UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA
CENTRO DAS CIENCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS - CCET
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FRANCELINO BOMFIM SANTOS

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM NA LITERATURA E EM LIVROS DIDÁTICOS

BARREIRAS
2020

FRANCELINO BOMFIM SANTOS

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM NA LITERATURA E EM LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira

BARREIRAS
2020

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM NA LITERATURA E EM LIVROS DIDÁTICOS

Por

FRANCELINO BOMFIM SANTOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Etienne Lautenschlager
Doutora em Neurociência e Cognição, UFABC
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Prof. Dr. Edmo Fernandes Carvalho
Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, UFBA/UEFS
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira (orientador)
Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, UFBA/UEFS
Universidade Federal do Oeste da Bahia

Resultado: Aprovada
Barreiras, 22 de julho de 2020

FICHA CATALOGRÁFICA

S237 Santos, Francelino Bomfim

Equação polinomial de primeiro grau: uma análise da abordagem na literatura e em livros didáticos. / Francelino Bomfim Santos. – 2020.

139f.: il

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira

Dissertação (Mestrado) – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, BA, 2020.

1. Matemática – Estudo e Ensino I. Ferreira, Joubert Lima II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias III. Título.

CDD 510.7

Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB

"Uma criança, um professor, um livro e uma caneta podem mudar o mundo".

Malala Yousafzai, Nobel da Paz em 2014.

AGRADECIMENTOS

Chegar ao fim dessa caminha não seria possível sem a ajuda de muitos. Sem dúvida alguma, tenho muito que agradecer:

Ao Pai Celeste, por ter me feito esse cara corajoso, batalhador, sonhador e ter me dado forças para saltar os obstáculos que havia no caminho;

À minha filha Nycole Lorranny Vitiman Santos e à minha esposa Daiane Conceição Vitiman, pela compreensão, apoio e suportar os momentos de solidão que o Curso nos impuseram;

Aos meus colegas de Curso, pelo companheirismo, incentivo e compartilhamento de ideias;

Ao meu sobrinho e afilhado Kaique James Santos Mata, pelas viagens realizadas comigo à Rodoviária;

À Marcos Antônio de Oliveira Barbosa por ter me socorrido nos momentos em que não pude viajar de ônibus, me permitindo ir a Barreiras com sua companhia e companheirismo;

Ao Senhor Antônio Batista de Oliveira, sua esposa Maria Nilza da Silva Oliveira e filhos, pelo aconchegante acolhimento em sua casa e pelas caronas realizadas comigo em Barreiras;

Aos meus professores da UFOB, pela humildade, paciência e pelo trabalho competente que realiza, tornando a construção desse sonho possível;

Ao professor e orientador Dr. Joubert Lima Ferreira, por ter aceitado o convite e acreditado em mim, compartilhando seus conhecimentos, com dicas e sugestões e permitindo que esse trabalho fosse construído;

Ao grupo de pesquisa Laboratório de Inovação e Pesquisa em Educação Matemática (LIPEM) da UFOB.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001".

A todos vocês, meu muito obrigado!

RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo geral descrever como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), abordam o tema equação polinomial de primeiro grau. Para tanto, foram desenvolvidos três objetivos específicos por meio de três artigos e um produto educacional, os quais compõem os capítulos da dissertação. Os resultados mostram que o trabalho com a Álgebra, e em particular equação polinomial de primeiro grau, deve buscar o desenvolvimento do pensamento algébrico e da generalização, desenvolvendo habilidades de compreensão, representação e resolução de problemas em detrimento da manipulação mecânica de símbolos. Revela que a implementação de tarefas diversificadas, desafiadoras e com alto grau de exigência cognitiva favorece o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa. Apontam, por um lado, limitações no conhecimento do professor em relação a conceitos e resolução de problemas, por outro, mostra que esses profissionais, em sua prática pedagógica, lançam mão de diversos recursos como artigos acadêmicos, sites, balanças de dois pratos, software matemático, sequencias de atividades eletrônicas para prepararem e ministrarem aula sobre equações. Indicam também lacunas na aprendizagem dos alunos. O uso da balança, as propriedades da igualdade e das operações inversas, a neutralização e transposição de termos são recorrentes no trabalho com equações polinomiais de primeiro grau.

Palavras-chave: Equação polinomial de primeiro grau; Ensino e aprendizagem; Revisão Sistemática de Literatura; Pesquisa documental; Tarefas e livros didáticos.

ABSTRACT

The present research had as general objective to describe how the scientific literature, published in periodicals with scope in Mathematical Education, and didactic books, approved by the National Program of the Book and of the Didactic Material (PNLD), approach the theme polynomial equation of first degree. To this end, three specific objectives were developed through three articles and an educational product, which make up the dissertation chapters. The results show that the work with Algebra, and in particular polynomial equation of the first degree, should seek the development of algebraic thinking and of generalization developing skills of understanding, representation and problem solving at the expense of the mechanical manipulation of symbols. Reveals that the implementation of diversified, challenging tasks and with a high degree of cognitive demand favors the development of a meaningful learning. They point out, on the one hand, limitations in the teacher's knowledge in relation to concepts and problem solving, on the other, it shows that these professionals, in their pedagogical practice, make use of various resources such as academic articles, websites, two-dish scale, mathematical software, sequences of electronic activities to prepare and teach class on equations. They also indicate gaps in student learning. The use of the balance, the properties of the equality and of the inverse operations, the neutralization and transposition of terms are recurrent in the work with polynomial equations of the first degree.

Keywords: First degree polynomial equation; Teaching and learning; Systematic Literature Review; Documentary research; Tasks and textbooks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Dimensões da Álgebra Segundo os PCN (1998). 31
Figura 2 - Etapas do processo de Revisão Sistemática de Literatura 37
Figura 3 - Definição de equação no LD01.. 65
Figura 4 - Definição de equação no LD02.. 65
Figura 5 - Definição de equação no LD03.. 66
Figura 6 - Resolução de equação polinomial de primeiro grau por meio de operações inversas. 67
Figura 7 - Sequências de operações algébricas em uma equação. 68
Figura 8 - Resolução de equação polinomial de primeiro grau: método das equações equivalentes. 68
Figura 9 - Resolução de equação polinomial de primeiro grau: método das equações equivalentes. 69
Figura 10 - Ensino de equação polinomial de primeiro grau com o uso de balança de dois pratos. 70
Figura 11 - Ilustração das transformações de registros em um problema de equação polinomial de primeiro grau 71
Figura 12 - Equações prontas, que não demandam conversão de registro de representação. 72
Figura 13 - Problemas sobre equação polinomial de primeiro grau com demanda de conversão. 72
Figura 14 - Dimensões das tarefas.. 83
Figura 15 - Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática. 87
Figura 16 - Tarefa do tipo exercício. 90
Figura 17 - Tarefa do tipo problema. 93
Figura 18 - Uso de diagrama na resolução de problema... 95
Figura 19 - Uso de grelha na resolução de problema 95
Figura 20 - Tarefa do tipo investigativa. 97

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Alguns dados estatísticos das obras. 73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Concepções da Álgebra na Perspectiva de Usiskin (1995). 31
Quadro 2 - Multissignificados de Equação... 32
Quadro 3 - Zonas de perfil conceitual de equação e sua breve descrição. 33
Quadro 4 - Síntese das categorias.. 44
Quadro 5 - Vertentes fundamentais do pensamento algébrico 57
Quadro 6 - Organização das obras.. 63
Quadro 7 - Organização da Unidade temática Álgebra. 63
Quadro 8 – Ensino de equação polinomial de primeiro grau e conhecimento especializado do professor... 89
Quadro 9- Síntese dos Resultados da pesquisa... 108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Quantidade de artigos selecionados por periódico na primeira e segunda etapa. 36
Tabela 2 - Quantidade de artigos selecionados por categoria 38

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13
1.1 Trajetória profissional/acadêmica e a aproximação com o objeto de pesquisa 13
1.2 Apresentação do tema 15
1.3 Objetivos da pesquisa 18
1.4 Relevância da pesquisa 19
1.5 Aspectos metodológicos 20
1.6 Organização da dissertação 21
REFERÊNCIAS 23
CAPÍTULO I – Artigo 01 28
ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA LITERATURA 28
1 INTRODUÇÃO 29
2 REFERENCIAL TEÓRICO 30
3 ASPECTOS METODOLÓGICOS 35
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS 37
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 46
REFERÊNCIAS 47
CAPÍTULO II – Artigo 02 54
EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM EM TRÊS LIVROS DIDÁTICOS 54
1 INTRODUÇÃO 55
2 REFERENCIAL TEÓRICO 56
3 ASPECTOS METODOLÓGICOS 62
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS 62
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 74
REFERÊNCIAS 75
CAPÍTULO III – Artigo 03 80
TAREFAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 80
1 INTRODUÇÃO 81
2 REFERENCIAL TEÓRICO 82
3 ASPECTOS METODOLÓGICOS 89
4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS 90
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 101
REFERÊNCIAS 103
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 106
5.1 Retomando o problema de pesquisa 106
5.2 Compreensão dos resultados 106
5.3 Implicações para pesquisas futuras 109
5.4 Implicações para a prática do professor 110
Referências 139

1 INTRODUÇÃO

Nessa introdução, na subseção 1.1 narro parte de minha trajetória profissional/acadêmica, descrevendo minha aproximação com o tema e os motivos e implicações que me motivaram a escolher o objeto de estudo. Em seguida, na subseção 1.2 realizo a apresentação do tema, discorrendo sobre os conceitos, ideias e parâmetros presentes na literatura e documentos oficiais a respeito da abordagem do objeto de conhecimento em estudo. Na subseção 1.3, apresento os objetivos, geral e específicos da pesquisa, prosseguindo, na subseção1.4 descrevo a relevância da pesquisa para a formação profissional e para o processo de ensino e aprendizagem. Descrevo ainda, na subseção 1.5, os aspectos metodológicos que nortearam os processos de coleta e análise de dados e, por fim, na subseção 1.6 descrevo a organização e o formato da dissertação, a qual está estruturada no formato multipaper.

1.1 Trajetória profissional/acadêmica e a aproximação com o objeto de pesquisa

Passo agora a narrar um pouco de minha trajetória profissional e acadêmica, como também a aproximação com o objeto de pesquisa. Concluí o Ensino Médio em dezembro de 2002, modalidade Magistério para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Em abril de 2003, viajei para Minas Gerais para trabalhar na lavoura de alho, cebola e cenoura. Um mês depois, recebi uma ligação de minha irmã para voltar e trabalhar como professor contratado pela Prefeitura de meu município, Macaúbas, localizada na região centro-oeste da Bahia, distante 695 km de Salvador, capital do Estado. Recusei. De volta à Macaúbas, no início de 2004, fui contratado para dar aula, e no dia 16 de abril de 2004, eu pisava numa sala de aula como professor pela primeira vez. Começava minha trajetória como profissional da educação. Porém, em dezembro do mesmo ano, após findar as aulas, voltei a Minas Gerais, agora para o triângulo mineiro, no intuito de retornar quando as aulas recomeçassem. A volta programada não aconteceu. A empresa precisava de alguém com características apropriadas para comandar o escritório, pediu para eu ficar, e eu fiquei. Embora soubesse que iria sofrer, aceitei o convite, pois ali eu ganhava mais e tinha direitos trabalhistas, como férias e seguro desemprego. Fiquei quase dois anos na empresa.

No final de setembro de 2006, recebi uma ligação de um amigo e ex-professor, o qual me disse que a Prefeitura Municipal de Boquira, Bahia – cidade vizinha a Macaúbas –, havia lançado edital de abertura de concurso para professores. Pedi que ele realizasse minha inscrição (ele havia ficado com uma declaração minha). Então, conversei com meu superior e pedi aviso prévio[1] à empresa. No final de outubro do mesmo ano, retornei à Macaúbas e uma semana depois, no dia 06 de novembro de 2006, eu realizava a prova do referido concurso. Fui aprovado e no dia 02 de abril de 2007 eu assinava o meu termo de posse. Esse fato é um divisor de águas em minha vida, sem o qual eu não estaria realizando esse trabalho agora.

A profissão de professor me possibilitou conhecer novos mundos, a crescer tanto como pessoa como profissional, além de permitir uma estabilidade financeira. É uma profissão muito dinâmica, na qual aprendemos a lidar com o diferente e a enfrentar múltiplos desafios. No início, comecei atuando no Ensino Fundamental, tanto nos anos iniciais quanto nos finais. Neste nível, atuava ministrando aulas de Língua Portuguesa, Matemática, Ciências, Geografia e História, para os anos iniciais e Matemática e Ciências para os anos finais. Em 2009, entrei para o quadro de pessoal da Secretaria de Educação da Bahia, como professor sob o Regime Especial de Direito Administrativo (REDA) e fiquei até 2018. Em 2019, precisamente no dia 17 de janeiro, eu era admitido no quadro de pessoal da Secretaria de Educação do Estado da Bahia, agora como professor concursado, pois havia sido aprovado em concurso público.

Durante esse período, passei a “conhecer” o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) por meio de videoaulas no *youtube*. Fiquei encantado e admirado com a beleza e profundidade das questões; e então, pensei: eu quero isso para mim, eu posso! Porém, naquele momento era algo impossível, pois o programa era ofertado apenas nas regiões metropolitanas. Fiquei no aguardo de o programa ser ofertado em cidades mais próximas. E ele veio! Quer dizer, nem tão próxima assim. São só 380 quilômetros de distância! Quando vi que havia saído o edital e que havia vagas na Universidade Federal do Oeste da Bahia, em Barreiras-Bahia, não tive dúvidas e realizei a inscrição. Resultado: fui aprovado! E agora estou escrevendo a dissertação, último trabalho do programa.

Voltando ao posto de professor da Educação Básica. Já nos primeiros anos de atuação, percebi uma dificuldade dos alunos em lidar com a linguagem algébrica. Situações em que envolviam cálculo com expressão algébrica, nas quais apareciam letras, sejam assumindo valor genérico, de incógnita ou funcional, era um horror para os alunos. Isso mesmo em expressões prontas, cujos comandos eram calcule, simplifique, resolva. Percebi que os alunos, de um modo geral, sempre apresentavam dificuldades em realizar operações de soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com monômios. Essa dificuldade aumenta em situações em que o aluno tem de ler, interpretar e equacionar uma situação, operando com valores

[1] Documento que garante o desligamento do funcionário de uma empresa sem justa causa.

desconhecidos. Essa dificuldade também foi constatada por Gil (2008) ao realizar pesquisa junto a alunos e professores da 7ª série (atual 8º ano) do Ensino Fundamental.

Essas dificuldades vivenciadas no dia a dia de professor me deixavam (ainda deixam) nervoso e perplexo. Eu não entendia aquilo e até tinha dificuldade em aceitar essa realidade. Em 2010, comecei a cursar Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Tecnologias e Ciências (FTC), modalidade Educação à Distância (EAD), concluindo o curso em meados de 2013. Tal curso, de um modo geral, me capacitou bastante, me permitindo dar aula com mais segurança, porém longe de entender as dificuldades dos alunos em Álgebra e de ser capaz de mudar aquela realidade. No mesmo ano que conclui a Licenciatura em Matemática, iniciei um curso de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, pela Faculdade João Calvino. Mais aprendizagem em Matemática foi adquirida, porém assim como na licenciatura, foi mais conhecimento específico do conteúdo, o que não basta.

Por último, minha experiência como aluno do PROFMAT, me capacitou mais ainda, porém foi mais uma formação conteudista, principalmente nos dois primeiros semestres, durante os quais foram ministradas disciplinas que visavam o trabalho com cálculo e demonstrações. Nos dois últimos semestres, incluiu-se o estudo de disciplinas que envolviam o estudo de pesquisa na área de educação, mas não no sentido de compreender os processos e entraves no campo da Álgebra. Então decidi realizar minha pesquisa sobre como se dá a abordagem e os processos de ensino e aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau, objeto muito presente na vida de estudantes e professores. Dessa forma, o curso me possibilitou o contato com o conhecimento sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra escolar, em particular de equação polinomial de primeiro grau.

1.2 Apresentação do tema

O estudo de Álgebra na literatura, mostra que uma primeira preocupação dos pesquisadores com esse ramo do conhecimento matemático é tentar defini-lo por meio de seu uso na sociedade e assim, poder compreendê-la melhor (RIBEIRO; CURY, 2015; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Percebe-se, no entanto várias ideias e conceitos a respeito do que é (ou devo dizer: do que seria?) Álgebra. Um autor bastante requisitado por pesquisas que tratam sobre o entendimento de Álgebra é Usiskin (1995). No trabalho desse autor a Álgebra é entendida a partir do papel desempenhado pela variável e subdivide em quatro concepções. Na primeira concepção, chamada de *Aritmética generalizada*, a letra serve para generalizar modelos, como em $a\,.\,b = b\,.\,a$; Na segunda concepção, chamada *estudos de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, a variável desempenha papel de incógnita ou constante, e é usada para obter a solução de problemas ou simplificar expressões; Na terceira concepção, chamada *estudos de relações entre grandezas*, a variável funciona como argumento ou parâmetro e está presente em fórmulas, transmitindo relações entre grandezas, destacando-se ainda, uma relação com as funções; por último, na concepção chamada *estudo das estruturas*, a variável é vista como um objeto arbitrário, e transmite uma propriedade. Segundo o autor, essa última concepção de Álgebra diz respeito ao ensino superior e tem como objeto de estudo os anéis, domínio de integridade, corpos e espaços vetoriais.

Para Ponte, Branco e Matos (2009), na perspectiva dos que se dedicam a estudar esse campo da Matemática, o que prevalece é a ideia de um conjunto de regras de transformação de expressões e processos de resolução de equações (1º e 2º grau) e de sistemas de equações. Porém, a ideia de Ponte, Branco e Matos (2009) é de que o estudo da Álgebra nos ensinos básico e secundário (em Portugal), o que equivale à Educação Básica aqui no Brasil, deva desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, o que inclui a capacidade de manipulação de símbolos, por meio de expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções e outras relações e estruturas matemáticas, usando-as na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. Esses autores ainda citam a generalização como um dos pilares do pensamento algébrico, traduzindo-a como a capacidade de observação, descoberta e comprovação de propriedades existentes em uma classe de objetos.

Corroborando com a ideia de Ponte, Branco e Matos (2009), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que a Álgebra tem como finalidade a busca pelo desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações envolvendo quantidades de grandezas, como também de situações e estruturas matemáticas, por meio da linguagem simbólica (BRASIL, 2018).

Ainda de acordo com Brasil (2018), para o desenvolvimento do pensamento algébrico é preciso que o trabalho com a Álgebra crie condições e desenvolva no aluno habilidades de observação de regularidades e padrões, de criação, interpretação e uso de representações diversas, como a gráfica e a simbólica, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. Segundo esse documento, as ideias fundamentais associadas ao trabalho com Álgebra são equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.

No caso específico de equações, um trabalho muito referenciado é o de Ribeiro (2008). Esse autor, por meio de pesquisa bibliográfica, catalogou e classificou vários significados de equação, nomeando-os de multissignificados de equação, os quais compreendem as formas de ver, tratar e interpretar uma equação, como se observa abaixo:

> (i) Significado intuitivo-pragmático: noção intuitiva, igualdade entre duas grandezas, resolução de problemas de ordem prática;
> (ii) Significado dedutivo-geométrico: noção ligada a figuras geométricas, envolve cálculo com segmentos, lados de figuras geométricas, interseção de curvas;
> (iii) Significado estrutural-generalista: estrutura definida e com propriedades e características próprias, busca soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza;
> (iv) Significado estrutural-conjuntista: estrutura ligada a noção de conjunto, ferramenta para resolver problemas envolvendo relações entre conjuntos;
> (v) Significado processual-tecnicista: relaciona-se com os métodos e técnicas usados para a resolução, não é vista como um ente matemático;
> (vi) Significado axiomático-postulacional: noção da Matemática que não precisa ser definida, sentido noção primitiva como ponto, reta e plano, na Geometria Euclidiana.
>
> (RIBEIRO, 2008, p. 109-111)

Esses multissignificados se relacionam intimamente com as zonas de perfil conceitual de equação, elencadas pelo mesmo autor em 2013, as quais retomaremos mais adiante. É importante que o professor conheça e desenvolva esses mutissignificados por meio de tarefas diversificadas que permitam, ora resolver de um modo mais intuitivo com solução aritmética, permitindo o desenvolvimento da zona de perfil pragmática, ora de um modo algebricamente equacionando a solução, exigindo o uso de procedimentos e de propriedades da equação, o que possibilita o desenvolvimento da zona de perfil estrutural, por exemplo.

Várias são as pesquisas que tem equação polinomial de primeiro grau como objeto de estudo, seja sobre sua abordagem em livros didáticos (LOZADA; D'AMBROSIO, 2018; BARBOSA; LIMA, 2014; BARBOSA; MENDES, 2016; CATANEO; RAUEN, 2018), seja para relacionar seu ensino ao conhecimento do professor (RIBEIRO; OLIVEIRA, 2015; LAUTENSCHLAGER; RIBEIRO, 2014; BARBOSA; LIMA, 2018) ou ainda que realizam análise de questões ou materiais (BIANCHINNI; MACHADO, 2010; PAULA; LIMA, 2017; LOURENÇO; OLIVEIRA, 2018). Fato esse que mostra que o tema equações polinomiais de primeiro grau é bastante recorrente no meio acadêmico, revelando de fato, sua grande utilidade para a resolução de problemas em situações diversas e, consequentemente, sua importância para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática (BERNARD; COHEN, 1995).

Na literatura encontram-se diversas maneiras de definir uma equação, como por exemplo, "uma equação nada mais é do que uma pergunta feita em linguagem matemática usando números, letras e sinal de igualdade" (SANTOS; MORELATTI, 2016; LOZADA; D'AMBROSIO, 2018), "equação é uma igualdade que envolve uma ou mais quantidades desconhecidas chamadas incógnitas" (BARBOSA; LINS, 2013) ou ainda de forma generalizada $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$ (ARAÚJO, 2009). Quando n for igual a 1, temos equação polinomial de primeiro grau, a qual ganha a seguinte forma $ax + b = 0$, com a, b ∈ R e $a \neq 0$ e x é a incógnita.

No nosso entender, equação é uma ferramenta matemática usada para resolver problemas de ordem múltiplas, por meio da ideia de equivalência entre dois objetos, nos quais em pelo menos um deles há um valor desconhecido. Algebricamente falando, concordamos com a definição de equação encontrada em Araújo (2009), isto é, $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0$, com n ∈ N e $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in$ R.

Quanto a abordagem desse objeto, percebe-se pela literatura e pelos livros didáticos que uma ferramenta muito utilizada para representar a ideia de equivalência como também os processos de resolução é a balança de dois pratos (VLASSIS, 2002, COSTA, 2011; LOZADA; D'AMBROSIO, 2018; HUMMES; BREDA; MENEGUETTI, 2018; GRUCOMAT[2], 2018). No entanto, essa ferramenta ao mesmo tempo que facilita a compreensão do sinal de igualdade como também o ato de realizar a mesma operação em ambos os membros da equação, ela possui uso limitado, não servindo para representar equações do tipo $ax + b = 0$ nem com números negativos (VLASSIS, 2002).

Considera-se ainda importante que no processo de ensino e aprendizagem envolvendo o sinal de igualdade deva ser trabalhado seus diversos significados, quais sejam: processual, equivalência e funcional (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Portanto, como afirma Brasil (1998) a Álgebra constitui-se num espaço privilegiado, no qual o aluno pode-se desenvolver e exercitar sua capacidade de abstração e generalização. Já Catalan (2003) e Santos, Pereira e Nunes (2017) consideram que as tarefas envolvendo a tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica, cálculo algébrico e resolução de equações constituem uns dos elementos mais significativos no campo da Álgebra. Diante do exposto, a questão que norteia essa pesquisa é: como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), abordam o tema equação polinomial de primeiro grau?

1.3 Objetivos da pesquisa

[2] Grupo Colaborativo em Matemática, vinculado ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco.

Esta dissertação tem como objetivo geral descrever como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), abordam o tema equação polinomial de primeiro grau.

Para alcançar o objetivo geral, foram traçados três objetivos que se desdobram nos três artigos que compõe esta dissertação.

No Capítulo I (artigo I) buscou-se analisar como a literatura sobre o ensino de Álgebra aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau.

Já o Capítulo II (artigo II) tem como objetivo analisar como livros didáticos abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau;

No Capítulo III (artigo III) dispôs-se a analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da educação básica.

1.4 Relevância da pesquisa

No mundo atual, vivemos rodeados de informações, muitas delas em forma de números e símbolos, exigindo de cada um de nós, habilidades para analisá-las e interpretá-las. E um conhecimento necessário para tal, é o matemático, em particular o algébrico. Nesse sentido, um indivíduo com pouco entendimento em Matemática, especificamente em Álgebra, encontrará dificuldades em muitas situações da vida, seja no trabalho ou em sociedade, pois várias são as situações em que temos que resolver problemas utilizando o conhecimento algébrico como também tomar decisões baseadas em tal conhecimento. Dessa forma, sendo o professor o principal responsável por promover esse conhecimento no aluno, ele precisa estar munido de informações e conhecimento, os quais só são possíveis por meio de pesquisas. A pesquisa gera o conhecimento, o conhecimento permite a ação, a ação permite a mudança, a transformação.

Nesse contexto, a relevância dessa pesquisa se justifica na medida em que trará informações a respeito do ensino e da aprendizagem sobre Álgebra escolar[3] e em particular equações polinomiais de primeiro grau, colaborando dessa forma, para o desenvolvimento profissional, não só do autor da pesquisa, como também de outros professores e, consequentemente, na melhoria da aprendizagem do aluno. A partir dos resultados alcançados,

[3] Baseado em David, Moreira e Tomaz (2013) estamos considerando Álgebra escolar como o conjunto de práticas e saberes adaptados provenientes da Álgebra acadêmica elementar e da Álgebra praticada no cotidiano social.

espera-se que essa pesquisa possa contribuir no apontamento de ações metodológicas como também para discussão e (re) formulação de políticas públicas educacionais que visem a melhoria do processo de ensino e aprendizagem.

1.5 Aspectos metodológicos

Na presente pesquisa adotamos uma metodologia qualitativa, baseada no paradigma interpretativo (CROTTY, 1998), por meio do qual procuramos entender como se dá a construção do conhecimento matemático durante a interação sujeito-objeto. O paradigma interpretativo nos informa que não existe uma realidade pronta a ser descoberta, mas as verdades e significados só têm existência a partir da interação sujeito-objeto, isto é, os significados são frutos da interação entre processos mentais e as características do objeto. Dessa forma, a pesquisa ganha uma abordagem qualitativa, na qual procuramos uma compreensão dos dados analisados, e não necessariamente tirar conclusões definitivas deles (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER 2002).

No capítulo I (artigo 1), tendo em vista o seu objetivo, a produção de dados se deu por meio de pesquisa bibliográfica (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), isto é, realizamos a busca de artigos em periódicos com escopo exclusivo da área de Educação Matemática, realizando a partir daí uma análise sistemática de literatura, avaliando cada estudo individual por meio da extração de dados e sistematização dos resultados (DONATO; DONATO, 2019).

Nos capítulos II e III (artigos 2 e 3, respectivamente) a pesquisa realizada foi do tipo documental (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2002), sendo os dados coletados em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2020. Tendo em vista o objetivo do capítulo II, a análise se deu em três livros didáticos, sendo dois deles os pré-escolhidos pelo município onde o autor da dissertação trabalha, os quais são relacionados a seguir: LD01- Matemática: Compreensão e Prática, do autor Ênio Silveira, Editora Moderna; LD02 - Convergências Matemáticas, do autor Eduardo Rodrigues Chavante, Editora SM e LD03 – Matemática: Realidade e Tecnologia, do autor Joamir Souza, Editora FTD.

Procurando desenvolver o objetivo do capítulo III, a análise se deu sobre três tarefas com tipologias diferentes, uma coletada do LD01 (tarefa do tipo problema) e outras duas coletadas do LD02 (uma do tipo exercício); a terceira tarefa foi reelaborada (JUNKERFEURBOM; KLÜBER, 2017) a partir da tarefa tipo exercício em tarefa investigativa. As tarefas foram classificadas com base em Ponte (2005) e Stein e Smith (2009) e analisadas a partir de Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017), enquanto que os possíveis conhecimentos necessários ao professor para a implementação e sistematização das tarefas foram analisados com base no modelo teórico *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) proposto por Carrillo et al. (2013) e colaboradores.

Os cursos de mestrado profissional comumente apresentam um produto educacional. Por se tratar de um mestrado voltado à formação continuada de professores que atuam na Educação Básica e, pensando de que modo essa pesquisa poderia contribuir com a prática pedagógica em sala de aula, pensamos uma cartilha. Ela surge como uma consequência de toda a pesquisa. A cartilha de orientação ao trabalho do professor para o ensino de equação polinomial do primeiro grau tem como foco nortear as formas de ver os processos de ensino e aprendizagem e ajudar o professor no planejamento das aulas, por isso ela é apresentada nas considerações finais, na seção implicações à prática do professor.

1.6 Organização da dissertação

A estrutura dessa Dissertação foge do formato "tradicional" e adota como estrutura de comunicação e divulgação o formato, digamos, alternativo, nomeadamente *multipaper*. O formato tradicional ou monográfico é entendido como um texto extenso e contínuo, constituído por capítulos estruturados em introdução, revisão de literatura, metodologia, resultados e discussões e considerações finais (BARBOSA, 2015; DUKE; BECK, 1999; MUTTI; KLÜBER, 2018). Já a dissertação no formato *multipaper*, é um conjunto composto por vários artigos, cada um com suas próprias características de individualidade, isto é, cada artigo possui seu próprio objetivo, revisão da literatura, método de pesquisa, resultados, discussões e conclusões, de maneira que ele possa ser submetido e aprovado em um periódico acadêmico independentemente dos demais artigos, ou baseado nos resultados parciais obtidos no artigo anterior (COSTA, 2014; Frank, 2013).

Grant e Reed (2006) afirmam que uma dissertação *multipaper* deve conter: um resumo, uma introdução, uma explicação ou resumo dos trabalhos incluídos, os artigos publicados, uma conclusão e uma revisão da literatura como um apêndice. Porém, a inclusão do conteúdo completo dos artigos publicados no documento mestre não é obrigatória, embora a discussão acerca das publicações parciais o seja.

Duke e Beck (1999) e Barbosa (2015) relatam que uma desvantagem do formato monográfico é ser de única publicação e, portanto, tem um alcance reduzido no número de leitores, em contrapartida, o formato *multipaper* tem grande vantagem nesse sentido, pois possui várias publicações, seus artigos são publicados em diferentes periódicos, atingindo assim, um número maior e mais diversificados de leitores

Barbosa (2015) referenciando Duck e Beck (1999) afirma que o formato de dissertação como uma coleção de artigos (*multipaper*) exigirá do futuro pesquisador a capacidade de, entre outras, selecionar periódicos, preparar manuscritos conforme suas normas, exercendo o poder de síntese, sem perder a consistência. Relata ainda que nesse formato, o futuro pesquisador já precisa lhe lidar com artigo, isto é, um produtor participante da comunidade cientifica. Portanto, é um viés pelo qual se oferece ao mestrando ou doutorando uma socialização antecipada com um fazer que é próprio do trabalho do pesquisador.

Diante do exposto, optamos pela escrita desta dissertação no formato *multipaper,* o qual traz a seguinte configuração:

(i) Introdução
(ii) Capítulo I – Artigo 1: Uma análise de como a literatura sobre o ensino de Álgebra aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau.
(iii) Capítulo II – Artigo 2: Uma análise de como livros didáticos abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau.
(iv) Capítulo III – Artigo 3: analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da educação básica.
(v) Considerações Finais, espaço onde são apresentadas as conclusões da pesquisa de maneira integrada, as implicações para a pesquisa e para a prática do professor que ensina Matemática na Educação Básica. Nesse último item é apresentada uma cartilha de orientação ao trabalho do professor para o ensino de equação polinomial de primeiro grau.

Dando prosseguimento, realizaremos, no próximo capítulo, a análise sistemática de literatura sobre a abordagem do objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. No capítulo seguinte, analisaremos três livros didáticos para o sétimo ano do Ensino Fundamental, tendo em vista a abordagem dada ao conteúdo equação polinomial de primeiro grau. No último capítulo, serão analisadas três tarefas selecionadas de tais livros, ponderando sobre suas limitações ou potencialidades para a promoção de possíveis situações de aprendizagem de alunos. Por último, nas considerações finais, retomaremos nosso problema de pesquisa, sintetizaremos os resultados de cada capítulo e apresentaremos um produto educacional sobre equação polinomial de primeiro grau, destinado ao trabalho do professor em sala da aula.

REFERÊNCIAS

ALVES–MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas Ciências Naturais e Sociais**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2002.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau. Revista **Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 110-129, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n2p110/28441. Acesso em: 29 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Equação Polinomial do Primeiro Grau: uma análise praxeológica em três livros didáticos do 7º do ensino fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, p. 1-20, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32077/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LINS, Abigail Fregni. Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 337-357, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/15062/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; MENDES, Anderson Albuquerque. A contextualização no ensino de equações: uma análise em um livro didático antes e depois do pnld. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 11, n. 2, p. 363-386, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p363/33646. Acesso em: 27 ago. 2019.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Formatos Insubordinados de Dissertações e Teses na Educação Matemática. In: Beatriz Silva D'Ambrosio; Celi Espasandin Lopes (org.). **Vertentes as subversões na produção Científica em Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2015, v. 1, p. 347 -367.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif, MACHADO, Sílvia Dias de Alcântara. A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4198/3310. Acesso em: 28 ago. 2019

BOLEA CATALÁN, P. C. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolare**s. Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC,

1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 17 ago. 2019.

HUMMES, Viviane Beatriz; BREDA, Adriana; MENEGUETTI; Márcia Rodrigues Notare. O ensino de equações do primeiro grau à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa: uma proposta sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor. **REMAT**, Rio Grande do Sul, v. 4, n. 1, p. 102-114, 2018. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2716/2062. Acesso em: 15 nov. 2019.

BREUNIG, Raquel Taís; NEHRING, Cátia Maria. Análise de questões do SAERS e o ensino de álgebra na perspectiva dos registros de representação**. Revista Eletrônica de Educação Matemática**, ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 1, p.48-61, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p48/22377. Acesso em 27 ago. 2019.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS-GONZÁLEZ, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, Maria Cinta. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. **CERME**, Universidade de Huelva, Espanha, n. 8, p. 2985-2994, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching/link/54957cb60cf20f487d2f5465/download. Acesso em 15 abr. 2020.

CATANEO, Vanessa Isabel; RAUEN, Fábio José. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo *S*istemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.2Y, p. 140-170, 2018. *Disponível em:* https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36693/pdf. Acesso em: 15 nov. 2019.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**. 2. ed. São Paulo: Edições Sm, 2018. 288 p. (7º ano).

COSTA, Wanderleya Nara Gonçalves. Dissertações e teses Multipaper: uma breve revisão bibliográfica. **Anais do VIII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 8, n. 1, 2014. Disponível em: https://desafioonline.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3086. Acesso em: 13 abr. 2020.

COSTA, Eveline Vieira. Comparação entre duas sequências didáticas sobre ensino introdutório de álgebra. **Revista de Educação Matemátca**, São Paulo, v. 13, n. 15, p. 55- 68, 2011. Disponível em: http://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat SP/article/view/67/pdf. Acesso em: 3 set. 2019.

CROTTY, Michael. **The foundations of social research**: meaning and perspective in the research process. London. Thousand Oaks. New Delhi, 1998.

DAVID, Maria Manuela; MOREIRA, Plínio Cavalcanti; TOMAZ, Vanessa Sena. Matemática Escolar, Matemática Acadêmica e Matemática do Cotidiano: uma teia de relações sob investigação. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 15, n. 1, p. 42-60, 2013. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/349/365. Acesso em 07 ago. 2020.

DONATO, Helena; DONATO, Mariana. Etapas na Condução de uma Revisão Sistemática. **Acra Médica Portuguesa**, Lisboa, v. 32, n. 3, p. 227-235, 2019. Disponível em: https://www.actamedicaportuguesa.com/revista/index.php/amp/article/view/11923/563. Acesso em: 8 out. 2019

DUKE, Nell K.; BECK, Sarah W. Education Should Consider Alternative Formats for the Dissertation. **Educational Researcher**, vol. 28, no. 3, pp 31-36, 1999.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v.4, n.1, p.78-91,1993. Disponível em: https://www.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1761/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf. Acesso em: 17 nov. 2019.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. Coleção formação de professores.

FRANK, Alejandro G. **Formatos alternativos de teses e dissertações. Disponível em:** https://cienciapratica.wordpress.com/2013/04/15/formatos-alterativos-de-teses-e-dissertacoes/.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, PontifÍcia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

GRANT, D., & REED, A. **Multi-paper Dissertation**. 2006.

JUNKERFEURBOM, Maiara Aline; KLÜBER, Tiago Emanuel. Tarefas de investigação matemática em livros didáticos do 8º ano aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD (2014). **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 55, p. 7-16, jul. 2017. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/722/pdf. Acesso em: 20 out. 2019.

LAUTENSCHLAGER, Etienne; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da educação básica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.7, n. 3, 2014**.** Disponível em: https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/69/60. Acesso em: 27 ago. 2019.

LOURENÇO, Édrei Henrique; OLIVEIRA, Paulo César. Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de primeiro grau. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v.20, n.1, p, 84-109, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/35043/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

LOZADA, Claudia de Oliveira; D'AMBROSIO, Ubiratan. Considerações sobre o conceito de equação presente nos cadernos do professor e as zonas de perfil conceitual de equação**.** **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.7, n.14, p.07-38, 2018. Disponível em:

http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1705/pdf_292. Acesso em 3 set. 2019.

MUTTI, Gabriele de Sousa Lins; KLÜBER, Tiago Emanuel. **Formato *Multipaper* nos Pogramas de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Brasileiros das Áreas de Educação e Ensino: Um Panorama.** V Seminário Internacional de Pesquisa e Estudos Qualitativos, 2018. Disponível em: https://sepq.org.br/eventos/vsipeq/documentos/02858929912/11. Acesso em: 13 abr. 2020.

NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. **O desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica:** compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Grupo Colaborativo e Matemática – GruComat. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf. Acesso em: 5 out. 2019.

OLIVEIRA, Wedeson Costa; OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de; SILVA, Lilian Aragão da. Análise de materiais curriculares elaborados por professores na perspectiva dos marcadores de tarefas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 42-66, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32689/pdf. Acesso em: 20 nov. 2019.

PAULA, Jamirley Priscila de Souza de; LIMA, Gabriel Loureiro de. O conceito de variável e o modelo 3uv: três usos da variável. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 21-35, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/34112/24329. Acesso em: 28 ago. 2019.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Ministério da educação, Lisboa, 2009. Dgidc.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. **Comunidades & Colecções**, Lisboa, p. 1-26, 2005. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf. Acesso em: 10 out. 2019.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a Formação do Professor:** explorando os conceitos de equação e de função. 1. Ed. Belo Horizonte: Autética Editora, 2015. Coleção Tendências em Educação Matemática).

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Elaborando um Perfil Conceitual de Equação: Desdobramentos para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática**. Ciência e Educação**, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v19n1/05.pdf. Acesso em: 14 mai. 2020.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Multisignificados de equação: analisando alguns livros didáticos. **Acta Scientiae**, Canoas, v.10, n.2. p. 107-118, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/69/60. Acesso em: 17 out. 2019.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; OLIVEIRA, Felipe Augusto Pereira Vasconcelos Santos e. Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. **Zetetiké**, unicamp, v. 23, n. 44, 2015. Disponívem em:

https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646541/13441. Acesso em: 27 ago. 2019.

