituído por sua aproximação, $-32{,}46\ rad$.

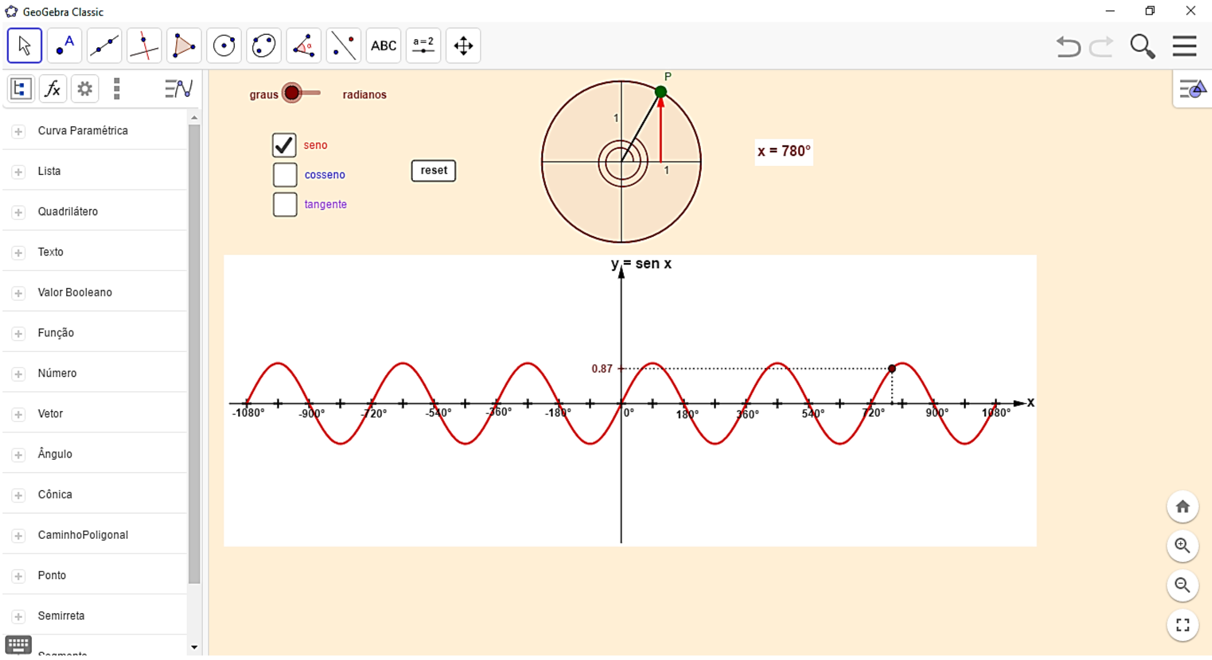


Figura 43 – Apresentação de arco trigonométrico com 780°
Fonte: GeoGebra/Materiais

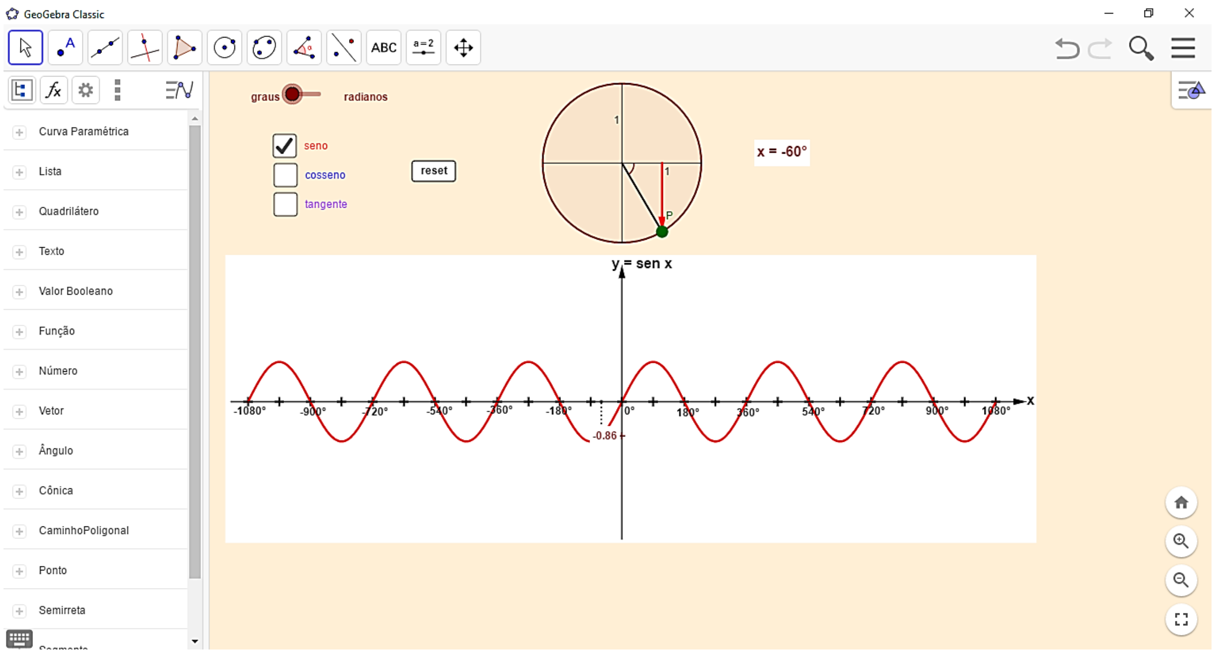


Figura 44 – Apresentação de arco trigonométrico com -60°
Fonte: GeoGebra/Materiais

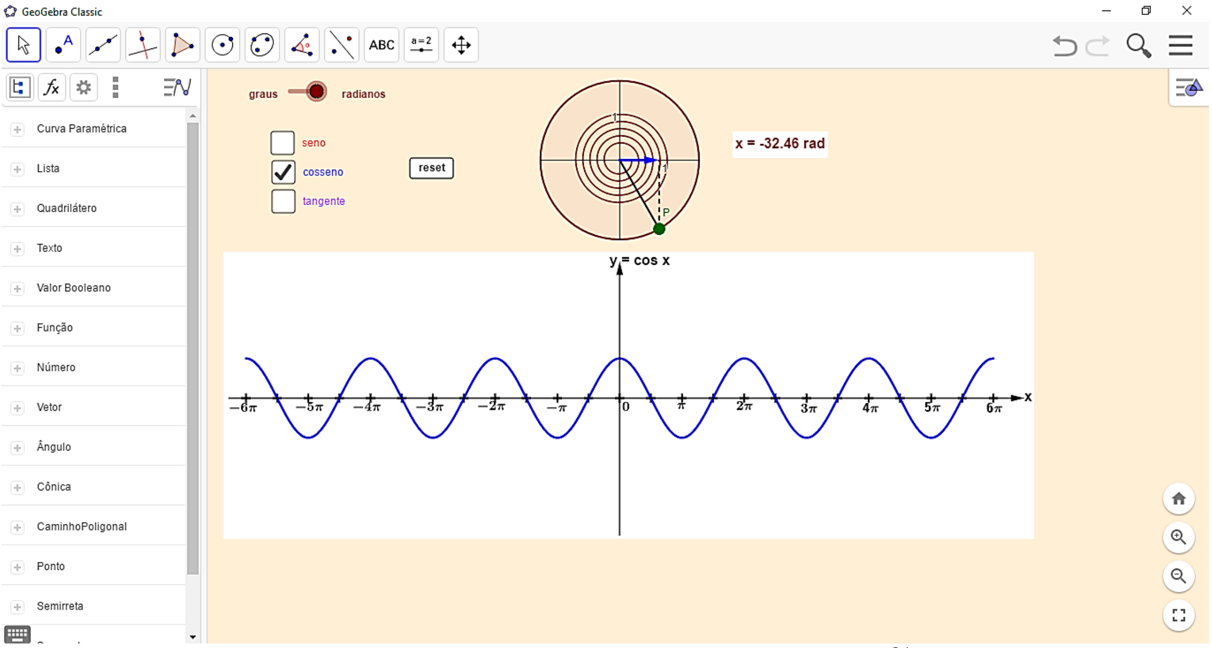


Figura 45 - Apresentação de arco trigonométrico com $-\frac{31\pi}{3}$
Fonte: GeoGebra/Materiais

Após conhecermos a função de Euler, que admite calcular as razões trigonométricas de todo número $c \in \mathbb{R}$, e também entender as várias determinações de um arco, vamos estudar, propriamente dito, as funções trigonométricas.

4.4 As funções trigonométricas

4.4.1 Função seno e função cosseno

As funções $cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas *função cosseno* e *função seno*, respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $c \in \mathbb{R}$:

$$E(c) = (\cos c\,, sen\; c).$$

Em outras palavras, $x = \cos c$ e $y = sen\; c$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $E(c)$ da circunferência unitária (LIMA *et al.*, 2012). Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $c \in \mathbb{R}$, a relação fundamental

$$sen^2c + cos^2c = 1.$$

Também podemos adotar outras definições para as funções anteriores. A função seno é a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real c o seu seno, isto é, $f(c) = sen(c)$. O seu gráfico é formado pelo conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(c, sen(c))$. Por outro lado, a função cosseno é a função $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real c o seu cosseno, isto é, $g(c) = \cos(c)$. Os pontos de seu gráfico são $(c, cos(c))$ (IEZZI *et al.*, 2016).

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se $periódica$ quando existe um número $N \neq 0$ tal que $f(c+N) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(c+kN) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor $N > 0$ tal que $f(c+N) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f. As funções seno e cosseno, definidas por $f(c) = sen(c)$ e $g(c) = cos(c)$ são periódicas, de período 2π (LIMA *et al.*, 2012). De acordo com o que vimos 4.3, os arcos associados aos números reais c e $c + kN$, com $k \in \mathbb{Z}$, são chamados de côngruos.

Diz-se ainda que a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é par quando se tem $f(-c) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Se tem $f(-c) = -f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$, a função f chama-se $ímpar$ (LIMA *et al.*, 2012). Essa definição pode ser facilmente exemplificada. Veja:

Sejam as funções $f, g, h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(c) = 2c$, $g(c) = c^2 - 1$ e $h(c) = c^2 - 4c + 4$, verifique qual a paridade de cada.

$f(-c) = 2(-c) = -2c \Longrightarrow f(-c) = -f(c)$, portanto f é função $ímpar$.

$g(-c) = (-c)^2 = c^2 \Longrightarrow g(-c) = g(c)$, portanto g é par.

$h(-c) = (-c)^2 - 4(-c) + 4 = c^2 + 4c + 4 \neq -h(c)$, portanto h não é $ímpar$.

Mas também, $h(-c) \neq h(c)$, assim, h não é par. Logo, por não ser $ímpar$ nem par, concluímos que a função h não tem paridade.

Se tratando das funções trigonométricas e de acordo com o que vimos em 4.2.4, a função $sen(c)$ é $ímpar$ e a função $\cos(c)$ é par, pois considerando qualquer $c \in \mathbb{R}$, $sen(-c) = -sen(c)$, isto é, domínios opostos determinam imagens opostas e $\cos(-c) = \cos(c)$, onde domínios opostos determinam imagens iguais. Na sequência, veremos duas formas de enxergar a paridade das funções seno e cosseno, pela circunferência trigonométrica na Figura 46, e pelo gráfico em que $c \in [-\pi, \pi]$, na Figura 47 do cosseno e na Figura 48 do seno.

Na Figura 46, note que os arcos opostos c e $-c$ tem cossenos iguais e os senos opostos. No gráfico da Figura 47, perceba a simetria do gráfico em relação ao eixo y, isso quer dizer que para os valores a direita e a esquerda que são equidistante do eixo possuem o mesmo cosseno, característica da função par. Agora, na Figura 48 – Representação da função $f(c) = sen(c), c \in [-\pi,\ \pi]$, percebe-se que para os valores equidistante do eixo y seus senos são opostos, caracteristica da função ímpar.

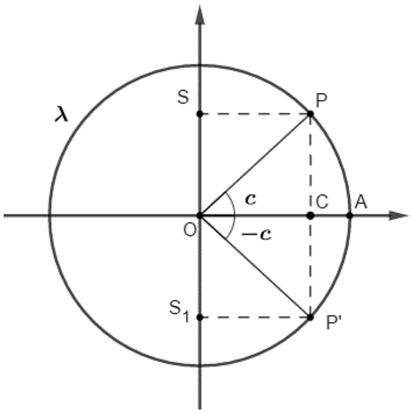


Figura 46 – Representação da paridade na circunferência
Fonte: Elaborada pelo autor

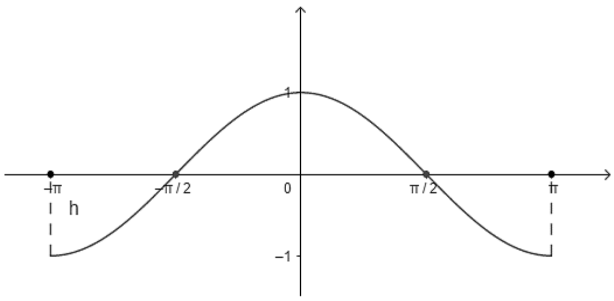


Figura 47 – Representação da função $f(c) = cos(c), c \in [-\pi,\ \pi]$
Fonte: Elaborada pelo autor

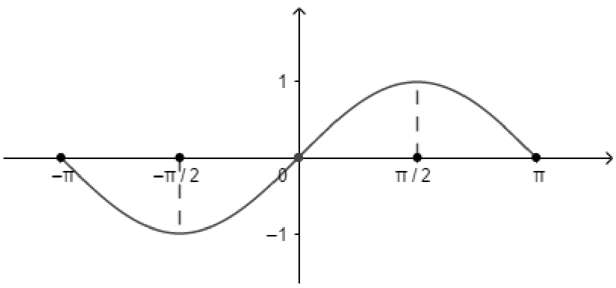


Figura 48 – Representação da função $f(c) = sen(c), c \in [-\pi,\ \pi]$
Fonte: Elaborada pelo autor

Agora, vamos mostrar os gráficos das funções discutidas antes em um intervalo maior. Esses gráficos são denominados de *senóide* e *cossenoide*, representados na Figura 49 e Figura 50, respectivamente.

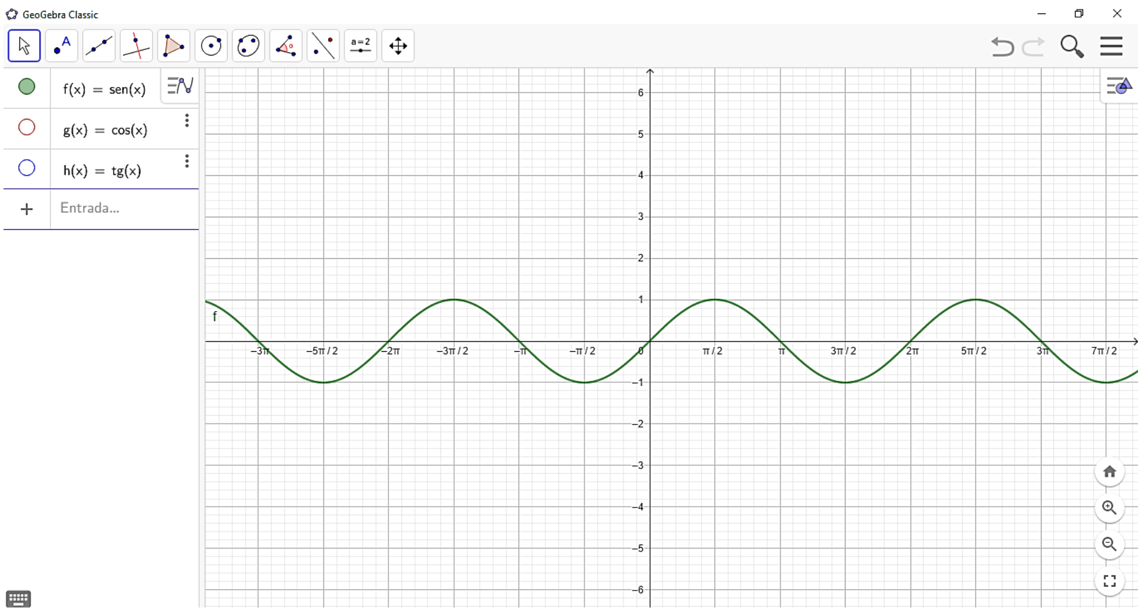


Figura 49 – Senóide
Fonte: Elaborada pelo autor

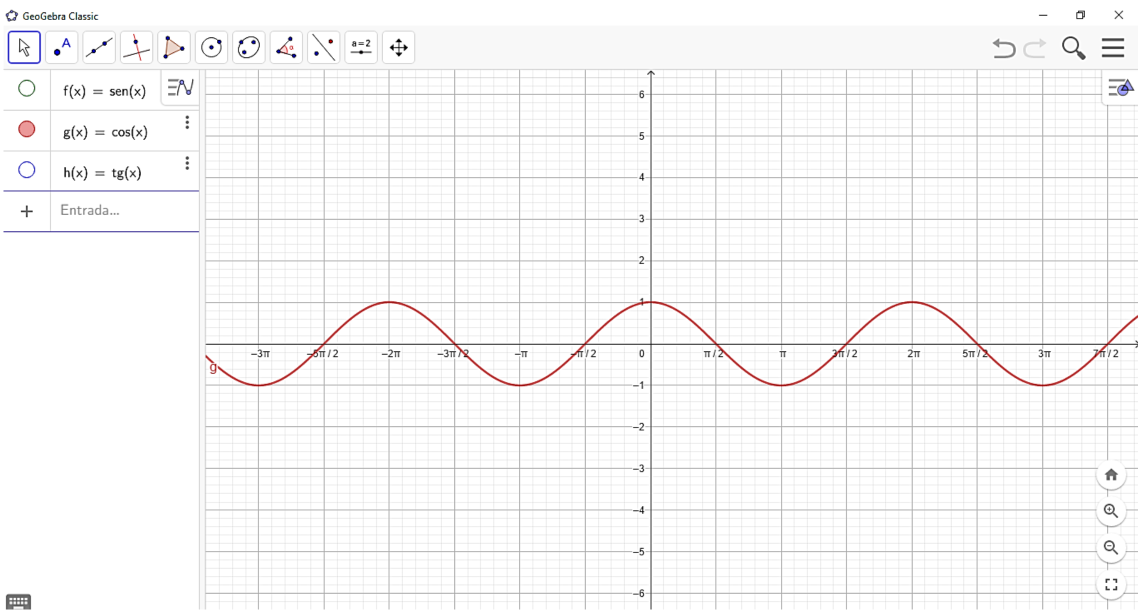


Figura 50 – Cossenoide
Fonte: Elaborada pelo autor

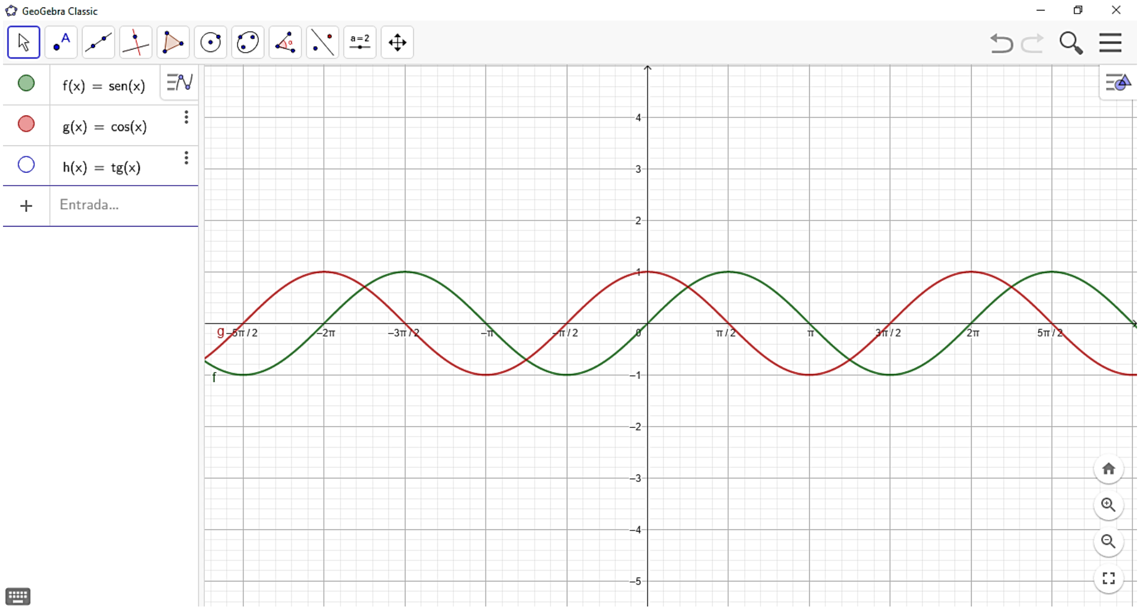


Figura 51 – Senóide e Cossenoide
Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 51, mostramos as duas curvas simultaneamente. A partir delas, podemos notar uma grande semelhança entre as duas curvas. Na verdade, elas são idênticas. O gráfico da função cosseno é apenas o resultado de uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda na função seno.

4.4.2 Função Tangente

A função tangente é a função $h: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real c (com exceção dos valores côngruos a $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$) a sua tangente, isto é, $h(c) = tg(c)$. O seu gráfico é formado pelo conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(c,\ tg(c))$ (BARROSO, 2010). Essa restrição se deve pela definição da tangente, $tg(c) = \frac{sen(c)}{\cos(c)}$, donde $\cos(c) \neq 0$, isto é, $c \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Como foi visto, o sinal da tangente é positivo no 1º e 3º quadrantes e negativo no 2º e 4º quadrantes. Daí, decorre da simetria que, em qualquer caso, $tg(c) = tg(c + \pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica com período π. Para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se menor que qualquer número dado. Podemos então esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0,\ \pi]$, como na Figura 52, e repeti-lo em todos os intervalos da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$. Observe a Figura 53 e Figura 54.

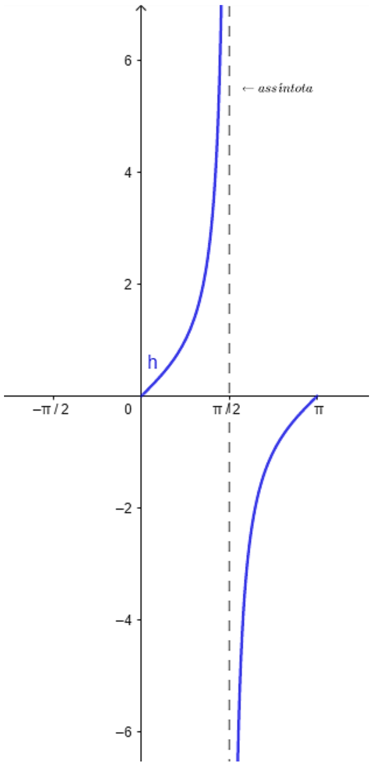


Figura 52 – Tangente em $[0, \pi]$
Fonte: Elaborada pelo autor

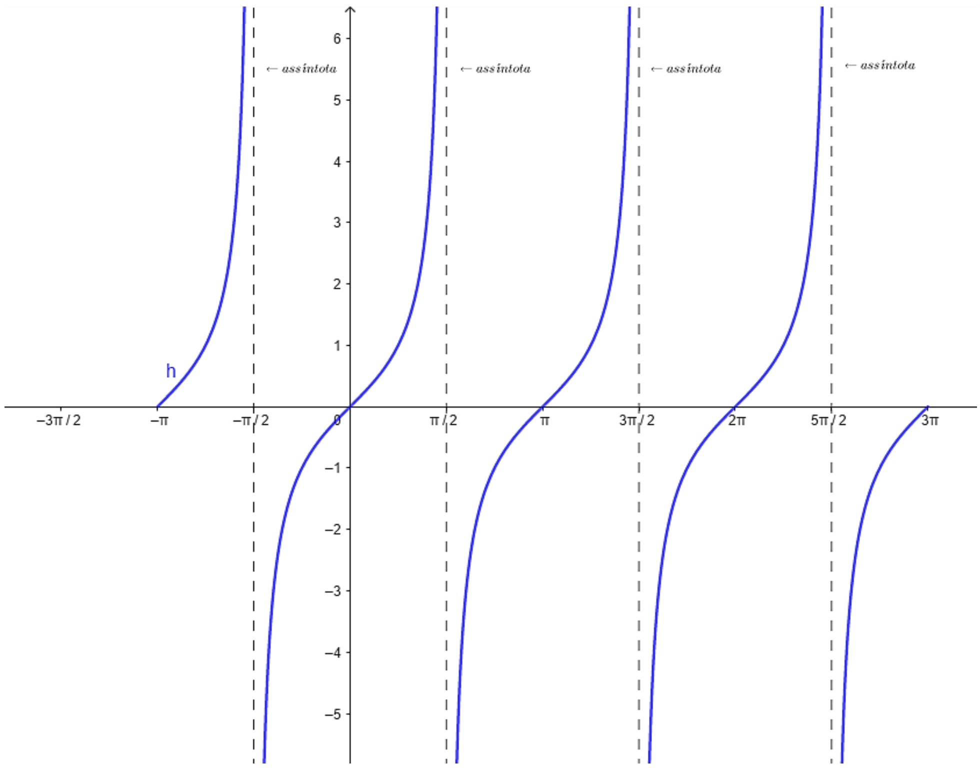


Figura 53 – Tangente em $[-\pi, 3\pi]$
Fonte: Elaborada pelo autor

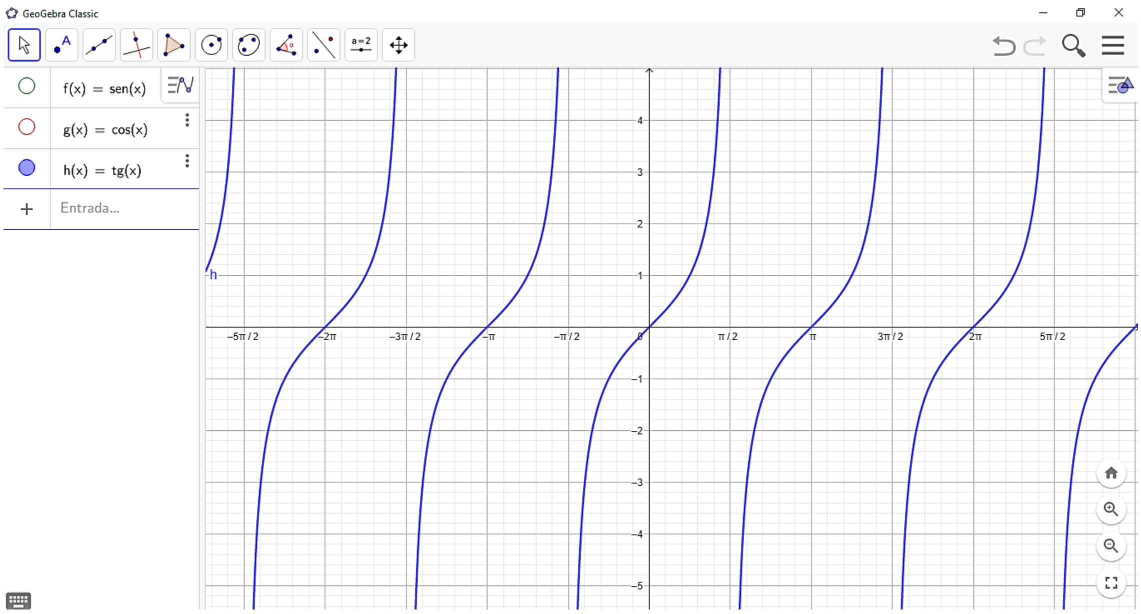


Figura 54 – Gráfico da função $h(x) = tg(x)$
Fonte: Elaborada pelo autor

4.4.3 Funções trigonométricas do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$

As funções definidas por $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$, em que seus coeficientes a, b, c e d são números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, são expressões trigonométricas que permitem a modelagem[23] Matemática de fenômenos periódicos. Lembramos aos leitores desse material que este é o nosso foco, tornar visível as propriedades dessas funções e aumentar a possibilidade de resolvermos tais situações problemas. Importante perceber que as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são casos particulares em que $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.

As funções do tipo trigonométricas $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ têm propriedades semelhantes a $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, respectivamente. Cada coeficiente tem sua propriedade diante da representação gráfica, como veremos adiante, utilizando o GeoGebra.

- O coeficiente a translada o gráfico da função em $|a|$ unidades para cima se $a > 0$, ou para baixo se $a < 0$. O coeficiente a altera a imagem da função, como podemos ver na Figura 55.

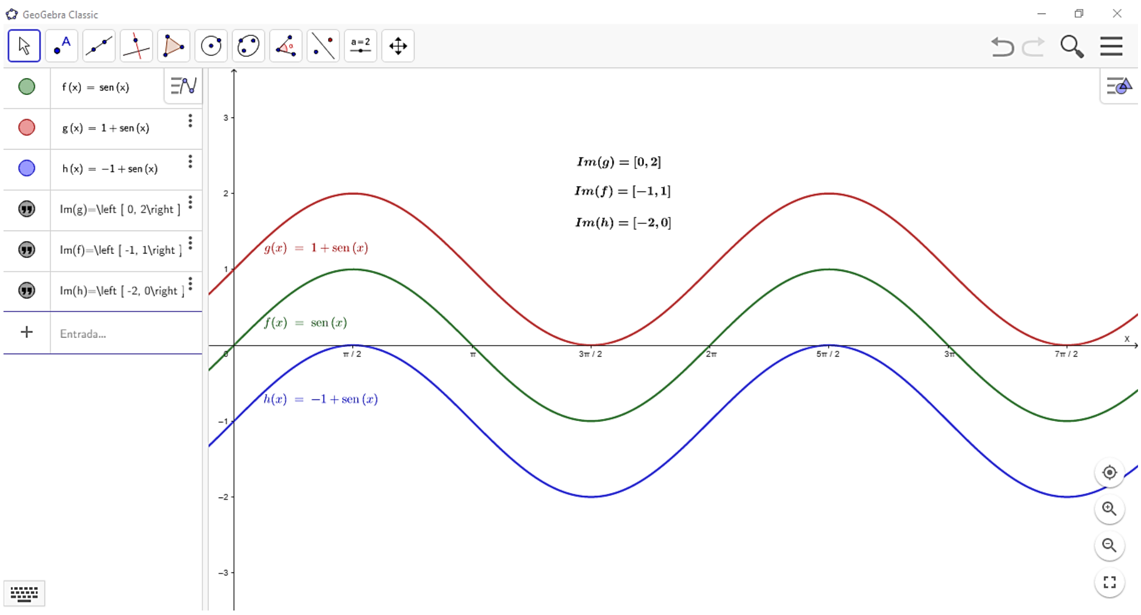


Figura 55 – Variação do coeficiente a
Fonte: Elaborada pelo autor

[23] "A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolve-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. " (BASSANEZI, 2015)

- O coeficiente b amplia verticalmente o gráfico da função se $|b| > 1$ e comprime verticalmente se $|b| < 1$. Podemos resumir que b aumenta ou diminui a amplitude[24] da curva, como podemos ver na Figura 56. O coeficiente b também altera a imagem da função.

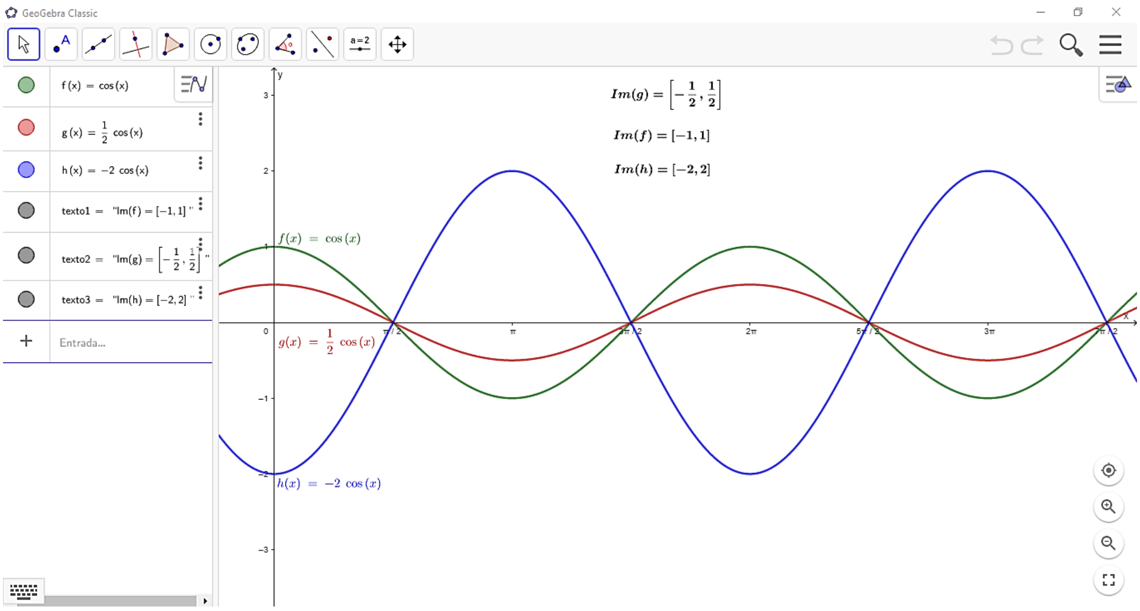


Figura 56 – Variação do coeficiente b
Fonte: Elaborada pelo autor

- O coeficiente c amplia horizontalmente se $|c| < 1$ e comprime se $|c| > 1$, alterando o período da função, vejamos os exemplos na Figura 57. Podemos dizer que o coeficiente c aumenta ou diminui o comprimento[25] da onda. Logo, o comprimento da onda equivale ao período da função.

[24] Amplitude de uma onda é o módulo do deslocamento máximo dos elementos a partir da posição de equilíbrio quando a onda passa por eles (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 1996).
[25] O comprimento de onda é a distância (paralela à direção de propagação da onda) entre repetições da forma de onda (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 1996).

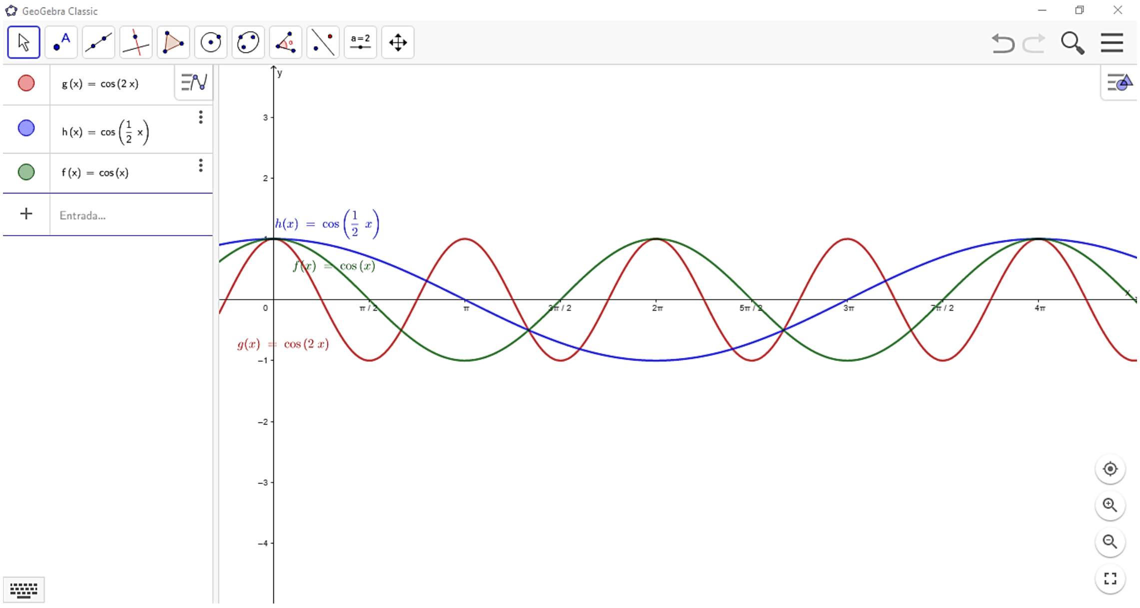


Figura 57 – Variação do coeficiente c
Fonte: Elaborada pelo autor

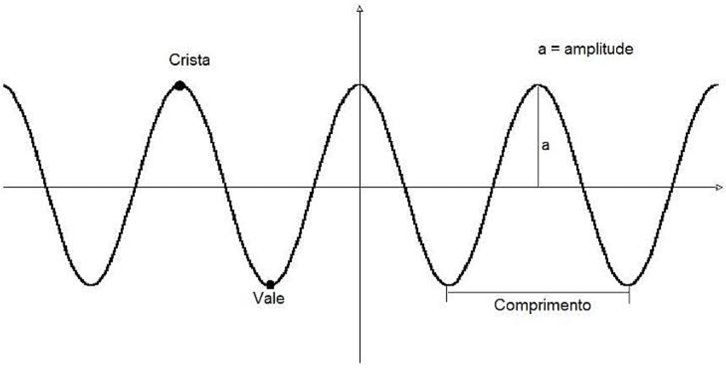


Figura 58 – Amplitude e comprimento de onda
Fonte: Wikipédia[26]

Note, na Figura 57, que o período P das funções são $P_f = 2\pi$, $P_h = 4\pi$ e $P_g = \pi$. A Figura 58 ajuda a esclarecer os termos comprimento de onda, amplitude, crista e vale, utilizados antes.

