



UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DA BAHIA  
CENTRO DAS CIÊNCIAS EXATAS E DAS TECNOLOGIAS - CCET  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -  
PROFMAT

VANESSA ALVES DOS SANTOS

**O CONCEITO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO:  
ANÁLISE DA LITERATURA, DE LIVROS DIDÁTICOS E DE  
TAREFAS MATEMÁTICAS**

BARREIRAS  
2020

VANESSA ALVES DOS SANTOS

**O CONCEITO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO:  
ANÁLISE DA LITERATURA, DE LIVROS DIDÁTICOS E DE  
TAREFAS MATEMÁTICAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia como requisito para a obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira

BARREIRAS  
2020

# **O CONCEITO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: ANÁLISE DA LITERATURA, DE LIVROS DIDÁTICOS E DE TAREFAS MATEMÁTICAS**

Por

**VANESSA ALVES DOS SANTOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – modalidade profissional – da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como requisito para a obtenção do grau de Mestra em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira

## **BANCA EXAMINADORA:**

Prof. Dr. Robson da Silva Eugênio  
Doutor em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE  
Universidade de Pernambuco (UPE)

Prof. Dr. André Pereira da Costa  
Doutor em Educação Matemática e Tecnológica, UFPE  
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)

Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira (orientador)  
Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências, UFBA/UEFS  
Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB)

Resultado: Aprovada  
Barreiras, 24 de julho de 2020

## FICHA CATALOGRÁFICA

---

S237

Santos, Vanessa Alves dos

O conceito de probabilidade no ensino médio: análise da literatura, de livros didáticos e de tarefas matemáticas. / Vanessa Alves dos Santos. – 2020.

135f.: il

Orientador: Prof. Dr. Joubert Lima Ferreira

Dissertação (Mestrado) – PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Oeste da Bahia. Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias - Barreiras, BA, 2020.

1. Matemática – Estudo e Ensino I. Ferreira, Joubert Lima II. Universidade Federal do Oeste da Bahia – Centro das Ciências Exatas e das Tecnologias III. Título.

CDD 510.7

---

**Biblioteca Universitária de Barreiras – UFOB**

“Se você desconhece o que vai ocorrer, mas está ciente das probabilidades, isso é risco. Se você desconhece até as probabilidades, isso é incerteza”.

Frank Knight (1885-1972)

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente, agradeço ao Senhor Jesus Cristo, pois, sem Ele, jamais chegaria até aqui. Agradeço a minha mãe Francisca, meus irmãos Dioclides e Danilo, por estarem comigo em todos os momentos de desafios e de glórias, me apoiando com as orações, financeiramente, enfim, em todos os sentidos. Ao meu querido orientador e professor Dr. Joubert Ferreira, pelas orientações, pela paciência e, principalmente, pela contribuição na escolha do tema. Aos meus colegas do mestrado pelas grandes amizades, companheirismo e socialização do conhecimento matemático e de vida, especialmente, Janeil Lustosa, que, além do seu conhecimento, ainda me apoiou com amor e paciência. Ao nosso grupo de pesquisa, Laboratório de Inovação e Pesquisa em Educação Matemática (LIPEM) – UFOB, no qual encontramos apoio uns nos outros, em especial, meus colegas Jéssica, Daniel e Francelino. Aos meus professores do programa Profmat, por todo o conhecimento adquirido e ampliado nesse mestrado. A todos os meus amigos, por acreditarem em minha capacidade. A Alexandra e Ane, minhas amigas, que estiveram presentes em várias etapas dessa caminhada. Aos professores Dr. Robson Eugênio, Dr. André da Costa, Dr. Jonson Ney e Dra. Marília Conceição que compuseram a banca examinadora, pelas contribuições para o enriquecimento desse trabalho. Esse mestrado me oportunizou conhecer pessoas muito especiais, que eu quero pra sempre em minha vida. Enfim, a todos que, de alguma forma, colaboraram para a realização desse trabalho, os meus sinceros agradecimentos.

## RESUMO

A presente pesquisa teve como objetivo investigar como a literatura científica publicada em periódicos em Educação Matemática, livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e tarefas matemáticas abordam o tema probabilidade na Educação Básica. Numa estrutura textual de formato *multipaper*, esse estudo se desenvolveu em três etapas, cada uma descrita por meio de um artigo, com características específicas os quais, seus objetivos são desdobramentos do objetivo geral. O primeiro artigo teve o objetivo de analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais, em Educação Matemática discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica. Foram analisados 29 artigos, os quais resultaram numa síntese sobre o ensino de probabilidade com base na relação entre as categorias discutidas e as diferentes abordagens sobre a temática. O objetivo do segundo artigo foi analisar como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020. Entre os resultados, destacou-se que algumas abordagens são mais enfatizadas que outras. Com relação ao terceiro artigo, seu objetivo foi analisar três tarefas, sendo duas extraídas do livro didático e um jogo de elaboração própria. Essa análise foi baseada em marcadores de tarefas descritos por Barbosa (2013) e ampliados por Costa, Oliveira e Silva (2017), sendo esses: o contexto de referência da tarefa, o uso da linguagem, a estrutura, o objetivo de ensino, a relação pedagógica e o foco de ensino. Também foram considerados os aspectos que compõem o modelo teórico chamado *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK) sob a perspectiva de Carrillo et al. (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014). Como resultado desse terceiro estudo, destacou-se que a implementação de tarefas de probabilidade, quando bem planejadas e articuladas, podem promover situações de aprendizagem para esse campo matemático. Como consequência de toda a pesquisa, apresentada individualmente em cada artigo, e pensando na contribuição para a prática pedagógica, foi elaborada um manual com o propósito orientar o professor sobre as formas de ver os processos de ensino e aprendizagem do tema probabilidade e refletir sobre a sua prática profissional.

**Palavras-chave:** Ensino de probabilidade; Educação Básica; revisão de literatura; pesquisa documental; tarefas; livro didático.

## ABSTRACT

This research aimed to investigate how the scientific literature published in journals on Mathematics Education, textbooks approved by the National Program for Books and Didactic Material (PNLD) and mathematical tasks address the topic of probability in Basic Education. In a multipaper textual structure, this study was developed in three stages, each described by means of an article, with specific characteristics which, its objectives are unfolding of the general objective. The first article aimed to analyze how the literature published in national journals in Mathematics Education discusses the teaching and learning of probability in Basic Education. 29 articles were analyzed, which resulted in a synthesis on the teaching of probability based on the relationship between the categories discussed and the different approaches on the subject. The objective of the second article was to analyze how the topic of probability is addressed in high school textbooks approved by the National Book and Didactic Material Program (PNLD) 2018-2020. Among the results, it was highlighted that some approaches are more emphasized than others. With regard to the third article, its objective was to analyze three tasks, two extracted from the textbook and a game of its own elaboration. This analysis was based on task markers described by Barbosa (2013) and expanded by Costa, Oliveira and Silva (2017), these being: the context of reference of the task, the use of language, the structure, the teaching objective, the pedagogical relationship and teaching focus. The aspects that make up the theoretical model called Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) were also considered from the perspective of Carrilo et al. (2013) and Moriel Júnior and Carrillo (2014). As a result of this third study, it was highlighted that the implementation of probability tasks, when well planned and articulated, can promote learning situations for this mathematical field. As a consequence of all the research, presented individually in each article, and thinking about the contribution to the pedagogical practice, a manual was elaborated with the purpose of guiding the teacher on the ways of seeing the teaching and learning processes of the probability theme and reflecting on the their professional practice.

**Keywords:** Probability teaching; Basic Education; literature review; documentary research; tasks; textbook.

## LISTA DE SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
BoEM	Boletim online de Educação Matemática
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EJA	Educação de Jovens e Adultos
EMP	Educação Matemática Pesquisa
EMD	Educação Matemática Debate
EMR-BR	Educação Matemática em Revista – BR
EMR-RS	Educação Matemática em Revista – RS
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FNDE	Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação
GPEM	Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
JIEEM	Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática
KFLM	<i>Knowledge of Features of Learning Mathematics</i>
KMLS	<i>Knowledge of Mathematics Learning Standards</i>
KMT	Knowledge of Mathematics Teaching
KoT	<i>Knowledge of Topics</i>
KPM	<i>Knowledge of Mathematical Practice</i>
KSM	<i>Knowledge of the Structure of Mathematics</i>
LD	Livro Didático
MEC	Ministério da Educação
PEM	Perspectivas da Educação Matemática
REMAT	Revista de Educação Matemática
REVEMAT	Revista Eletrônica de Educação Matemática
RIDEMA	Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática
RPEM	Revista Paranaense de Educação Matemática
UEL	Universidade Estadual de Londrina

## ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

### LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema envolvendo probabilidade geométrica .....	27
Figura 2 – Triângulo de Sierpinski .....	27
Figura 3 – Esquema de categorias relacionadas às abordagens probabilísticas .....	45
Figura 4 – Sugestão de leitura proposta pelo LD01 .....	63
Figura 5 – Abordagem histórica da teoria da probabilidade em LD02 .....	64
Figura 6 – Questão de probabilidade envolvendo eventos e espaço amostral.....	72
Figura 7 – Questão envolvendo probabilidade geométrica .....	73
Figura 8 – Questões envolvendo probabilidade clássica .....	73
Figura 9 – Dados da questão de probabilidade condicional .....	76
Figura 10 – Diagrama do problema do LD02.....	77
Figura 11 – Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática .....	94
Figura 12 – Tarefa do tipo exercício.....	96
Figura 13 – Tarefa do tipo exercício.....	99
Figura 14 – Representação dos elementos do espaço amostral .....	100
Figura 15 – Representação do espaço amostral e dos eventos .....	100
Figura 16 – Primeiro momento: Tarefa do tipo exploratória.....	103
Figura 17 – Trilhas do jogo <i>Corrida de Cavalo</i> .....	103
Figura 18 – Segundo momento: Tarefa do tipo investigação .....	104

### LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Relação dos artigos selecionados por periódico .....	31
Quadro 2 – Relação dos artigos classificados por categoria.....	32
Quadro 3 – Habilidades para o ensino de probabilidade no Ensino Médio.....	58
Quadro 4 – Espaço amostral no lançamento de dois dados.....	107

### LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Quantidade de páginas dos livros escolhidas.....	62
---	----

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>11</b>
<b>1.1 Trajetória profissional/acadêmica e a aproximação com o objeto de pesquisa</b> .....	<b>11</b>
<b>1.2 Apresentação do tema</b> .....	<b>12</b>
<b>1.3 Objetivos da pesquisa</b> .....	<b>14</b>
<b>1.4 Relevância da pesquisa</b> .....	<b>15</b>
<b>1.5 Aspectos metodológicos</b> .....	<b>16</b>
<b>1.6 Organização da dissertação</b> .....	<b>17</b>
<b>Referências</b> .....	<b>19</b>
<b>CAPÍTULO I – Artigo 01</b> .....	<b>21</b>
<b>AS DIFERENTES ABORDAGENS DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA A PARTIR DE UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA</b> .....	<b>21</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>22</b>
<b>2 APORTES TEÓRICOS</b> .....	<b>23</b>
<b>3 ASPECTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>30</b>
<b>4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS</b> .....	<b>32</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>46</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>48</b>
<b>CAPÍTULO II – Artigo 02</b> .....	<b>55</b>
<b>PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO</b> .....	<b>55</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>55</b>
<b>2 REVISÃO TEÓRICA</b> .....	<b>57</b>
<b>3 ASPECTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>61</b>
<b>4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS</b> .....	<b>62</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>81</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>82</b>
<b>CAPÍTULO III – Artigo 03</b> .....	<b>87</b>
<b>TAREFAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO</b> .....	<b>87</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>88</b>
<b>2 APORTES TEÓRICOS</b> .....	<b>89</b>
<b>3 ASPECTOS METODOLÓGICOS</b> .....	<b>95</b>
<b>4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS</b> .....	<b>96</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>108</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>110</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>113</b>
<b>5.1 Retomando o problema de pesquisa</b> .....	<b>113</b>
<b>5.2 Compreensão dos resultados</b> .....	<b>114</b>
<b>5.3 Implicações para pesquisas futuras</b> .....	<b>115</b>
<b>5.4 Implicações para a prática do professor</b> .....	<b>116</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Essa introdução está organizada em seis seções. Na seção 1.1 apresento um pouco da minha trajetória profissional/acadêmica e como aconteceu a aproximação com o objeto de pesquisa. Na seção 1.2 exponho o tema da pesquisa, a sua presença em situações do cotidiano, e como a temática é discutida em cada etapa desenvolvida na pesquisa, configurada em artigos. Os objetivos estão descritos na seção 1.3, em que os objetivos de cada artigo são desdobramento do objetivo geral. Na seção 1.4 apresento a relevância dessa pesquisa para mim, para professores da Educação Básica, para a sociedade e para a Educação Matemática. Na seção 1.5, descrevo os aspectos metodológicos que a nortearam. E na última seção, seção 1.6, explico sobre o formato textual da dissertação e a forma que ela está organizada.

### 1.1 Trajetória profissional/acadêmica e a aproximação com o objeto de pesquisa

Início descrevendo um pouco da minha trajetória profissional como professora da Educação Básica, atuando desde 2012, e como isso contribuiu para a escolha do tema sobre o ensino de probabilidade nessa pesquisa que apresento. Como docente na Educação Básica pude observar que o conteúdo de probabilidade sempre despertou dúvidas nos estudantes, sobretudo quando se trata de problemas em que os resultados possíveis não são igualmente prováveis, e o conhecimento da abordagem clássica da probabilidade não é suficiente para resolvê-los. Essas dificuldades se apresentam não apenas aos estudantes, mas também aos professores, que geralmente se apoiam a apenas uma das abordagens: clássica<sup>1</sup> ou frequentista<sup>2</sup>.

A boa relação com a Matemática sempre foi evidente durante toda a minha trajetória escolar. Assim que concluí o Ensino Médio em 2002, fui trabalhar no comércio da minha cidade, Irecê, Bahia, e depois de dois anos, me preparava para ingressar no Ensino Superior. Me graduei em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual da Bahia, no campus IX – Barreiras, Bahia. No desenvolvimento do curso, tive uma única disciplina abordando temas estatísticos, no quarto semestre do curso, e no final da disciplina um pouco das noções de probabilidade. Eu sentia que precisava de mais conhecimentos em estatística, então surgiu a oportunidade de me matricular numa especialização lato sensu em Estatística pelo Instituto Pró

---

<sup>1</sup> A probabilidade de um evento é calculada pela razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis.

<sup>2</sup> A probabilidade de um evento é calculada após um experimento, sendo realizado uma grande quantidade de vezes, como resultado da sua frequência relativa.

Saber na modalidade à distância, simultaneamente ao final da graduação. Mas, por motivo de força maior, tive que trancar o curso, e por fim, não o concluí.

Ao finalizar a graduação em 2011, fui convidada a lecionar em uma escola de Educação Básica da rede privada de ensino. Então minha aproximação com o ensino de probabilidade se iniciou nos anos finais do Ensino Fundamental, trabalhando conceitos iniciais como experimentos aleatórios, eventos possíveis, impossíveis, certos, espaço amostral. Eu seguia o que propunha o livro didático, por orientação da própria escola. No ano seguinte comecei a lecionar no Ensino Médio na rede pública estadual da Bahia, e percebi que os problemas de aprendizagem referentes ao campo probabilístico eram mais recorrentes.

Com o intuito de melhorar a minha prática docente e contribuir para um ensino público de qualidade, em 2018 iniciei o mestrado profissional no Programa de Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, oferecido pela Universidade Federal do Oeste da Bahia – UFOB, em Barreiras – BA. Finalizei todas as disciplinas, sendo, em sua maioria, voltadas para conteúdos específicos da Matemática e no final do programa, algumas disciplinas com foco na Educação Matemática.

Para a escrita deste trabalho de conclusão de curso, foi-me oferecida a oportunidade de pesquisar sobre a temática de probabilidade. O passo inicial dessa pesquisa foi uma revisão sistemática de literatura, a qual me propiciou uma compreensão de como se dá a discussão acerca do ensino e da aprendizagem da temática entre os pesquisadores da área de Educação Matemática. Durante as leituras, pude perceber que uma determinada abordagem se mostrava bastante recorrente nas discussões e que me despertou mais interesse. Se tratava das diferentes abordagens sobre o ensino de probabilidade, pois, ao planejar minhas aulas sobre tal conteúdo, sequer notava a presença de outras abordagens, se não a clássica ou a frequentista, e ainda sem dar tanta relevância aos aspectos que as compunham. Então, em acordo com o meu professor orientador, Dr. Joubert Ferreira, decidi que iria dar atenção a essa abordagem durante o processo de construção da minha pesquisa.

## **1.2 Apresentação do tema**

Em muitas situações do cotidiano nos deparamos com a necessidade de tomar decisões, porém, nem sempre temos disponíveis todas as variáveis necessárias para analisar a decisão a ser tomada. Em situações de incerteza, geralmente recorremos à nossa intuição, no entanto, prever ou interpretar situações relacionadas ao acaso pode não ser uma tarefa muito simples. Neste caso, fica evidente que a Matemática não se restringe exclusivamente ao determinismo, e, diante disso, faz-se necessário o conhecimento da noção de aleatoriedade de modo que o

sujeito envolvido no processo de aprendizagem deste conteúdo seja capaz de reconhecer a existência de eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis.

Em uma situação que precisamos avaliar o risco de ocorrência de um determinado resultado, estamos avaliando, no fundo, a probabilidade de um evento ocorrer. As ideias iniciais de probabilidade desenvolvidas a respeito de eventos aleatórios foram atribuídas aos jogos de azar, em que os jogadores questionavam as suas chances de vencer. Então o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) percebeu que alguns jogos envolviam estratégias e outros, sorte, e a partir dos jogos de dado ele começou a construir e sistematizar as noções de aleatoriedade, espaço amostral e evento, observando a sua relação com a teoria dos conjuntos. Mais tarde, já no século XX, o matemático russo Kolmogorov (1903-1987) consolidou o estudo sobre a teoria das probabilidades através de axiomas que fundamentavam a definição de probabilidade. E então, na segunda metade do século XX surgiu um movimento sobre a Educação Estatística que rompeu com a cultura determinística da Matemática, adotando o seu ensino na Educação Básica (SAMPAIO et al., 2019). O capítulo 1 trata com mais detalhes sobre esse marco histórico.

O ensino de probabilidade está previsto na Educação Básica, sendo explorada de forma articulada ao ensino de estatística, e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que o estudante desenvolva, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, habilidades acerca dos conhecimentos básicos para o estudo de probabilidade, como os conceitos que envolvem aleatoriedade, eventos e o espaço amostral. O desenvolvimento destas habilidades deve ser ampliado e aprofundado no Ensino Médio, permitindo ao estudante a capacidade de resolver e elaborar problemas que envolvam os conhecimentos sobre probabilidade, bem como melhorar sua maneira de raciocinar, sendo capaz de generalizar, abstrair e interpretar a realidade que o cerca.

Essa pesquisa, desenvolvida na configuração textual *multipaper*, compreende de três etapas. A primeira sendo uma análise desenvolvida a partir da revisão sistemática de literatura no capítulo I que resultou numa síntese com base na relação entre as categorias estabelecidas no desenvolvimento da revisão de literatura e as diferentes abordagens de probabilidade, sendo elas, a clássica, a frequentista, a axiomática, a geométrica e a subjetiva, tomando como referência os estudos de Coutinho (2013). No capítulo II, a pesquisa teve seu foco pautado na abordagem de probabilidade nos livros didáticos do Ensino Médio, em que seu resultado aponta que algumas abordagens são mais enfatizadas que outras, numa perspectiva que engloba as abordagens. E no capítulo III promoveu-se um estudo centrado em tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade e suas diferentes formas de serem articuladas de modo a promover a

aprendizagem deste conteúdo. Como resultado desse terceiro estudo, destaca-se que a implementação de tarefas de probabilidade quando bem planejadas e articuladas podem trazer bons resultados, e promover situações de aprendizagem. Além disso, auxilia os professores na mobilização de conceitos e técnicas de forma a garantir que o aluno desenvolva a sua capacidade de aprendizagem com autonomia.

Com relação ao ensino e à aprendizagem da probabilidade, vale destacar a importância de o professor mobilizar os conhecimentos dessa temática partindo das experiências informais que o estudante possui a respeito de chance ou sorte, para desenvolver uma base de ideias com o intuito de ampliar e formalizar conceitos. Nesse sentido, o professor deve reconhecer o seu papel como mediador do conhecimento, compreendendo estratégias que possam aproximar o conhecimento formal da probabilidade ao conhecimento da realidade do aluno. Diante disso, vemos as concepções e métodos de probabilidade bastante presentes no cotidiano das pessoas, e, nesse contexto, essa temática vem ganhando cada vez mais visibilidade no currículo escolar.

Portanto, esse trabalho propicia reflexões sobre o ensino de probabilidade, uma vez que compreende pressupostos teóricos que subsidiam as especificidades do ensino de probabilidade. Desse modo, a questão que norteia essa pesquisa é: como a literatura científica, publicada em periódicos em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), abordam o tema probabilidade?

### **1.3 Objetivos da pesquisa**

O objetivo geral dessa dissertação é investigar como a literatura científica publicada em periódicos em Educação Matemática, livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e tarefas matemáticas, abordam o tema probabilidade na Educação Básica. Para tanto, o desenvolvimento desse trabalho foi organizado em três etapas, cada uma descrita a partir de um artigo, os quais, seus objetivos são desdobramento do objetivo geral, como se verifica abaixo:

O primeiro artigo apresenta uma revisão sistemática de literatura com uma proposta de analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica, sendo o primeiro objetivo específico desse trabalho.

No segundo artigo, o objetivo é analisar como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020, como sendo o segundo objetivo específico da pesquisa em geral.

E a respeito do terceiro artigo, o seu objetivo é analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem aos estudantes do Ensino Médio, o qual se trata do terceiro objetivo específico da pesquisa.

#### 1.4 Relevância da pesquisa

Estar em sala de aula, muitas vezes me levou a fazer reflexões sobre a minha prática docente, tanto com relação ao conhecimento do conteúdo a ser lecionado aos alunos, quanto às possibilidades metodológicas que poderiam ser trabalhadas a fim de alcançar uma aprendizagem significativa. Diante dessas reflexões, o ensino e a aprendizagem de probabilidade tem apresentado desafios para os professores que lecionam o conteúdo e, conseqüentemente, aos estudantes.