SANTOS, Alex Bruno Carvalho dos; PEREIRA, José Carlos de Souza; NUNES, José Messildo Viana. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p. 81-103, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/28616/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

SANTOS, Daniela Miranda Fernandes; MORELATTI, Maria Raquel Mioto. **Ensino de equação do 1º grau**: concepções dos professores de Matemática, Curitiba, 2016: Appris.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: compreensão e prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 304 p. (7º ano).

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** realidade e Tecnologia. São Paulo: FTD, 2018. 304 P. (7º ano).

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schan. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 22-28, 2009. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/stein-smith%2098.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

VLASSIS, Joelle. **The balance model**: hindrance or support for the solving of linear equations wich one unknown. Educational Studies in Mathematics. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. v. 49, p. 341-359, 2002.

CAPÍTULO I – Artigo 01

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA LITERATURA[4]

TEACHING AND LEARNING OF FIRST GRADE POLYNOMIAL EQUATION: AN ANALYSIS OF LITERATURE.

RESUMO

Este artigo teve como objetivo analisar como a literatura científica sobre o ensino de Álgebra, publicada em periódico com escopo em Educação Matemática, aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. Para tal, foi realizada uma pesquisa bibliográfica em periódicos da área de educação Matemática, os quais possuem avaliação A1 a B2 no Qualis Capes. Usou-se um recorte temporal de10 anos (2010-2019), sendo selecionados 31 artigos para compor o *corpus* de análise. O método utilizado foi a revisão sistemática de literatura. Os dados foram agrupados e analisados por meio de 05 categorias: (1) trabalhos que abordam significados atribuídos ao conceito de equação; (2) trabalhos que abordam os conhecimentos mobilizados por professores; (3) trabalhos que abordam análise de equações em livros didáticos; (4) trabalhos que abordam a análise de questões e/ou materiais sobre equações; e (5) trabalhos que abordam análise de produções escritas de alunos. Os resultados revelam dificuldades de professores e alunos em relação aos conceitos de equação e equivalência e na resolução de problemas envolvendo equação polinomial de primeiro grau. Revela ainda predominância do uso da variável como incógnita em detrimento do seu uso como número genérico e número funcional, pouca demanda de conversão de registros de representação, restringindo-se basicamente à passagem da língua natural para a linguagem algébrica. Mostram também que professores, em sua prática pedagógica, fazem uso de artigos acadêmicos, sites, balança de dois pratos, software matemático, sequências de atividades eletrônicas para prepararem e ministrares aulas de equação. E que o uso de tarefas adequadas, recursos e metodologias apropriadas podem contribuir para amenizar dificuldades de aprendizagem e favorecer a construção de significados para os objetos algébricos e do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Álgebra. Equação Polinomial de primeiro Grau. Ensino e Aprendizagem. Análise de Literatura.

ABSTRACT

This article aimed to analyze how the scientific literature on the teaching of Algebra, published in a journal with scope in Mathematics Education, addresses the object of knowledge polynomial equation of the first degree. To this end, a bibliographic search was carried out in periodicals in the area of Mathematics education, which have a evaluation A1 to B2 in Qualis Capes. A 10-year time frame (2010-2019) was used, with 31 articles selected to compose the corpus of analysis. The method used was the systematic literature review. The data were grouped and analyzed through 05 categories: (1) works that address meanings attributed to the concept of equation; (2) works that address the knowledge mobilized per teachers; (3) works

[4] “O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”.

that address analysis of equations in textbooks; (4) works that address the analysis of questions and / or materials on equations; and (5) works that address analysis of students' written productions. The results reveal difficulties of teachers and students in relation to the concepts of equation and equivalence and in solving problems involving first degree polynomial equation. It also reveals a predominance of the use of the variable as an unknown factor to the detriment of its use as a generic number and a functional number, little demand of conversion of representation records, basically restricting itself to the transition from natural to algebraic language. They also show that teachers, in their pedagogical practice, make use of academic articles, websites, two-dish scales, mathematical software, sequences of electronic activities to prepare and teach equation classes. And that the use of appropriate tasks, resources and appropriate methodologies can contribute to alleviate learning difficulties and favor the construction of meanings for algebraic objects and algebraic thinking.

Keywords: Algebra. First Degree Polynomial Equation. Teaching and learning. Literature analysis.

1 INTRODUÇÃO

O ensino e a aprendizagem de Matemática nas escolas públicas é, certamente, um dos fatores mais preocupantes no contexto de educação, causando incômodo em seus envolvidos: alunos, professores, secretarias de educação e governos. O insucesso no ensino e aprendizagem de Matemática no cenário brasileiro é denunciado pelos baixos índices de aproveitamento dos alunos em avaliações de larga escala, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA). O relatório SAEB 2017 revela que os estudantes do 5º ano tiveram proficiência média de 224,1 pontos em Matemática. Esse resultado está no intervalo referente ao nível 4 da escala, a qual vai até o nível 10. Os do 9º ano tiveram proficiência média de 258,4 pontos, resultado que está no intervalo referente ao nível 3 da escala, a qual vai até o nível 9. Por fim, o relatório mostra que os estudantes do 3º ano do Ensino Médio tiveram proficiência média de 269,7 pontos, resultado pertencente ao intervalo referente ao nível 2 da escala de proficiência, a qual vai até o nível 10. Segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), a média dos estudantes em Matemática na última edição do ENEM (2019) foi de 523,1 contra 535,5 em 2018 (BRASIL, 2018). Porém, segundo o INEP o ENEM não é o melhor instrumento para avaliar a educação brasileira, por se tratar de um exame. Para tal, usa-se os resultados do SAEB, o que não ameniza a situação, pois de acordo com o último relatório (2017), 70% do alunado apresenta resultado insuficiente.

Já o relatório do PISA aponta que a média dos brasileiros em Matemática no último teste, aplicado em 2018, foi de 384 pontos, enquanto a média dos países desenvolvidos é de

489 pontos. De acordo com o documento, essa foi a pior nota brasileira no PISA, que coloca o Brasil em 70° lugar no ranking de matemática, dentre 78 países avaliados, atrás dos vizinhos Chile (417), Peru (400) e Colômbia (391) (RELATÓRIO BRASIL NO PISA 2018).

E se o foco é direcionado ao ensino e aprendizagem de um campo específico da Matemática, como, por exemplo, a Álgebra, a realidade não é diferente. Pois em situações-problema cuja solução demanda conhecimento algébrico, observa-se uma certa deficiência por parte dos alunos na interpretação, compreensão e tradução para a linguagem matemática, em particular, para linguagem algébrica (MARTINS; DIAS, 2017; SILVA; SAVIOLI, 2015, GIL, 2008). Ou seja, a dificuldade começa antes da resolução propriamente dita. A questão, antes de se referir ao cálculo, como acontece comumente na Aritmética, está relacionada ao saber traduzir por meio de uma igualdade, de uma desigualdade ou de uma relação entre variáveis, uma situação-problema, fazendo uso de símbolos e de relações entre as operações.

Posto isso, este artigo tem o objetivo de analisar como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, sobre o ensino de Álgebra aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. Na próxima seção é apresentado aportes teóricos sobre álgebra e seu ensino, posteriormente os procedimentos metodológicos, seguidos da apresentação e discussão dos dados e, por fim, algumas considerações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o ensino e aprendizagem de Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. Propõe que, para isso, os alunos devem identificar regularidades e padrões de sequências tanto numéricas quanto não numéricas, estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, criar, interpretar e transitar entre as diversas representações, gráficas e simbólicas, para resolver problemas através de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018).

A Álgebra cumpre uma importante função dentro do processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, que é a de representar uma linguagem universal, perpassando toda a Matemática, como também as demais áreas do conhecimento humano, representando e traduzindo situações diversas por meio de fórmulas, equações e inequações. (MARTINS; DIAS, 2017; SILVA; SAVIOLI, 2015). De fato, para resolver situações-problema, deve-se recorrer às equações, inequações, relações de interdependência entre os objetos envolvidos. Ao desempenhar o papel supracitado, a Álgebra permite a modelação e solução de uma imensa gama de situações, abrangendo um universo muito grande de utilidade e aplicabilidade.

Para Usiskin (1995), as finalidades da Álgebra se relacionam com concepções diferentes da Álgebra que correspondem a importância relativa dada aos diversos usos das variáveis. Assim, dependendo do papel assumido pela variável, a Álgebra engloba quatro concepções.

Quadro 1- Concepções da Álgebra na Perspectiva de Usiskin (1995).

Concepção da Álgebra.	Papel assumido pela variável.
Aritmética Generalizada.	Generalizadora de modelos. Instruções-chave: traduzir e generalizar. Ex.: a + b = b + a
Estudo de Procedimentos para Resolver Certos Tipos de Problemas.	Variável assume papel de incógnita ou de constante. Instruções-chave: simplificar e resolver. Ex.: 2x + 7 = 13 → 2x = 13 – 7 → 2x = 6 → x = 3.
Estudo de Relações entre Grandezas.	Variável como argumento ou parâmetro. Instruções-chave: Para uma dada função f (x), achar: 1. f(x), para x = a; 2. x, de modo que f (x) = a.
Estudo das Estruturas.	Variável como objeto arbitrário. Instruções-chave: manipular, deduzir, justificar. Ex.: “fatorar $3x^2 + 4ax – 132a^2$”.

Fonte: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

Essas mesmas concepções sobre Álgebra aparecem também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Figura 1- Dimensões da Álgebra Segundo os PCN (1998).

Fonte: (BRASIL 1998)

As dimensões propostas por Usiskin (1995) e pelos PCN (BRASIL, 1998) são importantes para a compreensão de ações pedagógicas que nortearão o trabalho do professor em aulas de Matemática, especialmente em relação a álgebra. É importante salientar que neste estudo há um foco centrado no uso da letra como uma incógnita, representando a dimensão *estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* e a concepção *equações*.

A nova BNCC, aprovada em dezembro de 2018, traz ideias semelhantes às que imperavam antes, quando os currículos se orientavam pelos PCN. Conforme esse novo documento, já nos anos iniciais do Ensino Fundamental pode-se desenvolver alguns aspectos da Álgebra, porém é nos anos finais dessa etapa de escolaridade que as atividades algébricas serão ampliadas. Segundo os PCN, o trabalho do professor deve possibilitar que o aluno, pela exploração de situações-problema, reconheça e desenvolva as diversas funções da Álgebra, isto é, generalizar padrões aritméticos, estabelecendo relações entre duas grandezas, modelizar, representar e resolver problemas por meio de equações e inequações, diferenciando parâmetros, variáveis e incógnitas, compreendendo sua sintaxe (BRASIL, 1998).

Porém, segundo os PCN, a ênfase que os professores dão ao ensino da Álgebra não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática (LAUTENSCHLAGER; RIBEIRO; ZANA, 2017; RIBEIRO, 2013**)**, como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas, além de avaliações em larga escala (GONÇALVES; BIANCHINI, 2016; SOUZA et al., 2017).

Com respeito ao tema equações, seu ensino e aprendizagem têm lugar privilegiado no currículo de matemática, pois é por meio de equação que grande parte dos problemas, tanto da área de Matemática quanto de outras áreas do conhecimento, são modelados e resolvidos. No entanto, o ensino e a aprendizagem desse objeto de conhecimento tem sido problematizados em várias pesquisas (ALMEIDA; RIBEIRO; ALBRECHT, 2018; LEMOS; KAIBER, 2015; RIBEIRO, 2008) com intuito de compreender como ocorrem esses processos e apontar caminhos para o sucesso em sala de aula.

Um notório trabalho sobre conceitos de equação foi realizado por Ribeiro (2008), o qual fazendo uso de documentos diversos, como livros didáticos e de fundamentos da Matemática, dicionários matemáticos e etimológicos, além de relatórios de pesquisas da área de Educação Matemática, observou que diferentes povos em diferentes épocas históricas tinham formas diversas de ver, tratar e conceber equação, as quais o autor denominou de multissignificados de equação. Tais multissignificados são apresentados no quadro abaixo.

Quadro 2 - Multissignificados de Equação

SIGNIFICADO	DESCRIÇÃO
Intuitivo-pragmático	O conceito de equação é concebido como intuitivo, ligado à ideia de igualdade entre duas quantidades, e utilizado na resolução de problemas práticos;

Dedutivo-geométrico	O conceito de equação é ligado às figuras geométricas e o seu uso está relacionado a situações que envolvem cálculos e operações com medidas de entes geométricos;
Estrutural-generalista	O conceito de equação é estrutural, definido e com propriedades e características próprias, buscando-se operar sobre ele mesmo, na busca de soluções mais gerais para uma classe de equações do mesmo tipo;
Estrutural-conjuntista	O conceito de equação é concebido dentro de uma perspectiva estrutural, diretamente ligada à noção de conjunto;
Processual-tecnicista	O conceito de equação é concebido a partir de sua própria resolução, como os métodos e técnicas que são utilizados para resolvê-la;
Axiomático-postulacional	O conceito de equação é concebido como uma noção primitiva, usada no mesmo sentido que reta, ponto e plano na geometria.

Fonte: Ribeiro e Cury (2015)

Dando continuidade aos estudos, e tendo como base o modelo teórico sobre perfil conceitual, desenvolvido por Mortimer (1994), Ribeiro (2013) desenvolveu as zonas de perfil conceitual de equação. De acordo com Mortimer (1994), o perfil conceitual se apresenta por zonas. Segundo esse modelo teórico, um único conceito pode ter diferentes zonas que correspondem a diferentes maneiras de ver, representar e significar o mundo, e são usadas pelos indivíduos em contextos diferenciados. Dessa forma, essas diferentes visões sobre um determinado conceito o torna polissémico. Cada zona apresenta um valor pragmático, isto é, tem seu contexto próprio de uso. No quadro abaixo, apresentamos as cinco zonas de perfil conceitual de equação, elaboradas por Ribeiro (2013).

Quadro 3 - Zonas de perfil conceitual de equação e sua breve descrição.

Categoria	Breve descrição
Pragmática	Equação interpretada a partir de problemas de ordem prática e admitida como uma noção primitiva. Busca pela solução predominantemente aritmética.
Geométrica	Equação interpretada a partir de problemas geométricos. Busca pela solução predominantemente geométrica.
Estrutural	Equação interpretada a partir de sua estrutura interna. Busca pela solução predominantemente algébrica.
Processual	Equação interpretada a partir de processos de resolução. Busca pela solução aritmética ou algébrica.
Aplicacional	Equação interpretada a partir de suas aplicações. Busca pela solução aritmética ou algébrica.

Fonte: Ribeiro 2013.

Segundo Lozada e D’Ambrósio (2018), no tocante a equação, nem sempre o aluno apresenta todas as zonas de perfil conceitual, ou elas podem estar malformadas, ou ainda, serem aplicadas de forma inadequada aos diferentes contextos. Por isso, segundo relatam, é necessário que o professor conheça as zonas de perfil conceitual dos conteúdos que aborda, para que assim, possa planejar atividades que propiciem o desenvolvimento das diferentes zonas por parte dos alunos.

Ponte, Branco e Matos (2009) relatam que nos 1º e 2º ciclos (equivalente aos anos inicias do Ensino Fundamental brasileiro), já se trabalha com equações muito simples, porém, o objetivo não é aprender a resolver equações, mas sim, desenvolver o conceito de igualdade e a compreensão das propriedades das operações e da relação de cada operação com a sua inversa. Como exemplo, esses autores citam as seguintes equações: $6 = \_\_\_ + 2$ ou $1 + \blacksquare = 9$.

Estes autores relatam ainda a importância de se trabalhar os diversos significados do sinal de igualdade, que são: (a) *processual*, pode ter o significado de operador, indica uma operação a ser realizada e o seu resultado, por exemplo $2 + 7 = 9$; $3 \cdot 13 = 39$; (b) *equivalência*, indica a equivalência entre dois objetos, por exemplo 5 + 11 = 20 – 4 ou $(x + y)^2$ = $x^2 + 2xy + y^2$ e (c) *funcional*, define uma relação funcional, por exemplo $y = 3x + 2$.

Nos últimos anos tem sido crescente o número de pesquisas que se dedicaram a estudar a *early* álgebra (pré-álgebra) nos anos iniciais do Ensino Fundamental (JUNGBLUTH; SILVEIRA; GRANDO, 2019; REHFELDT; QUARTIERI; GIONGO, 2018), com a finalidade de contribuir para o desenvolvimento de processos de ensino e de aprendizagem que potencializem o trabalho do professor em sala de aula, assim como no desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno ao longo do processo de escolaridade. Parte deste esforço impactou no modo como a BNCC apresenta o ensino de álgebra, a qual orienta que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental seja imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a álgebra estejam presentes nos processos de ensino e aprendizagem, como as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade, sem o entanto, abordar o uso de letras, nessa fase, para expressar regularidade (BRASIL, 2018).

Ponte, Branco e Matos (2009) mencionam que para o Conselho Nacional de Professores de Matemática *(*NCTM) dos Estados Unidos, a aprendizagem da resolução de equações polinomiais de primeiro grau com uma incógnita e do seu uso na resolução de problemas é objeto de trabalho no 3º ciclo, sendo necessário dar atenção às dificuldades dos alunos associadas aos conceitos básicos referentes às equações, às dificuldades que resultam da complexidade crescente das expressões envolvidas nos dois membros de uma equação e também às dificuldades que resultam de uma incompleta apreensão dos conceitos aritméticos.

Ainda com respeito ao ensino e aprendizagem de equações polinomiais de primeiro grau, a BNCC traz como proposta para o 7º ano, o desenvolvimento da seguinte habilidade "(EF07MA18) resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de primeiro grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade" (BRASIL, 2018, p. 307). Enquanto para as demais séries, a BNCC coloca que o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas.

Constata-se que o ensino e a aprendizagem da Álgebra nas escolas devem se iniciar desde cedo e ir aprofundando ao longo da caminhada e deve englobar as várias concepções da

Álgebra, fazendo uso de tarefas desafiadoras e contextualizadas que levem o aluno pensar algebricamente, desenvolvendo as habilidades de representar, modelizar, generalizar e resolver situações-problema, fazendo uso de equações, inequações e relações entre grandezas com compreensão dos procedimentos utilizados, conforme preconiza Brasil (2018).

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Com objetivo de analisar como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, sobre o ensino de Álgebra aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau, realizou-se uma pesquisa de natureza bibliográfica (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), fazendo uso do método revisão sistemática de literatura (DONATO; DONATO, 2019) e adotando-se na análise, uma abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2010). Para tanto, foram realizadas buscas de artigos em periódicos com escopo em Educação Matemática, com *qualis* (prévio, divulgado em julho de 2019) A1 a B2.

Os periódicos contemplados foram: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), Boletim online de educação matemática (BOEM), Educação matemática debate (EMD), Educação matemática em revista (EMR-BR), Educação matemática em revista (EMR-RS) Educação Matemática Pesquisa (EMP), Em Teia - revista de educação matemática e tecnológica (EMTEIA), Jornal internacional de estudos em educação matemática (JIEEM), Perspectivas da educação matemática (PEM), Revista eletrônica de educação matemática (REVEMAT), Revista de educação matemática (REMAT), Revista de investigação e divulgação em educação matemática (RIDEM), Revista paranaense de educação matemática (RPEM) e Zetetiké.

Com a finalidade de uma maior compreensão sobre o tema, utilizou-se o recorte temporal de 2010 a 2019, na tentativa de identificar possíveis tendências/deslocamentos /distanciamentos. Os termos usados para a busca foram: *álgebra*, *equação* e *equações*. Essa busca estava ativada em procurar em todo o corpo do artigo. Através da leitura do título e do resumo, ainda no sítio eletrônico, foram excluídos os artigos que não tinham relação com o tema, os escritos em outra língua e os repetidos. Nessa etapa foram selecionados 105 artigos, os quais foram salvos em pastas, por periódico, para posterior análise.

Na segunda etapa foi realizada várias leituras de cada artigo, extraindo-se, de cada um, as principais informações e colocando-as em uma planilha. Dos artigos selecionados na primeira etapa, havia artigos que abordavam, por exemplo, temas como pensamento algébrico e equações que não eram do tipo polinomial de primeiro grau e, portanto, não atendiam ao objeto de pesquisa. Após essa segunda etapa de seleção/exclusão, 31 artigos atenderam ao objeto de pesquisa, sendo então selecionados para compor o *corpus* de análise.

A tabela 1 traz a relação dos artigos selecionados nas duas etapas, por periódico.

Tabela 1 - Quantidade de artigos selecionados por periódico na primeira e segunda etapa.

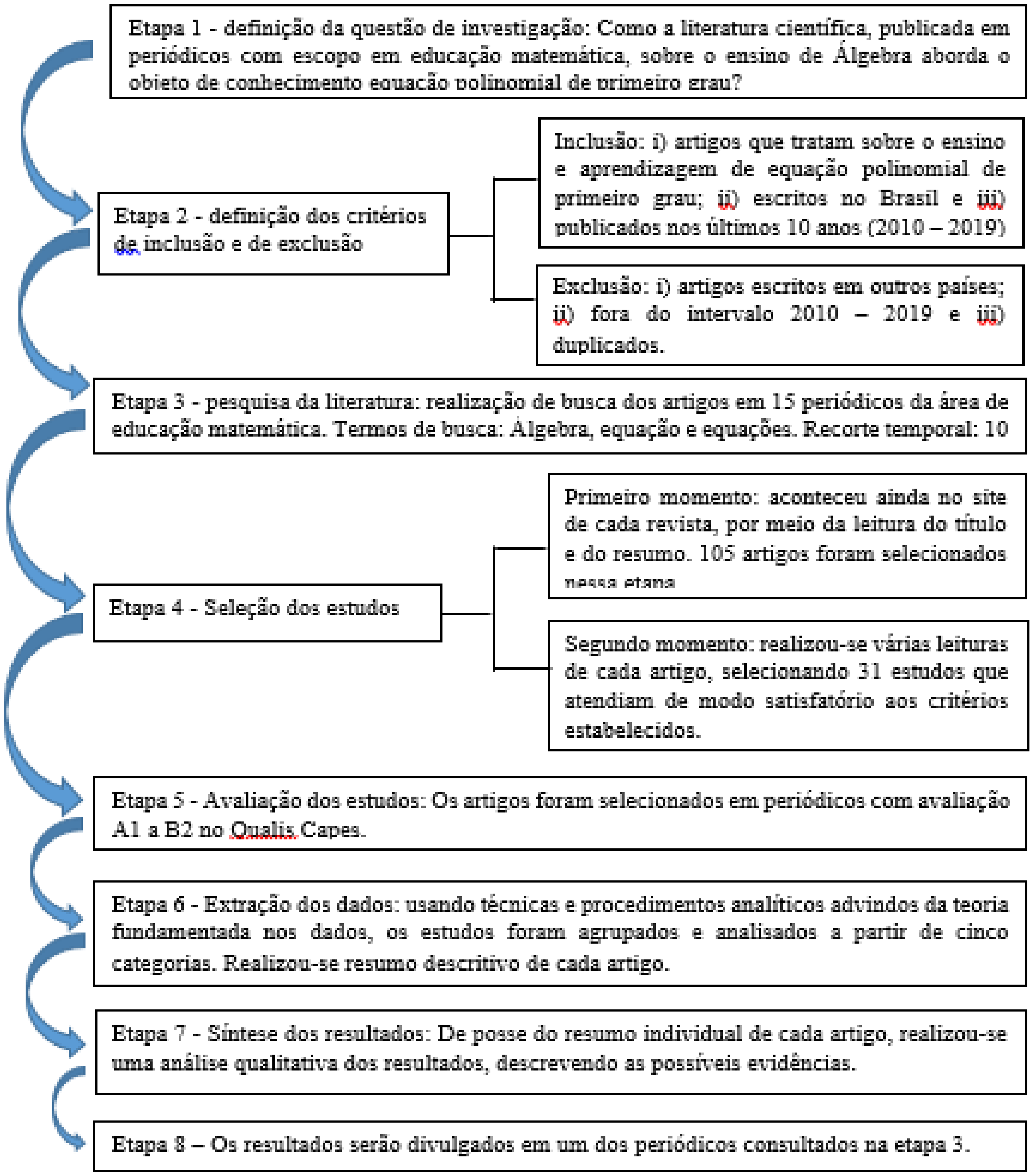
PERIÓDICO	**Nº DE ARTIGOS SELECIONADOS:**		
	1ª etapa	**2ª etapa**	
BOLEMA	26	2	Ribeiro (2012), Sperafico, Dorneles e Golbert (2015)
GEPEM	4	0	-
BOEM	4	3	Silva e Moreira (2018), Borges e Rosalis (2015), Mollossi, Aguiar e Moretti (2018)
EMD	1	1	Paula e Lima (2017)
EMR - BR	7	2	Lemos e Kaiber (2015), Cristovão (2013)
EMR - RS	03	03	Barbosa e Lima (2016), Barbosa e Lins (2013a), Lemos e Kaiber (2016)
EMP	24	08	Barbosa e Lins (2013), Barbosa e Lima (2018), Lourenço e Oliveira (2018), Cataneo e Rauen (2018), Silva (2011), Bianchini e Machado (2010), Brandt et al. (2018), Santos, Pereira e Nunes (2017)
EMTEIA	2	0	
JIEEM	8	2	Dorigo e Ribeiro (2010), Lautenschlager e Ribeiro (2014)
PEM	3	0	-
REVEMAT	9	4	Barbosa e Lima (2014), Silva et al. (2017), Breunig e Nehring (2012), Barbosa e Mendes (2016)
REMAT	3	1	Costa (2011)
RIDEM	0	0	-
RPEM	6	3	Machado Júnior et al. (2018), Lozada e D’Ambrosio (2018), Pereira, Doneze e Dalto (2018)
Zetetiké	8	2	Ribeiro e Oliveira (2015), Almeida e Lima (2013)
TOTAL	105	31	-

Fonte: própria autoria, 2020.

Para a análise dos dados, usou-se técnicas e procedimentos oriundos da Teoria Fundamentada nos Dados (GLASER; STRAUSS, 1967). Essa Teoria é tida como um conjunto de procedimentos, princípios e diretrizes flexíveis, não como um pacote de regras e teorias prontas e acabadas. Ela se baseia nos dados coletados, não em teorias extras e pré-fixadas (CHARMAZ, 2009). Seus componentes determinantes abrangem o envolvimento simultâneo na coleta e na análise dos dados, construção de códigos e categorias a partir dos dados, não de hipóteses preconcebidas e logicamente deduzidas, utilização de método comparativo constante, realização da revisão bibliográfica após o desenvolvimento de uma análise independente, dentre outros (GLASER; STRUSS, 1967; CHARMAZ, 2009). O papel do investigador é procurar processos que estão acontecendo na cena social, partindo de hipóteses, que, unidas umas às outras, podem explicar o fenômeno, combinando abordagens indutivas e dedutivas (STRAUSS; CORBIN, 2008).

A figura a seguir sintetiza todo o processo realizado.

Figura 2 - Etapas do processo de Revisão Sistemática de Literatura



Fonte: Baseado em Donato e Donato 2019

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Para realizar o processo de categorização e de análise das abordagens identificadas no corpus, fez-se uso de técnicas e procedimentos analíticos desenvolvidos por Strauss e Corbin

(2008). Isto é, primeiro realizamos a leitura de cada um dos documentos, comparando-os uns aos outros por meio de semelhanças e diferenças (codificação aberta), separando-os em categorias. Depois, desenvolvemos sistematicamente cada categoria, relacionando-as às suas subcategorias (codificação axial) e por último, por meio de uma síntese, relacionamos as categorias umas às outras (codificação seletiva). Os dados foram agrupados em cinco categorias: a) trabalhos que abordam significados atribuídos ao conceito de equação, b) trabalhos que abordam os conhecimentos mobilizados por professores, c) trabalhos que abordam análise de equações em livros didáticos, d) trabalhos que abordam a análise de questões e/ou materiais sobre equações e e) trabalhos que abordam análise de produções escritas de alunos.

Tabela 2 - Quantidade de artigos selecionados por categoria

Categoria	Artigos	Quant.
A	Ribeiro (2012), Dorigo e Ribeiro (2010).	02
B	Machado Júnior et al., (2018), Ribeiro e Oliveira (2015), Almeida e Lima (2013), Barbosa e Lima (2018), Lautenschlager e Ribeiro (2014), Santos, Pereira e Nunes (2017), Cristóvão (2013), Silva et al., (2017)	08
C	Lozada e D'Dambrosio (2018), Barbosa e Lins (2013), Barbosa e Lima (2014), Cataneo e Rauen (2018), Silva (2011), Barbosa e Mendes (2016), Barbosa e Lima (2016), Barbosa e Lins (2013)	08
D	Paula e Lima (2017), Silva e Moreira (2018), Bianchini e Machado (2010), Lourenço e Oliveira (2018), Breunig e Nehring (2012), Borges e Rosalis (2015), Molossi, Aguiar e Moretti (2018).	07
E	Pereira, Doneze e Dalto (2018), Lemos e Kaiber (2015), Lemos e Kaiber (2016), Sperafico, Dorneles e Golbert (2015), Costa (2011), Brandt et al., (2018)	06

Fonte: própria autoria, 2020.

a) trabalhos que abordam significados atribuídos ao conceito de equação

No corpus de análise, dois trabalhos desenvolveram estudos nesse sentido: Dorigo e Ribeiro (2010) e Ribeiro (2012). Dorigo e Ribeiro (2010) usando teste composto de diversas questões sobre equações, realizaram um estudo junto a alunos do ensino médio e constataram que na concepção desses alunos apareceram os significados intuitivo-pragmático e processual-tecnicista. Esses mesmos resultados foram encontrados por Ribeiro (2012), o qual realizou uma pesquisa bibliográfica e constatou que professores e alunos apresentam ideias limitadas a respeito dos multissignificados de equação, as quais se restringe aos significados intuitivo-pragmático e processual-tecnicista, isto é, associam equação à ideia de igualdade entre duas quantidades, usada para resolver problemas de ordem prática e a sua própria resolução, além de apresentar dificuldade no reconhecimento desse ente matemático.

Depreende-se desses resultados que professores da educação básica não dominam os vários conceitos e significados de equação. Assim, é lógico pensar que essa limitação por parte de tais professores influenciará de forma negativa, limitando assim, o processo de construção de significados para esse objeto algébrico como também do pensamento algébrico em geral.

b) trabalhos que abordam os conhecimentos mobilizados por professores

Essa categoria aborda os conhecimentos e concepções mobilizados por professores quando estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau. Essa abordagem se dá sob as seguintes subcategorias: (i) práticas praxeológicas, (ii) conhecimento do conteúdo, do estudante e do ensino, e (iii) concepções de Álgebra. A subcategoria (i) é formada por cinco artigos, dos quais dois se baseiam na Teoria Antropológica do didático, de Chevallard (1992,1999), um se baseia na Teoria das Situações Didáticas Guy Brousseau (1986, 1996b, 2008) e os demais não mencionam suporte teórico. A análise é realizada sob diversas dimensões, como uso de recursos, estratégias, parâmetros e abordagem.

Os dados revelam que professores preparam suas aulas com base em pesquisa e materiais de internet (MACHADO JÚNIOR et al., 2018; BARBOSA; LIMA, 2018), documentos orientadores como PCN, livros didáticos (BARBOSA; LIMA, 2018). Utilizam software matemáticos como ferramenta facilitadora da aprendizagem, principalmente para a compreensão de conceitos, representação e solução gráfica das situações (SILVA et al., 2017), propõe regras de contrato didático como uso das operações inversas, substituição do resultado na equação para comprovação da veracidade da resposta, leitura compassada e cuidadosa, com identificação e escrita de palavras-chave na ordem em que aparece no texto (ALMEIDA; LIMA, 2013). Abordam o ensino por meio de atividade de investigação, com discussão colaborativa, com o uso de operações inversas, propõe o ensino com produção de significado, como por exemplo, o uso da balança algébrica, na qual a igualdade assume o significado de que um lado da igualdade vale tanto quanto o outro, desenvolvendo os princípios da igualdade como equivalência numérica ou algébrica, sem limitar o pensamento do aluno aos pesos (CRISTÓVÃO, 2013).

Os artigos que compõem a subcategoria (ii) usam como suporte teórico o trabalho de Ball et al. (2008) e mostram um distanciamento nos dados. Um dos estudos (RIBEIRO; OLIVEIRA, 2015) aponta que professores demostram conhecimento do conteúdo (equação) e do ensino ao realizar uma abordagem etimológica das palavras equação e igualdade, promovendo discussão e compreensão desse conteúdo, fazem uso de modelos analógicos como balança em equilíbrio, produzindo significado aos conteúdos de equação e de igualdade e baseiam-se em artigos acadêmicos para preparação de tarefas lúdicas e desenvolvimento de estratégias didático-pedagógicas. Também demonstram conhecimento do conteúdo e do estudante, ao reconhecer as dificuldades do aluno para caracterizar uma equação, reconhecer os vários significados do sinal de igual e para realizar operações inversas.

Já em outro estudo (LAUTENSCHLAGER; RIBEIRO, 2014), os dados apontam grande dificuldade de professores na resolução de itens envolvendo Álgebra e, em particular, equação polinomial de primeiro grau, como a dificuldade em aceitar a expressão $5x - 3$ como resposta de uma questão, apresentando $x = \frac{3}{5}$ como resposta. Já no seguinte item: *um vagão de um trem de carga tem a seguinte capacidade: ou carrega 400 sacos de trigo, ou carrega 3200 caixas de sapato. Se dentro desse vagão já estão 256 sacos de trigos, então ainda há espaço suficiente para uma quantidade de caixas de sapato igual a a) 990 b) 1.080 c) 1.152 d) 1.245 e) 1.280*, o qual demanda a capacidade de resolução de problemas com equação polinomial de primeiro grau, os professores tiveram aproveitamento de apenas 18%. Infere-se desses dados que professores apresentam dificuldade na compreensão dos conceitos de equação e expressão, como também na resolução de problemas envolvendo equação polinomial de primeiro grau, o que certamente influenciará negativamente no processo de ensino e aprendizagem.

A subcategoria (iii) que se referenciou em Chevallard (1989), Gascón (1994) e Bolea Catalán (2003), revela que na concepção de professores a Álgebra aparece como (a) ferramenta que torna mais simples e compreensivo os processos de resolução de problemas, (b) trabalho com letras e (c) generalização e incógnita, o que conceitua a Álgebra como Aritmética generalizada (SANTOS; PEREIRA; NUNES, 2017).

Pode-se deduzir a partir da análise da categoria que professores apresentam conhecimento limitado sobre conceitos, concepções e técnicas de resolução de problemas. Assim, parece provável que o trabalho em sala de aula em relação aos vários conceitos de equação, como os propostos por Ribeiro (2008) e com a resolução de problemas, como propõe Brasil (2018), ficará limitado, prejudicando assim a capacidade de construção de significados para os objetos algébricos por parte do aluno.

c) trabalhos que abordam análise de equações em livros didáticos

A análise dessa categoria revela que uma propriedade bastante averiguada pela literatura é a organização praxeológica[5], isto é, como se dá a realização dos subtipos de tarefas referentes a equação polinomial de primeiro grau propostas pelo livro, usando como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Chevallard (1999). Os resultados revelam que as coleções fazem uso de diversos subtipos de tarefas, técnicas de resolução e tecnologias, inclusive com alternância de um ano para outro, porém os tipos mais comuns de cada um desses atributos são (a) subtipos de tarefas (T1): resolver uma equação do tipo ax + b = c, por exemplo, x + 5 =10 e (T4): resolver uma equação do tipo $A_1(x) = A_2(x)$, por exemplo 5(x-2) + 3x = x – 5, (b) técnicas: τNTC: neutralizar termos ou coeficientes e τTTC: transpor termos ou coeficientes e (c) tecnologias: propriedades distributivas da multiplicação, propriedades de operações inversas e propriedades da igualdade (BARBOSA; LINS, 2013a; BARBOSA; LIMA, 2014; BARBOSA; LIMA, 2016; BARBOSA; LINS, 2013b).

Outra propriedade analisada por essa categoria é a noção de equação e como a abordagem desse conteúdo pode favorecer o desenvolvimento das zonas de perfil conceitual de equação, concebidas por Ribeiro (2013). Os resultados mostram que o objeto de conhecimento é desenvolvido por meios de situações-problema diversificadas e contextualizadas, contribuindo assim, para o desenvolvimento das cinco zonas de perfil conceitual de equação (LOZADA; D’AMBRÓSIO, 2018). Outro trabalho realiza a análise sob a ótica da contextualização, usando como referência as categorias elencadas por Silva e Santos (2004). Os resultados apontam pouca contextualização no ensino desse objeto, sendo a contextualização interna à Matemática e a contextualização em práticas sociais as mais presentes (BARBOSA; MENDES, 2016).

Sob o ponto de vista da Teoria dos registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), a principal conversão cobrada pelas situações-problema presentes em livros didáticos é a passagem da língua natural para a linguagem algébrica (SILVA, 2011; CATANEO; RAUEN, 2018). Esse último dado gera uma certa preocupação, pois limita a capacidade de representação e compreensão dos objetos matemáticos por parte dos alunos. Inclusive, como propõe Brasil (2018), os alunos devem ser capazes de estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, criar, interpretar e transitar entre as diversas representações, gráficas e simbólicas, para resolver problemas através de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. Os dados mostram que uma

---

[5] Realização de tarefas do tipo t que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo t, através de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, que por sua vez, é justificada por uma teoria Θ.

ferramenta comumente apresentada pelos livros didáticos na abordagem de equação polinomial de primeiro grau é a balança de dois pratos, a qual é usada com o objetivo de representar a igualdade entre os lados da equação, servindo de elemento para introduzir os procedimentos de resolução de equações, a partir da ideia de equivalência e de operações inversas (BARBOSA; LINS, 2013a; BARBOSA; LINS, 2013b; BARBOSA; LIMA, 2014; BARBOSA; MENDES, 2016; LOZADA; D'AMBROSIO, 2018; CATANEO; RAUEN, 2018).

d) trabalhos que abordam a análise de questões e/ou materiais sobre equações

Essa categoria pode ser dividida em três subcategorias: (i) análise de itens sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2003, 2009); (ii) análise de material sob a ótica do modelo 3UV (os três usos da variável), proposto por Ursini et al. (2005); e (iii) análise e proposta de atividade. Em (i) um dos trabalhos, usando os três critérios elaborados por Duval (2009) para determinar a congruência semântica envolvida em uma conversão (critério A: correspondência "semântica" dos elementos significantes; critério B: univocidade "semântica" terminal e critério C: ordem das unidades de significado), analisou 15 itens de um material didático para o 7º ano do Ensino Fundamental; já um segundo trabalho analisou três itens cobrados no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Rio Grande do Sul (2007, 2008 e 2009), considerando o uso ou não dos *registros de representação algébricos*.

Os resultados apontam que dos 15 itens, apenas 4 eram congruentes, isto é, conservavam os três critérios, 7 conservavam exatamente dois critérios e 4, apenas um critério (LOURENÇO; OLIVEIRA, 2018). Apontam ainda, baixo índice de conservação do critério A (6 problemas) e alto índice de conservação do critério B (14 problemas). Revelam que, no todo, é dada grande ênfase às operações com números naturais em situações-problema, isto é, o registro numérico e o seu tratamento é predominante, em contrapartida, é dada pouca ênfase aos conceitos e registros algébricos, bem como à conversão entre eles. Dois dos itens analisados propunham a conversão da língua natural para a algébrica (equação) (BREUNIG; NEHRING, 2012).