- O coeficiente d translada o gráfico da função em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda se $\frac{d}{c} > 0$, ou para a direita se $\frac{d}{c} < 0$, como podemos observar na Figura 59.

[26] Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Onda_eletromagn%C3%A9tica.jpg.

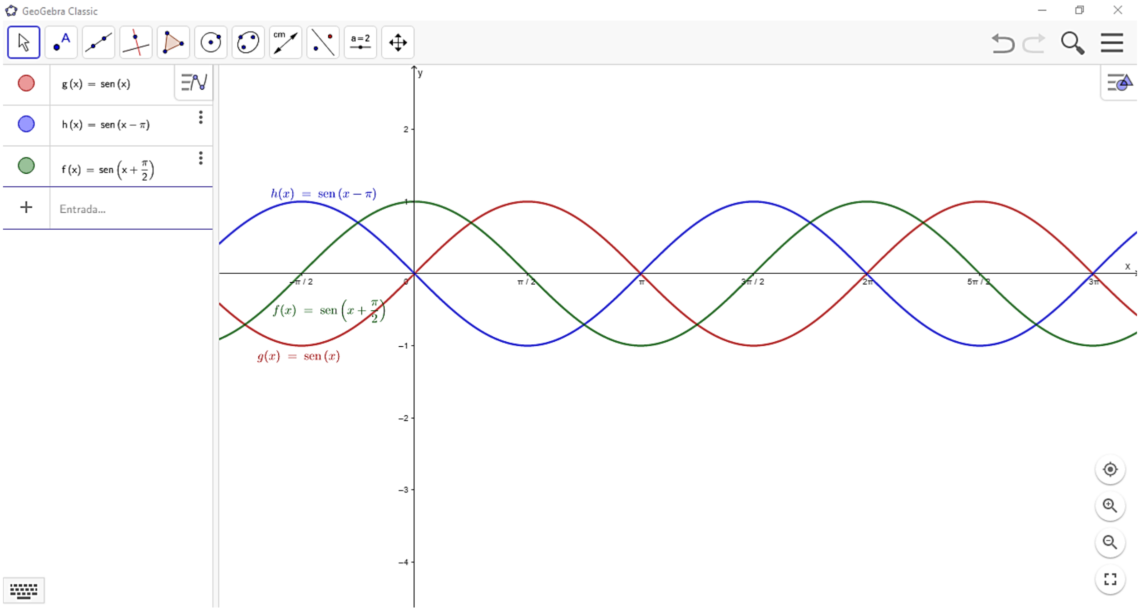


Figura 59 – Variação do coeficiente d
Fonte: Elaborada pelo autor

Perceba, na representação da Figura 59, que tanto a função f, como g e h tem $c = 1$. Daí, como nelas os coeficientes $d_g = 0$, $d_f = +\frac{\pi}{2}$ e $d_h = -\pi$, o gráfico de f é transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda e o de h é transladado π unidades para a direita em relação ao gráfico de g.

4.4.3.1 O período das funções $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$

Exercício: Sejam a, b, c e d números reais, com b e $c \neq 0$. A função definida por $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ tem período P dado por $P = \frac{2\pi}{|c|}$.

Solução:

De fato, fazendo $t = c \cdot x + d$, para que $f(x) = a + b \cdot sen(t)$ complete um período, é necessário que t varie de 0 a 2π, ou seja,

$$0 \leq t \leq 2\pi \iff 0 \leq c \cdot x + d \leq 2\pi \iff -d \leq c \cdot x \leq 2\pi - d.$$

(i) Para $c > 0$, temos: $-\frac{d}{c} \leq x \leq \frac{-d+2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[\frac{-d}{c}, \frac{-d+2\pi}{c}\right]$, e o período P é:

$$\frac{-d+2\pi}{c} - \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}.$$

(ii) Para $c < 0$, temos: $-\frac{d}{c} \geq x \geq \frac{-d+2\pi}{c}$, isto é, $x \in \left[\frac{-d+2\pi}{c}, \frac{-d}{c}\right]$, e o período P é:

$-\frac{d}{c} - \left(\frac{-d+2\pi}{c}\right) = -\frac{2\pi}{c} > 0.$

De (i) e (ii), vem que $P = \frac{2\pi}{|c|}$. ■

A função $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ tem o mesmo comportamento, portanto para calcular seu período utilizamos a mesma expressão. Já funções do tipo $h(x) = a + b \cdot tg(c \cdot x + d)$ tem período $P = \frac{\pi}{|c|}$.

4.4.4 O uso do GeoGebra para auxiliar na variação dos parâmetros das funções trigonométricas

Assim como no tópico 4.2.3, aqui iremos apresentar uma animação com a variação dos coeficientes, afim de facilitar a compreensão dos parâmetros das funções trigonométricas estudadas em 4.4.3. Essa animação consiste no uso de controles deslizantes, que permitem manualmente ou até mesmo automaticamente alterar o valor dos coeficientes e percebermos a mudança na sua representação gráfica, como mostraremos nas figuras que seguem. Esta apresentação está disponível no link: https://www.geogebra.org/m/vnbwjszx.

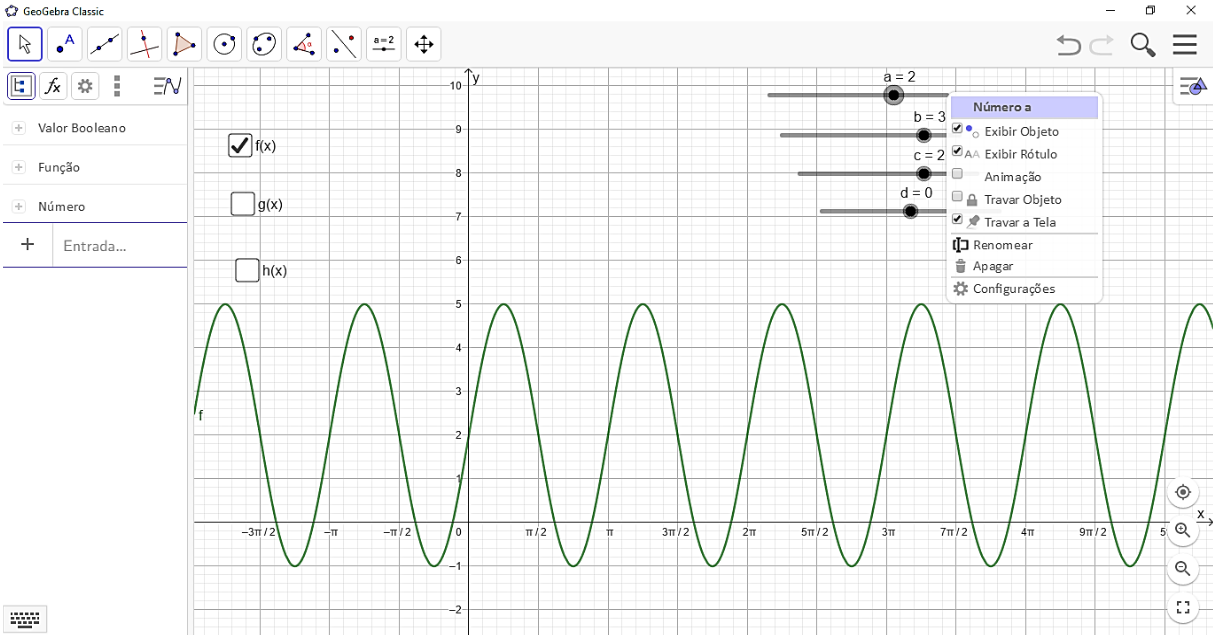


Figura 60 – $f(x) = 2 + 3sen(2x)$
Fonte: Elaborada pelo autor

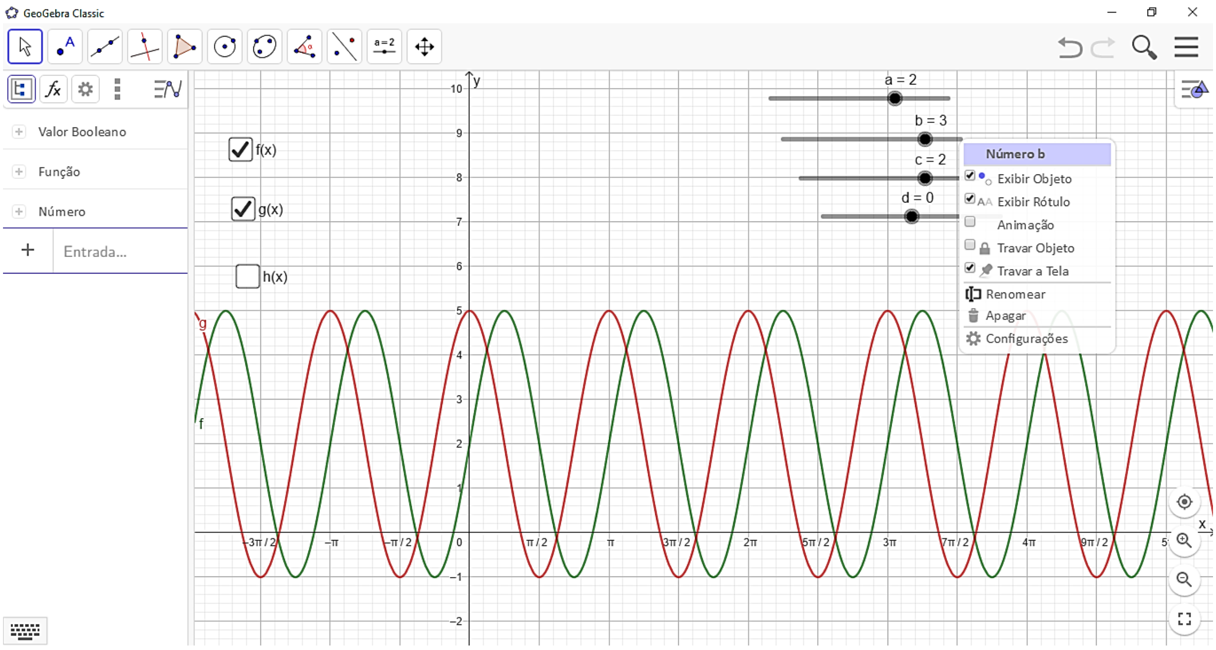


Figura 61 – $f(x) = 2 + 3sen(2x)$ e $g(x) = 2 + 3cos(2x)$
Fonte: Elaborada pelo autor

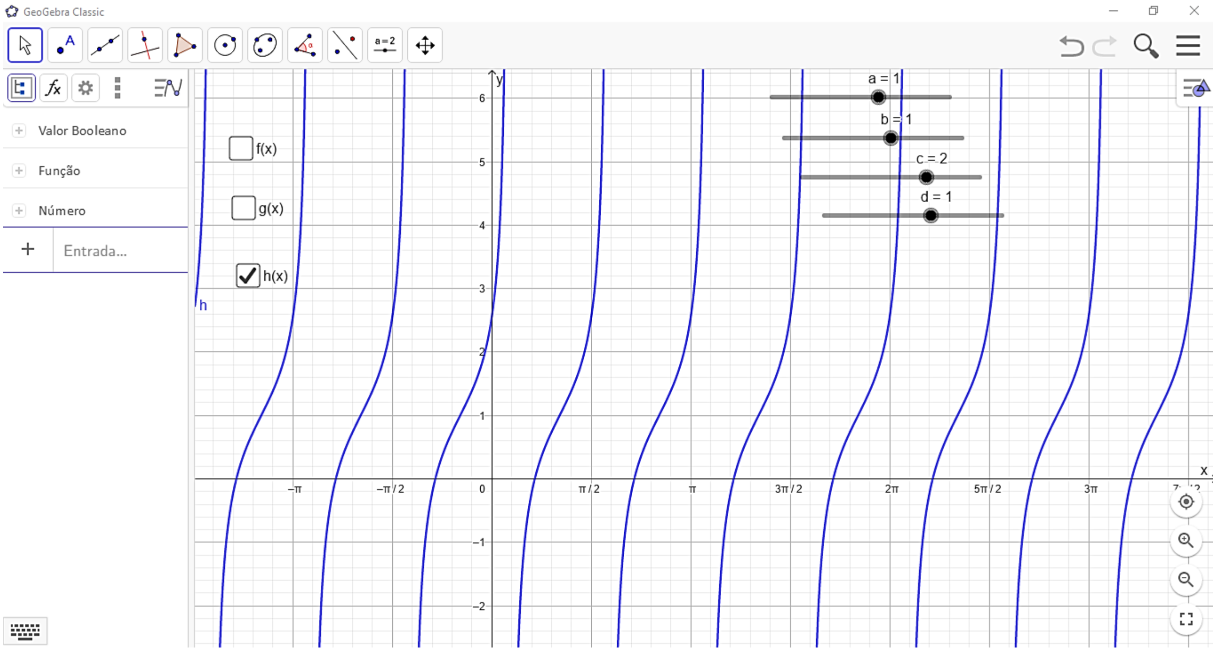


Figura 62 – $h(x) = 1 + tg(2x)$
Fonte: Elaborada pelo autor

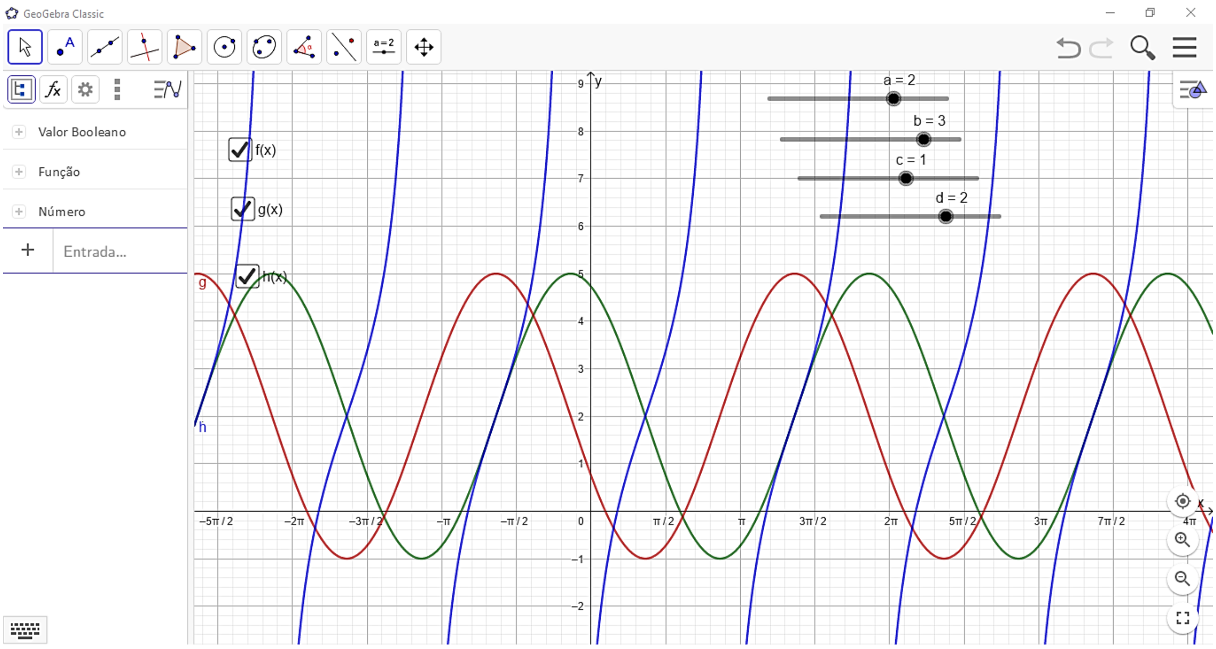


Figura 63 – Apresentação das funções f, g e h
Fonte: Elaborada pelo autor

As imagens ilustram como podemos conduzir o *software* para tornar visível o comportamento gráfico das funções trigonométricas. Nas apresentações foi usado também a ferramenta caixa para exibir/esconder objetos, sua função é ocultar o gráfico caso desmarcamos o quadradinho correspondente de $f(x)$, $g(x)$ ou $h(x)$. Notemos assim, o quão é útil o GeoGebra, facilitador do processo de aprendizagem em Matemática e várias outras áreas.

É importante que os professores nesse momento da aula motivem os alunos a participar, manipulando esse instrumento. Os recursos necessários para essa aula são: um computador com o GeoGebra instalado e um projetor. Pensando nessa estratégia, objetivamos estreitar o caminho que leva os estudantes a uma aprendizagem significativa. No entanto, além do link disponibilizado anteriormente, deixaremos no Apêndice B deste trabalho um roteiro para a construção da apresentação.

4.5 Problema Gerador de Discussões

A metodologia PGD, interessados ver Machado e Pinheiro (2009), consiste em uma estratégia criada para o Ensino de Ciências e Matemática nos cursos de Engenharia, utilizando a resolução de situações problema como aliado no processo da aprendizagem, considerando a construção de uma interpretação através de diálogos e troca de experiências. Essa interação leva o aluno a exercitar suas habilidades e competências para aplicar conhecimentos científicos, experimentais, relacionados à prática do curso.

Portanto, iremos adaptar e utilizar essa metodologia nas aulas de Matemática com o intuito de atender a uma necessidade que é muito comum entre os estudantes, saber para que estudar/aprender e em que determinados conteúdos são utilizados. Proporemos uma série de aplicações do conteúdo no nosso cotidiano afim de incentivar o desenvolvimento da competência de investigação e compreensão em Matemática na medida em que o estudante deve interpretar a situação proposta, utilizar e elaborar modelos e representações matemáticas para analisar situações, além de compreender o mundo do qual a Matemática é parte integrante, através dos problemas que ela consegue resolver e dos fenômenos que podem ser descritos por meio de seus modelos e representações. Assim, fomentamos a formação voltada para a preparação das avaliações externas, como o ENEM, que aborda somente questões contextualizadas e isso exige que o estudante esteja familiarizado com tais problemas. Essa proposta é uma alternativa aos métodos de ensino mecanizados que não permitem ao educando se aprofundar na sua capacidade.

Portanto, dentre as aplicações que serão apresentadas no Capítulo 5, o professor escolherá aquela que seja mais conveniente para a turma e através dela desencadeará uma discussão fazendo indagações acerca da questão levantada, dando ênfase a ideia da interpretação da imagem e período da função modelada. Depois desse momento o professor explana o conteúdo, exibindo o comportamento das funções trigonométricas. Em seguida, a discussão é fechada e novos problemas são propostos aos alunos. Contudo, proporcionaremos uma aprendizagem interativa que possibilitará o aluno se manifestar diante da situação. É indispensável lembrar que aquelas aplicações que não forem adequadas podem ser adaptadas para as necessidades da turma.

Acreditando que a interpretação dos fenômenos que acontecem no dia a dia, aliados com a resolução de situações problemas podem proporcionar um aumento no interesse pela investigação e aprendizagem das funções trigonométricas, no capítulo que segue abordaremos aplicações do cotidiano e várias questões que caíram no ENEM e em vestibulares.

5 APLICAÇÕES E QUESTÕES DE AVALIAÇÕES

Um fato que merece bastante atenção é os professores serem sempre perguntados "para que isso serve?" ou “Por que aprender isso?” quando estão ensinando Matemática. Quando o assunto são as funções trigonométricas a situação não é diferente. Diante dessas indagações, e considerando o que Lorenzato (1993) afirma, que os professores devem ir para a sala de aula mais preparados para enfrentar as prováveis indagações dos alunos, mostraremos onde podemos perceber, no cotidiano, a inserção desse conteúdo. Em seguida, mostraremos as questões que estiveram presentes nas avaliações do ENEM e em vestibulares. Na oportunidade abordaremos algumas questões que atendem ao descritor da matriz curricular da 3ª série do EM do SAEB, comentando-as e percebendo seus desafios.

5.1 Aplicações das funções trigonométricas

Trataremos de listar algumas aplicações interessante das funções trigonométricas relacionadas ao estudo de fenômenos periódicos. Tais situações possuem oscilações que se repetem sistematicamente e podem ser observadas por qualquer indivíduo. Para somar, levaremos tais funções para o GeoGebra e discutiremos seu comportamento diante da variação de alguns termos.

5.1.1 As marés[27]

Marés são variações periódicas do nível do mar devido principalmente à atração gravitacional da Lua. Por sua periodicidade, esse fenômeno pode ser modelado de acordo com uma função do tipo $h(t) = b \cdot sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, em que $h(t)$ é a altura da maré no instante t, medido em horas, e b é o coeficiente que determina a variação máxima em relação ao nível médio do

[27] Retirado de Souza (2013).

mar. Os extremos dessa variação são chamados de maré alta e maré baixa. Em um período de 24h48min, um dia lunar, as marés altas ocorrem duas vezes.

Em muitos lugares a água se espalha por uma grande área e sobe/desce apenas alguns centímetros, porém existem algumas regiões, como a baía de Fundy, no Canadá, em que a diferença entre as alturas máxima e mínima chegam a 18m na lua cheia. Portanto, considerando a baía de Fundy no período de lua cheia, a função h que relaciona a altura da maré, em metros, em função do tempo t, em horas, é $h(t) = 9sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, pois a altura varia de -9m a 9m e como já vimos anteriormente o coeficiente b é a variação máxima em relação ao nível médio do mar, isto é, $b = \frac{9-(-9)}{2} = 9$.

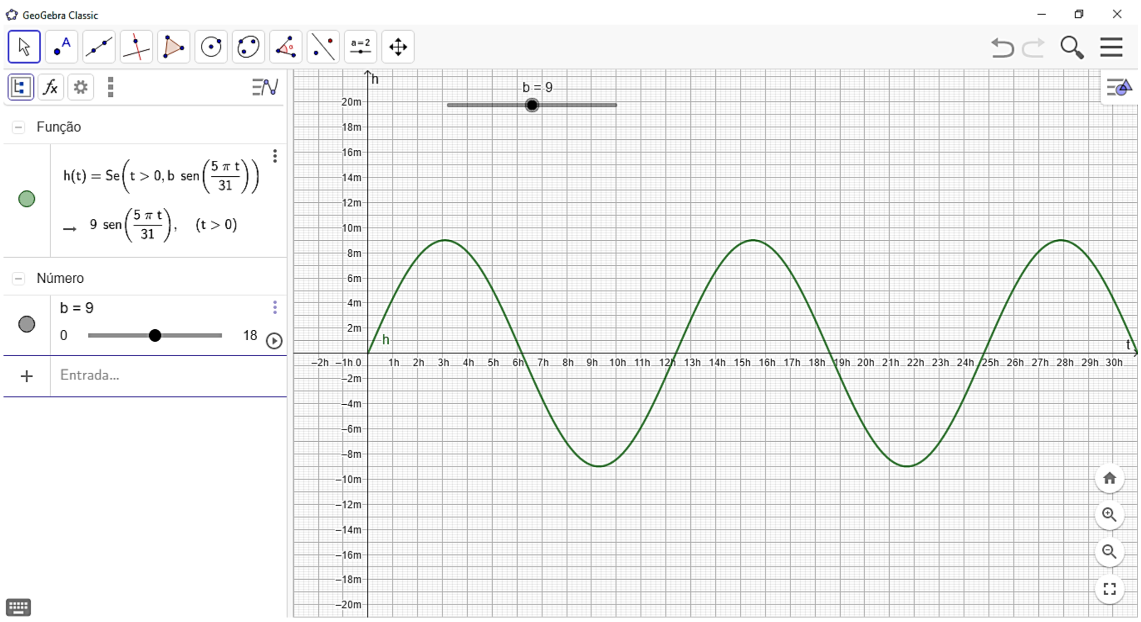


Figura 64 – Gráfico função h da altura da maré
Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 64, foi colocado o controle deslizante para verificarmos a altura em função do tempo de acordo com a variação do coeficiente b, que vai de 0 a 18, implicando na variação da altura.

5.1.2 A roda-gigante[28]

[28] Retirado de Iezzi *et al.* (2016).

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais dos parques de diversões. Imagine uma roda-gigante, como a da Figura 65, cujo raio é 9m. Essa roda é sustentada por uma estrutura de ferro a partir de seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro ao solo é 10m. O movimento que é feito tem uma velocidade constante e uma volta completa em torno do seu eixo central é concluída em 120s. Um visitante do parque que vai brincar na roda-gigante entra em uma cabine e após iniciar a volta ele observa que sua altura em relação ao solo varia de maneira periódica ao longo do passeio, de forma que uma determinada altura é atingida algumas vezes à medida que a roda executa as várias voltas do passeio.

Figura 65 – Roda-gigante
Fonte: <https://pixabay.com/pt/photos/roda-gigante-parque-de-divers%C3%B5es-mar-1328067/>

Podemos expressar a altura de uma determinada cabine em função do instante do passeio através da função trigonométrica $h(t) = 10 + 9 \cdot sen\left(\frac{\pi}{60}t\right)$, onde $h(t)$ é a altura da cabine, em metros, no instante t, em segundos. A seguir está representado o gráfico da função em que podemos observar a imagem e o período em um intervalo $0 \leq t \leq 240$.

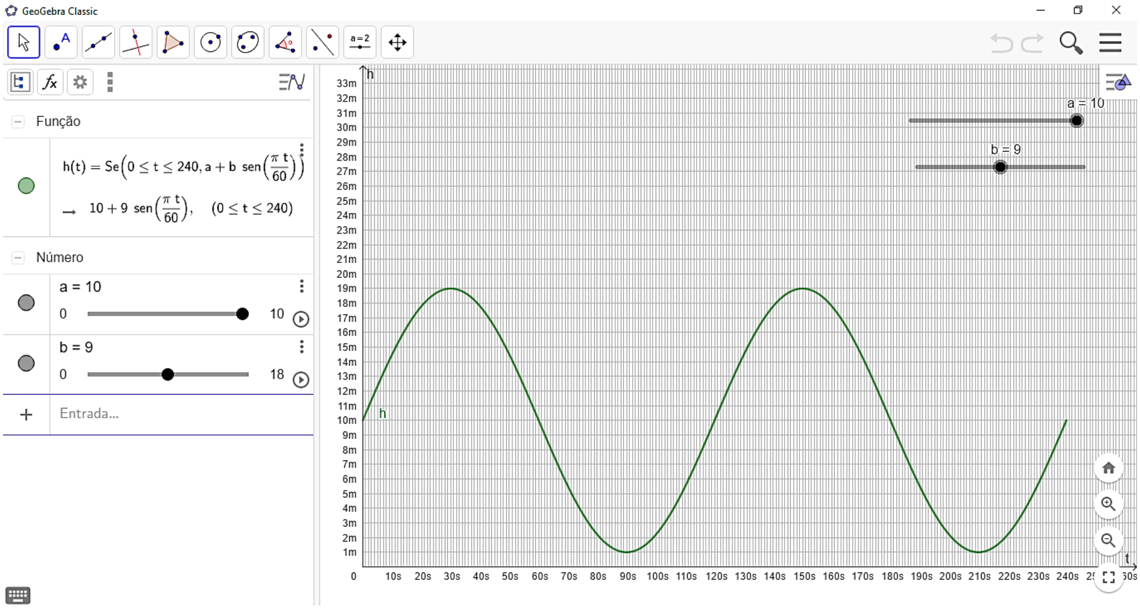


Figura 66 - Gráfico da função roda-gigante
Fonte: Elaborada pelo autor

Nas pesquisas feitas na plataforma do GeoGebra, encontramos uma aplicação de uma das maiores rodas-gigantes do mundo, a Singapore Flyer, localizada em Singapura. Na Figura 67, temos a interface da apresentação. No centro da imagem, há uma bola vermelha que representa a cabine que vai iniciar o movimento circulatório após o botão de player (⦿) ser pressionado.

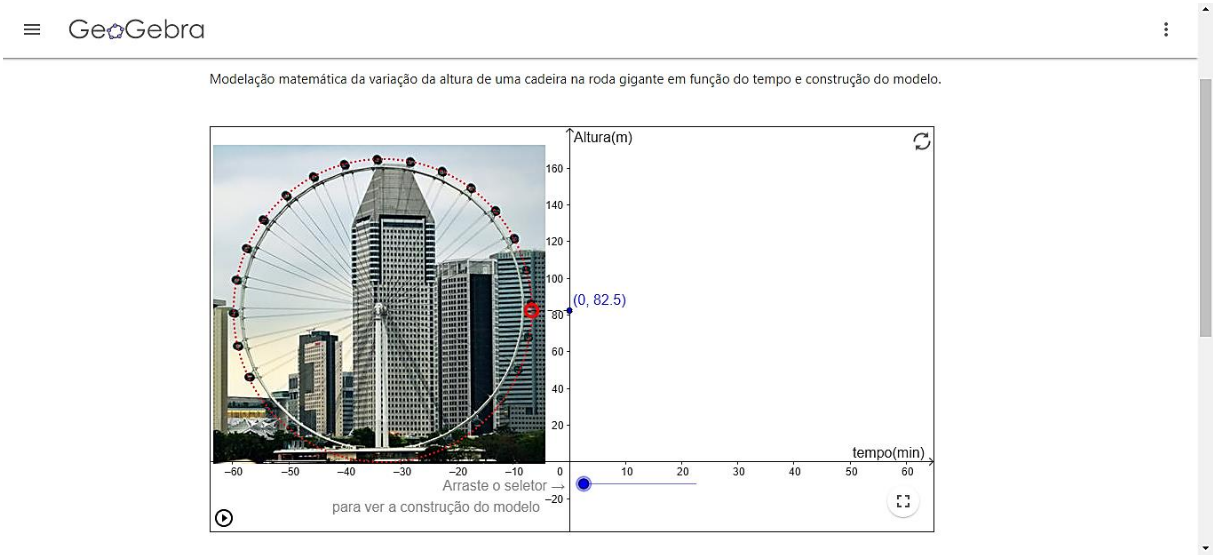


Figura 67 – Aplicação com a Singapore Flyer
Fonte: Geogebra/Materiais[29]

[29] Disponível: https://www.geogebra.org/m/debkmEaA.

A Figura 68 mostra o gráfico que foi construído de acordo com a expressão da altura da cabine em função do tempo, em minutos. Observemos que as alturas mínima e máxima, respectivamente, são 0 e 160m, assim como o período, ou seja, o tempo de correspondente a uma volta completa da roda é 30 minutos.

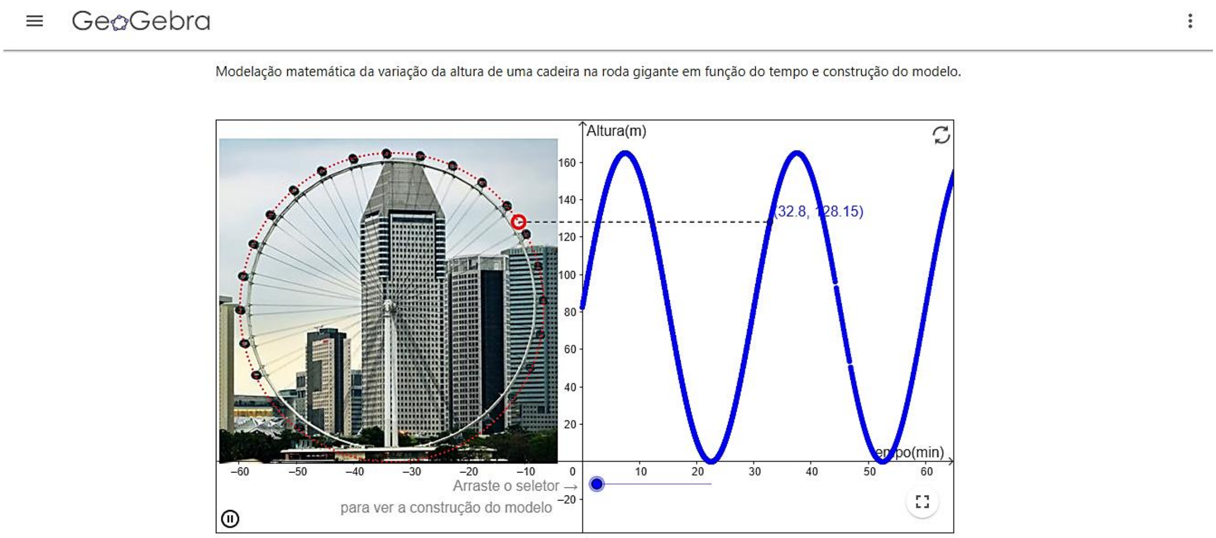


Figura 68 - Movimento gráfico da Singapore Flyer
Fonte: Geogebra/Materiais

5.1.3 Pressão arterial[30]

O ciclo cardíaco é mais uma situação que ocorre periodicamente. Trata-se de uma sequência de eventos que ocorre durante um batimento do coração. Nesse ciclo, os ventrículos contraem-se, ocorrendo a sístole ventricular e, logo em seguida, relaxam, ocorrendo a diástole. No momento da contração ventricular, o sangue é empurrado contra as paredes arteriais e a força com que ele é ejetado exerce uma pressão nas artérias, que, no pico da contração, é chamada de pressão sistólica. Já a menor pressão sanguínea nas artérias, que ocorre enquanto acontece o relaxamento do ventrículo, é conhecida como pressão diastólica.

As pressões sistólica e diastólica correspondem àquelas que o médico informa ao paciente em uma consulta. Quando ele diz, por exemplo, que sua pressão está 12 por 8, significa que a pressão sistólica aproximadamente é de 120mmHg (milímetros de mercúrio) e a diástole é de cerca de 80mmHg. Essas medidas fornecem informações importantes a respeito da saúde

[30] Retirado de Souza e Garcia (2016).

do indivíduo. Portanto, supondo que a pressão sanguínea de uma pessoa, a partir de um instante inicial $t = 0$, possa ser representada, aproximadamente, pela função $P(t) = 95 - 25sen\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$, sendo t o tempo dado em segundos e $P(t)$ a pressão sanguínea em milímetros de mercúrio t segundos após o instante inicial. Vejamos o gráfico dessa função na Figura 69.

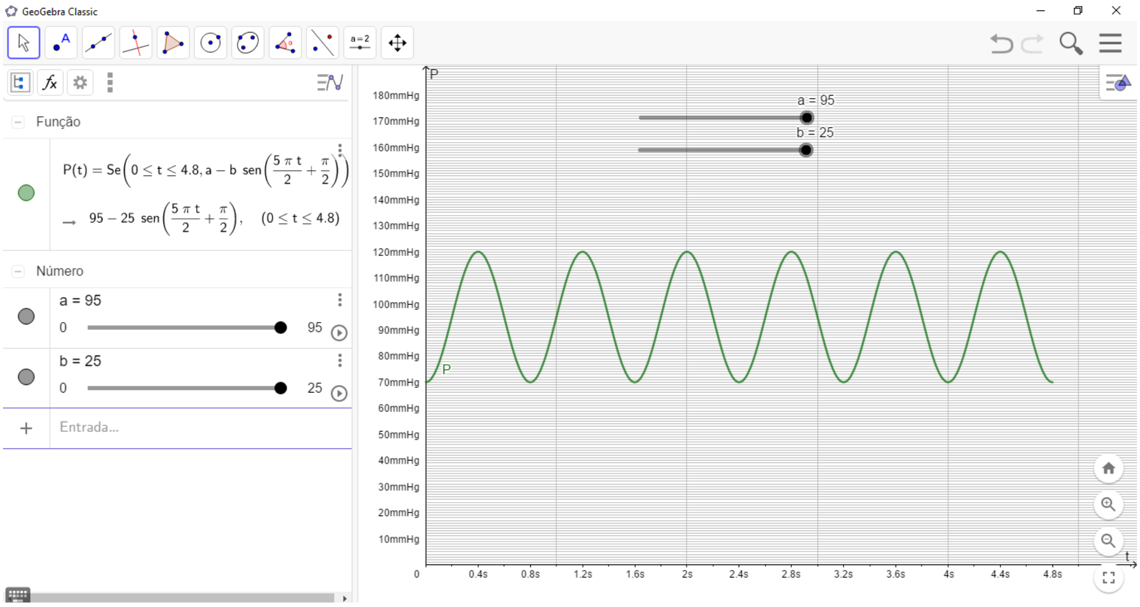


Figura 69 – Gráfico da função pressão arterial
Fonte: Elaborada pelo autor

Com a representação gráfica fica muito fácil de identificar as pressões mínima e a máxima e o tempo correspondente a um batimento cardíaco desse indivíduo. A pressão em questão é 12 por 7 e seu coração bate 75 vezes por minuto.

5.1.4 Movimento Harmônico Simples (MHS)[31]

O MHS acontece quando um determinado corpo oscila periodicamente em torno de uma posição de equilíbrio, descrevendo uma trajetória retilínea. Pode-se dizer que este corpo se movimenta devido à ação de uma força restauradora e seu deslocamento pode ser modelado por

[31] Pesquisado em Souza (2013).

uma função trigonométrica da forma $m(t) = bcos(ct + d)$. Na Figura 70 a posição de equilíbrio é 0.

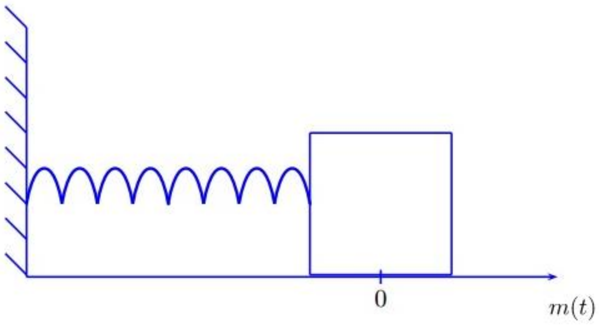


Figura 70 – Sistema massa-mola
Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Sistema_massa_mola.jpg>

Um determinado MHS é definido por $m(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo, em segundos, e m é o deslocamento em relação à posição de equilíbrio no tempo t. Daí, notemos que o deslocamento máximo é $m = 3$ e o tempo que esse corpo vai levar para completar um período, isto é, ir da posição de equilíbrio ao deslocamento máximo e depois até o mínimo e voltar a posição de equilíbrio. O gráfico será representado a seguir pela Figura 71.