Essa pesquisa me fez reconhecer, como professora que atua na Educação Básica, a importância de compreender pressupostos teóricos que subsidiam estratégias de ensino de probabilidade. Também me oportunizou perceber como as diferentes abordagens desta temática influenciam diretamente nos objetivos de ensino, bem como a importância da mobilização de conhecimentos matemáticos associados aos conhecimentos pedagógicos do conteúdo, num contexto de tarefas matemáticas que envolvem probabilidade.

A BNCC propõe que todos os estudantes desenvolvam habilidades que lhe permitam descrever, explicar e prever fenômenos, de modo que utilizem conceitos e raciocínios para fazer julgamentos bem fundamentados e tomar decisões adequadas. Nesse contexto, essa pesquisa contribui significativamente, de forma geral, para que professores que atuam na Educação Básica desenvolvam um olhar sobre os diferentes modos de ensinar probabilidade, valorizando, não apenas o conhecimento do conteúdo, mas também os aspectos pedagógicos que envolvem essa temática.

É importante que a sociedade reconheça a vasta aplicabilidade da probabilidade, seja em situações do cotidiano, nas ciências ou na tecnologia. E nesse sentido, essa pesquisa tem a sua contribuição para a sociedade como um todo, ao propor que a aprendizagem deva ir além do processo de repetição sistemática da teoria, uma vez que, geralmente a abordagem clássica da probabilidade é a mais vista nos livros didáticos e, conseqüentemente, nas aulas de probabilidade. Esse conhecimento é aplicado aos modelos de problemas que envolvem situações de equiprobabilidade. Sendo assim, a pesquisa em questão promove reflexões acerca do ensino e da aprendizagem de probabilidade a fim de contribuir para um ensino de qualidade nesse sentido, trazendo discussões de teorias e proposta que envolvem essa temática.

Diante desse cenário, essa temática vem sendo discutida de forma recorrente em pesquisas da Educação Matemática e isso denota uma preocupação com relação ao ensino e a aprendizagem do conteúdo de probabilidade para o desenvolvimento do pensamento probabilístico. E com vistas a essa perspectiva, esse estudo contribui para a ampliação e fortalecimento no campo das pesquisas sob aspectos da Educação Matemática para a temática de probabilidade na Educação Básica.

### 1.5 Aspectos metodológicos

A presente pesquisa considera as diferentes interpretações dos textos analisados para uma compreensão da temática discutida nesse estudo. Essa pesquisa descreve os dados de forma minuciosa, bem como todo o processo, desde a escolha da metodologia até os resultados, se caracterizando como uma abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2010).

Foram desenvolvidos três artigos, na mesma abordagem metodológica, dos quais, o primeiro artigo trata-se de uma pesquisa bibliográfica (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), utilizando-se o método da revisão sistemática de literatura com o interesse de selecionar estudos relacionados às implicações acerca da prática do professor que ensina probabilidade na Educação Básica. Para responder a uma questão de investigação, a revisão sistemática de literatura se apoia na pesquisa bibliográfica rigorosa e é realizada através de critérios de inclusão e exclusão, estratégias e técnicas bem planejadas (DONATO; DONATO, 2019).

Para a produção dos dados do segundo artigo, foi realizada uma investigação sobre o tema probabilidade abordado em três livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020, sendo dois do segundo ano e um do terceiro ano. A fim de alcançar o objetivo proposto, a pesquisa do tipo documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), por analisar livros didáticos, tem seu apoio teórico em literaturas que discutem o tema em questão em livros didáticos e problematizam o ensino e a aprendizagem de probabilidade em suas diferentes abordagens.

E o terceiro estudo se refere a uma análise de três tarefas, sendo duas extraídas do livro didático e um jogo de elaboração própria, pensadas para serem implementadas em sala de aula para o estudo de probabilidade no Ensino Médio. Estas tarefas foram analisadas a partir de marcadores de tarefas descritos por Barbosa (2013) e ampliado por Costa, Oliveira e Silva (2017), levando em consideração as seguintes especificidades: a) contexto de referência, b) uso da linguagem, c) estrutura, d) objetivo de ensino, e) relação pedagógica e f) foco de ensino. Também foram consideradas nesta análise os aspectos relacionados ao *Mathematics Teacher's*

*Specialized Knowledge*<sup>3</sup> (MTSK) ao conhecimento especializado do professor que ensina Matemática, referentes ao domínio do conhecimento matemático e o domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo (CARRILO et al., 2013; MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014) para o ensino de probabilidade.

## 1.6 Organização da dissertação

A estrutura textual desta dissertação apresenta um formato *multipaper*, no qual, a divulgação dos resultados da pesquisa tem a intenção de incentivar uma reflexão mais profunda acerca do objeto. O formato *multipaper* propõe um estudo mais amplo e tem no referencial teórico o caráter norteador no processo de análise. Nota-se que cada artigo desenvolvido nessa dissertação tem características específicas, desde os objetivos, a metodologia, até os resultados de cada pesquisa, o que denota a sua possibilidade de ser submetido e aprovado individualmente a um periódico acadêmico (FRANK; 2013).

Quando estamos diante de uma questão problematizadora, é possível que o interesse pela pesquisa nasça e se desenvolva em, basicamente três fases: planejamento, execução e divulgação, e, no contexto da educação, geralmente a divulgação está relacionada com a atualização da atividade de ensino e aprendizagem, a formação do professor, bem como a ampliação do conhecimento acerca dessa realidade (COSTA, 2014).

O formato dessa dissertação rompe com as características da pesquisa educacional tradicional, na qual a estrutura é feita de introdução, revisão de literatura, metodologia, apresentação dos dados e conclusão (DUKE; BECK, 1999) e passa a ser integrada por um formato insubordinado (BARBOSA, 2015) composto de artigos científicos publicáveis ou não, conhecidos como *multipaper* (MUTTI; KLÜBER, 2018). Esse formato ajuda o estudante de pós-graduação a perceber a pesquisa como processos que podem ser avaliados e realimentados através de publicações, e não apenas como produtos (COSTA, 2014).

Essa pesquisa foi desenvolvida numa estrutura de formato *multipaper*, que se caracteriza como uma coletânea de artigos e se configura da seguinte forma: a introdução, os capítulos formados pelos artigos e as considerações finais.

Na Introdução dessa dissertação, apresento minha trajetória profissional e acadêmica, bem como a aproximação com o objeto dessa pesquisa. Além da apresentação do tema, seguem os objetivos, a relevância da pesquisa, os aspectos que delineiam a metodologia e como a dissertação está organizada estruturalmente.

---

<sup>3</sup> Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

O capítulo I traz o primeiro artigo que tem o objetivo de analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática discute o ensino e aprendizagem de probabilidade na Educação Básica. Para esse estudo foi realizada pesquisa bibliográfica utilizando-se o método da revisão sistemática de literatura, dentro de uma abordagem qualitativa. Foram selecionados 29 artigos que versam sobre as diferentes abordagens para o ensino de probabilidade. O resultado desta análise possibilitou a construção de uma síntese sobre o ensino de probabilidade para a Educação Básica tomando como base a relação entre categorias estabelecidas e as diferentes abordagens da probabilidade.

O capítulo II apresenta uma análise de como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020 de caráter documental. O processo de escolha se deu por meio dos resultados recomendados no Guia Nacional do Livro Didático, na etapa do Ensino Médio, em 2018. Os resultados permitiram comparar as abordagens didático-pedagógicas presentes em cada livro e verificar se elas atendem às competências e habilidades propostas pelos documentos oficiais que orientam a Educação Básica no Brasil. Entre os principais resultados, destaca-se a forma como foi explorada as diferentes abordagens que envolvem os conceitos de probabilidade.

O capítulo III, apresenta o terceiro artigo que tem o objetivo de analisar como as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem aos estudantes do Ensino Médio. As tarefas analisadas foram uma do tipo exercício, outra também do tipo exercício, no entanto, ela foi repensada num contexto de problema, e a última foi um jogo de elaboração própria a qual foi analisada sob aspecto exploratório-investigativo. Utilizou-se para a análise os marcadores de tarefas descritos por Barbosa (2013) e ampliados por Costa, Oliveira e Silva (2017), sendo considerados seis atributos: o contexto de referência, o uso da linguagem, a estrutura, o objetivo de ensino, a relação pedagógica e o foco de ensino. Diante dos aspectos relacionados ao conhecimento especializado do professor de Matemática que ensina probabilidade foi considerado o modelo teórico chamado *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), referentes ao domínio do conhecimento matemático e o domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo (CARRILO et al., 2013; MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014).

A partir dos resultados dessa pesquisa surgiu a ideia da elaboração de um manual como um produto educacional que apresenta uma proposta de contribuir com um material de apoio ao professor de Matemática da Educação Básica que ensina probabilidade. Esse material foi pensado num formato de manual para facilitar o seu acesso, uma vez que geralmente os

professores da Educação Básica tem uma alta carga horária de trabalho e devido a essa demanda, dispõem de pouco tempo para leituras e aprofundamento no planejamento de suas aulas, ficando muitas vezes limitados às aulas expositivas com base apenas no livro didático.

## Referências

- ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith(2002). O método nas ciências sociais. Em: ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWAMDSZADJEDER, Fernando. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, p. 147-178. Disponível em: [http://gephisnop.weebly.com/uploads/2/3/9/6/23969914/0\\_metodo\\_nas\\_ciencias\\_naturais\\_e\\_sociais\\_-\\_pesquisa\\_quantitativa\\_e\\_qualitativa.pdf](http://gephisnop.weebly.com/uploads/2/3/9/6/23969914/0_metodo_nas_ciencias_naturais_e_sociais_-_pesquisa_quantitativa_e_qualitativa.pdf). Acesso em: 24 maio 2020.
- BARBOSA, Jonei. Designing written tasks in the pedagogic recontextualising field: proposing a theoretical model. In: BERGER, M. (Ed.). Proceedings of the Seventh **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.19, n.3, pp.42-66. International Mathematics Education and Society Conference, Cape Town: MES 7, p. 213-223, jul. 2013. Disponível em: <http://mescommunity.info/mes7a.pdf>. Acesso em: 22 maio 2020.
- BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto – Portugal. Porto Editora, 2010. Disponível em: [https://www.academia.edu/6674293/Bogdan\\_Biklen\\_investigacao\\_qualitativa\\_em\\_educacao](https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao) Acesso em: 24 maio 2020
- CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, Maria de la Cinta. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In: UBUZ, Behiye; HASER, Çiğdem, et al. (Ed.). **VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)**. Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara, 2013. p. 2985-2994. Disponível em: [http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17\\_Climent.pdf](http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf). Acesso em: 22 maio 2020.
- COSTA, Wanderleya Nara Gonçalves. Dissertações e teses multipaper: uma breve revisão bibliográfica. **Anais do VIII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 8 n. 1, 2014. Disponível em: <https://desafioonline.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3086>. Acesso em 22 junho 2020.
- COSTA, Wedeson Oliveira; OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira de. A participação de professores na elaboração de tarefas matemáticas em um trabalho colaborativo. **Revemop**, [s.l.], v. 1, n. 1, p. 105, 10 jan. 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.33532/revemop.v1n1a6>. Acesso em: 25 maio 2020.
- DONATO, Helena; DONATO, Mariana. Stages for Undertaking a Systematic Review. **Acta Médica Portuguesa**, [S.l.], v. 32, n. 3, p. 227-235, mar. 2019. Disponível em:

<https://www.actamedicaportuguesa.com/revista/index.php/amp/article/view/11923> Acesso em: 22 maio 2020.

DUKE, Nell K.; BECK, Sarah W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.3102/0013189X028003031> . Acesso em 18 junho 2020.

FIorentini, Dario; LOrenzato, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas, SP: Associados, 2012.

FRANK, Alejandro G. Formatos alternativos de teses e dissertações (Blog Ciência Prática). 2013; Tema: Ciência prática. Disponível em: <https://cienciapratica.wordpress.com/2013/04/15/formatos-alterativos-de-teses-e-dissertacoes/>

MORIEL JÚNIOR, Jefferson Gomes; CARRILLO, José. Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. In Maria Tereza González, Myriam Codes, David Arnau y Tomás Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: **SEIEM**, 2014. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/6087/> Acesso em: 24 maio 2020.

**CAPÍTULO I – Artigo 01****AS DIFERENTES ABORDAGENS DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA  
A PARTIR DE UMA REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA  
DIFFERENT PROBABILITY APPROACHES IN BASIC EDUCATION FROM A  
SYSTEMATIC LITERATURE REVIEWLITERATURE****Resumo**

Este artigo apresenta uma pesquisa que tem o objetivo de analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica. Para esse estudo foi realizada pesquisa bibliográfica utilizando-se o método da revisão sistemática de literatura, dentro de uma abordagem qualitativa. Foram selecionados 29 artigos que versam sobre as diferentes abordagens para o ensino de probabilidade. Após a leitura dos artigos, emergiram seis categorias que resultaram numa síntese que possibilitou uma compreensão acerca dos modos de ensinar e aprender probabilidade. Foram elas: a) concepções, ideias e conhecimentos de estudantes sobre probabilidade, b) atividades “diferentes” para o ensino de probabilidade não implementadas, c) atividades “diferentes” para o ensino de probabilidade implementadas, d) uso de jogos para ensinar probabilidade, e) uso de tecnologias digitais para ensinar probabilidade e f) resolução de problemas como metodologia para o ensino de probabilidade. As atividades diferentes destacadas nas categorias b) e c) se referem à atividades que saem do contexto de aulas expositivas tradicionais. A categoria mais presente foi a que se refere as concepções, ideias e conhecimentos de estudantes sobre probabilidade. O conteúdo de probabilidade no currículo é justificado pela sua aplicação no cotidiano sendo esse conhecimento considerado como um importante instrumento para várias outras áreas das ciências, além de ter um relevante papel no desenvolvimento do pensamento crítico, bem como subsídio na tomada de decisões.

**Palavras-chave:** Probabilidade; abordagens; Educação Básica; revisão sistemática de literatura.

**Abstract**

This article presents a research that aims to analyze how the literature published in national journals on Mathematics Education discusses the teaching and learning of probability in Basic Education. For this study, bibliographic research was carried out using the method of systematic literature review, within a qualitative approach. 29 articles were selected that deal with the different approaches to teaching probability. After reading the articles, six categories emerged that resulted in a synthesis that enabled an understanding of the ways of teaching and learning probability. They were: a) students' conceptions, ideas and knowledge about probability, b) “different” activities for the teaching of probability not implemented, c) “different” activities for the teaching of probability implemented, d) use of games to teach probability, e) use of digital technologies to teach probability and f) problem solving as a methodology for teaching probability. The different activities highlighted in categories b) and c) refer to activities that leave the context of traditional expository classes. The most prevalent category was that of students' conceptions, ideas and knowledge about probability. The content of probability in the curriculum is justified by its application in daily life, and this knowledge is considered an important tool for several other areas of science, in addition to having a relevant role in the development of critical thinking, as well as support in decision making.

**Key words:** Probability; approaches; Basic Education; systematic literature review.

## 1 INTRODUÇÃO

Desafios relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem são recorrentes quando se trata do conceito de probabilidade. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) nortearam a elaboração de currículos dos últimos vinte anos e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é a referência obrigatória e mais recente para a elaboração dos currículos escolares para as instituições públicas e privadas, sendo aprovada em 2018. Os dois documentos apresentam, em seu conjunto, o tema probabilidade e estatística com diferenças acentuadas ao longo de toda a Educação Básica, trazendo implicações diretas ao currículo das redes e da escola, impactando no fazer docente em sala de aula. Essas diferenças já eram esperadas, visto que os documentos foram elaborados em épocas e contextos diferentes.

Na Educação Básica os PCN, primeiro documento oficial a inserir a probabilidade na Educação Básica, sugere que a temática seja trabalhada desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo parte do bloco *Tratamento da Informação*, juntamente com conceitos estatísticos, trazendo as primeiras ideias a partir da exploração da probabilidade em situações-problema simples para identificar sucessos possíveis, seguros ou situações de “sorte”. O documento traz também a ideia de probabilidade relacionada às possíveis maneiras de combinar elementos e contabilizá-las por meio de estratégias (BRASIL, 1998). Para os anos finais do Ensino Fundamental, em relação ao estudo de Probabilidade, o bloco de *Tratamento da Informação* traz como um dos objetivos a construção do espaço amostral e a possibilidade de sucesso de um determinado evento a partir do uso de uma razão (BRASIL, 1998; VOTTO; SCHREIBER; PORCIÚNCULA, 2017; SAMÁ; SILVA, 2020).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) inserem o estudo de Probabilidade no eixo *Análise de Dados*, o qual compreende a importância deste conteúdo como meio de quantificar e prever resultados em situações aplicadas em diversas áreas e problemas que envolvem a ideia de probabilidade. Nesse documento, a área de Matemática e suas tecnologias vem com uma proposta de consolidar, ampliar e aprofundar as aprendizagens que envolvem as realizações de experimentos e observações de eventos, podendo estimular o grau de possibilidade acerca dos resultados (BRASIL, 2002).

Já a BNCC, homologada em 2018, propõe ao estudante, desde os anos iniciais, habilidades para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos, bem como reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar

implicações no cálculo de probabilidades (BRASIL, 2018). Sobre os avanços que a BNCC oferece em relação aos PCN para o desenvolvimento da probabilidade, tem-se o reforço à discussão sobre a implementação de projetos para favorecer a Educação Estatística, e, conseqüentemente a probabilidade, além de ter ampliado o espaço da estatística e probabilidade na Educação Básica, enfatizando a tomada de decisão por parte dos estudantes, além de redistribuir melhor os conteúdos. Enquanto os PCN apresentavam os elementos norteadores, cabendo aos sistemas educacionais acatá-los ou não, o caráter normativo da BNCC propõe a aos estudantes o estudo de probabilidade e estatística desde a Educação Infantil até o final do Ensino Médio (GIORDANO; ARAÚJO; COUTINHO, 2019).

Tanto a BNCC quanto os PCN orientam que os professores realizem pesquisas envolvendo temas sociais, do cotidiano e interdisciplinares para o ensino de probabilidade, bem como a estatística, a fim de contribuir para a formação de cidadãos críticos, reflexivos e participativos (SANTOS; SANTOS JÚNIOR; VELASQUE, 2018).

Muitas são as pesquisas que abordam os processos de ensino e aprendizagem da probabilidade e sobre a formação de professores acerca do tema (LOPES; COUTINHO; ALMOULOU, 2010; COUTINHO, 2013; MONTEIRO; MARTINS, 2016; BARBA; TEIXEIRA, 2018; BORBA; SOUZA; CARVALHO, 2018; HERZOG et al., 2019). Para que o ensino de probabilidade e estatística seja significativo, é necessário buscar estratégias ou procedimentos metodológicos diferentes para a abordagem do conteúdo, com ênfase dos diversos enfoques, e assim contribuir para a ampliação dos conhecimentos de maneira a tornar os estudantes protagonistas do seu próprio conhecimento.

Portanto, neste artigo, se propõe a analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática, discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica. Na próxima seção, apresentamos alguns marcos no desenvolvimento histórico do tema, além de apresentar as abordagens de probabilidade. Em seguida, apresentaremos os aportes metodológicos, a apresentação e discussão dos dados e, por fim, as considerações finais.

## 2 APORTES TEÓRICOS

Sampaio et al. (2019) faz um apanhado histórico mostrando que os primeiros indícios de estudos sobre cálculo de probabilidades estão relacionados aos jogos de azar na Idade Média envolvendo apostas às quais os jogadores estudavam as possibilidades para traçar as melhores

estratégias. Segundo o autor, foi atribuído a Girolamo Cardano (1501-1576) os primeiros argumentos teóricos sobre o conceito de probabilidade envolvendo o jogo de dados e trazendo as primeiras ideias de espaço amostral e evento.

No século XVII, os matemáticos Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) conseguiram solucionar um problema de divisão de apostas, observando um jogador compulsivo, e assim surge um estudo de modelos matemáticos sobre os jogos de azar (jogo de dados, jogos de carta, loteria, roleta), propagando até os dias atuais. Com o passar dos anos, essa técnica foi aprimorada pelo matemático Pierre-Simon Laplace (1749-1827), o qual fez a primeira tentativa de deduzir uma regra para a definição clássica de probabilidade e desenvolveu sua teoria em princípios consistentes e bem delineados. No entanto, somente no século XX, o matemático russo Andrei Kolmogorov (1903-1987) propôs três axiomas para uma definição mais consistente sobre a teoria das probabilidades. No primeiro, a probabilidade de um evento é um número real não negativo; no segundo, a probabilidade de um evento elementar em todo espaço amostral ocorrer é igual a um; e o terceiro diz respeito a eventos mutuamente exclusivos (COUTINHO, 2013; SAMPAIO et al., 2019).

Surgiu, a partir de 1970, um movimento que teve como base a Educação Estatística, o qual reconheceu a importância do desenvolvimento do conhecimento de probabilidade para se romper com a cultura determinística nas aulas de Matemática. Como consequência, foi adotado em muitos países o seu ensino na Educação Básica. Esse movimento também teve seus reflexos no Brasil e no final da década de 1990, os conceitos básicos de Estatística, antes quase ignorados na Educação Básica passaram a ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica e mais tarde, foram inseridos na estrutura curricular da disciplina de Matemática, com a publicação dos PCN (LOPES; COUTINHO; ALMOULOU, 2010).

Reconhecendo o contexto histórico como uma das fontes precursoras do conhecimento, faz-se necessário aliar-se aos conhecimentos atuais e suas propostas no desenvolvimento desse conteúdo em sala de aula. A BNCC, em relação às noções de probabilidade, traz a importância da compreensão de que, nem todos os fenômenos são determinísticos, assim desenvolve-se a noção de aleatoriedade, de modo que os alunos compreendam que há diferentes tipos de eventos: os certos, os prováveis e os impossíveis. Esse documento também propõe atividades em que os alunos façam experimentos aleatórios e confrontem seus resultados com a probabilidade teórica fazendo repetições de um experimento (probabilidade frequentista) e discutindo a estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrência. E assim, desenvolver no aluno a capacidade de fazer análise de probabilidade de eventos aleatórios, como os eventos dependentes e independentes (BRASIL, 2018).