Na subcategoria (ii), dois trabalhos, por meio da análise de materiais, constatam a predominância do uso da variável como incógnita em detrimento dos outros dois usos, que são pouco abordados ou até mesmo não são encontrados. No entanto, esses trabalhos relatam a importância de se abordar o modelo 3UV para a compreensão das várias funções da variável (incógnita, número genérico e número funcional) e para o entendimento conjunto da sintaxe e da semântica. Como consequência, propõe que as tarefas sejam diversificadas, no sentido de promover os vários significados da variável, como também o uso de tarefas integradoras que levem o estudante a conceber a variável como um só conceito que apresenta diferentes facetas (BIANCHINNI; MACHADO, 2010; PAULA; LIMA, 2017).

A subcategoria (iii) é composta por três trabalhos cujo objetivo principal é auxiliar o professor com propostas de atividades. Um deles parte da constatação da dificuldade do ensino e aprendizagem da Matemática, em particular para deficientes visuais, visto que no ensino e aprendizagem dessa disciplina, o sentido visual é crucial para o uso e compreensão de símbolos, fórmulas e gráficos. Nesse sentido, propõe que o ensino dessa disciplina para essa classe de alunos seja intermediado por ferramentas concretas que possibilite o manuseio, o tátil e aguce os sentidos do aluno, favoreça-lhe a compreensão dos conceitos matemáticos e lhe possibilite mais independência. Assim, propõe a placa de resolução de equação para o trabalho com deficientes visuais (MOLLOSSI; AGUIAR; MORETTI, 2018). Outro trabalho, sugere a inserção do jogo bingo em aula sobre equação polinomial de primeiro grau, como estratégia de ensino para amenizar a falta de interesse e envolvimento. Os resultados mostram que o uso do lúdico em sala de aula proporciona uma maior participação e envolvimento dos alunos nas atividades do que em aulas expositivas, contribuindo assim para a mudança de comportamento e um maior interesse pela aprendizagem (BORGES; ROSALIS, 2015). Outro artigo dessa categoria propõe um trabalho preparatório para a Álgebra, por meio de atividades pré-algébricas que inclua propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, expressões numéricas para desenvolver a compreensão sobre a hierarquia das operações, trabalho com números negativos, generalização, uso da calculadora e de sequências, reforçando o entendimento de conceitos aritméticos e desenvolvendo o pensamento algébrico (SILVA; MOREIRA, 2018).

e) trabalhos que abordam análise de produções escritas de alunos.

A análise de produções escritas de alunos é uma estratégia de ensino e aprendizagem que, por um lado, permite ao aluno analisar e realizar reflexões e julgamentos sobre diferentes soluções dadas a uma situação problema, possibilitando um repensar de seus próprios procedimentos e oportunizando um ambiente participativo de discussão sobre a Matemática trabalhada. Por outro lado, possibilita ao professor investigar a aprendizagem do aluno, as estratégias utilizadas, erros cometidos, as dificuldades apresentadas, como também avalia seu próprio trabalho, favorecendo o (re) planejamento pedagógico e a implementação de tarefas específicas e apropriadas. (COSTA, 2011; SPERAFICO; DORNELES; GOLBERT, 2015; BRANDT et al., 2018; PEREIRA; DONEZE; DALTO, 2018; LEMOS; KAIBER, 2015, 2016).

Os resultados apontam, no geral, dificuldades dos alunos no trabalho envolvendo objetos algébricos, e em particular equação polinomial de primeiro grau. As principais dificuldades estão relacionadas com (i) uso dos registros algébricos para representar objetos e relações matemáticas (COSTA, 2011; BRANDT, et al., 2018; LEMOS; KAIBER. 2015, 2016), optando na maioria das vezes pelo registro em língua natural e, mesmo assim, obtém pouco êxito (BRAND et al., 2018); (ii) resolução de problemas com equação polinomial de primeiro grau (COSTA, 2011; SPERAFICO; DORNELES; GOLBERT, 2015; BRANDT et al., 2018; LEMOS; KAIBER, 2015, 2016); (iii) conceito de equação, Igualdade e Equivalência (COSTA, 2011; LEMOS; KAIBER, 2015, 2016) e (iv) uso de procedimentos e propriedades como princípios aditivo e multiplicativo e transposição de termos (LEMOS; KAIBER, 2015, 2016).

Um dos trabalhos aponta indício de que há uma relação entre competência cognitiva (entendida como capacidade de resolução de problemas) e aproveitamento na resolução de problemas específicos (equação polinomial de primeiro grau), isto é, quanto mais alto o nível de competência cognitiva, maior o aproveitamento na resolução de problemas com equação polinomial de primeiro grau. Como consequência, sugere um ensino por meio de prática de estratégias voltadas para o desenvolvimento de capacidades cognitivas e não apenas para o exercício do conteúdo matemático (SPERAFICO; DORNELES; GOLBERT, 2015). Outro trabalho sugere que o uso da balança de dois pratos pode contribuir para a compreensão dos conceitos de equivalência, incógnita e do sinal de igualdade, como também para o desenvolvimento do uso de procedimentos algébricos (COSTA, 2011). Já Lemos e Kaiber (2015, 2016) apontam que o uso de sequências de atividades eletrônicas, especialmente com o uso do Sistema Integrado de Ensino Aprendizagem (SIENA) contribui para a realização de um trabalho específico e individualizado, permitindo recuperar conteúdos e amenizar dificuldades, favorecendo assim, a promoção de uma aprendizagem mais eficaz e significativa.

De modo geral, depreende-se da análise dos dados que a escolha de tarefas e metodologias apropriadas e específicas podem contribuir para amenizar dificuldades de aprendizagem de alunos e favorecer a construção do pensamento algébrico.

Abaixo, apresentamos um quadro com a síntese de cada categoria.

Quadro 4 - Síntese das categorias.

Multissignificados atribuídos ao concito de equação	Compreende as várias formas de ver e interpretar o conceito de equação. Importante para uma compreensão ampla e efetiva desse objeto de conhecimento. Revela deficiência no conhecimento de professores e alunos a respeito desses multissignificados.

Conhecimentos mobilizados por professores	Orientam por meio de artigos acadêmicos, documentos curriculares orientadores, internet e livros didáticos; faz uso da balança de dois pratos para trabalhar a ideia de equivalência e produzir significados sobre equação e igualdade; usa software como ferramenta facilitadora do ensino e da aprendizagem; demonstram conhecimento sobre o estudante; apresentam limitações sobre conceitos de equação e concepção de Álgebra; apresenta dificuldade na resolução de problema;
Análise de livro didático	Apresenta com frequência o uso da balança de dois pratos; tipos mais comuns de tarefas: $ax + b = c$ e $A_1(x) = A_2(x)$; técnicas mais demandadas: neutralizar termos ou coeficientes e transpor termos ou coeficientes; tecnologias mais presentes: propriedades distributiva da multiplicação, das operações inversas e da igualdade; possibilita o desenvolvimento de vários conceito de equação; tipo de conversão: natural → algébrica.
análise de questões e/ou materiais sobre equações	Aponta pouca congruência dos problemas; alto índice de conservação da univocidade semântica terminal e baixo índice de conservação da correspondência semântica dos elementos significantes; pouca demanda de mobilização dos registros algébricos e conversão entre eles; predominância do modelo de variável como incógnita, em detrimento de número genérico e número funcional; sinaliza a importância do modelo 3UV; o uso de ferramentas concretas no trabalho com deficientes visuais; o uso do lúdico e de atividades que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico.
análise de produções escritas de alunos	Aponta, de modo geral, dificuldades dos alunos sobre conceitos e procedimentos com objetos algébricos e em particular equação polinomial de primeiro grau; permite um melhor conhecimento sobre o aluno; revela que o uso de tarefas e metodologias apropriadas pode contribuir para amenizar as dificuldades de aprendizagem e contribuir para a construção de conhecimentos.

Fonte: própria autoria, 2020.

O quadro-síntese aponta, entre outros dados, dificuldades de alunos e professores em relação a objetos algébricos e, em particular, equação polinomial de primeiro grau. Acreditamos que essas dificuldades sejam frutos, em grande parte, de um ensino mal planejado, superficial, ineficiente e sem significados, que prioriza, muitas vezes, a cópia, a quantidade, a resolução mecânica de tarefas, no qual aquele que o planeja e o comanda (o professor) muitas vezes não tem o devido preparo e conhecimentos específicos exigidos. Dessa forma, defendemos que o professor, protagonista desse processo, deve estudar mais e se preocupar em adquirir conhecimentos e não simplesmente adquirir títulos. Nesse sentido, pensamos que o poder público deve oferecer as condições e exigir que esse profissional se capacite, de fato, para o exercício da profissão. Afinal, não se pode ensinar aquilo que não se sabe.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo teve como objetivo analisar como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, sobre o ensino de Álgebra aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. Para tal, a produção dos dados se deu mediante pesquisa bibliográfica realizada em periódicos com escopo em Educação Matemática, sendo usado o recorte temporal de 10 anos (2010-1019).

Embora a literatura especializada (USISKIN, 1995; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; URSINI, et al., 2005) e documentos curriculares orientadores (BRASIL, 1998, 2018) propõem que o trabalho com objetos da Álgebra de modo geral, e em particular o de equação polinomial de primeiro grau, deve buscar o desenvolvimento do pensamento algébrico, a generalização e a regularidade de padrões, desenvolver as habilidades de compreensão, representação, generalização e resolução de problemas por meio de equações e inequações, reconhecendo as várias funções da Álgebra e da variável, em detrimento da manipulação mecânica de símbolos, a análise dos dados mostra que os resultados não condizem totalmente com essa ideia. Pois o desenvolvimento de um trabalho nesse sentido, requer, primeiramente, professores bem preparados e capacitados. No entanto, os dados apontam limitações no conhecimento desses profissionais em relação a compreensão de conceitos, como o de equação e de técnicas e habilidade na resolução de situações-problema envolvendo equação polinomial de primeiro grau. Por outro lado, mostra que professores em sua prática pedagógica fazem uso de artigos acadêmicos, pesquisas em sites, balança de dois pratos, software matemático e sequências de atividades eletrônicas para prepararem e ministrares aulas de equação.

Também revela dificuldades por parte do aluno em relação aos conceitos de equação, equivalência e sinal de igualdade; deficiência no uso da linguagem algébrica para representar relações e objetos matemáticos, como também no uso de técnicas e procedimentos de resolução de equações.

Mostra ainda a predominância do uso da variável como incógnita, em detrimento do seu uso como número genérico e como número funcional, ao mesmo tempo revela a importância do trabalho com o modelo 3UV (os três usos da variável) para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos e uso da variável. A análise das organizações praxeológicas em livros didáticos, isto é, como se dá a realização dos tipos de tarefas referentes a equação polinomial de primeiro grau, relevam que os livros diversificam os subtipos de tarefas, porém, as mais recorrentes são do tipo (T_1) *resolver uma equação do tipo* $ax + b = c$ como por exemplo, $x + 7 = 12$ e (T_4) *resolver uma equação do tipo* $A_1(X) = A_2(x)$, sendo $A_1(X)$ ou $A_2(X)$ expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica, por exemplo, $5(x - 2) + 3x = x - 5$ e as técnicas mas trabalhadas são τNTC: *neutralizar termos ou coeficientes* e τTTC: *transpor termos ou coeficientes*, enquanto que as tecnologias mais usadas são *propriedades das operações inversas, propriedade distributiva da multiplicação, propriedades da igualdade*. A balança de dois pratos aparece como um recurso recorrente para a construção da ideia de equivalência e para a resolução de equações.

Aponta também pouca diversificação dos registros de representação semiótica, restringindo-se basicamente à passagem da língua natural para a linguagem algébrica, relevando ainda pouca congruência entre essas duas linguagens. Nesse sentido, ressaltamos que o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte do aluno, inclui a capacidade de criação, interpretação e uso de diversas representações para resolver problemas, com compreensão dos procedimentos, como propõe Brasil (2018).

Defendemos que o trabalho com a Álgebra escolar deve passar pela busca constante do desenvolvimento do pensamento algébrico, isto é, a capacidade de manipular símbolos nos mais diversos contextos, seja na representação, descrição ou resolução de situações-problemas, percebendo seus diferentes significados e condições de existência, assim como a capacidade de generalização, observação de padrão e de relação entre os símbolos. Nesse sentido, acreditamos que o ensino e aprendizagem da Álgebra no ambiente escolar deva privilegiar a construção e a compreensão dos significados e usos dos símbolos algébricos, possibilitando assim, uma educação algébrica mais ampla e significativa.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Fernando Emilio Leite de; LIMA, Anna Paula de Avelar Brito. Negociações do Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação no 8º Ano do Ensino Fundamental. **Zetetiké,** Unicamp, v. 21, n. 39, 2013. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646599/13501. Acesso em: 27 ago. 2019.

ALMEIDA, Marieli Vanessa Rediske de; RIBEIRO, Alessandro Jacques; ALBRECHT, E. Perfil conceitual de equação e o conhecimento matemático para o ensino: estabelecendo relações num estudo com professores em formação inicial, **Quadrante**, Vol. 27, N.º 1, p. 47-

67, 2018. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/index.php/quadrante/article/view/24/18. Acesso em: 17 out. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Equação Polinomial do Primeiro Grau: Uma Análise Praxeológica em Três Livros didáticos do 7º do Ensino Fundamental**. Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, pp. 001-020, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32077/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito**.** Equação Polinomial do Primeiro Grau: Comparativo das Praxeologias em Documentos Oficiais e Livro Didático**. Educação Matemática em Revista** – RS, v. 3, n. 17, p. 88-99, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1521/1007. Acesso em: 04 nov. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau. Revista **Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis (SC), v.9, n. 2, p. 110-129, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n2p110/28441. Acesso em: 29 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Relação Institucional Pessoal do Professor em sala de aula sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.3, pp. 51-71, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/39841/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LINS, Abigail Fregni. Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.2, pp. 337-357, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/15062/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LINS, Abigail Fregni. Organização Praxeológica: Equação do Primeiro Grau em Livros didáticos do 7° ano do ensino fundamental. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 14, p. 29-42, 2013. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1509/995. Acesso em: 4 nov. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; MENDES, Anderson Albuquerque. A contextualização no ensino de equações - uma análise em um livro didático antes e depois do PNLD. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 363-386, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p363/33646. Acesso em: 27 ago. 2019.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif, MACHADO, Sílvia Dias de Alcântara. A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4198/3310. Acesso em: 28 ago. 2019

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação.** Tradução: Maria João Avarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Batista. Porto Editora, 2010.

BORGES, Larissa Gehrinh; ROSALIS; Rodrigo. O jogo bingo: uma abordagem lúdica no ensino de equações do primeiro grau. **Boletim online de educação matemática**, Joinville, v.3. n.4, p. 107-115, 2015. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/6267/4432. Acesso em 27 ago. 2019.

BRANDT, Célia Finck, et al. A importância da função discursiva de designações de relações algébricas para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, pp.182-198, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32845/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Relatório SAEB 2017**. Brasília-DF, Inep/MEC, 2019. Disponível em http://portal.inep.gov.br/informacao-da-publicacao//asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/6730262. Acesso em: 1 nov. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Relatório Brasil no Pisa 2018: Versão Preliminar**. Brasília: Inep/MEC, 2019. Disponível em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf. Acesso em 18 jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29. Jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 17 ago. 2019.

BREUNIG, Raquel Taís; NEHRING, Cátia Maria. Análise de questões do SAERS e o ensino de álgebra na perspectiva dos registros de representação**. Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 07, n. 1, p.48-61, ISSN 1981-1322, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n1p48/22377. Acesso em 27 ago. 2019.

CATANEO, Vanessa Isabel; RAUEN, Fábio José. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo *S*istemas de equações do primeiro grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.2Y, p. 140-170, 2018. Disponível em*:* https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36693/pdf. Acesso em: 15 nov. 2019.

CHARMAZ, Kathy. **A construção da teoria fundamentada:** um guia prático para análise qualitativa. Tradução Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.

COSTA, Eveline Vieira. Comparação entre duas sequências didáticas sobre ensino introdutório de álgebra. **Revista de Educação Matemátca**, São Paulo, v. 13, n. 15, p. 55- 68, 2011. Disponível em: http://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat SP/article/view/67/pdf. Acesso em: 3 set. 2019.

CRISTOVÃO, *Eliane* Matesco; De uma relação matemática a uma reflexão sobre ensino de equações*:* Relato de Experiência. **Educação Matemática em Revista**, 2013. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/250/238. Acesso em: 27 ago. 2019.

DONATO, Helena; DONATO, Mariana. Etapas na Condução de uma Revisão Sistemática. **Acra Médica Portuguesa**, Lisboa, v. 32, n. 3, p. 227-235, 2019. Disponível em: https://www.actamedicaportuguesa.com/revista/index.php/amp/article/view/11923/563. Acesso em: 8 out. 2019

DORIGO, Marcio; RIBEIRO, Alessandro Jacques**.** Significados de Equação: Um Estudo Realizado com Alunos do Ensino Médio. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.2, p. 107 – 134, 2010. Disponível em: https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/137/124. Acesso em: 27 ago. 2019.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registro Semiótico e Aprendizagens Intelectuais**. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, São Paulo, 2012.

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. 2008. 120 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação em Ciências e Matemática, PontifÍcia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008. Disponível em: http://repositorio.pucrs.br/dspace/bitstream/10923/2962/1/000401324-Texto%2BCompleto-0.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

GLASER B.; STRUSS, A. **Discovery of grounded theory**. Chicago: Aldine. 1967.

GONÇALVES, Alessandro; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Utilização de questões do SARESP para análise de erros e dificuldades dos alunos em questões sobre Álgebra**. REnCiMa**, Edição Especial: Educação Matemática, v.7, n.4, p. 79-94, 2016. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1207/842. Acesso em: 17 out. 2019.

JUNGBLUTH, Adriana; SILVEIRA, Everaldo; GRANDO, Regina Célia. O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. **Educação**

Matemática Pesquisa, São Paulo, v.21, n.3, pp. 96-118, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/44255/pdf. Acesso em: 15 out. 2019.

LAUTENSCHLAGER, Etienne; RIBEIRO, Alessandro Jacques. Reflexões acerca do impacto do conhecimento matemático dos professores no ensino: a álgebra da educação básica. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.7, n. 3, 2014**.** Disponível em: https://revista.pgsskroton.com/index.php/jieem/article/view/69/60. Acesso em: 27 ago. 2019.

LAUTENSCHLAGER, Etienne; RIBEIRO**,** Alessandro Jacques**;** ZANA, Yossi**.** Investigando a construção do conceito de polinômio: uma abordagem envolvendo teorias das ciências cognitivas. **VIDYA - Revista Eletrônica**, v. 37, n. 1, p. 199-219, 2017. Disponívem em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA /article/view/2013/1915. Acesso em: 15 nov. 2019.

LEMOS, Andrielly Viana; KAIBER, Carmen Teresa. Equações de primeiro grau: reflexões sobre a utilização de uma sequência didática eletrônica. **Educação Matemática em REVISTA RS** - ANO 17 - 2016 - v.3, n. 17, pp. 75 a 87, 2016. Disponívem em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1520/1006. Acesso em: 4 nov. 2019.

LEMOS, Andrielly Viana; KAIBER, Carmen Teresa. Recuperação individualizada de conteúdos: caminhos percorridos por um estudante no estudo das equações de primeiro grau. **Acta Scientiae**, Canoas, v.17, n.2, p. 410 – 431, 2015. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1541/1210. Acesso em: 20 dez. 2019.

LOURENÇO, Édrei Henrique; OLIVEIRA, Paulo César. Congruência semântica e equivalência referencial em problemas envolvendo equações de primeiro grau. **Educação Matemática Pesquisa,** São Paulo, v.20, n.1, p, 84-109, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/35043/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

LOZADA, Claudia de Oliveira; D'AMBROSIO, Ubiratan. Considerações sobre o conceito de equação presente nos cadernos do professor e as zonas de perfil conceitual de equação. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v.7, n.14, p.7-38, 2018. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1705/pdf_292. Acesso em 03 set. 2019.

MACHADO JÚNIOR, Severino Ramos Nunes et al. Abordagem documental do didático e o ensino de equação do primeiro grau na educação de jovens e adultos-ensino médio. **Revista Paranaense de Educação Matemática.** Paraná, v.7, n.13, p.270-294, 2018. Disponívem em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1561/1108. Acesso em: 29 ago. 2019.

MARTINS, Lourival Pereira; DIAS, Marlene Alves. Os sete aspectos considerados nas tarefas de passagem da Aritmética para a Álgebra. **Amazônia:** Revista de Educação em Ciências e Matemática, v. 13 (28), p. 90-103, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/4582/4607. Acesso em: 10 nov. 2019.

MOLLOSSI, Luí Fellippe da Silva Bellincantta; AGUIAR, Rogério de; MORETTI, Méricles Thadeu. Placa de resolução de equações do primeiro grau: um material didático para o ensino de cegos. **Boletim online de Educação Mtamática**, Joinville, v. 6, n. 10, p. 237-254, 2018. Disponívem em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11861/8601. Acesso em: 27 ago. 2019.

PAULA, Jamirley Priscila de Souza de; LIMA, Gabriel Loureiro de. O conceito de variável e o modelo 3uv – três usos da variável. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 21-35, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/34112/24329. Acesso em: 28 ago. 2019.

PEREIRA, Fernando Francisco; DONEZE Iara Souza; DALTO; Jader Otávio. Caracterizando tarefas de análise da produção escrita por meio do ensino de equações. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v.7, n.14, p.236-255, 2018. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1714/pdf_306. Acesso em: 29 ago. 2019.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Ministério da educação. 2009. Dgidc.

REHFELDT, Márcia Jussara Hepp; QUARTIERI; Marli Teresinha; GIONGO, Ieda Maria. O Desenvolvimento Do Pensamento Pré-Algébrico: Uma Atividade Planejada Para Alunos Dos Anos Iniciais. **REVEMAT**, Florianópolis, v.13, n.2, p.310-327, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p310/38037. Acesso em: 15 nov. 2019.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática, Bauru – SP, **Ciência e Educação**, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/ciedu/v19n1/05.pdf. Acesso em: 3 dez. 2019.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a Educação Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 535-557, 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42b/07.pdf. Acesso em: 29 ago. 2019.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Multisignificados de equação: analisando alguns livros didáticos. **Acta Scientiae**, v.10, n.2, p. 107-118, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/viewFile/69/60. Acesso em 10 out. 2019.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; OLIVEIRA, Felipe Augusto Pereira Vasconcelos Santos e. Conhecimentos mobilizados por professores ao planejarem aulas sobre equações. **Zetetiké,** unicamp, v. 23, n. 44, 2015. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646541/13441. Acesso em: 27 ago. 2019.

SANTOS, Alex Bruno Carvalho dos; PEREIRA, José Carlos de Souza; NUNES, José Messildo Viana. Concepções de professores de matemática do ensino básico sobre a álgebra escolar. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.19, n.1, p. 81-103, 2017. Disponível em*:* https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/28616/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

SILVA, Circe Mary Silva da. Os “espinhos” da álgebra para Lacroix. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.1, p.219-237, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/3527/4029. Acesso em: 28 ago. 2019.

SILVA, Edilaine Pereira da; SAVIOLI; Angela Marta Pereira das Dores. Aspectos da Linguagem e do Pensamento Algébrico Manifestados por Estudantes do 6º Ano em um Episódio de Ensino. VIDYA, Santa Maria, v. 35, n. 1, p. 91-107, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/239/544. Acesso em: 10 nov. 2019.

SILVA, Juliano Pereira da; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Produto educacional sobre educação algébrica escolar: pensamento algébrico, linguagem, generalização. **Boletim online de Educação Matemática**, Joinville, v. 6, n. 10, p. 255-275, 2018. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11274/8602. Acesso em: 3 set. 2019.

SILVA, Rildenir Ribeiro et al. Software MATLAB no ensino-aprendizagem da Matemática no 8ºano do fundamental: Uma análise analítica e geométrica no ensino de expressões algébricas e sistemas de equações do primeiro grau. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis (SC), v.12, n. 2, p. 58-66, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2017v12n2p58/36371. Acesso em: 15 nov. 2019.

SOUZA, Debora da Silva et al. Concepções de Álgebra Presentes nas Macroavaliações: Os Casos da Prova Brasil e do Enem de 2011. **REnCiMa**, v.8, n.1, p.46-66, 2017. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1165/869. Acesso em: 15 abr. 2020.

SPERAFICO, Yasmini Lais Spindler; DORNELES, Beatriz Vargas; GOLBERT, Clarissa Seligman. Competência Cognitiva e Resolução de Problemas com Equações Algébricas do primeiro Grau. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 51, p. 333-348, abr. 2015. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/8545.Acesso em: 27 ago. 2019.

STRAUSS, Anselm; CORBIN, Juliet. **Pesquisa qualitativa**: Técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. Tradução Luciane de Oliveira da Rocha. Artmed Editora, Porto Alegre, 2008.

URSINI, Sônia. et al. **Enseñanza del Álgebra Elemental: Una propuesta alternativa.** México. Ed.Trillas. 2005.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

CAPÍTULO II – Artigo 02

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: UMA ANÁLISE DA ABORDAGEM EM TRÊS LIVROS DIDÁTICOS[6]

FIRST GRADE POLYNOMIAL EQUATION: AN ANALYSIS OF THE APPROACH IN THREE TEXTBOOKS.

RESUMO

O propósito deste artigo é analisar como livros didáticos abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. Para isso, escolhemos três livros didáticos para o 7º ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2020. Trata-se de uma pesquisa documental com uma abordagem qualitativa. A análise foi realizada levando em consideração a organização estrutural dos livros e a abordagem dada ao objeto equação polinomial de primeiro grau. Nesse último aspecto, a análise foi orientada pelas seguintes categorias: definição, métodos de resolução, abordagem facilitadora (balança de dois pratos) e a transformação: tratamento ou conversão. Os três livros realizam a definição de equação por meio de texto, sem o uso da linguagem algébrica e colocando em destaque a palavra incógnita para se referir a representação de um valor desconhecido, representado por letra. Os três livros didáticos (LD) abordam explicitamente o método das equações equivalentes como método de resolução, já o método das operações inversas é abordado apenas por dois LD. Os três livros fazem uso da balança de dois pratos para trabalhar os processos de resolução por meio da ideia de equivalência. As obras analisadas trabalham apenas um tipo de conversão: da língua natural para a linguagem algébrica, sendo que em cada uma delas, aproximadamente, metade das tarefas demanda conversão, a outra metade, apenas tratamento.

Palavras-chave: Equação polinomial de primeiro grau. Livro Didático. Ensino e Aprendizagem.

ABSTRACT

The purpose of this article is to analyze how textbooks approach the object of knowledge polynomial equation of the first degree. For this, we chose three textbooks for the 7th year of Elementary Education, approved by the National Program for Books and theDidactic Material (PNLD) 2020. It is a documentary research with a qualitative approach. The analysis was performed taking into account the structural organization of the books and the first degree polynomial equation object. In this last aspect, the analysis was guided by the following categories: definition, methods of resolution, facilitating approach (two-dish scale) and transformation: treatment or conversion. The three books define the equation through text, without the use of the algebraic language and highlighting the unknown word to refer to the representation of an unknown value, represented by a letter. The three textbooks (LD) explicitly address the method of equivalent equations as method of solving, whereas the method of the inverse operations is addressed only by two LD. The three books make use of the two-dish scale to work the resolution processes through the idea of equivalence. The analyzed works work

[6] “O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001”.

only one type of conversion: from the natural language to the algebraic language, being that in each of them, approximately half of the tasks demand conversion, the other half, only treatment.

Keywords: First degree polynomial equation. Textbook. Teaching and learning.

1 INTRODUÇÃO

O mundo atual é marcado por transformações políticas, econômicas, sociais e culturais. Essas transformações conferem, ainda mais, à Matemática uma fundamental importância na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais e que atendam às demandas dinâmicas do mundo do trabalho, as quais, cada vez mais, requer sujeitos autônomos, capazes de resolver problemas de forma colaborativa, criativa e flexível, aptos a se comunicar por meio das diferentes linguagens e que dominem as diferentes tecnologias, conforme se pode ler no guia digital Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2020 (BRASIL, 2020).

De acordo com o documento, o conhecimento matemático é essencial para todos os (as) estudantes da Educação Básica, visto que a Matemática possui um caráter de abstração e busca o essencial das relações, com alto grau de generalização e, sendo uma linguagem, permite o cidadão, entre outras coisas, resolver problemas e auxilia na compreensão, na atuação protagonista e na transformação consciente da realidade em que vive (BRASIL, 2020).

Para o documento, o ensino de Matemática está associado ao estabelecimento de diversos tipos de articulações entre objetos de conhecimento, inclusive das diferentes áreas de conhecimento do Ensino Fundamental. Dessa forma, o livro didático deve zelar pela apresentação articulada dos objetos de conhecimento e habilidades, nos diferentes campos da Matemática, buscando sempre o desenvolvimento das competências específicas e gerais pelo (a) estudante, como previsto na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018). Assim, permitem ao (à) estudante perceber que os conhecimentos matemáticos não são isolados em campos estanques e/ou autossuficientes. Ademais, “O livro é, em muitos exemplos do cotidiano pedagógico das escolas, a única ferramenta de trabalho docente” (MELO; LOPES; OLIVEIRA, 2017, p. 105). Posto isso, fica claro a importância de se analisar com criticidade a qualidade do livro didático usado nas escolas brasileiras de educação básica.

Portanto, este artigo tem como objetivo analisar como três livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, que integraram o PLND 2020, abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. Na próxima seção são apresentados a literatura sobre o tema, os procedimentos metodológicos, seguidos da análise e discussão dos dados, e algumas considerações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A Álgebra sempre despertou interesse e curiosidades por parte dos pesquisadores em Educação Matemática (RIBEIRO; CURY, 2015). Essa busca pelo entendimento desse campo de conhecimento se justifica na medida em que ele se torna presente em várias situações da vida em sociedade, permitindo a modelação, a compreensão e a resolução de fenômenos de natureza diversas. É provável que se fizesse a pergunta “o que é Álgebra” a pessoas comuns (conhecimento do senso comum) as respostas se direcionariam para a noção de que Álgebra seria o trabalho com letras. Porém, uma visita à literatura revela que não é tão simples assim, pelo contrário: não há uma definição conclusiva e definitiva sobre Álgebra (GONÇALVES; BIANCHINI, 2016).

Segundo Usiskin (1995, p. 9) “não é fácil definir a Álgebra”. No entanto, dá-se a entender que para esse autor as finalidades da Álgebra escolar estão relacionadas com o emprego que se faz das variáveis e seus significados. Para o autor é importante esclarecer que nem todas variáveis são letras que representam números. Uma letra pode representar, por exemplo, um ponto (ponto M), uma proposição (proposição p), uma matriz (matriz A), um rótulo (5m, m representa metro). Por outro lado, segundo relata, uma variável também pode ser representada por outro símbolo, como em $3 + \Delta = 7$. O autor afirma que as variáveis comportam várias definições, conotações e símbolos e que tentar enquadrar a ideia de variável em uma única concepção recai numa simplificação, o que distorce os objetos da Álgebra.

Para refletir, Usiskin (1995) propõe as seguintes equações (i) $A = b\,.\,h,$ (ii) $40 = 50x,$ (iii) $senx = cosx\,.\,tgx$, (iv) $1 = n\,.\frac{1}{n}$ e (v) y = kx. Em todas elas, o produto de dois números é igual a um terceiro número. No entanto, são estruturas diferentes, as variáveis desempenham papeis diferentes. (i) representa a fórmula da área de um retângulo qualquer; (ii) representa uma equação, e a letra, uma incógnita; (iii) representa uma identidade, isto é, a igualdade se verifica para qualquer valor de x, que representa um argumento; (iv) generaliza um modelo aritmético e a letra identifica um exemplo de modelo; (v) representa uma função, uma proporcionalidade direta, x é o argumento, y, o valor e k, uma constante ou parâmetro.

De acordo com o papel desempenhado pela variável, Usiskin (1995) elenca quatro concepções de Álgebra, quais sejam: *álgebra como Aritmética generalizada* (iv), *álgebra como* *estudos de procedimentos para resolver certos tipos de problemas* (i e ii) *álgebra como estudo de relações entre grandezas* (v) *álgebra como estudo das estruturas* (iii).

Há na literatura um certo consenso de que uma característica da Álgebra escolar é desenvolver o pensamento algébrico, entendido como a capacidade de compreensão e uso de símbolos e da linguagem algébrica, capacidade de generalização e de resolução de problemas (ARCAVI, 1994; KAPUT, 1995; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; BRASIL, 2018).

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), o pensamento algébrico engloba três vertentes: representar, raciocinar e resolver problemas, as quais estão sintetizadas no quadro abaixo.

Quadro 5 - Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

Representar	Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; Traduzir informações representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; Evidenciar sentido de símbolo, interpretando seus diversos sentidos em diferentes contextos.
Raciocinar	Relacionar: analisar propriedades; Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	Usar expressões algébricas, equações, inequações e sistemas de equações e de inequações, funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios.

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009)

Para Schoenfeld e Arcavi (1988), o ensino e aprendizagem de Matemática e, em particular o de Álgebra, no ambiente escolar deve considerar o desenvolvimento do conceito de variável como um ponto central, encarando sua construção como um processo complexo que merece atenção especial.

Para Arcavi (1994) a escola deve desenvolver no aluno o sentido de símbolo, o que inclui a compreensão de que este pode desempenhar papéis distintos, conforme o contexto.

Como se ver, o conceito de variável é multifacetado e desempenha diversos papéis e significados. Compreender esses significados é crucial para o aluno ter sucesso na resolução de situações-problema com objetos da Álgebra. Dessa forma, fica claro a importância de um ensino de Álgebra baseado na compreensão de estruturas algébricas e nos diversos usos e significados das variáveis, o que acreditamos poder amenizar erros e dificuldades de alunos em situações-problema dessa natureza, pois, de fato, se o aluno diante de uma situação-problema com objeto algébrico não reconhece o papel, o significado do símbolo, não poderá solucioná-la.

Quanto ao objeto equação polinomial de primeiro grau, seu ensino e aprendizagem ocupa lugar central dentro do ensino da Álgebra escolar, devido sua importância na resolução de problemas matemáticos (BERNARD; COHEN, 1995; GARCIA GAY, 2014a).

Ponte, Branco e Matos (2009) relatam que definir equação para alunos do ensino básico (1º e 2º ciclos) não é tarefa fácil. Segundo os autores, nesta fase bastará dizer que equação é uma igualdade com um valor desconhecido. Mais adiante, esses autores propõem que para o 3º ciclo, os alunos devem compreender equação como “uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos” (p. 93). No entanto, os autores colocam que essa não é uma definição rigorosa, pois transfere o termo “equação” para o termo “igualdade”, o qual é indefinido. Por fim, os autores apresentam uma definição mais restrita: “uma equação é uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos e que só é satisfeita para certos valores da incógnita” (p. 94). Porém esses autores fazem um alerta: essa definição excluem as identidades como x = x e as equações impossíveis, como $1 + x = x$.

Garcia Gay, em um livro para o 7º ano do Ensino Fundamental, a define como sendo “uma sentença matemática com sinal de igualdade (=) em que números desconhecidos são representados por letras, denominadas **incógnitas**” (GARCIA GAY, 2014a, p. 134 grifo da autora). Já em outro livro para o 8º do Ensino Fundamental, essa mesma autora define equação polinomial do primeiro grau com uma incógnita como “uma igualdade que pode ser escrita na forma $ax + b = 0$, sendo a e b números reais com $a \neq 0$”. (GARCIA GAY, 2014b, p. 204). No mesmo livro a autora define equação polinomial de primeiro grau com duas incógnitas, x e y, como “uma sentença matemática que pode ser reduzida a uma sentença do tipo $ax + by = c$, a, b e c números reais em que a e b são não nulos”. (GARCIA GAY, 2014b, p. 208).

A literatura que aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau, mostra que a análise de como os livros didáticos apresentam o tema tem sido algo recorrente no meio acadêmico (PAULA; LIMA, 2017; BARBOSA; LIMA, 2018; BARBOSA; LINS, 2013; SILVA, 2018). Haja vista o livro didático tem sido um dos principais recursos de professores e alunos, o que justifica o querer saber sobre a qualidade e maneira de abordagem dos conteúdos matemáticos por esse instrumento.

Nesse momento é oportuno se perguntar: o que essas pesquisas têm procurado saber na realização de suas análises? Quais os resultados encontrados? Um dos focos dessas pesquisas é o estudo das práticas praxeológicas, isto é, como os livros propõem a realização de tarefas sobre equação polinomial de primeiro grau. Os resultados revelam que os subtipos de tarefas mais frequentes são resolver equação do tipo (T1) $ax + b = c$ por exemplo $x + 5 = 10$ e (T4) $A_1 X = A_2 X$ por exemplo $5(x - 2) + 3x = 5 - x$. As técnicas mais utilizadas são neutralizar termos ou coeficientes e transpor termos ou coeficientes, enquanto as tecnologias mais frequentes são propriedades distributivas da multiplicação, propriedades da operação inversa e propriedades da igualdade. (BARBOSA; LINS, 2013; BARBOSA; LIMA, 2014, 2018).

Uma ferramenta bastante usada na abordagem desse tema é a balança de dois pratos (LOZADA; D'AMBROSIO, 2018; BARBOSA; LINS, 2013; BARBOSA; LIMA, 2014, 2018; CATANEO; RAUEN, 2018; BABOSA; MENDES, 2016; SILVA, 2018). Outro foco das pesquisas é a análise do uso da variável e/ou as concepções de álgebra (PAULA; LIMA,2017), cujos resultados demonstram que o uso da variável como incógnita sobressai, de longe, sobre os demais e que as concepções de Álgebra mais presentes são aritmética generalizada (USISKIN, 1995; BRASIL, 1998), estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas (USISKIN, 1995) e álgebra das equações e funcional (BRASIL,1998).

Outro fato revelado diz respeito à conversão de registro de representação semiótica, que nesse caso, na maioria das vezes, se restringe à passagem da língua natural para a linguagem algébrica (SILVA, 2011; CATANEO; RAUEN, 2018), dado indesejável, pois para uma boa conceituação dos objetos matemáticos, em particular equação polinomial de primeiro grau, recomenda-se o uso de diversas representações semióticas para que o aluno desenvolva sua capacidade cognitiva, ultrapasse a barreira das linguagens natural e aritmética e pense algebricamente, fazendo uso também de outras linguagens, como a algébrica e a gráfica.

No processo de ensino e de aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau, uma das primeiras dificuldades enfrentadas por alunos e professores é a conversão de registro de representação semiótica (DUVAL, 2003), isto é, a transformação do registro de um mesmo objeto (equação) em outro registro. E uma conversão muito frequente é passagem de um problema matemático escrito na língua natural para a linguagem algébrica. De fato, o aluno deve ler, interpretar e equacionar o problema para só depois resolvê-lo. Esse processo é necessário e fundamental para o desenvolvimento das atividades cognitivas do pensamento e para a compreensão conceitual significativa dos objetos de conhecimento, sendo necessário ainda, considerar os dois tipos de transformação: o tratamento e a conversão (DUVAL, 2003). Por exemplo, no caso de equação polinomial de primeiro grau, pode-se convertê-lo da linguagem natural para a algébrica, para o registro gráfico, em ambos os sentidos. Recomenda-se evitar resumir o trabalho com equações prontas, as quais demandam apenas o usa da sintaxe, isto é, de regras, pois dessa forma, pode estar contribuindo para o atrofiamento do pensamento do aluno. Em vez disso, deve-se oferecer situações problemas que leve o aluno a pensar, refletir, a manipular os símbolos, compreendendo seu significado, identificando suas estruturas e construindo a linguagem algébrica para descrevê-la simbolicamente (BRASIL, 1998).