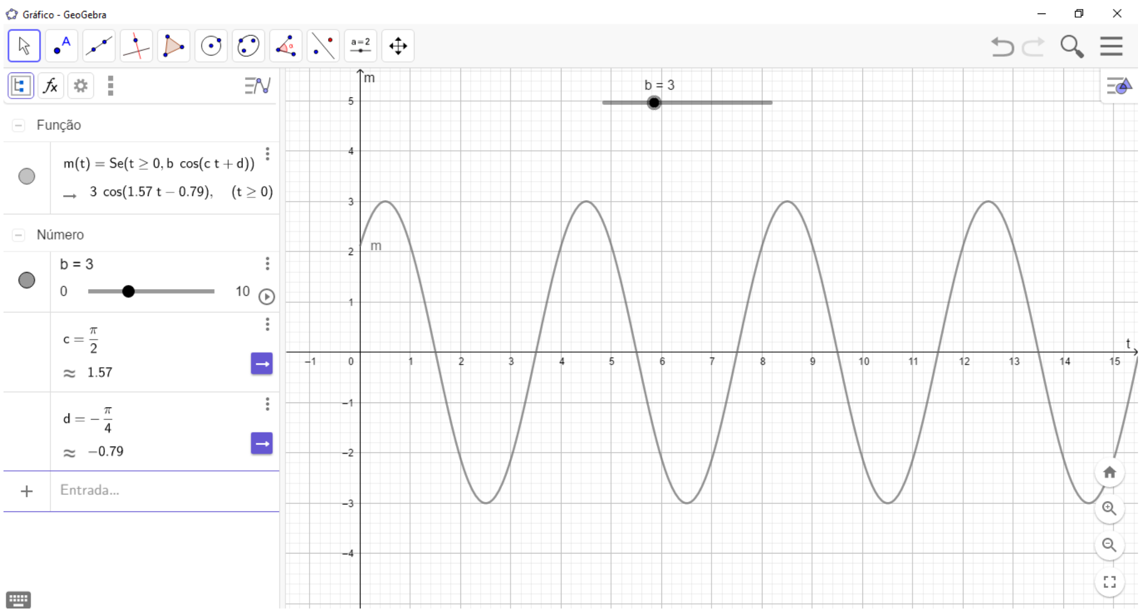


Figura 71 - Gráfico MHS
Fonte: Elaborada pelo autor

5.1.5 Pêndulo cônico[32]

O pêndulo cônico consiste em um corpo de massa m que gira em um círculo horizontal com velocidade v constante na ponta de uma corda de comprimento C, em metros. À medida que o corpo gira, o movimento da corda descreve a superfície de um cone imaginário, daí o nome pêndulo cônico, como o da Figura 72. O tempo T que o corpo demora para dar uma revolução completa, chamado de período, é dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{C \cdot cos\theta}{g}}$, em que θ é o ângulo que a corda faz com a vertical, e g é a aceleração da gravidade.

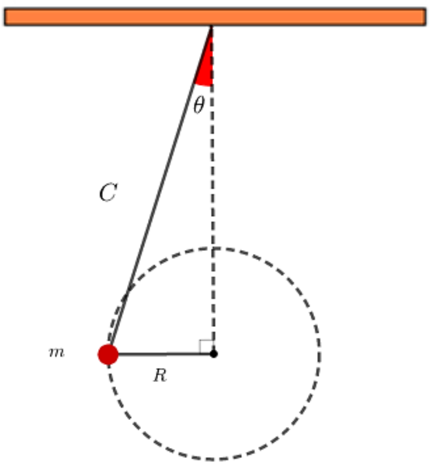


Figura 72 – Pêndulo cônico
Fonte: Elaborada pelo autor

Suponha o movimento de um pêndulo cônico de 2,5m de comprimento, e considerando a aceleração da gravidade igual a 10m/s², a expressão que determina o período T em função do ângulo θ em que o movimento é realizado é:

$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{2} \cdot cos\theta}{10}} = 2\pi\sqrt{\frac{5 \cdot cos\theta}{2} \cdot \frac{1}{10}} = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{cos\theta}}{2} = \pi\sqrt{cos\theta}$. Ainda podemos destacar o conjunto domínio da função T, que, analisando sua expressão devemos notar que $cos\theta > 0$, ou seja, $0 < \theta < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \theta < 2\pi + 2k\pi$. Mas como veremos no gráfico dessa

[32] Retirado de Souza (2013).

aplicação, Figura 73, a variação de θ nos intervalos em que a função é definida determinam o mesmo comportamento.

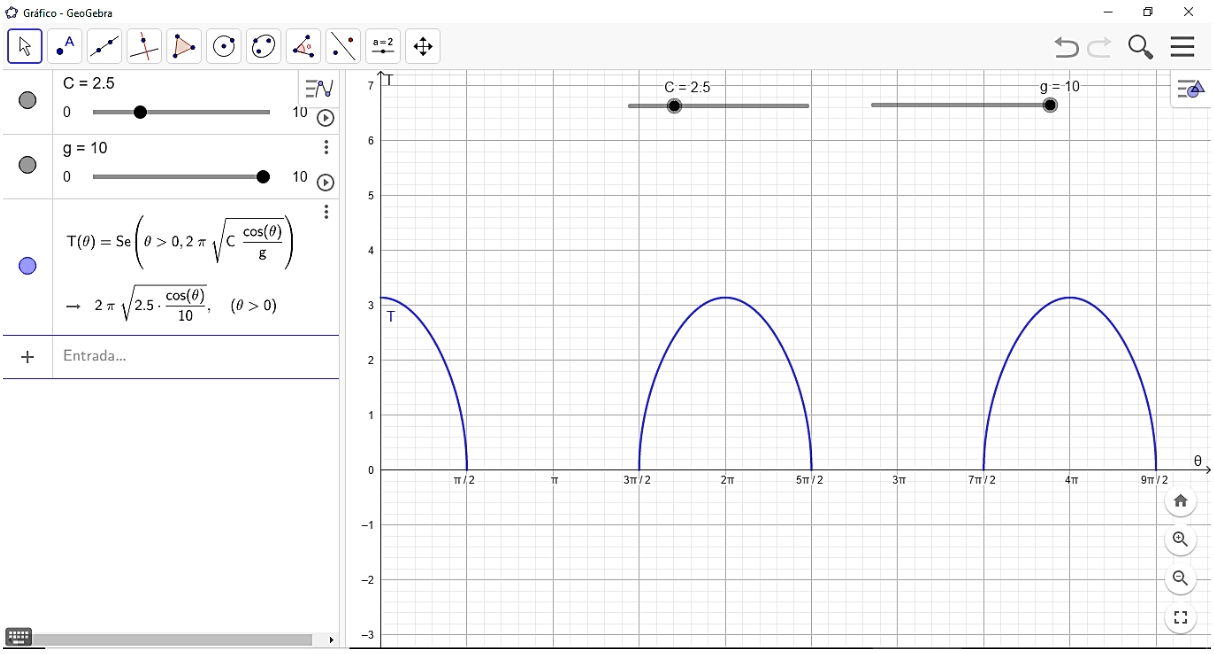


Figura 73 - Gráfico da função pêndulo cônico
Fonte: Elaborada pelo autor

5.1.6 Jogo de golfe[33]

O golfe é um esporte realizado ao ar livre, cuja meta é fazer com que a bola entre nos buracos, utilizando um taco nas jogadas, distribuídos num campo de grandes dimensões, como ilustra a Figura 74. Para tal objetivo, o jogador deve utilizar-se do menor número possível de tacadas.

[33] Retirado de Souza (2013).

Figura 74 - Jogo de golfe
Fonte: <https://pixabay.com/pt/photos/golf-jogador-esporte-clube-golfe-4739066/>

Contudo, para vencer um torneio de golfe, um jogador precisa acertar em uma tacada um buraco que se encontra a 43 m da bola. Ao realizar a tacada, ele impulsiona a bola com uma velocidade de 20 m/s. De acordo com as leis da mecânica, a distância R percorrida pela bola após ser lançada pelo jogador é dada por $R = \frac{V_0^2}{g} \cdot sen2\phi_0$, em que V_0 é a velocidade, ϕ_0 é o ângulo em que a bola é impulsionada e g é a aceleração da gravidade.

Considerando a aceleração da gravidade igual a 10 m/s², a expressão da distância percorrida em função do ângulo em que a bola foi impulsionada é

$$R = \frac{(20)^2}{10} \cdot sen2\phi_0$$

$$\Rightarrow R = 40 \cdot sen2\phi_0.$$

Vejamos na Figura 75, o gráfico dessa função com os controles deslizantes para V_0. Nela é visto que o deslocamento máximo é 40 metros. Alterando a velocidade, podemos ver o alcance da bola e com qual ângulo a distância desejada seria atingida.

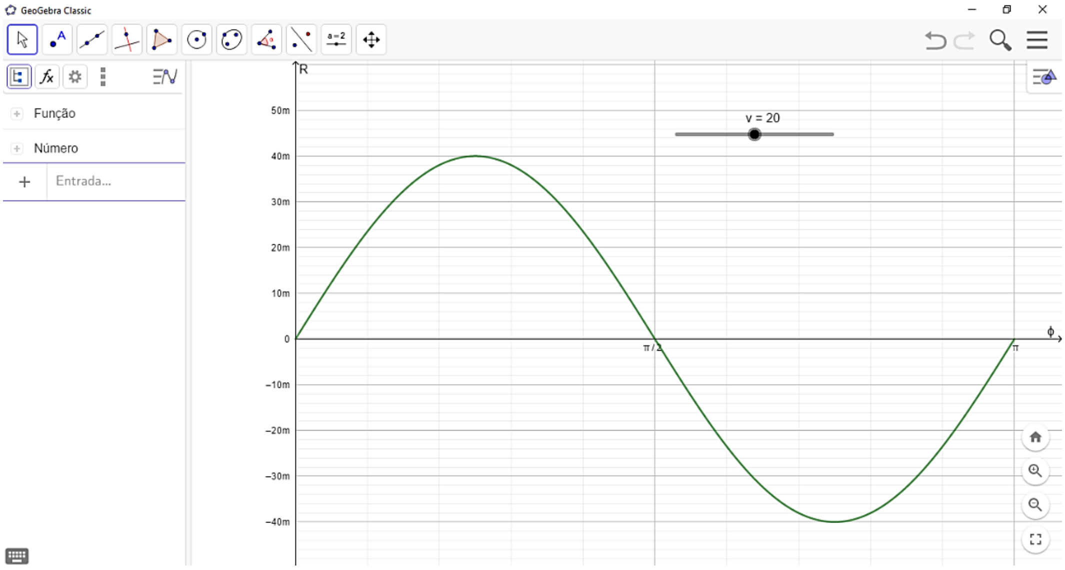


Figura 75 – Gráfico jogo de golfe
Fonte: Elaborada pelo autor

5.2 Funções trigonométricas no ENEM

Analisando os cadernos de prova das últimas edições do ENEM, disponíveis no portal do INEP[34], encontramos as questões adiante. Identificaremos a competência e a habilidade de cada questão e exibiremos uma solução, destacando o que foi trabalhado no Capítulo 4.

(ENEM 2010 - 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q161 – C5H21) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por $r(t) = \frac{5865}{1+0,15.\cos(0,06t)}$.

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

A) 12765 km.

[34] Disponível em: http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos. Acesso em 10 de novembro de 2019.

B) 12000 km.

C) 11730 km.

D) 10965 km.

E) 5865 km.

$Solução$:

Para resolver esta questão, o estudante precisa identificar quando a expressão assume valores máximo e mínimo. Para isso, é necessário saber que $-1 \leq \cos(\alpha) \leq +1$, sendo α um arco qualquer, como visto em 4.3. Sendo r_m e r_M o valor mínimo e máximo, respectivamente, da função r, então $S = r_m + r_M$. Daí, como a função r assume o mínimo quando $\cos(0{,}06t) = -1$ e o máximo quando $\cos(0{,}06t) = +1$, segue que:

$r_m = \frac{5865}{1+0{,}15.(-1)} = 6900$ e $r_M = \frac{5865}{1+0{,}15.(1)} = 5100$.

Somando, temos:

$S = 6900 + 5100 = 12000\ Km.$

Gabarito: letra B).

(ENEM 2014 – 2ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 6 – CINZA – Q158 – C5H22) Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot sen[b(x + c)]$ em que os parâmetros a, b, e c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)

A) a. **B) $\boldsymbol{b}$.** C) c. D) a e b. E) b e c.

$Solução$:

A resolução desta questão está associada ao reconhecimento dos parâmetros das funções trigonométricas. Reescrevendo a equação da onda, temos $y = a \cdot sen(b \cdot x + c)$. Vimos em 4.4.3 que o período da função varia de acordo com o coeficiente que multiplica a variável.

Logo, o período da onda, nessa questão, é dado por $P = \frac{2\pi}{|b|}$, dependendo, portanto, apenas do coeficiente b.

Gabarito: letra B).

(ENEM 2015 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q176 – C5H21) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

A) janeiro.

B) abril.

C) junho.

D) julho.

E) outubro.

Solução:

A interpretação dessa questão é fundamental, pois como o produto é sazonal, em época de produção máxima o preço é mínimo e quando a produção é mínima, o preço é máximo. O enunciado fornece a função que relaciona o preço com o tempo e exige do aluno o mês de produção máxima. Então, a produção é máxima quando preço é mínimo, ou seja, quando $\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = -1$. Como vimos em 4.2.3, $\cos(\pi) = -1$. Daí, os valores positivo de x para o qual se tem o preço mínimo é tal que

$$\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = \cos(\pi) \Rightarrow \frac{\pi x - \pi}{6} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow \pi x - \pi = 6 \cdot (\pi + 2k\pi) \Rightarrow x = \frac{7\pi + 12k\pi}{\pi}$$

$$\Rightarrow x = 7 + 12k, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, o menor valor de x é para $k = 0$. Segue que $x = 7$ e o mês de produção máxima desse produto é julho**.**

Gabarito: letra D).

(ENEM 2015 – 2ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 13 – CINZA – Q179 – C5H23)
Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T, em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + Bsen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite $(0 \leq h < 24)$ e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26°C, a mínima 18°C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

A) A = 18 e B = 8

B) A = 22 e B = -4

C) A = 22 e B = 4

D) A = 26 e B = -8

E) A = 26 e B = 8

$Solução$:

A questão é clara quando diz que a temperatura máxima é 26° e a mínima é 18°. Por outro lado, sabemos que a função $sen(\alpha)$, sendo α um arco qualquer, varia de -1 a 1. Daí, $T(h)$ vai ser máxima quando $sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = 1$ e mínima quando $sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = -1$, isto é

$sen\left(\frac{\pi}{12}(h - 12)\right) = sen\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi h}{12} - \pi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h = 18$ e

$sen\left(\frac{\pi}{12}(h-12)\right) = sen\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi h}{12} - \pi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow h = 30$, mas como o período da função é 24 horas, o segundo valor corresponde a $h = 6$.

Assim, sabemos que os horários em que as temperaturas serão máxima e mínima são $6h$ e $18h$. Como a temperatura máxima deve acontecer pela manhã e a mínima a tarde, substituiremos os valores na equação por 26° pela manhã, às 6h e 18° às 18h, temos:

$$\begin{cases} 26 = A + B \cdot sen\left(\frac{\pi}{12}(6-12)\right) \\ 18 = A + B \cdot sen\left(\frac{\pi}{12}(18-12)\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 = A + B \cdot sen\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ 18 = A + B \cdot sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 26 = A + B \cdot (-1) \\ 18 = A + B \cdot (1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A - B = 26 \\ A + B = 18 \end{cases} \Rightarrow 2A = 44 \Rightarrow A = 22 \text{ e } B = -4.$$

Gabarito: letra B).

(ENEM 2017 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q179 – C5H19) Um cientista, em seus estudos para modelar a pressão arterial de uma pessoa, utiliza uma função do tipo $P(t) = A + B\cos(kt)$ em que A, B e k são constantes reais positivas e t representa a variável tempo, medida em segundo. Considere que um batimento cardíaco representa o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas.

Ao analisar um caso específico, o cientista obteve os dados:

Pressão mínima	78
Pressão máxima	120
Número de batimentos cardíacos por minuto	90

Tabela 3 – Pressão mínima, máxima e número de BCM
Fonte: INEP

A função $P(t)$ obtida, por este cientista, ao analisar o caso específico foi

A) $\boldsymbol{P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)}$.

B) $P(t) = 78 + 42\cos(3\pi t)$.

C) $P(t) = 99 + 21\cos(2\pi t)$.

D) $P(t) = 99 + 21\cos(t)$.

E) $P(t) = 78 + 42\cos(t)$.

Solução:

Em 5.1.3, discutimos sobre a pressão arterial. Sabe-se que o tempo entre duas sucessivas pressões máximas ou pressões mínimas é o correspondente a um batimento cardíaco, também corresponde ao período da função.

Como A, B e k são constantes reais positivas, notemos que a função $P(t) = A + Bcos(kt)$ atingirá seu valor máximo quando $\cos(kt) = 1$ e seu valor mínimo quando $\cos(kt) = -1$. Daí, segue que:

$$\begin{cases} A + B \cdot (1) = 120 \\ A + B \cdot (-1) = 78 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 120 \\ A - B = 78 \end{cases} \Rightarrow 2A = 198 \quad \Rightarrow A = 99 \text{ e } B = 21.$$

Já que em 60 segundos (1 minuto) acontecem 90 batimentos, então o período da função é

$$p = \frac{2\pi}{k} = \frac{60}{90} \quad \Rightarrow 60k = 180\pi \quad \Rightarrow k = 3\pi.$$

Logo, a função é $P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$.

Gabarito: letra A).

(ENEM 2017 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q146 – C5H22) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.

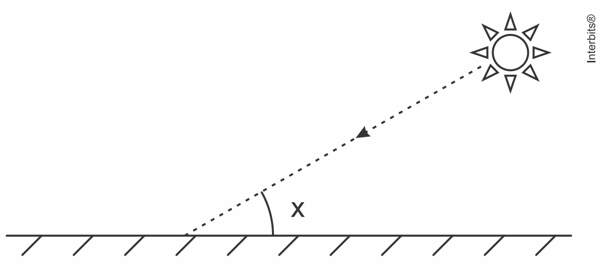


Figura 76 – Raios de luz solar atingindo a superfície
Fonte: INEP

Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

A) 33% **B) 50**% C) 57% D) 70% E) 86%

Solução:

A função intensidade $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ assume seu valor máximo quando $sen(x) = 1$, ou seja, $x = 90°$. Nesse caso teríamos, $I(90°) = k \cdot sen(90°) \Rightarrow I(90°) = k$. Como $sen(30°) = 0{,}5$, quando $x = 30°$, temos:

$I(30°) = k \cdot sen(30°) \Rightarrow I(30°) = 0{,}5k.$

Assim, x variando entre 0° e 90°, $I(x)$ vai variar entre 0 e k.

Logo, a intensidade luminosa quando $x = 30°$ se reduz a 50%.

Gabarito: letra B).

(ENEM 2018 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q145 – C5H20) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a *High Roller*, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

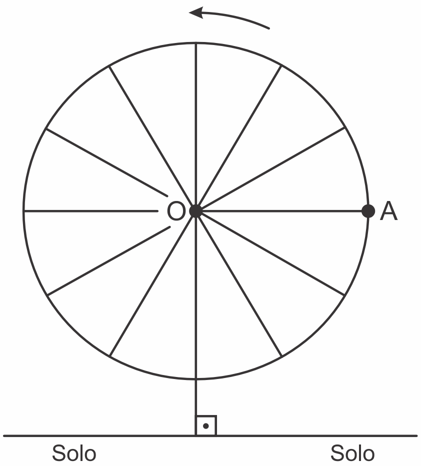


Figura 77 – Ilustração da roda-gigante
Fonte: INEP

A partir da posição indicada, em que o segmento $\overline{\text{OA}}$ se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a *High Roller* no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Seja t o ângulo determinado pelo segmento $\overline{\text{OA}}$ em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

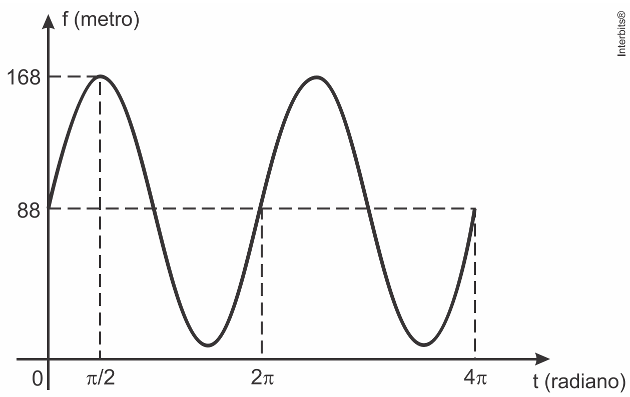


Figura 78 – Gráfico que representa duas voltas completas da roda gigante
Fonte: INEP

A expressão da função altura é dada por

A) $\boldsymbol{f(t) = 80sen(t) + 88}$.

B) $f(t) = 80\cos(t) + 88$.

C) $f(t) = 88\cos(t) + 168$.

D) $f(t) = 168sen(t) + 88\cos(t)$.

E) $f(t) = 88sen(t) + 168\cos(t)$.

$Solu$ção:

Vimos em 5.1.2 que a roda gigante descreve uma expressão do tipo $f(t) = a + bsen(mt)$. Analisando o gráfico, temos que $f(0) = 88$. Daí, temos

$f(0) = a + bsen(m \cdot 0) \quad \Rightarrow 88 = a + bsen(0) \quad \Rightarrow a = 88.$

Ademais, pelo gráfico, sabemos que o período de f é 2π e,

$p = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{|m|}$, portanto, vem que $m = 1$.

Finalmente, como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168$, obtemos

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 88 + bsen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168 \quad \Rightarrow b \cdot 1 = 168 - 88 \quad \Rightarrow b = 80.$

A resposta é $f(t) = 88 + 80sen(t)$.

Gabarito: letra A).

(ENEM 2019 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q180 – C5H22) Um grupo de engenheiros está projetando um motor cujo esquema de deslocamento vertical do pistão dentro da câmara de combustão está representado na figura.

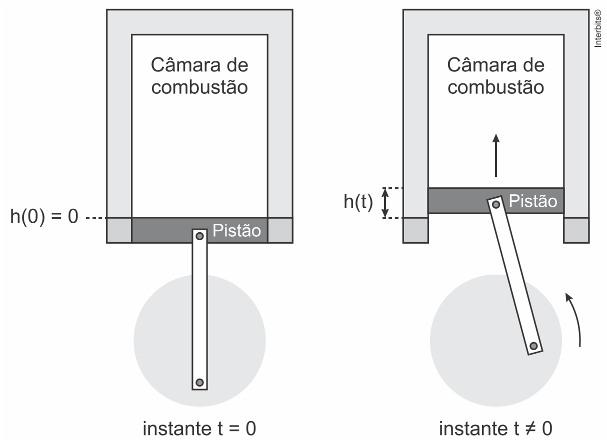


Figura 79 – Esquema do movimento do pistão dentro da câmara de combustão
Fonte: INEP

A função $h(t) = 4 + 4sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$ definida para $t \geq 0$ descreve como varia a altura $h,$ medida em centímetro, da parte superior do pistão dentro da câmara de combustão, em função do tempo t, medido em segundo. Nas figuras estão indicadas as alturas do pistão em dois instantes distintos. O valor do parâmetro $\beta,$ que é dado por um número inteiro positivo, está relacionado com a velocidade de deslocamento do pistão. Para que o motor tenha uma boa potência, é necessário e suficiente que, em menos de 4 segundos após o início do funcionamento (instante $t = 0$), a altura da base do pistão alcance por três vezes o valor de 6 cm. Para os cálculos, utilize 3 como aproximação para π. O menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β, de forma que o motor a ser construído tenha boa potência, é

A) 1. B) 2. C) 4. **D) 5**. E) 8.

$Solução$:

Entendendo que para o motor ter uma boa potência o pistão deve alcançar a altura $6cm$ três vezes em menos de 4 segundos, vamos calcular quais os valores de t satisfazem $h(t) = 6$. Então,

$$4 + 4sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 6$$

$$\Rightarrow sen\left(\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} = sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \;\; ou$$

$$\Rightarrow \frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, sendo $t \geq 0$, temos $\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots\right\}$.

Portanto, como a altura de $6cm$ deve ser atingida 3 vezes, vem que

$$\frac{\beta t}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{13\pi}{6} \Rightarrow \frac{\beta t}{2} = \frac{16\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{16\pi}{3\beta}$$

Ademais, sabendo que a altura de $6cm$ deve ser alcançada pela terceira vez antes de 4 segundos, temos

$\frac{16\pi}{3\beta} < 4 \quad \Rightarrow \quad 12\beta > 16 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \beta > 4$, ou seja, o menor valor inteiro a ser atribuído ao parâmetro β é 5.

Gabarito: letra D).

5.3 Questões de vestibulares

(ACAFE 2014) Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis. Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e T(t), a temperatura (em °C) no instante

t. O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente

A) $6h, 25{,}5°C$ E $10h$.
B) $12h, 27°C$ E $10h$.
C) $\boldsymbol{12h, 27°C}$ E $\boldsymbol{15h}$.
D) $6h, 25{,}5°C$ E $15h$.
$Solução$:

Para calcular o período basta identificar o coeficiente que multiplica a variável, no caso $\frac{\pi}{6}$, e fazer:

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12h.$$

Notemos que a temperatura máxima acontecerá quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\Rightarrow\ T_{Max} = 24 + 3 \cdot 1 \ \Rightarrow\ T_{Max} = 27°.$$

E ainda, $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Rightarrow \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Mas, para $k = 0$, temos $t = -2$, que não é o que queremos. Pondo, agora, $k = 1$, teremos:

$$\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\pi \ \Rightarrow\ \frac{\pi t}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow\ \frac{\pi t}{6} = \frac{10\pi}{6} \ \Rightarrow t = 10.$$

A hora que aconteceu a temperatura é $h = t + 5$, pois as medições iniciaram às 5 horas da manhã.

Portanto, a temperatura máxima acontece as 15 horas.

Gabarito: letra C).

(EsPCEx 2014) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3\left(\left(\cos\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

A) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.
B) a população atinge seu máximo em $t = 6$.
C) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.
D) a população média anual é de 6.000 animais.

E) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6.000 animais.
$Solução$:

Vamos reorganizar a expressão $P(t)$ para ficar mais fácil de identificarmos suas propriedades. Assim, $P(t) = 1000\left(cos\left(\frac{t\pi-2\pi}{6}\right)+5\right) \quad \Rightarrow \quad P(t) = 5000 + 1000cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right)$. Agora, vamos analisar o intervalo da imagem e o período para identificarmos o item correto.

Para o período da função, temos:

$$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12\ m.$$

Teremos a população máxima quando $cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ e mínima quando $cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = -1$. Logo, $P_{Max} = 6000$ e $P_{Min} = 4000$. Ainda, temos que

Max: $cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$, primeiro mês de população máxima.

Min: $cos\left(\frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \cos(\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi t}{6} - \frac{\pi}{3} = \pi \quad \Rightarrow \quad t = 8$, primeiro mês de população mínima.

Note que há um intervalo de 6 meses entre as populações máximas e mínimas. Daí, como a população cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem, identifiquemos cada período do ano. O primeiro intervalo é de $t = 0$ a $t = 2$. Calculemos $P(0)$.

$$P(0) = 5000 + 1000cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 5000 + 1000\left(\frac{1}{2}\right) = 5500.$$

Veja que no intervalo de $t = 0$ a $t = 2$ a população é crescente, ou seja, período chuvoso. De $t = 2$ a $t = 8$ a população decresce, sendo um período de estiagem. O período seguinte é de crescimento, portanto, chuvoso. Esse terceiro período é $t = 8$ a $t = 12$, o que determina 6 meses de período chuvoso, ou dois trimestres.

Gabarito: letra A).

(UFSM 2015) Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por $P = 100 - 20\,cos\left(\frac{8\pi}{3}t\right)$, onde t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco.

Analise as afirmativas:

I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.

II. A pressão em $t = 2$ segundos é de 110 mmHg.

III. A amplitude da função $\mathrm{P(t)}$ é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s)

A) Apenas I.
B) Apenas I e II.
C) Apenas III.
D) Apenas II e III.
E) I, II e III.
$Solução$:

I- Vamos calcular o período da função: $p = \frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{8\pi} = \frac{3}{4}$ do segundo. Como 1 minuto são 60 segundos, a frequência cardíaca desse indivíduo é $60 : \frac{3}{4} = 60 \cdot \frac{4}{3} = 80$. VERDADE!

II- Vamos calcular $P(2) = 100 - 20\,cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot 2\right) = 100 - 20 \cdot cos\left(\frac{16\pi}{3}\right) = 100 - 20 \cdot \left(\frac{16\pi}{3}\right) = 100 - (-10) = 110$. VERDADE!

III- Em 4.4.3, vimos que amplitude é distância entre a crista da onda até o eixo médio. Como o valor dessa função varia de 80 a 120, seu eixo médio passa no 100. Logo, a amplitude é a distância de 100 a 120, que é 20. Perceba que a amplitude é o modulo do coeficiente b, $|-20| = 20$. FALSO!

Gabarito: letra B).

(UFPR 2013) O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura.

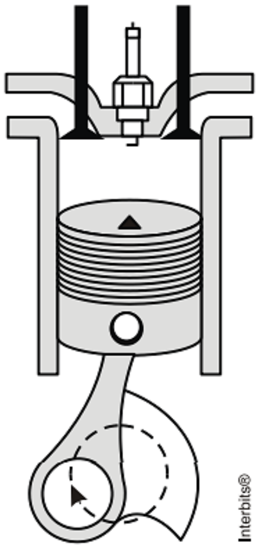


Figura 80 - Ilustração do pistão de um motor
Fonte: NC/UFPR[35]

Suponha que em um instante t, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão: $h(t) = 4sen\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) + 4$.

a) Determine a altura máxima e mínima que o pistão atinge.
b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?
$Solução$:

a) Sendo h_m e h_M o valor mínimo e máximo, respectivamente, da altura do pistão, segue que:

h_m acontece no instante que $sen\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) = -1$, daí, $h_m = 4 \cdot (-1) + 4 \;\; \Rightarrow \;\; h_m = 0$.

Por outro lado, h_M acontece no instante que $sen\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) = 1$, ou seja, $h_M = 4 \cdot (1) + 4 = 8\ cm$.

Logo, a altura máxima e mínima, respectivamente, é 8 cm e 0.

b) Para calcularmos o que se pede devemos calcular o tempo necessário para que o pistão complete um ciclo, isto é, o período. Então:

$\mathrm{P} = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{0,05}} = 2\pi \cdot \frac{0,05}{2\pi} = 0,05\ s$. Portanto, a quantidade q de ciclos completos em um minuto é: $q = \frac{60}{0,05} = 1200$.

[35] Disponível em: http://www.nc.ufpr.br/concursos_institucionais/ufpr/ps2013/provas2fase/PS2013_matematica.pdf.

Logo, em um minuto o pistão completa $\mathbf{1200}$ ciclos.

(FGV-SP) Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800sen\left(\frac{x\pi}{12}\right)$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \leq x < 24$. Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a

A) 600. B) 800. C) 900. D) 1500. **E) $\mathbf{1600}$**.

$Solução$:

Sabemos $-1 \leq sen\left(\frac{x\pi}{12}\right) \leq 1$. Note que para $f(x)$ assumir o valor máximo, $sen\left(\frac{x\pi}{12}\right) = -1$, pois $b = -800$. Então, $f_{max} = 900 - 800(-1) = 1700$. Por outro lado, $f_{min} = 900 - 800(1) = 100$. Portanto, a diferença é:

$D = 1700 - 100 = 1600$.

Gabarito: letra E).

5.4 Questões preparatórias para o SAEB[36]

Aqui listaremos algumas questões que atendem o descritor D30 da matriz de referência do SAEB para as terceiras séries do Ensino Médio, visando ajudar os professores na árdua preparação dos estudantes. Essas questões não vão ser resolvidas aqui, disponibilizaremos apenas o gabarito.

(UNITAU) Indique a função trigonométrica $f(x)$ de domínio $\mathbb{R}$, Im $= [-1, 1]$ e período π que é representada, aproximadamente, pelo gráfico a seguir

[36] Questões do Projeto Medicina. Disponível em: http://projetomedicina.com.br/site/attachments/article/390/matematica_trigonometria_funcoes_trigonometricas.pdf.

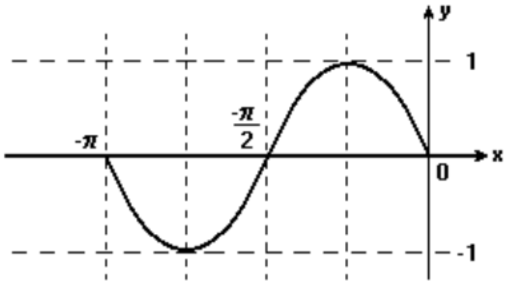


Figura 81 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

A) $y = 1 + cos\, x$. B) $y = 1 - sen\, x$. **C)** $\boldsymbol{y = sen\,(-2x)}$**.**

D) $y = cos\,(-2x)$. E) $y = -cos\, x$.

(FUVEST) A figura a seguir mostra parte do gráfico da função

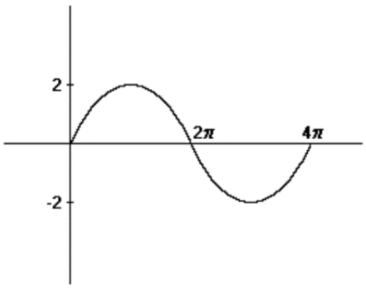


Figura 82 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

A) $f(x) = sen(x)$. **B)** $\boldsymbol{f(x) = 2\, sen\left(\frac{x}{2}\right)}$**.** C) $f(x) = 2sen(x)$.

D) $f(x) = 2sen(2x)$. E) $f(x) = sen(2x)$.

(PUCCAMP) Observe o gráfico a seguir.

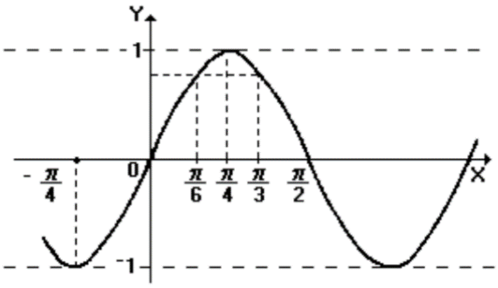


Figura 83 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

A função real de variável real que MELHOR corresponde a esse gráfico é

A) $y = cos\ x.$ B) $y = sen\ x.$ C) $y = cos\ 2x.$ **D)** $\boldsymbol{y = sen\ 2x.}$

E) $y = 2\ sen\ x.$

(**PUCSP**) O gráfico seguinte corresponde a uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a seguir definidas. A qual delas?

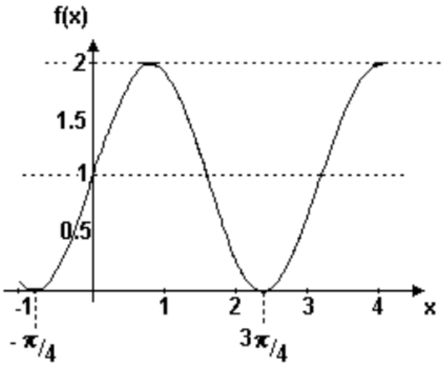


Figura 84 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

A) $\boldsymbol{f(x) = sen2x + 1}$

B) $f(x) = 2senx$

C) $f(x) = cosx + 1$

D) $f(x) = 2sen2x$

E) $f(x) = 2cosx + 1$

(FAAP) Considerando $0 \leq x \leq 2\pi$, o gráfico a seguir corresponde a

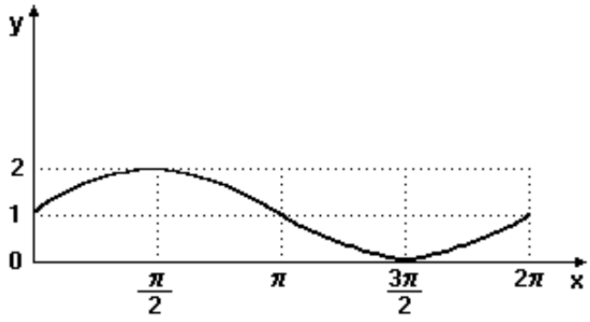


Figura 85 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

A) $y = sen(x + 1)$.

B) $\boldsymbol{y = 1 + sen\, x}$.

C) $y = sen\, x + cos\, x$.

D) $y = sen^2x\ +\ cos^2x$.

E) $y = 1 - cos\, x$.

(UFRS) O gráfico a seguir representa a função real f.