Esse conceito de probabilidade no Brasil, na década de 1960, foi associado ao da teoria dos conjuntos com a intenção de facilitar o raciocínio. Nos dias de hoje existe uma variedade de aplicações e conseqüentemente uma absoluta necessidade de compreender como utilizar esses conhecimentos na vida diária (COUTINHO, 2013), pois o conceito de probabilidade pode ser abordado sob diferentes abordagens: (a) clássica, (b) frequentista, (c) subjetiva, (d) geométrica e a (e) formal (axiomática).

(a) abordagem clássica: também conhecida como laplaciana, teórica ou *a priori*, a probabilidade de ocorrer um evento com determinada característica é dada pelo quociente entre o número de eventos favoráveis e o número de eventos possíveis. Em outras palavras, a probabilidade de determinada situação é a razão do número de ocorrências favoráveis à situação para o número total de resultados. Essa foi a primeira definição do conceito de probabilidade conhecida como Lei de Laplace (COUTINHO, 2013; BATANERO et al., 2016). De maneira mais formal, podemos definir a probabilidade de um evento A ocorrer:

Seja  $\Omega$  um espaço amostral finito uniforme e seja A um evento qualquer desse espaço. A probabilidade de A, denotada por  $P(A)$ , é dada por

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

onde  $\#(\Omega)$  é o número de resultados possíveis e  $\#(A)$  é o número de resultados favoráveis à ocorrência do evento (A). É claro que  $0 \leq P(A) \leq 1$ . (PINHEIRO et al., 2009, p. 72)

É interessante que o aluno da Educação Básica vivencie não apenas a abordagem clássica (ou laplaciana) da probabilidade, em que essa é calculada *a priori* e se restringe a espaços amostrais equiprováveis, desconsiderando os casos em que os espaços amostrais não são igualmente prováveis. É preciso que o estudante faça uma articulação da abordagem clássica, com a frequentista por meio da intervenção do professor (COUTINHO, 2013).

(b) abordagem frequentista ou frequencial: na visão frequentista, também conhecida como probabilidade *a posteriori* devido à probabilidade ser calculada após um experimento, é realizado uma grande quantidade de vezes, como resultado da sua frequência relativa, para daí se fazer uma estimativa, não obtendo um valor exato, porém, um valor aproximado. A principal característica é que a probabilidade de um acontecimento emerge do processo de experimentação a partir de fenômenos aleatórios. Eles explicam que quanto maior o número de experimentos, maior a proximidade entre a probabilidade *a priori* e *a posteriori* (COUTINHO, 2013; NACARATO; GRANDO, 2013; BATANERO et al., 2016).

Trata-se de uma previsão a partir da regularidade observada em ensaios repetidos de fenômenos aleatórios, baseados em fatos empíricos.

Suponha que o experimento foi repetido  $n$  vezes, sempre sob as mesmas condições, e que o evento  $A$  ocorreu  $m$  vezes entre essas  $n$  realizações do experimento. Então a fração  $m/n$  é uma boa aproximação para a probabilidade de  $A$ , se o número  $n$  de repetições for bastante grande.

$$P(A) \cong \frac{m}{n}$$

(PINHEIRO et al., 2009, p. 73).

Nesse sentido, o conceito de probabilidade remete a uma ideia de valor aproximado, referente a uma estimativa. E quanto mais repetições de um experimento, maior é o grau de confiabilidade do resultado da probabilidade e diante disso a probabilidade frequentista é amparada pela lei dos grandes números (CAVALCANTE; ANDRADE; REGNIER, 2016).

(c) abordagem subjetivista: trata-se de probabilidades com grau de crença baseada no julgamento pessoal e informações sobre experiências relacionadas a um determinado resultado. Na perspectiva da probabilidade subjetivista é levado em consideração a experiência da pessoa no contexto a que se propõe. As avaliações pessoais sobre situações aleatórias são inerentes à mente do sujeito, onde coerência e consistência geram a probabilidade em questão, e o indivíduo segue regras básicas ao confiar em determinado acontecimento (NACARATO; GRANDO, 2013).

Nesta visão, o que é aleatório para uma pessoa pode não ser para outra. A aleatoriedade não é mais uma propriedade objetiva e nem está relacionada a uma magnitude, como o comprimento ou peso, mas com o grau de incerteza. A possibilidade de um evento está sempre relacionada com um sistema de conhecimento e não é necessariamente a mesma para todas as pessoas. Nesse caso, a repetição de uma mesma situação não é mais necessária para dar sentido à probabilidade, e assim, pode variar com a observação (BATANERO et al., 2016).

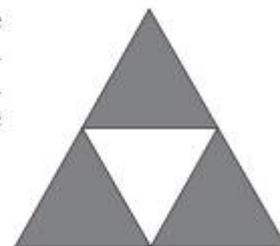
(d) abordagem geométrica: trata-se da probabilidade na qual o espaço amostral compõe conjuntos contínuos, como medidas de grandezas geométricas: comprimento, área e volume. Com a probabilidade geométrica os alunos devem ter conhecimentos prévios de geometria para fazer uma intervenção entre o conhecimento teórico e o prático para uma aprendizagem mais efetiva (COUTINHO, 2013). O conceito de probabilidade geométrica é pouco apresentado nos livros didáticos do Ensino Médio, no entanto, vale ressaltar que pode ser uma ótima sugestão para se trabalhar a noção de probabilidade contínua, como problemas que envolvem pontos sobre um segmento de reta, figuras planas e até mesmo sólidos geométricos (LOPES; SALVADOR; BALIEIRO, 2013).

Nesta concepção também é possível explorar as visões frequentista e clássica, gerando mais significado ao momento de aprendizagem, onde são apresentadas sequências didáticas as quais são exploradas essas três visões. Coutinho (2013) sugere algumas atividades que permitem a aplicação da visão geométrica como o uso do geoplano, onde os estudantes podem delimitar uma determinada área e verificar a probabilidade de uma bolinha cair dentro ou fora do polígono delimitado no geoplano, por meio da visão frequentista ou clássica. A autora ainda ressalta que os alunos terão a oportunidade de utilizar os conhecimentos geométricos aprendidos em séries anteriores e assim rever e utilizar o que já aprenderam.

Uma sugestão interessante para o estudo da probabilidade geométrica é o uso de fractais, como, por exemplo, o triângulo de Sierpinski (1882-1969), também conhecido como Junta de Sierpinski (LOPES; SALVADOR; BALIEIRO, 2013).

Figura 1 – Problema envolvendo probabilidade geométrica

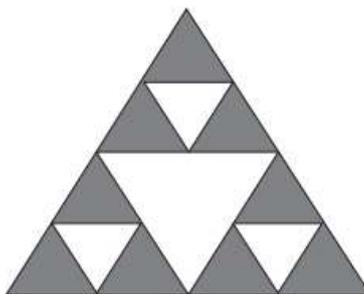
*Problema 1.* Considere um triângulo equilátero. Determine os pontos médios de cada um de seus lados. Construa um novo triângulo equilátero unindo esses pontos. Esse novo triângulo central, interno ao triângulo original é chamado de buraco. Escolhendo-se ao acaso um ponto no triângulo equilátero original qual a chance desse ponto “cair” no buraco? Justificar sua resposta.



Fonte: Lopes, Salvador e Balieiro, 2013.

Para resolver uma questão desse tipo, além do conhecimento da probabilidade, há a necessidade de conhecimentos prévios, como o cálculo de área (Grandezas e medidas) de triângulo equilátero e ponto médio (Geometria). O uso da régua e compasso pode auxiliar na determinação de ponto médio. Uma outra alternativa para continuar explorando o conceito é continuar decompondo a figura em mais triângulos equiláteros, como na figura abaixo sugerida por Lopes, Salvador e Balieiro (2013).

Figura 2 – Triângulo de Sierpinski



Fonte: Lopes, Salvador e Balieiro, 2013

Ao subdecompor a figura em mais triângulos, obtém-se o tapete de Sierpinski e essa probabilidade vai aumentando, e os triângulos vão surgindo cada vez menores. Assim, o triângulo de Sierpinski é definido como o limite  $S$  da sequência de conjuntos de uma quantidade  $k$  de triângulos, quando  $k \rightarrow \infty$ .

(e) abordagem axiomática ou formal: o desenvolvimento da formalização da probabilidade se deu a partir dos estudos dos axiomas de Andrei Kolmogorov (1903-1987) por meio da relação com a teoria dos conjuntos. Na probabilidade axiomática ou formal, tem-se uma estrutura com base em axiomas com o objetivo de calcular com precisão, usando as leis matemáticas e são aplicadas geralmente em situações em que os eventos não são equiprováveis. Nesse sentido, a probabilidade é vista como um objeto matemático que apresenta modelos que podem ser construídos para descrever, simplificar e interpretar a realidade aleatória (NACARATO; GRANDO, 2013; BATANERO et al., 2016).

Propriedades axiomáticas das probabilidades:

- Para cada evento  $A$ , corresponde uma propriedade  $P(A)$ , onde  $0 \leq P(A) \leq 1$
- Propriedade da união de dois conjuntos disjuntos:  
Se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .
- Propriedade da união de dois conjuntos quaisquer:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
- $P(\Omega) = 1$ . A probabilidade de ocorrência de um evento certo, representado pelo próprio espaço amostral  $\Omega$ , é igual a 1.
- $P(\emptyset) = 0$ . A probabilidade de ocorrência de um evento impossível, representado pelo conjunto vazio, é igual a 0.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$ . A probabilidade de  $A$  não ocorrer é igual a  $1 - P(A)$ . Observe que  $A^c$  representa o evento complementar de  $A$ , isto é, o conjunto de elementos do espaço amostral  $\Omega$  que não estão em  $A$ . (PINHEIRO et al., 2009, pp. 74-75).

A respeito da visão axiomática, a teoria das probabilidades é compreendida pelos axiomas de Kolmogorov, os quais permitiram o fortalecimento do conceito clássico, que outrora não tinha clareza epistemológica, impedindo o avanço desse conhecimento (CAVALCANTE; ANDRADE; REGNIER, 2016).

Batanero et al. (2016) e Amâncio, Viana e Rocha (2013) sinalizam que os significados da probabilidade são inerentes aos seus conceitos e por isso não deve estar limitado apenas a uma abordagem, mas devem ser trabalhados os demais conceitos considerando cada nível de ensino. Isso é importante, pois muitas vezes o estudante chega ao Ensino Médio, e a probabilidade é apresentada apenas na definição clássica. Os alunos devem estar familiarizados com os diferentes conceitos, gerando estimativas de probabilidade de eventos e saibam comunicar com outras pessoas, e, nesse sentido tornam-se úteis as visões de probabilidade clássica, frequentista e subjetiva (GAL, 2005).

Nacarato e Grando (2013) fazem um estudo das diferentes abordagens probabilísticas por meio de tarefas relacionadas à estocástica<sup>4</sup> aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental. Em relação ao conceito clássico, eles mostram que jogos de azar baseados em lançamento de moedas, dados, ou sorteio de bolas em urnas, tratam-se de fenômenos em que as variáveis são discretas e supõe-se que o espaço amostral é um conjunto de sucessos elementares que garante a equiprobabilidade<sup>5</sup>. É evidenciado que existem ideias equivocadas sobre os jogos de azar, em relação à simetria dos resultados, levando o sujeito a crer que alguém que aposta em seis números consecutivos na megasena, por exemplo, tem chance menor de ser um ganhador do que aquele que joga seis números não consecutivos.

Por isso, a probabilidade é vista na Estatística como um ideal da proporção de vezes que um resultado ocorrerá nas repetições de uma experiência gerando um modelo probabilístico que prevê a chance de um possível resultado sem que seja necessário repetir a experiência. Para isso, é fundamental conhecer o campo de aplicação e garantir modelos adequados à realidade (COUTINHO, 2013). Esses modelos que a autora se refere podem ser verificados ao considerar o conceito frequentista da probabilidade, o qual os experimentos, quando repetidos várias vezes, tendem a apresentar resultados previsíveis.

Em seus estudos sobre probabilidade, Lopes, Porciúncula e Samá (2019) a definem como a parte da Matemática que estuda os fenômenos aleatórios, sendo uma maneira de medir a incerteza. Por estar presente em situações do cotidiano, seu estudo favorece o contato com a incerteza, leva a reflexões necessárias e permite a aplicação de conhecimentos matemáticos em situações ao longo da vida dos estudantes. A partir daí, surge o conceito de estocástica como o estudo de padrões que têm origem em processos não determinísticos, ou seja, originam-se em eventos aleatórios, gerando o raciocínio probabilístico, o qual elas afirmam que se refere ao modo como o sujeito pensa sobre possibilidades (percepção da chance).

Em diversas situações que envolvem fenômenos probabilísticos<sup>6</sup> faz-se necessários os conhecimentos da Estatística no momento em que os dados obtidos por experimentos aleatórios são analisados, representados e interpretados. Nesse sentido, os conhecimentos de probabilidade podem ser construídos de forma integrada aos conhecimentos da Estatística.

---

<sup>4</sup> Processo cujo resultado é determinado por variáveis aleatórias, segundo as leis da probabilidade.

<sup>5</sup> Possibilidade que tem a mesma chance de ocorrência em qualquer evento.

<sup>6</sup> São aqueles que não são determinísticos, ou seja, são caracterizados por eventos aleatórios.

### 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

A presente pesquisa teve o objetivo analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática, discute Matemática discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica. Para tal, dentro da abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2010), foi realizada uma pesquisa bibliográfica (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), por meio do método de revisão sistemática de literatura que seleciona estudos acerca de uma determinada temática, que neste caso é a probabilidade. A revisão sistemática de literatura permite responder a uma questão de investigação bem definida, através de critérios de inclusão e exclusão, estratégias e técnicas bem planejadas, tendo como base fundamental a pesquisa bibliográfica rigorosa (DONATO; DONATO, 2019).

A revisão sistemática de literatura, segundo Donato e Donato (2019), é uma investigação científica reprodutível, imparcial e abrangente, com métodos pré-definidos para identificar documentos relevantes para extrair dados e sintetizar os resultados. Essa revisão sistemática de literatura busca identificar diferentes olhares acerca do ensino de probabilidade com um caráter descritivo que atende as diversas formas de abordagens da probabilidade e busca desvelar o que as pesquisas mais recentes apresentam. Diante disso, foi considerado um recorte temporal de 10 anos, com artigos publicados de 2010 a 2019.

Mediante as observações dos documentos orientadores curriculares, foram realizados os estudos desenvolvidos por pesquisadores da Educação Matemática acerca do ensino e da aprendizagem de probabilidade, levando em conta que este trabalho versa sobre as abordagens de probabilidade associadas ao currículo de Matemática da Educação Básica, com impacto em sala de aula, de acordo com a proposta do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Para a produção dos dados, foi realizada uma busca em periódicos em Educação Matemática, com estrato variando de A1 a B2 no *qualis* (divulgado em julho de 2019) de avaliação da Capes: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPPEM), Educação Matemática Pesquisa (EMP), Zetetiké, Boletim online de Educação Matemática (BoEM), Educação Matemática em Revista – BR (EMR-BR), Educação Matemática em Revista – RS (EMR-RS), Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana (EM-TEIA), Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEEM), Perspectivas da Educação Matemática (PEM), Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT), Revista de Educação Matemática

(REMAT), Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática (RIDEMA) e Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM).

Foram utilizadas as seguintes expressões durante a busca de artigos: probabilidade, ensino de probabilidade, estocástica. Encontrou-se 191 artigos, após a identificação a partir dos títulos e resumos e verificou-se quais artigos atendiam ao tema. Como critério de exclusão aplicados aos resultados da busca dos artigos de periódicos foram considerados: (i) 1ª exclusão: pesquisas que não se enquadravam na temática de Educação Estatística com foco em Probabilidade; (ii) 2ª exclusão: pesquisas que não abordavam a experiência do professor em sala de aula da Educação Básica, considerando que o tema está relacionado com o ensino de probabilidade na Educação Básica; (iii) 3ª exclusão: pesquisas que não estavam no recorte temporal de 10 anos, entre 2010 e 2019. Desse modo, foi constituído o corpus de análise, sendo selecionados 29 artigos que abordam o tema de probabilidade dentro da proposta da pesquisa.

O quadro abaixo apresenta os periódicos e os seus respectivos artigos que tratam da temática de Probabilidade:

Quadro 1 – Relação dos artigos selecionados por periódico

Periódicos	Autores
BOLEMA	Nagamine (2011); Lopes e Rezende (2010); Souza e Lopes (2011); Santos e Grandó (2011);
BoEM	Barba e Teixeira (2018);
EMR-BR	Almeida e Pereira (2016); Oliveira e Cazorla (2008); Almeida, Fernandes e Megid (2017); Silva Júnior e Costa (2018);
EMR-RS	Lima e Borba (2019b); Santos (2013);
EM - TEIA	Nóbrega e Spinillo (2016); Batista e Borba (2016); Santos e Santos (2016); Herzog, et al. (2019);
EMP	Deodato e David (2015); Coutinho (2011); Marocci e Nacarato (2013); Neres e Correia (2018); Correia e Fernandes (2014a); Oliveira e Cordani (2017); Lima e Borba (2019a); Salcedo e Ramirez (2016)
JIEEM	Vita, Magina e Cazorla (2015);
REVEMAT	Souza e Souza (2019);
Zetetiké	Correia e Fernandes (2014b); Lopes, Teodoro e Rezende (2019);
RPEM	Vita e Kataoka (2016); Lima e Borba (2018).

Fonte: Elaboração própria

Os periódicos REMAT, RIDEMA e PEM não possuem artigos que atendem aos critérios. O Boletim do GEPED, no momento da busca, apresentava problema em sua plataforma; ao digitar o termo e solicitar busca, era redirecionada para a página inicial.

Os artigos que compunham o *corpus* foram analisados a fim de averiguar e interpretar os trabalhos disponíveis que atendessem à temática, em caráter da revisão sistemática de

literatura que exige uma pesquisa minuciosa, objetiva e reprodutível, buscando apresentar implicações à prática do professor que ensina probabilidade na Educação Básica.

#### 4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

A partir dos artigos selecionados, questiona-se: como as abordagens de probabilidade devem ser trabalhadas pelos professores da Educação Básica? Esse questionamento pretende, ao ser levado em consideração na análise, promover reflexões acerca das potencialidades para a aprendizagem de alunos. Para tal, abaixo, apresenta-se a síntese extraída possibilitando uma compreensão acerca dos modos de ensinar e de aprender probabilidade a partir de seis categorias emergidas após a leitura dos artigos. São elas: a) concepções, ideias e conhecimentos de estudantes sobre probabilidade, b) atividades “diferentes” para o ensino de probabilidade não implementadas, c) atividades “diferentes” para o ensino de probabilidade implementadas, d) uso de jogos para ensinar probabilidade, e) uso de tecnologias digitais para ensinar probabilidade e f) resolução de problemas como metodologia para o ensino de probabilidade. Observa-se que nas categorias b) e c) surge a expressão ‘atividades “diferentes”’. Elas se tratam de atividades que são propostas em contextos diferentes das aulas expositivas.

Dentro de cada categoria analisada, foi observada a presença da discussão acerca das abordagens utilizadas para o ensino e aprendizagem de probabilidade, a saber, probabilidade frequentista, clássica ou laplaciana, axiomática, geométrica e subjetiva.

O quadro abaixo apresenta o modo como as categorias foram organizadas para a discussão e análise.

Quadro 2 – Relação dos artigos classificados por categoria

Revista	Autor do artigo	Categoria
RPEM	Lima e Borba (2018)	A
EMP	Correia e Fernandes. (2014a)	A
EMP	Oliveira e Cordani (2017)	A
EMP	Lima e Borba (2019a)	A
EMP	Salcedo e Ramirez (2016)	A
EMR-RS	Lima e Borba (2019b)	A
EM-TEIA	Nóbrega e Spinillo (2016)	A
ZETETIKÉ	Correia e Fernandes (2014b)	A
BOLEMA	Nagamine (2011)	B
BOLEMA	Lopes e Rezende (2010)	B
EMR-BR	Almeida e Pereira (2016)	B

EMR-RS	Santos (2013)	B
EMR-BR	Almeida, Fernandes e Megid (2017)	C
EMR-BR	Silva Junior e Costa (2018)	C
JIEM	Vita, Magina e Cazorla, (2015)	C
RPEM	Vita e Kataoka (2016)	C
BOLEMA	Santos e Grandó (2011)	D
EMP	Deodato e David (2015)	D
EMR-BR	Oliveira e Cazorla (2008)	D
EM-TEIA	Herzog et al. (2019)	D
EM-TEIA	Batista e Borba (2016)	D
EM-TEIA	Santos e Santos (2016)	D
BOLEMA	Souza e Lopes (2011)	E
EMP	Coutinho (2011)	E
REVEMAT	Souza e Souza (2019)	E
BoEM	Barba e Teixeira (2018)	F
EMP	Neres e Correa (2018)	F
EMP	Marocci e Nacarato (2013)	F
ZETETIKÉ	Lopes, Teodoro e Rezende (2011)	F

Fonte: Elaboração própria

Abaixo, segue a análise dos artigos discutidos em cada categoria, partindo da revisão sistemática de literatura, após a seleção e leitura.

#### A – Concepções, ideias e conhecimentos de estudantes sobre probabilidade

É comum em contexto de sala de aula, estudantes questionarem aos seus professores, principalmente os que lecionam Matemática, sobre a utilidade de determinado conteúdo para aplicação em sua vida. Quem nunca ouviu: “Onde vou usar isso na minha vida?”

O jovem e o adulto, ao longo da sua vida, desenvolvem conhecimentos e habilidades que influenciam o seu contato com a matemática escolar. Nesse sentido, os estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) buscam na Matemática a sua utilidade e de que forma esse estudo pode contribuir para a sua vida fora da escola. Lima e Borba (2018; 2019a; 2019b) apresentam uma proposta que investiga como estudantes da EJA dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental resolvem problemas combinatórios e como esses problemas contribuem para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico, com foco na abordagem clássica da probabilidade. Os autores destacam que as experiências cotidianas e sociais, dentro e fora da escola, representam uma bagagem de conhecimentos que servem de ponto de partida para o desenvolvimento e ampliação dos conhecimentos matemáticos.