Muitos alunos apresentam dificuldades na passagem da Aritmética para a Álgebra, pois na abordagem algébrica aplica-se as operações inversas, isto é, para armar uma equação, deve-se raciocinar exatamente de maneira contrária à que se emprega na resolução de um problema aritmeticamente (USISKIN, 1995, p. 15).

A passagem de uma resolução aritmética para uma resolução propriamente algébrica constitui numa passagem de uma operação processual para uma operação estrutural (KIERAN, 1995). Essa autora, relata que na Aritmética, um símbolo de adição entre dois números sempre indica que as duas parcelas sejam somadas, como em $5 + 3 = \square$. Porém, seu significado em Álgebra nem sempre é esse. Na equação $2x + 5 = 13$, por exemplo, a autora relata que o símbolo de adição não significa que os termos numéricos, 2 e 5, devam ser somados, a menos que conhecêssemos o valor numérico de 2x. Pelo contrário, indica que se deve subtrair 5 de 13, pois para resolver a equação, deve-se voltar ao início (voltar para X), isto é, fazer o caminho inverso, desfazendo cada operação pela sua inversa. Os passos da ida foram: saiu do x, multiplicou-o por 2, somou 5, chegou em 13. A volta: sai do 13, subtrai 5, divide por 2, chega-se ao resultado 4. Sintetizando, os símbolos operatórios de uma equação não sinalizam, necessariamente, as operações a serem realizadas (KIERAN, 1995). Dessa forma, para essa autora, a principal diferença entre Aritmética e Álgebra é essa distinção entre as operações utilizadas no processo de resolução de equações e as operações indicadas nessas equações.

Em Aritmética, o aluno efetua uma série de operações de um lado da igualdade e do outro lado, apresenta o resultado. Em contrapartida, a equação algébrica é uma representação estrutural, uma nova maneira de representar o sinal de igualdade, como uma equivalência de operações em ambos os lados do sinal (KIERAN, 1995; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

A raiz ou solução de uma equação é o valor que ao ser colocado no lugar da incógnita, torna a equação verdadeira (BERNARD; COHEN, 1995; GARCIA GAY, 2014a) e resolução é o processo pelo qual se acham esse valor (BERNARD; COHEN, 1995). Bernard e Cohen (1995) discutem quatro métodos de resolução: (i) *gerar e avaliar*, trata-se de lançar alguns valores para a incógnita e verificar se a igualdade se confirma; (ii) *esconder*, sugere "esconder" uma incógnita (que não precisa ser necessariamente uma letra, pode ser uma expressão) e verificar qual o valor que ela representa, igualando-a a esse valor. Pode-se aplicar esse método várias vezes; (iii) *desfazer*, se baseia nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis. Em outras palavras, trata-se de percorrer o caminho de volta, desfazendo cada operação pela sua inversa; e (iv) *equações equivalente*, segundo relatam, esse método é geral e sistémico e suas implicações é que as operações de equilíbrio são usadas como instrumentos para a manipulação de equações na certeza de que nunca se perdem a raiz. Esse método faz uso de dois princípios interessantes: (i) *princípio aditivo:* somando-se o mesmo termo a ambos os membros de uma equação, o resultado não se altera e (2) *princípio multiplicativo:* multiplicando-se ambos os membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, o resultado não se altera. Isso permite a eliminação de termos e alteração de coeficientes, gerando equações cada vez mais simples, até chegar a um resultado desejado (BERNARD; COHEN, 1995).

O trabalho com equação polinomial de primeiro grau no cenário escolar, especificamente sua resolução, tem enfrentado diversas dificuldades de aprendizagem por parte dos alunos. Essas dificuldades se relacionam com os significados dos símbolos e/ou variáveis e de suas condições de existência e, consequentemente, com as operações a serem realizadas (ver Booth, 1984, 1988; Kieran, 1985, 1992; Küchemann, 1981).

Para tentar amenizar dificuldades e erros de alunos e possibilitar uma melhor compreensão sobre os processos de resolução de equação polinomial de primeiro grau, muitos autores têm sugeridos e recorridos ao uso de modelos concretos, como é o caso da balança de dois pratos (VLASSIS, 2002; LIMA, 2007; COSTA 2011; HUMMES; BREDA; MENEQUETTI, 2018).

A correlação do uso da balança de dois pratos com a resolução de equações polinomiais de primeiro grau é que cada prato represente um dos membros da equação e o equilíbrio entre os pratos represente a igualdade (LIMA, 2007). O uso dessa ferramenta possibilita que os alunos desenvolvam a compreensão do significado do sinal de igual como uma igualdade entre os membros da equação como também sobre o princípio de equivalência, isto é, de realizar a mesma operação em ambos os membros da equação (VLASSIS, 2002; LIMA, 2007; COSTA, 2011).

No entanto, o uso da balança de dois pratos na resolução de equações polinomiais de primeiro grau esbarra em alguns obstáculos, como por exemplo, a impossibilidade de trabalhar com equações contendo números negativos, pois não se pode representar quantidades negativas com pesos, e com equações do tipo $ax + b = 0$, visto que não há possibilidade física de se obter equilíbrio por meio de um prato vazio e outro com pesos (LIMA, 2007). Segundo essa autora, o modelo da balança é útil apenas no caso de equações do tipo $ax + b = c$, com c $> b$ (a, b, c $\in$ N e a e c $\neq$ 0) e $ax + b = cx + d$, com coeficientes naturais não nulos, além da condição $a > c$ e $b < d$ ou $a > c$ e $b > d$.

Concordamos com Vlassis (2002) e Lima (2007) que o uso dessa ferramenta, ainda que apresente algumas restrições, deve ser abordado em aulas, pois colabora para que o aluno entenda a igualdade entre os membros de uma equação como também os processos de resolução.

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Considerando o objetivo de analisar como três livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, que integraram o PLND 2020, abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau, realizou-se uma pesquisa documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), por meio do uso de uma abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2010).

Foram escolhidos os livros didáticos referentes ao 7º ano do Ensino Fundamental das coleções: a) Matemática: compreensão e prática, do autor Ênio Silveira; b) Convergências Matemática, do autor Eduardo Rodrigues Chavante; e c) Matemática: realidade e tecnologia, do autor Joamir Souza, os quais serão identificados, respectivamente como LD01, LD02 e LD03. O motivo da escolha desses livros para compor o *corpus* de análise é que dois deles (LD01 e LD02) foram os pré-escolhidos pelo município de Boquira, Bahia, para ser usados por todas suas escolas, inclusive pela escola onde o autor desse artigo trabalha, e o terceiro foi escolhido devido ao fácil acesso à obra física na unidade escolar.

Para a análise, realizou-se, primeiramente, a leitura do Guia Digital PNLD Matemática (BRASIL, 2020) para se ter uma noção geral de como se dar o processo de escolha do livro didático, bem como verificar se as obras selecionadas para análise constavam na lista das obras aprovadas. Confirmada a presença das obras na lista, realizou-se, em cada livro, a leitura do prefácio e do capítulo que trata de equações polinomiais de primeiro grau. A análise foi realizada com base nos seguintes aspectos: a) organização estrutural do capítulo (ou unidade) no qual se encontra o objeto de estudo e b) a abordagem para o ensino de equação polinomial de primeiro grau. Na próxima seção, são apresentadas as análises realizadas.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

A presente análise foi realizada levando em consideração a organização estrutural do capítulo (ou unidade) e a abordagem dada ao objeto equação polinomial de primeiro grau. Após leitura de todo o capítulo, identificamos e elencamos as seguintes categorias de análise: definição, métodos de resolução, exemplo da balança de dois pratos e a transformação: tratamento ou conversão.

4.1 ORGANIZAÇÃO DAS OBRAS

As coleções, as quais pertencem os livros em análise, já atendem ao que propõe a BNCC (BRASIL, 2018), como as competências gerais e específicas e as habilidades por eixo e conteúdo. Os dois primeiros livros estão divididos em quatro unidades, que por sua vez estão divididas em capítulos, enquanto o último, está dividido em 8 unidades.

Quadro 6 - Organização das obras

Livro	Divisão interna	Subdivisão interna
LD01	Quatro unidades	12 capítulos
LD02	Quatro unidades	12 capítulos
LD03	Oito unidades	Não há capítulos.

Fonte: própria autoria, 2020.

Como já relatado, nosso interesse é sobre a abordagem do objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau, nesse caso, nossa atenção voltou-se para o capítulo ou unidade na qual se encontra esse objeto de conhecimento. Tais capítulos ou unidade estão organizados conforme o quadro 2 abaixo:

Quadro 7 - Organização da Unidade temática Álgebra.

Livro	Tema	Estrutura interna
LD01	Capítulo 6: Linguagem algébrica e regularidades.	Expressões algébricas: páginas 133 a 139; Equações: páginas 140 a 145; Resolução de problemas: páginas 146 a 148; Sequências: 149 a 155. Seção trabalhando os conhecimentos adquiridos – miscelânea de atividades: páginas 156 a 162.
LD02	Capítulo 6: Expressões algébricas, equações e inequações.	Expressões algébricas: páginas 84 a 87; Fórmulas: 88 a 90; Sequências: 91 a 95; Equações: 97 a 102; Inequações: 103 a 107. Seção vamos relembrar – miscelânea de atividades: páginas 108 a 113.
LD03	Unidade 5: Expressões algébricas e Equações.	Expressões algébricas: páginas 140 a 143; Sequências: páginas 144 a 147; Equações: páginas 148 a 155; Contextos históricos e tecnológico, resumo: páginas 156 a 161.

Fonte: própria autoria, 2020.

Nota-se uma ligeira diferença na organização e composição do capítulo. Por exemplo, apenas a obra LD02 aborda o tema inequações. Outra diferença é que LD01 trabalha o tema sequências antes de equações, enquanto as outras duas invertem essa ordem. Um fato comum é que todos os livros analisados iniciam o capítulo com o tema expressões algébricas, provavelmente com o intuito de familiarizar o aluno com o uso e operações com letras, sinalizando que estas pode desempenhar diversas funções. Esse é um ponto importante, já apresentado em muitos estudos sobre o ensino de álgebra na educação básica (USISKIN, 1995; BRASIL, 1998, 2018) e que permite a construção de significados para os símbolos algébricos.

Como aponta a literatura (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KAPUT, 1995), a partir de documentos orientadores, especialmente os PCN e a BNCC, no caso do Brasil, as obras não apenas trabalham o tema equações, mas procuram por meio de vários temas desenvolver uma educação algébrica mais ampla, inclusive o desenvolvimento de regularidade de padrões e generalização. Os LD mencionam que os objetivos do capítulo (ou unidade) é promover o desenvolvimento das seguintes habilidades propostas pela BNCC:

> (i) EF07MA13: compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita;
> (ii) EF07MA14: classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura;
> (iii) EF07MA15: utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas;
> (iv) EF07MA16: reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes;
> (v) EF07MA18: resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.
> (SILVEIRA, Ênio. p. 131; CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. p.p. 84,91, 93, 95, 97; SOUZA, Joamir Roberto de. p. 138)

No entanto, ao abordar o tema específico equação polinomial de primeiro grau, os livros deram maior ênfase na promoção do desenvolvimento da última habilidade (EF07MA18).

Observa-se pelo quadro 02 que o LD01 divide o capítulo em quatro tópicos: expressões algébricas, equações, resolução de problemas e sequências. Além disso, termina o capítulo com a seção trabalhando os conhecimentos adquiridos, isto é, uma miscelânea de atividades. Essa seção tem como objetivo retomar os conceitos e procedimentos vistos no capítulo, estimulando a revisão, a autoavaliação e a criatividade por meio da resolução e elaboração de problemas. Nela se encontram atividades de diversos níveis de dificuldade, incluindo desafios e questões de exames, como o Exame Nacional do Ensino Médio.

O LD02 trabalha a unidade temática Álgebra por meio dos tópicos expressões algébricas, fórmula, sequências, equações e inequações. Além desses tópicos, o capítulo finaliza com a seção vamos relembrar, a qual contém questões diversas que contempla todo o capítulo. Por fim, o LD03 organiza o trabalho sobre a unidade temática Álgebra por meio dos tópicos expressões algébricas, sequências e equações, e finaliza trazendo um contexto histórico e tecnológico, além de um lembrete sobre o capítulo.

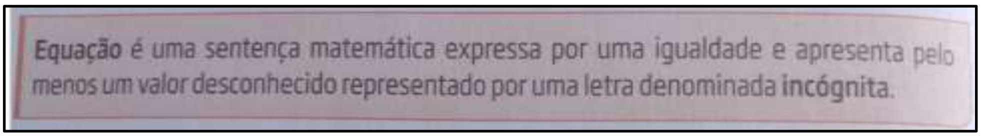
4.2 A ABORDAGEM DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU PRESENTE NAS OBRAS

Após leitura e observação da abordagem do tema equações nas três obras, surgiram as seguintes categorias de análise: definição, métodos de resolução, recurso para facilitar a abordagem (balança de dois pratos) e transformação: tratamento ou conversão, que serão analisadas a seguir.

Definição

O que é uma equação? As três obras apresentam o conceito de equação por meio de texto. Nos três livros, a palavra incógnita aparece nas definições em destaque, sempre para se referir a representação de valor desconhecido, representado por uma letra. Nos LD02 e LD03, após a definição, é apresentado por meio de texto como se resolve uma equação. Apenas o LD02, traz um exemplo numérico de resolução seguida da definição e o como resolver. Seguem abaixo, as definições de equação apresentadas:

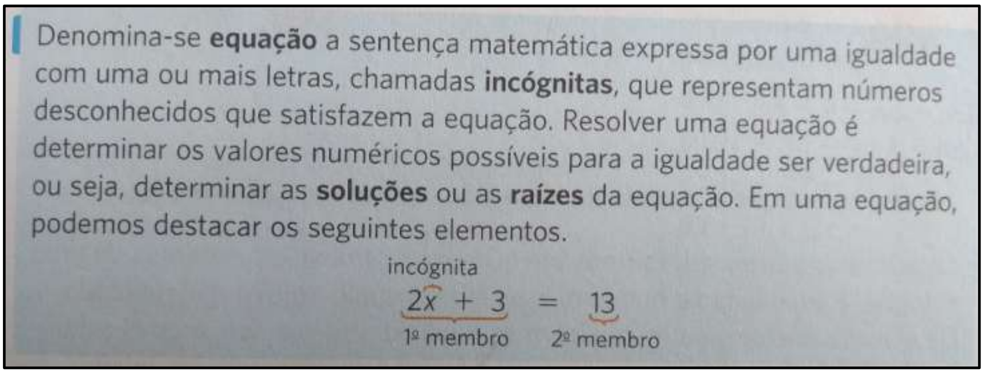
Figura 3 - Definição de equação no LD01.



Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade e apresenta pelo menos um valor desconhecido representado por uma letra denominada **incógnita**.

Fonte: SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: Compreensão e Prática. São Paulo: ed. Moderna, 2018. vol. 5, p. 140.

Figura 4 - Definição de equação no LD02.

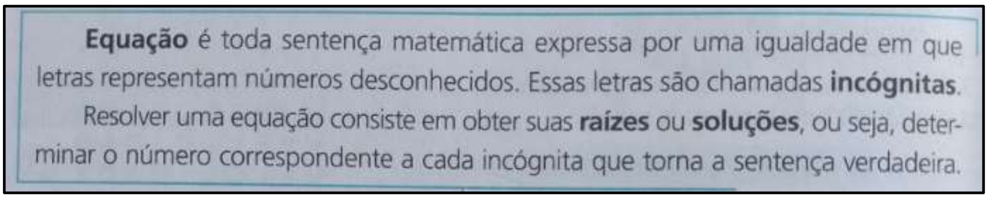


Denomina-se **equação** a sentença matemática expressa por uma igualdade com uma ou mais letras, chamadas **incógnitas**, que representam números desconhecidos que satisfazem a equação. Resolver uma equação é determinar os valores numéricos possíveis para a igualdade ser verdadeira, ou seja, determinar as **soluções** ou as **raízes** da equação. Em uma equação, podemos destacar os seguintes elementos.

$$\underbrace{2\overset{\text{incógnita}}{x} + 3}_{1^{\text{o}}\text{ membro}} = \underbrace{13}_{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Fonte: CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências Matemática**. São Paulo: ed. SM, 2018. vol. 2, p. 97.

Figura 5 - Definição de equação no LD03.



Equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade em que letras representam números desconhecidos. Essas letras são chamadas **incógnitas**.

Resolver uma equação consiste em obter suas **raízes** ou **soluções**, ou seja, determinar o número correspondente a cada incógnita que torna a sentença verdadeira.

Fonte: SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática**: Realidade e Tecnologia. São Paulo: ed. FTD, 2018. vol. 1, p. 148.

Observa-se que as obras definem equação de forma semelhante, isto é, como sendo uma sentença matemática expressa por uma igualdade com ao menos um valor desconhecido, chamado incógnita e representado por uma letra.

Nesse tipo de definição, com o uso da linguagem natural, o sentido dos termos possui um grau de imprecisão, podendo se tornar vago. Porém, como a Matemática possui um grau de abstração bem maior que outros tipos de conhecimentos, o conhecimento matemático torna-se refém de uma linguagem específica, de caráter restrito, formal (GRANELL, 1997). O estudo de equação polinomial de primeiro grau, se baseia na estrutura algébrica denominada anel de polinômio. Um polinômio, definido no corpo dos números reais, na variável x por exemplo, é uma expressão algébrica com a seguinte estrutura:

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0, \quad (I)$$

Com n ∈ N e a_n, a_{n-1}, ... , a_1, a_0 números reais, denominados coeficientes do polinômio. Quando $a_n \neq 0$, n será o grau do polinômio (ARAÚJO, 2009; BARBOSA; LIMA, 2014).

Define-se equação basicamente de duas formas: uma mais geral, com uso da linguagem natural (definição dos LD analisados), que diz que equação é uma igualdade que envolve uma ou mais quantidades desconhecidas chamadas incógnitas (BARBOSA; LIMA, 2013; BIANCHINI, 2018) e outra mais estrita, simbólica e precisa, como sendo toda equação que se pode reduzir à forma $ax + b = 0$, com a, b ∈ R e $a \neq 0$ e x é a incógnita, no caso de equação polinomial de primeiro grau (GARCIA GAY, 2014b).

Ao fazer uso das propriedades da igualdade, a solução de uma equação desse tipo é dada por: $ax + b = 0 \quad \rightarrow \quad ax + b - b = 0 - b \quad \rightarrow \quad ax = -b \quad \rightarrow \quad \frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-b}{a}$. Ao igualar (I) a zero, tem-se a fórmula generalizada da equação polinomial de grau n.

Segundo Granell, (1997) a linguagem especifica, abstrata da Matemática tem como característica abstrair o essencial das relações matemáticas, eliminando qualquer referência ao contexto ou à situação. Por isso, na linguagem algébrica – autêntica linguagem da Matemática – usa-se símbolos (letras) no lugar de números, o que lhe confere alto grau de generalização e a converte numa poderosa ferramenta de inferência e de criação de novos conhecimentos.

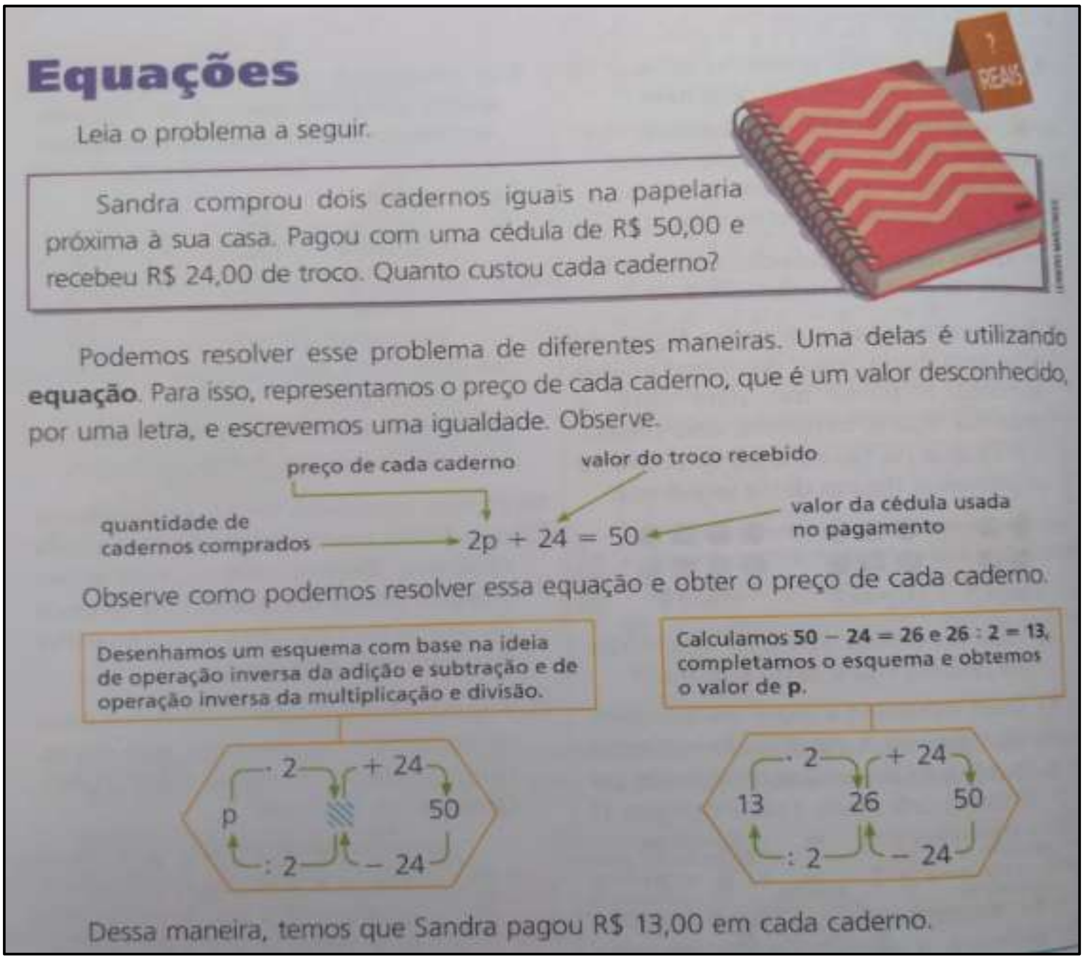
Métodos de resolução: das equações equivalentes e das operações inversas.

Os três LD abordam o método das equações equivalentes como método de resolução. Já o método das operações inversas é abordado nos LD02 e LD03. Há vários métodos de resolução de uma equação, como por exemplo, os métodos de gerar e avaliar, esconder, desfazer, equações equivalentes e diagrama (BERNARD; COHEN 1995). As situações-problema propostas pelos LD podem ser resolvidas por mais um método, no entanto, iremos discutir apenas os métodos abordados pelos livros.

O método das operações inversas, colocado pelos livros LD02 e LD03, se assemelha ao método de desfazer, que se baseia nas noções de inversos operacionais e na reversibilidade de um processo envolvendo um ou mais passos invertíveis (BERNARD; COHEN, 1995).

A figura abaixo representa como o livro aborda esse processo.

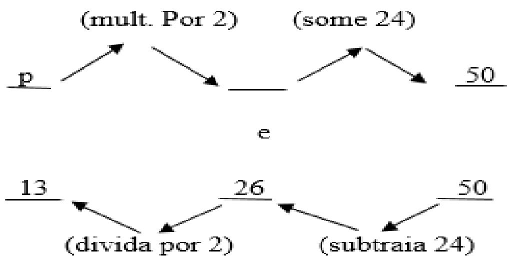
Figura 6 - Resolução de equação polinomial de primeiro grau por meio de operações inversas.



Fonte: SOUZA, Joamir Roberto de. Matemática: Realidade e Tecnologia. São Paulo: ed. FTD, 2018. vol. 1. p. 148.

Baseando em Bernard e Cohen (1995) e começando com p para representar o preço de cada caderno, os processos de ida e volta na equação acima fica como na figura abaixo.

Figura 7 - Sequências de operações algébricas em uma equação.



Baseado em Bernard e Cohen (1995, p. 117)

Na opinião dos autores deve-se instigar o aluno sobre a cosntrução de desconstrução de cada passo. Esses autores defendem o uso de tal método no ambiente escolar, uma vez que ele conecta a resolução de equações a aprendizagem anteriores, desenvolve o conceito de operações inversas, estimulando a reversibilidade, a análise e a resolução de problemas.

Já o método das equações equivalentes é “geral e sistemático” (BERNARD; COHEN, 1995, p. 122), isto é, não há limitações. Segundo os autores “as implicações do método das equações equivalentes é que as operações de equilíbrio são usadas como instrumentos para a manipulação de equações na certeza de que nunca se perdem as raízes” (p. 123).

As figuras 8 e 9 abaixo mostram como os LD01 e LD03, respectivamente abordam esse método.

Figura 8 - Resolução de equação polinomial de primeiro grau: método das equações equivalentes.

Vamos resolver a equação $\frac{3x}{5} - 1 = \frac{x}{2}$, sendo $U = \mathbb{Z}$.

$\frac{6x}{10} - \frac{10}{10} = x \cdot \frac{5}{10}$ ⟵ Usando frações equivalentes, escrevemos os termos da equação com o mesmo denominador.

$\left(\frac{6x}{10} - \frac{10}{10}\right) \cdot 10 = \left(x \cdot \frac{5}{10}\right) \cdot 10$ ⟵ Multiplicamos os dois membros da equação por 10 (princípio multiplicativo das igualdades).

$6x - 10 = 5x$

$6x - 10 - 5x = 5x - 5x$ ⟵ Subtraímos 5x de cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$x - 10 = 0$

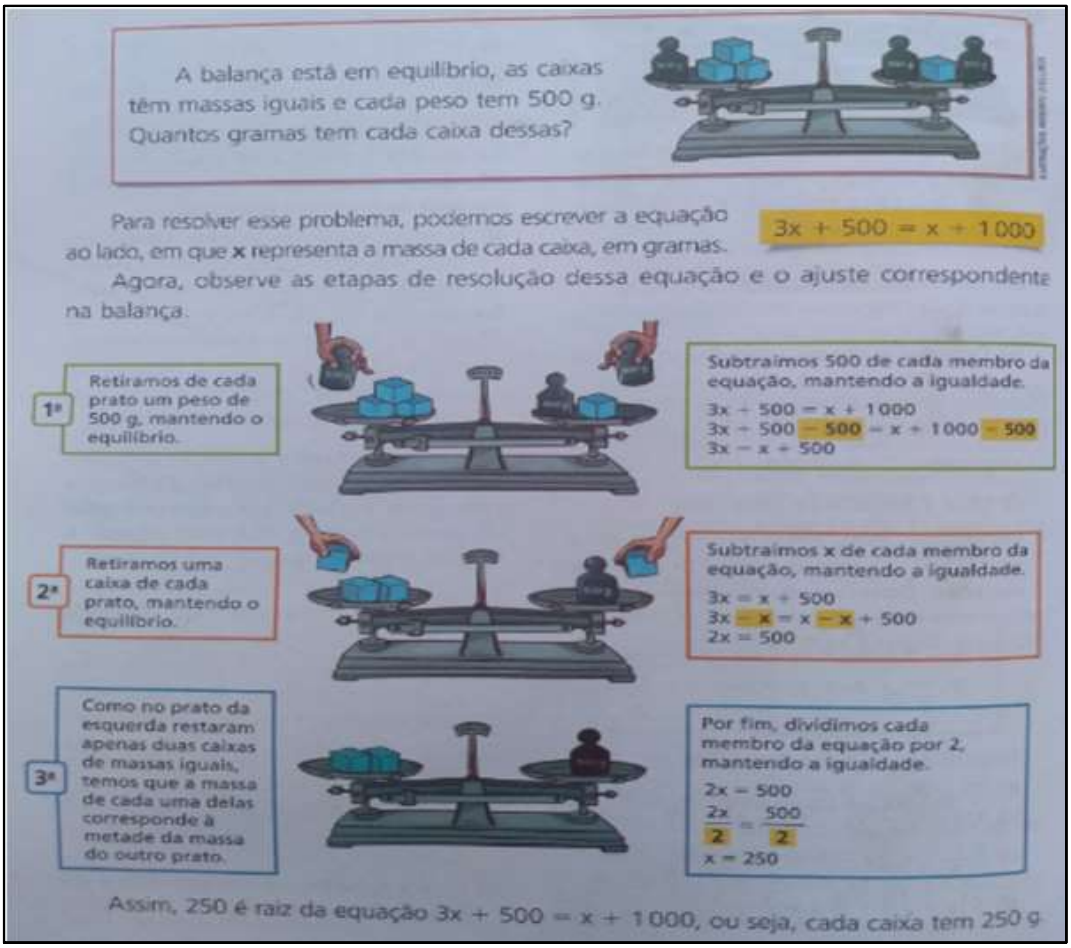
$x - 10 + 10 = 0 + 10$ ⟵ Adicionamos 10 unidades a cada membro da equação (princípio aditivo das igualdades).

$x = 10$

Como 10 é um número inteiro, 10 é a solução dessa equação.

Fonte: SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: Compreensão e Prática. São Paulo: ed. Moderna, 2018. vol. 5, p. 145.

Figura 9 - Resolução de equação polinomial de primeiro grau: método das equações equivalentes.



Fonte: SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática**. Realidade e Tecnologia. São Paulo: ed FTD, 2018. vol. 1, p. 152

Esse método faz uso de dois princípios interessantes: (1) somando-se o mesmo termo a ambos os membros de uma equação, o resultado não se altera e (2) multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número ou expressão diferente de zero, o resultado não se altera. Tais princípios recebem o nome de princípios aditivo e multiplicativo das igualdades. "Isso permite a eliminação de termos e alteração de coeficientes, gerando equação cada vez mais simples, até chegar a um resultado desejado". (BERNARD; COHEN, 1995, p. 122-123). Para Bernard e Cohen (1995, p. 126) "o ensino da Matemática deveria ocorrer por meio de uma abordagem de compreensão relacional, e isso inclui resolução de equações, e em particular, o método de resolução de equações por equivalência de equações".

Balança de dois Pratos

O uso da balança de dois pratos na abordagem de equação polinomial de primeiro grau é algo recorrente em livros didáticos (BARBOSA; LINS, 2013; CATANEO; RAUEN, 2018;

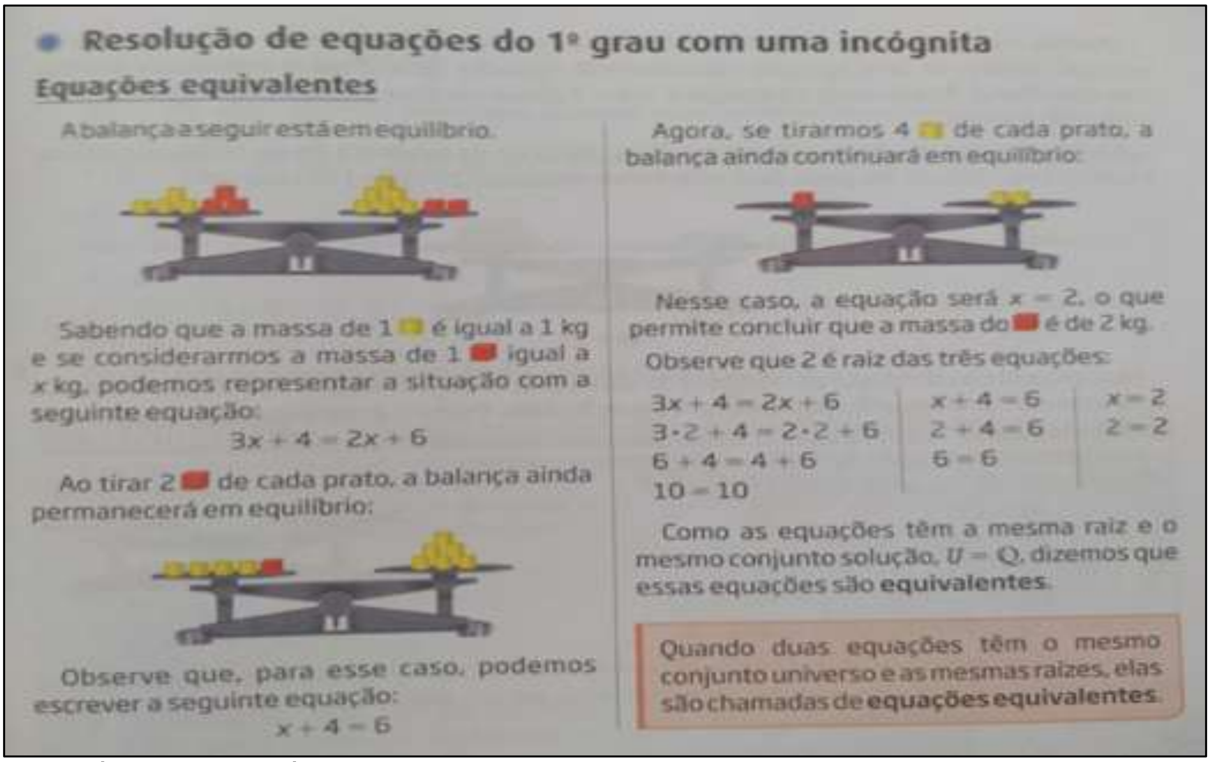
SILVEIRA, 2018; CHAVANTE, 2018; SOUZA, 2018) e em experiências e sequências de atividades matemáticas (COSTA, 2011; FERNANDES; SOARES, 2003; GRUCOMAT[7], 2018; HUMMES; BREDA; MENEGUETTI, 2018).

Baseado em Vergnaud e colaboradores, Costa (2011) argumenta que a apresentação de situações problema por meio do uso da balança de dois pratos é extremamente útil para a introdução da álgebra, pois auxilia o aluno a vencer dois obstáculos que interferem na compreensão da álgebra escolar: (a) a operação sobre incógnitas e (b) a utilização de uma noção de equilíbrio experienciada pela balança, que pode ser transposta para equações, ajudando o aluno na distinção dos significados anteriormente atribuídos pelos alunos ao sinal de igual.

Os três livros analisados fazem uso da balança de dois pratos em equilíbrio para traduzir, representar e trabalhar a resolução de equações, por meio da ideia de equivalência.

A figura 10 abaixo mostra como o livro LD01 utiliza a balança de dois pratos para trabalhar a resolução de equações polinomiais de primeiro grau por meio da ideia de equivalência.

Figura 10 - Ensino de equação polinomial de primeiro grau com o uso de balança de dois pratos.



Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita

Equações equivalentes

A balança a seguir está em equilíbrio.

Sabendo que a massa de 1 é igual a 1 kg e se considerarmos a massa de 1 igual a x kg, podemos representar a situação com a seguinte equação:

$$3x + 4 = 2x + 6$$

Ao tirar 2 de cada prato, a balança ainda permanecerá em equilíbrio:

Observe que, para esse caso, podemos escrever a seguinte equação:

$$x + 4 = 6$$

Agora, se tirarmos 4 de cada prato, a balança ainda continuará em equilíbrio:

Nesse caso, a equação será $x = 2$, o que permite concluir que a massa do é de 2 kg.

Observe que 2 é raiz das três equações:

$3x + 4 = 2x + 6$	$x + 4 = 6$	$x = 2$
$3 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 2 + 6$	$2 + 4 = 6$	$2 = 2$
$6 + 4 = 4 + 6$	$6 = 6$	
$10 = 10$		

Como as equações têm a mesma raiz e o mesmo conjunto solução, $U = \mathbb{Q}$, dizemos que essas equações são **equivalentes**.

Quando duas equações têm o mesmo conjunto universo e as mesmas raízes, elas são chamadas de **equações equivalentes**.

Fonte: Ênio SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: Compreensão e Prática. São Paulo: ed. Moderna, 2018. Vol. 5, p. 143.

[7] Grupo Colaborativo em Matemática, vinculado ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação da Universidade São Francisco.

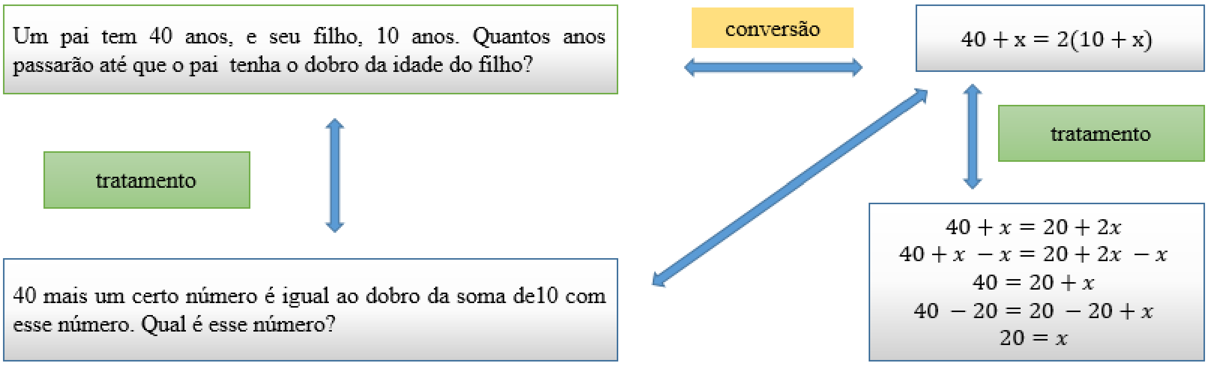
O uso da balança facilita o desenvolvimento dos conceitos de igualdade e de equivalência, permitindo que o aluno relacione o equilíbrio entre os pratos com a igualdade entre os termos de uma equação e compreenda o ato de realizar a mesma operação em ambos os membros da equação (VLASSIS, 2002; LIMA 2007). Esta é a finalidade com que os LD analisados apresentam essa ferramenta. No entanto, o uso da balança apresenta algumas restrições, como o trabalho com números negativos e equações do tipo $ax + b = 0$ (VLASSIS, 2002; LIMA 2007). Para o trabalho com números negativos uma sugestão é a balança algébrica (FERNANDES; SOARES, 2003).

Transformação: tratamento ou conversão.

Esse aspecto é analisado sob a ótica da teoria dos registros de representação semiótica (DUVAL, 2003). Segundo esse autor, diferentemente de outras áreas do conhecimento, na Matemática os objetos de conhecimentos não são observáveis, manipuláveis, fazendo-se necessário representá-los por meio de símbolos. No entanto, existem várias formas de representar um mesmo objeto matemático. No caso de uma equação polinomial de primeiro grau, pode-se representá-la por meio da linguagem natural, algébrica ou gráfica, por exemplo. Para uma aprendizagem significativa e para que o aluno não confunda o objeto com sua própria representação, Duval (2003) propõe a mobilização de ao menos dois registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático pelo aluno. Ainda de acordo com o autor (DUVAL, 2009), é preciso considerar os dois tipos de transformação, quais sejam, o tratamento e a conversão. O tratamento consiste em permanecer em um único registro do objeto matemático, a conversão, por sua vez, consiste na mudança de registro dentro de um único objeto.