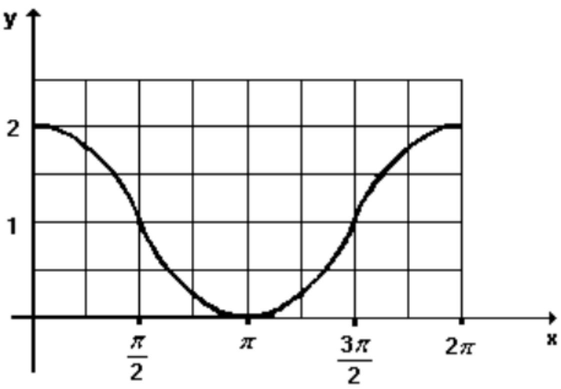


Figura 86 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

Esta função é dada por

A) $f(x) = 1 - cos\, x$. **B) $\boldsymbol{f(x) = 1 + cos\, x}$.** C) $f(x) = cos(x + 1)$.

D) $f(x) = cos(x - 1)$. E) $f(x) = cos(x + \pi)$.

(PUCCAMP) Na figura a seguir tem-se parte do gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = k \cdot cos(tx)$.

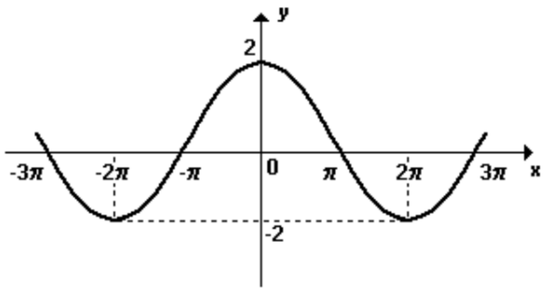


Figura 87 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

Nessas condições, calculando-se $k - t$ obtém-se

A) $-\frac{3}{2}$. B) -1. C) 0. **D)** $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$**.** E) $\frac{5}{2}$.

(UFRS) Se $f(x) = a + b \cdot sen\ x$ tem como gráfico

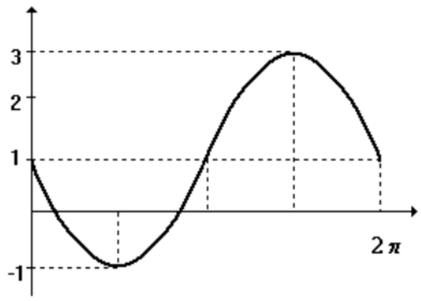


Figura 88 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

então

A) $a = -2\ e\ b = 1$. B) $a = -1\ e\ b = 2$. C) $a = 1\ e\ b = -1$.

D) $\boldsymbol{a = 1\ e\ b = -2}$**.** E) $a = 2\ e\ b = -1$.

(PUCCAMP) Na figura a seguir tem-se o gráfico de uma função f, de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

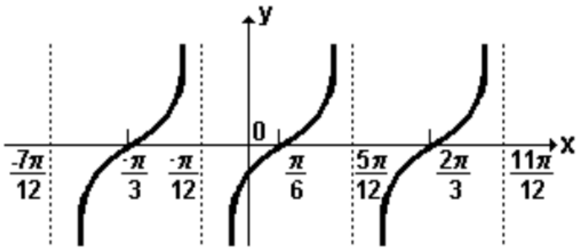


Figura 89 - Gráfico da função
Fonte: Projeto Medicina

É correto afirmar que

A) f é crescente para todo x real tal que $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$.

B) f é positiva para todo x real tal que $0 < x < \frac{5\pi}{12}$.

C) o conjunto imagem de f é $\mathbb{R} - \{0\}$.

D) o domínio de f é $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

E) o período de f é $\frac{\pi}{2}$.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho apresentou uma proposta didática constituída por partes importantes para o Ensino de Matemática. Iniciamos com informações sobre as contribuições de alguns povos para o surgimento e desenvolvimento da Trigonometria, desde meados do século V a.C. até o século XVIII d.C. Depois, exploramos a estrutura do ENEM e do SAEB, principalmente no tocante às suas matrizes de referência, que indicam o que os alunos precisam desenvolver cognitivamente no Ensino Médio (das funções trigonométricas) para conseguirem proficiência suficiente para solucionar os problemas das avaliações. Por fim, o desenvolvimento de um roteiro para ensino das funções trigonométricas, utilizando o *software* GeoGebra, aliado a uma coleção de aplicações e questões já utilizadas em avaliações nacionais.

Esta proposta surgiu com o interesse de colaborar com aqueles professores que lecionam, em turmas de segunda ou terceira série do Ensino Médio, o conteúdo de funções trigonométricas e são sempre perguntados sobre a necessidade de aprender tal conteúdo, pois ele não é de fácil entendimento. Para equacionar o dilema, exploramos ao máximo as ferramentas do GeoGebra, manipulando sua representação algébrica e exibindo os resultados gráficos. Também coletamos situações do cotidiano que são modeladas por funções trigonométricas, como as marés, o movimento de uma roda-gigante, a pressão arterial, o movimento harmônico simples, o movimento de um pêndulo cônico e o jogo de golfe.

Tivemos a oportunidade de fazer uma publicação decorrente desta Dissertação. Em (CARVALHO, J. N. P. De; ANDRADE, 2019), os autores expõem uma proposta para o ensino das funções trigonométricas utilizando o GeoGebra. Nessa proposta, é sugerido aos educadores que contemplem sua oratória exibindo a interpretação geométrica das razões trigonométricas de arcos de circunferência, variando no intervalo $[0,2\pi[$, e os gráficos das funções $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot \cos(c \cdot x + d)$, em que $a,\ b,\ c$ e $d \in \mathbb{R}$ são os coeficientes e b e $c \neq 0$.

Uma perspectiva futura de trabalho é a aplicação desta proposta, ou seja, levar essa proposta ao ambiente escolar e verificar a sua eficácia, bem como adequações e refinamentos. É necessário, também, pensar em outras pesquisas que visem a construção de propostas de ensino utilizando metodologias tecnológicas, almejando ajudar aqueles professores que até pensam em fazer algo diferente, mas carecem de tempo para esses longos planejamentos. Mais uma vez afirmamos que este trabalho não é uma proposta sólida, mas sim adaptativa, isto é, o professor pode organizá-la de acordo com o público alvo, montando seu próprio material, retirando ou acrescentando o que achar necessário. Alguns temas que podem ser pesquisados é:

- Funções Exponenciais e Logarítmicas;

- Matrizes e Determinantes;

- Geometria Euclidiana: Cevianas e pontos notáveis do triângulo;

- Geometria Analítica: equação da reta.

Portanto, esperamos que este material seja útil nas atividades docentes dos professores que forem lecionar o conteúdo de funções trigonométricas e estejam buscando algo que possa facilitar a conexão com os alunos, visando uma melhoria na sua metodologia de ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática - Volume 2**. 1. ed. São Paulo: Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida por Editora Moderna, 2010.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática - teoria e prática**. 1. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2015.

BORBA, M. De C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BORGES; NICOLAU. Os Fundamentos da Física: Leituras do Blog. **Eratóstenes**, 2010. Disponível em: <http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/09/blog-post.html>. Acesso em: 7 abr. 2020.

BORTOLOSSI, H. J.; REZENDE, W. M.; PESCO, D. U. Instituto Geogebra no Rio de Janeiro. 2016. Disponível em: <http://www.geogebra.im-uff.mat.br/>. Acesso em: 6 jan. 2020.

BRASIL. Ministério Da Educação. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira Matriz. **Matriz de referência ENEM**, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf>. Acesso em: 12 out. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**, 2015. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2020.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. MEC. **Cartilha SAEB 2019**, 2019. p. 22.

BRITO, A. De J.; MOREY, B. B. Geometria e Trigonometria: dificuldades dos professores de Matemática do Ensino Fundamental. In: John A. Fossa (org). **Presenças. Presenças Matemáticas**, 2004. v. EDUFRN, p. 9–33.

CARMO, M. P. Do; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria/Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

CARVALHO, J. N. P. De; ANDRADE, L. H. F. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO USANDO O GEOGEBRA. Mossoró - RN: Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Núcleo de Educação à distância, 2019.

CIERS. Historia de la Trigonometría. **YouTube**, 2017. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Xh73G2rVFfo&t=51s>. Acesso em: 16 jun. 2020.

CORRADI, D. K. S. **Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno : uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio**. Ouro Preto - MG: Dissertação de Mestrado em Educação Matemática.

Universidade Federal de Ouro Preto, 2013.

COSTA, N. M. L. Da. A História da Trigonometria. Brasília: **Educação Matematica em Revista**, mar. 2003. p. 60–69.

DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. ANÁLISE DAS DIFICULDADES APRESENTADAS PELOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM TRIGONOMETRIA. Curitica, PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2011. p. 14.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali: Peter Lang, 2004.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5ª ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Editora UNICAMP, 2011.

F22V8. História Trigonometria. **YouTube**, 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QMIDOUpD2aE>. Acesso em: 16 jun. 2020.

FEIJÓ, R. S. A. A. **Dificuldades e obstáculos no aprendizado de Trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal**. Brasília - DF: Dissertação de Mestrado em Matemática. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Universidade de Brasília, 2018.

FOSSA, J. A. Ensaios sobre a Educação Matemática. Belém: **EDUEPA**, 2001.

______. **Matemática e medida: três momentos históricos**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física/SBHMat, 2009.

GOMES, S. C. **Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino de Trigonometria numa abordagem histórica**. Natal - RN: Dissertação de Mestrado. Departamento de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física II**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos Científicos, 1996.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar 3: Trigonometria**. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

______ *et al.* **Matemática: ciência e aplicações, vol. 2**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

IMPA. Sobre Trigonometria. **YouTube**, 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=MmJJjlOfyYE>. Acesso em: 16 jun. 2020.

INEP. SAEB: Evidências da Edição 2017. **Sistema de Avaliação da Educação Básica-SAEB**, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=94161-saeb-2017-versao-ministro-revfinal&category_slug=agosto-2018-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 10 dez. 2019.

______. PISA 2018 revela baixo desempenho escolar em leitura, matemática e ciências no Brasil. 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/pisa-2018-revela-baixo-desempenho-escolar-em-leitura-matematica-e-ciencias-no-brasil/21206>. Acesso em: 8 set. 2020.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. Campinas: Editora Papirus, 2009.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

______ *et al.* **A Matemática do Ensino Médio - Volume 1**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LORENZATO, S. Os “Por Quês” Matemáticos dos Alunos e as Respostas dos Professores. **Pro-Posições**, mar. 1993. v. 4, n. 1, p. 73–77.

MACHADO, V.; PINHEIRO, N. A. M. Problema gerador de discussões: uma metodologia para o ensino em Engenharia. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, 2009. v. 2, n. 1, p. 31–49.

MARTINEZ, C. Infobservador: La medida de un hombre: Tales de Mileto. 2013. Disponível em: <https://infobservador.blogspot.com/2013/05/la-medida-de-un-hombre-tales-de-mileto.html>. Acesso em: 28 mar. 2020.

MATEMÁTICARIO. ASTRONOMIA: Eratóstenes e a Circunferência da Terra. **YouTube**, 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Upgd_NzwN9g>. Acesso em: 13 jun. 2020.

______. Como calcular a distância da Terra até a Lua com Hiparco de Nicéia? (ft. Canal da Física). **YouTube**, 2015. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=OJKQHGu5N_I>. Acesso em: 13 jun. 2020.

MATEMÁTICASEMTRAUMA. Origem do termo seno. **YouTube**, 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=QgTdIZef4Hw&t=147s>. Acesso em: 16 jun. 2020.

MIGUEL, A.; MIORIM, M. Â. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2004.

OLIVEIRA, F. C. DE. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de Trigonometria por meio de atividades**. Natal - RN: Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2006.

ONUCHIC, L. De La R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. Rio Claro: **Bolema - Mathematics Education Bulletin**, 2011. v. 25, n. 41, p. 73–98.

PEREIRA, M. **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje**. Rio de Janeiro: Dissertação de Mestrado. Centro de Ciências Exatas e Tecnologia. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2013.

PROFSOLUÇÃO. Teorema de Tales e a pirâmide. **YouTube**, 2013. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=JuJ7l4gidoI>. Acesso em: 13 jun. 2020.

RABELO, M. L. **Avaliação Educacional: fundamentos, metodologias e aplicações no contexto brasileiro**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

ROQUE, T. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 1. ed.

São Paulo - SP: Zahar, 2012.

______; CARVALHO, J. B. P. De. **Tópicos de História da Matemática**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2019.

SALAZAR, D. M. **GeoGebra e o estudo das funções trigonométricas no Ensino Médio**. Juiz de Fora - MG: Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015.

SILVA, A. P. P. Do N. **A leitura de fontes antigas e a formação de um corpo interdiciplinar de conhecimentos: um exemplo a partir do Almagesto de Ptolomeu**. Natal - RN: Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2013.

SIQUEIRA, R. A. N. De. **Tendências da Educação Matemática na formação de professores**. Ponta Grossa - PR: Monografia de Especialização. Departamento de Pesquisa e Pós-Graduação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2007.

SOUSA, G. C. De (Org.). **Aliança entre História da Matemática e Tecnologias via Investigação Matemática: Reflexoões e práticas**. 1ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física/SBHMat, 2020.

SOUZA, J. **Novo Olhar Matemática 2**. 2. ed. São Paulo: FTD, 2013.

SOUZA, J. R. De; GARCIA, J. Da S. R. **#contato Matemática 2**. 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.

APÊNDICE

Aqui iremos inserir um roteiro para a construção das apresentações no GeoGebra, visando facilitar o trabalho dos docentes caso eles não tenham habilidade com *o software*. No Apêndice A, contém sugestões de vídeos sobre a História da Trigonometria. No Apêndice B, teremos a construção da circunferência trigonométrica e as razões seno, cosseno e tangente. No Apêndice C, será as funções trigonométricas do tipo $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$, utilizando controles deslizantes para os coeficientes a, b, c e d. Por fim, no Apêndice D, disponibilizamos um modelo de material para os alunos, nele está presente um pouco de História da Trigonometria, explicação do conteúdo, algumas das aplicações usadas no Capítulo 5 e atividades resolvidas e propostas.

APÊNDICE A – Sugestões de vídeos que abordam a História da Trigonometria

O proposito deste tópico é sugerir alguns vídeos que exploram a História da Trigonometria. É interessante que os professores se apropriem dos fatos para compartilhar com os alunos.

https://www.youtube.com/watch?v=MmJJjlOfyYE: neste vídeo, João Bosco Pitombeira conta um pouco da história do desenvolvimento da Trigonometria (IMPA, 2015).

https://www.youtube.com/watch?v=OJKQHGu5N_I: coube a Hiparco de Nicéia calcular a distância entre a terra e a lua. Este vídeo mostra quais artifícios foram utilizados pelo grego (MATEMÁTICARIO, 2015).

https://www.youtube.com/watch?v=JuJ7l4gidoI: o cálculo de distâncias inacessíveis é sempre algo apreciável. Neste vídeo, conta-se como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia (PROFSOLUÇÃO, 2013).

https://www.youtube.com/watch?v=Upgd_NzwN9g: neste vídeo o professor Rafael Procópio explica como Eratóstenes calculou a circunferência da terra (MATEMÁTICARIO, 2013).

https://www.youtube.com/watch?v=QgTdIZef4Hw&t=147s: neste vídeo, o professor Ocimar explana a relação entre as cordas e seus os arcos correspondentes ao qual Hiparco de Nicéia organizou em uma tabela. Também explica a contribuição dos hindus no estudo da meia corda e a origem da palavra seno (MATEMÁTICASEMTRAUMA, 2019).

https://www.youtube.com/watch?v=Xh73G2rVFfo&t=51s: este vídeo trata das contribuições à Trigonometria, desde os babilônios e gregos até os europeus no século XVIII (CIERS, 2017).

https://www.youtube.com/watch?v=QMIDOUpD2aE: a participação dos hindus no desenvolvimento da Trigonometria é contada neste vídeo, a busca incansável pela forma de calcular o seno de qualquer ângulo (F22V8, 2016).

APÊNDICE B – Noções do GeoGebra e passo a passo para a construção da circunferência trigonométrica com a representação das razões e gráficos das funções seno, cosseno e tangente.

Olá, vamos começar um breve tutorial de como criar apresentações no GeoGebra para o trabalho docente com as funções trigonométricas. Vamos adotar uma sequência de passos que vão auxiliar na execução dessa atividade, facilitando ao público leigo um maior entendimento sobre o GeoGebra e as possibilidades que podem ser executadas dentro do software. Primeiramente, para fazer o *download* basta acessar o link: https://www.geogebra.org/download. Em seguida, escolher a opção GeoGebra Clássico 6.

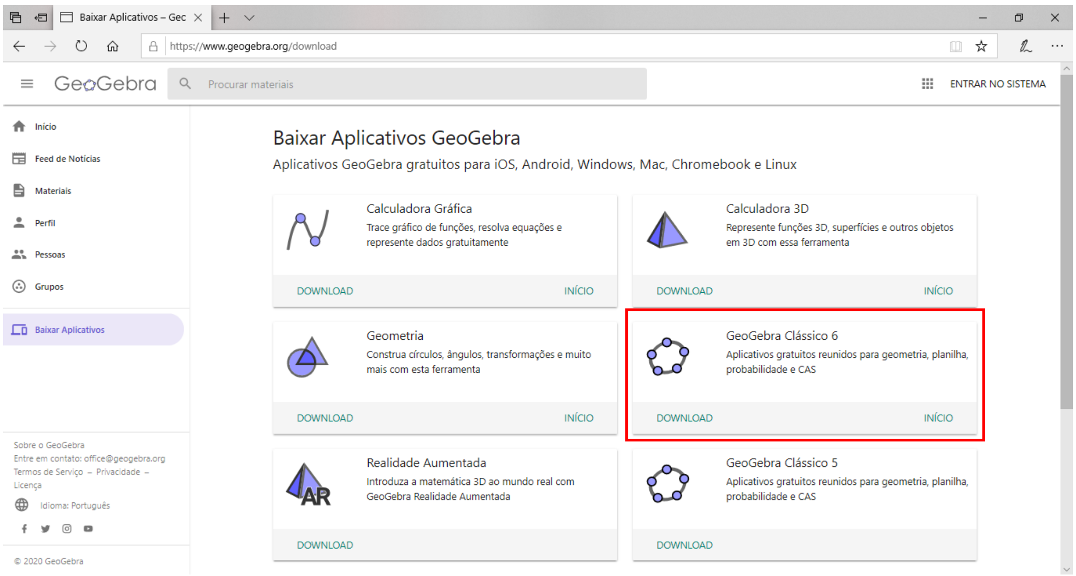


Figura 1 - Página de download do GeoGebra
Fonte: Site GeoGebra

Após o *download*, abra o *software* em seu *notebook* ou *desktop* para iniciarmos com o tutorial. Com o *GeoGebra* aberto, você vai encontrar a tela a seguir.

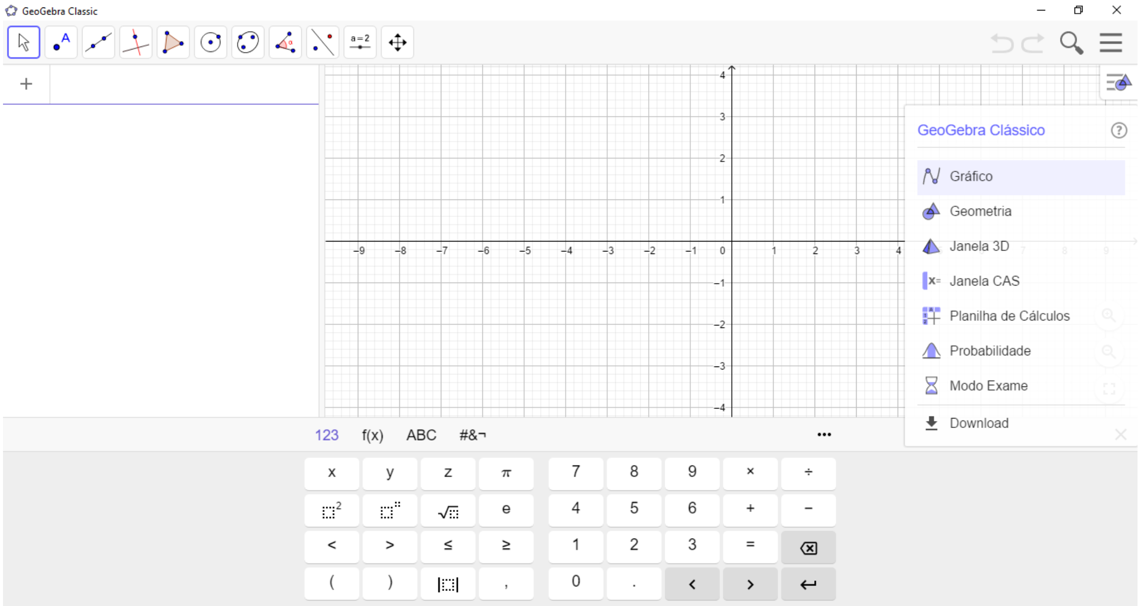


Figura 2 – Interface do *software*

Na parte superior você vai encontrar algumas das ferramentas existentes dentro do *software.* Essas são as ferramentas que utilizaremos para as construções, desde pontos a botões de exibir\esconder objetos.

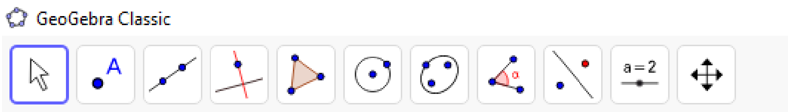


Figura 3 – Barra de Ferramentas do GeoGebra

Na Figura 4, está presente a janela de álgebra, local reservado para conter todos os itens utilizado dentro do seu projeto, que são pontos, retas, funções, dentre outros. Note que podemos organizar esses itens de acordo com a dependência, tipo de objeto, ordem de construção ou camada.

Figura 4 - Opções de organização dos itens

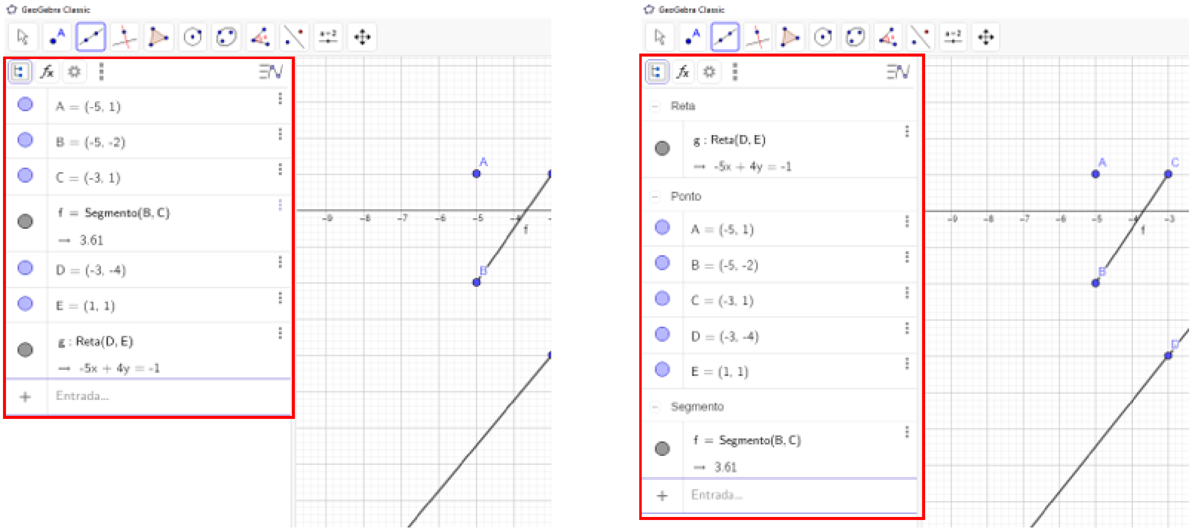
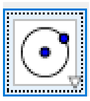


Figura 5 – Janela de álgebra com alguns objetos

Para fins didáticos, sugerimos que adotem a opção “Tipo de Objeto”, como na representação da direita na Figura 5. O campo “Entrada” é o local destinado para a inserção de comandos, plotagem de funções e afins.

Com essa breve introdução, vamos para o que mais interessa.

Nesse passo a passo vamos abordar a construção do círculo trigonométrico com a interpretação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente.

1- Vamos construir um círculo centrado na origem do plano cartesiano, ponto (0,0), e de raio 1. Para execução desse passo existe pelo menos duas maneiras, que são a utilização da barra de Entrada de comandos (nesse caso deverá ser inserido a função $x^2 + y^2 = 1$) ou também a utilização da barra de ferramentas. Para construir, vá até a barra de ferramentas e procure o ícone que está representado ao lado.  Escolha a opção Círculo dados Centro e Raio.

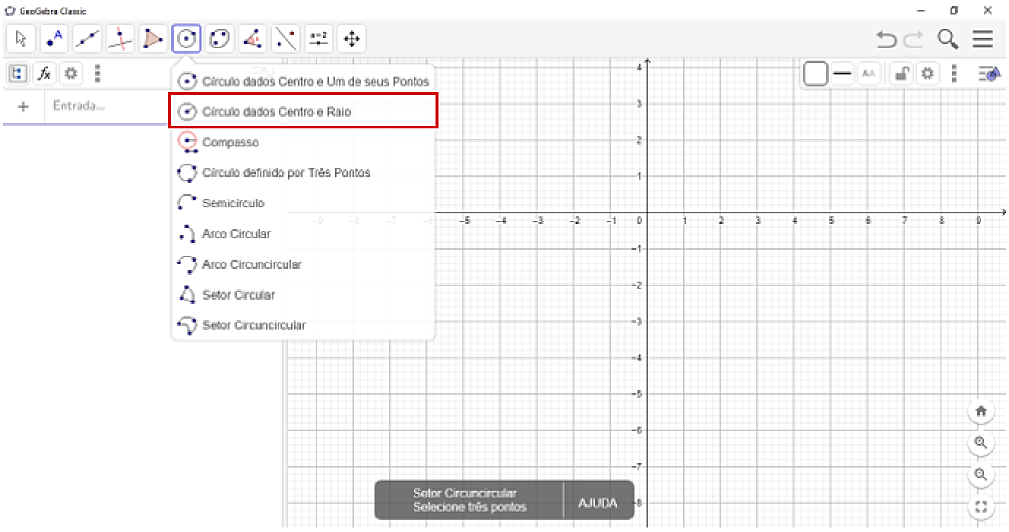


Figura 6 – Opções de construção de regiões circulares

Com a ferramenta selecionada dê um clique na origem do plano cartesiano, que possui coordenadas (0, 0), perceba que ao clicar na origem vai aparecer a seguinte caixa de diálogo.

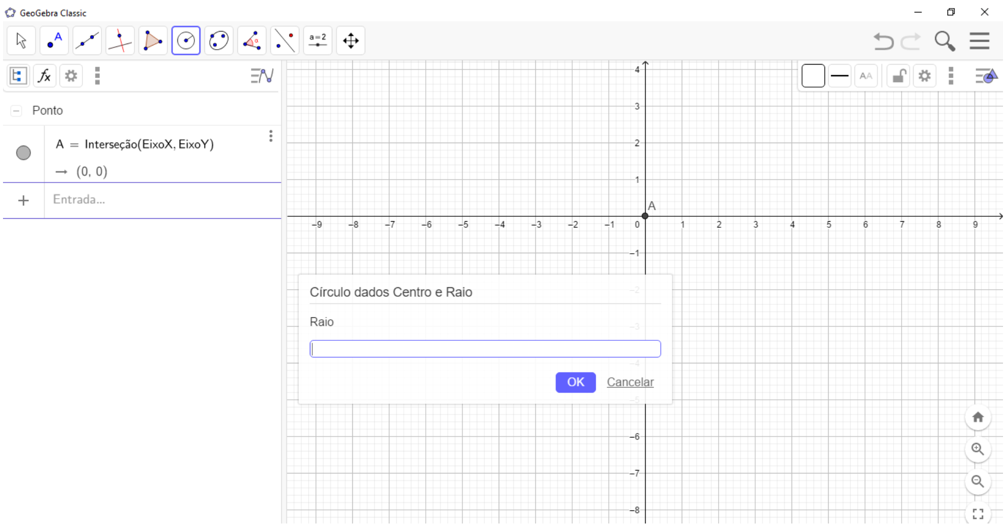


Figura 7 – construção de um círculo dados centro e raio

Daí, você vai determinar o comprimento do raio do círculo. Peço que adote o comprimento de raio 1. Feito isso, perceba que o GeoGebra vai gerar um círculo com centro na origem do plano cartesiano e de raio 1, como da figura abaixo.

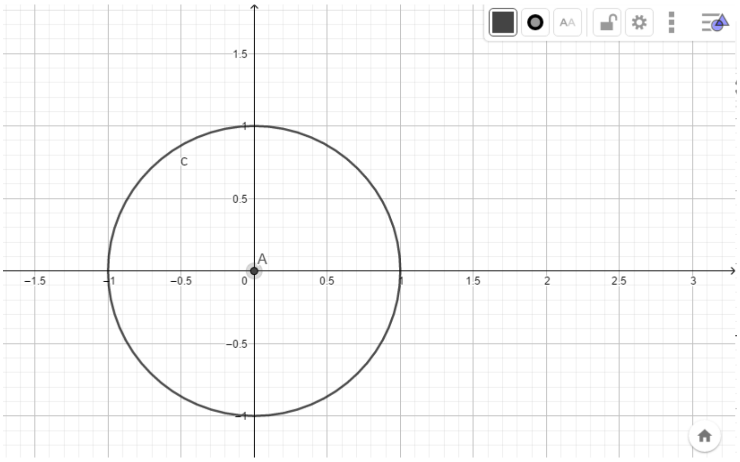


Figura 8 - Círculo trigonométrico

Caso queira renomear os objetos, basta clicar sobre ele com o botão direito do mouse e terá as opções apresentadas como na Figura 9.

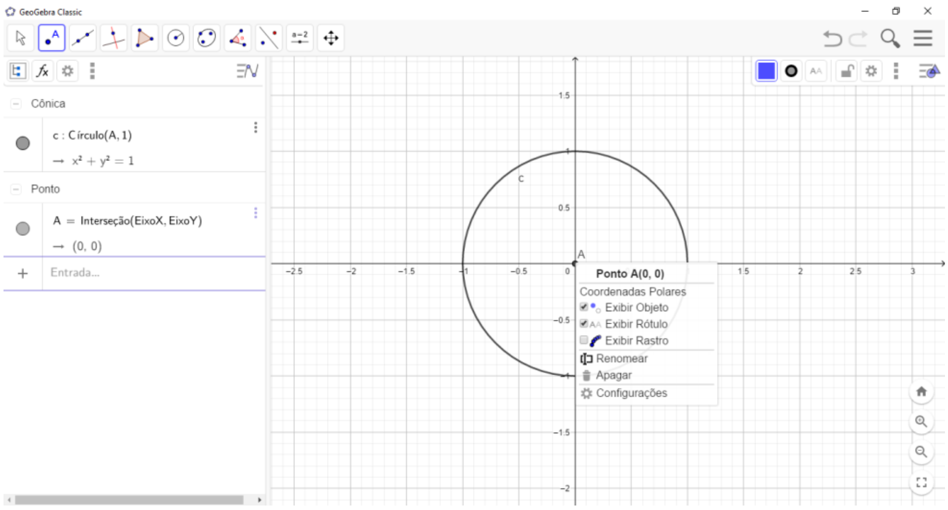
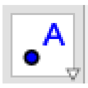


Figura 9 – Opções de organização dos objetos

2- Com a circunferência já feita vamos para a construção de um ponto sobre ela, que vai estar nos auxiliando nas construções das razões trigonométricas no círculo. A ferramenta Ponto está localizada na barra de ferramentas e possui o seguinte ícone . Com a ferramenta "Ponto" ativada, clique sobre a circunferência e perceba que o GeoGebra vai criar o ponto. A Figura 10 mostra as opções desse ícone e o círculo com o ponto.

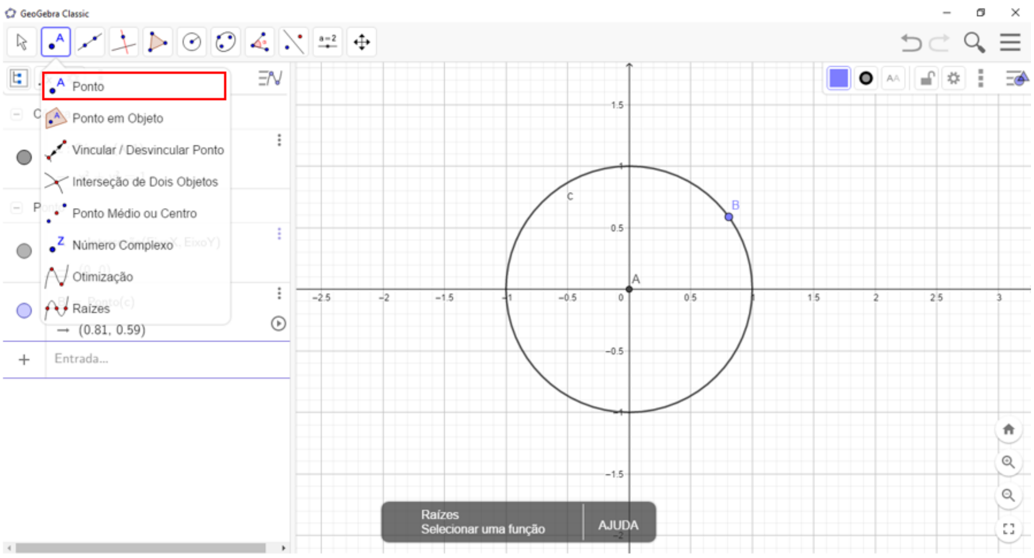
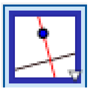


Figura 10 – Ponto sobre o círculo

3- Agora, vamos criar duas retas perpendiculares que passam pelo ponto B. Para isso, vamos até a barra de ferramenta e selecione o ícone  "Reta Perpendicular". A utilização da ferramenta é bastante simples e prática. Para a construção, basta escolher um ponto, no caso é o ponto B, e depois a reta que você deseja que o GeoGebra crie outra reta perpendicular a ela. Clique no ponto B e depois no eixo das abcissas (eixo X). Depois, faça os mesmos passos com o eixo das ordenadas (eixo Y). Assim, teremos a Figura 11.

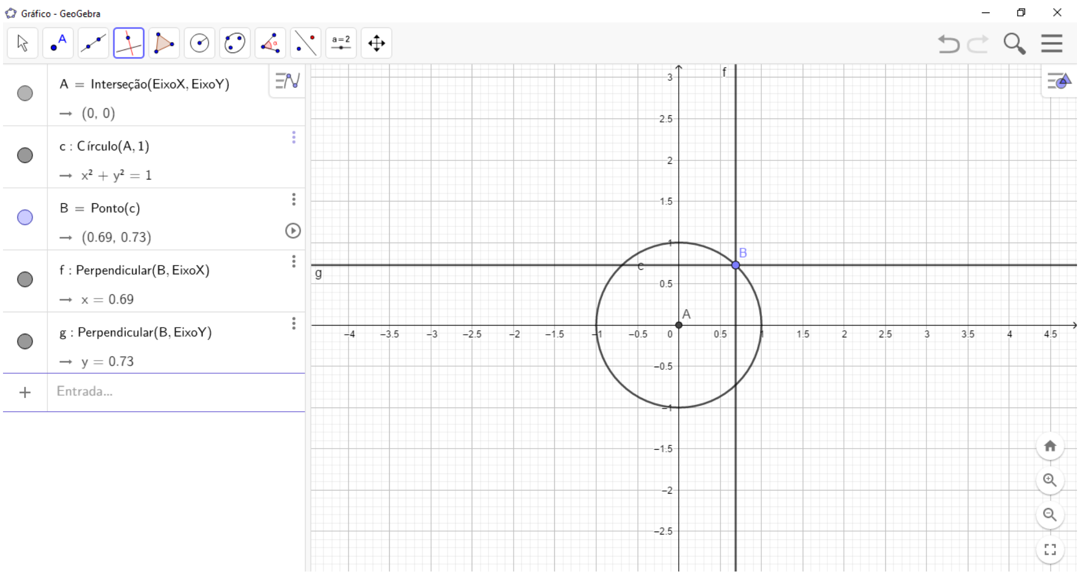
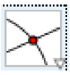


Figura 11 - Construção das Retas Perpendiculares

<u>Observação:</u> quando uma ferramenta é selecionada no GeoGebra e você quer usá-la novamente, não precisa repetir a ação de selecionar.

4- Agora, vamos determinar os pontos de interseção entre as retas perpendiculares e os eixos X e Y. Para isso, devemos utilizar a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”, que tem o ícone . Com a ferramenta selecionada, você precisa clicar sobre as retas que você deseja que o GeoGebra crie o ponto de interseção. Nesse caso, clique sobre a reta f e depois clique sobre o eixo X. Da mesma forma com a reta g e o eixo Y. A Figura 12 mostra os pontos de interseção C e D.