Ainda na perspectiva do estudo de combinatória associado à probabilidade, Nóbrega e Spinillo (2016) também realizam uma pesquisa, porém os participantes da investigação são crianças da Educação Infantil ao 5º ano. As questões aplicadas aos participantes constavam de

noções básicas de probabilidade e combinatória, envolvendo noções de possibilidade, certeza e impossibilidade, num contexto de investigação em que a criança era solicitada apenas a emitir julgamentos qualitativos, o que caracteriza uma abordagem subjetiva da probabilidade. Esse estudo demonstra que a criança traz consigo aspectos relacionados ao objetivo da proposta de Nóbrega e Spinillo (2016) e vai ao encontro da orientação da BNCC, uma vez que o documento orientador sugere que o estudo das noções de probabilidade deve ser trabalhado desde os anos iniciais da Educação Básica.

Também numa abordagem subjetiva da probabilidade, Oliveira e Cordani (2017) realizam uma investigação com alunos de três turmas do 2º ano do Ensino Médio em que deveriam estimar as probabilidades com base em suas opiniões individuais. O conhecimento que o estudante possui em relação à probabilidade é valorizada e ampliada nesse estudo, pois a metodologia aplicada favoreceu esse resultado. Trata-se de uma pesquisa que se organizou em três momentos: a aplicação de um pré-teste, a ação didática e, para finalizar, a aplicação de um pós-teste.

Na ação didática, uma das atividades consistia em experimento com lançamento de moedas, saindo do foco subjetivo do pré-teste para uma abordagem frequentista na ação didática, e como consequência da ação didática, geraram resultados positivos no pós-teste, criando momento de reflexão acerca dos resultados. Oliveira e Cordani (2017) ainda justificam que, em diversas situações, estamos em conflito entre o conceito intuitivo, reforçado pelas ideias das crenças, e a estrutura lógica da probabilidade, quando precisamos fazer julgamentos.

Numa perspectiva a respeito de conhecimentos que os estudantes apresentam mediante o conceito clássico, Salcedo e Ramirez (2016) buscam observar como podem desenvolver tarefas relacionadas à algumas demandas cognitivas, como a memorização, os procedimentos com e sem conexão a serem utilizados. Os autores propuseram 40 atividades com o tema probabilidade para a educação primária que foram retiradas de seis livros e adaptadas de acordo com o referencial teórico estudado pelos autores.

Dois dos artigos que partem das concepções, ideias e conhecimentos dos estudantes acerca da probabilidade, apresentam os resultados de um estudo desenvolvido por Correia e Fernandes (2014a; 2014b) centrado nas ideias intuitivas dos estudantes do 9º ano de quatro escolas portuguesas. A diferença entre os dois artigos é que em um, considerou-se os aspectos da probabilidade condicional e o outro aborda independência de eventos. O contexto da pesquisa é o mesmo para os dois estudos. Referem-se a um questionário com aspectos da definição clássica e frequentista da probabilidade e foram exploradas questões envolvendo probabilidade condicional e independência de eventos.

Os resultados da pesquisa apontaram que os estudantes recorreram a diferentes estratégias para justificar suas respostas, pois os conceitos de probabilidade condicional e independência de eventos não foram trabalhados em sala de aula. E nessa perspectiva, os estudos encorajam a possibilidade da introdução desses conceitos no 9º ano do Ensino Fundamental, pois os estudantes demonstraram que possuem substrato intuitivo para o estudo tanto da probabilidade condicional, quanto da independência de eventos.

Na revisão desses artigos é notório o quanto o conhecimento acerca das noções de probabilidade contribuem para a abordagem e ampliação dos conceitos que envolvem o conteúdo. A forte presença da abordagem subjetiva da probabilidade esteve presente em quase todos os estudos relacionados à essa categoria. Isso se dá ao fato de que, quase todas as pessoas já tiveram algum contato com as noções intuitivas de probabilidade ou chance de algo acontecer, que são frutos das experiências, das observações de fatos que ocorreram na vida, ou algum momento em que o sujeito precisou fazer algum julgamento sobre a ocorrência de determinada situação, numa perspectiva da subjetividade dos conceitos que envolvem a probabilidade (COUTINHO, 2013).

A partir da noção subjetiva da probabilidade que os alunos já possuem de suas experiências de vida, associada aos experimentos aleatórios, como na visão frequentista, possibilita que sejam apresentados os conceitos de probabilidade em decorrência desses (LOPES; COUTINHO; ALMOULOU, 2010). O professor pode tomar como ponto de partida para a ampliação desses conhecimentos e apresentar as definições, como a clássica ou a axiomática, por exemplo, como proposto nas pesquisas analisadas sob essa perspectiva.

### **B – Atividades “diferentes” para o ensino de probabilidade não implementadas**

Para análise dos artigos com esse enfoque, precisamos refletir sobre, pelo menos, dois aspectos: as atividades “diferentes” e as atividades não implementadas. Esta categoria, ao tratar de atividades “diferentes”, traz a ideia de se pensar em atividades que deixem de lado um pouco do contexto das aulas expositivas. Ao contrário da pedagogia tradicional, centrada no conhecimento que o professor transmite ao aluno, a aprendizagem num processo mais dinâmico flui em ambas as direções: do aluno para o professor e do professor para o aluno. E nesse sentido, o professor não deve apenas supor como funciona o pensamento lógico dos seus alunos, mas sim compreender o que os alunos pensam durante o processo da aprendizagem, para que possa guiar o desenvolvimento de suas ideias (PINTO, 2000).

As atividades que não são implementadas propiciam expectativas e, geralmente são pensadas para serem implementadas num contexto ideal e previsível. Mas nem sempre acontece

como esperamos, pois podem existir obstáculos que impactam nos possíveis resultados esperados.

Nagamine et al. (2011) faz uma análise de um trabalho pautado na Teoria Antropológica da Didática. Essa atividade “diferente”, que não foi implementada, trata-se de uma sequência didática conhecida como *Passeios aleatórios da Mônica*, elaborada por Fernandes e Fernandes (1999) e adaptada por Cazorla e Santana (2016) para o ensino de probabilidade na Educação Básica. Por se tratar de uma sequência didática, o seu objetivo é estudar como os alunos aprendem probabilidade, e nesse momento, o professor assume o papel de pesquisador, observando sua prática pedagógica.

Esta sequência didática está dividida em quatro sessões: a primeira compreende a leitura da história, na qual o professor observa a capacidade intuitiva dos estudantes, num contexto da probabilidade subjetiva; a segunda está relacionada à experimentação, a qual se faz presente o conhecimento da probabilidade frequentista, sendo os seus resultados organizados em tabelas de frequência e gráficos; a terceira faz referência à modelagem matemática com foco na abordagem clássica ou laplaciana, por meio da representação da árvore das possibilidades; e a última sessão analisa as reflexões dos alunos como um todo, referente às diversas formas de representações da probabilidade.

A tarefa central desta sequência didática parte das noções intuitivas, levando em consideração a abordagem subjetiva, até chegar à formulação teórica (clássica). A sequência pode ser aplicada e observada seus resultados, para que se possa fazer correções e aprimoramento da mesma (NAGAMINE et al., 2011). Essa observação é válida também para nos lembrar que muitas vezes a tarefa é planejada de uma determinada forma, mas durante o desenvolvimento do seu percurso, podem surgir contratempos que vem a forçar alterações e, nesse sentido, precisamos ficar atentos para não desviar o foco da proposta.

Lopes e Rezende (2010) apresentam uma proposta de atividades também num contexto fora do padrão de aulas expositivas, no qual propõem o *Jogo do Quadrado* em tabuleiro (ainda não testado), que deve ser jogado em duplas, e orienta o professor como proceder para a construção de conceitos básicos que envolvem o raciocínio combinatório e o cálculo de probabilidades nos anos finais do Ensino Fundamental e também para o segundo ano do Ensino Médio. Trata-se de uma associação entre jogos e resolução de problemas envolvendo conhecimentos de análise combinatória e probabilidade.

Os autores justificam sua proposta ao argumentar que “o ensino tradicional da Matemática que se baseia na apresentação oral do conteúdo pelo docente abordando definições e posteriormente demonstrações de propriedades, exercícios de fixação e de aplicação, tem-se

mostrado ineficaz” (LOPES; REZENDE, 2010, p. 663). Embora os autores ressaltem que não pretendem discutir as diferentes abordagens de probabilidade, o conceito clássico é explorado de forma implícita na resolução dos problemas propostos por eles.

Almeida e Pereira (2016) trazem um trabalho com base no construtivismo, uma vez que tem como referência a Teoria das Situações Didáticas, pois cria condições para que um determinado conhecimento seja construído, nas quais o professor orienta o aluno para ser capaz de tomar decisões que reforce a construção do seu conhecimento.

Nesse contexto, é considerada uma situação adidática, na qual o professor deixa de ser protagonista e passa a ser mediador e observador, e o aluno determina seus próprios passos na resolução do problema proposto, envolvendo lançamento de moedas. Na análise do problema, observa-se a abordagem frequentista, perpassando pelas estratégias do aluno com o meio, os registros, a validação dos resultados através dos cálculos pelo diagrama de árvore até que os alunos cheguem à conclusão. E no final da proposta, o professor deve apresentar o problema e revelar suas intenções para que os alunos se apropriem do conhecimento, buscando contribuir para a autonomia do aluno.

Santos (2013) propõe um jogo de batalha naval para o estudo de probabilidade. É uma proposta de prática pedagógica alternativa em que o aluno é visto como indivíduo ativo na produção e construção do seu conhecimento. Trata-se de nove problemas que associam o jogo aos conceitos de espaço amostral, eventos, probabilidades simples e probabilidade condicional e são apresentados em ordem crescente de dificuldade. Para a resolução dos problemas propostos, os estudantes precisam ter conhecimentos do cálculo da probabilidade clássica, bem como as propriedades que determinam a probabilidade axiomática. O autor não determina o público alvo para implementação da sua proposta, mas pressupõe-se que pode ser adaptada ao nível de conhecimento das turmas que o professor atua.

Essas pesquisas denotam a importância de se planejar as atividades, prevendo os possíveis benefícios e objetivos a serem atendidos, as possíveis estratégias que podem ser utilizadas para a apropriação do conhecimento, bem como o tipo de abordagem que se pretende contemplar.

### **C – Atividades “diferentes” para o ensino de probabilidade implementadas**

Os artigos analisados nesta categoria discutem as propostas que foram implementadas para o ensino de probabilidade na Educação Básica.

Almeida, Fernandes e Megid (2017) descrevem uma experiência a partir de atividades sobre probabilidade e estatística envolvendo gráficos e tabelas com 27 crianças da Educação

Infantil, entre 3 e 6 anos de idade. A atividade consistia numa tarefa de exploração, a qual, as crianças foram convidadas a um passeio no bosque e foi perguntado antes, quais animais eram possíveis de serem encontrados e quais eram impossíveis, e as crianças deveriam justificar suas respostas. Nesse momento, mais uma vez a abordagem subjetiva se faz presente, tendo em vista que leva em consideração o julgamento pessoal da criança (NACARATO; GRANDO, 2013).

Após a visita ao bosque a professora levou um cartaz com os animais ilustrados e solicitou que cada criança colasse um pedaço de papel vermelho acima da imagem do animal favorito, como a representação de um gráfico. E por último foi realizada a interpretação do gráfico, onde as crianças socializaram e confrontaram ideias numa perspectiva frequentista da probabilidade, observando os animais que foram mais escolhidos, ou menos escolhidos.

A atividade experimental contribui de forma significativa para a introdução ou mesmo a construção dos conceitos de probabilidade, além de incentivar o espírito intuitivo e dedutivo dando significado a esses conceitos. E nesse sentido, Silva Júnior e Costa (2018) trazem um experimento com estudantes do Ensino Médio, dividido em duas etapas. Os autores tomam como referência a visão frequentista, e propõem para a primeira etapa, que cada aluno realize 30 lançamentos de um dado, anotando os resultados da face voltada para cima, e em seguida construa uma tabela de frequências e, por último, represente os resultados em gráficos de barras e setores. E assim fizeram.

Na segunda etapa, os alunos se organizam em 4 ou 5 e reescrevem os dados juntando os resultados e construindo uma nova tabela de frequência e novos gráficos. Para tabular os dados os alunos puderam usar calculadoras, planilhas eletrônicas, programas de construção de gráficos ou outros recursos digitais. Após a realização das duas etapas, a professora realizou uma tarefa de investigação sobre os resultados, em que os alunos compararam os resultados individuais e em grupo. Depois das discussões acerca dos resultados e possíveis hipóteses, os alunos responderam, intuitivamente, que os resultados se convergiam para um determinado valor. Ao final da atividade, a professora utiliza a abordagem clássica para formalizar os conceitos, sendo uma proposta diferente das sugeridas na maioria dos livros didáticos, como explicam os autores.

A utilização de material concreto tem contribuído bastante como apoio às aulas de Matemática, e, nessa perspectiva, Vita (2012) desenvolveu uma abordagem de probabilidade com estudantes cegos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) do Ensino Médio, utilizando uma maquete tátil. A partir dessa pesquisa, Vita, Magina e Cazorla (2015) e Vita e Kataoka (2016) discutem as contribuições desse material associado à sequência didática que Cazorla e Santana (2006) adaptou de Fernandez e Fernandez (1999), conhecida como *Passeios Aleatórios*

da *Mônica*. Os dois artigos enfatizam a importância da realização de experimentos para a abordagem dos conceitos básicos de probabilidade, dando ênfase à definição frequentista da probabilidade. As autoras explicam que os alunos devem desenvolver habilidades formais e informais, analisar padrões observados e esperados, que lhe permitam ler e interpretar informações, tornando-os capazes de tomar decisões.

Nesta categoria analisada, as pesquisas apresentam atividades que se distanciam do contexto de aula expositiva, as quais apresentaram propostas que oportunizaram ao pesquisador observar se os resultados esperados foram alcançados, bem como a construção de conceitos por meio da experiência do estudante. Em atividades que são planejadas e implementadas podem surgir imprevistos que possibilitam que o professor repense ou reavalie a atividade para ser aplicada em outros contextos com outros sujeitos, e assim, contribuir para o aperfeiçoamento da sua prática docente.

#### **D – Uso de jogos para ensinar probabilidade.**

Os jogos são importantes elementos para os processos de ensino e aprendizagem, mas é necessário que se faça uma distinção entre o jogo como conteúdo específico e o jogo como ferramenta auxiliar de ensino, pois muitas vezes eles são pensado de forma a provocar interações sociais específicas ou para fixar determinados conhecimentos (BRASIL, 2018).

O artigo de Santos e Grandó (2011) apresenta um conjunto de tarefas e um jogo que utiliza a metodologia da resolução de problemas com características investigativas acerca do conhecimento de probabilidade. A pesquisa foi aplicada a estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental que foram organizados em pequenos grupos e realizaram 18 tarefas. O trabalho buscou identificar a linguagem e o pensamento probabilístico no processo de comunicação oral e escrita.

Os autores observaram que nas explicações dos alunos a respeito das tarefas, estavam presentes as abordagens conceituais subjetivista, frequentista e laplaciana. O jogo proposto após as tarefas, chamado *A travessia do rio*, buscou identificar semelhanças e diferenças com relação aos conceitos e pensamentos probabilísticos, comparando as situações de jogo e de problema, e foi constatado que a abordagem subjetivista prevalece sobre as demais.

Oliveira e Cazorla (2008) relatam uma experiência de um jogo aplicado a estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental. Novamente o jogo *Passeios aleatórios da Mônica* é discutido na perspectiva de dar significados aos conceitos de probabilidade, no entanto, num contexto diferente dos demais. O jogo envolve lançamento de moeda e foi possível trabalhar conceitos de espaço amostral e eventos através do diagrama da árvore, e, posteriormente, os resultados

foram registrados em tabelas e gráficos, expressando o pensamento clássico e frequentista da probabilidade, enquanto nos contextos anteriores, ele foi associado a outras metodologias.

Já Batista e Borba (2016) apresentam um fragmento de uma pesquisa sobre conhecimentos probabilísticos de crianças sobre aleatoriedade, espaço amostral e comparação de probabilidade, utilizando-se os dois jogos citados anteriormente: o primeiro sendo *A travessia do rio* e o segundo, uma adaptação do jogo *Passeios aleatórios da Mônica*. O estudo foi realizado com alunos do 1º, 3º e 5º ano do Ensino Fundamental. Os jogos envolvem lançamentos de dados no primeiro e moedas no segundo, com um caráter frequentista, pois os alunos observavam os resultados dos experimentos. Após algumas partidas, foi realizada uma entrevista clínica com uma abordagem sobre noções de eventos aleatórios, chances, possibilidades, equiprobabilidade e independência de eventos.

Deodato e David (2015) também utilizaram um jogo como uma das etapas de oficina que eles propuseram, numa articulação entre a Teoria da Aprendizagem Situada e a Teoria da Atividade para revelar momentos de aprendizagem no campo do ensino de probabilidade. Trata-se do jogo *Corrida de cavalos* que envolve lançamento de dois dados e a soma dos resultados por alunos de 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

Durante as partidas do jogo, algumas perguntas eram feitas sobre sorte, azar, chance e probabilidade fazendo com que os alunos refletissem sobre suas escolhas nas partidas posteriores. Nessa oficina foi possível explorar conhecimentos sobre eventos possíveis, impossíveis e eventos mais prováveis e menos prováveis, e, para esses conhecimentos, foram utilizados as definições de probabilidade numa percepção subjetiva, clássica e frequentista, que ficaram evidentes nas falas dos estudantes, com possibilidades de formularem e testarem conjecturas livremente, onde o diálogo oferece elementos para essas conclusões.

Santos e Santos (2016) apresentam uma investigação que envolve alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, numa proposta para que os alunos desenvolvessem conceitos de combinatória, probabilidade e estatística também num contexto do jogo *Corrida de cavalos*. Na ação do jogo, os alunos lançam dois dados, observando e registrando a soma dos resultados. A presença da visão frequentista no processo desse jogo auxilia na compreensão dos resultados, e conseqüentemente, nas noções básicas dos conhecimentos que envolvem aleatoriedade, mas é o diálogo gerado a partir das problematizações acerca dos resultados que possibilitou que os alunos desenvolvessem hipóteses e reflexões desencadeando ideias e conceitos que envolvem probabilidade, combinatória e estatística.

Ainda sob um olhar frequentista da probabilidade, Herzog et al. (2019) apresentam um jogo didático proposto para estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental. O jogo se chama *Sete*

*da Sorte*, e os alunos lançam dois dados e observam a soma dos resultados. Os autores explicam que, após repetir o lançamento muitas vezes, os alunos percebem que a soma sete vencerá e a soma um não pontua. Foram propostas aos estudantes alguns questionamentos sobre os resultados obtidos, envolvendo conhecimentos de aleatoriedade e espaço amostral. Os autores se respaldam na BNCC, pois o documento declara que o estudo de probabilidade e estatística deve abranger as atividades envolvendo experimentos aleatórios e simulações de modo que haja um confronto dos resultados em face das abordagens clássica e frequentista.

Essa revisão sistemática revela a presença da abordagem frequentista em todas as experiências de jogos analisadas. Isso acontece porque nessa abordagem de probabilidade, o uso de jogos permite esse tipo de exploração voltada para o experimento. A partir de experimentos surgem novos olhares e concepções, e novas ideias são manifestadas, dando espaço à imaginação e ao protagonismo dos alunos (LOPES; PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2019).

A utilização do jogo no ambiente de aprendizagem de probabilidade oportuniza aos alunos a compreensão progressiva da linguagem e dos conceitos que envolvem essa temática, além de contribuir para sua formação cidadã crítica e reflexiva na sociedade. As atividades lúdicas estão relacionadas com o prazer e o equilíbrio emocional, contribuem para o desenvolvimento social, além do desenvolvimento da autonomia sobre atos e pensamentos do indivíduo (COUTINHO, 2013). Quando o lúdico e a investigação estão presentes nas aulas de Matemática, despertam nos alunos uma maior segurança, possibilitando que os conhecimentos sejam ressignificados (NACARATO; GRANDO, 2013).

### **E – Uso de tecnologias digitais para ensinar probabilidade**

Os estudantes são impactados de diferentes maneiras pelos avanços da tecnologia, e, nesse sentido, a sua importância se faz presente na investigação matemática. O uso das tecnologias digitais e aplicativos para o ensino de Matemática é proposto pela BNCC desde Ensino Fundamental (BRASIL, 2018).

Souza e Lopes (2011) corroboram com esse pensamento, ao propor o uso de simuladores e tecnologia para o ensino de probabilidade. Foi apresentada uma atividade chamada *Corrida de dados* que envolve lançamento de dois dados e observado a soma dos resultados, a alunos de 12 e 13 anos. Houve discussão acerca de chances e sorte, mas, no desenvolvimento do jogo, através de simulações reais (experimentos), eles foram percebendo que alguns resultados eram mais frequentes que outros.

A visão frequentista contribui para que novos conceitos sejam construídos, e os autores ressaltam que as simulações interativas podem substituir uma situação real por diferentes

experimentos, criando modelos para o ensino de probabilidade. Após as simulações reais, os estudantes utilizaram jogos que simulam o lançamento de dados e ainda constroem o histograma com os resultados obtidos.

Muitas vezes, a construção do conceito de probabilidade observada nos livros didáticos é feita por meio da solicitação de experimentos, porém, o número insuficiente de realizações desse experimento é fonte de obstáculo para esse conhecimento. E nesse sentido, a realização de simulações computacionais permite que a frequência acumulada se estabilize, e se aproxime de um determinado valor (LOPES; PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2019).

Coutinho (2011) discute uma sequência didática também de um ponto de vista experimental (frequentista) através de situações-problema que envolvem a modelização de experimentos simples em um ambiente informatizado, para alunos franceses do último ano Ensino Fundamental e do 1º ano do Ensino Médio. O *software Cabri-géomètre II* foi utilizado nas atividades para a simulação dos experimentos e o modelo utilizado foi a urna de Bernoulli. Esse *software* apresenta uma ideia bem próxima da definição da probabilidade geométrica, porém, na tela do computador forma uma malha de *pixel* por centímetro quadrado, sendo uma urna de *pixels*, que pode ser considerado a representação do modelo da urna de Bernoulli. Nesse caso, a definição clássica da probabilidade é relacionada com a probabilidade geométrica, na qual é dada pela razão entre as áreas, num experimento aleatório utilizando a urna de *pixels*.