A partir de um problema presente no LD01, construímos a figura a seguir para ilustrar a diferença entre esses dois tipos de transformações.

Figura 11 - Ilustração das transformações de registros em um problema de equação polinomial de primeiro grau



Fonte: própria autoria, 2020

A esse respeito, a BNCC considera que para o desenvolvimento do pensamento algébrico, esteja incluso um trabalho que leve o aluno a criar, interpretar e transitar entre as diversas representações, gráficas e simbólica, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados (BRASIL, 2018). Isso reforça a importância de trabalhar situações problemas que demandam conversão de registros.

Na figura 12 abaixo, temos exemplos de equações prontas, que não demandam conversão de registro.

Figura 12 - Equações prontas, que não demandam conversão de registro de representação.

3 Resolva as equações e obtenha a solução de cada uma, sabendo que $U = \mathbb{Q}$.

a) $3x - 9 = 9$ $x = 6$

b) $x - 5 = -7$ $x = -2$

c) $y - 6 = 5y + 8$ $y = -\frac{7}{2}$

d) $10x = 20 + 9x$ $x = 20$

4 Sabendo que $U = \mathbb{Z}$, resolva as equações.

a) $3x = -45 - 2x$ $x = -9$

b) $6(x + 3) - 2(x - 5) = 20$ $x = -2$

c) $-18 = 2x + 15$ Não tem solução em $\mathbb{Z}$.

d) $2(x - 1) - 1 = 8$ Não tem solução em $\mathbb{Z}$.

5 Sabendo que $U = \mathbb{Q}$, obtenha o valor da incógnita de cada equação.

a) $\frac{2x}{5} - \frac{1}{4} = x - \frac{1}{10}$ $x = -\frac{1}{4}$

b) $2m - \frac{7}{5} - \frac{m}{10} = \frac{1}{2}$ $m = 1$

c) $\frac{y}{2} + \frac{y}{3} = \frac{3y}{4} - 6$ $y = -72$

d) $\frac{3y}{2} - \frac{3}{4} = 1 - 2y$ $y = \frac{1}{2}$

Fonte: SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: Compreensão e prática. São Paulo: ed. Moderna, 2018. vol. 5, p. 145.

Já na figura 13 a seguir, temos o exemplo de uma situação-problema presente no LD02 que demandam conversão de registro de representação.

Figura 13 - Problemas sobre equação polinomial de primeiro grau com demanda de conversão.

Para enfeitar três caixas de presente, Célia comprou um pedaço de fita cuja medida de comprimento é 4,3 m. Na segunda caixa, ela usou o dobro de fita usada na primeira, e na terceira, 30 cm a mais do que na segunda. Sabendo que Célia usou toda a fita que comprou, quantos centímetros de fita ela usou para enfeitar cada caixa?

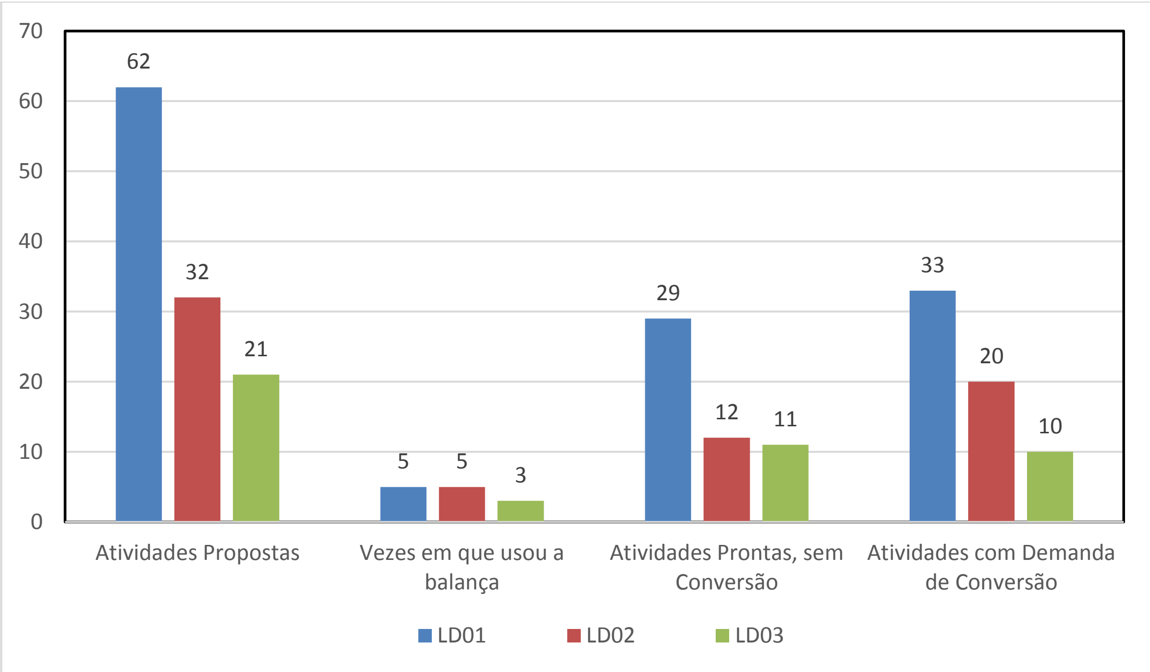
Fonte: CHAVANTE, Eduardo. **Convergências Matemática**: São Paulo: ed. Edições SM, 2018. p. 101.

Das três obras analisadas, LD01 é a que mais explora esse tipo de tarefa, isto é, situações em que o aluno deve ler, entender, representar e resolver.

O ensino de Álgebra precisa garantir que os alunos trabalhem com problemas que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas, conforme propõe Brasil (2018). O trabalho com situações-problema bastante diversificadas, possibilitará o aluno reconhecer diferentes funções de Álgebra (BRASIL, 1998, 2018; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009) e desenvolver diferentes zonas de perfil conceitual de equação (RIBEIRO, 2013), ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecendo relações entre grandezas.

De modo geral, é apresentado abaixo, por meio do gráfico, dados sobre a quantidade de atividades de cada LD para o tema em estudo, seguidas da quantidade de atividades que envolvem a balança, atividades sem e com necessidade de conversão.

Gráfico 1 - Alguns dados estatísticos das obras.



Fonte: própria autoria, 2020.

Nota-se pelo gráfico uma disparidade entre o número de questões propostas nas três obras. O LD01 apresenta praticamente o dobro do número de questões apresentado pelo LD02 e praticamente o triplo do número de questões apresentado pelo LD03. Das 62 tarefas propostas pelo LD01, 33 demandam conversão de registro de representação semiótica – 32 da linguagem natural para a linguagem algébrica e uma da linguagem pictórica para a algébrica – enquanto 29 não exigem mudança de registro. Parece que esse tipo de conversão constitui quase totalidade das conversões presentes em livro didático. Resultado semelhante foi encontrado por Cataneo e Rauen (2018) quando analisou um livro de 8º ano, no qual das 43 questões que demandavam conversões, 42 eram da língua natural para a linguagem algébrica. Das 32 questões propostas pelo LD02, 20 demandam conversão de registro de representação semiótica (da língua natural para a algébrica). Já das 21 questões propostas pelo LD03, apenas 10 são os chamados “problemas”, isto é, demandam conversão de registro de representação semiótica (no caso, da língua natural para a linguagem algébrica).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo analisar como três livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, que integraram o PLND 2020, abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. O conhecimento algébrico, e em particular, o de equação polinomial de primeiro grau, é de suma importância para o cidadão, uma vez que permite modelar, representar, generalizar, compreender e resolver situações das mais simples às mais complexas possíveis, conforme menciona a BNCC (BRSIL, 2018).

Os livros que compuseram o *corpus* de análise nessa pesquisa não apenas abordam o tema equação como também outros tópicos, como expressões algébricas e sequências, mostrando que a letra pode ter diferentes significados e funções, inclusive expressam que os objetivos da unidade temática Álgebra é promover as habilidades EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18, propostas pela BNCC. Cabe ao professor potencializar esse trabalho em sala de aula, colaborando assim, com a construção de significados para os objetos algébricos e, consequentemente, com o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte do aluno. No entanto, no caso específico de equação polinomial de primeiro grau, os LD analisados dão maior ênfase à habilidade EF07MA18: “resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade” (BRASIL, 2018, p. 307), porém muito mais no procedimento “resolver” do que no de “elaborar”.

As três obras abordam, explicitamente, como método de resolução, o método das equações equivalentes, isto é, as propriedades da igualdade, também conhecidas como princípio aditivo e princípio multiplicativo, que é uma maneira eficaz de achar equações equivalentes às equações dadas, por meio da eliminação de coeficientes e termos, ou seja, a cada passo as equações vão se tornando mais simples, até isolar a incógnita. Além desse método, os livros LD02 e LD03 abordam o método das operações inversas, cujo princípio é andar no caminho inverso, desfazendo cada operação pela sua inversa.

Há uma disparidade na quantidade de tarefas propostas no trabalho com o objeto de estudo, LD01 propôs 62 atividades, enquanto LD02 propôs 32 e LD03 21. Nesse caso, a primeira obra oferece uma melhor condição de escolha de tarefa ao professor, inclusive um número maior de “problemas”, exigindo que o aluno realize leitura atenciosa, modelize a situação por meio da linguagem algébrica e só depois resolva. Porém, não é a quantidade de tarefas, sozinha, que é o mais importante. No nosso entender, junta-se à quantidade a diversidade, a qualidade e a maneira como são implementadas pelo professor. No geral, os livros trazem metade das tarefas prontas (sem conversão) metade de "problemas" (com conversão). Convém lembrar que o trabalho com situações-problemas que demandam conversão de registro de representação é necessário para que a apreensão dos objetos matemáticos por parte do aluno seja significativa (DUVAL, 2003). O uso da balança aparece nas três obras, respectivamente em 5, 5 e 3 situações. Através desse instrumento os livros procuram promover os conceitos de incógnita, de equivalência e de operações inversas da igualdade.

Sendo o livro o principal instrumento de consulta de professores e alunos em muitos dos contextos educacionais brasileiros, pensamos que ele deva ser o mais completo possível. No caso específico da Álgebra e, em particular, de equação polinomial de primeiro grau, defendemos que o livro deva oferecer situações diversificadas de aprendizagem, com diferentes graus de complexidade, que favoreça a percepção e construção de diferentes significados para os símbolos e/ou variáveis como também a capacidade de manipulação desses símbolos na modelação e resolução de problemas, isto é, que colabore com o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. No caso dos livros analisados essa colaboração é feita de forma meio tímida e discreta, isto é, não dá o devido destaque, restando ao professor fazê-lo.

No entanto, entendemos que o livro didático deve ser mais um instrumento de apoio ao professor, mas não deve ser o único, nem suas tarefas e orientações ser interpretadas como leis a ser seguidas à risca. O professor deve ter consciência e conhecimentos de que existem tarefas que devem ser modificadas, adaptadas e implementadas não da forma como está no livro, porém de maneira conveniente a cada situação e contexto, e que estejam sempre a serviço de uma aprendizagem ampla, autônoma e significativa. No caso específico de equação polinomial de primeiro grau deve-se capacitar o aluno a modelar e resolver situações-problema com diferentes graus de complexidades, por meio do uso de diversos métodos e técnicas.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Abraão Juvencio de. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 292 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em:

https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/3947/1/arquivo3433_1.pdf. Acesso em: 17 out. 2019.

ARCAVI, Abraham. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35, 1994.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Equação Polinomial do Primeiro Grau: Uma Análise Praxeológica em Três Livros didáticos do 7º do Ensino Fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.1, pp. 001-020, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32077/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LIMA, Anna Paula Avelar Brito. Organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas sobre equações do primeiro grau**. Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.9, n. 2, p. 110-129, 2014. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2014v9n2p110/28441. Acesso em: 29 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; LINS, Abigail Fregni. Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.2, pp. 337-357, 2013. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/15062/pdf. Acesso em: 28 ago. 2019.

BARBOSA, Edelweis Jose Tavares; MENDES, Anderson Albuquerque. A contextualização no ensino de equações - uma análise em um livro didático antes e depois do PNLD. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.11, n. 2, p. 363-386, 2016. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p363/33646. Acesso em: 27 ago. 2019.

BERNARD, John E; & COHEN, Martin P. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. In: COXFORD, Arthur F; SHULTE, Alberto P. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 10, p. 111-126.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 296 p. (7º ano).

BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação.** Tradução: Maria João Avarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Batista. Porto Editora, 2010.

BRASIL. Guia Digital PNLD 2020. **Matemática**. Disponível em: https://pnld.nees.com.br/pnld_2020/componente-curricular/pnld2020-matematica. Acesso em: 1 nov. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 17 ago. 2019.

CATANEO, Vanessa Isabel; RAUEN, Fábio José. Registros de representação semiótica, relevância e conciliação de metas: uma análise do capítulo Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas do livro Matemática compreensão e prática de Ênio Silveira. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.20, n.2Y, pp. 140-170, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/36693/pdf. Acesso em: 15 nov. 2019.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. 288 p. (7º ano).

COSTA, Eveline Vieira. Comparação entre duas sequências didáticas sobre ensino introdutório de álgebra. **Revista de Educação Matemática,** São Paulo, vol. 13, n. 15, 2011. Disponível em: http://revistasbemsp.com.br/index.php/REMat SP/article/view/67/pdf. Acesso em: 03 set. 2019.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registro Semiótico e Aprendizagens Intelectuais**. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, fascículo I, 2009.

FERNANDES, José Antônio; SOARES, Maria José. **O ensino de equações lineares**. In Comissão Organizadora do ProfMat, 2003, Santarém. CD-ROM, Santarém: 2003. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Jose_Fernandes5/publication/308415764_O_ensino_de_equacoes_lineares/links/57e3bbee08ae847401683c56/O-ensino-de-equacoes-lineares.pdf. Acesso em: 11 dez. 2019.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. rev. Campinas, São Paulo, 2012.

GAY, Mara Regina Garcia. **Projeto Araribá**: matemática. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014a. 408 p. (7º ano)

GAY, Mara Regina Garcia. **Projeto Araribá**: matemática. 4. ed. São Paulo: Moderna, 2014b. 440 p. (8º ano).

GÓMEZ-GRANELL, Carmen. A Aquisição da Linguagem Matemática: símbolo e significado. TEBEROSKY, A. & TOCHINKI, L. (Orgs.). **Além da Alfabetização:** a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. Tradução Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1997.

GONÇALVES, Alessandro; BIANCHINI, Barbara Lutaif. Utilização de Questões do SARESP para Análise de Erros e Dificuldades dos Alunos em Questões sobre Álgebra**.**

REnCiMa, Edição Especial: Educação Matemática, v.7, n.4, p. 79-94, 2016. Disponível em: http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1207/842. Acesso em: 5 nov. 2019.

HUMMES, Viviane Beatriz; BREDA, Adriana; MENEGUETTI, Márcia Rodrigues Notare. Ensino de equações do primeiro grau à luz da Teoria da Aprendizagem Significativa: uma proposta sobre a noção de equivalência como conceito subsunçor. **REMAT**, Bento Gonçalves, RS, Brasil, v. 4, n. 1, p. 102-114, 2018. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2716/2062. Acesso em: 11 jan. 2020.

KAPUT, James. J. **A research base supporting long term algebra reform**? Texto apresentado na 17. Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1995, Columbus, Ohio. Disponível em:<http://eric.ed.gov/PDFS/ED389539.pdf >. Acesso em: 20 nov. 2019.

KIERAN, Carolyn. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. (Org). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 104-110, 1995.

LIMA, Rosana Nogueira de. **EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO MÉDIO**: uma jornada por diferentes mundos da matemática. 2007. 358 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11251. Acesso em: 12 ago. 2020.

LOZADA, Claudia de Oliveira; D'AMBROSIO, Ubiratan. Considerações sobre o conceito de equação presente nos cadernos do professor e as zonas de perfil conceitual de equação. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v.7, n.14, p.07-38, 2018. Disponível em: http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/viewFile/1705/pdf_292. Acesso em 03 set. 2019.

MELO, Carlos Ian Bezerra de; LOPES, Tânia Maria Rodrigues; OLIVEIRA, João Luzeilton de. Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE. **Revista Thema**, [S.l.], v. 14, n. 4, p. 100-113, dez. 2017. Disponível em: <http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/552>. Acesso em: 28 maio 2020.

NACARATO, Adair Mendes; CUSTÓDIO, Iris Aparecida. **O desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica:** compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Grupo Colaborativo e Matemática – GruComat. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf. Acesso em: 5 out. 2019.

PAULA, Jamirley Priscila de Souza de; LIMA, Gabriel Loureiro de. O conceito de variável e o modelo 3uv – três usos da variável. **Ensino da Matemática em Debate**, São Paulo, v. 4, n. 1, p. 21-35, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emd/article/view/34112/24329. Acesso em: 28 ago. 2019.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Ministério da educação. 2009.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor:** explorando os conceitos de equação e de função**.** Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015. Coleção Tendências em Educação Matemática).

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Elaborando um perfil conceitual de equação: Desdobramentos para o Ensino e a Aprendizagem de Matemática. **Ciências e Educação,** Bauru, v. 19, n. 1, p. 55-71, 2013. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1516-73132013000100005&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso em: 15 nov. 2019.

SCHOENFELD, Alan. H., & ARCAVI, Abraham. (1988). On the meaning of variable. Mathematics Teacher, v. 81, n. 6, p. 420-427.

SILVA, Circe Mary Silva da. Equações nos primeiros anos do ensino fundamental em livros didáticos russos. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Paraná, v.7, n.13, p.226-251, 2018. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/3527/4029. Acesso em: 28 ago. 2019.

SILVA, Circe Mary Silva da. Os “espinhos” da álgebra para Lacroix. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.13, n.1, p.219-237, 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/3527/4029. Acesso em: 28 ago. 2019.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: compreensão e prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 304 p. (7º ano).

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** realidade e Tecnologia. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. 304 P. (7º ano).

USISKIN, Zalman. Concepções sobre álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur. F.; SHULTE, Albert P. (Org.). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 09- 22, 1995.

VLASSIS, Joelle. **The balance model**: hindrance or support for the solving of linear equations wich one unknown. Educational Studies in Mathematics. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. v. 49, p. 341-359, 2002.

CAPÍTULO III – Artigo 03

TAREFAS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL[8]

TASKS FOR TEACHING AND PROMOTING LEARNING OF FIRST DEGREE POLYNOMIAL EQUATION.

RESUMO

Este artigo tem como objetivo analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da educação básica. Para tanto, foram analisadas três tarefas: uma do tipo exercício, outra do tipo problema e uma terceira do tipo investigativa, selecionadas dos livros didáticos Matemática: compreensão e prática, de Ênio Silveira e Convergências matemáticas, de Eduardo Chavante (PNLD 2020). A classificação das tarefas foi realizada com base em Ponte (2005) e Stein e Smith (2009) e analisadas com base nos marcadores de tarefas propostos por Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017). Já para a análise dos possíveis conhecimentos mobilizados pelo professor para a implementação de tais tarefas, usou-se o modelo teórico *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) elaborado por Carrillo et al (2013). Os resultados mostram que as tarefas matemáticas são um segmento fundamental no processo de ensino e aprendizagem, constituindo um fio condutor do trabalho pedagógico do professor e da aprendizagem dos alunos. Através das tarefas realizadas no dia a dia de sala de aula, o professor pode contribuir tanto para o sucesso e desenvolvimento do conhecimento matemático do aluno como também pode atrofiar o pensamento e o raciocínio matemático do aluno, a depender do seu conhecimento e, consequentemente de suas escolhas, estratégias e metodologias aplicadas. Isto é, a análise dos resultados aponta o conhecimento do professor como o principal elemento transformador da aprendizagem dos alunos e que deve-se priorizar o trabalho com tarefas desafiadoras, que tenha alto nível de exigência cognitiva, que leve o aluno a pensar por meio de relações e conexões matemáticas, em detrimento do uso mecânico de regras e procedimentos memorizados e sem conexão.

Palavras-chave: tarefas. Equação polinomial de primeiro grau. Conhecimento especializado do professor.

ABSTRACT

This article aims to analyze how mathematical tasks for the teaching polynomial equations of the first degree can promote possible learning situations of basic education students. To this end, three tasks were analyzed: one of the exercise type, another of the problem type and a third of the investigative type, selected of the textbooks Mathematics: understanding and practice, by Ênio Silveira and Mathematical Convergences, by Eduardo Chavante (PNLD 2020). The classification of tasks was performed based on Ponte (2005) and Stein and Smith (2009) and analyzed based on the task markers proposed by Barbosa (2013) and Costa, Oliveira and Silva (2017). For the analysis of the possible knowledge mobilized by the teacher for the

[8] "O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001".

implementation of such tasks, the theoretical model Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) developed by Carrillo et al (2013) was used. The results show that mathematical tasks are a fundamental segment in the teaching and learning process, constituting a guiding thread for the pedagogical work of the teacher and the students' learning. Through the tasks performed in the daily classroom, the teacher can contribute both to the success and development of the student's mathematical knowledge as well as to stunt the student's mathematical thinking and reasoning, depending on his knowledge and, consequently, their choices, strategies and applied methodologies. That is, the analysis of the results points to the teacher's knowledge as the main transforming element of the students' learning and that priority should be given to work with challenging tasks, which has a high level of cognitive demand, which leads the student to think through mathematical relationships and connections, to the detriment of the mechanical use of memorized and disconnected rules and procedures.

Keywords: tasks. First degree polynomial equation. Expert knowledge of the teacher.

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é tida por muitos como bicho de sete cabeças, como a vilã do currículo escolar. Por que isso acontece? O que tem contribuindo para chegar a esse ponto? É certo que existem vários fatores que contribuem para esse panorama, muitos deles inclusive externos à escola e que não podem ser controlados pela mesma. No entanto, no que diz respeito à escola, questiona-se: será que o modo como a Matemática tem sido trabalhada nas escolas, isto é, se resumindo, de modo geral, a aplicações de regras e teoremas presentes em livros, transformando as aulas num processo árduo e sem significado, no qual o professor é mais transmissor do que intermediador e orientador e o aluno é mais um receptor do que um construtor, não tem contribuído para esse cenário? Provavelmente, sim. Essa abordagem é considerada por muitos ultrapassada e desfavorável a uma aprendizagem duradoura e significativa (VAN DE WALLE, 2009; PONTE, 2005; SMITH; STEIN, 2009). Em contrapartida, esses mesmos autores sugerem um ensino mais aberto e dinâmico, no qual o professor se mantém numa posição horizontal com os alunos, intermediando e incentivando-os a ser construtores de seus conhecimentos. Assim, o professor deve conjugar dois conhecimentos essenciais: o conhecimento matemático e o conhecimento de como os alunos aprendem Matemática (VAN DE WALLE, 2009).

Nesse contexto, o delineamento de tarefas matemáticas constitui um ponto chave no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, podendo favorecer de forma positiva ou negativa (STEIN; SMITH, 2009; PONTE, 2005). Nesse sentido, o professor no decurso de sua prática pedagógica, deve manter a postura de um pesquisador ativo e reflexivo, sempre ponderando a respeito de suas realizações pedagógica e educativa e dos resultados alcançados. Em síntese, o processo de seleção/construção, adaptação e condução das tarefas matemáticas, deve favorecer o alto desenvolvimento cognitivo dos alunos, por meio da resolução de problemas, do raciocínio, da construção do pensamento, da comunicação e da validação de resultados (VAN DE WALLLE, 2009; PONTE, 2005, 2014; STEIN; SMIT, 2009).

No cenário educacional, mesmo com o advento da internet e da tecnologia, as quais permitem a obtenção e circulação de informações instantâneas, o livro didático ainda é a principal ferramenta de apoio do professor (OLIVEIRA, 2007; LITOLDO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018). Porém, como o livro didático será trabalhado em realidades e contextos diversos, esse material não deve ser o único a ditar "o que" e o "como fazer", mas deve apoiar e está apoiado no conhecimento do professor, o qual é o fator mais decisivo para a aprendizagem dos estudantes (HILL; ROWAN; BALL, 2005; LITOLDO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018).

As tarefas matemáticas constituem um elemento importante na organização e desenvolvimento do trabalho do professor, desempenhando papel fundamental na promoção da aprendizagem dos alunos (STEIN; SMITH, 2009; COSTA; OLIVEIRA; SILVA, 2017; PONTE; MENEZES, RODRIGUES, 2014; ENRÍQUEZ, 2019).

Diante do exposto, procuraremos nesse artigo analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da Educação Básica. Para tanto, serão analisadas três tarefas matemáticas, ponderando sobre suas limitações e/ou potencialidades para a construção de significados para o objeto equação polinomial de primeiro grau. As tarefas serão classificadas com base em Ponte (2005) e Stein e Smith (2009) e analisadas com base nos marcadores de tarefas (BARBOSA, 2013; COSTA; OLIVEIRA; SILVA, 2017), como também discutiremos, com base em Carrillo et al (2013), os possíveis conhecimentos a serem mobilizados pelo professor durante o processo de escolha e implementação de tarefas para o ensino e aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau. Na próxima seção são apresentados os aportes teóricos que sustentam esse estudo, seguidos dos procedimentos metodológicos, da apresentação e análise dos dados e, por fim, as considerações.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Na literatura há formas diversas de classificar e/ou analisar as tarefas matemáticas. Entretanto, para esse trabalho foram tomados Ponte (2005) e Stein e Smith (2009), além de Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017), os quais apresentam marcadores para análise de tarefas. Durante a implementação de uma tarefa em sala de aula, a mesma pode sofrer influências, tanto pela abordagem realizada pelo professor como pelo nível de conhecimento do aluno. Nesse contexto, buscou-se em Carrillo et at. (2013) um suporte teórico que ajudasse a compreender quais são/seriam os conhecimentos mobilizados pelos professores no processo de escolha e implementação de tarefas sobre equação polinomial de primeiro grau, considerando a abordagem defendida pelos documentos curriculares orientadores (BRASIL, 2018) e literatura especializada (PONTE, 2005, 2014; STEIN; SMITH, 2009).

Ponte (2014) afirma que o ensino realizado pelo professor em seu dia a dia é marcado fundamentalmente pelas tarefas que este propõe na sala de aula. A essa altura, é oportuno questionar: quais são os tipos de tarefas mais apropriados para o ensino de Matemática? Para essa pergunta não há uma resposta universal e definitiva, pois depende da clientela, de seu nível de desenvolvimento cognitivo, seus anseios e objetivos envolvidos. No entanto, não é aconselhável o ensino centrado no uso de tarefas baseadas na reprodução de procedimentos sem conexão e acúmulo de informações. Em vez disso, sugere-se que a atividade matemática seja desenvolvida por meio da resolução de problema, isto é, de situações desafiadoras, que leve o aluno a produzir significado através de observação, conjectura, estratégias, raciocínio e conexões (BRASIL, 1998; PONTE, 2005, 2014; STEIN; SMITH, 2009).

As tarefas podem desempenhar uma variedade de papéis, como apoiar a aprendizagem, verificar o que o aluno aprendeu ou ainda compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (PONTE, 2014). Por isso, uma questão central a ser considerada são as várias tipologias de tarefas, suas vantagens e/ou limitações.

Ponte (2005) classifica as tarefas com base em suas características, grau de desafio e o grau de estrutura. O grau de desafio está relacionado com a dificuldade oferecida pela questão e varia entre os polos de desafio reduzido e elevado. Já o grau de estrutura varia entre os polos fechado e aberto. Uma tarefa fechada explicita o que é dado e o que é pedido, já uma tarefa aberta contém um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido ou em ambos. Considerando essas duas dimensões tem-se os quatro quadrantes abaixo.

Figura 14 - Dimensões das tarefas.

Fonte: Ponte (2005).

Pela imagem, nota-se que esse autor classifica as tarefas em quatro tipos, a saber: a) *exercício*, tarefa para cuja solução o aluno conhece os procedimentos, exige a aplicação de um algoritmo; os comandos são do tipo “calcule” “determine”, possui polo fechado e desafio reduzido; b) *problema*, tarefa cuja solução o aluno desconhece de início, precisa bolar um plano, uma estratégia para resolvê-la; tem polo fechado, porém desafio elevado; c) *investigação*, tarefa com alto grau de indeterminação, exige que o aluno formule perguntas e busque explicações para a situação que se coloca. É uma tarefa aberta com desafio elevado; e d) *exploração*, tarefa aberta, porém com desafio reduzido, a qual o aluno já pode resolver no primeiro momento.

Considerando o contexto de referência das tarefas, este autor ainda as classifica como pertencendo à matemática pura, à realidade ou à semirrealidade. No contexto da matemática pura as questões e atividades se referem tão e somente à matemática; no da realidade, relaciona-se diretamente com o dia a dia do aluno e, no da semirrealidade, as tarefas não existem na vida cotidiana, são fictícias, construídas com fins educativos.

Outras autoras que contribuem para a classificação das tarefas são Stein e Smith (2009). Essas autoras classificam as tarefas com base no nível de exigência cognitiva com que as tarefas são implementadas, distinguindo-as em dois níveis: (i) baixo nível de exigência cognitiva e (ii) alto nível de exigência cognitiva. Cada um desses níveis subdivide em dois subtipos de tarefas. No nível (i), as tarefas distinguem-se em (a) *memorização*, quando são implementadas com o uso mecânico de fatos e regras e (b) *procedimentos sem conexão*, quando os alunos realizam procedimentos memorizados. Já as tarefas do tipo (ii), distinguem-se em (c) *procedimentos com conexão*, quando os alunos realizam procedimentos não memorizados, mas contextualizados, relacionando ideias e (d) *fazendo matemática*, quando os alunos são desafiados a construírem/descobrirem relações matemáticas e estratégias próprias para resolver situações-problema.

Dessa forma, é importante que o professor lance mão de diferentes tipologias de tarefas, já que cada uma delas desempenha diferente papel em relação à aprendizagem: tarefas de natureza fechada como exercício e problema contribuem para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos, baseado numa relação estreita e rigorosa entre dados e resultados. As de natureza mais acessíveis, como exercício e exploração, possibilitam ao aluno executá-las com uma maior chance de sucesso, favorecendo assim, a autoconfiança; as de natureza mais desafiante, como investigação e problema, favorecem experiências matemáticas efetivas, e as de natureza mais aberta são essenciais para o desenvolvimento de capacidades como autonomia e lidar com situações complexas. (PONTE, 2005).

Stein e Smith (2009) sugerem que o trabalho com tarefas seja desenvolvido sempre com alto nível de exigência cognitiva. Porém, relatam que o grau de exigência cognitiva de uma tarefa não depende unicamente da tarefa em si, mas também do modo como é conduzida pelo professor e como são implementadas pelos alunos. Stein e Smith (2009) elencam três fases pelas quais passam as tarefas: (i) como aparecem nas páginas dos materiais; (ii) como são apresentadas pelo professor e (iii) como são implementadas pelos alunos em aula. Segundo essas autoras, a natureza das tarefas muda ao passar de uma fase à outra e que o modo como o professor as aborda pode fazer com que uma tarefa que teoricamente tenha alto nível de exigência cognitiva seja implementada com baixo nível de exigência cognitiva. Portanto, o professor deve estar sempre atento a esse fato, de modo a contribuir positivamente para a construção do conhecimento matemático pelo aluno.

Os marcadores de tarefas propostos por Barbosa (2013), ampliado no item (vi) por Costa, Oliveira e Silva (2017), são constructos teóricos usados para analisar, compreender e tirar conclusões a respeito do delineamento de tarefas matemáticas, tendo em vista seus atributos. São assim definidos:

(i) *contexto de referência*: baseia-se em dois extremos: matemática pura e realidade, podendo haver outras possibilidades intermediárias, como o da semirrealidade;

(ii) *uso da linguagem*: possui dois polos – rigor fraco e rigor forte. O rigor é considerado forte quando a abordagem é expressa por meio de termos específicos do conteúdo. Caso contrário, será considerado fraco;

(iii) *estrutura*: esse marcador está relacionado com a estrutura da tarefa, podendo ser fechada ou aberta. Uma tarefa é considerada com estrutura fechada quando existir um sequenciamento e direcionamento por meio de questões auxiliares. A ausência desse comando torna a tarefa com estrutura aberta. Nesse último caso, as soluções dos estudantes não são controladas pelo professor;

(iv) *objetivo de ensino*: diz respeito aos conteúdos selecionados e abordados. Pode variar em simples (quando visa apenas o objetivo principal da tarefa, não inserem outras possibilidades) e complexo (vai além do delimitado para ser discutido nas tarefas);

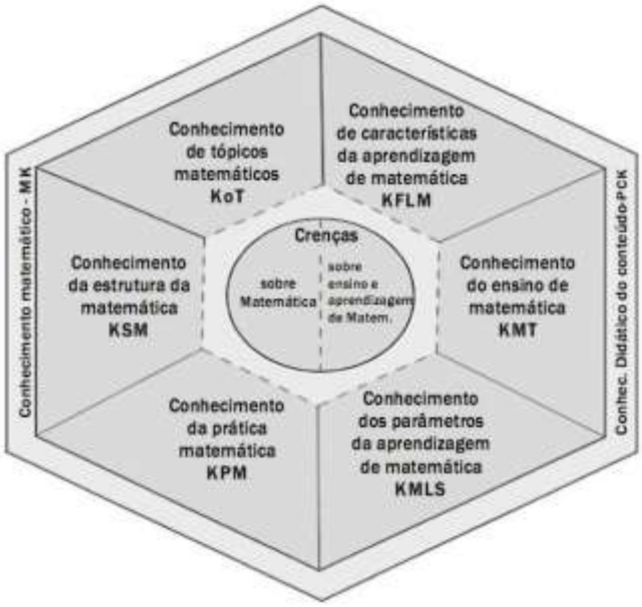
(v) *relação pedagógica*: varia entre dois polos – isolamento fraco e isolamento forte. Isto é, esse marcador se refere ao modo como professor e aluno se relacionam durante a implementação da tarefa. O isolamento fraco ocorre em tarefas abertas, com maior diálogo entre professor e aluno, ao passo que o isolamento forte ocorre em tarefas fechadas, na qual já explicita o que deve ser feito pelo aluno.

(vi) *foco de ensino*: varia entre os polos conceitual e procedimental. Quando a tarefa tem como objetivo a construção de conceitos matemáticos pelos estudantes, diz-se que a mesma tem foco conceitual, em contrapartida, as tarefas cujo objetivo leva os alunos a realizar procedimentos, como calcular, medir, representar, possibilitando a compreensão de ralações matemáticas, diz-se que a mesma tem foco procedimental. Há ainda tarefas que que se encontram entre os dois extremos, cujo objetivo leva os alunos a elaborarem conceitos matemáticos por meio da realização de procedimentos ou vice-versa.

O delineamento de tarefas matemáticas, elemento chave no processo de ensino e aprendizagem, está à mercê do conhecimento do professor. A esse respeito, Ponte e Menezes (2014) afirmam que o conhecimento do professor é determinante na escolha e condução da tarefa em sala de aula, pois este pode propor uma tarefa muito interessante aos seus alunos, mas se esta não for bem explorada, as suas potencialidades podem ser diminuídas e se transformar em experiências pouco ricas para os alunos. Nessa mesma linha, muitos autores afirmam que o conhecimento do professor é, dentre os fatores que se podem controlar, aquele que maior impacto causa nas aprendizagens dos alunos (BALL; HILL; BASS, 2005; GROSSMAN, 2010; NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGES, 2004; DI BERNARDO, et al., 2018).

E que conhecimentos são considerados necessários ao professor que ensina Matemática? Para responder a essa pergunta, tomamos como base o trabalho realizado por Carrillo et al. (2013). Segundo este autor o modelo analítico do *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), ou seja, conhecimento especializado do professor que ensina matemática, é composto por dois domínios: *Mathematics Knowledge* (MK) (conhecimento matemático) e *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) (conhecimento pedagógico do conteúdo), cada um desses domínios subdivide ainda em três subdomínios, todos eles influenciados pelas crenças do professor em relação à Matemática e ao seu ensino e aprendizagem, como mostra a figura abaixo.

Figura 15 - Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática.



Fonte: Carrillo et al. (2013) traduzido por Muriel Júnior e Carrillo (2014)

O MK diz respeito ao conhecimento matemático do professor e subdivide em três subdomínios:

(i) o conhecimento dos tópicos matemáticos (KoT) é o conhecimento dos conteúdos matemáticos a serem ensinados, englobando aí, a fundamentação conceitual, demonstrações, propriedades, procedimentos, seus vários modos de representação, exemplos e contraexemplos, contexto de aplicação.

(ii) o conhecimento da estrutura da matemática (KSM) refere-se à capacidade de o professor reconhecer a matemática como todo integrado, isto é, demanda não só conhecer de forma específica o objeto matemático em estudo, mas também as possíveis conexões deste com outros tópicos trabalhados anteriormente ou futuramente, o que permite a compreensão de conceitos avançados a partir de uma perspectiva elementar e, ao mesmo tempo, desenvolver conceitos elementares por meio de ferramentas matemáticas avançadas. Em outras palavras, implica trabalhar o conteúdo em perspectiva, isto é, a matemática básica a partir de um ponto de vista avançado, e matemática avançada do ponto de vista básico. (MORIEL JÚNIOR; WIELEWSKI, 2017).

(iii) conhecimento da prática matemática (KPM) diz respeito às maneiras de proceder em Matemática, envolve os modos de criação ou produção na área da matemática, conhecimento do papel dos símbolos e da linguagem, raciocínio, prova, saber realizar uma demonstração, definir e usar definições, ser capaz de selecionar representações, de argumentar e generalizar. (MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014; MORIEL JÚNIOR; WIELEWSKI, 2017).

Por outro lado, o PCK trata do conhecimento dos conteúdos matemáticos enquanto objeto de ensino e aprendizagem, subdivide em:

(iv) conhecimento de características da aprendizagem matemática (KFLM) diz respeito ao conhecimento das teorias e modelos de aprendizagem, ou seja, da necessidade de o professor conhecer como os alunos pensam quando estão envolvidos em atividades matemáticas. É preciso que o professor tenha consciência de que os alunos podem ter dificuldades durante o desenvolvimento de um tópico, o que exige conhecer como os alunos aprendem os conteúdos matemáticos, os erros comuns, as dificuldades apresentadas, obstáculos e uso da linguagem diante de cada conceito. Essa consciência é fruto do conhecimento do professor sobre o conteúdo e de sua afinidade com os alunos.

(v) conhecimento dos parâmetros da aprendizagem de matemática (KMLS) envolve o conhecimento de especificações curriculares, isto é, conteúdos e competências (conceituais, procedimentais, atitudinais e raciocínio matemático) previstos em cada etapa de educação escolar, bem como de normas mínimas e formas de avaliação que possibilitem a progressão de um ano para outro, assim como materiais de apoio, objetivos e medidas de desempenho criados por organismos externos.

(vi) conhecimento do ensino de matemática (KMT) se refere ao conhecimento de como o ensino da matemática deve ou pode ser realizado, assim como o uso de estratégias de ensino diversas que auxiliem o aluno no desenvolvimento de conceitos e procedimentos matemáticos. Inclui ainda a capacidade de conhecer e escolher recursos apropriados para a promoção da aprendizagem de um conceito ou procedimento matemático, bem como a organização de exemplos ou criação de analogias e metáforas.

O modelo MTSK é usado para descrever o entendimento do conhecimento específico do professor de Matemática. É lógico pensar que os seis subdomínios não podem ser entendidos como conjuntos disjuntos, estanques, mas como partes interligadas de um conjunto harmônico. A análise do modelo MTSK, de seus domínios e subdomínios deixa claro que o professor em oficio precisa conjugar uma gama de conhecimentos.