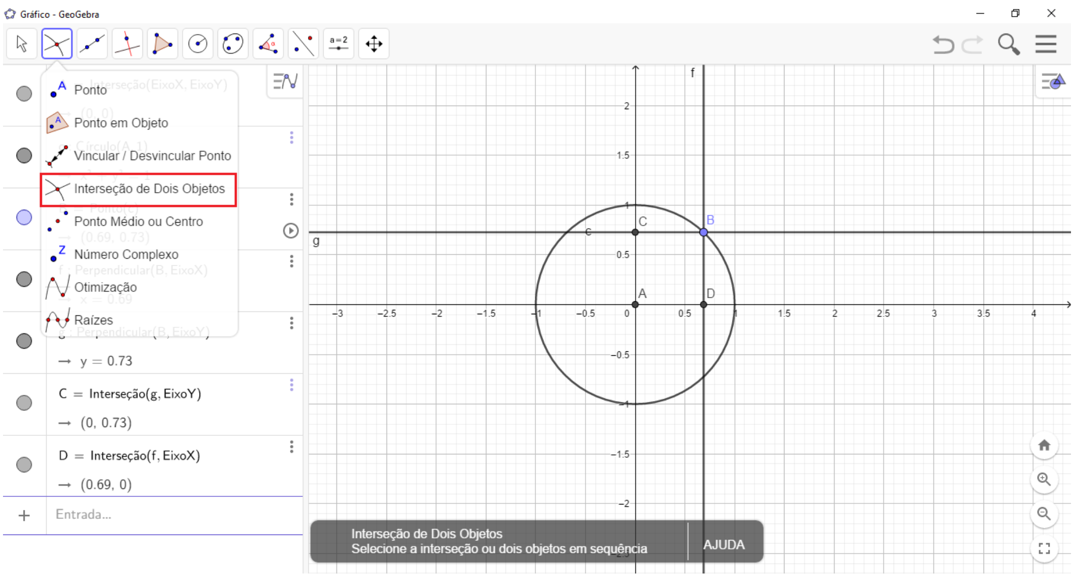
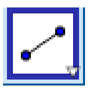


Figura 12 - Pontos de interseção

5- Agora vamos criar segmentos de retas que vão ser a hipotenusa e os catetos adjacente e oposto de um triângulo retângulo interno a circunferência, para isso vamos utilizar a ferramenta “Segmento”, cujo ícone é . Para utilizar, você vai determinar a origem e a extremidade dos segmentos, nesse caso vamos usar os pontos criados até aqui. Vamos construir os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$.

OBS: os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ vão ser os catetos adjacente e oposto, respectivamente, e a hipotenusa vai ser o segmento $\overline{AB}$.

Com a ferramenta “Segmento” selecionada, clique sobre o ponto A e depois sobre o ponto B, temos a construção representada pela Figura 13.

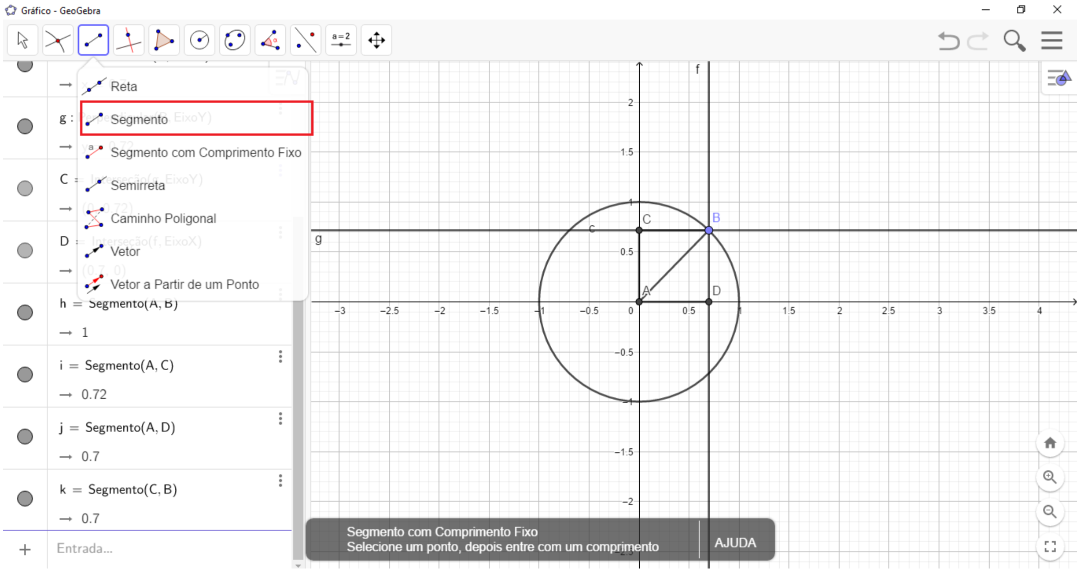


Figura 13 - Construção de Segmentos

6- Vamos agora construir o eixo T, que é uma reta perpendicular ao eixo X passando pelo ponto E (1,0). A finalidade dessa construção é representar o eixo da tangente dos arcos, veja a Figura 14.

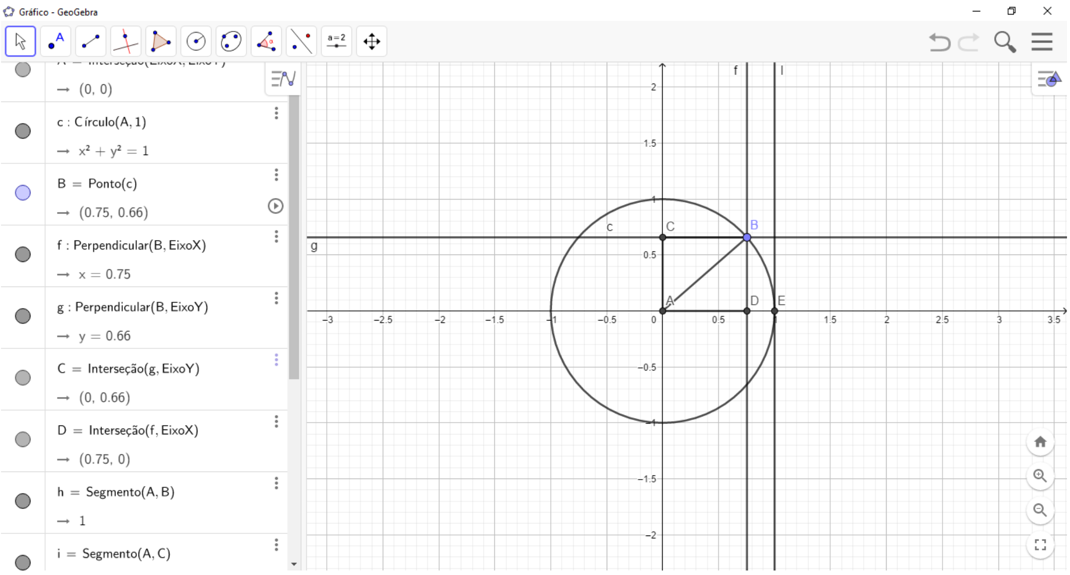
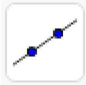


Figura 14 - Eixo das Tangentes

Como sabemos, para determinarmos a tangente de um arco devemos prolongar o segmento $\overline{AB}$ até interceptar o eixo T. Para fazemos isso, vamos criar uma semirreta de origem no ponto A passando por B.

7- Ative a ferramenta “Reta” no ícone  e selecione dois pontos, o ponto A e o ponto B. Observe que essa reta tem a mesma direção e sentido do segmento $\overline{AB}$. Daí, temos a construção na Figura 15.

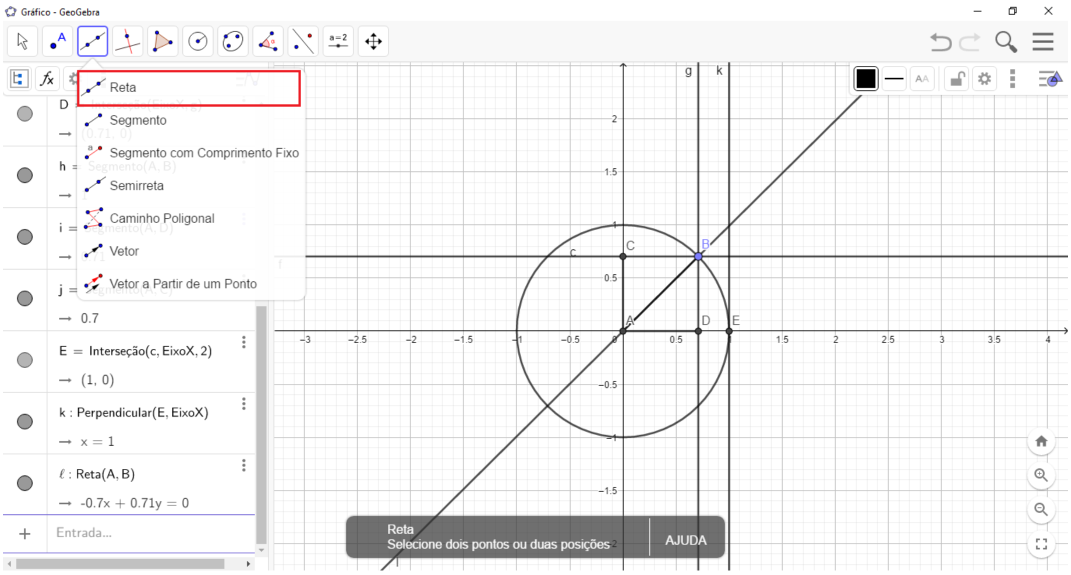


Figura 15 - Construção de uma semirreta

8- Agora, ative a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” para determinar o ponto F de interseção entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e o eixo T. Feito isso, vamos criar o segmento de extremidades E e F. Com isso, temos a construção dos segmentos ao qual utilizamos para representar as razões trigonométricas na circunferência.

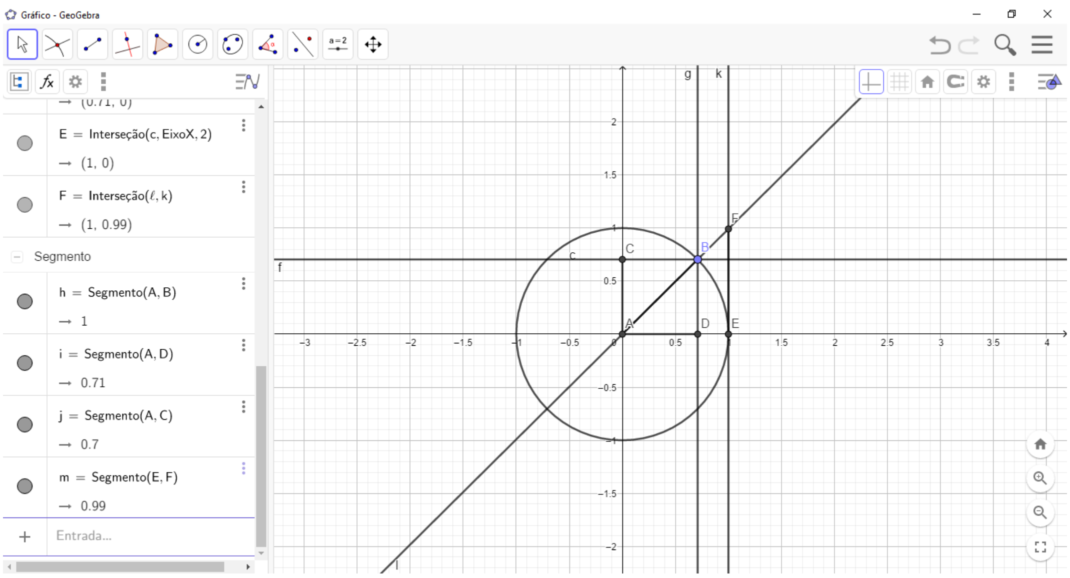


Figura 16 – Construção dos segmentos

9- Agora, para auxiliar na compreensão, vamos modificar as cores desses segmentos. O GeoGebra permite mudarmos o designer dos objetos, ajudando o estudante a ter uma maior visibilidade.

Clique com o botão direito do mouse sobre qualquer segmento e selecione a opção configuração. perceba que no canto superior direito vai surgir um painel. Você poderá modificar o nome, a cor do objeto, a espessura, entre outras características.

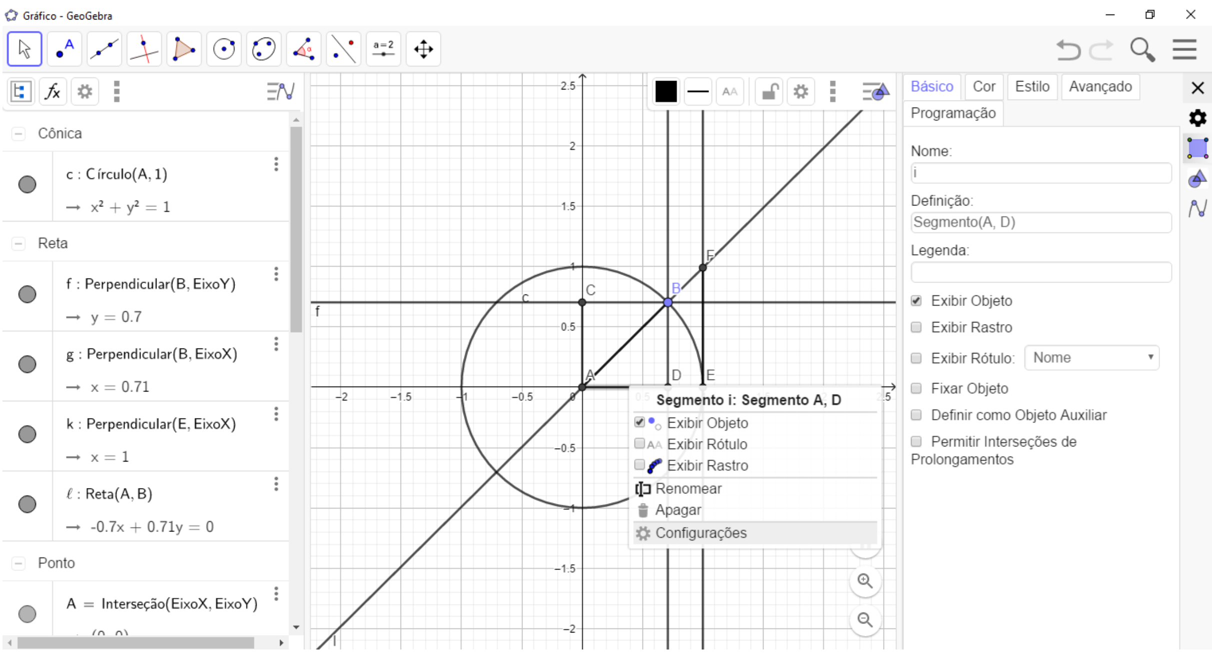


Figura 17 – Opções de modificaçao dos objetos

Fique à vontade para deixar a apresentação como queira.

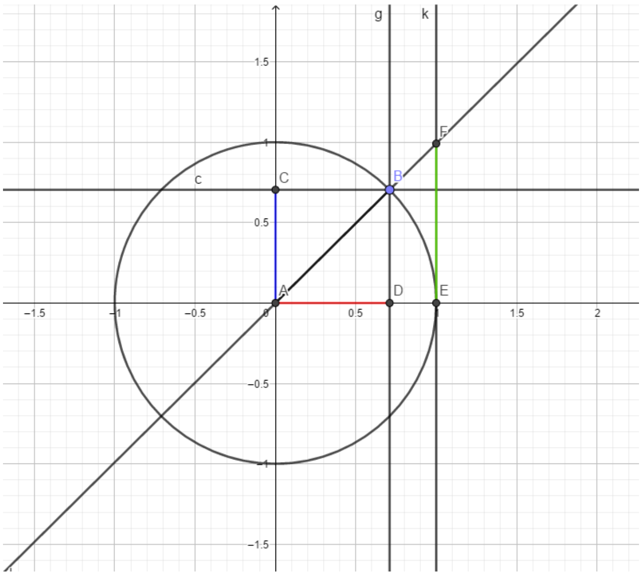
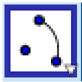


Figura 18 – Alteração das cores dos objetos

10- Dando continuidade a construção do círculo trigonométrico, vamos construir um arco circular. Para isso, vamos selecionar a ferramenta "Arco Circular", no seguinte ícone . Essa ferramenta vai pedir que você determine três pontos para que o GeoGebra possa criar um arco. Daí, selecione primeiro o ponto A, depois o ponto E e, por fim, o ponto B. A Figura 19 mostra o arco circular.

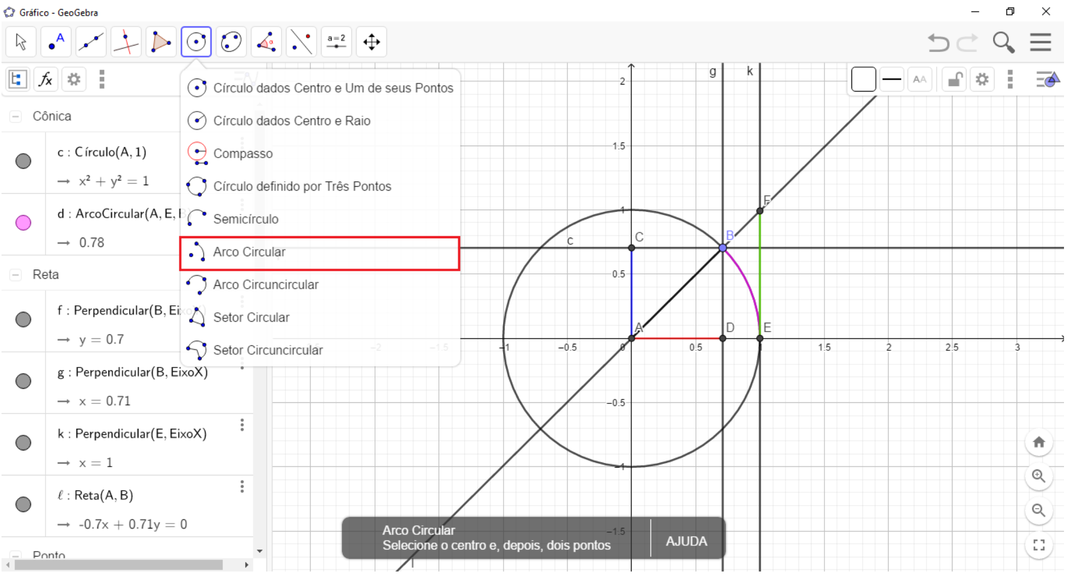


Figura 19 – Arco circular

Note que já configuramos a cor do arco circular. Se você selecionar a opção “Mover”, cujo ícone é , ao clicar no ponto B e move-lo sobre a circunferência trigonométrica, o arco circular amplia ou diminui seu comprimento.

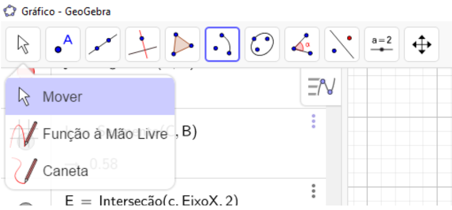


Figura 20 – Opção mover objetos

11- Com todos os passos anteriores feitos, vamos para a construção das funções. Para isso, precisamos abrir a “Janela da Visualização 2”, ela pode ser ativada no campo de opções de visualizações, ver Figura 21.

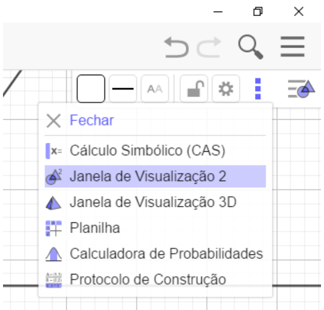


Figura 21 – Opções de visualização

Perceba que ao selecionar a “Janela de Visualização 2”, haverá uma alteração na interface da área de trabalho do GeoGebra. Obtemos a apresentação que consta na Figura 22.

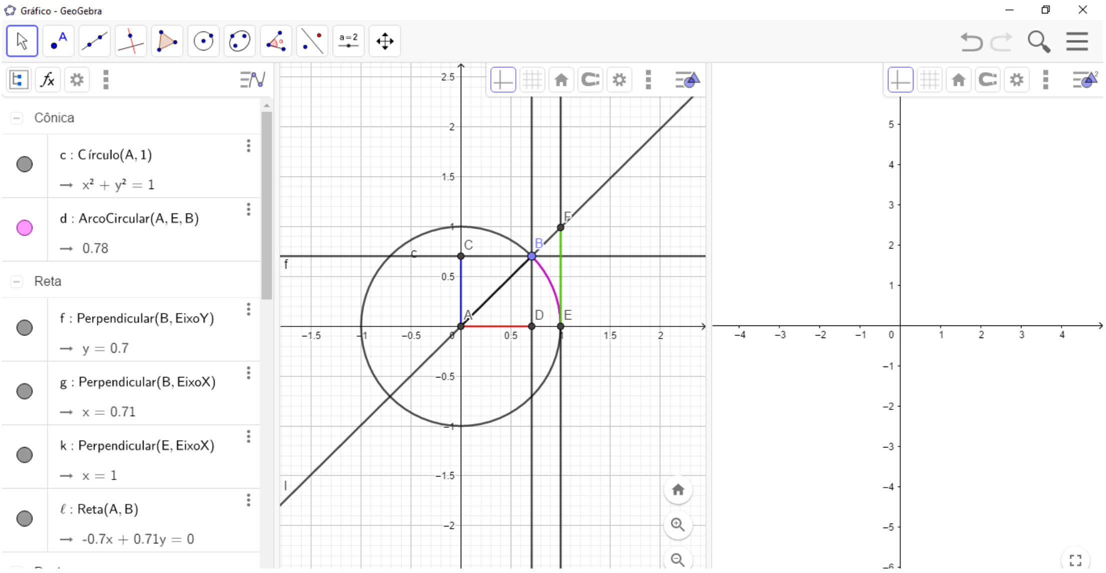


Figura 22 – Janelas de visualização

12- Agora, vamos trabalhar na segunda janela de visualização. Criaremos um ponto que vai representar o comprimento do arco circular. Para isso, acione a ferramenta “Ponto” e insira em qualquer localização. Com a ferramenta “Mover”, clique duas vezes com o botão esquerdo do mouse sobre o novo ponto, Ponto G, para determinarmos suas coordenadas. Aparecerá a janela representada pela Figura 23.

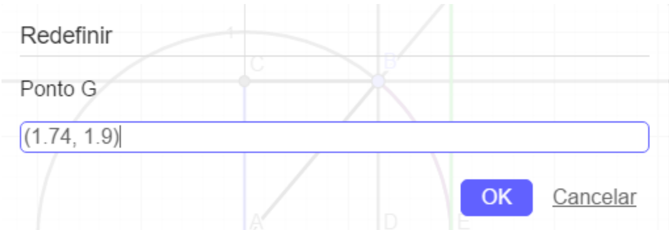


Figura 23 – Redefinição das coordenadas de um ponto

Coloque as seguintes coordenadas: (d,0). A justificativa da coordenada d é porque cada objeto que criamos no GeoGebra é associada a uma letra e, como se vê na Figura 24, d é o arco circular.

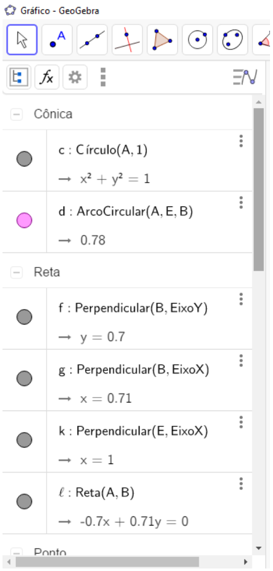


Figura 24 – Denominação dos objetos

Note que, ao passo em que manipulamos o ponto B, tanto o comprimento do arco circular, como o ponto G na janela 2, alteram.

Em seguida, vamos criar um segmento em que uma das extremidades é a origem do sistema cartesiano e a outra é o ponto G.

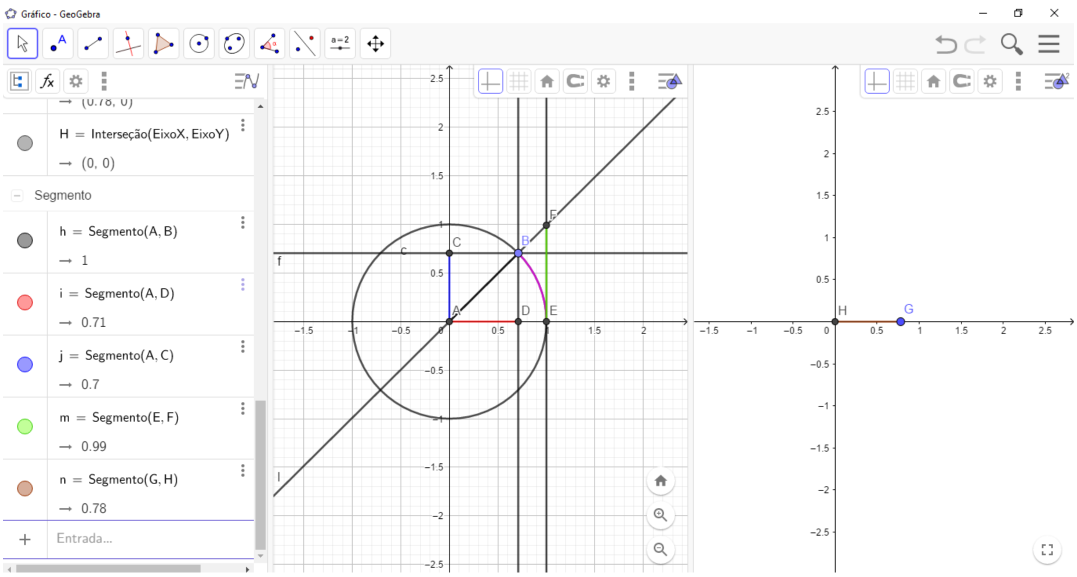


Figura 25 – Construção nas duas janelas

13- Agora, vamos inserir as funções seno, cosseno e tangente. Para isso, vamos usar a barra de entrada de comando colocando, inicialmente, a seguinte expressão:

Figura 26 – Entrada da função seno

Faça isso para as outras funções e perceba que o GeoGebra cria o gráfico da função. Lembre-se que todos esses passos são na janela de visualização 2. Para não ficar muito carregado de gráficos instantaneamente, você pode desativar as funções de forma temporária clicando sobre as bolinhas azul, vermelho e verde ao lado delas na Janela de Álgebra. Para ativar novamente bastas clicar na bolinha de novo. Ver a Figura 27.

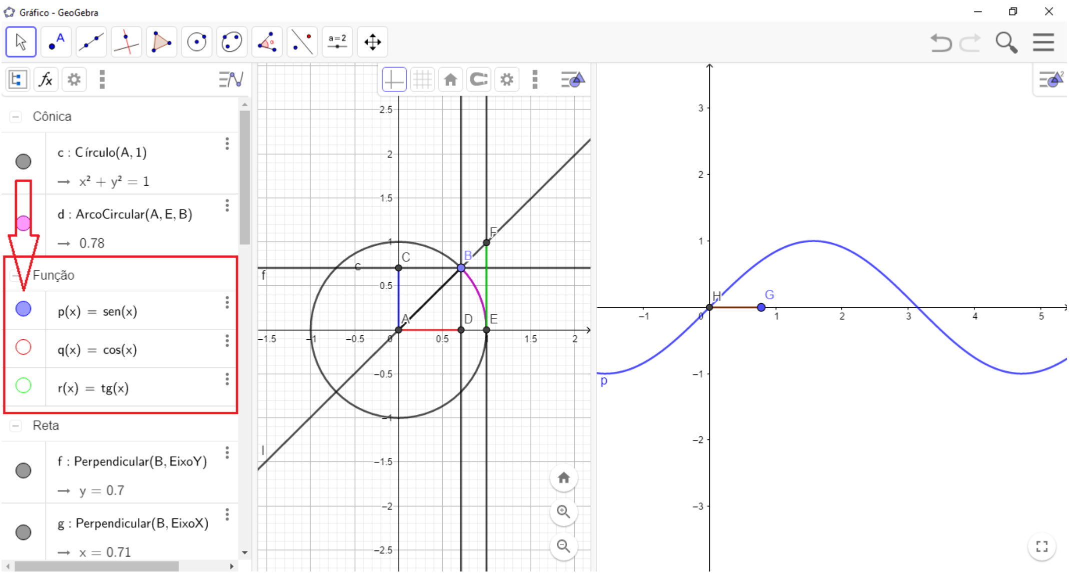


Figura 27 – Construção dos gráficos na janela 2

Em seguida, vamos criar três pontos aleatórios dentro da janela 2 e vamos modificar suas coordenadas, essa parte é muito importante para a finalização do projeto das funções trigonométricas. Esses pontos terão como coordenadas a medida do arco circular (como já vimos, essa medida coincide com o comprimento do arco) e uma razão (seno, cosseno ou tangente), respectivamente.

Clique sobre um dos pontos criados e modifique as coordenadas desse ponto conforme as coordenadas a seguir. A Figura 28 mostra a redefinição das coordenadas do ponto I, pertencente ao gráfico da função seno.

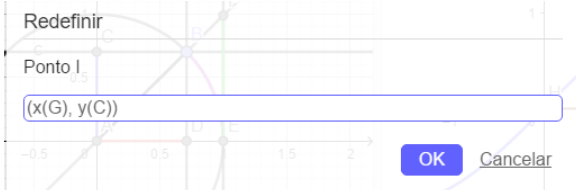


Figura 28 – Coordenadas do ponto pertencente ao gráfico da função seno

Para a função cosseno, redefina as coordenadas do ponto J, como na Figura 29.

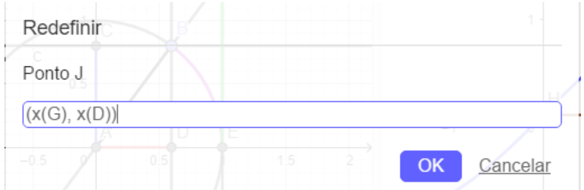


Figura 29 – Coordenadas do ponto pertencente ao gráfico da função cosseno

Por fim, para a função tangente, redefinir as coordenadas do ponto K, como na Figura 30.

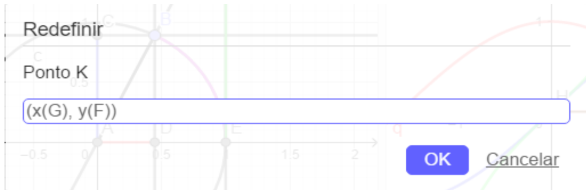


Figura 30 – Coordenadas do ponto pertencente ao gráfico da função tangente

Agora, perceba que ao movimentar o ponto B na janela de visualização 1, as coordenadas dos pontos criados na janela de visualização 2 modificam, de maneira que os pontos percorrem as curvas conforme o domínio da função altera. Veja como ficou a apresentação final na Figura 31.

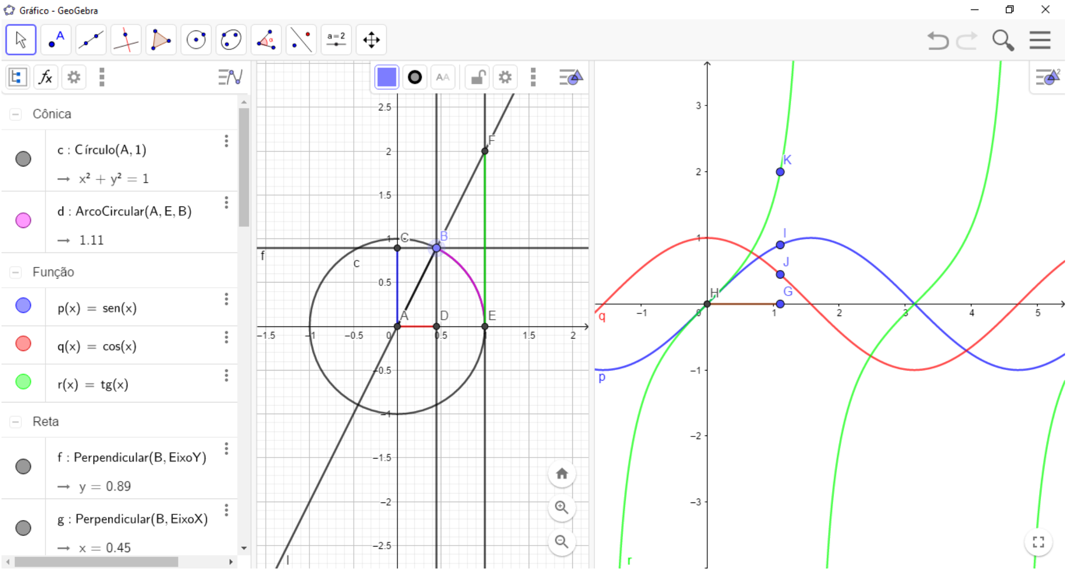
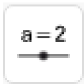


Figura 31 – Resultado da apresentação

Parabéns, você concluiu todo o passo a passo. Recomendo que explore a ferramenta com seus alunos.

APÊNDICE C – Passo a passo para construção das funções trigonométricas com controles deslizantes.

Como abordamos no Capítulo 4, é importante mostrar o comportamento das funções trigonométricas de acordo com a variação de seus coeficientes. Portanto, segue as instruções para a construção da apresentação no *software*. Siga a sequência de passos para a execução correta.

1- Vamos criar os controles Deslizantes. Para criar os controles deslizantes, vá à barra de ferramentas, escolher o ícone 

e selecionar a ferramenta de "Controle Deslizante".

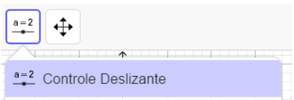


Figura 32 – Ferramenta Controle Deslizante

Crie um controle deslizante de nome "a" clicando em qualquer parte da tela. Vai abrir a seguinte caixa de diálogo:

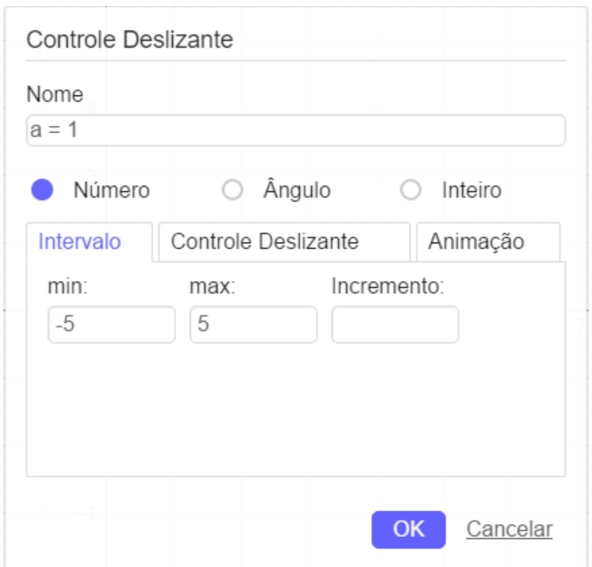


Figura 33 – Criação do controle deslizante

Nessa caixa você vai poder editar o controle deslizante, escolhendo, por exemplo, o valor máximo e mínimo. Os valores escolhidos ficam a critério do usuário. Uma pequena observação é para o incremento, que é a taxa de variação que os números vão alterar. Criado o primeiro controle deslizante, crie mais 3 e coloque os nomes de b, c e d. Os controles deslizantes vão aparecer dentro da sua janela de visualização como na figura 34.

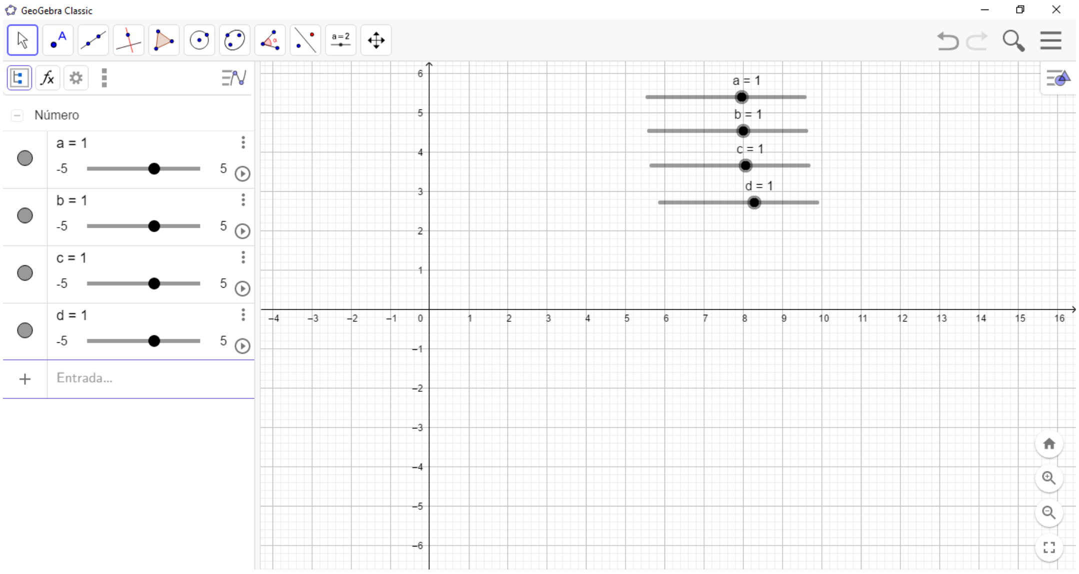


Figura 34 – Criação dos controles deslizantes

2- Em seguida, vamos inserir a função $f(x) = a + bsen(cx + d)$.

Observação: lembre-se de usar os caracteres especiais para as operações matemáticas dentro do *software*.

$$\mathbf{1\ x\ 2 = 2}$$

Para a multiplicação acima, representamos da seguinte maneira:

$$\mathbf{1 * 2 = 2}$$

Isso acontece porque existem palavras e símbolos reservados para o GeoGebra como os operadores lógicos matemáticos, veja:

adição: +

subtração: -

multiplicação: *

divisão: /

exponencial: ^

Assim, a função vai ficar da forma como está representada na Figura 35. Note que, quando coloca o asterisco " * ", automaticamente já aparece o ponto indicativo da operação de multiplicação.