O que é possível notar é que existe uma interrelação entre as diferentes abordagens das definições de probabilidade num mesmo ambiente informatizado. Foi possível perceber a visão frequentista, por se tratar de simulações de vários experimentos. Em seguida a compreensão da probabilidade clássica em relação à abordagem geométrica, na razão entre as áreas, reforça que a probabilidade é um conceito que pode ser abordado por meio de diferentes enfoques (COUTINHO, 2013).

Souza e Souza (2019) desenvolvem um estudo sobre as dificuldades que os alunos possuem para resolver problemas probabilísticos relacionados com análise combinatória ou contagem. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 1º ano do Ensino Médio em simulações empíricas, através de um jogo de azar conhecido como Craps, que envolve o lançamento de dois dados, foram jogadas 40 partidas e eles observavam a soma com maior frequência e depois escreveram um relatório. As experiências pedagógicas foram vivenciadas sobre programação em Java e sobre o ensino de probabilidade, numa perspectiva frequentista da probabilidade. O número de experimentos foi relativamente pequeno e insuficiente para que os alunos tirassem as suas conclusões e a experiência proposta acabou gerando percepções equivocadas nos estudantes.

A respeito do trabalho em ambiente computacional, as pesquisas analisadas explicitaram que facilita e torna mais rápido o cálculo e a representação gráfica, além de revelar-se fundamental para que o aluno possa se preocupar efetivamente com as interpretações e com os conceitos envolvidos. E, de acordo com Coutinho (2013), o sujeito deve estar atento ao objeto de estudo, que nesse caso é a probabilidade, de modo que a ferramenta tecnológica não torne um distrator da aprendizagem pretendida, mas reforce-a.

### **F – Resolução de problemas como metodologia para o ensino de probabilidade**

A metodologia que envolve resolução de problemas tem um papel bastante significativo para a exploração de conceitos matemáticos. Nesse sentido, o problema é visto como um ponto de partida para ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias para cada unidade temática. Essa forma de ensinar Matemática recebeu atenção a partir dos trabalhos de Polya (1944), sendo considerado o pai da Resolução de Problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Neres e Correia (2018) destacam a importância dos trabalhos de Pólya (1887-1985) por ter sido o primeiro matemático a apresentar um método baseado em etapas para a resolução de problemas matemáticos que é aceito até os dias atuais. Nessa perspectiva, os autores apresentam uma proposta aplicada aos alunos do 2º ano do Ensino Médio para investigar a aprendizagem de probabilidade a partir de jogos de loteria associados ao método de resolução de problemas. Para a resolução dos problemas propostos, os alunos executaram as etapas sugeridas por Pólya (2006) e orientadas antes da execução. Como resultado, a maioria dos alunos obteve êxito, comprovando a eficiência do método sugerido. Os problemas associavam os conhecimentos de combinatória e probabilidade, fazendo uso da abordagem clássica da probabilidade.

Nas competências gerais da Educação Básica, a BNCC orienta que o estudante deve desenvolver a competência de formular e resolver problemas e criar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas. E dentro das habilidades que envolvem os conhecimentos de probabilidade, o documento orientador destaca a resolução e elaboração de problemas que envolvem o cálculo de probabilidades, eventos, experimentos aleatórios sucessivos, recorrendo às estratégias diversas (BRASIL, 2018).

Barba e Teixeira (2018) também utilizam o método da resolução de problemas para o ensino de alguns tópicos de probabilidade, voltado para o trabalho com alunos do Ensino Médio. Os autores levam em consideração as etapas para a resolução de problemas propostas por Onuchic e Allevato (2009). Os enunciados dos problemas foram retirados de provas do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e de vestibulares da Universidade Estadual de

Londrina (UEL), sendo alguns adaptados. Nessa proposta, o professor tem o seu papel de orientar o estudante, auxiliando-o de forma que eles construam os conceitos com autonomia (ONUCHIC; ALLEVATO, 2009). A abordagem dos problemas tem seu foco na abordagem clássica associada com a axiomática, e para a resolução, são utilizados conhecimentos que envolvem a teoria dos conjuntos, sua representação simbólica e diagramas e diante disso, os autores ressaltam a importância dos conhecimentos prévios para a construção dos novos conceitos.

Também numa proposta de ensino de probabilidade associada à resolução de problemas, Marocci e Nacarato (2013) apresentam um recorte de uma pesquisa de mestrado centrada no movimento das significações probabilísticas envolvendo resolução de problemas com estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Houve uma preocupação em criar condições para a organização do ambiente de aprendizagem, levando em consideração a linguagem, a mediação simbólica entre o sujeito e a realidade e os significados que estão em constante transformação. Foi proposta uma sequência de tarefas para os estudantes, que foram socializadas e discutidas, mostrando que quando há comunicação e reflexão sobre o que se faz resulta-se em novas relações e conexões. As potencialidades da resolução de problemas e da linguagem para o desenvolvimento do pensamento probabilístico, numa abordagem subjetiva da probabilidade, movimentaram as significações e, conseqüentemente, a aprendizagem.

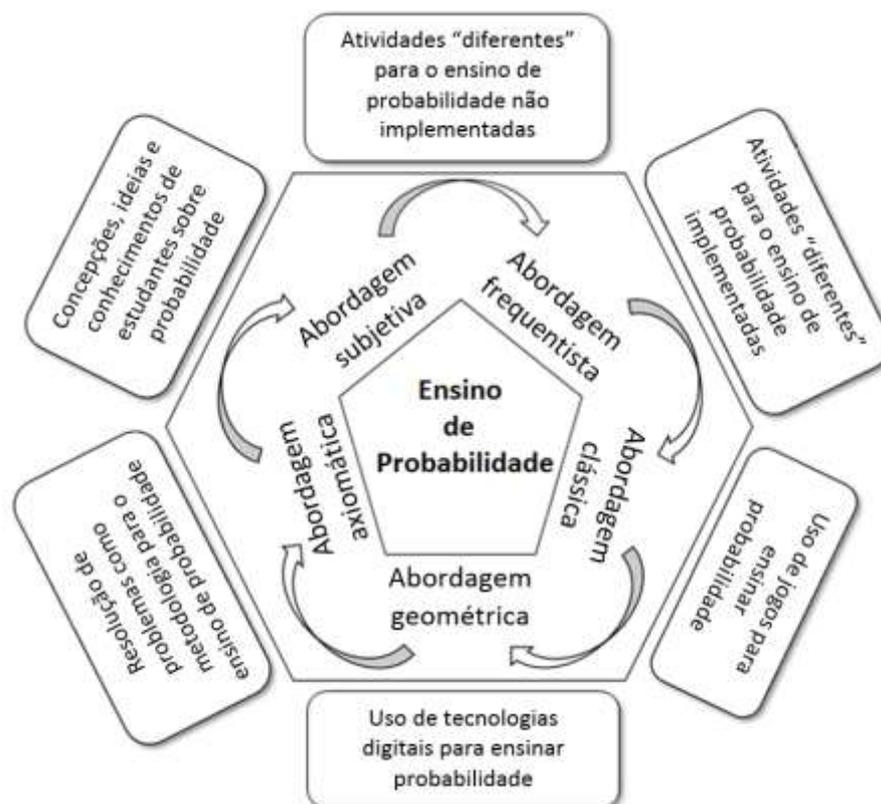
Para a aprendizagem dos conceitos básicos de probabilidade, Lopes, Teodoro e Rezende (2011) apresentam os relatos de uma investigação que utiliza um jogo de dois dados associados à resolução de problemas. Foi aplicado um pré-teste que verificava os conhecimentos prévios e intuitivos por meio de problemas de probabilidade e um pós-teste que foi aplicado logo após a realização do jogo. Os problemas estão planejados sobre o contexto de jogo e tem na sua abordagem uma base definida nas abordagens subjetiva e clássica da probabilidade.

As tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas podem e devem ser propostos de modo que gerem novas compreensões da Matemática. É nesse momento que o estudante procura relações, analisa padrões e descobrem os métodos que funcionam para justificar seus resultados (WALLE, 2009).

### **Uma síntese sobre o ensino de probabilidade a partir da revisão sistemática de literatura**

Esse estudo possibilitou a construção de uma síntese sobre o ensino de probabilidade para a Educação Básica tomando como base a relação entre categorias estabelecidas e as diferentes abordagens da probabilidade.

Figura 3 – Esquema de categorias relacionadas às abordagens probabilísticas



Fonte: Elaboração própria

O esquema acima representa o olhar criterioso que o professor precisa ter acerca do ensino de probabilidade. As categorias discutidas nesse constructo teórico devem ser consideradas numa interrelação com as diferentes abordagens da temática.

Num contexto de abordagens da definição de probabilidade, geralmente os trabalhos analisados recorreram a uma convergência que envolve a abordagem subjetiva, para uma abordagem inicial, onde o professor observa o que esses estudantes têm de conhecimentos e experiências acerca das noções básicas de probabilidade, valorizando a categoria A analisada e avançando para uma abordagem frequentista.

Nessa abordagem frequentista, o estudante tem contato direto com o objeto de estudo, faz experiências e observa regularidades nos resultados dos seus experimentos, e criam uma conexão com a definição laplaciana (clássica), sendo essa a mais lembrada quando discutimos cálculos de probabilidade e a mais abordada nos livros didáticos. Para que o estudante fortaleça sua compreensão acerca desse conhecimento, esse estudo precisa ser bem planejado, e sair do contexto de aula expositiva pode ser um bom caminho no qual os alunos partem para as experiências. A categoria B traz essas atividades “diferentes” que foram planejadas, mas não foram implementadas. E na categoria C, essas atividades diferentes são implementadas.

A implementação de tarefas para o ensino de probabilidade possibilita a identificação de possíveis dificuldades apresentadas pelos sujeitos, e os possíveis contratempos que podem surgir, como qualquer ambiente de aprendizagem sujeito a imprevisibilidade, bem como as contribuições para o aprendizado. E é nesse sentido que as tarefas podem ser repensadas e melhoradas para que se alcance o objetivo esperado.

Após o contato com essas três abordagens, o aluno pode estar mais preparado para enfrentar problemas que envolvem outros contextos de aplicação, como a probabilidade geométrica, por exemplo, na qual faz-se necessário o conhecimento da definição clássica. E para a ampliação do conceito, é preciso que esses conhecimentos estejam bem amarrados e fundamentados e, para isso, é importante o domínio das propriedades e axiomas que sustentam a definição abrindo espaço para a abordagem axiomática da probabilidade.

A construção e ampliação dos conceitos, quando associados a uma boa metodologia, podem trazer excelentes resultados. E nessa perspectiva, considerando os contextos de aprendizagem, o jogo pode ser um ótimo aliado, pois valoriza as relações sociais, além de tornar a aprendizagem um momento prazeroso e desenvolver a autonomia nos sujeitos, como discutido na categoria D. E quando o jogo está associado a um ambiente computacional (categoria E), como os simuladores, por exemplo, em que os estudantes podem confrontar e refletir sobre os resultados e criar relações entre o conhecimento concreto e o abstrato, entre uma situação real e um modelo para que novos conceitos sejam construídos e formalizados.

Uma outra metodologia para construir e fortalecer ou mesmo verificar se os conceitos realmente fazem sentido é a resolução de problemas (categoria F). Nessa metodologia o sujeito tem a oportunidade de refletir sobre uma situação que pode ser real, considerando a sua intuição e as suas estratégias para a resolução dos problemas propostos. Os conhecimentos das suas experiências dentro e fora da escola podem contribuir para determinar as suas estratégias, que num contexto de problemas de probabilidade, a abordagem subjetiva pode ser peça chave para o desencadeamento das ideias e concepções que o estudante apresenta acerca dessa temática.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo refere-se a uma revisão sistemática de artigos publicados acerca da problemática que envolvem as diferentes abordagens epistemológicas de Probabilidade com relação ao ensino e a aprendizagem deste conteúdo. Nesse sentido, esse estudo apresentou pesquisas que abrangem as abordagens clássica, frequentista, geométrica, subjetiva e

axiomática no âmbito do ensino e da aprendizagem de probabilidade no intuito de atender o objetivo da pesquisa, que foi analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica.

Os resultados explicitaram que a abordagem menos analisada é a geométrica. Talvez devido à necessidade de conceitos prévios de geometria atrelado aos conceitos probabilísticos, se torna um desafio, pois poucos pesquisadores defendem essa abordagem, sendo que a maior parte abre discussões acerca da interrelação entre as abordagens clássica e frequentista.

As pesquisas ainda revelam que existe uma preocupação por parte dos educadores matemáticos em relação à temática, devido à importância que este estudo tem na vida cotidiana do ser humano como cidadão, nos quais os documentos oficiais curriculares ressaltam a necessidade do cidadão desenvolver habilidades de coletar, organizar, representar, interpretar dados em vários contextos e saber tomar decisões adequadas a depender do contexto.

O estudo de probabilidade deve permitir reconhecer que nem todos os fenômenos são determinísticos. Sendo assim, o desenvolvimento desse ensino precisa considerar que existem eventos prováveis, impossíveis ou certos. Diante disso, o domínio deste conteúdo oportuniza os alunos a serem capazes de raciocinar de maneira crítica e lógica, realizar previsões e interpretar fenômenos, ou seja, ser atuantes no mundo em que vivem. Porém alguns desafios devem ser vencidos, pois esses artigos apresentam algumas experiências vivenciadas na Educação Básica que tratam das dificuldades apresentadas pelos professores em suas práticas e, conseqüentemente, as dificuldades dos seus alunos ao lidarem com experiências voltadas para o estudo de probabilidade.

Os resultados dessa revisão sistemática possibilitaram observar que algumas ideias evidenciavam pontos em comum. Essa característica favoreceu a construção de uma síntese teórica direcionado à aprendizagem de probabilidade. Essa discussão destaca o aprendizado pautado, inicialmente, no que o estudante possui de conhecimentos e experiências sobre probabilidade, perpassando pelo planejamento e execução de tarefas relacionadas ao ensino da temática, por meio de experimentos, a partir de diferentes metodologias que valorizam as diversas abordagens do conceito de probabilidade.

Esse estudo mostrou que o ensino e a aprendizagem de probabilidade devem contemplar simultaneamente as diversas abordagens, partindo de metodologias bem articuladas para aproximar o estudante deste conhecimento a partir do que ele já possui de experiências, e permitir que ele compreenda e amplie seu campo de visão relacionado a essa temática. E é nesse sentido que o estudante desenvolve a possibilidade de fazer inferências de fenômenos futuros, observando experimentos, principalmente a partir da abordagem frequentista para comparar e

relacionar os resultados com a abordagem clássica. Sendo assim, a maior parte das pesquisas analisadas trouxe um discussão entre esses dois significados da probabilidade: o significado clássico e o frequentista.

Mas vale ressaltar que as outras abordagens não são menos importantes. Pelo contrário! Todas devem fazer parte do processo de compreensão dos significados de probabilidade, para evitar possíveis obstáculos na aprendizagem desse conteúdo, e, nesse sentido, nota-se a importância de aprofundamento de mais estudos que podem contribuir para pesquisas futuras.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Alessandra Rodrigues de; FERNANDES, Karina Luiza Silva; MEGID, Maria Auxiliadora Bueno Andrade. Vamos ao bosque? Problematizações e tratamento da informação na Educação Infantil. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 54, p. 98-105, abr./jun. 2017. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/714>. Acesso em: 22 maio 2020.
- ALMEIDA, Cecília Manoela Carvalho de; PEREIRA, Sueli dos Prazeres Santos. Situações Didáticas: uma proposta para o ensino de probabilidade. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 48, p. 13-19, mar. 2016. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/576/pdf>. Acesso em: 22 maio 2020.
- AMÂNCIO, Juliana Ramos; VIANNA, Cláudia Segadas; ROCHA, Ney C. Santos. Conhecimentos para a docência da Probabilidade no âmbito do PIBID na UFRJ. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – vol. 4 - número 1 – 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2239>. Acesso em: 22 maio 2020.
- BARBA, Alessandra Negrini Dalla; TEIXEIRA, Bruno Rodrigo. Tópicos de probabilidade através da Resolução de Problemas. **BoEM**, Joinville, v. 6, n. 10, p. 328-348, ago 2018. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/11511> Acesso em: 22 maio 2020.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares**. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018.
- BATANERO, Carmen; CHERNOFF, Egan J.; ENGEL, Joachim; LEE, Hollylynn S.; SÁNCHEZ, Ernesto. Research on Teaching and Learning Probability. **Icme-13 Topical**

**Surveys**, [s.l.], p. 1-33, 2016. Springer International Publishing.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3>Acesso em: 22 maio 2020.

BATISTA, Rita; BORBA, Rute Elisabete. Lançando dados e moedas: relação de (in)dependência sob a ótica de crianças dos anos iniciais. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife-PE, v. 1, n. 1, p. 1-14, jan./abr. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3882>. Acesso em: 22 maio 2020.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto – Portugal. Porto Editora, 2010. Disponível em: [https://www.academia.edu/6674293/Bogdan\\_Biklen\\_investigacao\\_qualitativa\\_em\\_educacao](https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao) Acesso em: 24 maio 2020

BORBA, Rute E. S. Rosa; SOUZA, Leandro de Oliveira; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. Desafios do ensino na Educação Básica de combinatória, estatística e probabilidade. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 9, n. 1, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/231908/pdf2>. Acesso em: 22 maio 2020.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto. Probabilidade nos anos iniciais da Educação Básica: contribuições de um programa de ensino. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3884/pdf> Acesso em: 22 maio 2020.

CAVALCANTE, José Luiz; ANDRADE, Vladimir Lira Veras Xavier de; RÉGNIER, Jean-Claude. O conceito de probabilidade na formação docente: uma reflexão apoiada pela análise estatística implicativa. **VIDYA**, v. 36, n. 2, p. 441-455, jul./dez., 2016 - Santa Maria, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1794>. Acesso em: 24 maio 2020.

CAZORLA, Irene Maurício; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. 2. ed. Itabuna-BA: Via Literarum, 2006.

CORREIA, Paulo Ferreira; FERNANDES, José António. Intuições de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada no contexto de extração de bolas de um saco. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 16, n. 2, jun. 2014a. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/19177>. Acesso em: 27 maio 2020.

CORREIA, Paulo Ferreira; FERNANDES, José António. Intuições de alunos do 9º. Ano em acontecimentos independentes. **Zetetiké**, Campinas (SP), v. 22, n. 1, p. 83-113, out. 2014b. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646579>. Acesso em: 22 maio 2020

COUTINHO, Cileda Q. Silva (org.). **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2013.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 7, n. 2, jan. 2011. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/4700>. Acesso em: 27 maio 2020.

DEODATO, André Augusto; DAVID, Maria Manuela. Probabilidade em uma Oficina de Matemática: uma análise à luz da aprendizagem situada e da teoria da atividade. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 17, n. 2, p. 281-308, set. 2015. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/22168>. Acesso em: 27 maio 2020.

DONATO, Helena; DONATO, Mariana. Stages for Undertaking a Systematic Review. **Acta Médica Portuguesa**, [S.l.], v. 32, n. 3, p. 227-235, mar. 2019. Disponível em: <https://www.actamedicaportuguesa.com/revista/index.php/amp/article/view/11923> Acesso em: 22 maio 2020

FERNANDEZ, Dinara Westphalen Xavier; FERNANDEZ, Dierê Xavier. O Prazer de aprender probabilidade através de jogos: descobrindo a distribuição binomial. In: **Conferência Internacional Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística - Desafios para o Século XXI**, Florianópolis, SC. Atas. Florianópolis, 1999.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em educação matemática**. Campinas, SP: Associados, 2012.

GAL, Iddo. Towards 'probability literacy' for all citizens. In G. Jones, Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning (p. 43-71). **Kluwer Academic Publishers**. 2005.

GIORDANO, Cassio Cristiano; ARAÚJO, José Ronaldo Alves; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. Educação Estatística e a Base Nacional Comum Curricular: o incentivo aos projetos. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 14, p. 1-20, set. 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e62727>. Acesso em: 06 maio. 2020

HERZOG, Rodrigo Castelo Branco et al. Probabilidade na Educação Básica: uma proposta de jogo como recurso didático. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife-PE, v. 10, n. 2, p. 1-14, mai./ago. 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/239544>. Acesso em: 22 maio 2020.

LIMA, Ewellen Tenorio de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Articulando os raciocínios combinatório e probabilístico a partir da resolução de problemas na EJA. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 21, n. 1, abr. 2019a. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/37126>. Acesso em: 27 maio 2020.

LIMA, Ewellen Tenorio de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. A influência da escolarização na resolução de problemas combinatórios e probabilísticos: um estudo realizado na educação de jovens e adultos. **Educação Matemática em Revista**, Santa Maria-RS, v. 1,

n. 20, p. 134-146, jan./jun. 2019b. Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1746>. Acesso em: 22 maio 2020.

LIMA, Ewellen Tenorio de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Relações entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico na EJA. **Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão, Pr, v. 7, n. 13, p. 33-60, jan./jun. 2018.

Disponível: <http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1661>. Acesso em: 22 maio 2020.

LIMA, Ewellen Tenorio de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. A articulação entre combinatória e probabilidade nas diferentes instâncias do currículo: um levantamento da produção nacional. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [s.l.], v. 8, n. 17, p. 546-566, 20 dez. 2019. Universidade Estadual do Paraná - Unespar.

<http://dx.doi.org/10.33871/22385800.2019.8.17.546-566>. Acesso em: 22 maio 2020.

LOPES, Celi Espasandin; COUTINHO, Cileda de Queiroz Silva; ALMOULOU, Saddo Ag. (orgs.). **Estudos e reflexões em educação estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010.

LOPES, Celi Espasandin; PORCIÚNCULA, Mauren; SAMÁ, Suzi, (orgs.). **Perspectiva para o ensino e a aprendizagem de estatística e probabilidade**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2019.