Considerando o ensino e aprendizagem de equação polinomial de primeiro grau, apresentamos no quadro abaixo, possíveis indícios de conhecimentos mobilizados por professor, referentes a cada tópico.

Quadro 8 – Ensino de equação polinomial de primeiro grau e conhecimento especializado do professor.

Subdomínio do MTSK	Indício de conhecimentos mobilizados
KoT	Sabe definir uma equação polinomial de primeiro grau como sendo $ax + b = c, com\ a, b, c \in R\ e\ a\ \neq 0$, utiliza formas diversas de representação como algébrica, tabular e gráfica; métodos de resolução como "tapar", transposição, equações equivalentes, diagrama, grelha, usa propriedades da igualdade.
KSM	Realiza conexão do objeto equação polinomial de primeiro grau com outros temas como conjuntos numéricos para se referir à solução de uma equação, proporção, movimento retilíneo uniforme, reta, plano cartesiano, função afim, as quatro operações, operações inversas e operações da igualdade.
KPM	Utiliza diversos registros de representação como língua natural, algébrica, gráfica, tabular, demonstra que a solução de uma equação polinomial de primeiro grau é dada por $x = \frac{-b}{a}$.
KFLM	Reconhece dificuldades e obstáculos de aprendizagem como erros na transposição de termos, mudança de membro sem mudar de sinal, substituição de divisão por subtração, reconhece que a balança de dois pratos não serve para trabalhar equações do tipo $ax + b = 0$ e que tenha números negativos.
KMLS	Sabe avaliar e escolher um livro, procura promover o desenvolvimento de habilidades como compreensão dos conceitos de incógnita, número genérico e número funcional, resolução e elaboração de problemas que possam ser representados por equações polinomiais de primeiro grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade e utilização da simbologia algébrica para expressar relações matemáticas.
KMT	Utiliza estratégias e recursos facilitadores da aprendizagem como softwares matemáticos, balança de dois pratos, diagrama, grelha.

Fonte: própria construção, 2020

3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Tendo como objetivo analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da educação básica, realizou-se nessa pesquisa, a análise de três tarefas matemáticas coletadas de livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático - PNLD 2020. Com o intuito de realizar comparações sobre as limitações e potencialidades de cada tarefa para a promoção da aprendizagem, procurou-se diversifica-las quanto a sua tipologia. Assim, foram selecionadas uma tarefa do tipo exercício, uma segunda do tipo problema e uma terceira do tipo investigativa. Fez-se uso de uma abordagem qualitativa, por meio da análise de episódios (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2002). Pode-se dizer que trata de uma pesquisa documental, pois como relata Alves-Mazzotti e

Gewandsznajder (2002), documento é qualquer registro escrito que possa ser usado como fonte de informação.

A análise dos episódios sob a ótica interpretativa (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 2002), permite-nos um entendimento compreensivo dos dados, e não tirar conclusões definitivas. Os dados foram analisados com base nos marcadores de tarefas propostos por Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017) enquanto que para analisar os possíveis conhecimentos mobilizados pelo professor na implementação de tais tarefas, usou-se como suporte teórico o modelo MTSK proposto por Carrillo et al. (2013). Os três episódios são: a) episódio 1: tarefa do tipo exercício, b) episódio 2: tarefa do tipo problema e c) episódio 3: tarefa do tipo investigativa.

4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Este estudo focou em analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equações polinomiais de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da educação básica. Buscando tornar essa análise clara, ela é apresentada por meio de três situações: a) o caso da tarefa exercício; b) o caso da tarefa problema; e, c) o caso da tarefa investigativa.

a) Episódio 1: o caso da tarefa exercício

Figura 16 - Tarefa do tipo exercício.

Na balança abaixo, as caixas possuem medidas de massas iguais.

Sabendo que a balança está em equilíbrio, qual das equações abaixo pode ser utilizada para determinar a medida da massa de uma dessas caixas? Determine essa medida.

a) $x + 4 = x - 7$

b) $4x + 4 = 2x + 7$

c) $6x + 4 = 7$

Fonte: CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências Matemática**. São Paulo: Edições SM, 2018. vol. 2, p. 101.

Essa tarefa tem como objetivo representar uma igualdade por meio da linguagem algébrica e calcular o valor da incógnita. Ela é uma tarefa do tipo exercício, por possuir uma estrutura fechada e um grau de desafio reduzido (PONTE, 2005). Outros atributos dessa tarefa foram analisados a partir de Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017). Em relação ao marcador *contexto de referência*, nota-se que essa tarefa se insere no contexto da matemática pura, pois trata-se de uma situação que se refere apenas à matemática, cujos pressupostos é desenvolver o pensamento matemáticos dos alunos. Em relação ao *uso da linguagem*, a tarefa apresenta um rigor fraco, pois sua resolução não demanda, por parte do aluno, o conhecimento de termos específicos, não exigindo do professor maiores discussões e revisão de termos específicos do conteúdo em si ou de outros já trabalhados.

Já a *estrutura* é identificada como fechada, pois as ações que os alunos devem realizar estão determinadas por um direcionamento sequencial imposto pela figura e pelas alternativas. Além disso, os procedimentos realizados pelos alunos como também os resultados podem ser controlados pelo professor. Quanto ao marcador *objetivo de ensino*, é simples, visto que essa tarefa se limita apenas a desenvolver um objetivo principal, que é escrever uma situação por meio de equação e calcular o valor da incógnita, mas não abre fronteiras para outras possibilidades. Já do ponto de vista do marcador *relação pedagógica*, a tarefa possui isolamento forte, pois está bem estruturada e fechada, deixando claro o que é dado e o que é pedido, não restando muito ao professor realizar questionamento e observações. Por último, em relação ao marcador *foco de ensino* o identificamos como procedimental, visto que os alunos precisam realizar procedimentos como representar a situação que se encontra na linguagem pictórica, usando um outro registro (linguagem algébrica) e calcular a raiz da equação. Esses procedimentos levam à compreensão de relações e conceitos matemáticos.

Essa tarefa tem um certo grau de limitação, como se pode notar pela análise com base nos marcadores. Porém, ainda assim pode contribuir para a construção de significados sobre o objeto algébrico em estudo por parte do aluno, a depender principalmente da abordagem realizada pelo professor. Para elevar seu nível de desenvolvimento cognitivo (STEIN; SMITH, 2009), a abordagem dessa tarefa exige do professor a mobilização de vários conhecimentos. Na tentativa de explorar a tarefa acima, potencializando-a por meio de possíveis conhecimentos a serem mobilizados pelo professor, inspirou-se em Carrilo et al (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014), a partir do modelo MTSK.

Antes de qualquer coisa, o professor precisa ter em mente que não se deve simplesmente responder a tarefa na lousa e deixar que os alunos a copie, mas manter a postura de intermediador, sempre dialogando e auxiliando os alunos em suas dificuldades e descobertas, o que lhe confere conhecimento da prática matemática (KPM). O livro aborda a tarefa fazendo uso da linguagem pictórica, trazendo inclusive, a imagem da balança, um objeto encontrado em práticas sociais. Pode-se então, questionar o aluno a respeito desse objeto, se o conhece, em que contextos é usado, qual o princípio empregado durante o uso (transversalidade e contextualização), ou seja, relacionar o equilíbrio da balança ao conceito de equação e de equivalência, o que demanda um conhecimento de tópicos (KoT) e de estrutura (KSM). O professor deve ser capaz de construir, junto com os alunos, outra representação do objeto, isto é, representá-lo por meio da linguagem algébrica (KoT). Chamando de x a massa de cada caixa, tem-se no prato esquerdo: $2x + 7$ e, no prato direito, $4x + 4$. Como a balança está equilibrada, os pesos se equivalem, logo $4x + 4 = 2x + 7$. Aqui é preciso que o professor explore a definição de equação polinomial de 1º grau, em particular, na forma reduzida, como sendo, $ax + b = 0, com\ a, b\ \in R\ e\ a\ \neq 0$. Para colocá-la na forma reduzida e calcular a solução, pode-se fazer uso de métodos como transposição ou efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação – equações equivalente (KIERAN, 1992; FERNANDES, 2003).

Usando o segundo método acima, o qual faz uso das propriedades da igualdade, isto é, dos princípios aditivo e multiplicativo, conduz o aluno a perceber que quando se soma o mesmo valor a ambos os membros de uma igualdade a mesma continua verdadeira, e que o mesmo acontece quando multiplica ambos os membros por um mesmo número diferente de zero, tem-se:

(I) $4x + 4 = 2x + 7 \quad \rightarrow \quad 4x + 4 - 4 = 2x + 7 - 4 \quad \rightarrow \quad 4x = 2x + 3$

(II) $4x - 2x = 2x - 2x + 3 \quad \rightarrow \quad 2X = 3$

(III) $\frac{1}{2} \cdot 2X = \frac{1}{2} .3 \quad \rightarrow \quad X = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad x = 1{,}5$

Procedendo de tal maneira, o professor demonstra possuir KoT (saber definir equação, usar procedimentos e propriedades, calcular a solução), de KPM (saber conduzir a tarefa por meio de uma linguagem clara e precisa, tanto para realizar definição como no processo de resolução) e de KSM (saber a definição de raiz e de conjunto-solução, isto é, se a situação tem solução ou não, conforme o conjunto-solução).

A escolha dessa tarefa revela um conhecimento sobre o ensino de matemática (KMT), visto que por meio dela procura desenvolver procedimentos como representar e resolver situação-problema por meio de equação. O conhecimento das características de aprendizagem de matemática (KFLM) faz-se necessário para que o professor conheça os processos de obtenção e construção do conhecimento matemático pelo aluno, possíveis erros e dificuldades apresentadas, estabelecimento de conexões; na presente tarefa, uma dificuldade possível poderia estar relacionada à representação do objeto em linguagem algébrica, como poderia acontecer erros durante a resolução, como por exemplo, aplicação equivocada da transposição ou ainda dificuldade de compreensão de equações equivalentes (KIERAN, 1992).

Por fim, o conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de matemática (KMLS) envolve o entendimento de como o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau, se apresenta em currículos e documentos curriculares orientadores. Por exemplo, a BNCC propõe que desde os primeiros anos de escolaridade deve-se desenvolver ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade, porém sem o uso de letras. Já para o 7º ano, propõe o desenvolvimento da habilidade de *resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade* (BRASIL, 2018, p. 307). Enquanto para as demais séries, a BNCC coloca que o ensino de Álgebra precisa continuar garantindo que os alunos trabalhem com problemas, que lhes permitam dar significado à linguagem e às ideias matemáticas.

Portanto, mesmo com características que impõe certas limitações à aprendizagem, uma tarefa pode proporcionar a aprendizagem do aluno. Para tanto, o professor deve possuir e mobilizar conhecimentos durante a implementação da tarefa, por meio de estratégias e metodologias que auxiliem o aluno a desenvolver uma aprendizagem ampla e significativa.

b) Episódio 2: o caso da tarefa problema

Figura 17 - Tarefa do tipo problema.

Luíza repartiu 460 figurinhas entre André, Breno e Caio, de modo que Breno recebesse o dobro de Caio e André ficasse com 60 figurinhas a mais que Breno. Quantas figurinhas André recebeu?

Fonte: SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: Compreensão e Prática. São Paulo: ed. Moderna, 2018. Vol. 5, p. 147.

Essa tarefa tem como objetivo dividir um todo em partes que guardam uma relação entre si, como também calcular uma das partes. É uma tarefa do tipo problema, pois possui estrutura fechada e grau de desafio elevado (PONTE, 2005). Demais atributos dessa tarefa foram analisados a partir de Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017).

Considerando o marcador *contexto de referência*, essa tarefa se insere no contexto da semirrealidade, por se tratar de uma situação fictícia, criada com fins educativos e trazer termos que se relacionam com a semirrealidade, como dividir um todo em partes. Em relação ao marcador *uso da linguagem*, apresenta um rigor forte por trazer termos específicos como dobro e “a mais”. Portanto, para responder essa tarefa o aluno precisa conhecer o significado matemático de dobro e “a mais”, fazendo necessário o professor realizar uma explanação acerca de tais termos. Com respeito ao marcador *estrutura*, essa tarefa é fechada, pois está subtendida uma relação de sequenciamento de atos e mobilização de estratégias que o estudante deve realizar durante a resolução da tarefa, ou seja, dividir 460 figurinhas da seguinte forma: se você der uma figurinha a Caio, dê duas a Breno e duas mais sessenta a André; se você der duas figurinhas a Caio, dê quatro a Breno e quatro mais sessenta a André; desenvolve aqui uma ideia de generalização. Siga esse padrão até que não sobre nenhuma figurinha. Nota-se também que as respostas dos alunos podem ser controladas pelo professor.

Em relação ao marcador *objetivo de ensino*, a tarefa tem objetivo complexo por extrapolar as fronteiras do conteúdo específico e permitir a promoção outros conteúdos. Durante a realização dessa tarefa os alunos não só trabalham o conteúdo equação, como também noções de divisão, proporção, fração, parte-todo. No que se refere ao marcador *relação pedagógica*, a tarefa possui um isolamento forte, o que condiz com o marcador estrutura (fechada), pois a tarefa está bem estrutura, deixando explícito o que é dado e o que é pedido e, consequentemente, o que o aluno deve fazer. O professor pode manter-se distante das ações do aluno durante a implementação da tarefa. Por fim, com respeito ao marcador *foco de ensino*, a tarefa possui um foco procedimental, pois leva o estudante a realizar procedimentos, como por exemplo, equacionar o problema respeitando a relação entre as quantidades, como também calcular o valor da incógnita, ou ainda, representar o todo e as partes por meio de diagrama.

Essa tarefa possui grande potencialidade para a promoção da aprendizagem, bastando para isso o professor manter o alto nível de desenvolvimento cognitivo durante a sua implementação. A tarefa traz uma atividade possivelmente corriqueira, pois muitas vezes em sua vida real, os alunos lidam com situações em que envolvem o ato de dividir um todo em partes, porém na situação hipotética essas partes não são iguais, seguem uma proporção. Na implementação dessa tarefa, pode-se fazer conexão entre vários conceitos. Além dos conceitos de equação, incógnita e raiz de uma equação, pode-se relacioná-lo ainda com os conceitos de divisão, proporcionalidade, fração, parte-todo, o que demanda a mobilização, por parte do professor, de vários conhecimentos.

Abaixo, há três modos de representar e resolver a situação-problema:

(i) Por meio da linguagem algébrica (equação).

Representando por x o número de figurinhas que Caio deve receber, tem-se a seguinte disposição:

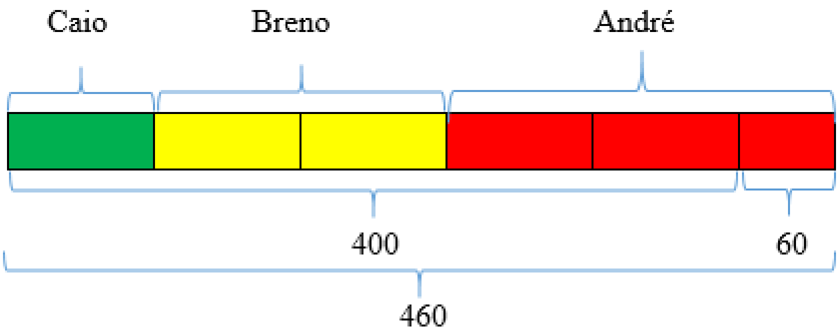
$Caio = x; Breno = 2x\ (o\ dobro\ de\ Caio); André = 2x + 60\ (60\ a\ mais\ que\ Breno)$

Colocando em forma de equação, tem-se: $x + 2x + 2x + 60 = 460 \;\; \rightarrow \;\; 5x + 60 = 460$ $\rightarrow 5x + 60 - 60 = 460 - 60 \;\; \rightarrow \;\; 5x = 400 \rightarrow \;\; \frac{5x}{5} = \frac{400}{5}. \;\; \rightarrow \;\; x = 80.$

Dessa forma, André receberá $2 \,.\, 80 + 60 = 220.$

(ii) Por meio de diagrama.

Figura 18 - Uso de diagrama na resolução de problema.



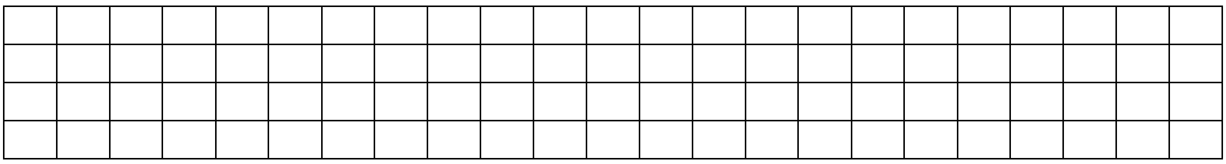
Fonte: própria autoria, 2020.

Nota-se pela imagem, que o diagrama (todo) está dividido em 6 partes, sendo 5 delas iguais. Além disso, as 5 partes iguais totalizam 400. Assim, cada uma dessas 5 partes vale $\frac{400}{5} = 80$. Logo, pela imagem conclui-se que André receberá: $2 \,.\, 80 + 60 = 220$.

(iii) Com o uso de grelha

A grelha 4 x 23 representa o todo, isto é, as 460 figurinhas.

Figura 19 - Uso de grelha na resolução de problema



Fonte: própria autoria, 2020.

A partir da grelha, calcular o valor de uma coluna: $\frac{460}{23} = 20$ ou então por tentativa, percebendo que se uma coluna valesse 10, as 23 colunas daria $10 \,.\, 23 = 230$ o que corresponde metade de 460. Logo, cada coluna deve valer 20. Em qualquer dos casos, seguindo as regras da partilha, deve-se retirar do todo 3 colunas (3 colunas = 60) para reservar as 60 figurinhas que André receberá a mais que Breno e as 20 colunas restantes devem ser divididas em 5 partes iguais (uma para Caio, duas para Breno e duas para André). Nesse caso, cada uma dessas 5 partes é composta por 4 colunas. Dessa forma, a fração de André é composta de 11 colunas (4 + 4 + 3). Portanto, André receberá $11 \cdot 20 = 220$.

Tendo em vista o exposto, usou-se Carrillo et al (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014) para subsidiar a análise dos possíveis conhecimentos mobilizados pelo professor durante a implementação dessa tarefa. Considerando o domínio *conhecimento matemático*, faz-se necessário que o professor possua conhecimento dos tópicos (KoT), isto é, saber determinar a solução por vários métodos, usar vários registros de representação, procedimentos e propriedades diversas; o conhecimento da estrutura matemática (KSM) se faz necessário e presente quando o professor representa e resolve o problema por meio de figura geométrica (diagrama), por exemplo, relacionando-o com os conceitos de fração, seus termos e significados, demonstrando conhecer que o uso de figura geométrica é mais adequado para desenvolver uma interpretação parte-todo (MOREIRA; FERREIRA, 2008). Também precisa conhecer conceitos como o de equações equivalentes e de números multiplicativos; o conhecimento da prática matemática (KPM) é necessário e envolve a capacidade de selecionar representações, de argumentar com o aluno, fazendo uso de uma comunicação clara e objetiva, seja oral ou simbólica. Um exemplo está na resolução (ii) a qual não é comum em livros didático e permite uma melhor visualização e compreensão da relação entre cada parte e o todo.

No âmbito do conhecimento pedagógico do conteúdo, a escolha da presente tarefa para implementação em sala de aula constitui um exemplo de conhecimento do ensino de matemática (KMT), revelando a intenção do professor em desenvolver procedimentos como em (i), (ii) e (iii), como também identificar se os alunos desenvolveram compreensão acerca das noções de parte-todo, divisão proporcional, representação por diagrama. O conhecimento das características de aprendizagem de matemática (KFLM) faz-se necessário, pois permite ao professor conhecer os processos de construção do conhecimento por parte do aluno, o modo como pensa, os erros cometidos, as dificuldades apresentadas, as conexões realizadas. No caso da tarefa em análise, uma possível dificuldade poderia se apresentar no momento de equacionar o problema, por exemplo, por qual quantidade começa? Ou ainda dificuldade de entendimento de termos como dobro.

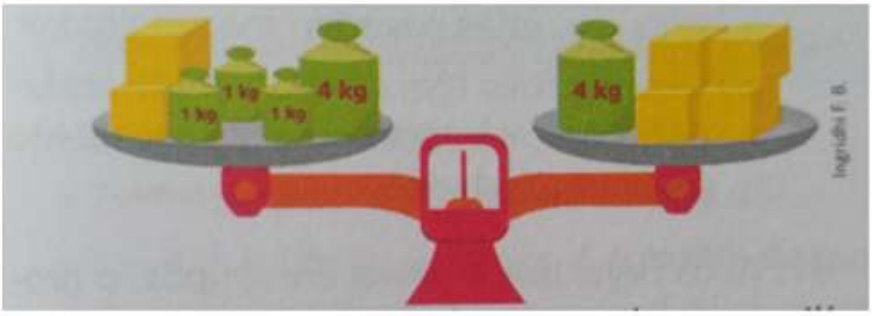
Por último, o conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de matemática (KMLS) diz respeito ao conhecimento de como a abordagem do objeto de conhecimento matemático, no caso, equação polinomial de primeiro grau, é orientada pelos currículos e documentos curriculares orientadores. No tocante a BNCC, esse documento relata que o estudo de Álgebra tem como finalidade o desenvolvimento do pensamento algébrico, o qual fornece modelos matemáticos para compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas, e situações e estruturas matemáticas, por meio do uso de letras e símbolos, sendo necessário para isso, que os alunos identifiquem regularidades e padrões, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas, bem como de ser capaz de criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas usando equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. Esse trabalho deve incluir ideias fundamentais como equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. No caso específico do 7º ano em relação às equações, propõe que os alunos devem desenvolver habilidade de *resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.* (BRASIL, 2018, p. 307). Duval (2003) propõe a mobilização de vários registros de representação semiótica, enquanto que Ribeiro (2008) propõe o trabalho com situações-problema diversificado de modo a desenvolver os multissignificados de equação e consequentemente, várias zonas de perfil conceitual de equação.

c) Episódio 3: tarefa investigativa.

Figura 20 - Tarefa do tipo investigativa.

Tarefa: **a balança**

Na balança abaixo, as caixas possuem medidas de massa iguais.



Sobre a imagem, responda:

a) O que é possível observar?
b) De que forma podemos escrever matematicamente a situação expressa na balança? Justifique o que você fez.
c) Como você faria para descobrir a medida de massa de cada caixa? Justifique.
d) Qual o valor da medida de massa de cada caixa?

Fonte: CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências Matemática**. São Paulo: Edições SM, 2018. vol. 2, p. 101. [ADAPTADO].

Essa tarefa tem como objetivo levar o aluno a perceber a relação de equivalência existente na balança, representando-a por meio de uma equação e em seguida calcular o valor da incógnita (massa da caixa). Trata do mesmo objeto do episódio 1, porém agora a maneira como foi colocada, a tarefa deixa de ser um exercício (com comandos fechados: qual, determine) e ganha características de tarefa investigativa, com comandos abertos como justifique, o que você faria... e grau de desafio elevado (PONTE, 2005). Isso dá mais autonomia ao aluno e permite o desenvolvimento de estratégias pessoais, contribuindo dessa forma para a construção do pensamento matemático.

Em relação aos marcadores de tarefa propostos por Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017), a tarefa em análise apresenta os seguintes atributos: em relação ao *contexto de referência* se insere no contexto da Matemática pura, por se tratar de uma situação cujos pressupostos é desenvolver o pensamento matemático e não retrata uma realidade do aluno, nem guarda relação com a semirrealidade. Em relação ao marcador *uso da linguagem* a tarefa possui um rigor forte, por trazer termos matemáticos específicos como escrever matematicamente. Essa expressão pode causar interrogações e equívocos no aluno, sendo necessário, portanto, uma maior aproximação e diálogo por parte do professor durante a implementação dessa tarefa, o qual deve realizar discussões e tirar as dúvidas surgidas.

Com respeito ao marcador *estrutura*, a tarefa possui estrutura aberta, pois nota-se a ausência de um sequenciamento de atos auxiliares que leve o aluno a uma generalização. Embora a tarefa seja composta por vários itens, eles não formam necessariamente um sequenciamento harmonioso no sentido de mostrar ao estudante a observação de um conceito. No que se refere ao marcador *objetivo de ensino*, a tarefa pode ser classificada como complexa, pois no nosso entender não se resume apenas a calcular o valor da raiz de uma equação (massa da caixa), mas abre a possibilidade de se desenvolver outros conceitos como modelização de problema por meio da linguagem pictórica e algébrica, conceito de equivalência, propriedades da igualdade, levando o aluno a perceber que ao adicionar ou subtrair valores iguais a ambos os pratos da balança (analogamente aos membros de uma equação) a balança continua equilibrada (analogamente a igualdade continua verdadeira), chegando a uma generalização.

Em relação ao marcador *relação pedagógica* a tarefa possui um isolamento fraco, necessitando do professor maior aproximação das ações dos estudantes, com orientações e questionamentos que levem o aluno a perceber a relação matemática expressa pela balança como também possibilidades para descobrir a massa da caixa. De fato, diante dessa tarefa os alunos podem sentir dificuldades, como não ser capazes de expressarem matematicamente a relação entre os dois pratos, podendo por exemplo, usar uma soma em vez de uma igualdade.

Ademais, os alunos podem não saber onde chegar, visto que a questão não é de múltipla escolha. Além disso, esse marcador se relaciona com o marcador *estrutura* (aberta). Por fim, em relação ao marcador *foco de ensino*, essa tarefa apresenta um foco conceitual/procedimental. De fato, ao realizar procedimentos como subtrair valores iguais de ambos os lados da balança (analogamente de ambos os lados de uma igualdade), o aluno constrói o conceito de princípio aditivo da igualdade e de equações equivalentes.

Como se trata de uma tarefa investigativa, com comandos abertos, durante a sua implementação o professor deve dar bastante autonomia ao aluno na busca de estratégias para solucionar a situação-problema. Pode-se trabalhar em pequenos grupos, nos quais os alunos discutirão suas ideias e estratégias de resolução, enquanto o professor mantém uma posição de interlocutor e orientador. No final, deve-se abrir espaço para a socialização e discussão dos resultados, como também possíveis complementações pelo professor. Dessa forma, o professor demonstra conhecimento da prática matemática (KPM), conhecimento de características da aprendizagem matemática (KFLM) e conhecimento do ensino de matemática (KMT).

Os dois primeiros itens (a) e (b) estão intimamente ligados, isto é, o segundo é consequência do primeiro e são cruciais para o sucesso da tarefa, pois caso o aluno não consiga perceber a relação de equivalência representada pela balança, não a expressando corretamente, isso comprometerá todo o processo de resolução. Deve-se dar liberdade e tempo suficiente ao aluno e não impor modo de representar a incógnita nem método de resolução, sendo importante deixá-lo pensar e construir seu raciocínio, porém, se necessário, caso o aluno apresente dificuldade, seguir um caminho errado, o professor deve auxiliar com questionamentos pertinentes, usar um o conhecimento prévio do aluno, sem, contudo, induzi-lo à resposta. Mantendo essa postura, o professor mobiliza conhecimentos referentes aos subdomínios KOT (saber representar a equivalência por meio de vários registros, conhecer vários métodos de resolução), KFLM (conhecer o modo como os alunos estão raciocinando, identificar erros e dificuldades), KMT (realização de trabalho em grupo, apresentação dos resultados e discussão coletiva), KPM (saber comunicar oral e simbolicamente), KSM (realizar conexões com conhecimentos prévios, por exemplo, igualdades numéricas com uso de janela, ou com conhecimentos futuros como propriedades da igualdade) e KMLS (saber avaliar cada participação e descoberta).

No caso de representar a incógnita por x (pode ser outra letra ou símbolo) deve-se representar o peso do prato esquerdo pela expressão $2x + 7$ e o do prato direito por $4x + 4$. Como a balança está equilibrada, isso se traduz matematicamente por uma equivalência entre as duas expressões: $4x + 4 = 2x + 7$. É importante nesse momento que o professor aborda a definição de equação polinomial de 1º grua em sua forma normal, reduzida, qual seja: $ax + b = 0, com\ a, b\ \in R\ e\ a\ \neq 0$. Para colocá-la na forma reduzida e chegar à solução, pode-se lançar mão de métodos diversos, como por exemplo (i) método de tapar, (ii) transposição de termos e (iii) métodos das equações equivalentes.

(i) Método de tapar. Significa "tapar" um certo termo e descobrir qual o seu valor. "Tapando" o 7 na equação $4x + 4 = 2x + 7$, descobre-se que $7 = 2x + 4$, pois 2x para chegar em $4x + 4$, falta $2x + 4$. Aplicando mais uma vez o método na equação $7 = 2x + 4$, agora tapando o $2x$, tem-se que $2x = 3$, pois 4 para 7, faltam 3. E por fim, tapando o x na equação $2x = 3$, descobre-se que $x = 1{,}5$ pois $2 \cdot 1{,}5 = 3$.

(ii) Transposição de termos. Significa mudar um termo de membro, mudando de operação.

$$4x + 4 = 2x + 7 \rightarrow 4x - 2x = 7 - 4 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow x = 1{,}5$$

(iii) Método das equações equivalentes. Significa efetuar a mesma operação em ambos os membros da equação.

$$4x + 4 = 2x + 7 \rightarrow 4x + 4 - 4 = 2x + 7 - 4 \rightarrow 4x = 2x + 3$$
$$\rightarrow 4x - 2x = 2x - 2x + 3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow x = 1{,}5$$

No âmbito do conhecimento matemático, faz-se necessário que o professor domine conhecimento de tópicos (KoT), que nesse caso, precisa conhecer o conceito e definição de equação polinomial de primeiro grau, reconhecer e representar uma equivalência, como também dispor de vários métodos de resolução. O conhecimento da estrutura da matemática (KSM) torna-se indispensável na medida em que o professor necessita conhecer o conceito de equações equivalentes, como obtê-las e o fato de elas não alterarem a solução da equação original, também precisa relacionar a solução a um conjunto (conjunto-solução), sendo necessário, portanto, conhecer e definir os vários tipos de conjunto. Já o conhecimento da prática matemática (KPM) diz respeito à maneira de o professor se proceder em matemática, de ser capaz de exercer uma comunicação clara e precisa, tanto na fala como no uso da escrita para realizar definições e algoritmos matemáticos, como nos processos de resolução demonstrados em (i), (ii) e (iii).

Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, a escolha de uma tarefa investigativa para implementação em sala de aula, como é o caso da tarefa em análise, é uma clara demonstração de que o professor possui conhecimento do ensino de matemática (KMT), pois tal escolha está relacionada com o desenvolvimento de experiências matemáticas efetivas e de capacidades como autonomia e enfretamento de situações complexas. O conhecimento das características de aprendizagem de matemática (KFLM) é necessário ao professor, pois é esse conhecimento que o permite compreender como os alunos pensam e aprendem matemática, os erros e dificuldades apresentadas. No caso da presente tarefa, possíveis erros e equívocos poderia ocorrer no processo de resolução, como por exemplo na transposição de termos, o aluno aplicar cegamente a regra mudar de membro-mudar de sinal e nesse caso, usar subtração como inversa de multiplicação ou ainda tratar a relação estrutural $4x + 4 = 2x + 7$ como processual e somar termos não semelhantes. O conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de matemática, faz-se necessário para que o professor compreenda como o objeto matemático equação polinomial de primeiro grau se faz presente nos currículos e documentos curriculares orientadores. A BNCC, por exemplo, relata que a relação de equivalência pode ser trabalhada desde cedo, por meio de atividades simples, envolvendo a igualdade. Por exemplo, reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$, o que contribui, segundo relata, para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser realizada. Ainda segundo o documento, nos anos finais do Ensino Fundamental os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer generalização, investigar regularidade, indicar valor desconhecido em sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas, sendo necessário, portanto, estabelecer conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações, inclusive no plano cartesiano, devem servir para representar e resolver determinados tipos de problemas, não como objetos de estudo em si mesmos.

Portanto, pelo exposto fica claro que a potencialização de uma tarefa para a aprendizagem de matemática durante o processo de implementação e sistematização em sala de aula, requer do professor a mobilização de conhecimentos múltiplos, o qual deve estar munido de vários conhecimentos e usá-los na adoção de tarefas, estratégias, recursos e metodologias apropriadas auxiliando o aluno na construção de uma aprendizagem autônoma e efetiva.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equação polinomial de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da Educação Básica. Para tanto, foram analisadas três tarefas de tipologias diferentes, selecionadas de livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental, aprovados pelo PNLD 2020. Uma das tarefas, a do tipo problema, foi selecionada do livro *Matemática: Compreensão e*

Prática, do autor Ênio Silveira e as outras duas foram selecionadas do livro *Convergências Matemática*, do autor Eduardo Chavante, sendo uma do tipo exercício e a outra foi adaptada em tarefa investigativa, a partir da tarefa do tipo exercício. A análise das tarefas se deu com base em Ponte (2005), Stein e Smith (2009), Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017), além de usar o modelo teórico MTSK proposto por Carrillo et al. (2013) para analisar os possíveis conhecimentos necessários ao professor para potencializar a implementação e sistematização de tais tarefas.

Os resultados mostram que as tarefas do tipo *exercício* possuem grau de desafio reduzido e estrutura fechada, deixando claro o que é dado e o que é pedido. Esse tipo de tarefa visa a fixação de conteúdo por meio do treino e da aplicação de regras e algoritmos, apresenta um potencial limitado por não permitir o desenvolvimento de outras competências, mas apenas o objetivo principal da tarefa. O professor é pouco exigido, podendo manter-se distante do aluno durante a sua implementação. Permite ao aluno executá-la com maior chance de sucesso, favorecendo a autoconfiança.

As tarefas do tipo *problema* possuem estrutura fechada, porém grau de desafio elevado. Nesse tipo de tarefa o aluno desconhece a solução, não possui um algoritmo que leva à solução imediata, portanto, precisa elaborar um plano e estratégias para chegar ao resultado desejado. O professor é convidado a apoiar o aluno por meio de questionamentos pertinentes que o leve a realizar conexões com outros conceitos e fazer descobertas. Assim, as tarefas do tipo problema favorecem o desenvolvimento de habilidades matemáticas, capacitando o aluno a resolver problemas matemáticos, favorecendo dessa forma, a promoção da aprendizagem matemática.

Já as tarefas de *investigação,* são caracterizadas por possuir alto grau de indeterminação, exigindo que o aluno formule perguntas e busque explicações para a situação que se coloca, é, portanto, uma tarefa aberta com desafio elevado. Esse tipo de tarefa é bem desafiantes e favorecem experiências matemáticas efetivas e o desenvolvimento da autonomia e a capacidade de lhe dar com situações complexas. Faz-se necessário o professor manter uma postura de interlocutor e orientador da aprendizagem, desenvolvendo uma relação mais próxima dos alunos, auxiliando-os em seus raciocínios e descobertas, por meio de orientações e questionamentos. Pois na execução desse tipo de tarefa os alunos podem apresentar dificuldades e dúvidas, sentindo-se perdidos, sem saber onde chegar.

Portanto, levando em consideração o ensino de objetos algébricos, e em particular, o de equação polinomial de primeiro grau, o professor deve fazer uso de diversas tipologias de tarefas, especificamente no sentido de maximizar a capacidade de construção de significados para os símbolos e/ou variáveis, como também a manipulação desses símbolos, colaborando dessa forma, com o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno. Ademais, o professor deve priorizar o trabalho com tarefas que tenham alto nível de exigência cognitiva, para isso é crucial que o professor possua conhecimentos específicos diversos, principal elemento transformador da aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ALVES–MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **O método nas Ciências Naturais e Sociais**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2002.

BALL, Deborah Loewenberg; HILL Heather C.; BASS, Hyman. Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, n. Fall, p. 14-46, 2005. Disponível em: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf. Acesso em: 10 out. 2019.

BERNARDO, Rosa di et al. Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: conexões em medidas. **Pesquisa e Ação Educacional**: cadernoscenpec, São Paulo, v. 8, n. 1, p. 98-124, 2018. Disponível em: http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/391/390. Acesso em: 10 out. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 17 ago. 2019.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS-GONZÁLEZ, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, Maria Cinta. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. **CERME**, Universidade de Huelva, Espanha, n. 8, p. 2985-2994, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching/link/54957cb60cf20f487d2f5465/download. Acesso em 15 abr. 2020.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**. 2. ed. São Paulo: Edições Sm, 2018. 288 p. (7º ano).

ENRÍQUEZ, Jakeline Amparo Villota. Tarefas matemáticas: um olhar desde a formação de professores de matemáticas **Braz. J. of Develop**, Curitiba, v. 5, n. 3, p. 2416-2440, 2019. Disponível em: http://www.brazilianjournals.com/index.php/BRJD/article/view/1289/1164. Acesso em: 10 dez. 2019.

FERNANDES, José Antônio; SOARES, Maria José. **O ensino de equações lineares**. In Comissão Organizadora do ProfMat, 2003, Santarém. CD-ROM, Santarém: 2003. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Jose_Fernandes5/publication/308415764_O_ensino_de_equacoes_lineares/links/57e3bbee08ae847401683c56/O-ensino-de-equacoes-lineares.pdf. Acesso em: 11 dez. 2019.

GROSSMAN, Pam. L. **Learning to practice: the design of clinical experience in teacher preparation**. Policy Brief, Washington. D.C.: NEA, 2010. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.178.4088&rep=rep1&type=pdf. Acesso em: 15 dez. 2019.

HILL, Heather C.; ROWAN, Brian; BALL, Deborah Loewenberg. Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. **American Education Research Journal**, Summer, v. 42, n. 2, p. 371-406, 2005. Disponível em: http://www.umich.edu/~lmtweb/files/hillrowanball.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

KIERAN, Carolyn. The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning**, pp. 390-419, New York,1992.

LITOLDO, Beatriz Fernanda; ALMEIDA, Marieli Vanessa Rediske de; RIBEIRO, Miguel. Conhecimento Especializado do Professor que Ensina Matemática: Uma Análise do Livro Didático no Âmbito das Frações. **Tangram**: **Revista de Educação Matemática**, Dourados, v. 1, n. 3, p. 3-23, 2018. Disponível em: http://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/7370/4473. Acesso em: 15 dez. 2019.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Maria Cristina Costa. A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, p. 103-127, 2008. Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2107. Acesso em: 15 dez. 2019.

MORIEL JUNIOR, Jeferson Gomes; CARRILLO, José. Explorando indícios de conhecimiento especializado para ensinar matemática como modelo MTSK. En González, María Teresa; Codes, Myriam; Arnau, David; Ortega, Tomás (Eds.), **Investigación en educación matemática**, Salamanca, pp. 465-474, 2014. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Diponívem em: http://funes.uniandes.edu.co/6087/1/Moriel2014ExplorandoSEIEM.pdf. Acesso em: 15 dez. 2019.

MORIEL JUNIOR, Jeferson Gomes; WIELEWSKI, Gladys Denise. Base de Conhecimento de Professores de Matemática: do genérico ao especializado. **Ensino, Educação e Ciências Humanas**, Mat Grosso, v. 18, n. 2, p. 126-133, 2017. Disponível em: https://seer.pgsskroton.com/index.php/ensino/article/view/4579. Acesso em: 15 dez. 2019.