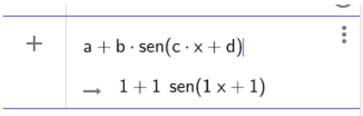


Figura 35 – Inserção da função desejada

Com a função inserida, temos a apresentação visível na Figura 36.

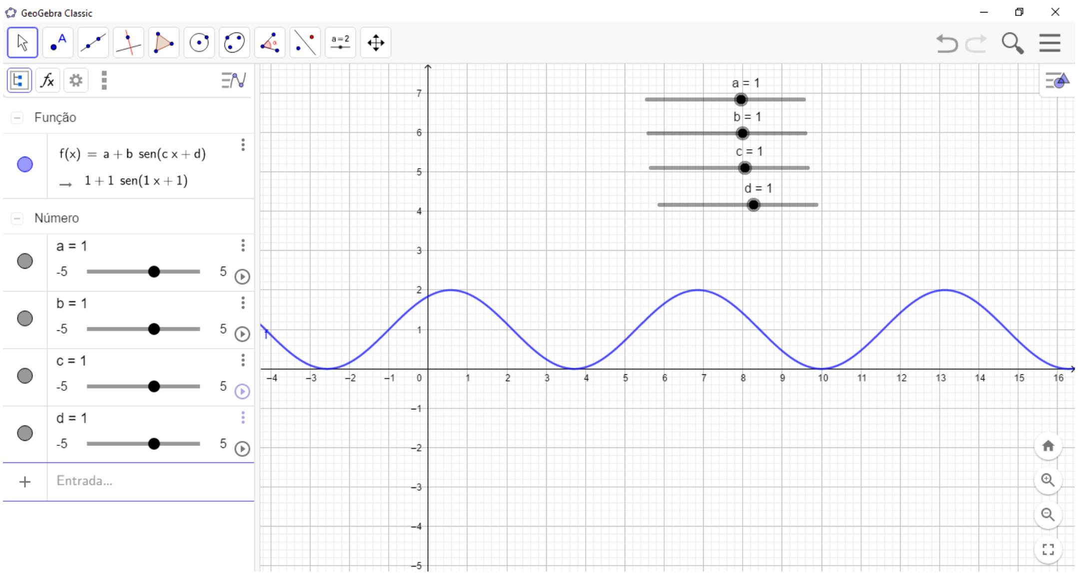


Figura 36

3- Agora, vamos inserir as outras duas funções a serem trabalhadas, como segue abaixo:

$$g(x) = \ a + b \cdot cos(c \ \cdot x + d\ ) \ \text{ e}$$

$$h(x) = \ a + b \cdot tg(\ c \ \cdot x + d).$$

Após a inserção das funções, teremos a uma apresentação como a da Figura 37.

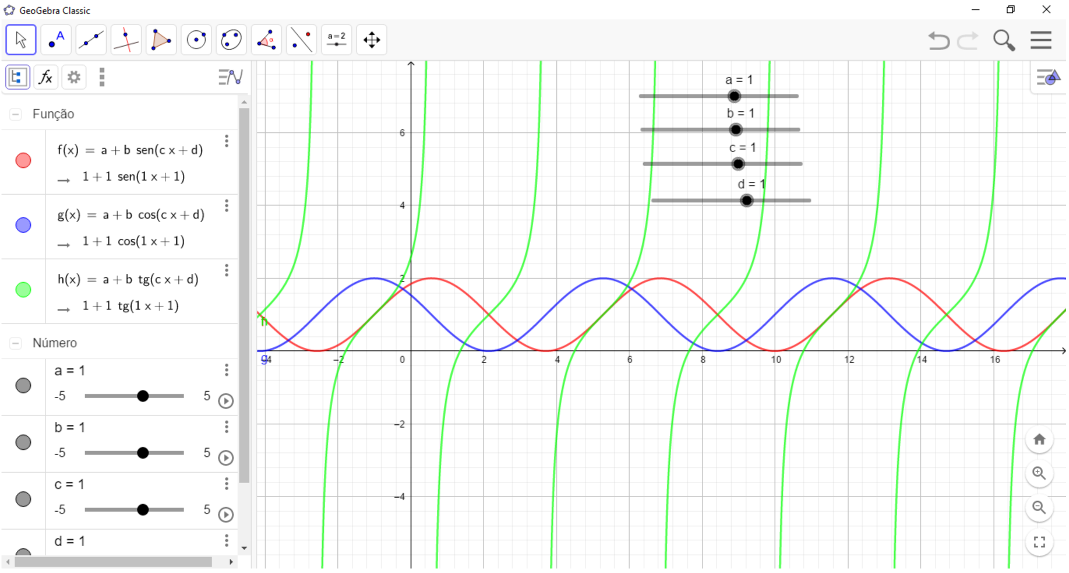


Figura 37 – Apresentação completa

Parabéns! Feito todos esses passos você obteve sucesso, recomendo que trabalhe essas funções com seus alunos usando o GeoGebra para que eles percebam a atuação de cada coeficiente dentro da função, facilitando o aprendizado.

APÊNDICE D – Proposta de Material de Apoio

Matemática - Conteúdo: Trigonometria na circunferência e funções trigonométricas

Aula 1: Introdução ao conteúdo e conceitos

Objetivos:
- Perceber em que parte do dia a dia está inserido as funções trigonométricas;
- Abordar fatos históricos que contribuíram para o desenvolvimento do tema;
- Compreender os conceitos de arco de circunferência, bem como seu comprimento e sua medida;
- Calcular o comprimento e a medida de um arco e saber transformar graus em radianos e vice versa.

1. Introdução ao estudo das funções trigonométricas

Para entendermos, já de início, onde podemos observar as funções trigonométricas na sociedade, chamamos a atenção para o movimento de uma roda-gigante. Não é difícil perceber que esse movimento é circular, e ainda, se fixarmos as observações em uma das cabines, temos que sua altura varia em função do tempo do movimento e que essa altura pertence a um intervalo fechado ao qual chamamos os extremos de altura mínima e máxima. Esse intervalo é a imagem da função. Também considerando que a velocidade da roda seja constante, o tempo em que ela completa uma volta é sempre o mesmo, sendo esse intervalo o período da função. Assim, podemos generalizar o comportamento descrito acima como característico das funções trigonométricas, isto é, são funções periódicas. Ao longo desse material iremos estudar todo o comportamento das funções trigonométricas e outras aplicações.

Figura 1

2. Um pouco de História

Muitos povos da antiguidade, como os gregos, sumérios, babilônios, romanos, egípcios, chineses e hindus, através de suas culturas e seus matemáticos, puderam contribuir para o desenvolvimento da Trigonometria. As necessidades da astronomia, por exemplo, que tinham como objetivo construir tabelas que fornecessem, em intervalos de tempo regularmente espaçados, as coordenadas que definissem a posição de um astro, foi um dos motivos que levaram à sua evolução. Também havia a crença de que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da Terra, daí surgiu o interesse de relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o respectivo ângulo central associado.

Em relação as grandes contribuições dadas pelos gregos podemos citar que, por volta de 200 a.C., o astrônomo Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.) encontrava-se interessado em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e o comprimento da Terra. O matemático descobriu a distância entre Siena e Alexandria através do tempo de viagem das caravanas que faziam o trajeto e percorriam cerca de 100 estádios por dia, durante, em média, 50 dias. Eratóstenes também sabia que no solstício de verão do Hemisfério Norte os raios solares atingiam perpendicularmente a superfície de Siena, pois ao meio dia a luz atingia o fundo de um grande poço, além disso, obeliscos e colunas não faziam sombra. Depois, ele pensou em observar a inclinação dos raios solares em Alexandria no solstício de verão do ano seguinte, obtendo a medida de 7,2°. Assim, ele determinou a mais notável medida da antiguidade para a circunferência terrestre usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o levando a perceber a necessidade de estreitar as relações entre ângulos e cordas. Importante destacar que a descoberta dessa informação foi possível pois se conhecia o conceito de ângulo e de como medi-lo. A Figura 2 ilustra a criatividade do matemático.

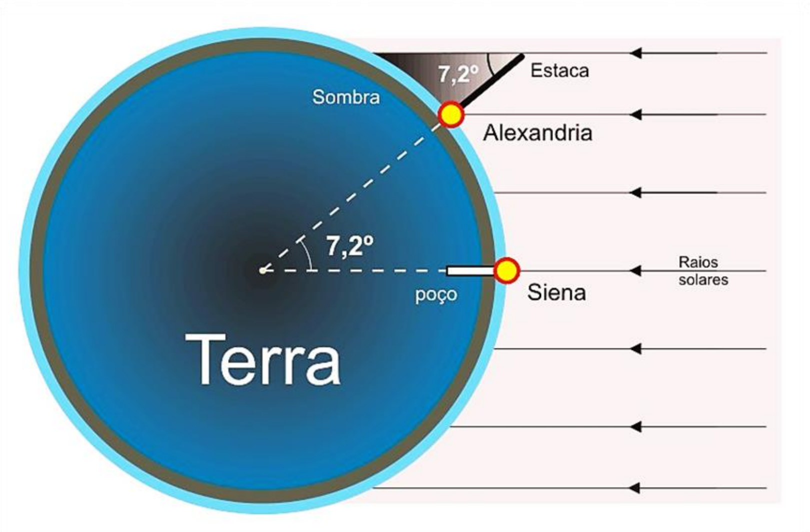


Figura 2- Método de Eratóstenes para descobrir o comprimento da terra

Indicamos assistir o vídeo com acesso no link:
https://www.youtube.com/watch?v=Upgd_NzwN9g.

Após conhecer um pouco da História da Trigonometria, vamos estudar conceitos pertinentes as funções trigonométricas.

3. Vamos estudar...

3.1 Arcos de circunferência

Considere uma circunferência de centro O e um ângulo central $A\hat{O}B$, sendo A e B pontos que pertencem aos lados do ângulo e à circunferência.

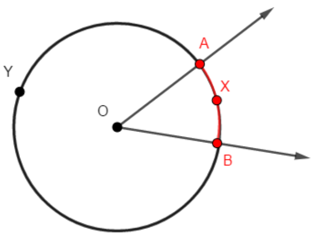


Figura 2 – Arcos de circunferência

A circunferência fica dividida em duas partes, cada uma das quais é um arco de circunferência, que são representados da seguinte forma: arco de circunferência AXB e arco de circunferência AYB. A e B são as extremidades do arco, como na Figura .

Observação: quando não houver dúvidas em relação ao qual arco estamos nos referindo, escrevemos somente AB para representar o arco de extremidades A e B.

Consideremos dois casos particulares:

1) Se A e B são as extremidades de um diâmetro, temos dois arcos, cada um chamado de *semicircunferência* ou *arco de meia volta*, como vemos na Figura 3.

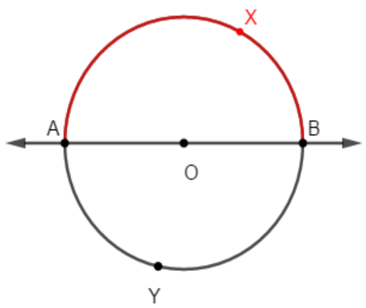


Figura 3 – Semicircunferência ou arco de meia volta

2) Se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto, que equivale ao *arco nulo*, o outro é a *circunferência* ou *arco de uma volta*, como na Figura 4.

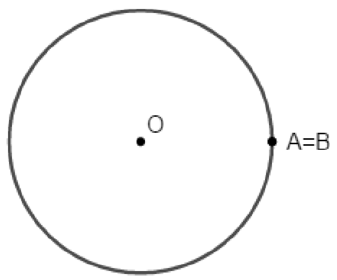


Figura 4 – Arco nulo, circunferência ou arco de uma volta

3.2 Comprimento, medida de arcos e o radiano

Para abordamos o conceito de comprimento de um arco, vamos considerar uma noção intuitiva, isto é, para determinar o tamanho desse arco, podemos pegar um pedaço de arame, corda ou de barbante e vamos ajustar sobre a curva. Caso queiramos o comprimento da circunferência basta contornar. Após isso, esticamos e verifiquemos o valor linear desse pedaço. Temos assim o comprimento desejado. Jamais podemos tomar a ideia supracitada como definição. Querendo o leitor mais informações sobre a definição e demonstrações do comprimento da circunferência, basta pesquisar em Barbosa (2012). Aqui admitiremos que o comprimento de uma semicircunferência de raio 1 é π e, consequentemente, da circunferência de raio r é dado por $C = 2\pi r$.

Passando a falar da medida de um arco, destacamos que as unidades de medidas são graus (símbolo °) e radianos (rad). O grau é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

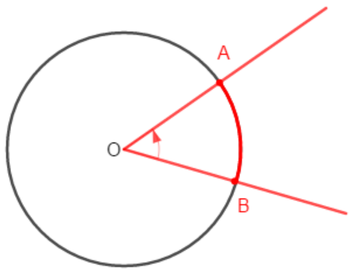


Figura 5 – Ângulo central AÔB e arco $\overset{\frown}{AB}$ subtendido por AÔB

Considerando a Figura 5, temos que $A\hat{O}B$ é um ângulo central, pois tem o vértice no centro da circunferência, e $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$. Daí, definimos a medida de um arco em graus: *a medida de um arco de circunferência, em graus, é igual a medida do ângulo central correspondente.*

Na Figura 6, tomamos duas circunferências concêntricas, isto é, duas circunferências cujos centros sejam coincidentes. Notemos que a medida dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ é a mesma, pois ambos tem o mesmo ângulo central correspondente. Sendo assim, a medida não depende do raio. Porém, os seus comprimentos são diferentes e proporcionais ao seu raio. Para enxergar tal afirmação é suficiente assumir que as duas circunferências são semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre os raios.

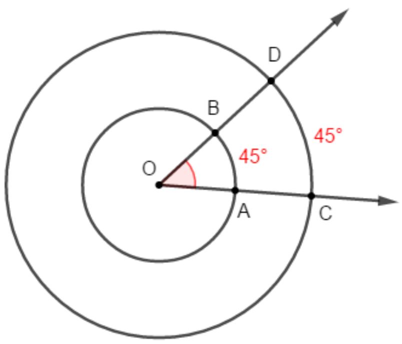


Figura 6 – Circunferências concêntricas

Portanto, sendo l_1 e l_2 os comprimentos e r_1 e r_2 os raios dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, respectivamente, temos que $\frac{l_1}{r_1} = \frac{l_2}{r_2}$. Com essa informação podemos definir:

A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em uma circunferência cujo centro é o vértice do ângulo e o comprimento do raio da circunferência. Daí, decorre que, se um arco tem comprimento l e a circunferência a qual ele pertence tem raio r, então a medida α do ângulo central correspondente, em radianos, é $\alpha = \frac{l}{r}$, ou seja, $l = \alpha r$.

Inicialmente adotamos que o comprimento de uma semicircunferência de raio 1 é π, isto implica que o comprimento de uma semicircunferência de raio r é $C_{SC} = \pi r$. Como o ângulo central correspondente ao arco de meia volta, em graus, é 180°, podemos concluir que $\alpha = \frac{\pi r}{r} = \pi\, rad = 180°$, ou seja, $\pi\, rad$ equivale a 180°. Com essa equivalência é possível fazer outras conversões, por exemplo, se $\pi\, rad = 180° \implies \frac{\pi\, rad}{\pi} = \frac{180°}{\pi} \implies 1\, rad = \frac{180°}{\pi} \simeq 57°$.

<u>Observações:</u> quando usamos π sem está associado a medida de um arco, então $\pi \simeq 3{,}14$. Também é importante perceber que se a circunferência tiver raio $r = 1$, desprezando a unidade de medida, o comprimento do arco coincidirá com a medida, em radianos, do ângulo correspondente.

Os exercícios a seguir foram retirados de Iezzi (1993) e Iezzi *et al.* (2016).

4. Exemplos resolvidos:

1) Calcule o comprimento l do arco $\overset{\frown}{AB}$ definido numa circunferência de raio $r = 10\ cm$, por um ângulo central de 60°.

Solução:

Como a medida do arco é 60°, em radianos é $\frac{\pi}{3}$. Portanto, $l = \frac{\pi}{3} \cdot 10 = \frac{10\pi}{3}\ cm$.

2) Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que a corda $\overline{AB}$ mede 10 cm. Calcule a medida do arco em radianos.

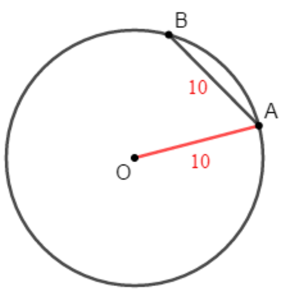


Figura 7 - Circunferência de raio 10 cm e corda $\overline{AB}$

Solução:

Sendo o ponto O centro da circunferência, então, se traçarmos o raio $\overline{OB}$, determinamos o triângulo OAB equilátero. Portanto, como o ângulo $A\hat{O}B = \frac{\pi}{3}$, a medida do arco $AB = \frac{\pi}{3}$.

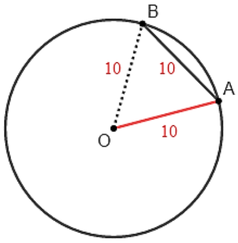


Figura 8 – Solução da questão

3) Determine a medida, em graus, do menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio analógico às 11h40min.

Solução:

A cada volta completa do ponteiro grande (minutos), o ponteiro pequeno (horas) anda uma hora, ou seja, $\frac{360°}{12} = 30°$, que é o valor da distância angular entre dois números consecutivos de um relógio analógico.

Se o ponteiro pequeno estivesse sobre o 11 e o grande sobre o 8, o ângulo seria $3 \cdot 30° = 90°$. Porém, o ponteiro pequeno desloca-se de forma proporcional ao deslocamento do ponteiro grande. Como o grande deu $\frac{8}{12}$ volta, o pequeno percorreu $\frac{8}{12} \cdot 30° = 20°$. Assim, o menor ângulo entre eles é $90° + 20° = 110°$.

5. Exercícios propostos:

1) Transforme as medidas em radianos:

a) 210° b) 240º c) 270° d) 300° e) 315º f) 330º

2) Transforme as medidas em graus:

a) $\frac{\pi}{6}\ rad$ b) $\frac{\pi}{4}\ rad$ c) $\frac{\pi}{3}\ rad$ d) $\frac{2\pi}{3}\ rad$ e) $\frac{3\pi}{4}\ rad$ f) $\frac{5\pi}{6}\ rad$

3) Um arco de circunferência mede 30 cm e o raio da circunferência mede 10 cm. Calcule a medida do arco em radianos.

4) Calcule o comprimento l do arco AB definido numa circunferência de raio $r = 10$ cm, por um ângulo central de 60º. Considere $\pi = 3{,}14$.

5) Calcule o comprimento de um arco AB definido em uma circunferência de raio 8 cm por um ângulo central $A\hat{O}B$ de medida 120°. Considere $\pi = 3{,}14$.

6) Um andarilho caminhou 7536 m, em uma pista circular de 40 m de raio. Quantas voltas ele deu na pista? Considere $\pi = 3{,}14$.

7) Determine a medida do menor ângulo formado entre os ponteiros de um relógio ao marcar:
a) 3h b) 8h 30min c) 3h 45min d) 5h 40min e) 9h 35min

Aula 2: Circunferência trigonométrica
Objetivos:
- Relatar o desenvolvimento histórico do estudo das cordas de circunferência;
- Conhecer a origem do termo seno;
- Apresentar a circunferência trigonométrica;
- Compreender as razões trigonométricas de um arco de circunferência;
- Calcular o seno, o cosseno e a tangente de um arco pertencente ao intervalo $[0,2\pi]$;

1. Um pouco de História

Na Grécia, viveu Hiparco de Nicéia (180 – 125 a.C.), um observador extremamente cuidadoso e se creditam a ele, em astronomia, feitos como a determinação, com precisão, do nascer e do ocaso de várias estrelas, usando uma tabela de cordas calculada por ele mesmo. Esta tabela estava inserida em uma obra dividida em 12 livros que foi perdida ao passar do tempo.

A construção da tabela de cordas necessitava de medida de inclinações ou de ângulos, mas até a obra *Os Elementos*, de Euclides (325 – 265 a.C.), os ângulos eram medidos por múltiplos e submúltiplos do ângulo reto. Anos depois, os astrônomos gregos passaram a utilizar o sistema sexagesimal dos babilônios, este sistema dividia a circunferência em 360 partes, cada uma correspondendo a um grau, estabelecendo ainda as subdivisões em minutos e segundos, estreitando a relação com a base sessenta.

Após Hiparco, aparece Claudio Ptolomeu (85-165 d.C.), Figura 1, autor da maior e mais importante obra da trigonometria da antiguidade que foi intitulada de *Almagesto*. Dividida em treze volumes, nela está registrado suas observações e conclusões feitas de efemérides astronômicas, foi reconhecida por mais de 2000 anos como o manual da astronomia. Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos 10 e 11 do primeiro volume, que consistiu na construção de uma tabela de cordas que, provavelmente, foi baseada na de Hiparco. Porém, no *Almagesto*, não existia uma tabela contendo as "funções" seno e cosseno, mas sim a função corda do arco α, representada por $\boldsymbol{crd\ \alpha}$, como se vê na Figura 2, Figura 9embora esses termos não estivessem contidos no texto. A "função" corda do arco α era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de medida α, em graus, em um círculo cujo raio é 60.

Figura 1 - Claudio Ptolomeu

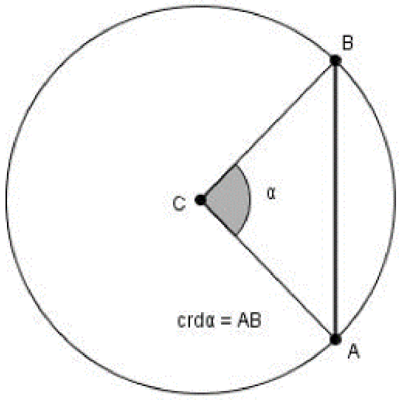


Figura 2 – Representação geométrica da corda

Os hindus tem suas contribuições reconhecidas através do texto Surya Siddhanta, permitindo concluir que os hindus construíram uma nova perspectiva para a trigonometria, diferente da apresentada por Ptolomeu em sua obra. Isso é notório pois uma nova tabela de cordas foi criada, dessa vez era utilizado apenas metade da corda de um arco, correspondendo assim apenas a metade do ângulo central e dando uma visibilidade para um triângulo retângulo na circunferência, como vemos na Figura 3. Essa meia corda hindu era chamada de jya, que era uma das grafias utilizadas para associar a corda. Durante muitos anos essa palavra veio passando por traduções de vários idiomas, muitas até incorretas, chegando ao latim com o termo *sinus*. Daí, hoje, a expressão usada é seno (EVES, 2011). Portanto, com os hindus, a trigonometria evoluiu bastante introduzindo as "funções" trigonométricas e aperfeiçoando as tabelas trigonométricas.

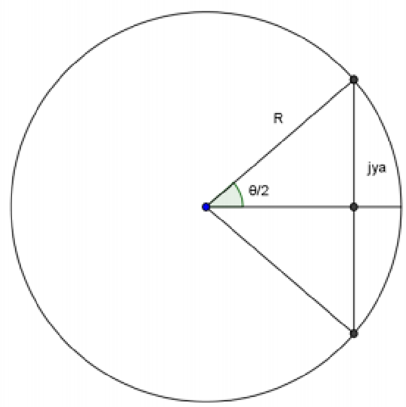


Figura 3 – Representação da meia corda hindu

Outro fato importante é que alguns matemáticos hindus, por volta de 500 d.C., já utilizavam um sistema decimal e, segundo Costa (2003), após introduzirem os conceitos de semicorda e de seno, demonstraram certas identidades trigonométricas, dentre elas a RFT (Relação Fundamental da Trigonometria) $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, onde a medida do arco é 2θ.

2. Vamos estudar...

2.1. A circunferência trigonométrica

Circunferência trigonométrica ou ciclo trigonométrico, Figura 3, é o nome dado a uma circunferência unitária, isto é, de raio $r = 1$ e consequentemente comprimento $C = 2\pi$, tomada sobre o plano cartesiano ortogonal $x0y$, cujo centro coincide com a origem do sistema, ponto (0,0), ficando dividida em quatro partes chamadas de quadrantes, Figura 4. Aqui ela será representada por λ. Essa circunferência pode ser percorrida em dois sentidos, sentido positivo ou anti-horário e sentido negativo ou horário. Geralmente o sentido escolhido é o anti-horário e o ponto de partida é sempre um ponto fixo $A(1,0)$, chamado de origem dos arcos.

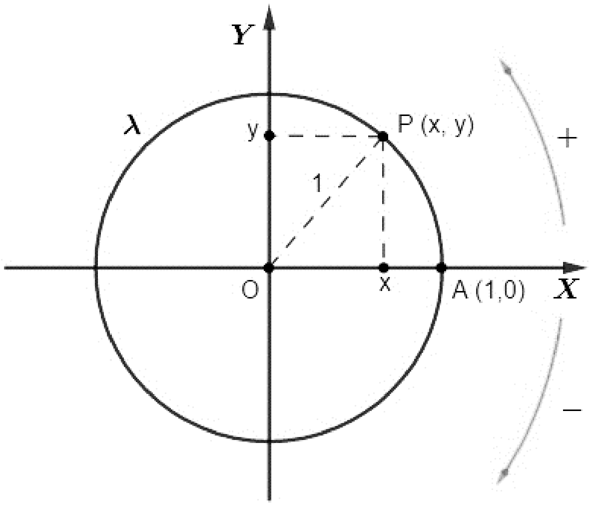


Figura 4 – Circunferência Trigonométrica

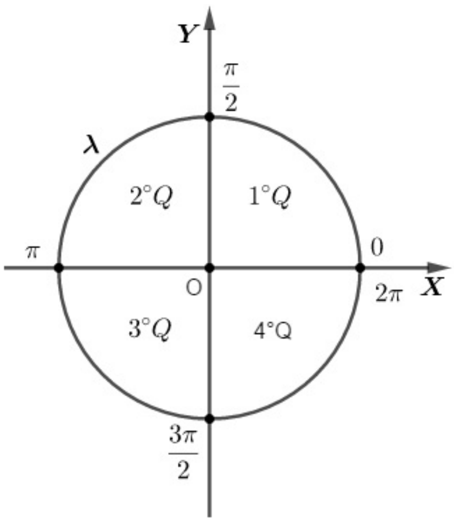


Figura 5 – Divisão da Circunferência Trigonométrica

Contudo, definiremos a *medida algébrica* de um arco AP desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, acompanhado de um sinal positivo se o percurso de A para B for no sentido anti-horário e negativo em caso contrário. Representaremos a medida por $m\,AP$.

2.2. Razões Trigonométricas na Circunferência

Seja λ a circunferência trigonométrica e $\overset{\frown}{AP}$ o arco determinado de medida β. Já sabemos que o ponto $A(1,0)$ é a origem dos arcos e P é a extremidade. Sendo assim, traçando as projeções ortogonais do ponto P sobre o eixo x e sobre o eixo y, determinamos, respectivamente, o ponto C e o ponto S. Note que o triângulo OPC, na Figura 6, é retângulo em C.

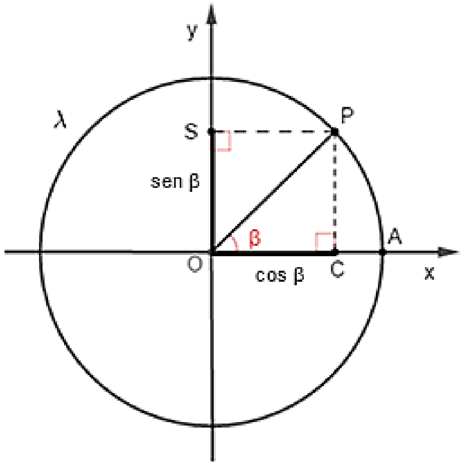


Figura 6 – Seno e Cosseno de um arco

Sendo assim, do $\triangle\, OPC$, temos: $sen\beta = \frac{\overline{PC}}{\overline{OP}}$. Mas $\overline{OP}$ é o raio da circunferência λ, que é 1. Logo, $sen\beta = \frac{\overline{PC}}{1} \Longrightarrow \overline{PC} = sen\beta$. Como $OSPC$ é um retângulo, então $\overline{PC} = \overline{OS} = sen\beta$.

Além disso, $cos\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OC}}{1} = \overline{OC} \Longrightarrow \overline{OC} = cos\beta$. Ainda, a partir do $\triangle\, OPC$, pelo Teorema de Pitágoras, podemos concluir a conhecida Relação Fundamental da Trigonometria, que segue:

$$\overline{OP}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{OC}^2$$

$$\Longrightarrow 1^2 = (sen\beta)^2 + (\cos\beta)^2$$

$$\Longrightarrow sen^2\beta + cos^2\beta = 1.$$

Para a interpretação da tangente de um arco, Figura 6, tomemos uma reta *t*, paralela ao eixo y e passando por A. Essa é a reta $x = 1$, tangente a λ. Prolongando o segmento $\overline{OP}$ até interceptar t no ponto T. Perceba que o $\triangle\, OAT$ é retângulo em A. Então, do $\triangle\, OAT$, temos: $tg\beta = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}}$. Note que $\overline{OA}$ é raio de λ. Logo, $tg\beta = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT} \Longrightarrow \overline{AT} = tg\beta$. Isto é, a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$ representa a tangente do arco $\overset{\frown}{AP}$. Podemos concluir ainda que, $\triangle\, OCP \sim \triangle\, OAT$, pelo critério AA (Ângulo, Ângulo), pois ambos são retângulo em C e A, respectivamente, e o ângulo β é comum, assim, $\frac{\overline{AT}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} \Rightarrow \frac{tg\beta}{sen\beta} = \frac{1}{cos\beta} \Rightarrow tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$.

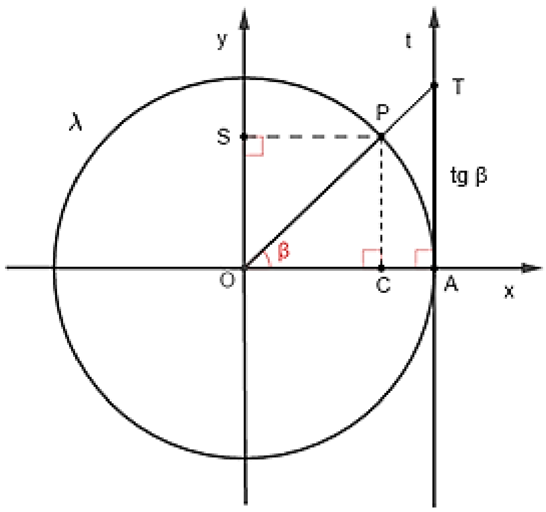


Figura 7 – Tangente de um arco

Agora, tomando o arco AP, sobre a circunferência trigonométrica, e o ponto C, projeção ortogonal de P sobre o eixo das abcissas, determinamos o triângulo OCP, retângulo em C. Portanto os ângulos $\hat{O}$ e $\hat{P}$ são complementares. Daí, se $\hat{O} = \beta$, então $\hat{P} = \frac{\pi}{2} - \beta$. Assim, note que

$$sen\beta = \frac{\overline{CP}}{\overline{OP}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow sen\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$\cos\beta = \frac{\overline{OC}}{\overline{OP}} = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \cos\beta = sen\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

$$tg\beta = \frac{\overline{CP}}{\overline{OC}} = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \Rightarrow tg\beta = \frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}.$$

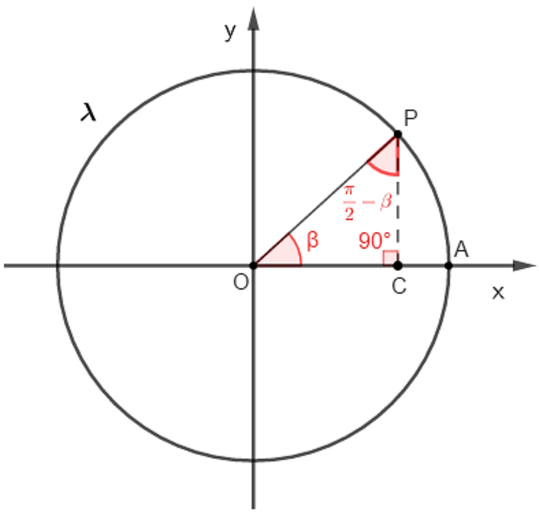


Figura 8 – Razões trigonométricas de ângulos complementares

Através do link https://www.geogebra.org/m/atudtnae, você terá acesso a uma possibilidade de abordagem das razões trigonométricas usando o GeoGebra.

A seguir, na Figura 8, temos a representação dos sinais correspondentes as razões trigonométricas cosseno e seno. Para o sinal da tangente, basta definir o quadrante, usar a relação $tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$ e fazer o jogo de sinal. Daí, a tangente tem sinal positivo no 1° e 3° quadrante e negativo no 2° e 4° quadrante.

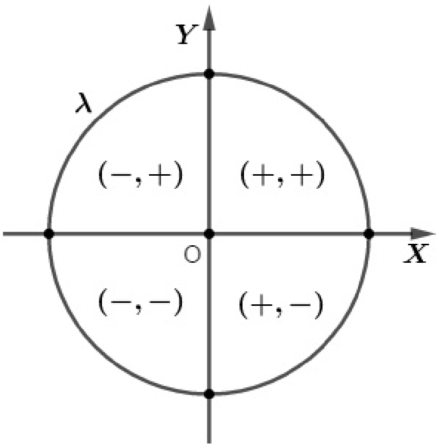


Figura 9 – Sinais do cosseno e seno em cada quadrante

Também conseguimos definir valores para razões trigonométricas de alguns arcos, que chamaremos de notáveis, que são $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, além dos que já conhecemos lá dos triângulos retângulos, o de 30° ou $\frac{\pi}{6}$, 45° ou $\frac{\pi}{4}$ e 60° ou $\frac{\pi}{3}$. Com isso montamos a Tabela 1 a seguir.

	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$	$\boldsymbol{\pi}$	$\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$	$\boldsymbol{2\pi}$
Cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Tabela 1 – Razões trigonométricas dos arcos notáveis

De acordo com as informações acima e pela interpretação geométricas, temos:

$$-1 \leq sen\beta \leq 1 \text{ e}$$
$$-1 \leq cos\beta \leq 1.$$

2.3. Reduções ao 1º quadrante

Qualquer que seja o arco que tomarmos sobre a circunferência trigonométrica, é possível determinar o seu quadrante e o sinal das razões trigonométricas. Então, vamos mostrar como determinar o valor do seno e do cosseno, por exemplo, em qualquer quadrante, conhecidos seus valores no primeiro quadrante, isso devido a simetria. Consideremos separadamente os casos em que a extremidade P do arco $\overset{\frown}{AP}$ está no segundo, terceiro ou quarto quadrante.

2.3.1. Se β está no segundo quadrante, isto é, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$:

$$sen(\beta) = sen(\pi - \beta)$$

$$\cos(\beta) = -\cos(\pi - \beta)$$
$$\text{tg}(\beta) = -\text{tg}(\pi - \beta)$$

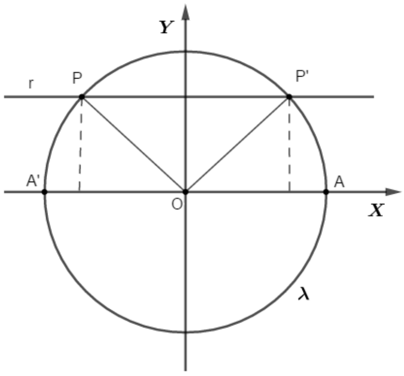


Figura 10 – Simetria entre 1º e 2º quadrante

2.3.2. Se β está no terceiro quadrante, isto é, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$:

$$sen(\beta) = -sen(\beta - \pi)$$
$$cos(\beta) = -cos(\beta - \pi)$$
$$tg(\beta) = \text{tg}(\beta - \pi)$$

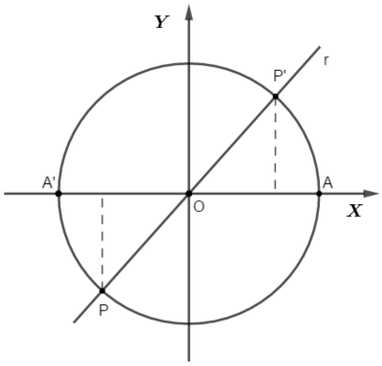


Figura 11 – Simetria entre 1º e 3º quadrante

2.3.3. Se β está no quarto quadrante, isto é, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$:

$$sen(\beta) = -sen(2\pi - \beta)$$
$$cos(\beta) = cos(2\pi - \beta)$$
$$tg(\beta) = -tg(2\pi - \beta)$$

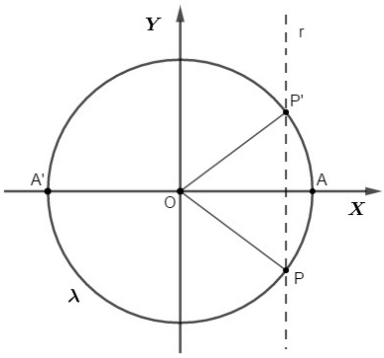


Figura 12 – Simetria entre 1º e 4º quadrante

Os exercícios a seguir foram retirados de Iezzi (1993), Carmo, Morgado e Wagner (2005) e Iezzi *et al.* (2016).