LOPES, José M; A SALVADOR, José; BALIEIRO FILHO, Inocência F. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, [s.l.], v. 7, n. 3, p. 47-62, 23 dez. 2013. FAI-UFSCar.

<http://dx.doi.org/10.14244/19827199500>.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, (SP), v. 23, n. 36, p. 657-682, agosto 2010. Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/4035>. Acesso em: 22 maio 2020.

LOPES, José Marcos Lopes; TEODORO, João Vitor; REZENDE, Josiane de Carvalho. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. **Zetetiké**, Campinas (SP), v. 19, n. 36, p. 75-93, jul/dez 2011. Disponível em:

<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646626>. Acessado em

MAROCCI, Lia; NACARATO, Adair Mendes. Um ambiente de aprendizagem baseado na resolução de problemas: a possibilidade de circulação de significações sobre probabilidade por meio da linguagem. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 15, n. 1, maio 2013. Disponível em:

<https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/10533>. Acesso em: 27 maio 2020.

MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira; MARTINS, Maria Niedja Pereira. Possibilidades de recursos para o ensino de probabilidade nos anos iniciais. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, Pe, v. 7, n. 1, p. 1-21, 03 out. 2016. Disponível em:

[https://www.researchgate.net/publication/308793568\\_](https://www.researchgate.net/publication/308793568_). Acesso em: 1 jan. 2020.

NACARATO, Adair Mendes; GRANDO, Regina Célia (orgs.). **Estatística e probabilidade na educação básica: professores narrando suas experiências.**– Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

NAGAMINE, Camila Macedo Lima et al. Análise praxeológica dos passeios aleatórios da Mônica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, (SP), v. 24, n. 39, p. 451-472, ago. 2011. Disponível em <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5103>. Acesso em: 22 maio 2020.

NERES, Raimundo Luna; CORREA, Venâncio Barros. Resolução de Problemas, segundo Pólya, para o ensino de probabilidade usando jogos de loteria. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 20, n. 2, out. 2018. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/34974>. Acesso em: 27 maio 2020.

NOBREGA, Giselda; SPINILLO, Alina Galvão. A noção de possível na probabilidade e na combinatória em estudantes do Ensino Fundamental. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife-PE, v. 1, n. 1, p. 1-17, jan./abr. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3894>. Acesso em: 22 maio 2020.

OLIVEIRA, Claudio R.; CORDANI, Lisbeth Kaiserlian. Julgando sob incerteza: heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 18, n. 3, jan. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31484/21943>. Acesso em: 27 maio 2020.

OLIVEIRA, Silvana Andrade de; CAZORLA, Irene Mauricio. Ensinando probabilidades no Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 13, n. 24, p. 1-6, jun. 2008. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/879>. Acesso em: 22 maio 2020.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/72994>. Acesso em: 22 maio 2020.

ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Trabalhando volume de cilindros através da Resolução de Problemas. **Educação Matemática em Revista** (Rio Grande do Sul), Canoas, v.1, n.10, p. 95-103, 2009. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1478>. Acesso em: 22 maio 2020.

PINHEIRO, João Ismael et al. **Estatística básica: a arte de trabalhar com dados.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática: estudo do erro no ensino da matemática elementar.** Campinas, SP: Papyrus, 2000.

SALCEDO, Aldy; RAMIREZ, Tulio. Análisis de las actividades de probabilidad propuestas en textos escolares de primaria. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.18, n.1, pp. 179-202, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/24302>. Acesso em: 20 abril 2020.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e Adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SAMÁ, Suzi; SILVA, Rejane Conceição Silveira da. Probabilidade e estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir da BNCC. **Zetetike**, [s.l.], v. 28, p. 1-21, 4 abr. 2020. Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656990>. Acesso em: 22 maio 2020.

SAMPAIO, Nilo Antônio de Souza et al. **Cálculo de probabilidades**. Belo Horizonte: Poisson, 2019.

SANTOS, Fabrício Bueno Borges dos. Práticas de ensino-aprendizagem de probabilidade através do jogo batalha naval. **Educação Matemática em Revista**, Santa Maria-RS, v. 1, n. 14, p. 21-28, jan./jun. 2013. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/EMR-RS/article/view/1508>. Acesso em: 22 maio 2020.

SANTOS, Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão. GRANDO, Regina Célia. O movimento das ideias probabilísticas no Ensino Fundamental: análise de um caso. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, (SP), v. 24, n. 39, p. 561-584, ago. 2011. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5108>. Acesso em: 22 maio 2020.

SANTOS, Jaqueline Lixandrão; SANTOS, Emily de Vasconcelos. Um jogo e a linguagem: possibilidades para a produção de conceitos sobre combinatória, estatística e probabilidade com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife-PE, v. 1, n. 1, p. 1-15, jan./abr. 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3894>. Acesso em: 22 maio 2020

SANTOS, Wagner Dias; SANTOS JÚNIOR, Jorge dos; VELASQUE, Luciane de Souza. O desenvolvimento do letramento estatístico pelos livros didáticos e a Base Nacional Comum Curricular. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [s.l.], v. 9, n. 2, p. 210-229, 28 maio 2018. Cruzeiro do Sul Educacional. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.26843/rencima.v9i2.1664>. Acesso em: 22 maio 2020.

SILVA JUNIOR, João Domingos Gomes da; COSTA, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. Ensinando probabilidade através de um passeio pela Estatística. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 57, p. 126-137, jan./mar. 2018. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/897>. Acesso em: 22 maio 2020.

SOUZA, Giselle Corrêa; SOUZA, Leandro de Oliveira. Arranjos com repetição e simulações probabilísticas: obstáculos de aprendizagem. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 14, p. 1-16, set. 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e62783>. Acesso em: 27 maio 2020.

SOUZA, Leandro de Oliveira; LOPES, Celi Espasandin. O Uso de simuladores e a tecnologia no ensino da estocástica. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, (SP), v. 24, n. 40, p. 659-677, dez. 2011 Disponível em:

<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5287>. Acesso em: 22 maio 2020.

WALLE, John A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Colonese. – 6. ed. – Porto Alegre: Artmed, 2009.

VITA, Aida Carvalho; KATAOKA, Verônica Yumi. Construção de maquete tátil para a aprendizagem de probabilidade por alunos cegos baseada no design centrado no usuário.

**Revista Paranaense de Educação Matemática - RPEM**, Campo Mourão, Pr, v. 5, n. 9, p. 147-175, jul./dez. 2016. Disponível:

<http://www.fecilcam.br/revista/index.php/rpem/article/view/1257>. Acesso em: 22 maio 2020

VITA, Aida Carvalho. MAGINA, Sandra Maria Pinto; CAZORLA, Irene Maurício. A probabilidade, a maquete tátil, o estudante cego: uma teia inclusiva construída a partir da análise instrumental. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática – JIEM**, s. l., n. 3, v. 8, p. 55-97, set./dez. 2015. Disponível em:

<https://revista.pgskroton.com/index.php/jieem/article/view/3046>. Acesso em: 22 maio 2020.

VITA, Aida Carvalho. **Análise instrumental de uma maquete tátil para a aprendizagem de probabilidade por alunos cegos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo 2012. Disponível em:

<http://ken.pucsp.br/emp/article/view/11029>. Acesso em: 22 maio 2020.

VOTTO, Thays; SCHREIBER, Karla Priscila; PORCIÚNCULA, Mauren. Educação estatística nos anos iniciais do Ensino Fundamental. **Cadernos de Pesquisa**, [s.l.], v. 24, n. especial, p. 143, 24 jan. 2018. Universidade Federal do Maranhão. Disponível em:

<http://www.periodicoeletronicos.ufma.br/index.php/cadernosdepesquisa/article/view/8074> Acesso em: 22 maio 2020.

## CAPÍTULO II – Artigo 02

### PROBABILIDADE EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO PROBABILITY IN HIGH SCHOOL TEACHING BOOKS

#### Resumo

Este artigo tem como objetivo analisar como o tema probabilidade é abordado em três livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020, dentro de uma abordagem qualitativa. Entre os principais resultados, destaca-se a forma como foi explorada as diferentes abordagens que envolvem os conceitos de probabilidade. Algumas, como a clássica e axiomática, são abordadas nos três livros analisados de formas diferentes, seja a partir da noção frequentista usando demonstrações, seja por meio de situações-problema. No entanto, outras não foram trabalhadas com tanta ênfase, mas vale ressaltar que a aprendizagem de probabilidade, para que seja desenvolvida com êxito, não deve ser feita, restringindo-se à uma única abordagem, pois as situações que envolvem esse conhecimento podem exigir diferentes interpretações e, conseqüentemente, diferentes maneiras de serem resolvidas.

**Palavras-chave:** Ensino de Probabilidade; livro didático; aprendizagem; abordagens de probabilidade.

#### Abstract

This article aims to analyze how the topic of probability is addressed in three high school textbooks approved by the National Book and Teaching Material Program (PNLD) 2018-2020, within a qualitative approach. Among the main results, we highlight the way in which the different approaches involving the concepts of probability were explored. Some, like the classic and axiomatic, are addressed in the three books analyzed in different ways, either from the frequentist notion using demonstrations, or through problem situations. However, others were not worked with so much emphasis, but it is worth mentioning that the learning of probability, for it to be successfully developed, should not be done, being restricted to a single approach, because the situations that involve this knowledge may require different interpretations and, consequently, different ways of being resolved.

**Keywords:** Probability Teaching; textbook; learning; probability approaches.

## 1 INTRODUÇÃO

A Educação Estatística, enquanto campo de investigação, tem se debruçado sobre várias frentes de pesquisas. Estudos buscam compreender como estudantes da Educação Básica mobilizam conhecimentos durante o desenvolvimento da aprendizagem estatística e probabilística ou sobre como aprendem (CONTI; VILAS BÔAS, 2019; RIBEIRO et al., 2018; ALMEIDA; FARIAS, 2018; ALMEIDA; CASAS GARCÍA; LUENGO GONZÁLEZ, 2017); há também aqueles que se dedicam a investigar o conhecimento de professores sobre o tema probabilidade (SANTANA; BORBA, 2017; SCHREIBER; PORCIÚNCULA, 2019; ARAÚJO; CARVALHO, 2017; EUGÊNIO, 2019). Investigações sobre probabilidade em

livros didáticos têm circulado e apresentado resultados interessantes sobre a não presença dos vários significados de probabilidades ou de tarefas diversificadas nas coleções analisadas (SANTOS; ALVARENGA, 2014; SANTOS; SANTOS JÚNIOR; VELASQUES, 2018; LOPES; SOARES, 2018).

O livro didático, fruto de políticas educacionais ao longo dos anos, é um recurso que acaba por conduzir o trabalho do professor em sala de aula. A sua escolha é marcada por um momento de grande responsabilidade por parte do professor, uma vez que o livro escolhido precisa estar de acordo com a proposta pedagógica da escola, bem como deve atender ao público estudante dela. Por isso, é necessária uma análise detalhada e criteriosa de vários livros, observando se não há erros conceituais ou se a abordagem dos conteúdos é adequada.

Também, cabe ressaltar, apesar de não ser objeto de discussão nesse texto, que em muitas escolas há a falta de professores licenciados em Matemática, principalmente nas cidades do interior dos estados brasileiros. Segundo dados do Censo Escolar 2019, elaborado pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira), apenas 63,3% dos professores que lecionam no Ensino Médio tem graduação e licenciatura na disciplina que ensina aos alunos. E nos anos finais do Ensino Fundamental, 53,2%. Esse fato pode implicar em determinadas escolhas que impactem nos processos de ensino e de aprendizagem.

Ainda hoje o livro didático é uma das principais fontes didáticas que o professor tem para direcionar suas aulas. Então, para questão de pesquisa, pergunta-se: como o conteúdo de probabilidade é apresentado em livros didáticos de Matemática?

A probabilidade está presente em diversas situações do cotidiano, durante muitas etapas da vida escolar do estudante. Para compreender as razões das dificuldades de aprendizagem que os estudantes têm em relação aos conteúdos, que pode ser um problema desde as primeiras abordagens no Ensino Fundamental e vai se perpetuando até o Ensino Médio, o livro didático pode ser uma boa fonte de investigação, uma vez que essa ferramenta muitas vezes determina os conteúdos e as estratégias de ensino que auxiliam o trabalho do professor em sua prática.

Conforme indicado na BNCC na Educação Básica, o tratamento de dados e a incerteza são estudados na unidade temática *Probabilidade e Estatística*, onde são propostos conceitos que envolvem fatos e procedimentos presentes no dia a dia, nas ciências e nas tecnologias. Diante disso, o indivíduo deve desenvolver habilidades de coletar, organizar, interpretar e analisar dados em diferentes situações para tomadas de decisões adequadas, levando-se em conta os riscos probabilísticos, sendo capaz de analisar de forma crítica o que é divulgado pelos meios de comunicação (BRASIL, 2018).

O objetivo deste artigo é analisar como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020. O *corpus* para análise foram três livros avaliados e disponibilizados para a escolha dentro do PNLD 2018-2020. O PNLD avalia e disponibiliza de forma sistemática e gratuita à todas as escolas públicas do país cadastradas no censo escolar. O Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE) é o órgão responsável pela compra e distribuição dos materiais e livros didáticos selecionados pelo Ministério da Educação (MEC). Este material inscrito no PNLD é aprovado em avaliações pedagógicas e avaliados por especialistas de diferentes áreas do conhecimento e são distribuídos pelo MEC e escolhidos pelas escolas.

## 2 REVISÃO TEÓRICA

A aprendizagem de probabilidade é essencial para preparar os alunos para a vida, pois existem ocorrências do dia a dia que é de cunho aleatório e muitas vezes é possível identificar resultados prováveis desses acontecimentos. Profissionais e leigos de todas as idades e culturas precisam interpretar, reagir ou lidar com situações em que envolvem elementos probabilísticos em diferentes níveis de previsibilidade ou imprevisibilidade.

Nota-se uma atenção por parte dos pesquisadores (GAL, 2005; ALMEIDA; FARIAS, 2018; VERBISCK; BITTAR, 2019; EUGÊNIO, 2019) em relação ao ensino e a aprendizagem de probabilidade, que os fazem questionar sobre os objetivos apresentados nos documentos reguladores do ensino (Parâmetros Curriculares Nacionais, Base Nacional Comum Curricular) e quais objetivos realmente estão sendo atendidos em sala de aula.

É importante uma reflexão a partir da aplicação da probabilidade no mundo real, mas não deve ser o único fator para o planejamento curricular e suas práticas, porém, deve-se observar o que é planejado, ensinado, avaliado e valorizado na sala de aula, para o desenvolvimento da capacidade crítica e da autonomia dos estudantes, o que reflete a ideia do letramento probabilístico. O letramento probabilístico está relacionado com a necessidade de lidar com a leitura e interpretação da probabilidade em situações diversas do mundo real que exigem a capacidade de calcular, mensurar, comparar e analisar probabilisticamente, bem como tomar decisões (EUGÊNIO, 2019).

A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, propõe para a Educação Básica, que o ensino de probabilidade seja explorado desde os anos iniciais do ensino fundamental, através de conceitos de espaço amostral de eventos equiprováveis, o princípio multiplicativo ou

modelos de simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. Para os anos finais, a BNCC recomenda uma ampliação e aprofundamento por meio de atividades realizando experimentos aleatórios e simulações (probabilidade frequentista) para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade teórica (BRASIL, 2018).

É indispensável observar as competências e habilidades determinadas pela BNCC acerca do conteúdo de probabilidade para o Ensino Médio, afim de revelar condições e restrições que envolvam os conhecimentos deste conteúdo nos livros apresentados e discutidos nessa pesquisa. Esse documento orientador normativo propõe para o Ensino Médio na área de Matemática e suas tecnologias a consolidação, ampliação e aprofundamento dos conhecimentos realizados no Ensino Fundamental, no intuito de estimular o estudante a desenvolver processos mais elaborados de reflexão e abstração, e instigar a capacidade de formular e resolver problemas com autonomia, usando operações e conjecturas matemáticas.

Na organização curricular proposta ao Ensino Médio pela BNCC (BRASIL, 2018), considerando as habilidades para o ensino de probabilidade, têm-se:

Quadro 3 – Habilidades para o ensino de probabilidade no Ensino Médio

Código	Habilidade
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM13MAT106	Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
EM13MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT511	Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: (BRASIL, 2018, pp. 536-537)

Esses conteúdos de probabilidade e suas respectivas habilidades correspondem, de acordo com o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), à apenas cerca de 7% de cada coleção nos anos finais do ensino fundamental e aproximadamente 5% no Ensino Médio. Mesmo que seja uma porcentagem relativamente pequena, não significa que esse conteúdo seja menos importante que os demais, embora exista um certo desconforto por parte dos professores ao trabalhar com conteúdos que envolvam probabilidade e estatística, o que faz concordarem com o que é apresentado nos livros didáticos, limitando-se à um estudo superficial sem dispor

de uma análise direcionada ao contexto no qual os dados estão inseridos (LOPES; PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2019).

Pesquisas no campo da Educação Estatística revelam que existe uma forte necessidade de estudos sobre materiais didáticos para uma abordagem de conteúdos da probabilidade, sobretudo pelo papel desempenhado pelos livros didáticos, levando em conta que esse material tem grande relevância na construção de conhecimentos e práticas docentes e na construção dos conhecimentos discentes (VASQUEZ; ALSINA, 2015; NÓBREGA; SPINILLO, 2016; SANTANA; BORBA, 2016; COUTINHO, 2016; SILVA JÚNIOR; COSTA, 2018).

Apesar de o PNLD mencionar apenas a abordagem clássica da probabilidade, pesquisas reforçam que o estudante não deve se restringir a uma única abordagem, pois existem situações em que os espaços amostrais não são equiprováveis (AMÂNCIO; VIANA; ROCHA, 2013; COUTINHO, 2013; BATANERO, 2016; EUGÊNIO, 2019). A abordagem clássica é aplicada somente na equiprobabilidade, e nesse sentido, é importante que o estudante construa uma articulação entre os diferentes conceitos de probabilidade, como a frequentista, a formal, a geométrica e a subjetiva, levando em consideração que existem espaços amostrais não equiprováveis. A proposta é que os estudantes terminem o Ensino Médio familiarizados com os diferentes conceitos.

O professor, frequentemente recorre a apenas uma das visões (clássica ou frequentista), muitas vezes pelo próprio desconhecimento de outras abordagens. Mas a BNCC orienta que essas duas abordagens sejam exploradas de forma que uma se integre a outra, embora haja, muitas vezes, discrepância entre o que está escrito e o que se pratica, pois as escolas e salas de aula englobam diferentes contextos que estão diretamente relacionado às práticas de ensino e aprendizagem (LOPES; SOUZA, 2016).

Na abordagem frequentista o conceito de probabilidade é resultante de longas sequências de experimentos realizados sob as mesmas condições. Contudo, numa situação em que não é possível repetir um experimento muitas vezes, essa abordagem não é viável. O conceito de probabilidade clássica não é suficiente para ser aplicado em qualquer problema, uma vez que ele é adequado apenas em situações de equiprobabilidade. A equiprobabilidade se trata de uma situação em que todos os resultados possíveis do espaço amostral são igualmente prováveis de acontecer. Por exemplo, quando lançamos uma moeda, a probabilidade de se obter cara é a mesma de se obter coroa.

Para ampliar e formalizar esses conhecimentos, Kolmogorov (1903-1987) empregou a teoria dos conjuntos, formalizou um sistema de axiomas e provou sua eficiência em muitas aplicações (BATANERO; HENRY; PARZYSZ, 2005). Essa abordagem se refere à

probabilidade axiomática, e o seu objetivo é realizar cálculos precisos a partir de leis matemáticas (NACARATO; GRANDO, 2013).

Um outro conceito de probabilidade é o subjetivo, que tem como base a avaliação pessoal, ou seja, o julgamento de uma pessoa acerca do quão provável é a ocorrência de determinado fenômeno, baseando-se na sua experiência pessoal (COUTINHO, 2013). Convém ressaltar que esta visão da probabilidade não é discutida na BNCC, talvez pelo próprio caráter subjetivo, mas tem sua importância para a formação do indivíduo por estar diretamente relacionada à tomada de decisões, através das suas observações e experiência. Enquanto as abordagens clássica e frequentista são propriedades do mundo real, a subjetivista está relacionada à mente do indivíduo, passando de uma avaliação externa ao sujeito para uma avaliação centrada no sujeito (NACARATO; GRANDO, 2013).

Uma das habilidades propostas pela BNCC para o estudo de probabilidade, orienta que o estudante conheça diferentes tipos de espaço amostral, como os contínuos, por exemplo. Nesse caso, as representações de medidas contínuas relacionadas ao comprimento, a área e ao volume podem ser atendidas a partir da probabilidade geométrica. Mesmo que o documento orientador não se refira explicitamente à essa expressão, essa abordagem atende a proposta esperada pela habilidade mencionada.

Os documentos reguladores de ensino, ao tratar sobre o tema probabilidade, apresentam objetivos que despertam o interesse de pesquisadores em saber se esses objetivos são postos em prática pelos professores que lecionam Matemática. Levando em conta que a BNCC propõe para o ensino de probabilidade situações do cotidiano que envolvem fenômenos probabilísticos, vale ressaltar a necessidade de se revelar um ensino desvinculado do modelo determinístico que a Matemática assume, trazendo a ideia de acaso, a fim de garantir a esses estudantes um formação cidadã sendo capazes de tomar decisões de forma consciente (ALMEIDA; FARIAS, 2018; BRASIL, 2018; EUGÊNIO, 2019).

Para contextualizar o ensino de probabilidade do Ensino Médio geralmente o professor utiliza situações de jogos, chances e acaso, no entanto, essa prática é feita por meio da interpretação clássica em que os espaços amostrais são equiprováveis, o que geram obstáculos de aprendizagem, uma vez que pode levar o estudante a pensar que os eventos aleatórios são, necessariamente equiprováveis. Nessa perspectiva, a BNCC reforça a importância do modelo frequentista para a abordagem deste conteúdo, onde o determinismo matemático dá lugar à incerteza (ALMEIDA; FARIAS, 2018; BRASIL, 2018).