NYE, Barbara; KONSTANTOPOULOS, Spyros; HEDGES, Larry V. How Large Are Teacher Effects? **Educational Evaluation And Policy Analysis**, Fall, v. 26, n. 3, p. 237-257, 2004. Disponível em: https://research.steinhardt.nyu.edu/scmsAdmin/uploads/002/834/127%20-

%20Nye%20B%20%20Hedges%20L%20%20V%20%20%20Konstantopoulos%20S%20%20(2004).pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

OLIVEIRA, Esmeralda Maria Queiroz de. **O uso do livro didático de matemática por professores do Ensino Fundamental**. 2007. 152 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação, Centre de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/4542/1/arquivo5450_1.pdf. Acesso em: 1 nov. 2019.

OLIVEIRA, Wedeson Costa; OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de; SILVA, Lilian Aragão da. Análise de materiais curriculares elaborados por professores na perspectiva dos marcadores de tarefas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 42-66, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32689/pdf. Acesso em: 20 nov. 2019.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. **Comunidades & Colecções**, Lisboa, p. 1-26, 2005. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf. Acesso em: 10 out. 2019.

PONTE, João Pedro da. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa. 2014. ISBN 978-989-8753-06-9. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310. Acesso em: 10 out. 2019.

PONTE, João Pedro da; MENEZES, Luís; RODRIGUES, Cátia. Tarefas Matemáticas no Ensino da Álgebra**. GD3 - Conhecimento matemático das tarefas para ensinar, Lisboa,** p. 353-367, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269688771_TAREFAS_MATEMATICAS_NO_ENSINO_DA_ALGEBRA/link/54917c000cf222ada859fa93/download. Acesso em: 10 dez. 2019.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: compreensão e prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 304 p. (7º ano).

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schan. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 22-28, 2009. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/stein-smith%2098.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

WALLE, John A. van de. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse espaço retomamos nosso problema de pesquisa, como também os objetivos (geral e específicos), apresentamos os resultados e suas compreensões, as possíveis implicações para as pesquisas futuras e para a prática do professor, trazendo ainda uma cartilha com orientações ao trabalho do professor para o ensino de equação polinomial de primeiro grau.

5.1 Retomando o problema de pesquisa

Nosso problema de pesquisa pode ser considerado como sendo como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), abordam o tema equação polinomial de primeiro grau? Para melhor descrevê-lo, traçamos três objetivos específicos, cada um compondo um dos capítulos que integram essa dissertação.

O objetivo 1 (capítulo I) teve como foco realizar uma análise de como a literatura sobre o ensino de Álgebra aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. No objetivo 2 (capítulo II) o foco centrou-se na análise de como livros didáticos abordam o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau. No objetivo 3 (capítulo III) nosso intuito foi analisar de que forma tarefas matemáticas para o ensino de equação polinomial de primeiro grau podem promover possíveis situações de aprendizagem de alunos da educação básica. Além disso, nas considerações finais apresentamos uma cartilha de orientação ao trabalho do professor para o tema equações polinomiais de primeiro grau. Nas próximas seções, apresentaremos os resultados de cada objetivo, as possíveis contribuições da pesquisa para a Educação Matemática, como também as implicações para pesquisas futuras e para a prática do professor.

5.2 Compreensão dos resultados

Ao propor descrever como a Literatura cientifica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático, aborda o objeto de conhecimento equação polinomial de primeiro grau, essa pesquisa nos possibilita o conhecimento de resultados cuja compreensão poderá ser útil no sentido de nos fazer repensar nossos próprios atos e práticas, apontar correções de rumos, práticas a serem abandonadas e práticas a serem seguidas, como também a adoção de políticas voltadas para a melhoria e criação de propostas educacionais que visem atender a uma educação de boa qualidade.

Os resultados do capítulo I nos revelam lacunas no conhecimento de professores em relação a conceitos, técnicas e procedimentos de resolução de problemas envolvendo equação polinomial de primeiro grau, sendo esses mesmos resultados encontrados entre os alunos. Mostram também que as situações problemas propostas pelo livro, demandam o uso de técnicas e propriedades recorrentes como transposição e neutralização de termos e coeficientes, propriedades da igualdade e das operações inversas, pouca demanda de conversão de registros, se restringindo à passagem da língua natural para a algébrica, como também pouca congruência entre essas duas linguagens. Uso da variável como incógnita em detrimento de seu uso como número genérico e número funcional, ao mesmo tempo que revela a importância de se trabalhar os vários usos da variável para promoção dos vários significados da variável. Revelam ainda que a implementação de tarefas constitui um segmento poderoso da sala de aula para promoção do conhecimento matemático e, em particular, do pensamento algébrico. O uso de tarefas diversificadas e específicas, como também o de recursos e metodologias apropriadas pode atacar dificuldades de aprendizagem e favorecer a construção de significados para os objetos e símbolos algébricos e, consequentemente, o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Os resultados do capítulo II estão em consonância com os resultados do capítulo I, ao nos revelar que os livros didáticos analisados estão estruturados com vários tópicos, como expressões algébricas, sequências, resolução de problemas, inequações e equações (e não somente o tópico equação), procurando desenvolver um pensamento algébrico mais alargado, inclusive no intuito de promover as seguintes habilidades EF07MA13, EF07MA14, EF07MA15, EF07MA16 e EF07MA18, propostas pela BNCC. No caso específico de equação polinomial de primeiro grau, os livros analisados deram maior destaque à promoção da habilidade EF07MA18 "*resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade"* (BRASIL, 2018, P. 307). Ao abordar o tema equações polinomiais de primeiro grau, realizam a definição desse objeto matemático, discute métodos de resolução formais e abrangente como o das equações equivalentes e o das operações inversas, apresentam o uso da balança de dois pratos como ferramenta facilitadora para a compressão dos conceitos de incógnitas, equação e processos de resolução por meio da ideia de equivalência. Apresentam, aproximadamente, metade das tarefas "prontas" demandando apenas tratamento, a aplicação de regras (exercício) e a outra metade são situações com demanda de conversão de registros, isto é, passagem da língua natural para a algébrica.

O capítulo III nos mostram que o livro didático ainda é a ferramenta-base para consulta e planejamento de aula do professor, mas também mostra que é o conhecimento do professor que deve justificar e dar significado ao uso dessa ferramenta. Revela-nos que o uso de tarefas diversificadas e apropriadas, com implementação com alto nível de exigência cognitiva pode favorecer o desenvolvimento de uma aprendizagem ampla e com significado. E que para ensinar, de forma a potencializar o processo de ensino e aprendizagem, o professor precisa possuir e mobilizar conhecimentos múltiplos e específicos (CARRILLO et al., 2013).

A partir da análise dos dados, notamos alguns elementos-chave e comuns aos três capítulos (artigos) dessa dissertação, os quais estão intrinsecamente interligados: (i) uso de tarefas como elemento organizador do processo de ensino e aprendizagem, (ii) conhecimento do professor como principal elemento propulsor da aprendizagem e (iii) produção de significados para variáveis e/ou símbolos algébricos, com consequente desenvolvimento do pensamento algébrico.

O quadro abaixo apresenta uma síntese dos resultados da pesquisa como um todo.

Quadro 9- Síntese dos Resultados da pesquisa

Capítulo I (Artigo 1)	Aponta lacunas no conhecimento de professores e alunos; uso de técnicas e propriedades como transposição e neutralização de termos e coeficientes; propriedades da igualdade e das operações inversas; importância do uso de vários registros de representação e da manipulação de símbolos em vários contextos e com diferentes significados, colaborando assim, com o desenvolvimento do pensamento algébrico; importância de implementação de tarefas variadas e específicas com uso de recursos e metodologias apropriadas, permitindo a produção de significados e compreensão sobre conceitos algébricos.
Capítulo II (Artigo 2)	Aponta que os livros analisados trabalham equação polinomial de primeiro grau por meio do uso de propriedades da igualdade e das operações inversas; uso de modelo concreto como balança de dois pratos para trabalhar o conceito de incógnita e resolução por meio da ideia de equivalência; aponta que não se deve trabalhar os conceitos de equação e de incógnita de forma isolada, mas em paralelo com outros tópicos como expressões algébricas e sequências, promovendo a produção de vários significados para a variável e/ou símbolos algébricos e consequentemente para o desenvolvimento pensamento algébrico.
Capítulo III (Artigo 3)	Aponta o delineamento de tarefas como um importante segmento da sala de aula para a construção do conhecimento matemático e, em particular, para a produção de significados para variáveis e/ou símbolos algébricos e consequentemente para o desenvolvimento do pensamento algébrico; revela que o professor que ensina Matemática precisa possuir conhecimentos específicos, principal elemento propulsor da aprendizagem.

Fonte: própria autoria, 2020

A partir da realização dessa pesquisa, estamos convictos de que o ensino e a aprendizagem de objetos algébricos e, em particular, o de equação polinomial de primeiro grau, deve estar baseado na construção de significados para as variáveis e/ou símbolos algébricos, no desenvolvimento da capacidade de manipulação desses símbolos em diferentes contextos e com diferentes significados, isto é, representar, raciocinar e resolver problemas, transitando entre as diversas representações, generalizando, manipulando e resolvendo situações por meio de equações, inequações, expressões e funções.

Nesse sentido, as contribuições dessa dissertação para a área da educação e, em particular, para a área da educação matemática, é promover a divulgação do conhecimento matemático e, em específico, do pensamento algébrico, ao mesmo tempo oferecer informações valiosas sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra e de equação polinomial de primeiro grau. Esperamos ainda com essa dissertação, semear sementes e criar terreno para discussões. Ser um ponto de partida para que outras pesquisas continuem o delineamento do objeto de pesquisa.

Diante do exposto, fica clara a necessidade de um melhor planejamento das ações a serem realizadas em sala de aula, em especial a implementação de tarefas, e, sobretudo, deve-se melhor preparar os professores, os quais devem estar munidos de conhecimentos múltiplos e específicos, elemento chave na condução e transformação dos processos de ensino e aprendizagem.

5.3 Implicações para pesquisas futuras

Os resultados revelados por essa pesquisa, como por exemplo, dificuldades de professores e alunos em relação a conceito e resolução de problemas sobre equação polinomial de primeiro grau, importância das tarefas como elemento organizador do trabalho do professor e como meio de produção de significados para variáveis e símbolos algébricos e, consequentemente para a promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, parecem não indicar nenhum absurdo, mas revela manter uma certa coerência com outros resultados divulgados por outras pesquisas, como por exemplos, ENEM, SAEB, PISA, Lautenschlager, Ribeiro e Zana (2017), Ponte (2005, 2014), Booth, (1984), Kieran, (1985), Kieran, (1992). Porém, como se sabe nenhuma pesquisa pode ser considera completa e isenta de falhas, mas revela sempre um recorte da realidade e está limitada pelas fontes utilizadas, pelo recorte temporal e pela capacidade, habilidade e ponto de vista de quem a realiza, além disso, pode não desmascarar todas as faces de um problema como também outros possíveis fatos interligados. Assim também é essa dissertação. Dessa forma, pesquisas futuras poderão investigar, por exemplos, a coerência (ou não) entre os currículos trabalhados em cursos de Licenciatura em Matemática e as práticas de professores em sala de aula e, entre estas e os conteúdos e competências exigidos pelos currículos de Educação Básica e os cobrados nas avaliações em grandes escalas. Também uma boa sugestão seria investigar a qualidade e coerência dos Cursos de formação continuada de professores.

5.4 Implicações para a prática do professor

Os resultados revelados por essa dissertação podem suscitar algumas implicações para a prática do professor em seu dia a dia de sala de aula. Inclusive uma das categorias analisadas no capítulo I, diz justamente a respeito dos conhecimentos mobilizados por professores durante o processo de ensino e aprendizagem do objeto de conhecimento em estudo, que aliás apontam indícios de algumas fragilidades em relação a conceitos, procedimento e técnicas de resolução de problemas referentes a equação polinomial de primeiro grau. O capítulo III, aponta que para ensinar o professor precisa possuir uma gama de conhecimentos referentes a vários subdomínios como conhecimentos dos tópicos matemáticos que vai ensinar, conhecimento da estrutura matemática, isto é, como esses tópicos se relacionam, entendendo a Matemática como um todo organizado, conhecimento da prática matemática, que se refere às maneiras de se proceder em Matemática, conhecimento de características da aprendizagem matemática, ou seja, de ser capaz de conhecer como os alunos pensam e aprendem, conhecimentos dos parâmetros da aprendizagem de matemática, que se refere a normas, conteúdos e competências programadas a cada etapa da educação e conhecimento do ensino de matemática, isto é saber como o ensino da Matemática deve ou pode ser ensinado, ser capaz de usar estratégias e recursos apropriados (CARRILLO, et al 2013). Também apontam que a aprendizagem dos alunos é, em grande parte, determinada pela qualidade das tarefas selecionadas pelo professor e pelo modo como as implementam, sendo crucial o professor ter conhecimentos dos vários tipos de tarefas, suas limitações e potencialidades para a aprendizagem, assim poderá modifica-las, adaptá-las e implementá-las com alto nível de exigência cognitiva, contribuindo dessa forma para o desenvolvimento de uma aprendizagem ampla e significativa.

Na intenção de abrir espaço para a discussão dessa prática e ao mesmo tempo divulgar o pensamento matemático, possibilitando o repensar e o melhoramento de práticas educacionais, construímos e oferecemos uma cartilha que traz questões orientadoras para o ensino e aprendizagem de Álgebra e, em particular, equação polinomial de primeiro grau, como métodos de resolução e tipos de tarefas com análise sobre suas implicações para o processo de ensino e aprendizagem e dicas de como o professor pode adaptá-las e implementá-las com um bom nível de exigência.

CARTILHA DE ORIENTAÇÃO AO PROFESSOR PARA O ENSINO DE EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU

APRESENTAÇÃO

Essa cartilha é fruto de uma dissertação de Mestrado que teve como objetivo descrever como a literatura científica, publicada em periódicos com escopo em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material didático (PNLD 2020), abordam o tema equação polinomial do primeiro grau. A partir de todo o estudo e das análises realizadas ao longo da pesquisa foi possível pensar essa cartilha que tem como objetivo oferecer orientações teórico-metodológicas ao professor para o trabalho com equação polinomial de primeiro grau.

Após perceber pela literatura analisada que alunos e professores apresentam certas limitações no conhecimento sobre equação polinomial de primeiro grau, tanto em relação a conceitos como em procedimentos e técnicas de resolução, pensamos na elaboração dessa cartilha para auxiliar principalmente professores (e também alunos) com dicas e orientações teórico-metodológicas sobre o ensino de Álgebra e, em particular, de equação polinomial de primeiro grau. O objetivo é oferecer situações que provoquem, no professor, reflexões sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra, e em especial, equação polinomial de primeiro grau, sobre a produção de significados para as variáveis e/ou símbolos algébricos, métodos de resolução e tipos de tarefas e suas implicações para o ensino e aprendizagem.

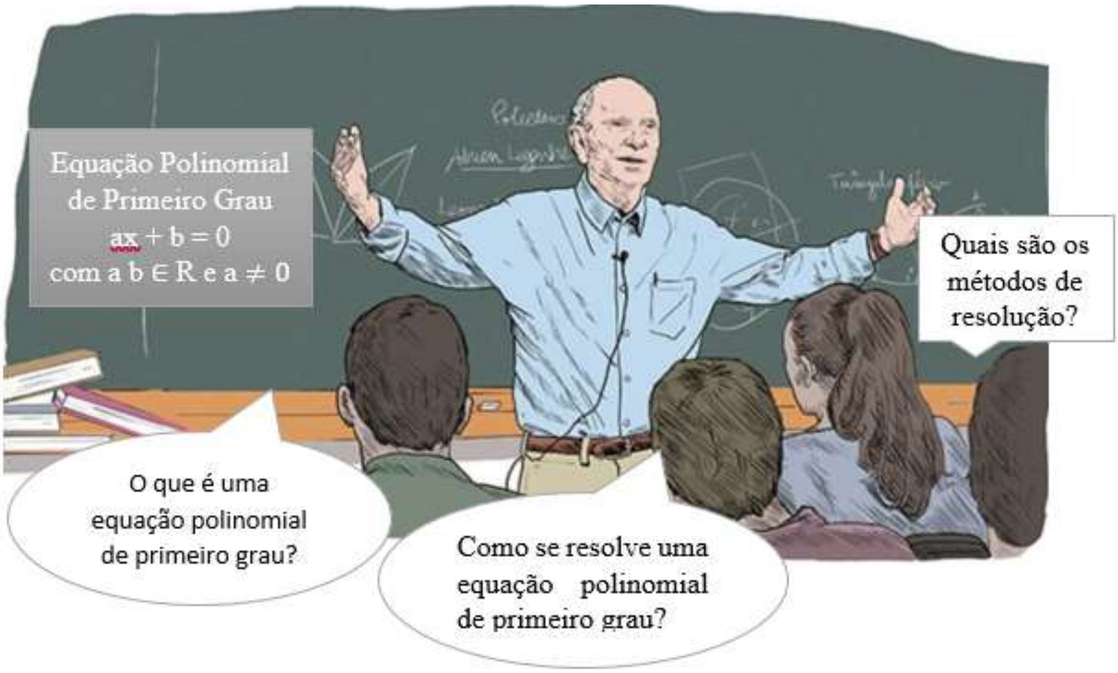
Dessa forma, essa cartilha constituirá um guia rápido de consulta, principalmente para professores da educação básica, auxiliando-os em seu dia a dia de sala de aula, contribuindo assim, para amenizar as lacunas existentes e, ao mesmo tempo, potencializar o ensino e a aprendizagem desse objeto de conhecimento.

Essa cartilha está estruturada da seguinte forma:

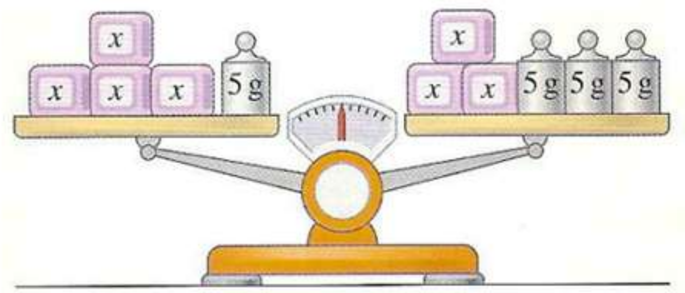
Apresentação – reúne os motivos e os objetivos da cartilha, como também algumas premissas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra escolar.

Parte 1 – apresenta situações diversas sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra e, em particular, de equação polinomial de primeiro grau e alguns métodos de resolução.

Parte 2 – apresenta os tipos de tarefas, selecionadas dos livros didáticos analisados e outras, com análise sobre elas e dicas de como o professor pode adaptá-las e implementá-las mantendo ou elevando o grau de exigência cognitiva.

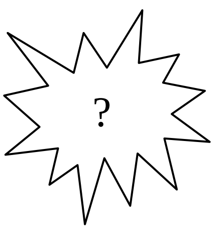


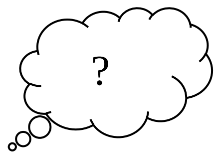
Fonte: https://impa.br/noticias/mestre-de-mestres/. (MODIFICADO)



Fonte: Clubes de Matemática da OBMEP: Disseminando o Estudo da Matemática. **Problema de Gincana: Pesando caixas.** Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-pesando-caixas/. Acesso em: 18 jun. 2020.

=



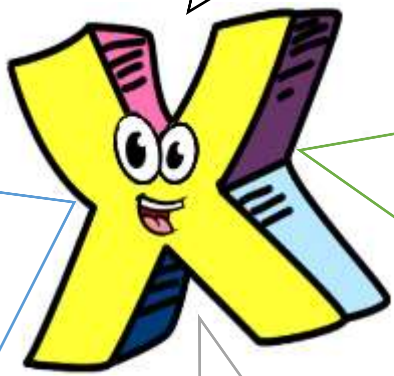


APRESENTAÇÃO

Olá professor (a)!

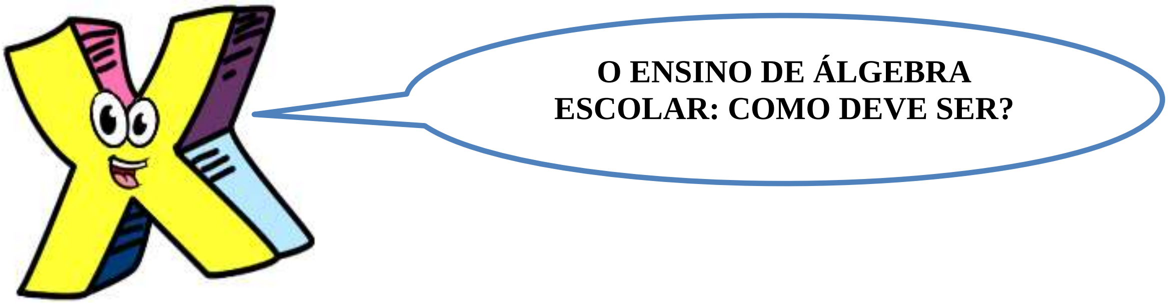
Apresento a você essa cartilha para lhe auxiliar em suas aulas sobre o ensino de Álgebra escolar e, em particular, de equação polinomial de primeiro grau. Vem com a gente!

Você sabia que professores da educação básica apresentam dificuldades na concepção dos conceitos de equação, de expressão e na resolução de problemas envolvendo esses objetos de conhecimento?



Por isso, elaboramos essa cartilha com a intenção de lhe auxiliar com orientações teórico-metodológicas.

Nossa intenção é gerar possibilidades e provocar reflexões por parte do professor a respeito do ensino e aprendizagem dos objetos algébricos e da produção de significados sobre esses objetos. Isso inclui, a discussão das funções da variável, alguns métodos de resolução, tipos de tarefas presentes nos livros analisados e outras, suas características e daremos dicas sobre como adaptá-las e implementá-las com alto nível de exigência cognitiva.



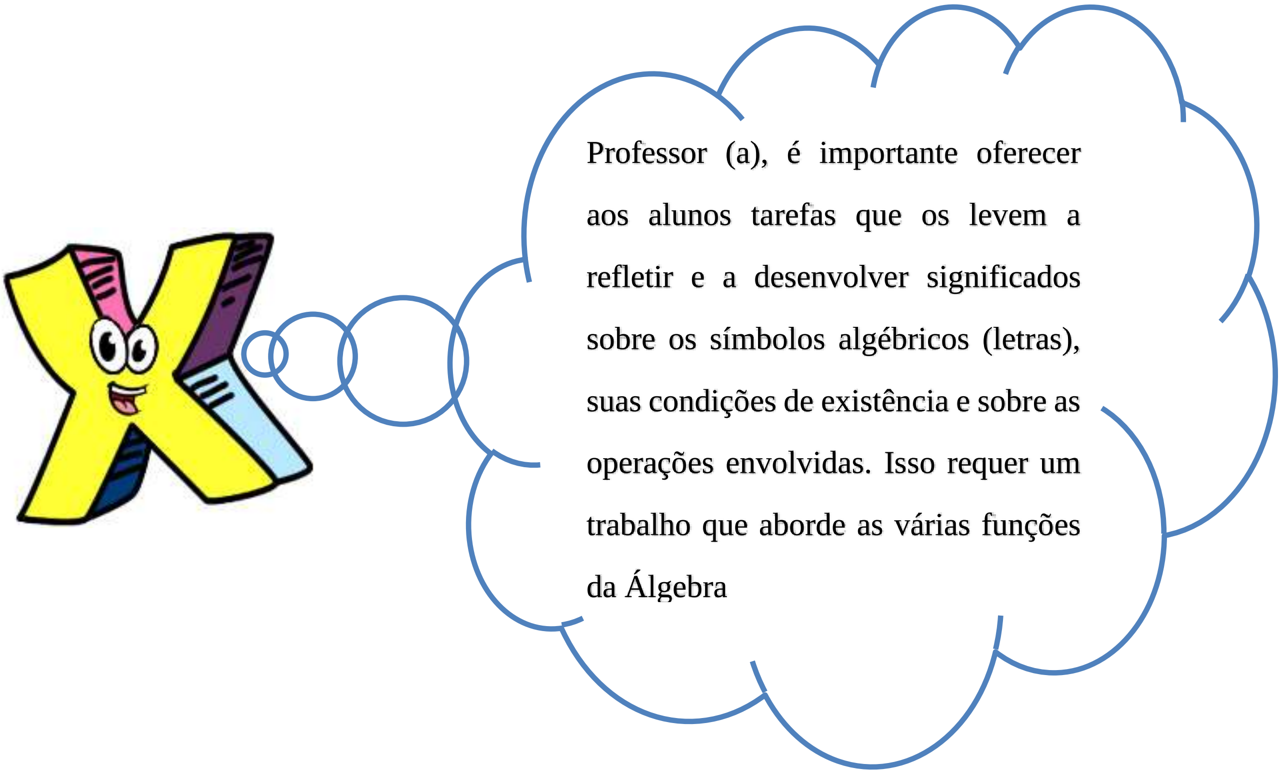
Há um consenso na literatura de que o ensino e a aprendizagem da Álgebra escolar deve ter como meta o desenvolvimento do pensamento algébrico, entendido como a capacidade de manipular símbolos em diversos contextos e com diferentes significados, para representar e resolver situações-problemas por meio de equações, inequações e funções e também como a capacidade de observar e representar generalização de padrão (BRASIL, 2018; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KAPUT, 1995).

Um ensino de Álgebra baseado na aplicação mecânica de regras, no qual o aluno já sabe que existe uma resposta correta e específica a ser dada (igual à do professor e/ou do livro) não favorece o desenvolvimento do raciocínio, da criatividade, da construção de conjectura e da produção de significados. Em vez disso, o professor precisa ter em mente de que nas situações reais, fora dos muros da escola, não há um professor nem livro para fornecer regras e respostas corretas. Por isso, é conveniente um ensino de Álgebra pautado na construção de significados para as variáveis e/ou símbolos algébricos, de relações e de conjecturas. E é você, professor, o responsável por preparar e ministrar esse ensino, de conhecer e de buscar meios e estratégias para fazer os alunos avançarem rumo ao conhecimento matemático e, em específico, ao pensamento algébrico.

De fato, o professor que ensina Matemática deve ser um profissional dotado de conhecimentos especializados, como propõe Carrillo et al (2013). Deve ser um conhecedor da Matemática e dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, capaz de selecionar e criar tarefas matemáticas desencadeadoras de reflexões, que levem os alunos a pensarem, a praticarem relações e a desenvolverem conceitos e significados sobre os objetos algébricos, e não a mera aplicação de regras.

De fato, acreditamos que a implementação de tarefas matemáticas é o principal meio pelo qual o conhecimento matemático é desenvolvido e construído, isto é, concordamos com Lappan e Briars (1995) quando afirmam que a seleção de atividades ou tarefas pelo professor é a decisão mais significativa que afeta a aprendizagem de seus alunos.

PARTE 1



SITUAÇÃO 01: Se $a + b = 16$, quanto vale $a + b + c$?

Fonte: adaptado de Lins e Gimenez (1997)

Essa situação procura trabalhar a falta de fechamento, existente em algumas situações em Álgebra, conceito que muitos alunos têm dificuldade em aceitar (KUCHEMANN, 1981; KIERAN, 1995). Essa dificuldade em aceitar o não-fechamento para certa expressão, parte de uma noção processual, construída em aritmética, nos primeiros anos de escolaridade, isto é, a ideia de que de um lado do sinal de igualdade realiza-se contas, do outro, coloca-se o resultado. Dessa forma, possivelmente muitos alunos não chegarão à resposta $16 + c$ e até recusam em aceitá-la.

A situação também possibilita explorar o significado do sinal de igualdade como “um lado vale tanto quanto o outro” como uma balança em equilíbrio, ou seja, tratar a equação do ponto de vista estrutural, um ente matemático que guarda uma simetria. $a + b = 16$ indica que o lado esquerdo vale tanto quanto o direito, logo se somar c em ambos os lados, a igualdade continua verdadeira. Daí, $a + b = 16 \rightarrow a + b + c = 16 + c$

Nesse caso, a letra c representa um valor genérico, indeterminado.

SITUAÇÃO 02: Partindo da multiplicação de um certo número n por ele mesmo, faça o seguinte: multiplique sucessivamente o sucessor pelo antecessor. Observe alguns exemplos:

$9 \cdot 9$	$(9+1)\cdot(9-1)$	$(9+2)\cdot(9-2)$	$(9+3)\cdot(9-3)$	...
81	80 = $9^2 - 1^2$	77 = $9^2 - 2^2$	72 = $9^2 - 3^2$	...
Diferença em relação a 81	1^2	2^2	3^2	...

Fonte: adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009)

a) O que se pode observar a partir da diferença nos resultados?

b) Sabendo que $33 \cdot 33 = 1.089$, a partir dos resultados presentes no quadro, você seria capaz de dizer quanto vale $35 \cdot 31$, sem efetuar o cálculo?

Essa situação trabalha a observação de regularidades, buscando desenvolver a capacidade de generalização de padrão, componentes importantes do pensamento algébrico. Isto é, a situação visa a construção da fórmula (n + a) (n – a) = $n^2 - a^2$, enunciada como: "o produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos o quadrado do segundo".

Para a alínea b, espera-se que o aluno a partir da observação da conjectura, seja capaz de notar que (n + a) (n – a) = $n^2 - a^2$. Analogamente, perceber que $35 \cdot 31 = (33+2)\,(33-2) = 33^2 - 2^2 = 1.089 - 4 = 1.085$.

SITUAÇÃO 03: Pense em um número formado por dois algarismos, no qual o algarismo da dezena seja maior que o algarismo das unidades. Inverta a ordem dos algarismos e faça a subtração entre eles. Observe alguns exemplos no quadro.

Número pensado	92	75	21	96	...
Número com algarismos invertidos	29	57	12	69	...
diferença	92 – 29 = 63 = 9 (9 – 2)	75 – 57 = 18 = 9 (7 – 5)	21 – 12 = 9 = 9 (2 – 1)	96 – 69 = 27 = 9 (9 – 6)	...

Fonte: adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009)

a) O que se pode observar a partir da diferença entre o número pensado e o número obtido com a ordem dos algarismos invertida?
b) Como podemos saber se a relação observada a partir dos exemplos é válida para qualquer número?

O objetivo dessa questão é desenvolver a capacidade de observação de regularidade e de generalizar a partir de modelos específicos, conceitos recomendados no ensino e aprendizagem de Álgebra.

A partir dos exemplos fornecidos, espera-se que os alunos percebam que a diferença entre o número pensado e o número com a ordem dos algarismos invertida é um múltiplo de 9. Mais ainda: para obter a diferença, basta subtrair o algarismo das unidades do algarismo das dezenas e multiplicar por 9.

Para o item b, convém o professor esclarecer o que o aluno não deve fazer: testar todas as possibilidades. Elas são 45. Há situações em que testar todos as possibilidades é impossível. O número pensado é da forma ab. Como a representa as dezenas, deve ser multiplicado por 10. O número então fica assim: 10a + b. Invertendo a ordem dos algarismos fica assim: ba = 10b + a. Subtraindo, temos:

$$(10a + b) - (10b + a) \rightarrow 10a + b - 10b - a \rightarrow 9a - 9b \rightarrow 9(a - b)$$

SITUAÇÃO 04: Conta-se que certa vez o professor de um garoto de 10 anos, com o objetivo de manter a turma comportada e trabalhando, propôs que os alunos somassem os números naturais de 1 a 100. Isto é, a intenção desse professor era manter os alunos ocupados por muito tempo. Porém, em poucos segundos, o pequeno garoto apresentou a soma pedida: 5.050. O nome desse garoto é Johann Carl Friedrich Gauss, o qual viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Caro aluno, agora a questão volta para você. Você seria capaz de descobrir a tal soma dentro de poucos segundos? Descubra como Gauss pensou.

Para lhe ajudar, observe as seguintes igualdades:

$1 + 2 = \frac{2\,.\,3}{2} = 3$ $\qquad 1 + 2 + 3 = \frac{3\,.\,4}{2} = 6$ $\qquad 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4\,.\,5}{2} = 10$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5\,.\,6}{2} = 15$$

Fonte: adaptado de Bianchini e Machado (2010)

Mais uma vez, o primeiro passo é suspeitar que não se deve realizar a soma número por número, mas procurar conjecturar, descobrir um padrão a partir de exemplos mais simples. Como propõe Pólya (1957), se temos dificuldades em resolver um certo problema, tentemos primeiro um problema mais simples.

Ou seja, o professor deve evitar fornecer fórmulas prontas aos alunos, mas incentivá-los a realizar conjecturas, a descobrir um padrão a partir das somas de quantidades menores de números.

O objetivo é que os alunos percebam que a soma de certa quantidade de números naturais consecutivos é dada pelo semiproduto da soma dos extremos pela quantidade de números somados. Ou seja, identificando os números por a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a soma deles é dada por $\frac{(a_1 + a_n)\,.\,n}{2}$. No caso especificado acima, fica: $\frac{(1+100)\,.\,100}{2} = 101\,.\,50 = 5.050$.

SITUAÇÃO 05: Tendo em vista a seguinte igualdade $senx = cosx\,.\,tgx$, use uma tabela de valores trigonométricos ou a calculadora científica de seu celular e teste alguns valores para x. O que você observa? Se não podemos testar todos os valores de x, como podemos saber para quais valores de x ela é verdadeira? Qual o significado da letra x nessa igualdade?

Fonte: própria autoria, 2020

Ao testar alguns valores para x, digamos x = 0, x = 30º, x = 45º, x = 60º, x = 540º, o aluno perceberá que a igualdade é verdadeira. De fato, pois:

$sen\ 0 = cos\ 0\,.\,tg\ 0 \ \rightarrow 0 = 1\,.\,0 \ \rightarrow 0 = 0$

$$sen30° = \cos30°\,.\,\mathrm{tg}30° \ \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{9}}{2\,.\,3} = \frac{3}{2\,.\,3} = \frac{1}{2}$$

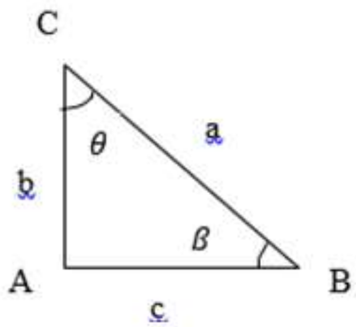
$$sen45° = cos45°\,.\,tg45° \ \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.\,1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen60° = cos60°\,.\,tg60° \ \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\,.\,\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$sen540° = cos540°\,.\,tg540° \ \rightarrow 0 = \ -1\,.\,0 = 0$

Porém, o professor precisa ter o conhecimento de que um apanhado de exemplos não prova nada! Essa estrutura representa uma identidade, isto é, é sempre verdadeira, quaisquer que sejam os valores de x, ao contrário de uma equação, que pode ser verdadeira apenas sob certas condições particulares. Nessa igualdade, a letra x representa, segundo Usiskin (1995), o argumento de uma função.

Provar essa identidade, requer do professor conhecimentos de razões trigonométricas.



Considerando o triângulo retângulo ABC, temos as seguintes razões trigonométricas:

$$sen\theta = \frac{c}{a}\left(\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}\right) \qquad cos\theta = \frac{b}{a}\left(\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}\right) \rightarrow a = \frac{b}{cos\theta}$$

$$tg\theta = \frac{c}{b}\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right) \rightarrow c = b\,.tg\theta$$

Substituindo o valor de a e de c em $sen\theta = \frac{c}{a}$, temos:

$$sen\theta = \frac{c}{a} \rightarrow sen\theta = \frac{b\,.\,tg\theta}{\frac{b}{cos\theta}} \rightarrow sen\theta = b\,.tg\theta\,.\frac{cos\theta}{b} \rightarrow sen\theta = cos\theta\,.tg\theta.$$

Como queríamos demonstrar.

SITUAÇÃO 06: Ivan comprou três cadernos que custaram o mesmo preço cada um. Ele também comprou três livros de mesmo preço cada um. Sabendo que o preço de cada livro é R$ 12,00 a mais do que o de um caderno e que a compra toda custou R$ 291,00, determine o preço de cada caderno e de cada livro.

Fonte: CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. Convergências Matemática. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. p. 101. (7º ano)

Para resolver esse problema, deve-se reconhecer, identificar e representar algo desconhecido, no caso os valores do caderno e do livro. Ou seja, nessa situação a letra tem o significado de incógnita, de um valor específico.

A variável como incógnita é usada nas equações, para a resolução de problemas. Essa função aparece nos PCN (BRASIL, 1998) como Álgebra das equações e em Usiskin (1995) como Álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas.

Pode-se começar representando qualquer um dos preços. Se representarmos por x o valor de cada caderno, então o valor de cada livro é $x + 12$, pois o livro custa R$ 12,00 a mais; se começarmos representando o valor de cada livro por x, então o valor de cada caderno é $X - 12$, pois o caderno custa R$ 12,00 a menos que o livro.

Resolução:

Preço de um caderno: x — preço de um livro; $x + 12$

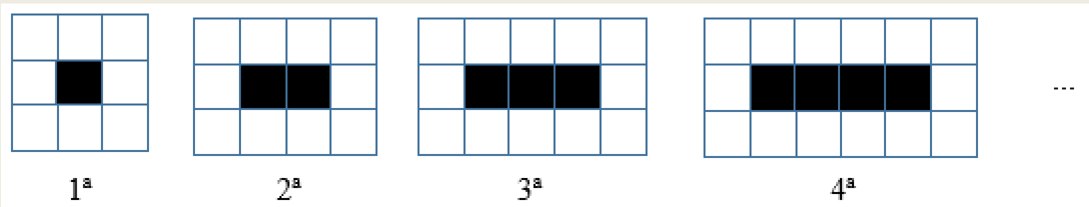
Preço de três cadernos: 3x — preço de três livros: $3(x + 12) = 3x + 36$

Três cadernos mais três livros é igual a 291 $\rightarrow$ $3x + 3x + 36 = 291$ $\rightarrow$

$$6x + 36 - 36 = 291 - 36 \rightarrow 6x = 255 \rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{255}{6} \rightarrow x = 42{,}50$$

Logo, cada caderno custa R$ 42,50 e cada livro custa 42,50 + 12 = R$ 54,50

SITUAÇÃO 07: (Lins e Gimenez, 1997. P.110. ADAPTADO). Analise as quatro primeiras figuras de uma sequência.



Qual o número de quadradinhos pretos da décima figura? E o número de quadradinhos brancos?

Essa situação traz o uso de sequência, recurso aconselhável para ensino e aprendizagem de Álgebra, o qual possibilita o desenvolvimento da capacidade de observação de regularidade e generalização de padrões, constituindo um dos principais elementos do pensamento algébrico (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009; KAPUT, 1995; SILVA; MOMEIRA, 2018; BRASIL, 2018).

Nessa situação, a letra assume o significado de um número genérico. Para resolver problema dessa natureza, precisa ser capaz de identificar um padrão, diferenciando o que varia e o que não varia.

Observe que o número de quadradinhos pretos é o mesmo número que indica a posição da figura. Logo, a décima figura possui 10 quadradinhos pretos. Uma resposta para o número de quadradinhos brancos para a figura de número n é $2n + 6$.

Note que para cada quadradinho preto, há dois brancos, um em cima e outro embaixo. Além disso, há duas colunas de três quadradinhos brancos, uma à esquerda e outra à direita.

Portanto, o número de quadradinhos brancos da décima figura é: $2 \,.\, 10 + 6 = 26$.

SITUAÇÃO 08: João é taxista. Observe na tabela os preços de algumas corridas realizadas.