3. Exemplos resolvidos:

1) Considerando o sinal das razões trigonométricas em cada quadrante, determine aquele que tem simultaneamente:
a) $sen\,\theta < 0$ e $cos\,\theta > 0$?
b) $sen\,\theta > 0$ e $\mathrm{tg}\,\theta < 0$?
c) $cos\,\theta > 0$ e $\mathrm{tg}\,\theta > 0$?
$Solução$:
a) Analisando a Figura 14, nota-se que $sen\,\theta$ é negativo no 3° e 4° quadrante (Q). Já $cos\,\theta$ é positivo no 1° e 4°Q. Logo, o 4°Q satisfaz simultaneamente as expressões.
b) Do mesmo modo do item a), $sen\,\theta$ é positivo no 1° e 2°Q e $tg\,\theta$ é negativo no 2° e 4°Q. Logo, o 2° Q satisfaz simultaneamente as expressões.
c) Neste item temos que $cos\,\theta$ é positivo no 1° e 4°Q e $tg\,\theta$ é positivo 1° e 3°Q. Logo, o 1°Q satisfaz simultaneamente as expressões.

2) Calcule:
a) $sen\,315°$. b) $\cos 210°$. c) $tg\,135°$.
$Solução$:
a) 345° é um arco da primeira volta no sentido anti-horário ou positivo e sua extremidade está no 4°Q. Portanto, usando a redução do 4° para o 1°Q, temos:
$sen 315° = -sen(360° - 315°) = -sen(45°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) Como no item a), 210° é da primeira volta no sentido positivo e está no 3°Q. Assim, usando a redução do 3° para o 1°Q, temos:
$cos\,210° = -\cos(210° - 180°) = -\cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) Para as reduções envolvendo a tangente a expressão é a mesma, só varia o sinal. Então, como 135° está no 2°Q, segue que:
$tg 135° = -tg(180° - 135°) = -tg(45°) = -1$.

3) Calcule o valor de cada expressão a seguir:

a) $y = \frac{cos\,90° - cos\,180°}{cos\,60° \cdot cos\,0° + cos\,90°}$ b) $x = cos\frac{\pi}{4} \cdot cos\frac{\pi}{2} + cos\,\pi \cdot cos\frac{\pi}{6}$

$Solução$:

a) $y = \frac{0-(-1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 + 0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. b) $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Exercícios propostos:

1) Calcule o valor da seguinte expressão:

$$y = \frac{sen\,0 + sen\,\frac{\pi}{2} - sen\,\frac{3\pi}{2}}{2 \cdot sen\,\frac{\pi}{6}}.$$

2) Determine o valor de:

a) $sen\ \frac{5\pi}{4}$ b) $sen\ 120°$ c) $cos\ 330°$ d) $cos\ \frac{7\pi}{6}$ e) $tg\ 240°$

3) Classifique como verdadeiras (V) ou falsas (F) as afirmações seguintes e corrija as falsas.
a) $\cos 85° > \cos 65°$ b) $cos\ 190° > cos\ 170°$ c) $sen\ 100° > sen\ 170°$
d) $sen\ 300° > sen\ 290°$ e) $tg\ 105° > tg\ 100°$ f) $tg\ 25° > tg\ 20°$

4) Se $sen\ x = -\frac{12}{13}$, com x no 3º quadrante, determine $cos\ x$.

5) Resolva as equações seguinte, considerando $U = [0, 2\pi[$.
a) $cos\ x = 0$ b) $sen\ x = \frac{1}{2}$

6) Determine os possíveis valores reais de m para que se tenha, simultaneamente, $sen\ \alpha = \frac{m}{2}$ e $cos\ \alpha = m - 1$.

7) Se $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ e $tgx = -4$, obtenha o valor de:
a) $sen\ x$ b) $cos\ x$

Aula 3: As funções trigonométricas

Objetivos:
- Abordar a contribuição de Leonhard Euler;
- Conhecer a função de Euler;
- Calcular as razões trigonométricas de qualquer arco a partir da ideia de arcos côngruos;
-Estudar as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = cos(x)$.

1. Um pouco de História

Mesmo com muitos estudiosos interessados na apuração da Trigonometria, somente no século XVIII, com Leonhard Euler (1707-1783), Figura 1, é que a trigonometria assumiu uma nova roupagem. Ele tomou um círculo de raio unitário e definiu funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo. No entanto, o que ocorreu foi a transição das razões trigonométricas para funções periódicas, assim originando uma função que carregaria seu nome, Função de Euler ou Função E. Esta função é definida no conjunto dos números reais e a sua imagem é o círculo trigonométrico S_1. Isto é, a cada número real t, a função E faz corresponder um ponto $E(t)$ do círculo trigonométrico da seguinte maneira: dado um número real $t > 0$, medimos em S_1, a partir do ponto (1,0), um arco de comprimento t, sempre percorrendo o círculo no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. A extremidade final deste arco é um ponto (x, y) de S_1, que definiremos como $E(t)$. Para $-t < 0$, $E(-t)$ será a extremidade final de um arco de comprimento t, medido a partir de (1,0), no sentido negativo de S_1 (isto é, no sentido dos ponteiros do relógio).

Figura 1 - Leonhard Euler

A partir dessa função E, é calculado o $sen(x)$ e o cos (x) em função de uma variável x, $x \in \mathbb{R}$. Esse x é a abcissa dos pontos P do círculo unitário centrado na origem do sistema cartesiano. Contudo, destacamos aqui o que escreveu Elon Lages Lima, em sua obra *Meu Professor de Matemática e outras histórias:* “a função de Euler abriu para a trigonometria as portas da Analise Matemática e de inúmeras aplicações às Ciências Físicas” (LIMA, 2012, p. 37).

3. Vamos estudar...

3.1. A Função de Euler

Até aqui, as funções trigonométricas estão definidas para ângulos pertencentes ao intervalo de $0°$ a $360°$. Como esses ângulos podem ser medidos em radianos, estão naturalmente definidos o seno, cosseno e tangente de alguns dos números reais do intervalo $[0,2\pi]$. A tarefa seguinte é tentar ampliar estas funções de forma que elas possam ser definidas para todos, ou para quase todos, os números reais e seja conservado as relações básicas $cos^2\beta + sen^2\beta = 1$ e $tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$ (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

A relação fundamental $cos^2\beta + sen^2\beta = 1$ sugere que, para todo ângulo β, os números $cos\,\beta$ e $sen\,\beta$ são as coordenadas de um ponto da circunferência λ. Escrevemos então que $\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. Imprescindível o lembrete de que para todo ponto $(x,y) \in \lambda$ tem-se $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$, que implica em $-1 \leq cos\beta \leq 1$ e $-1 \leq sen\beta \leq 1$.

Com o objetivo de definir as funções $cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, devemos associar cada número real c a um ângulo e considerar o cosseno e o seno daquele ângulo. O número c desempenhará, portanto, o papel de medida do ângulo, que pode ser em graus ou radianos. Esta segunda é mais conveniente pois coincide com o comprimento do arco.

A maneira natural de definir as funções trigonométricas tem como ponto de partida a função de Euler $E: \mathbb{R} \longrightarrow \lambda$, que faz corresponder a cada número real c o ponto $E(c) = (x,y)$ da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

- $E(0) = (1,0)$.
- se $c > 0$, percorremos sobre a circunferência λ, a partir do ponto $(1,0)$, um caminho de $comprimento\ c$, sempre andando no sentido positivo. O ponto final do caminho será chamado de $E(c)$.
- se $c < 0$, $E(c)$ será extremidade final de um caminho sobre λ, de comprimento $|c|$, que parte do ponto $(1,0)$ e percorre λ sempre no sentido negativo.

A função de Euler $E: \mathbb{R} \longrightarrow \lambda$ pode ser imaginada como o processo de enrolar a reta, identificável a um fio inextensível[37], sobre a circunferência λ, pensada como um carretel, de modo que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ caia sobre o ponto $(1,0) \in \lambda$. Observe a Figura 2.

[37] Que não se consegue estender; que não se consegue aumentar em comprimento, encompridar.

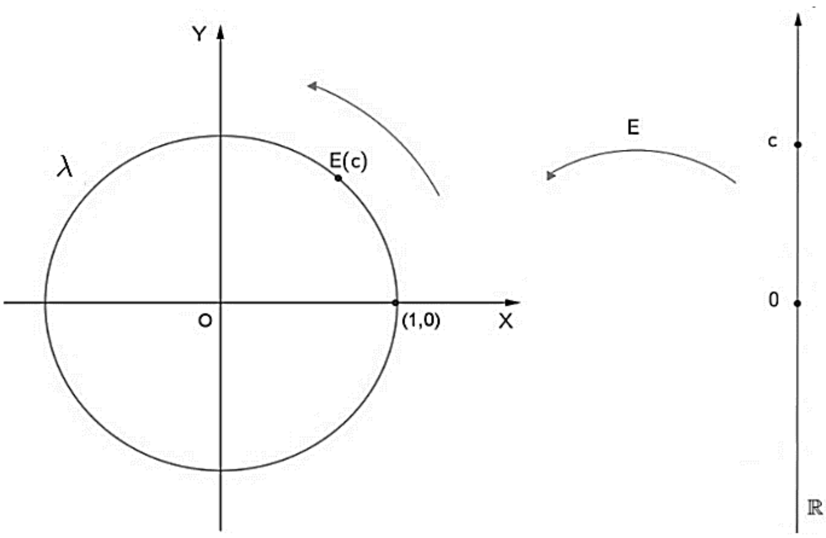


Figura 2 – Representação da Função de Euler

Cada vez que o ponto c descreve na reta um intervalo de comprimento l, sua imagem $E(c)$ percorre sobre a circunferência λ um arco de comprimento l. Em particular, como a circunferência unitária λ tem comprimento igual a 2π, quando o ponto c descreve um intervalo de comprimento 2π, sua imagem $E(c)$ da uma volta completa sobre λ, retornando ao ponto de partida, A. Se $c > 0$ e $c > 2\pi$, então será necessário dar mais de uma volta sobre a circunferência trigonométrica. De modo análogo, acontece se $c < 0$. Nesse caso, como a medida é orientada, o ângulo pode ter medida negativa, como vemos na Figura 3.

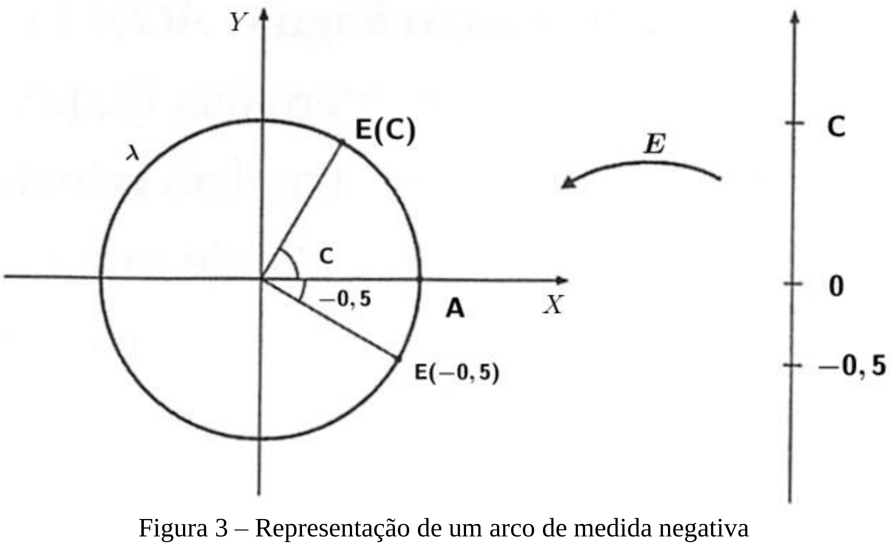


Figura 3 – Representação de um arco de medida negativa

De qualquer forma, $E(c)$ é um ponto bem definido de λ. Por outro lado, dado um ponto $P \in \lambda$, extremidade de um arco, ele é a imagem pela função E de uma infinidade de números reais, como mostra a Figura 41, todos da forma

$$c + 2k\pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \qquad 0 \leq c < 2\pi.$$

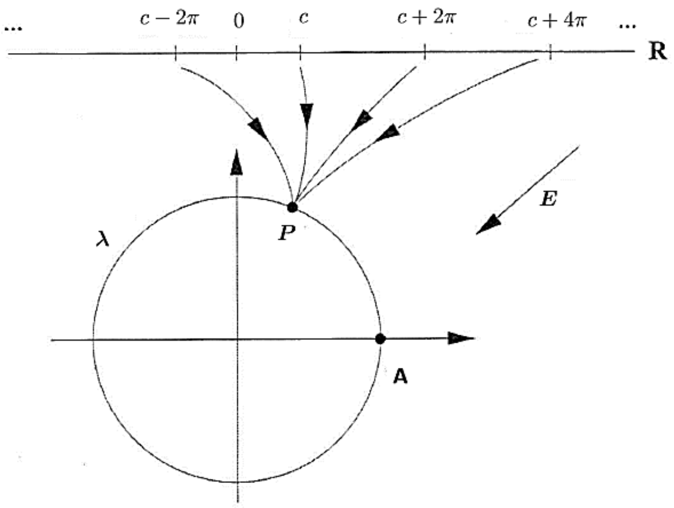


Figura 4 – Representação de arcos côngruos

Assim sendo, para todo $c \in \mathbb{R}$, tem-se $E(c + 2\pi) = E(c)$ e, mais geralmente, para todo $k \in \mathbb{Z}$, tem-se $E(c + 2k\pi) = E(c)$, seja qual for $c \in \mathbb{R}$. Certas vezes, costuma-se exprimir este fato dizendo que $c + 2k\pi$ são as várias determinações do arco AP ou que c e $c + 2k\pi$ são *arcos côngruos*. Podemos exemplificar o que foi dito antes tomando o arco $AP = \frac{19\pi}{4}$. Note que, $\frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$.

Então, o comprimento desse arco equivale a duas voltas completas e mais $\frac{3\pi}{4}$. Dizemos que $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{19\pi}{4}$ são arcos côngruos. Sendo assim, para determinar as razões trigonométricas de um arco é conveniente que tomemos sua primeira determinação positiva, que é o arco da primeira volta no sentido positivo.

Para ajudar ainda mais na interpretação dos arcos côngruos, na ideia da função de Euler e razões trigonométricas, trouxemos uma apresentação do GeoGebra que encontramos em https://www.geogebra.org/m/vykepyjm.

Após conhecermos a função de Euler, que admite calcular as razões trigonométricas de todo número $c \in \mathbb{R}$, e também entender as várias determinações de um arco, vamos estudar, propriamente dito, as funções trigonométricas.

3.2. O que é uma função periódica?

Uma função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se $periódica$ quando existe um número $N \neq 0$ tal que $f(c + N) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(c + kN) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor $N > 0$ tal que $f(c + N) = f(c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ chama-se período da função f. As funções seno e cosseno, definidas por $f(c) = sen(c)$ e $g(c) = cos(c)$ são periódicas, de período 2π (LIMA *et al.*, 2012). De acordo com o que vimos 4.3, os arcos associados aos números reais c e $c + kN$, com $k \in \mathbb{Z}$, são chamados de côngruos.

Ex: Sendo a função $f(c) = sen(c)$, note que
$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{13\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{25\pi}{6}\right) = sen\left(\frac{25\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$,...

isso porque $\frac{\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$ e $\frac{25\pi}{6}$ são arcos côngruos (eles têm mesma origem e mesma extremidade, porém, em voltas distintas). Acima, temos os arcos de 30°, 390° e 750°, em graus. Perceba que $\frac{13\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{12\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ e $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \frac{24\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi = \frac{\pi}{6} + 2 \cdot (2\pi)$, ou seja, o período é $N = 2\pi$.

Da mesma forma acontece com a função $g(\text{c}) = cos(\text{c})$.
A partir de agora, passaremos a chamar os domínios da função de x.

3.3. As funções $f(x) = sen(x)$ e função $g(x) = cos(x)$

As funções $cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $sen: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, chamadas função cosseno e função seno, respectivamente, são definidas pondo-se, para cada $x \in \mathbb{R}$:
$P(x) = (\cos x\,, sen\ x)$.
Em outras palavras, $x = \cos x$ e $y = sen\ x$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $P(x)$ da circunferência unitária. Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $x \in \mathbb{R}$, a relação fundamental $sen^2x + cos^2x = 1$.
Também podemos adotar outras definições para as funções acima.
A função seno é a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o seu seno, isto é, $f(x) = sen(x)$. O seu gráfico é formado pelo conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x, sen(x))$.

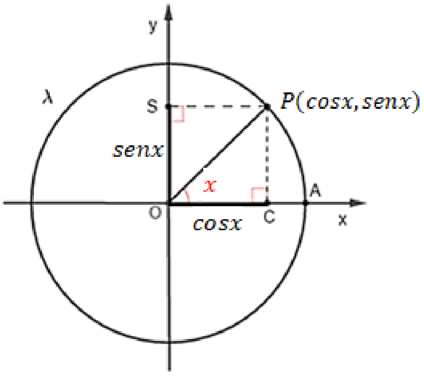


Figura 5 – Arco de medida x

Abaixo temos o gráfico da função f, também chamado de Senóide.

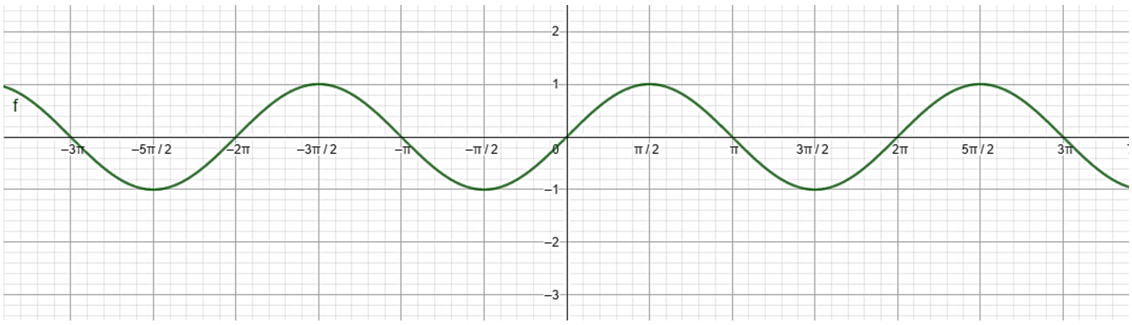


Figura 6 – Gráfico da função seno

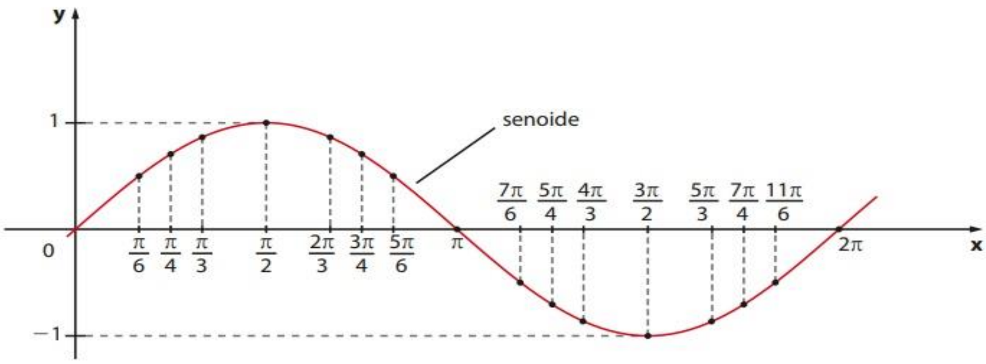


Figura 7 – Gráfico da função seno no intervalo $[0{,}2\pi]$

Por outro lado, a função cosseno é a função $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x o seu cosseno, isto é, $g(x) = \cos{(x)}$. Os pontos de seu gráfico são $(x, cos(x))$. Abaixo temos o gráfico da função g, também chamado de Cossenóide.

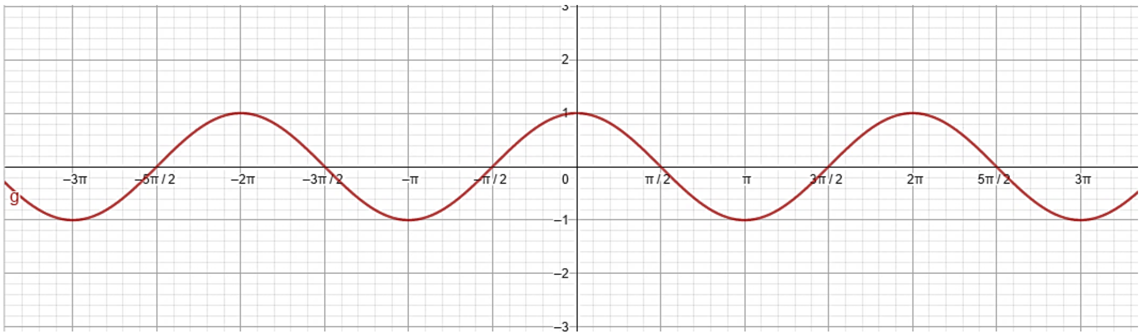


Figura 8 – Gráfico da função cosseno

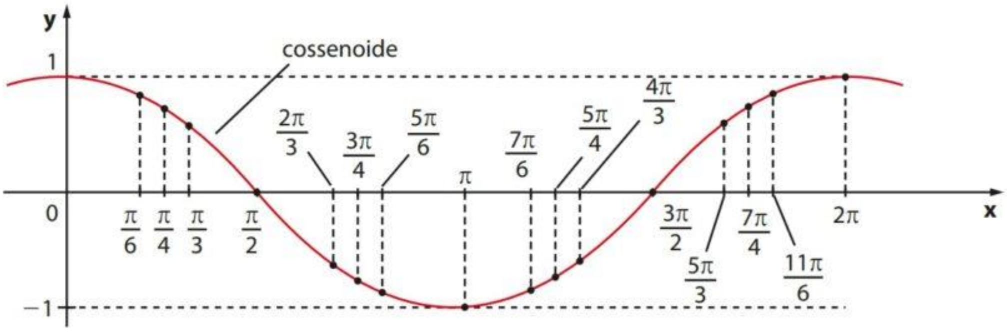


Figura 9 – Gráfico da função cosseno no intervalo $[0{,}2\pi]$

Na figura abaixo, mostramos as duas curvas simultaneamente. Podemos notar uma grande semelhança entre elas, a curva chamada senóide é a mesma em ambos os casos, mas o gráfico da função cosseno é apenas o resultado de uma translação de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda na função seno.

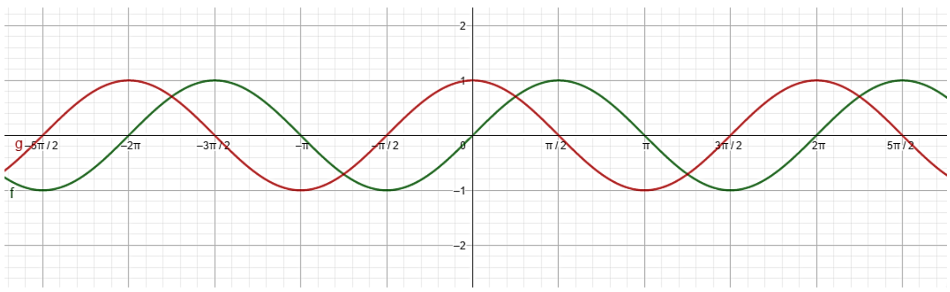


Figura 7 – Gráficos das funções seno e cosseno simultaneamente

3.3.1. Características da função Seno:

-Em relação ao sinal do valor função seno, é positivo quando x pertence ao 1º e 2º quadrantes. Já no 3º e 4º quadrantes, o sinal é negativo.

-Além disso, no 1º e 4º quadrantes a função f é crescente. Já no 2º e 3º quadrantes a função f é decrescente.

-O domínio e o contradomínio da função seno são iguais a ℝ, ou seja, ela está definida para todos os valores reais: $Dom(f) = \mathbb{R}$.

-Já o conjunto da imagem da função seno corresponde ao intervalo real:

$[-1, 1] = -1 \leq sen\, x \leq 1$.

-Em relação à simetria, a função seno é uma função ímpar: $sen(-x) = -sen(x)$.

Ex: $sen(-60°) = sen(300°) = -sen(60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.3.2. Características da função Cosseno:

-Em relação ao sinal do valor função cosseno, é positivo quando x pertence ao 1º e 4º quadrantes. Já no 2º e 3º quadrantes, o sinal é negativo.

-Além disso, no 1º e 2º quadrantes a função g é decrescente. Já no 3º e 4º quadrantes a função g é crescente.

-O domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a ℝ, ou seja, ela está definida para todos os valores reais: $Dom(f) = \mathbb{R}$.

-Já o conjunto da imagem da função cosseno corresponde ao intervalo real $[-1, 1] = -1 \leq cos\, x \leq 1$.

-Em relação à simetria, a função cosseno é uma função par: $cos(-x) = cos(x)$.

Ex: $cos(-60°) = \cos(300°) = \cos(60°) = \frac{1}{2}$

Para melhor esclarecer a simetria e a paridade das funções seno e cosseno, vejamos as figuras abaixo. Note, pela Figura 8, que o seno de arcos simétricos, como x e $-x$, são opostos. Já para o cosseno, são iguais. Nas Figuras 9 e 10, veja a simetria em relação ao $eixo\ y$, na primeira os valores da imagem são opostos e na segunda são iguais.

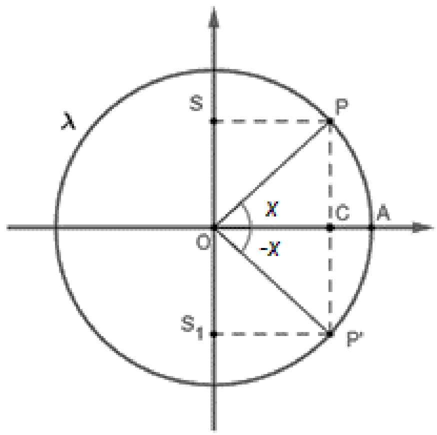


Figura 8 – Arcos simétricos x e $-x$

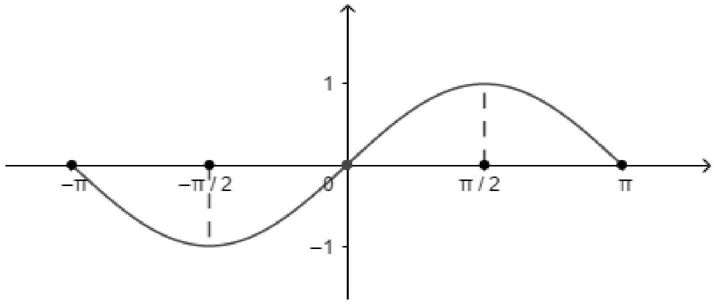


Figura 9 – Gráfico da função seno no intervalo $[-\pi, \pi]$

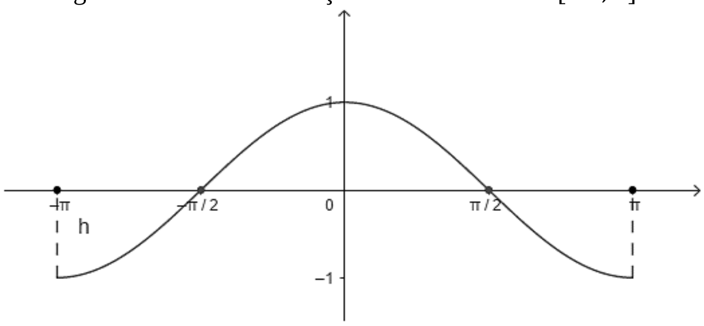


Figura 10 - Gráfico da função cosseno no intervalo $[-\pi, \pi]$

3.4. Função $\boldsymbol{h(x) = tg(x)}$

A função tangente é a função $h: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real x (com exceção dos valores côngruos a $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$, que são $90°$ e $270°$, respectivamente) a sua tangente, isto é, $h(x) = tg(x)$. O seu gráfico é formado pelo conjunto dos pontos do plano de coordenadas $(x,\ tg(x))$.

Essa restrição se deve pela definição da tangente, $tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos{(x)}}$, donde $\cos{(x)} \neq 0$, isto é, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Como foi visto, o sinal da tangente é positivo no 1º e 3º quadrantes e negativo no 2º e 4º quadrantes. Daí, decorre da simetria que, em qualquer caso, $tg(x) = tg(x + \pi)$, o que mostra que a tangente é uma função periódica com período π. Para valores próximos e menores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que $\frac{\pi}{2}$, a tangente torna-se menor que qualquer número dado. Podemos então esboçar o gráfico da função tangente no intervalo $[0,\ \pi]$, como na Figura 11 a seguir, e repeti-lo em todos os intervalos da forma $[k\pi, (k+1)\pi]$, como na Figura 12.

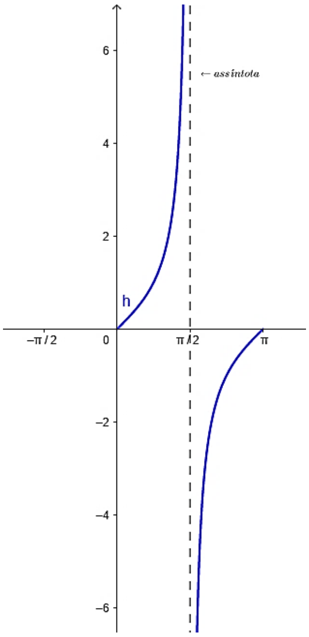


Figura 11 - Gráfico da função tangente no intervalo $[0, \pi]$

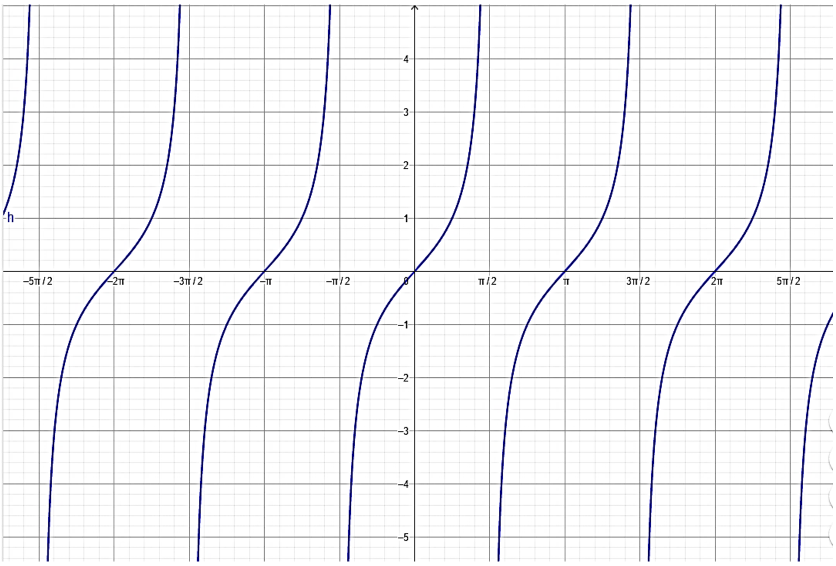


Figura 12 - Gráfico da função tangente

3.5. Exemplos resolvidos:

1) Calcule:
a) $tg\ 1.935°$.
b) $sen\ 3.000°$.
c) $sen\frac{10\pi}{3}$.
d) $\cos -\frac{49\pi}{6}$.

$Solução$:

a) Quando os arcos são maiores que uma volta, isto é, maiores que $360°$ ou 2π, devemos achar a sua primeira determinação positiva que é um arco côngruo pertencente a primeira volta

positiva. Assim, note que $1935° = 5x360° + 135°$. Então, $tg\ 1935° = tg\ 135°$. Pelo item c) da questão 2 concluímos que:
$tg\ 1935° = tg\ 135° = -1$.

b) Como $3000° = 8x360° + 120°$, então $sen\ 3000° = sen\ 120°$. Já que $120°$ é do 2°Q, temos:
$sen\ 120° = sen(180° - 120°) = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow sen\ 3000° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Note que $\frac{10\pi}{3} = \frac{6\pi+4\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\,\pi}{3}$. Como 2π é uma volta completa, $\frac{4\,\pi}{3}$ é a primeira determinação positiva de $\frac{10\pi}{3}$, ou seja, $sen\frac{10\pi}{3} = sen\frac{4\,\pi}{3}$. Já que $\frac{4\,\pi}{3}$ é do 3°Q,
$sen\frac{4\,\pi}{3} = -sen\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Podemos transformar a medida do arco para graus e resolver do mesmo modo dos itens a) e b).

d) Quando o arco é negativo o procedimento é um pouco diferente. Observe:

$-\frac{49\pi}{6} = \frac{-48\pi-\pi}{6} = -8\pi - \frac{\pi}{6}$, ou seja, foram dadas 4 voltas completas no sentido negativo e mais $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Com isso, para identificarmos a localização da extremidade do arco no sentido positivo fazemos:

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$. Portanto, $\cos - \frac{49\pi}{6} = cos\frac{11\pi}{6}$. Mas $\frac{11\pi}{6}$ é do 4°Q, então
$cos\ \frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{11\pi}{6}\right) = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $cos\left(-\frac{49\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Marca-se em um pneu, no ponto de seu contato com o solo, um ponto com tinta, que chamaremos de A. O carro percorre um determinado trecho, onde o pneu gira 18.780°. Qual a distância percorrida pelo carro sabendo que o raio r do pneu é 25 cm?

$Solução$:

Como $18780° = 52 \cdot 360° + 60°$, significa que o pneu deu 52 voltas completas e mais 60°.
Como o comprimento do pneu é $C = 2 \cdot \pi \cdot 25 = 50\pi = 50 \cdot 3{,}14 = 157cm$.
Daí, como foi dado 52 voltas e mais $\frac{1}{6}$ de uma volta, então:
$52 \cdot 157 = 8164\ cm$ e $\frac{1}{6} \cdot 157 \simeq 26{,}17\ cm$, total percorrido é $8190{,}17\ cm = 81{,}9\ m$.

3) Sabendo que α é um arco do primeiro quadrante, quais são os valores de m que satisfazem a igualdade $sen\ \alpha = 2m - 7$?

$Solução$:

Como $\alpha \in 1^{\underline{o}}Q$, então $0 < sen\ \alpha < 1$. Assim, temos:
$0 < 2m - 7 < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 + 7 < 2m - 7 + 7 < 1 + 7 \quad \Rightarrow \quad 7 < 2m < 8$
$\Rightarrow \quad \frac{7}{2} < m < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{7}{2} < m < 4$.

3.6. Exercícios propostos:

1) Encontre a primeira determinação positiva dos arcos:

a) $400°$ b) $900°$ c) $-860°$ d) $\frac{19\pi}{4}\ rad$ e) $\frac{81\pi}{6}\ rad$

2) (ENEM 2004) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado Mineirinho, conseguiu realizar a manobra denominada 900, na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação 900 refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a
a) uma volta completa. b) uma volta e meia. c) duas voltas completas.
d) duas voltas e meia. e) cinco voltas completas.

3) Para quais valores reais de t temos $sen\ \alpha = \frac{t+1}{2}$, sendo α um número real qualquer?

4) Sabendo que x é um número real pertencente ao intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, determine os possíveis valores reais de m de modo que tenhamos $cos\ x = \frac{2m}{5}$.

5) Calcule o valor de y na expressão.

$$y = \frac{cos\ \frac{9\pi}{2} - sen\ \frac{9\pi}{2}}{cos\ \frac{17\pi}{4} + 3 \cdot sen\ \frac{17\pi}{4}}$$

Aula 4: Funções trigonométricas do tipo $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bsen}(\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d})$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bcos}(\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d})$ e Aplicações

Objetivos:

- Reconhecer as funções do tipo $\mathrm{f}(x) = a + bsen(cx + d)$ e $g(x) = a + bcos(cx + d)$;
- Estudar o comportamento gráfico a partir da variação dos coeficientes;
- Analisar situações do cotidiano que envolvem eventos cíclicos;
- Resolver questões do ENEM e vestibulares.

1. Inicialmente vamos pensar no seguinte problema:

As marés são variações periódicas do nível do mar devido principalmente à atração gravitacional da Lua. Por sua periodicidade, esse fenômeno pode ser modelado de acordo com uma função do tipo $h(t) = b \cdot sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, em que $h(t)$ é a altura da maré no instante t, medido em horas, e b é o coeficiente que determina a variação máxima em relação ao nível médio do mar. Os extremos dessa variação são chamados de maré alta e maré baixa.

Em muitos lugares a água se espalha por uma grande área e sobe/desce apenas alguns centímetros. Por outro lado, existem algumas regiões, como a baía de Fundy, no Canadá, em que a diferença entre as alturas máxima e mínima chegam a 18m na lua cheia. Portanto, considerando a baía de Fundy no período de lua cheia, a função h que relaciona a altura da maré, em metros, em função do tempo t, em horas, é $h(t) = 9sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$.

Analisando a expressão algébrica, perguntamos:
Quais as alturas máximas e mínimas da maré?
Quanto tempo dura um ciclo, isto é, atingir o máximo, o mínimo e voltar a altura inicial?
Mais a frente responderemos os questionamentos!!!