A integração de diferentes enfoques probabilísticos auxilia os alunos a compreenderem de forma mais ampla os conceitos dessa temática como diferenciar os experimentos aleatórios

dos determinísticos, espaços amostrais equiprováveis e não-equiprováveis e tipos de eventos. Assim, é necessário que haja um desprendimento do determinismo recorrente nos currículos de Matemática, em face de uma busca de conceitos presentes em problemáticas diversas que compõem elementos da aproximação, do aleatório e da estimativa, deixando de lado a abordagem baseada apenas no uso de algoritmos e expressões matemáticas (MONTEIRO; MARTINS, 2016).

### 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Essa análise partiu da necessidade de analisar como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) no Ensino Médio. Para alcançar o objetivo proposto, fez-se uso de uma abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 2010), por meio de uma pesquisa documental (FIORENTINI; LORENZATO, 2012), uma vez que foram analisados livros didáticos. Também se buscou na literatura já produzida sobre o tema apoio de constructos que discutiram o tema em questão em livros didáticos, além daqueles que problematizam o ensino e a aprendizagem de probabilidade de seus vários significados/abordagens.

O *corpus* é composto por três livros didáticos, aprovados pelo PNLD 2018-2020. O processo de escolha se deu por meio dos resultados recomendados no Guia Nacional do Livro Didático, na etapa do Ensino Médio, sendo selecionadas as três editoras mais escolhidas no Brasil em 2018. São eles: a) Matemática: contexto e aplicações, Dante (2016); b) Matemática: ciência e aplicações, Iezzi et al. (2016); e, c) Conexões com a Matemática, Leonardo (2016); respectivamente das editoras Ática, Saraiva e Moderna. Geralmente, o conteúdo de probabilidade é explorado na segunda série do Ensino Médio, porém a amostra apresenta um dos livros em que o conteúdo é proposto na terceira série. Para facilitar a análise, os livros foram nomeados como LD01 (DANTE, 2016), LD02 (IEZZI, et al., 2016) e LD03 (LEONARDO, 2016).

Foi realizada uma leitura e uma descrição criteriosa que permitiram comparar as abordagens didático-pedagógicas presentes em cada livro e verificar se elas atendem às competências e habilidades propostas pelos documentos oficiais que orientam a Educação Básica no Brasil, com vistas ao ensino e à aprendizagem de probabilidade, bem como as abordagens acerca das diferentes abordagens de probabilidade. Foram considerados para fins de análise dos livros didáticos: a) número de páginas dedicadas ao conteúdo de probabilidade;

b) abordagem inicial: apresentação do conteúdo; c) conceitos básicos de probabilidade: experimento aleatório, espaço amostral, evento; d) definição e classificação de eventos; e) abordagem de probabilidade; f) probabilidade condicional; e, g) eventos independentes;

#### 4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

O que foi objeto de estudo em cada coleção? LD01, foi analisado o volume 2, que divide o conteúdo em quatro unidades e o estudo de probabilidade, objeto dessa pesquisa, é abordado na última unidade. A unidade 4 deste LD está dividida em dois capítulos, um para o estudo de análise combinatória e o outro para o estudo de probabilidade. O LD02, o tema também está no volume 2, trazem os conteúdos dispostos em onze capítulos, e a probabilidade é estudada no último capítulo. O LD03 aborda o conteúdo de probabilidade no terceiro volume de sua coleção. O autor organizou os conteúdos do terceiro ano do Ensino Médio em nove capítulos e o objeto de estudo deixou de estar final do livro, como geralmente acontece, e foi contemplado no segundo capítulo.

##### a) Número de páginas dedicadas ao estudo de probabilidade

Com base no guia dos livros didáticos 2017, o PNLD não recomenda que as obras tenham um número excessivo de páginas, então foi estabelecido para 2018 que o número de páginas por volume não ultrapassasse 288 páginas no livro do aluno e 420 no manual do professor (BRASIL, 2017), e, ao observar os anos anteriores, nota-se que esse número vem diminuindo a cada período.

Tabela 1 – Quantidade de páginas dos livros escolhidas

Livro didático	Número de páginas do livro do aluno	Páginas destinadas ao estudo de probabilidade		Número de páginas do manual do professor
		Freq. Absoluta	Freq. Relativa (*)	
LD01	280	33	11,8%	392
LD02	288	23	8%	416
LD03	223	35	15,7%	351

Fonte: Elaboração própria

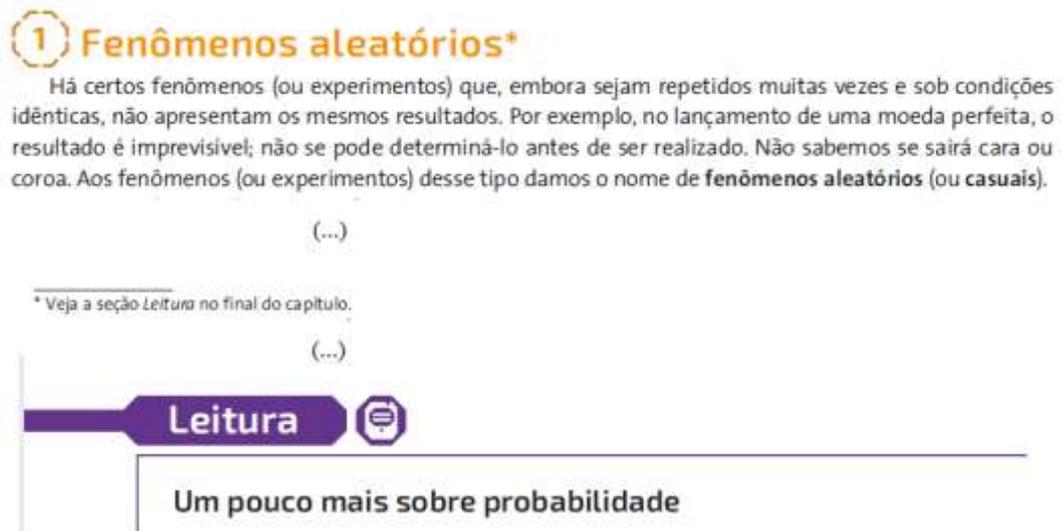
(\*) Essa frequência relativa é um valor aproximado.

Ao comparar o número de páginas do livro com o número de páginas dedicadas à probabilidade, observa-se que o LD03 tem menos páginas que os demais, no entanto, o conteúdo de probabilidade contempla mais páginas com relação aos outros dois. Vale ressaltar ainda que a quantidade não implica necessariamente na qualidade da sua abordagem, e por isso, é preciso que outros critérios de análise sejam levados em consideração.

## b) Abordagem inicial

Em LD01, o conteúdo é iniciado a partir de uma explicação sobre fenômenos aleatórios e a sua imprevisibilidade. Em seguida, é proposto que se forme grupos de quatro alunos para discutirem um jogo de roleta, pouco comum no Brasil, portanto a maioria dos estudantes não conhecem as regras e chances envolvidas. São explicadas as regras e alguns questionamentos são feitos para discussão dos grupos, por meio de noções intuitivas. Outras questões podem ser discutidas, como as proibições de jogos de azar no Brasil. Há uma sugestão de leitura para compreensão de conceitos envolvendo aleatoriedade, como mostra a figura abaixo.

Figura 4 – Sugestão de leitura proposta pelo LD01

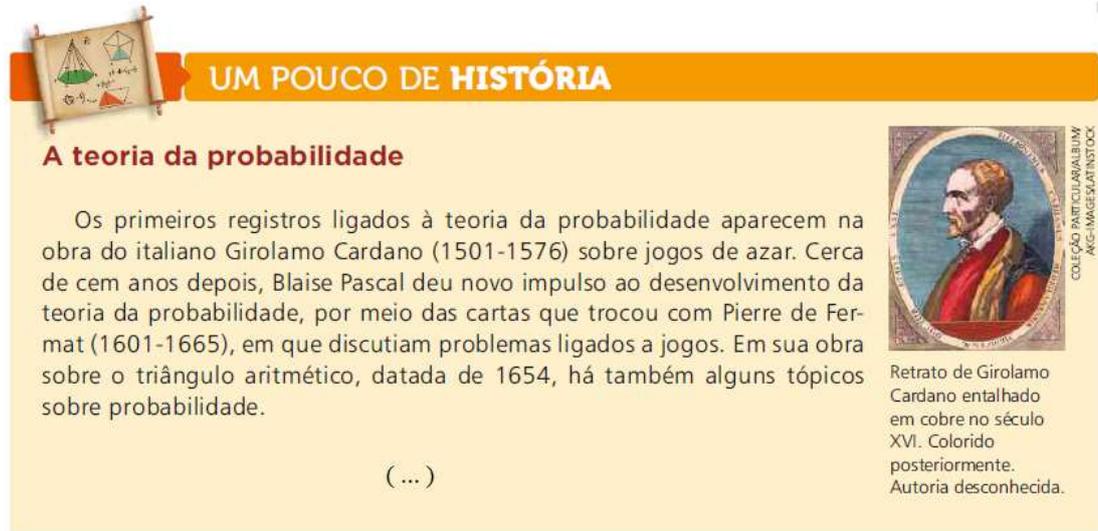


Fonte: Dante (2016b, p. 232)

Já no LD02, a compreensão dos conceitos relacionados ao experimento aleatório é feita uma abordagem sobre os sorteios da megasena, um jogo de loteria, explicando que mesmo que os sorteios sejam em condições idênticas, não é possível prever o resultado. Mas é possível

fazer previsões sobre as chances de um acontecimento ocorrer, a partir de análise de dados, quando um experimento é realizado muitas vezes. Em seguida, o autor traz uma abordagem histórica sobre os primeiros registros acerca da teoria das probabilidade como na figura abaixo.

Figura 5 – Abordagem histórica da teoria da probabilidade em LD02



**UM POUCO DE HISTÓRIA**

**A teoria da probabilidade**

Os primeiros registros ligados à teoria da probabilidade aparecem na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576) sobre jogos de azar. Cerca de cem anos depois, Blaise Pascal deu novo impulso ao desenvolvimento da teoria da probabilidade, por meio das cartas que trocou com Pierre de Fermat (1601-1665), em que discutiam problemas ligados a jogos. Em sua obra sobre o triângulo aritmético, datada de 1654, há também alguns tópicos sobre probabilidade.

( ... )

Retrato de Girolamo Cardano entalhado em cobre no século XVI. Colorido posteriormente. Autoria desconhecida.

Fonte: Iezzi et al. (2016b, p. 253)

Em LD03, o autor apresenta um pequeno texto sobre uma situação de jogo de futebol, a qual é lançada uma moeda para sorteio de início de partida sugerindo implicitamente o conceito de experimento aleatório. Em seguida são expostos os objetivos do capítulo, dividido em três itens: i) determinar espaço amostral, os eventos, e o número de elementos desses conjuntos; ii) calcular a probabilidade de ocorrência de um evento; iii) trabalhar com situações-problemas que envolvam a teoria das probabilidades.

Os LD abordam inicialmente a definição de eventos aleatórios, pois trata-se das noções básicas da probabilidade. A probabilidade possibilita uma compreensão além do pensamento determinístico, oportunizando ao sujeito o contato com situações que envolvem acontecimentos aleatórios com base na incerteza e no acaso, o que numa visão determinista, torna-se impossível de ser tratado, pois a probabilidade é o ramo da Matemática que modela fenômenos não determinísticos (BATISTA; BORBA, 2016; SILVA JÚNIOR; COSTA, 2018). E para o desenvolvimento do pensamento probabilístico faz-se necessário que o aluno compreenda as noções básicas, a saber, eventos aleatórios e espaço amostral (SANTANA; BORBA, 2016).

Para que aconteça a aprendizagem probabilística, a utilização de jogos, lançamento de moedas ou dados, sorteios constituem um apoio para a compreensão de situações que envolvem probabilidade no mundo real e é capaz de mobilizar a interdisciplinaridade e a ludicidade para

alcançar um aprendizado mais significativo. A utilização de objetos físicos como moedas e dados servem como suporte importante para que o aluno acompanhe o acontecimento de um fenômeno aleatório ou não aleatório. Inclusive, pode ser útil ao professor, considerando que uma das teorias da probabilidade está pautada em avaliar jogos de azar (MONTEIRO; MARTINS, 2016).

A proposta do LD03 em trazer o tema de probabilidade para o terceiro ano do Ensino Médio pode contemplar um estudo mais eficiente deste conteúdo, uma vez que por estar inserido nos primeiros capítulos, geralmente os professores seguem a ordem sequencial disposta no livro didático.

Nesse sentido, os últimos capítulos do LD03 são vistos no último período do ano letivo, o que gera alguns obstáculos para a aprendizagem, seja por estudantes que após alcançarem nota suficiente para aprovação, já não dão a devida importância para os conteúdos restantes, seja pelo tempo insuficiente que o professor tem para ministrar todos os conteúdos propostos no livro, ou ainda que seja outros problemas externos ao contexto da sala de aula, como o problema com transportes, que no final do ano, nem sempre garante a presença de todos os estudantes na escola. O problema com transportes geralmente acontece em escolas com muitos estudantes da zona rural, pois quando o transporte é mantido pelo município, às vezes o calendário escolar estadual não é compatível com o calendário municipal, levando em conta que o Ensino Médio é responsabilidade do governo estadual.

Outra questão a ser discutida no LD03 é que os conhecimentos de estatística são importantes para os conceitos de probabilidade, a saber, população, amostra, variáveis contínuas e discretas, distribuição de frequências. No entanto, esses conhecimentos são vistos logo após os conhecimentos básicos de probabilidade, mas o autor retoma esses conceitos no final do capítulo de estatística, associando-os à abordagem frequentista. Ele expõe os conceitos de probabilidade no capítulo 2 e o conteúdo de estatística no capítulo seguinte, retomando a probabilidade no final do capítulo 3.

Na abordagem inicial, apenas o LD01 exige a participação prática do estudante na construção das primeiras noções probabilísticas, propor uma abordagem frequentista de probabilidade. No LD02, o autor induz a reflexões sobre esse conhecimento, num contexto do dia a dia, e em seguida contando como tudo começou por meio do contexto histórico. E o LD03, para os conceitos iniciais, não exige muito do estudante, uma vez que a primeira página já diz os objetivos do capítulo. Os LD também apresentam caixinhas de diálogo que favorecem um conhecimento a parte sobre o conteúdo, proporcionando experiências que contribuem para a ampliação do conhecimento estudado. O aprofundamento do conhecimento de probabilidade é

incentivado fora do contexto diário da escola, como sugestões de livros e sites, e a aplicação do conteúdo em outros contextos e áreas.

### c) Conceitos básicos de probabilidade

Nos LD são apresentados os conceitos chaves para o estudo de probabilidade: experimento, espaço amostral e evento.

No LD01, o autor expõe que, em um experimento (ou fenômeno) aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral ( $\Omega$ ). Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado evento. Esses conceitos são apresentados inicialmente de forma direta, enquanto no LD02, são discutidos por meio de um exemplo de sorteio das dezenas da megasena, o qual se trata de um exemplo que denominamos experimento aleatório, cujo resultado, entre os casos possíveis, não pode ser previsto com certeza, dependendo exclusivamente do acaso. O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado espaço amostral e é indicado pela letra grega  $\Omega$  (lê-se “ômega”). E evento é qualquer subconjunto do espaço amostral ( $\Omega$ ) de um experimento aleatório.

No LD03, antes de expressar os conceitos, é feita a análise de uma situação em que uma moeda é lançada e que não é possível saber o seu resultado. Logo trata-se de um experimento aleatório. Os possíveis resultados cara ou coroa são os eventos e o conjunto {cara, coroa} é o espaço amostral. Os conceitos são definidos após a situação ser analisada. Experimento aleatório é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta, entre as possibilidades, resultados imprevisíveis. O espaço amostral ( $S$ ) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento e o evento ( $E$ ) é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

No LD01, o autor resume os conceitos num parágrafo só, porém, é feita uma abordagem exclusiva para os tipos de eventos: certo, impossível e mutuamente exclusivo. No LD02, o conceito de experimento aleatório é apresentado por meio de um exemplo, enquanto no LD03, os conceitos são apresentados separadamente. Há também uma diferença na linguagem simbólica. Nos LD01 e LD02, o espaço amostral é representado pela letra grega  $\Omega$ , enquanto no LD03 esse conjunto é representado pela letra latina  $S$ . A respeito desses conceitos, a BNCC propõe que os estudantes desenvolvam a habilidade de identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade (BRASIL, 2018).

Alguns conceitos para a teoria das probabilidades são considerados conceitos-chave, como o *espaço amostral* que se refere a um conjunto de todos os resultados possíveis para um determinado experimento; e o conceito de *evento* como um subconjunto do espaço amostral, oportunizando o desenvolvimento de noções intuitivas sobre o possível. Nesse sentido, o estudante deve conhecer esses conceitos para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico em relação às noções mais complexas (NÓBREGA; SPINILLO, 2016).

Estudar probabilidade requer um novo olhar sobre a Matemática, a disciplina deixa de ter característica essencialmente embasada no determinismo, dando lugar à incerteza, embora os livros didáticos geralmente só apresentem uma abordagem instrumental dos conceitos, onde a incerteza é pouco enfatizada ao longo do conteúdo (OLIVEIRA; CORDANI, 2016).

#### **d) Definição e classificação de eventos**

O LD01 apresenta um exemplo “lançar um dado e anotar o resultado”. Daí o autor cita os elementos que compõem o espaço, e nesse contexto, exemplifica um evento certo, um evento impossível, a união e a interseção entre dois eventos, e por fim, um exemplo de eventos complementares, explicando que quando a interseção de dois eventos for um conjunto vazio, trata-se de eventos mutuamente exclusivos. Todos esses conjuntos são representados pela sua propriedade e simbolicamente pela citação de seus elementos. Um pouco mais adiante o autor retoma os conceitos de certeza e impossibilidade de eventos, porém, partindo de uma propriedade que compõe os axiomas da teoria das probabilidades.

Para o estudo de eventos, o LD02 apresenta uma situação de uma urna com 20 bolas numeradas de 1 a 20, que constitui o espaço amostral. O autor constrói alguns subconjuntos desse conjunto que compõe o espaço amostral, mas a definição de evento certo e evento impossível não foi tratado ao expor os exemplos, como foi feito no LD01. Nesse caso, o autor põe ao lado uma caixinha de diálogo de observações explicando o que é um evento certo e um evento impossível. E no final dessa explicação, ele define o que é um evento.

A respeito do evento complementar, o LD02 separa uma seção apenas para ele, porém continua utilizando o exemplo da urna com as 20 bolas numeradas, a qual ele representa o conceito em forma de diagrama e também no formato simbólico, enquanto o LD01 não utiliza a representação dos conjuntos em diagrama. Esse é um dos pontos positivos no LD02, pois as imagens podem contribuir para a melhor visualização do contexto descrito. A respeito do conceito de união e interseção de eventos, o LD02 não faz tanta referência, apenas uma pequena observação no campo dos eventos complementares:  $E \cup \bar{E} = \Omega$  e  $E \cap \bar{E} = \emptyset$ .

O LD03 explana os tipos de eventos de maneira bem direta, explicando o que é um evento certo e um evento impossível, mas traz um conceito que os outros LD não abordam: o evento elementar (simples). Ele explica que quando o subconjunto é unitário, denomina-se evento simples ou elementar.

Os LD01 e LD02 fazem uma abordagem bastante semelhante sobre os conceitos de eventos, embora o primeiro dê mais ênfase à união e à interseção de eventos que o segundo. Mas o LD02 apresenta os eventos em diagrama, o que não é visto nos outros LD analisados. No LD03 já faz uma abordagem mais sucinta, embora traga um conceito de evento elementar que não é mencionado nos dois anteriores.

Em relação aos conhecimentos sobre eventos de um experimento, a BNCC recomenda, através de suas habilidades, que o estudante precisa identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, reconhecendo eventos equiprováveis e não equiprováveis e como se dá as implicações no cálculo de probabilidade. É proposto, ainda, que o estudante desenvolva também a habilidade de resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos (BRASIL, 2018).

Compreende-se que na maioria das situações reais os casos de equiprobabilidade são poucos, não podendo ser utilizada a definição clássica. Nesse caso é mais viável que a probabilidade seja calculada utilizando-se a frequência relativa de um evento, gerando um valor aproximado (SILVA JÚNIOR; COSTA, 2018).

A BNCC sugere que a proposta de trabalho com probabilidade seja centrada nas noções de probabilidade a fim de desenvolver a compreensão de que nem todos os fenômenos são determinísticos e o aluno deve entender que há eventos certos, eventos impossíveis e eventos prováveis, ressaltando que eles devem verbalizar esses conceitos (BRASIL, 2018).

## **e) abordagens de probabilidade: frequentista, clássica, formal, geométrica e subjetiva**

### **(i) Abordagem frequentista:**

Embora a abordagem frequentista seja recomendada pela BNCC, o LD01 não faz referência a esse tipo de abordagem, nem mesmo algum exercício que explore o conceito de probabilidade nessa perspectiva. Já o LD02 apresenta, inicialmente, para introdução do conceito de probabilidade, uma simulação, na qual uma moeda é lançada 80 vezes, remetendo à importância da construção do conceito, por meio da definição frequentista, ao usar a frequência relativa do evento para explicar que a medida que se aumenta o número de

lançamentos, verifica-se que as frequências relativas correspondentes à cara e à coroa ficam cada vez mais próximas, tendendo ao valor 0,5.

O enfoque frequentista abordado no LD03 não é tratado no capítulo de probabilidade, mas no capítulo sobre análise de dados a partir das noções de estatística. A visão frequentista é proposta para determinar a probabilidade de um evento ocorrer usando a frequência relativa. Como exemplo, o autor traz o cálculo do valor da apólice de seguros, o qual leva-se em conta, entre outros fatores, o número de carros roubados de um determinado modelo em relação ao total de carros daquele mesmo modelo. É enfatizado que a frequência relativa é usada com maior eficiência na probabilidade em situações com uma grande quantidade de experimentos. Há também alguns exercícios que propõem lançamentos de uma moeda e de dados, para a construção do conceito de probabilidade por meio da tabela de frequências.

Num contexto da percepção frequentista, um determinado experimento deve ser realizado um número elevado de vezes, considerando-se sempre as mesmas condições. Nesse sentido, as simulações feitas em computador, através das planilhas eletrônicas, por exemplo, podem representar bons resultados para o aprendizado. As simulações empíricas permitem que os estudantes percebam os conceitos antes mesmo da formalização dos conceitos. É importante ressaltar que, na abordagem frequentista da probabilidade, o valor obtido é uma estimativa e a sua qualidade vai depender da amostra, sabendo que quanto maior for a amostra, mais fiel é a qualidade do resultado (SILVA JÚNIOR; COSTA, 2018; SOUZA; SOUZA, 2019).