Nº de KM rodado	1	2	3	4	...
Preço da corrida	5,5	7	8,5	10	...

a) Qual a fórmula matemática que relaciona o número x de km rodado e o preço y a pagar?

b) Quanto custa uma corrida de 10 km?

c) Em uma corrida o cliente pagou R$ 14,50. Quantos km teve essa corrida?

Fonte: própria autoria, 2020.

Para responder essa questão, é preciso ser capaz de perceber uma relação de interdependência entre duas grandezas: o número de km rodado e o preço a ser pago, isto é, como o preço da corrida varia em função do número de km rodado. O professor precisa ser capaz de conjecturar um modelo matemático que relaciona x e y.

Nessa relação, o preço depende do número de km rodado e não o contrário. Assim, km rodado é a variável independente e o preço é a variável dependente.

a) Note que a cada km rodado o preço aumenta R$ 1,50. Logo, o preço do km rodado é R$ 1,50.

Além disso, há uma parte fixa (chamada bandeirada) no valor de R$ 4,00. Assim, sendo x o número de km rodado e y o preço a pagar, a relação entre y e x é dada por $Y = 1{,}50X + 4$.

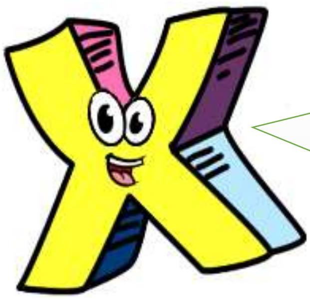
b) Basta substituir x por 10.

$y = 1{,}50 \,.10 + 4 = 15 + 4 = 19$

c) Basta substituir y por 14,50.

$14{,}50 = 1{,}50x + 4 \;\rightarrow 10{,}50 = 1{,}50x \;\rightarrow 105 = 15x \;\rightarrow x = 7$

EQUAÇÃO POLINOMIAL DE PRIMEIRO GRAU: ALGUNS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO



Olá professor! Olá professora!

Agora iremos abordar alguns métodos de resolução. Queremos lhe proporcionar diversas técnicas e procedimentos para que possa se divertir com seus alunos.

Vem com a gente!

Método de "esconder": Esse método sugere que devemos "esconder" uma incógnita (que não precisa ser necessariamente uma letra, pode ser uma expressão) e descobrir o valor que ela ocupa. Mas atenção! Esse método não se aplica em equações com ocorrência dupla de incógnita (BERNARD; COHEN, 1995).

Aplicação do método de esconder.

$4\,(x+2)=20$ Vamos "esconder" (x + 2) e perguntar: 4 vezes que número é igual a 20?

Resposta: 5. Logo, $x+2=5$. Agora escondemos o x e perguntamos: que número somado com 2 é igual a 5? Resposta: 3. Logo, $x=3$.

Método de desfazer: Esse método se baseia na ideia de reversibilidade, isto é, em uma equação devemos pegar o caminho de volta, desfazendo cada operação pela sua inversa (BERNARD; COHEN, 1995).

Aplicação do método de desfazer.

O triplo de um número natural, aumentado de 15, é igual a 39. Qual é esse número?

(Fonte: SILVEIRA, Ênio. Matemática: Compreensão e Prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. p. 147. (7º ano)

Primeiro, escolha uma letra para representar o número; segundo, multiplique por 3; terceiro, some 15, chegando a 39. Estamos em 39. Vamos voltar, fazer o caminho inverso (operações inversas).

Assim: (39 – 15) : 3 (chega-se ao ponto de partida) → 39 – 15 = 24 : $\frac{24}{3} = 8$

Portanto, o número é 8.

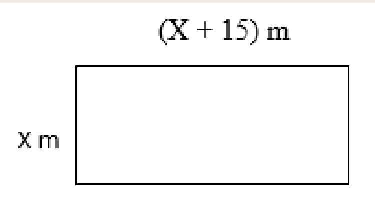
Método da transposição: Trata-se de transpor termos de um membro a outro, aplicando a operação inversa (BERNARD; COHEN, 1995).

Aplicação do método da transposição

Maíra é engenheira e precisa determinar as medidas dos lados de um terreno retangular. Ela sabe que o comprimento do terreno tem 15 m a mais que a largura e que o perímetro é de 70 m.

(Fonte: SOUZA, Joamir. **Matemática**: Realidade e Tecnologia. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. p. 151. (7º ano))

Resolução: Abaixo está a representação do terreno, conforme os dados do problema.



Perímetro é a medida do contorno, isto é, a soma dos lados. Assim:

2x + 2 (x + 15) =70 → 2x + 2x + 30 = 70 → 4x + 30 = 70 → 4x = 70 – 30 (transpomos o 30 e trocamos de operação). 4x = 40 → $x = \frac{40}{4}$ (transpomos o 4 e trocamos de operação). x = 10

Portanto, a largura mede 10 m e o comprimento, 25 m

Método das equações equivalentes: Esse método é bastante eficaz e eficiente para desenvolver a ideia de equivalência. Faz uso de dois princípios interessantes: (I) somando-se um mesmo número ou expressão a ambos os membros de uma equação, a igualdade não se altera e (II) multiplicando-se ambos os membros de uma equação por um mesmo número ou expressão diferentes de zero, a igualdade não se altera (BERNARD; COHEN, 1995).

Aplicação do método das equações equivalentes

Ao dobro de um número adicionamos 12 e o resultado é igual à metade do mesmo número, aumentado de 108. Qual é o número procurado?

(Fonte: Curso de Matemática Completo para os Concursos: Banco do Brasil e Caixa Econômica Federal. P.21. Disponível em: https://www.matematicapremio.com.br/wp-content/uploads/2016/01/Matematica-1400-Questoes-Resolvidas-e-Gabaritadas.pdf. Acesso em: 11 fev. 2020.)

Resolução:

Número: x dobro do número: 2x metade do número: $\frac{x}{2}$

$2x + 12 = \frac{x}{2} + 108$ somando $-\frac{x}{2}$ e 12 a ambos os membros, temos:

$2x - \frac{x}{2} + 12 - 12 = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} + 108 - 12 \rightarrow 2x - \frac{x}{2} = 96$ multiplicando ambos os membros por 2, temos: $2\left(2x - \frac{x}{2}\right) = 2 \,.\, 96 \rightarrow 4x - \frac{2x}{2} = 192 \rightarrow 3x = 192 \rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{192}{3} \rightarrow x = 64$

Portanto, o número procurado é 64.

Método da falsa posição. Esse método consiste em lançar um valor (apropriado) para a variável, de forma a eliminá-la e, a partir do valor encontrado, realizar uma multiplicação, uma divisão, uma proporção e encontrar o valor real (LOURENÇO, 1998).

Aplicação do método da falsa posição

Um número somado com sua sétima parte resulta em 48. Que número é esse?

(Fonte: LOURENÇO, Marcos Luiz. Equações do primeiro grau: uma resolução muito antiga. Revista de Educação Matemática, ano 6. n. 4. p. 55, 1998. (ADAPTADO)

Resolução

Número: x   sétima parte do número: $\frac{x}{7}$

$x + \frac{x}{7} = 48$ queremos eliminar o x, então fazemos $x = 7$. Daí, $7 + \frac{7}{7} = 7 + 1 = 8$

A pergunta é: o que temos que fazer com o 8 (falso resultado) para transformá-lo em 48 (resultado verdadeiro)? Resposta: multiplicá-lo por 6. Isso quer dizer que devemos multiplicar o valor lançado inicialmente (7) por 6. Isto é, $7 \,.\, 6 = 42$.

Portanto, o número procurado é 42.

Método do diagrama: Esse método faz uso de figuras geométricas, possibilita uma melhor visualização e compreensão da situação, relacionando as partes entre si e com o todo (BERNARD; COHEN, 1995).

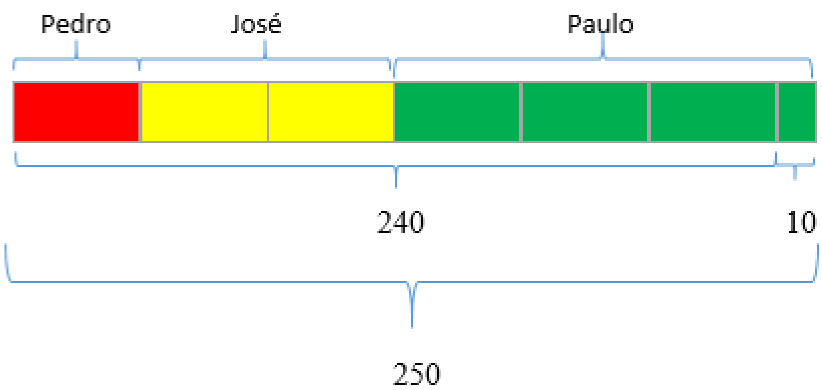
Aplicação do método do diagrama.

João dividiu R$ 250,00 entre três irmãos por um serviço realizado por eles. A partilha foi proporcional ao tempo que cada um esteve realizando o serviço, de forma que José recebeu o dobro de Pedro e Paulo recebeu o triplo de Pedro mais R$ 10,00. Descubra quanto cada irmão recebeu.

(Fonte: própria autoria, 2020).

Resolução:

O interessante é começar representando a menor das partes e a partir dela representar as outras partes.



Fonte: própria autoria, 2020.

A figura mostra 6 partes iguais, as quais somam 240. Assim, fica nítido que devemos dividir 240 por 6.

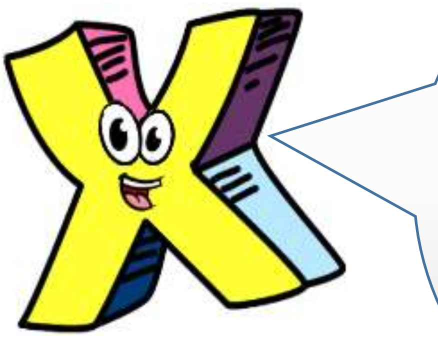
$$\frac{240}{6} = 40$$

Logo, cada uma das 6 partes iguais vale 40. Dessa forma, a quantidade que cada irmão receberá é:

Pedro: R$ 40,00

José: 2 . 40=80   R$ 80,00

Paulo: 3 . 40+10=130   R$ 130,00



Professor (a), esperamos que com esses métodos tenhamos lhe ajudado para o trabalho de resolução de equações polinomiais de primeiro grau. Há métodos mais restritos e limitados (esconder, desfazer, falsa posição, diagrama) e há métodos mais geral e formal (transposição e equações equivalentes). Escolha conforme a situação. Divirta!

PARTE 2

TIPOS DE TAREFAS E SUAS IMPLICAÇÕES PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM

"As tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende" (PONTE, 2014 p. 14)

Tarefa do tipo exercício
O que é?
Tarefa fechada e de desafio reduzido. Servem para o aluno pôr em prática os conhecimentos já anteriormente adquiridos

Tarefa do tipo problema
O que é?
Tarefa também fechada, mas com elevado desafio. O aluno não conhece um algoritmo que leve a solução imediata.

Tarefa do tipo investigação. O que é?
Uma investigação tem um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta. Exige um papel ativo do aluno, que ele formule perguntas, hipóteses e procure respostas para elas.

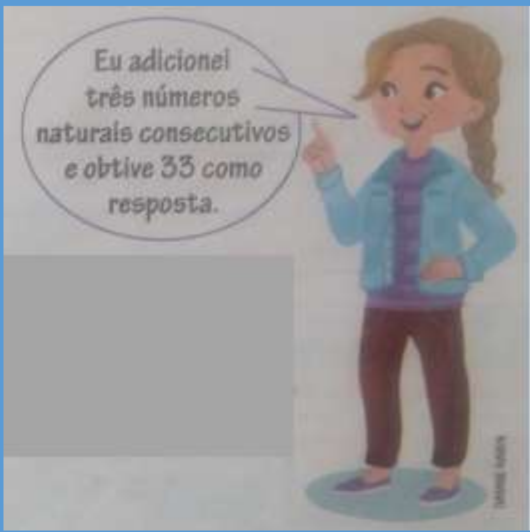
Tarefa do tipo exploração. O que é?
Uma exploração é uma tarefa aberta, de desafio reduzido. São tarefas fáceis, nas quais se pode trabalhar desde logo, sem planejamento.

As tarefas matemáticas constituem o principal meio pelo qual o professor organiza e orienta seu trabalho em sala de aula. É pelas tarefas propostas em aula que o professor procura desenvolver nos alunos as habilidades programadas, permitindo-lhe ter uma noção de onde está e do que fazer para chegar onde deve estar. As tarefas podem desempenhar vários papeis: apoiar a aprendizagem, fixar conteúdo, verificar o que o aluno aprendeu, compreender de modo mais profundo as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (PONTE, 2014). Por isso, torna-se crucial que o professor conheça os vários tipos de tarefas, suas limitações e potencialidades e diversifique o seu uso.

A aprendizagem matemática do aluno é, em grande parte, influenciada pelas tarefas que o professor escolhe e do modo como as implementam, podendo contribuir positiva ou negativamente (ETEIN; SMITH, 2009).

Ponte (2014) relata que as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática. No entanto, uma tarefa pode ter ou não potencialidades em termos de conceitos e processos matemáticos que pode ajudar a mobilizar, pode dar lugar a atividades diversas, dependendo do modo como for proposta, a forma de organização do trabalho dos alunos, o ambiente de aprendizagem e a sua própria capacidade e experiência anterior. Por outro lado, uma atividade corresponde a uma ou mais tarefas realizadas no quadro de uma certa situação. Segundo esse autor, é pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante esclarecer que essa aprendizagem depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor.

Tarefa 1: Observe o que Nair está dizendo.



a) Escreva uma equação que representa a fala de Nair

b) Resolva a equação que você escreveu no item anterior e determine quais números Nair adicionou.

(Fonte: SOUZA, Joamir. **Matemática**: Realidade e Tecnologia. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. p. 154. (7º ano)

Essa tarefa tem como objetivo equacionar uma situação matemática escrita em língua natural e encontrar o valor da incógnita. No nosso entender, ela é do tipo exercício por possuir estrutura fechada e grau de desafio reduzido. Porém, salientamos que essa é uma definição relativa, depende do nível de conhecimento de quem vai resolvê-la (PONTE, 2005). Ela traz uma atividade importante a ser desempenhada pelo aluno que é de converter a representação de um objeto, isto é, sair do registro da língua natural e representá-lo algebricamente, o que possibilita uma compreensão sobre o objeto, além de levar o aluno a realizar operações mentais para calcular o valor da incógnita. Porém, a tarefa possui uma estrutura fechada, determinando o que deve fazer e o resultado a ser encontrado, não dando abertura para o aluno realizar conjecturas e desenvolver melhor seu pensamento matemático.

Uma sugestão para torná-la mais aberta, atraente, com possibilidade de generalização é adaptá-la, como por exemplo:

Nadir sabe que a soma de três números naturais consecutivos é 33. Veja o que ela fez para achar os três números.

$1 + 2 + 3 = 6$ e $\frac{6}{3} = 2$ que é o número intermediário somado, os outros dois são o antecessor (2 – 1=1) e o sucessor (2 +1 = 3).

EUREKA!

$2+3+4=9$ e $\frac{9}{3}=3$ que é o número intermediário somado, os outros dois são o antecessor (3 – 1=2) e o sucessor (3 +1 = 4).

Assim, para calcular os três números cuja soma é 33, basta fazer $\frac{33}{3}=11$ $11-1=10$ e $11+1=12$

Portanto, os números somados foram 10, 11 e 12.

O método de Nair é verdadeiro? Funciona sempre? Se sim, há uma forma de comprová-lo?

O professor deve levar os alunos a pensar, realizar vários cálculos, fazer conjecturas. Nesse momento é importante dizer ao aluno que a realização de vários cálculos aritméticos, isto é, com números específicos não comprova a veracidade do método. Revelando assim, a importância da linguagem algébrica.

Uma maneira de escrever, comprovar esse fato é representar um dos números por x (pode ser outra letra), seu antecessor por $x-1$ e seu sucessor por $x+1$. Assim, temos:

$$\frac{x-1+x+x+1}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

Provavelmente, com questionamentos pertinentes do professor, muitos alunos conseguirão realiza-lo. Nesse caso, x representa um número qualquer, genérico.

Tarefa 2: Para assistir a uma sessão, entraram no cinema 280 pessoas e foram arrecadados R$ 5.160,00. Para essa sessão, uma entrada inteira custava R$ 24,00 e a meia-entrada R$ 12,00.

a) Sendo x a quantidade de pessoas que pagaram a entrada inteira, qual das equações a seguir permite calcular o valor de x?

$12x + 24x = 5160$

$12x + 24(x - 280) = 5160$

$24x + 12(280 - x) = 5160$

b) Quantas pessoas pagaram entrada inteira e quantas pagaram meia-entrada?

(Fonte: CHAVANTE, Eduardo. Convergências Matemática. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. p. 102. (7º ano))

Essa tarefa tem como objetivo levar o aluno a representar uma situação-problema por meio da linguagem algébrica, isto é, equacionar o problema e calcular o valor da incógnita.

Para isso é preciso identificar a presença de dois valores desconhecidos (pessoas que pagaram meia-entrada e pessoas que pagaram entrada inteira) cuja soma é 280 e que se um dos valores é x, o outro será $280 - x$. A partir daí, montar a equação, sabendo que o total arrecadado é R$ 5.160,00. Nessa situação a letra desempenha papel de incógnita.

No nosso entender, é uma tarefa do tipo problema, pois possui estrutura fechada e grau de desafio elevado (PONTE, 2005). Embora a forma como está proposta pelo livro baixa um pouco o nível de exigência cognitiva (STEIN; SMITH; 2009) uma vez que já traz as (poucas) alternativas. É possível que haja aluno que simplesmente aponta uma das alternativas, sem antes tentar compreender a situação.

Para implementá-la com alto nível de exigência, o professor pode modificá-la e apresentá-la sem alternativas. Estimular e motivar o aluno, auxiliando-o em suas dúvidas e descobertas por meio de questionamentos pertinentes. Pode-se resolvê-la por meio de equação (seria o mais natural) ou por meio de preenchimento de tabela. De fato, essa tarefa pode proporcionar uma boa aprendizagem por parte do aluno.

Uma solução:

Representando por x o número de pessoas que pagaram entrada inteira, temos:

Número de pessoas que pagaram entrada inteira: x. Cada uma dela pagou 24, logo o total pago por elas é: R$ 24x.

Número de pessoas que pagaram meia-entrada: 280 – x. Cada uma delas pagou 12, logo, o total pago por elas é: 12 (280 – x).

Como o total arrecadado foi R$ 5.160,00, temos que:

$24x + 12\,(280 - x) = 5.160.$

Essa é a equação que traduz a situação.

Vamos resolvê-la.

$24x + 12\,(280 - x) = 5.160 \;\rightarrow\; 24x + 3.360 - 12x = 5.160 \;\rightarrow\; 12x + 3.360 - 3.360 = 5.160 - 3.360 \;\rightarrow\; 12x = 1.800 \;\rightarrow\; \frac{12x}{12} = \frac{1.800}{12} \;\rightarrow\; x = 150$

Portanto, 150 pessoas pagaram entrada inteira. Já o número de pessoas que pagaram meia-entrada foi 280 – 150 = 130.

Tarefa 3: Um artesão estima que, para cada dia de trabalho, consegue obter um lucro de R$ 140,00, e para cada dia que não trabalha sofre um prejuízo de R$ 25,00. Considerando que um mês tem 30 dias, resolva as questões.

a) Se o artesão trabalhar 12 dias em um mês, ele terá lucro ou prejuízo nesse mês? De quantos reais?
b) Copie no caderno a expressão algébrica que corresponde ao lucro ou ao prejuízo do artesão em um mês de acordo com a quantidade x de dias que ele trabalho nesse mês.
c) Quantos dias o artesão trabalhou no mês em que ele teve um lucro de R$ 2.715,00?

(Fonte: CHAVANTE, Eduardo. **Convergências Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. p. 102. (7º ano)

Essa é uma tarefa interessante, que tem o objetivo de levar o aluno a perceber uma relação de interdependência entre duas grandezas: o número x de dias trabalhados e o lucro y mensal, isto é, o lucro y está em função do número x de dias trabalhado. Nesse caso, a letra x desempenha papel de número funcional. Essa tarefa tem grande potencial para a aprendizagem. Pode-se levar o aluno a explorar várias representações e métodos de resolução, como por exemplo preencher uma tabela com os valores de x e de y, percebendo como um varia em função do outro, pode-se construir um gráfico com os valores de x e de y, mostrando a interdependência entre as duas grandezas, também pode-se optar por uma solução algébrica, ou ainda usar mais de um desses artifícios (o que torna mais interessante).

Solução algébrica:

a) Seja x o número de dias trabalhados, o número de dias não trabalhados é 30 – x.

Para o item a, temos: dias trabalhados: 12 dias não trabalhados: 30 -12 = 18. Daí:

$12\,.\,140 + 18\,.\,(-25) = 1.680 - 450 = 1.230$. Logo, se o artesão trabalha 12 dias no mês seu lucro é de R$ 1.230,00

b) a expressão matemática que relaciona o lucro y mensal e o número x de dias trabalhados é:

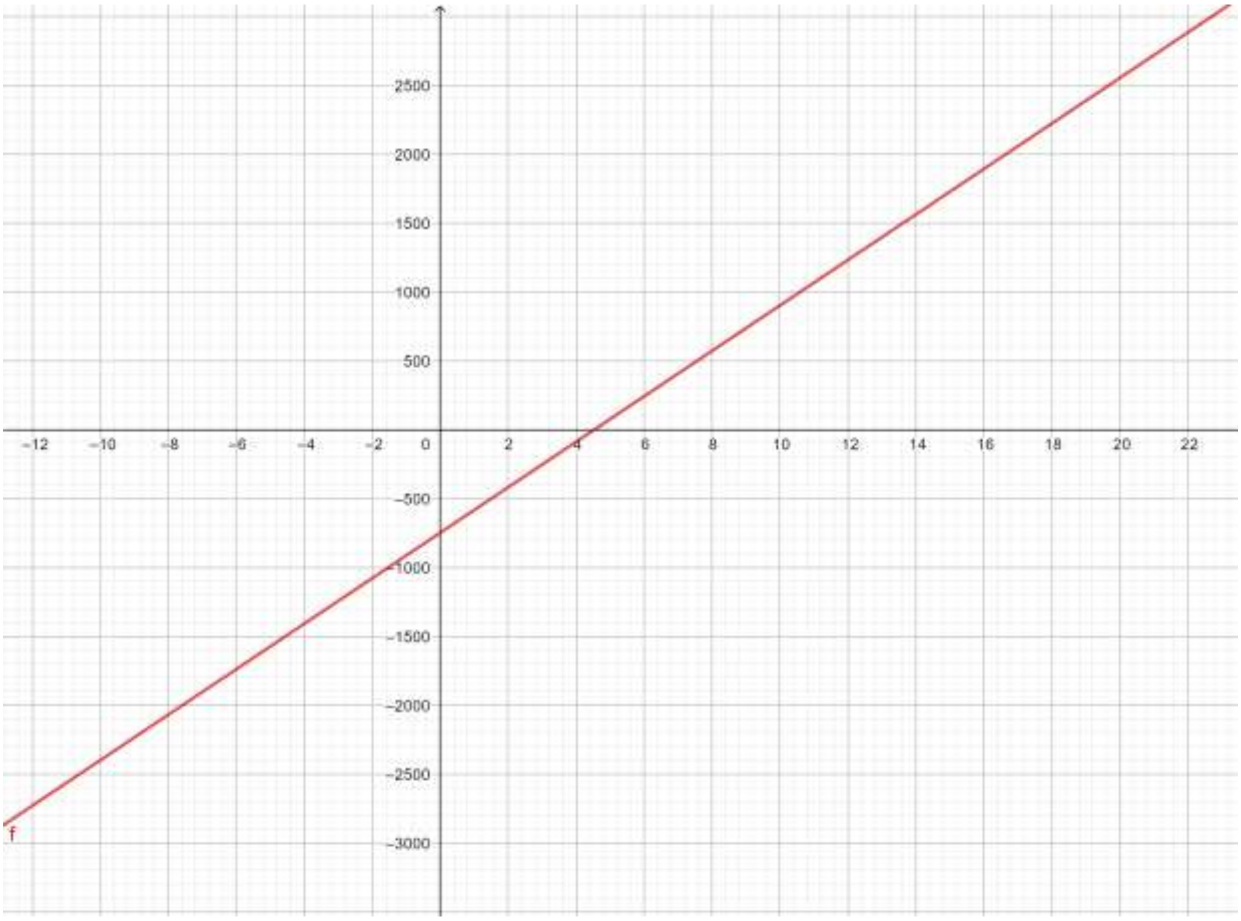
$y = 140x - 25(30 - x)$ → y = 165x – 750

c) nesse caso y = 2.715. Substituindo esse valor na expressão encontrada no item b, temos:

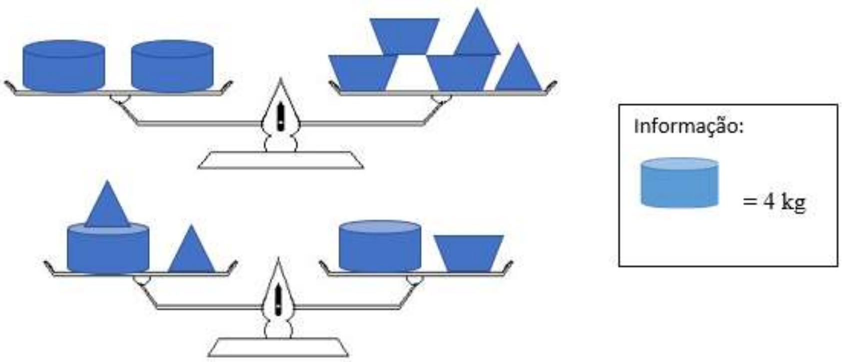
$2.715 = 140x - 25(30 - x) \rightarrow 2.715 = 140x - 750 + 25x \rightarrow 2.715 = 165x - 750 \rightarrow$
$2.715 + 750 = 165x - 750 + 750 \rightarrow 3.465 = 165x \rightarrow \frac{3.465}{165} = \frac{165x}{165} \rightarrow 21 = x$

Portanto, no mês em que o artesão teve lucro de R$ 2.715,00, ele trabalhou 21 dias.

Solução gráfica. Ou melhor, parte da solução gráfica. Construída no Geogebra.



Tarefa 4. Nas balanças abaixo, objetos iguais têm medidas de massas iguais.



a) O que é possível observar?

b) Como podemos escrever matematicamente a relação expressa pelas balanças? Justifique como você pensou.

c) Como você faria para descobrir as medidas das massas do trapézio e do triângulo? Quais são essas medidas? Justifique como pensou.

Fonte: própria autoria, 2020.

Essa tarefa tem o objetivo de levar o aluno a perceber a relação de equivalência existente na balança, representando-a por meio de uma equação e em seguida calcular o valor das incógnitas (massas do trapézio e do triângulo). É uma tarefa do tipo investigativa, com comandos abertos, como justifique, o que você faria... e grau de desafio elevado (PONTE, 2005). Isso dá mais autonomia ao aluno e permite o desenvolvimento de estratégias pessoais, contribuindo dessa forma para a construção do pensamento matemático. Na implementação dessa tarefa faz-se necessário uma maior aproximação por parte do professor, pois muitos alunos podem sentir dificuldades na compreensão dos comandos que, no nosso entender, traz um rigor forte, como por exemplo, a expressão escrever matematicamente que pode gerar interrogações no aluno. Além disso, tem um objetivo complexo e alto nível de exigência cognitiva, o aluno deve ser capaz de perceber as relações de equivalências relacionadas nas duas balanças, expressá-las matematicamente, comparar uma com a outra e descobrir o valor das incógnitas (massas dos objetos). O professor deve auxiliá-lo com questionamentos pertinentes, motivando-o e encorajando-o em cada etapa da resolução, sem, contudo, induzir o aluno à resposta. De fato, essa tarefa oferece grande potencial de aprendizagem, possibilitando o desenvolvimento de vários procedimentos e de conceitos, como uso da linguagem algébrica para expressar situações matemáticas, uso de princípios aditivo e multiplicativo, desenvolvimento do conceito de equivalência e de incógnita e resolução de problema.

Uma solução: usando letras para representar os objetos, por exemplo:

trapézio = x triângulo = y

Temos:

Na primeira balança: $4 + 4 = 3x + 2y$ e na segunda balança: $4 + 2y = 4 + x$

Pela relação matemática expressa pela segunda balança, tem-se que $2y = x$ aqui usou-se a lei do cancelamento, isto é, cancelamos o 4 em ambos os membros da equação que é o mesmo que somar – 4 (princípio aditivo). Na expressão matemática expressa pela primeira balança, substitui-se 2y por x (pois são equivalentes). Assim, a primeira expressão fica

$8 = 3x + x \rightarrow 8 = 4x \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{4x}{4} \rightarrow 2 = x$ substituindo esse valor na expressão $2y = x$, temos:

$2y = 2 \rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow$ y = 1.

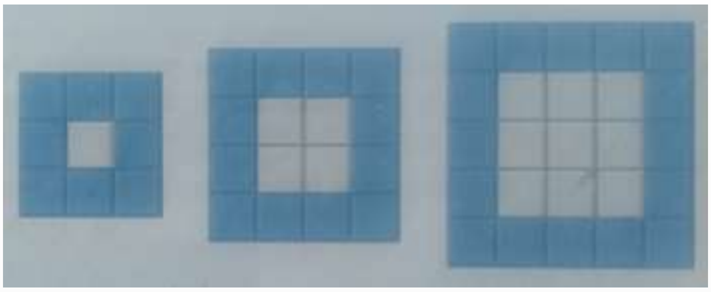
Sintetizando:

$$4 + 4 = 3x + 2y \rightarrow 8 = 3x + x \rightarrow 8 = 4x \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{4x}{4} \rightarrow 2 = x$$

$$4 + 2y = 4 + x \rightarrow 4 - 4 + 2y = 4 - 4 + x \rightarrow 2y = x \rightarrow 2y = 2 \rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{2}{2} \rightarrow$$

Portanto, a massa do trapézio é 2 kg e a do triângulo é 1 kg.

Tarefa 5: Com azulejos quadrados brancos e azuis, todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos:



A regra para construir esses mosaicos é a seguinte: inicialmente, formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos azuis; em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos cercado de azulejos azuis; e assim sucessivamente.

Considerando a sequência de mosaicos com número crescente de azulejos, responda em seu caderno.

a) Quantos azulejos brancos terá o 15º mosaico dessa sequência?
b) Quantos azulejos brancos terá o n-ésimo mosaico dessa sequência?
c) Quantos azulejos azuis terá o 20º mosaico dessa sequência?

(Fonte: SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: Compreensão e Prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. p. 159. (7º ano)

Essa tarefa tem como objetivo levar o aluno a perceber a existência de um padrão, de uma regularidade, favorecendo o desenvolvimento do pensamento algébrico e da generalização, conforme aponta Ponte, Branco e Matos (2009), Silva e Moreira (2018) e Brasil (2018).

Também, no nosso entender, ela é uma tarefa do tipo integradora, engloba os vários usos da variável: *número funcional*, pois existe uma relação de interdependência entre a quantidade de azulejos azuis e brancos (posição da figura); *incógnita* ao igualar a expressão matemática que traduz a situação a um certo número (item c, por exemplo) e *número genérico* por exemplo quando se pede o número de azulejos azuis de um mosaico qualquer (item d, por exemplo). Dessa forma, a tarefa contribui para o desenvolvimento da compreensão do conceito de variável, permitindo o aluno perceber suas várias facetas.

Uma resolução:

Item a. Para responder a esse item, é preciso a percepção de que o lado do quadrado branco é igual ao número que representa a posição da figura. O mosaico 1 tem um quadrado branco de lado 1, ou seja, seu número de quadrado branco é $1 . 1 = 1^1 = 1$. O mosaico 2 tem um quadrado branco de lado 2, seu número de quadrados brancos é $2 . 2 = 2^2 = 4$. O mosaico 3 tem um quadrado branco de lado 3, seu número de quadrados brancos é $3 . 3 = 3^2 = 9$ e assim por diante.

Logo, o número de quadrados brancos do 15º mosaico é $15 . 15 = 15^2 = 225$.

Item b. O n-ésimo mosaico, ou seja, um mosaico qualquer da sequência (nesse caso a posição do mosaico é n) terá $n . n = n^2$ quadrados brancos.

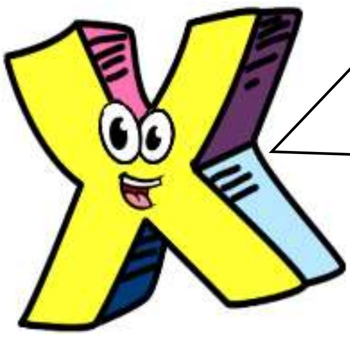
Item c. Aqui é preciso perceber que o quadrado completo (azulejos brancos mais os azuis) tem lado igual a n + 2, sendo n o número da posição do mosaico. Assim, o número total de quadrados de um mosaico que está na posição n é: $(n+2)^2 = n^2 + 4n + 4$. Porém, como queremos somente os quadrados azuis, devemos subtrair os quadrados brancos que é dados por n^2, conforme item b.

Logo, o número de azulejos azuis do 20º mosaico é $n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4 = 4 . 20 + 4 = 84$

Item d. O número de azulejos de um mosaico genérico, como vimos no item anterior, é dado pelo número total de quadrados $n^2 + 4n + 4$ menos o número de quadrados brancos n^2. Ou seja,

$$n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4.$$

Portanto, o número de azulejos azuis do n-ésimo mosaico da sequência é dado por $4n + 4$.



Professor (a), chegamos ao fim de nossa cartilha. Esperamos ter contribuído de forma positiva para o seu trabalho sobre equação polinomial de primeiro grau em sala de aula.

Queremos dizer que o seu trabalho do dia a dia em sala aula exige muito conhecimento, garra, dedicação e força de vontade, e torcemos para que consiga deixar em cada ser humano que receber suas orientações, a vontade de aprender e a capacidade de sonhar e construir um mundo melhor para se viver.

UM ABRAÇO!

FRANCELINO BOMFIM SANTOS.

REFERÊNCIAS

BERNARD, John E; & COHEN, Martin P. Uma integração dos métodos de resolução de equações numa sequência evolutiva de aprendizado. In: COXFORD, Arthur F; SHULTE, Alberto P. (Org). **As ideias da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1995. cap. 10, p. 111-126.

BIANCHINI, Bárbara Lutaif, MACHADO, Sílvia Dias de Alcântara. A Dialética entre Pensamento e Simbolismo Algébricos. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4198/3310. Acesso em: 28 ago. 2019

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29. Jun. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 17 ago. 2019.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS-GONZÁLEZ, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, Maria Cinta. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. **CERME**, Universidade de Huelva, Espanha, n. 8, p. 2985-2994, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching/link/54957cb60cf20f487d2f5465/download. Acesso em 15 abr. 2020.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências matemática**. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018. 288 p. (7º ano).

Clubes de Matemática da OBMEP: Disseminando o Estudo da Matemática. **Problema de Gincana: Pesando caixas.** Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-de-gincana-pesando caixas/. Acesso em: 18 jun. 2020.

Curso de Matemática Completo para os Concursos: Banco do Brasil e Caixa Econômica Federal. P.21. Disponível em: https://www.matematicapremio.com.br/wp-content/uploads/2016/01/Matematica-1400-Questoes-Resolvidas-e-Gabaritadas.pdf. Acesso em: 11 fev. 2020.)

KAPUT, James. J. **A research base supporting long term algebra reform**? Texto apresentado na 17. Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1995, Columbus, Ohio. Disponível em:<http://eric.ed.gov/PDFS/ED389539.pdf >. Acesso em: 20 nov. 2019.

KIERAN, Carolyn. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. (Org). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 104-110, 1995.

KÜCHEMANN, Dietmar. (1981). Algebra. In K. M. Hart (Ed.), Children’s understanding of mathematics: 11-16 (pp. 102-119). London: Murray.

LAPPAN, Glenda & BRIARS, D. (1995). How should mathematics be taught? In I. M. Carl (Ed.), **Prospects for school mathematics** (pp. 115-156). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo, Cmpinas: Papirus, 1997.

LOURENÇO, Marcos Luiz. Equações do primeiro grau: uma resolução muito antiga. **Revista de Educação Matemática**, ano 6. N. 4. P. 55, 1998. Disponível em: https://revistasbemsp.com.br/REMat-SP/article/view/134/pdf. Acesso em: 15 out. 2019.

POLYA, George. How to solve It. 2 ed. Princeton, N. I.: Princeton University Press, 1957.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no ensino básico**. Ministério da educação. 2009. Dgidc.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. **Comunidades & Colecções**, Lisboa, p. 1-26, 2005. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05- Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf. Acesso em: 10 out. 2019.

PONTE, João Pedro da. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. 1. ed. Lisboa. 2014. ISBN 978-989-8753-06-9. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310. Acesso em: 10 out. 2019.

SILVA, Juliano Pereira da; MOREIRA, Plinio Cavalcanti. Produto educacional sobre educação algébrica escolar: pensamento algébrico, linguagem, generalização. **Boletim online de Educação Matemática**, Joinville, v. 6, n. 10, p. 255-275, 2018. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11274/8602. Acesso em: 3 set. 2019.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática**: compreensão e prática. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 304 p. (7º ano).

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática:** realidade e Tecnologia. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018. 304 P. (7º ano).

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schan. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 22-28, 2009. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/stein-smith%2098.pdf. Acesso em: 20 dez. 2019.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, Alda J. O método nas ciências sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWAMDSZNADJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998.

BOOTH, Lesley R. (1984). Algebra: Children's strategies and errors. Windsor: Nfer-Nelson.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Relatório Brasil no Pisa 2018: Versão Preliminar**. Brasília: Inep/MEC, 2019. Disponível em http://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/documentos/2019/relatorio_PISA_2018_preliminar.pdf. Acesso em 18 jan. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Diretoria de Avaliação da Educação Básica. **Relatório SAEB 2017**. Brasília-DF, Inep/MEC, 2019. Disponível em http://portal.inep.gov.br/informacao-da-publicacao//asset_publisher/6JYIsGMAMkW1/document/id/6730262. Acesso em: 1 nov. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é base. 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 29 jun. 2019.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS-GONZÁLEZ, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, Maria Cinta. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. **CERME**, Universidade de Huelva, Espanha, n. 8, p. 2985-2994, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/269762274_Determining_Specialised_Knowledge_For_Mathematics_Teaching/link/54957cb60cf20f487d2f5465/download. Acesso em 15 abr. 2020.

KIERAN, Carolyn. The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. In L. Streefland et al. (Eds.), Proceedings of the 9th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (vol. 1, pp. 141-146). Noordwijkerhout, Holanda, 1985.

LAUTENSCHLAGER, Etienne; RIBEIRO**,** Alessandro Jacques**;** ZANA, Yossi**.** Investigando a construção do conceito de polinômio: uma abordagem envolvendo teorias das ciências cognitivas. **VIDYA - Revista Eletrônica**, v. 37, n. 1, p. 199-219, 2017. Disponívem em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA /article/view/2013/1915. Acesso em: 15 nov. 2019.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. **Comunidades & Colecções**, Lisboa, p. 1-26, 2005. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf. Acesso em: 10 out. 2019.

PONTE, João Pedro da. **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa. 2014. ISBN 978-989-8753-06-9. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/15310. Acesso em: 10 out. 2019.