2. Vamos estudar...

2.1. Funções do tipo $\mathrm{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bsen}(\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d})$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bcos}(\boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d})$

As funções definidas por $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$, em que seus coeficientes a, b, c e d são números reais com $b \neq 0$ e $c \neq 0$, são expressões trigonométricas que permitem a modelagem matemática de fenômenos periódicos. Importante perceber que as funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$ são casos particulares em que $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = 0$.
As funções do tipo trigonométricas $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x + d)$ têm propriedades semelhantes a $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = \cos(x)$, respectivamente. Cada coeficiente tem sua propriedade diante da representação gráfica, como veremos abaixo.

2.1.1. O coeficiente a translada o gráfico da função em $|a|$ unidades para cima se $a > 0$, ou para baixo se $a < 0$. O coeficiente a altera a imagem da função, como podemos ver na Figura 1.

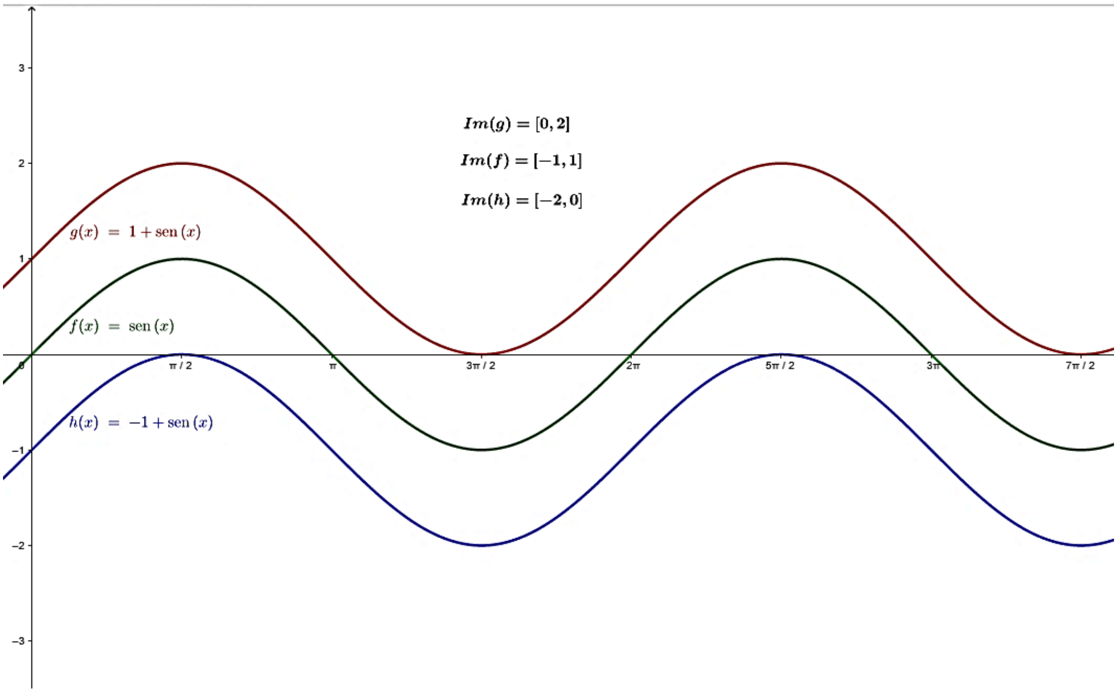


Figura 1

2.1.2. O coeficiente b amplia verticalmente o gráfico da função se $|b| > 1$ e comprime verticalmente se $|b| < 1$. Podemos resumir que b aumenta ou diminui a amplitude da curva, como podemos ver na Figura 2. O coeficiente b também altera a imagem da função.

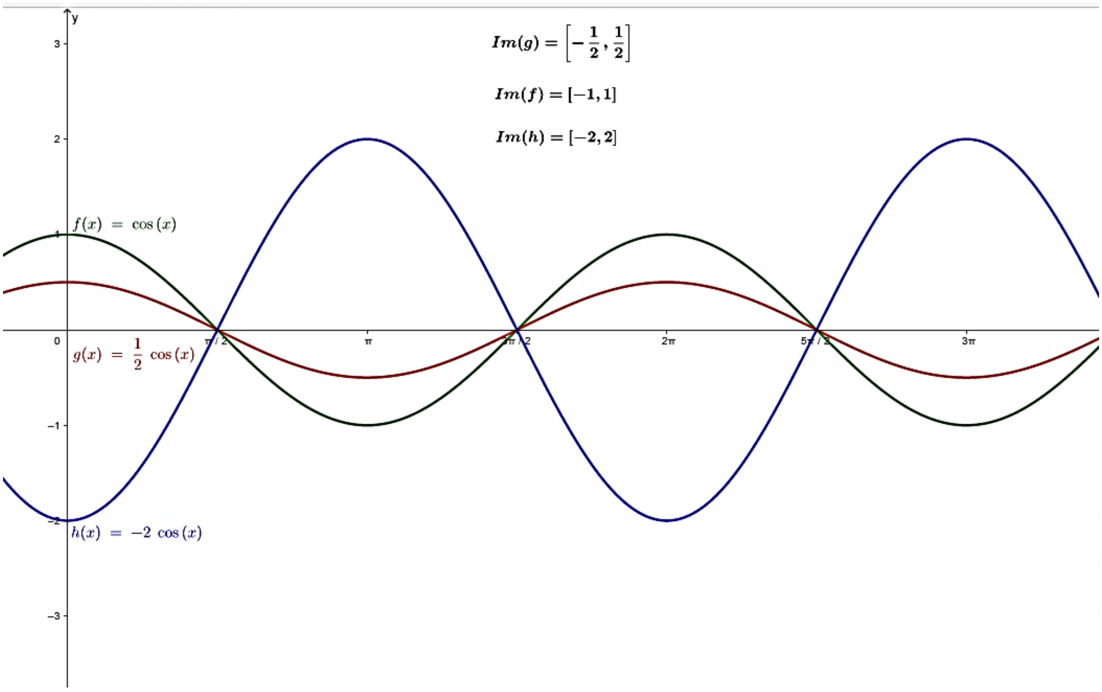


Figura 2

2.1.3. O coeficiente c amplia horizontalmente se $|c| < 1$ e comprime se $|c| > 1$, alterando o período da função, vejamos os exemplos na Figura 3. Podemos dizer que o coeficiente c aumenta ou diminui o comprimento da onda. Logo, o comprimento da onda equivale ao período da função.

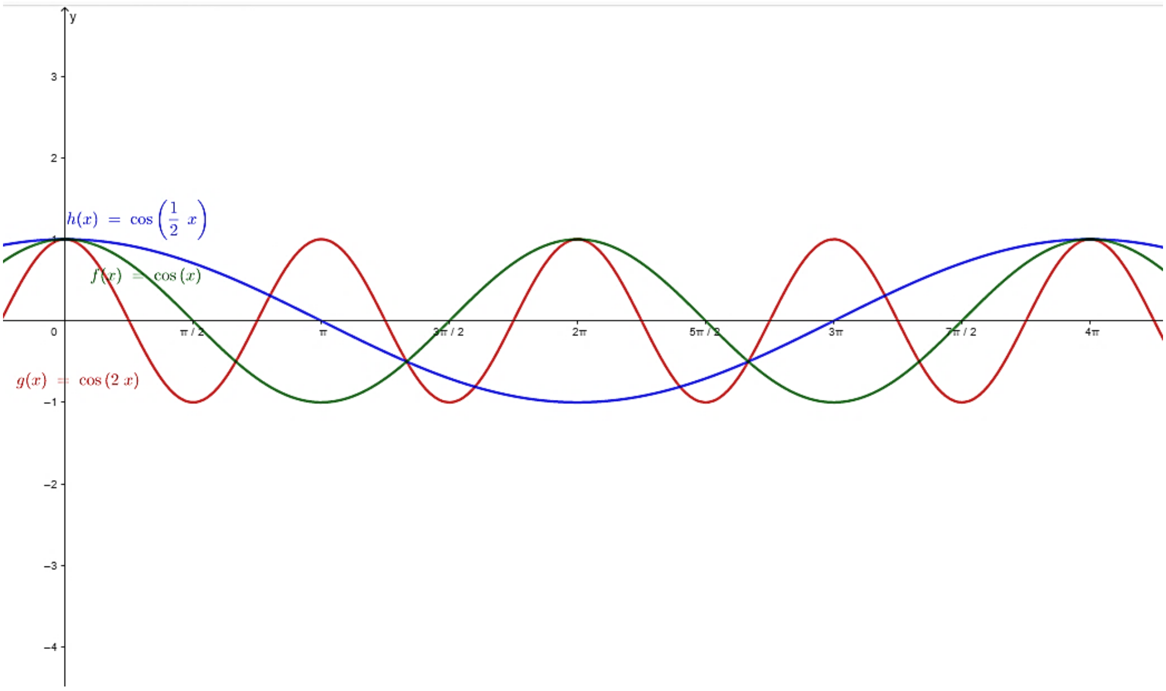


Figura 3

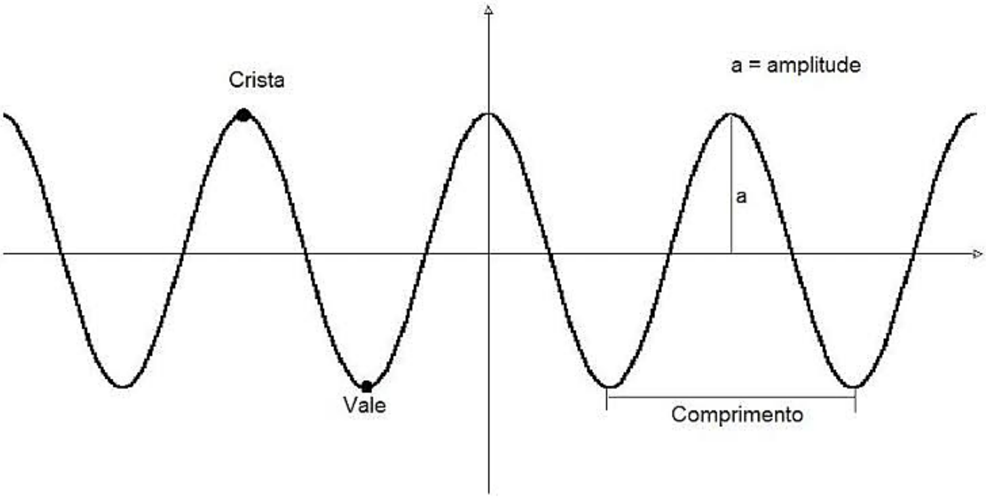


Figura 4

Note, na Figura 3, que o período P das funções são $P_f = 2\pi$, $P_h = 4\pi$ e $P_g = \pi$. A Figura 4 ajuda a esclarecer os termos comprimento de onda, amplitude, crista e vale, utilizados acima.

2.1.4. O coeficiente d translada o gráfico da função em $\left|\frac{d}{c}\right|$ unidades para a esquerda se $\frac{d}{c} > 0$, ou para a direita se $\frac{d}{c} < 0$, como podemos observar na Figura 5.

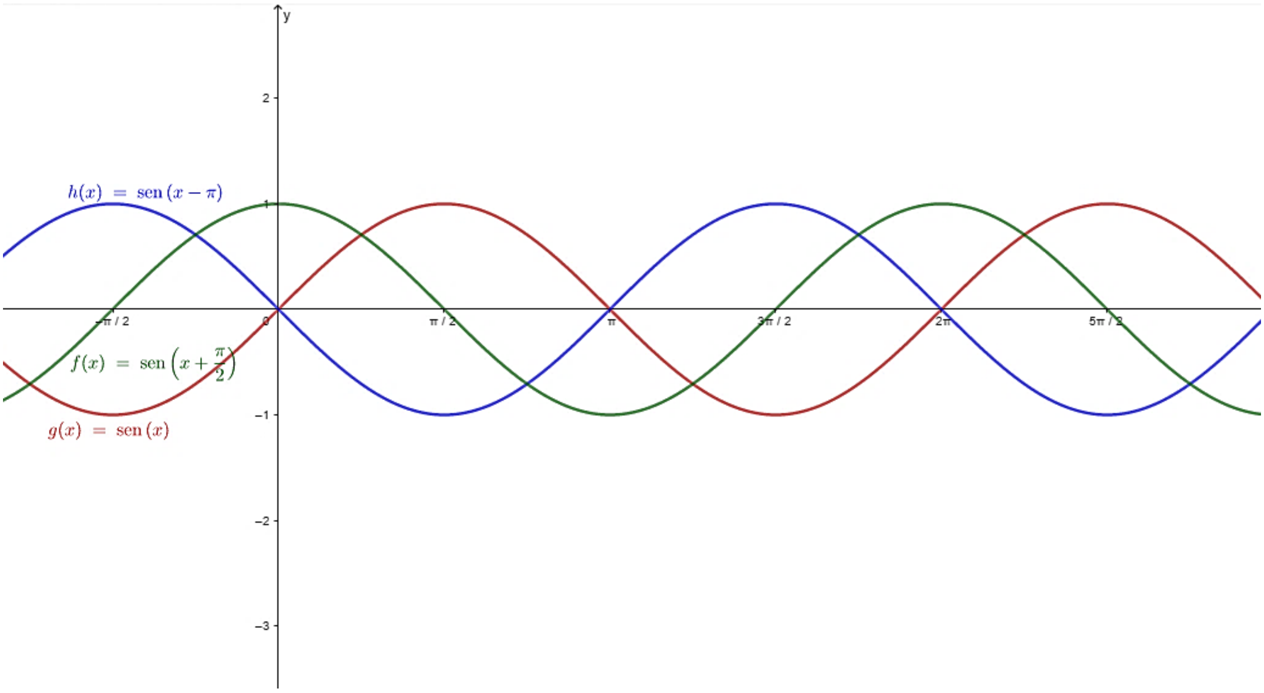


Figura 5

Perceba, na representação da Figura 5, que tanto a função f, como g e h tem $c = 1$. Daí, como nelas os coeficientes $d_g = 0$, $d_f = +\frac{\pi}{2}$ e $d_h = -\pi$, o gráfico de f é transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda e o de h é transladado π unidades para a direita em relação ao gráfico de g.

OBS: *Sejam a, b, c e d números reais, com b e $c \neq 0$. A função definida por $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x + d)$ tem período P dado por*
$P = \frac{2\pi}{|c|}$.

Para ver o comportamento do gráfico quando os coeficientes variam, basta acessar o link https://www.geogebra.org/m/du3awb5z.

2. Algumas aplicações das funções trigonométricas

2.1. A roda-gigante

A roda-gigante é uma das atrações mais tradicionais dos parques de diversões. Imagine uma roda-gigante, como a da Figura 18, cujo raio é 9m. Essa roda é sustentada por uma estrutura de ferro a partir de seu centro, mantendo-a presa ao solo. A distância do centro ao solo é 10m. O movimento que é feito tem uma velocidade constante e uma volta completa em torno do seu eixo central é concluída em 120s. Um visitante do parque que vai brincar na roda-gigante entra em uma cabine e após iniciar a volta ele observa que sua altura em relação ao solo varia de maneira periódica ao longo do passeio, de forma que uma determinada altura é atingida algumas vezes à medida que a roda executa as várias voltas do passeio.

Figura 6

Podemos expressar a altura de uma determinada cabine em função do instante do passeio através da função trigonométrica $h(t) = 10 + 9 \cdot sen\left(\frac{\pi}{60}t\right)$, onde $h(t)$ é a altura da cabine, em metros, no instante t, em segundos. Abaixo está representado o gráfico da função em que podemos observar a imagem e o período em um intervalo $0 \leq t \leq 240$.

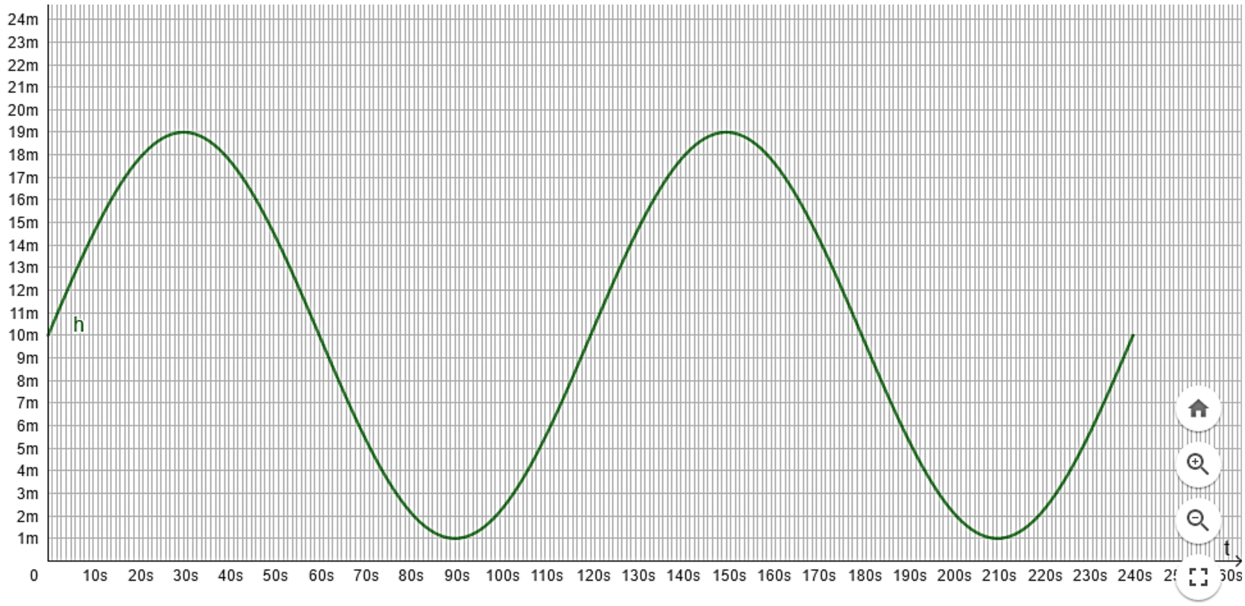


Figura 7

2.2. Pressão arterial

O ciclo cardíaco é mais uma situação que ocorre periodicamente. Trata-se de uma sequência de eventos que ocorre durante um batimento do coração. Nesse ciclo, os ventrículos contraem-se, ocorrendo a sístole ventricular e, logo em seguida, relaxam, ocorrendo a diástole. No momento da contração ventricular, o sangue é empurrado contra as paredes arteriais e a força com que ele é ejetado exerce uma pressão nas artérias, que, no pico da contração, é chamada de pressão sistólica. Já a menor pressão sanguínea nas artérias, que ocorre enquanto acontece o relaxamento do ventrículo, é conhecida como pressão diastólica.

As pressões sistólica e diastólica correspondem àquelas que o médico informa ao paciente em uma consulta. Quando ele diz, por exemplo, que sua pressão está 12 por 8, significa que a pressão sistólica aproximadamente é de 120mmHg (milímetros de mercúrio) e a diástole é de cerca de 80mmHg. Essas medidas fornecem informações importantes a respeito da saúde do indivíduo. Portanto, supondo que a pressão sanguínea de uma pessoa, a partir de um instante inicial $t = 0$, possa ser representada, aproximadamente, pela função $P(t) = 95 - 25sen\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right)$, sendo t o tempo dado em segundos e $P(t)$ a pressão sanguínea em milímetros de mercúrio t segundos após o instante inicial. Vejamos o gráfico dessa função na Figura 22.

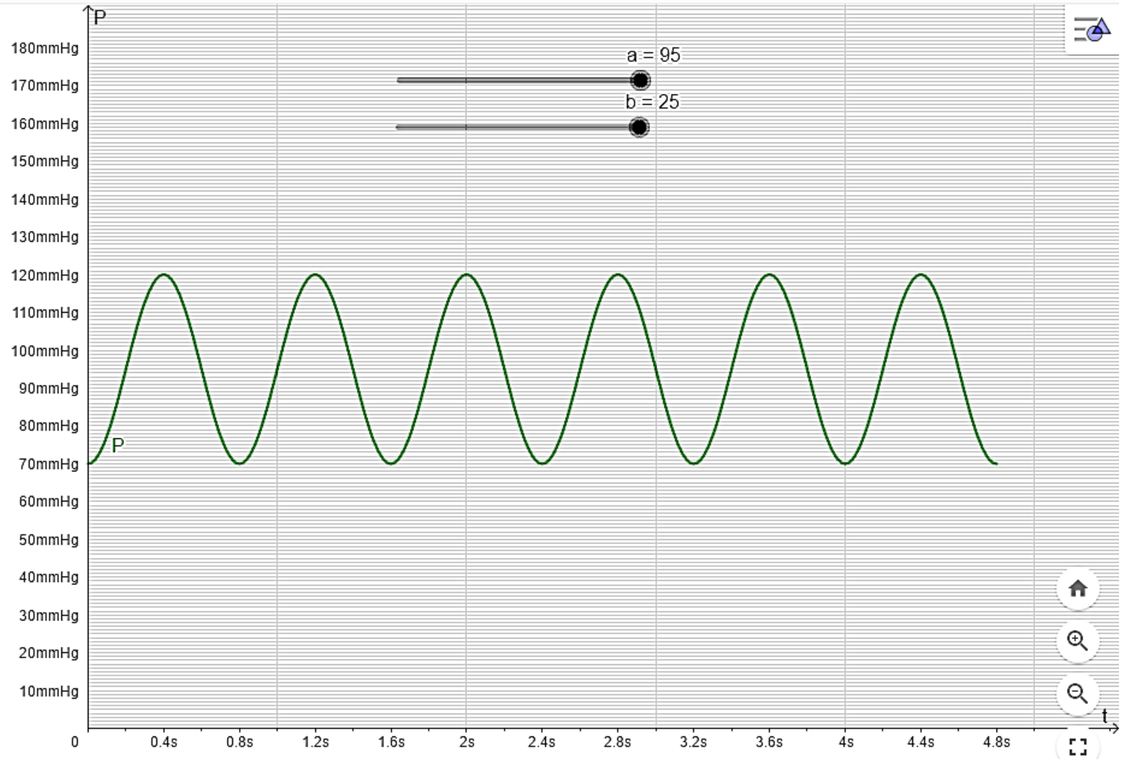


Figura 8

Com a representação gráfica fica muito fácil de identificar as pressões mínima e a máxima e o tempo correspondente a um batimento cardíaco desse indivíduo. A pressão em questão é 12 por 7 e seu coração bate 75 vezes por minuto. Veja que em $4s$ o coração bateu 5 vezes. Como $60s$ são 15 períodos de $4s$, em 1 minuto baterá 15x5=75.

3. Agora, vamos resolver o problema enunciado inicialmente.

Em relação aos valores máximos e mínimos de $h(t) = 9sen\left(\frac{5\pi}{31}t\right)$, sabemos que, como $a = 0$, então o eixo de simetria horizontal é o próprio eixo x, isto é, $y = 0$. Daí, o coeficiente $b = 9$ indica a variação média da altura em relação ao eixo de simetria, implicando o intervalo da imagem ser $[-9,9]$. Lembre que essa altura é em relação ao nível do mar e por isso é negativa.

Esse intervalo que alcança o máximo, o mínimo e volta para a mesma altura inicial é o período da função e é calculado por

$$P = \frac{2\pi}{\left|\frac{5\pi}{31}\right|} = 2\pi \cdot \frac{31}{5\pi} = \frac{62}{5} = 12{,}4h = 12h\ e\ 24min.$$

4. Exercícios resolvidos:

1) Determine os coeficientes das funções trigonométricas.

a) $f(x) = 5 + sen(3x - 2)$

b) $f(x) \ = \ 2 - sen(x)$
c) $f(x) = 3cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
d) $f(x) = 4\ cos(x)$
e) $f(x) = sen\left(\frac{\pi(x-1)}{6}\right)$
Solução:
a) $a = 5, b = 1, c = 3, d = -2.$
b) $a = 2, b = 1, c = 1, d = 0.$
c) $a = 0, b = 3, c = 1, d = -\frac{\pi}{3}.$
d) $a = 0, b = 4, c = 1, d = 0.$
e) Note que $\left(\frac{\pi(x-1)}{6}\right) = \left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right) = \frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{6}$. Então, $f(x) = sen\left(\frac{\pi x}{6} - \frac{\pi}{6}\right)$. Daí,
$a = 0, b = 1, c = \frac{\pi}{6}, d = -\frac{\pi}{6}.$

2) Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 1 + 3sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$. Obtenha o domínio, o conjunto imagem e o período de f.
Solução:
Como afirma o enunciado, o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$. Ora, a função seno é definida para todo número x. Para obtermos a imagem vamos partir da definição, que diz: $-1 \leq sen(x) \leq 1$. Note que $2x - \frac{\pi}{5}$ é um arco que varia de acordo com o valor de x. Então,

$$-1 \leq sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 1$$
$$\Longrightarrow 3 \cdot (-1) \leq 3 \cdot sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 3 \cdot 1$$
$$\Longrightarrow \ -3 \leq 3sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 3$$
$$\Longrightarrow -3 + 1 \leq 1 + 3sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 3 + 1$$
$$\Longrightarrow \ -2 \leq 1 + 3sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \leq 4$$
$$\Longrightarrow -2 \leq f(x) \leq 4.$$

Portanto, a $Im(f) = [-2, 4]$.
Outra maneira de calcular os valores máximo e mínimo da função é substituindo $sen\left(2x - \frac{\pi}{5}\right)$ por -1 e por 1.

Agora, calculemos o período de f. Identificando o coeficiente c, $c = 2$, temos:
$P = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi.$
Logo, o domínio de f é $\mathbb{R}$, $Im(f) = [-2, 4]$ e $P = \pi$.

3) **(ENEM 2014 – 2ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 6 – CINZA – Q158 – C5H22)**
Uma pessoa usa um programa de computador que descreve o desenho da onda sonora correspondente a um som escolhido. A equação da onda é dada, num sistema de coordenadas cartesianas, por $y = a \cdot sen[b(x + c)]$ em que os parâmetros a, b, e c são positivos. O programa permite ao usuário provocar mudanças no som, ao fazer alterações nos valores desses parâmetros. A pessoa deseja tornar o som mais agudo e, para isso, deve diminuir o período da onda. O(s) único(s) parâmetro(s) que necessita(m) ser alterado(s) é(são)
A) a. **B) $\boldsymbol{b}$.** C) c. D) a e b. E) b e c.
Solução:

A resolução desta questão está associada ao reconhecimento dos parâmetros das funções trigonométricas. Reescrevendo a equação da onda, temos $y = a \cdot sen(b \cdot x + c)$. Vimos em que o período da função varia de acordo com o coeficiente que multiplica a variável. Logo, o período da onda, nessa questão, é dado por $P = \frac{2\pi}{|b|}$, dependendo, portanto, apenas do coeficiente b.

4) **(ENEM 2018 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q145 – C5H20)** Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto A representa uma de suas cadeiras:

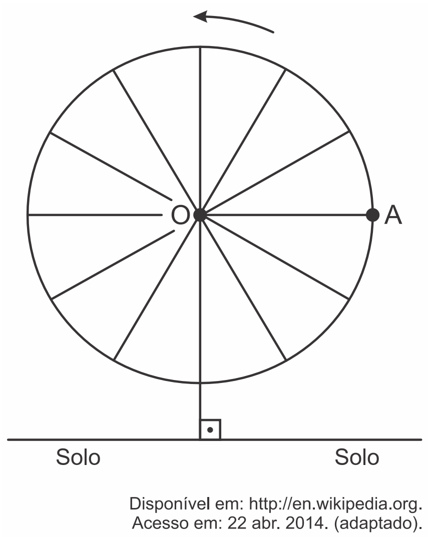


Figura 9

A partir da posição indicada, em que o segmento $\overline{OA}$ se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto O. Seja t o ângulo determinado pelo segmento $\overline{OA}$ em relação à sua posição inicial, e f a função que descreve a altura do ponto A em relação ao solo, em função de t. Após duas voltas completas, f tem o seguinte gráfico:

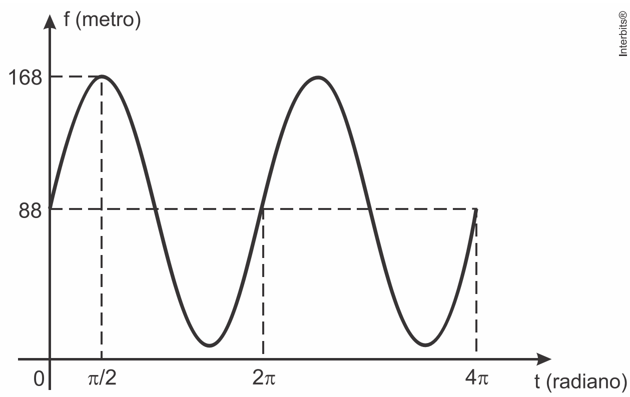


Figura 10

A expressão da função altura é dada por

A) $\boldsymbol{f(t) = 80sen(t) + 88}$.

B) $f(t) = 80\cos(t) + 88$.

C) $f(t) = 88\cos(t) + 168$.

D) $f(t) = 168sen(t) + 88\cos(t)$.

E) $f(t) = 88sen(t) + 168\cos(t)$.

Solução:
A roda gigante descreve uma expressão do tipo $f(t) = a + bsen(mt)$. Analisando o gráfico, temos que $f(0) = 88$. Daí, temos
$f(0) = a + bsen(m \cdot 0) \quad \Rightarrow 88 = a + bsen(0) \quad \Rightarrow a = 88$.
Ademais, pelo gráfico, sabemos que o período de f é 2π e,
$p = \frac{2\pi}{|m|} \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{|m|}$, portanto, vem que $m = 1$.
Finalmente, como $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168$, obtemos
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 88 + bsen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 168 \quad \Rightarrow b \cdot 1 = 168 - 88 \quad \Rightarrow b = 80$.
A resposta é $f(t) = 88 + 80sen(t)$.

5) **(ACAFE 2014)** Com o objetivo de auxiliar os maricultores a aumentar a produção de ostras e mexilhões, um engenheiro de aquicultura fez um estudo sobre a temperatura da água na região do sul da ilha, em Florianópolis. Para isso, efetuou medições durante três dias consecutivos, em intervalos de 1 hora. As medições iniciaram às 5 horas da manhã do primeiro dia (t = 0) e os dados foram representados pela função periódica $T(t) = 24 + 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, em que t indica o tempo (em horas) decorrido após o início da medição e T(t), a temperatura (em °C) no instante t. O período da função, o valor da temperatura máxima e o horário em que ocorreu essa temperatura no primeiro dia de observação valem, respectivamente
A) $6h, 25{,}5°C$ E $10h$.
B) $12h, 27°C$ E $10h$.
C) $\boldsymbol{12h, 27°C}$ E $\boldsymbol{15h}$.
D) $6h, 25{,}5°C$ E $15h$.
Solução:
Para calcular o período basta identificar o coeficiente que multiplica a variável, no caso $\frac{\pi}{6}$, e fazer:
$p = \frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|} = 2\pi \cdot \frac{6}{\pi} = 12h$.
Notemos que a temperatura máxima acontecerá quando $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$
$\Rightarrow T_{Max} = 24 + 3 \cdot 1 \quad \Rightarrow T_{Max} = 27°$.
E ainda, $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Rightarrow \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Mas, para $k = 0$, temos $t = -2$, que não é o que queremos. Pondo, agora, $k = 1$, teremos:
$\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi t}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi t}{6} = \frac{10\pi}{6} \quad \Rightarrow t = 10$.
A hora que aconteceu a temperatura é $h = t + 5$, pois as medições iniciaram às 5 horas da manhã.
Portanto, a temperatura máxima acontece as 15 horas.

6) **(ENEM 2017 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q146 – C5H22)** Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo x com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ sendo k uma constante, e supondo-se que x está entre 0° e 90°.

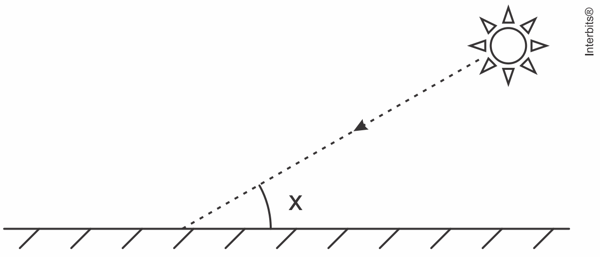


Figura 11 – Raios de luz solar atingindo a superfície

Quando $x = 30°$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?
A) 33%
B) 50%
C) 57%
D) 70%
E) 86%
Solução:
A função intensidade $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$ assume seu valor máximo quando $sen(x) = 1$, ou seja, $x = 90°$. Nesse caso teríamos, $I(90°) = k \cdot sen(90°) \Rightarrow I(90°) = k$. Como $sen(30°) = 0{,}5$, quando $x = 30°$, temos:
$I(30°) = k \cdot sen(30°) \Rightarrow I(30°) = 0{,}5k$.
Assim, x variando entre 0° e 90°, $I(x)$ vai variar entre 0 e k.
Logo, a intensidade luminosa quando $x = 30°$ se reduz a 50%.

5. Exercícios Propostos:

1) (ENEM 2010 - 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q161 – C5H21) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por $r(t) = \frac{5865}{1+0{,}15.\cos(0{,}06t)}$.
Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r, no apogeu e no perigeu, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de
A) 12765 km. B) 12000 km. C) 11730 km. D) 10965 km. E) 5865 km.

2) **(UFPR 2013)** O pistão de um motor se movimenta para cima e para baixo dentro de um cilindro, como ilustra a figura.

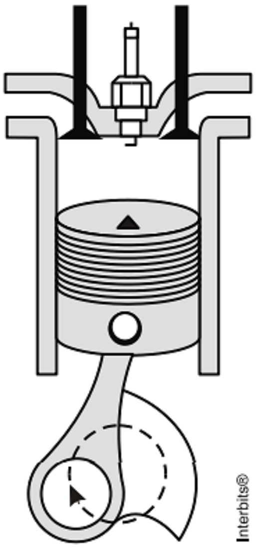


Figura 12 - Ilustração do pistão de um motor

Suponha que em um instante t, em segundos, a altura $h(t)$ do pistão, em centímetros, possa ser descrita pela expressão: $h(t) = 4sen\left(\frac{2\pi t}{0,05}\right) + 4$.

a) Determine a altura máxima e mínima que o pistão atinge.

b) Quantos ciclos completos esse pistão realiza, funcionando durante um minuto?

3) **(FGV-SP)** Um supermercado, que fica aberto 24 horas por dia, faz contagem do número de clientes na loja a cada 3 horas. Com base nos dados observados, estima-se que o número de clientes possa ser calculado pela função trigonométrica $f(x) = 900 - 800sen\left(\frac{x\pi}{12}\right)$, em que $f(x)$ é o número de clientes e x a hora da observação (x é um número inteiro tal que $0 \leq x < 24$. Utilizando essa função, a estimativa da diferença entre o número máximo e o número mínimo de clientes dentro do supermercado, em um dia completo, é igual a

A) 600. B) 800. C) 900. D) 1500. E) 1600.

4) **(ENEM 2015 – 1ª APLICAÇÃO – 2° DIA – CADERNO 5 – AMARELO – Q176 – C5H21)** Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde x representa o mês do ano, sendo $x = 1$ associado ao mês de janeiro, $x = 2$ ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até $x = 12$ associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

A) janeiro. B) abril. C) junho. D) julho. E) outubro.

5) **(UFRS)** Se $f(x) = a + b \cdot sen\ x$ tem como gráfico

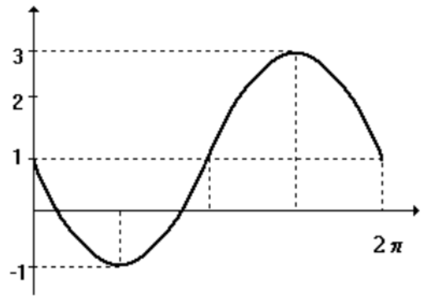


Figura 13

então
A) $a = -2$ e $b = 1$. B) $a = -1$ e $b = 2$. C) $a = 1$ e $b = -1$.
D) $a = 1$ e $b = -2$. E) $a = 2$ e $b = -1$.

Sugestão de videoaula: https://www.youtube.com/watch?v=4Ni3pqt-hjI.

RESPOSTAS:
AULA 1:
1) a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{7\pi}{4}$ f) $\frac{11\pi}{6}$
2) a) 30° b) 45° c) 60° d) 120° e)135° f) 150°
3) 3 rad
4) Aproximadamente 10,47 cm
5) Aproximadamente 16,75 cm
6) 30 voltas
7) a) 90° ou $\frac{\pi}{2}$ b) 75° ou $\frac{5\pi}{12}$ c) 157°30’ ou $\frac{7\pi}{8}$ d) 70° ou $\frac{7\pi}{18}$ e) 77°30’ ou $\frac{31\pi}{72}$

AULA 2:
1) 2
2) a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$
3) a) F b) F c) V d) V e) F f) V
4) $Cos\ x = -\frac{5}{13}$
5) a) S=$\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ b) S=$\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$
6) $m = 0\ ou\ m = \frac{8}{5}$
7) a) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ b) $-\frac{\sqrt{17}}{17}$

AULA 3:
1) a) $60°$ ou $\frac{\pi}{3}$; b) $180°$ ou π; c) $220°$ ou $\frac{11\pi}{9}$; d) $135°$ ou $\frac{3\pi}{4}$; e) $270°$ ou $\frac{3\pi}{2}$;
2) D;
3) $-3 \leq t \leq 1$;
4) $-\frac{5}{2} \leq m \leq 0$;
5) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

AULA 4:

1) B;
2) a) Alt. Min: 0; Alt. Max: 8;   b) 1200 ciclos;
3) E;
4) D;
5) D.