Para que o estudante amplie e aprofunde os seus conhecimentos sobre probabilidade, a BNCC recomenda atividades nas quais eles façam experimentos aleatórios e simulações e confrontem os resultados com a probabilidade teórica (BRASIL, 2018). A experimentação permite ao estudante o aprendizado de probabilidade e oportuniza momentos de observação, confronto e dúvida para a construção conceitual e o desenvolvimento do pensamento probabilístico (SILVA JÚNIOR; COSTA, 2018).

### **(ii) Abordagem clássica:**

Para a definição de probabilidade, ao considerar as abordagens, o LD01 faz uma abordagem inicial, partindo da definição clássica, ao mostrar que nos eventos equiprováveis e um espaço amostral finito ( $\Omega$ ), a probabilidade de ocorrer um evento A, indicado por  $p(A)$ , é:

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Enquanto no LD02, a definição clássica é apresentada por meio de uma demonstração, partindo das características da visão frequentista.

Os autores sugerem um espaço amostral  $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  finito e afirmam que quando o espaço é equiprovável, nota-se que  $p(\{a_1\}) = p(\{a_2\}) = \dots = p(\{a_k\})$ , ou ainda,  $p_1 = p_2 = \dots = p_k$ . Como  $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ , para todo  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , tem-se:  $p_i = \frac{1}{k}$ . Se o evento  $E = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ , formado por  $r$  elementos ( $r \leq k$ ), subconjunto de  $\Omega$ , então  $p(E) = p_1 + p_2 + \dots + p_r = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \dots + \frac{1}{k} = \frac{r}{k}$

$$\text{Assim, } p(E) = \frac{r}{k} = \frac{\text{número de elementos de } E}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \text{ (visão clássica)}$$

Ainda sobre a definição clássica de probabilidade, o LD03 apresenta um exemplo de um casal que pretende ter dois filhos e quer saber a chance de serem dois filhos do sexo masculino. É apresentado o espaço amostral  $S$  e o evento  $E$ .

$$S = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}.$$

$$E = \{(M, M)\}. \text{ Então a chance é de 1 para 4, ou seja, } \frac{1}{4}.$$

Após a análise do exemplo, o LD03 apresenta a definição:

Em um espaço amostral equiprovável  $S$ , finito e não vazio, a probabilidade de ocorrência de um evento  $E$ , indicada por  $P(E)$  é a razão entre o número de elementos do evento  $n(E)$  e o número de elementos do espaço amostral  $n(S)$ .  $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

Nos três LD, a abordagem clássica da probabilidade é apresentada sobre diferentes vieses. A BNCC sugere que a abordagem clássica da probabilidade seja construída por meio da definição frequentista, e no LD02, os autores utilizam argumentos da definição frequentista para demonstrar matematicamente a clássica, atendendo a proposta do documento orientador, embora as discussões a respeito da definição frequentista ressaltam a importância da realização de experimentos.

Vale ressaltar também que, para o cálculo da probabilidade numa visão clássica, os eventos considerados devem ser igualmente prováveis, enquanto na visão frequentista, não existe essa preocupação. A abordagem clássica não pode ser aplicada em qualquer contexto e, devido a esse fato, ela é amplamente criticada (LOPES; SOUZA, 2016; BRASIL, 2018).

O documento orientador propõe ainda que os estudantes desenvolvam a capacidade de analisar criticamente questões sociais, observando que nem sempre um resultado é único e conclusivo. O conceito de probabilidade não pode se restringir a uma única abordagem de

problemas que envolvem conjuntos finitos ou eventos equiprováveis, pois dessa forma acaba comprometendo a aprendizagem dos estudantes, gerando obstáculos na sua aprendizagem. Apesar de as pesquisas mostrarem outras abordagens da probabilidade, a BNCC não apresenta discussões acerca de outras abordagens além da clássica e frequentista (LOPES; SOUZA, 2016; ALMEIDA; FARIAS, 2018).

### **(iii) Abordagem formal ou axiomática:**

A abordagem formal ou axiomática da probabilidade no LD01 é feita a partir de uma análise do lançamento de uma moeda perfeita, onde são observadas e definidas as propriedades. Para essa abordagem, o autor retoma e amplia conceitos já apresentados no início do capítulo, utilizando operações na teoria dos conjuntos para demonstrar as propriedades, fazendo uso da representação em diagrama.

O LD02 apresenta a definição axiomática (formal) da probabilidade, porém, diferentemente do LD01, pois a demonstração é feita apenas utilizando operações mais simples, como a notação de eventos e espaço amostral. O autor ainda enfatiza, em uma seção individual do capítulo, os casos de eventos mutuamente exclusivos, enquanto no LD01 este conceito não tem tanta ênfase, sendo apenas citado em uma das propriedades. Para a construção dos conceitos de *união de dois eventos quaisquer* e *eventos mutuamente exclusivos*, o LD02 apresenta um exercício resolvido, porém não menciona que se trata desses conhecimentos. Apenas apresenta a resolução utilizando diagramas e cálculos de probabilidade com conceitos que envolvem teoria dos conjuntos.

Ao considerar a abordagem formal de probabilidade, o LD03 apresenta cada propriedade aplicada a uma situação, sem a necessidade de recorrer à demonstração. As propriedades são exploradas nas seções que tratam de eventos complementares, interseção de dois eventos, união de dois eventos e eventos mutuamente exclusivos. Para tratar de cada propriedade, o autor utiliza situações-problema, discutidas em seções individuais, resolvendo e validando a solução pela propriedade adequada. Ele ainda utiliza diagramas que ajudam na resolução e interpretação dos problemas.

A definição axiomática da probabilidade, apesar de ser pouco discutida, é fundamental para a formalização dos conceitos, pois fortalece sua validade (LOPES; SOUZA, 2016). Os livros didáticos analisados apresentaram a abordagem axiomática relacionada com a clássica. Geralmente, a abordagem axiomática é feita com base na teoria dos conjuntos, podendo apresentar dificuldades e gerar obstáculo no aprendizado do conceito de probabilidade e,

consequentemente, implicando na resolução de problemas dos estudantes (OLIVEIRA; CORDANI, 2016).

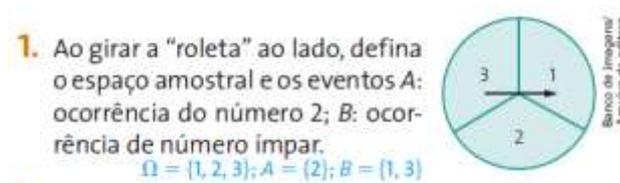
Nesse sentido, os LD analisados contemplam a habilidade que a BNCC propõe, referente às estratégias de resolução de problemas que utilizam o princípio aditivo, em eventos mutuamente exclusivos, a partir das noções da teoria dos conjuntos (BRASIL, 2018).

A teoria das probabilidades foi formalizada no século XVII a partir da influência da abordagem clássica, mas não tinha clareza suficiente para que a teoria pudesse avançar. Hoje a probabilidade é compreendida e formalizada por meio de um sistema de axiomas proposto por Kolmogorov, em 1928 (LOPES; SALVADOR; BALIEIRO, 2013; ALMEIDA; FARIAS, 2018).

#### (iv) Abordagem geométrica:

Apesar de não estar registrada explicitamente esta abordagem na apresentação do conteúdo, o LD01 traz uma questão que poderia ser explorado o enfoque geométrico, porém, não houve, de fato, essa intenção na resolução da questão. Abaixo tem-se a questão retirada do LD01:

Figura 6 – Questão de probabilidade envolvendo eventos e espaço amostral



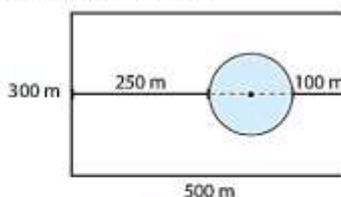
Fonte: Dante (2016, p. 237)

Essa questão poderia trabalhar conceitos geométricos associados à probabilidade, trazendo assim a abordagem geométrica, uma vez que esses conceitos são pouco explorados quando se fala em probabilidade. Isso foi observado, levando em conta que foi o único exercício que chegou mais próximo desta abordagem. Porém, é preciso entender que, para o estudo desta abordagem, são necessários outros elementos geométricos que estejam associados às medidas de grandezas geométricas contínuas, como comprimento, área e volume. No círculo apresentado na questão, dividido em três setores, aparentemente com mesma área e enumerada, não faz sentido relacionar a probabilidade com a área. Outro motivo é que a questão solicita a definição do espaço amostral e dos eventos. Ela poderia ser adaptada, se quiséssemos tratar da abordagem geométrica.

Dos três LD analisados, o LD02 foi o único que, de fato, apresentou a abordagem geométrica da probabilidade. Os autores fazem essa abordagem através de um exercício que envolve área da superfície geométrica.

Figura 7 – Questão envolvendo probabilidade geométrica

**31** Conta uma lenda que um tesouro foi escondido em algum lugar de um terreno, abaixo da superfície da terra.  
A figura seguinte mostra a vista superior do terreno, em que o círculo mostrado é a projeção ortogonal, sobre o plano do solo, de um reservatório de água vazio com formato cilíndrico. Observe as dimensões indicadas.



Qual é a probabilidade de que o tesouro não tenha sido escondido abaixo da região limitada pelo reservatório? Use  $\pi \approx 3$ .

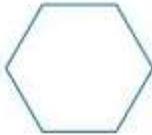
Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 262)

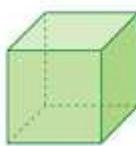
Trata-se de uma questão que exigem conhecimento de área da região retangular e área do círculo, e um certo raciocínio para entender o que a questão está solicitando. Para a sua resolução, utiliza-se a abordagem clássica, calculado a razão entre os casos favoráveis (diferença entre a área da superfície retangular e a área do círculo) e os casos possíveis (área total do retângulo sem excluir o círculo).

De acordo com a definição da abordagem geométrica, não há menção sobre este conceito no LD03. Mas há dois exercícios que podem ser questionados por exigir algum conhecimento geométrico na sua resolução, muito embora exija também conhecimentos de análise combinatória.

Figura 8 – Questões envolvendo probabilidade clássica

- 18.** Escolhem-se, aleatoriamente, 3 dos 6 vértices do hexágono regular apresentado ao lado. Calcule a probabilidade de os vértices escolhidos formarem um triângulo equilátero.  $\frac{1}{10}$


- 19.** Sorteando-se ao acaso 2 vértices quaisquer de um cubo, determine a probabilidade de esses vértices não estarem na mesma face.  $\frac{1}{7}$



Fonte: Leonardo (2016, p. 44)

Mesmo que exija conhecimentos geométricos, as questões propostas no LD03 não se inserem no significado da abordagem geométrica, definida como a probabilidade na qual o espaço amostral compõe conjuntos contínuos com medidas de grandezas geométricas contínuas, como o comprimento, a área e o volume (COUTINHO, 2013).

A probabilidade geométrica trata-se de uma abordagem em que os problemas envolvem fenômenos relacionados aos conhecimentos de geometria envolvendo pontos sobre um segmento de reta, figuras planas ou sólidos. Esta concepção é pouco explorada nos livros didáticos de matemática no Brasil (LOPES; SALVADOR; BALIEIRO, 2013), embora seja bastante adequada para introduzir a noção de probabilidade contínua. Este conceito de probabilidade não é mencionado na BNCC, no entanto, em uma das habilidades propostas pelo documento, enfatiza-se o reconhecimento da existência de diferentes espaços amostrais, discretos ou não (contínuos) (BRASIL, 2018).

#### **(v) Abordagem subjetiva:**

O LD01 não apresenta nenhuma noção da abordagem subjetiva de probabilidade, porém, há uma sugestão de vídeo no qual é discutido este conceito, onde é ressaltado a importância de se conhecer bem um determinado evento para que se possa afirmar se um fenômeno tem chances de ocorrer ou não, partindo de experiências analisadas no contexto do fenômeno. O LD02 também não faz nenhum tipo de referência que nos dê aporte para discussão desse tipo de abordagem de probabilidade.

Entretanto, no LD03 são apresentados questionamentos e reflexões a respeito desta abordagem quando traz observações sobre a probabilidade de um medicamento fazer o efeito desejado, ou a probabilidade de acontecer um acidente aéreo, ou haver sequela após um determinado tipo de cirurgia.

Vale enfatizar que a teoria subjetivista envolve um certo grau de crença e não deve ser confundida com um julgamento sem fundamento, pois se trata de uma forma qualitativa de conhecimento baseada em experiências que atendam a certas condições (NACARATO; GRANDO, 2013; BOROVCNIK, 2016).

A probabilidade subjetiva está relacionada com as decisões racionais entre as diferentes opções de incertezas. Os resultados de um fenômeno sob a visão subjetivista são descritos como graus de crença, por meio de julgamento, informações e experiências relacionadas a um determinado resultado. Mas não deve ser confundida com um julgamento arbitrário da probabilidade, pois trata-se de uma forma qualitativa devendo atender a certas condições. Um

exemplo a ser observado, são os fenômenos climáticos que não dependem exclusivamente de um cálculo clássico, mas é possível obter uma previsão a partir da observação (BATANERO; HENRY; PARZYSZ, 2005).

#### f) Probabilidade condicional

Para a construção do conceito de probabilidade condicional, o LD01 apresenta inicialmente dois problemas. Um dos problemas envolve o lançamento de um dado, no qual, um dado é lançado e observa-se sua face. O espaço amostral é  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$ . Considera-se os eventos:

Evento A: o resultado é ímpar =  $\{1, 3, 5\} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$

Evento B: o resultado não é 6 =  $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow n(B) = 5$

A probabilidade de ocorrer A dado que B já ocorreu, denotamos por  $p(A|B)$ , é

$$p(A|B) = \frac{3}{5} = 0,6$$

Os casos possíveis são os elementos de B e não mais os de  $\Omega$ . E os casos favoráveis não são mais apenas os elementos de A, e sim os elementos de  $B \cap A$ , pois só os elementos pertencentes a B podem ocorrer.

No segundo problema tem-se:

Oito amigos, sendo 4 homens e 4 mulheres, estão reunidos para revelar seus amigos secretos durante uma confraternização de final de ano. Todos estão sentados na sala, escolhendo quem irá começar. Filipe se dispõe a ser o primeiro a falar. Ele se levanta e vai para o meio da roda. Nesse momento, a chance de um dos sete participantes sentados ser o amigo secreto de Filipe é de  $1/7$ . Lúcia, como uma das participantes, tem essa chance de  $1/7$ . Gabriel também. [...] Filipe começa: “Meu amigo secreto é uma mulher!”. Nesse momento, Gabriel exclama decepcionado. Ele sabe, mesmo que intuitivamente, que a partir desse momento a chance de um dos homens ser o amigo secreto de Filipe é zero. Ao mesmo tempo, a chance de Lúcia, bem como das outras três mulheres, passou a ser de  $1/4$  (DANTE, 2016, p. 246).

O autor define cada evento para a aplicação do cálculo da probabilidade condicional.

$$\text{Assim, } p(G|M) = \frac{n(G \cap M)}{n(M)} = \frac{0}{4} = 0 \text{ e } p(L|M) = \frac{n(L \cap M)}{n(M)} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Então } p(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Depois de discutir o problema e resolvê-lo, o autor segue com a definição: “Dados dois eventos A e B, com  $P(B) > 0$ , a probabilidade condicional de ocorrer A, já tendo ocorrido B é

um número dado por  $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ , (DANTE, 2016, p. 246). E, no final da exposição do conceito, o autor sugere que o aluno constata a veracidade da expressão matemática nos dois problemas.

O LD02 desenvolve o conceito de probabilidade condicional por meio de um problema:

Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas: Um avião fretado por uma operadora turística de Minas Gerais partiu de Belo Horizonte com destino a Natal, no Rio Grande do Norte, com 140 passageiros. Durante o voo, cada turista respondeu a duas perguntas: “Já voou antes? Já esteve em Natal?” Um passageiro é selecionado ao acaso e verifica-se que ele nunca tinha viajado de avião. Qual é a probabilidade de que ele já conhecesse Natal? (IEZZI et al., 2016, p.267).

Os dados são organizados em uma figura de tabela extraída do livro, como na figura 7.

Figura 9 – Dados da questão de probabilidade condicional

	Voando pela primeira vez	Já havia voado	Total
Não conhecia Natal	83	22	105
Já conhecia Natal	23	12	35
Total	106	34	140

Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 267)

Para interpretar a probabilidade condicional para esse problema, os autores representam da seguinte forma:

$$p(\text{já conhecer Natal} | \text{primeira vez de avião}) = \frac{\text{número de passageiros que conheciam Natal e viavam pela primeira vez}}{\text{número de passageiros que voavam pela primeira vez}}$$

O problema é representado simbolicamente,

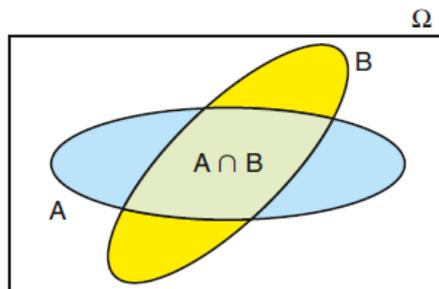
$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

$$p(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Os autores do LD02 ainda representam o problema em diagrama:

Figura 10 – Diagrama do problema do LD02



Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 267)

Os autores fazem uma observação que na probabilidade condicional é mais prático seguir o raciocínio do problema dos turistas no voo, reduzindo o espaço amostral e calculando a probabilidade nesse novo espaço. Eles enfatizam que a expressão matemática obtida tem uma importância mais teórica do que prática.

No LD03, o tópico de probabilidade condicional é abordado a partir de um jogo que consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos a pessoa vence.

Dois amigos decidiram jogar. Um deles escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ele ganhar se não obteve o número 3 no primeiro lançamento?

Evento A: obter o número 3 em pelo menos um dos lançamentos.

$A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

Como  $n(A) = 11$ , então  $p(A) = \frac{11}{36}$

Evento B: não obter o número 3 no primeiro lançamento.

$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$ . Como  $n(B) = 30$ , então  $p(B) = \frac{30}{36}$ . (LEONARDO, 2016, p. 37)

$P(A|B)$  é a ocorrência de A dado que B ocorreu. Assim,

$$P(A|B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \Rightarrow p(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \cong 16,67\%$$

Em relação aos outros LD, o LD03 ainda mostra a probabilidade da interseção de A e B, isolando-se o termo.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0; \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Os três LD atendem à habilidade de resolver problema que envolvem eventos em experimentos aleatórios sucessivos proposta pela BNCC. Essa parte do conteúdo de probabilidade envolve diretamente essa habilidade, pois é necessário que mais de um evento

aconteça, pois trata de a probabilidade de um evento acontecer, dado que outro já aconteceu, ou seja, eventos sucessivos (BRASIL, 2018).

Numa perspectiva de resolução de problema como pontapé inicial para o ensino de algum conteúdo de Matemática, professor e aluno desenvolvem o trabalho juntos e a aprendizagem é realizada de forma colaborativa (BARBA; TEIXEIRA, 2018).

No LD02 há uma observação sobre a importância do desenvolvimento do pensamento dedutivo ao invés de utilizar a expressão matemática. É interessante que o ensino de probabilidade condicional busque o desenvolvimento do pensamento dedutivo e não a memorização de expressão matemática. Entre as estratégias de resolução de problemas que envolvem o conceito de probabilidade condicional, tem-se uma articulação entre a árvore de probabilidade, linguagem natural, tabela de contingência e a linguagem algébrica, cada uma com sua importância para o ensino desse conteúdo. Vale ressaltar que para evitar a confusão entre qual representação usar,  $P(A|B)$  ou  $P(B|A)$ , uma sugestão é começar a árvore pelo dado que é fornecido na condicional (FIGUEIREDO, 2019).

### g) Eventos independentes

Para a definição de eventos independentes, no LD01 é feita uma análise a partir do lançamento de dois dados.

Evento A: Sair 6 no primeiro dado.

Evento B: Sair 3 no segundo dado.

Observa-se que

$$- n(\Omega) = 36$$

$$- A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$- B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$- p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$- p(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$- A \cap B = \{(6, 3)\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

$$- p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

A probabilidade de “sair 3 no segundo dado” não foi afetada pelo fato de “sair 6 no primeiro dado”, ou seja, a probabilidade de ocorrer B não dependeu da ocorrência de A. Logo tem-se que  $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ . E assim,  $p(A \cap B) = p(A|B) \cdot p(B) = p(A) \cdot p(B)$ .

Após a análise do problema, o autor expõe a definição: “Dois eventos A e B de um espaço amostral  $\Omega$  (com  $p(A) \neq 0$  e  $p(B) \neq 0$ ) são independentes, se e somente se,  $p(A|B) = p(A)$ , ou de modo equivalente:  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ ”.

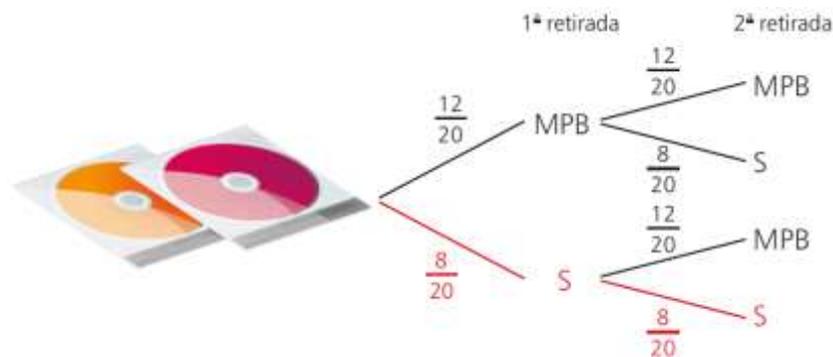
E sobre eventos dependentes, pode-se afirmar que

$$p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$$

No LD02, o conceito de eventos independentes é abordado por meio do seguinte problema:

Doze CDs de MPB e 8 de música sertaneja (S), todos distintos entre si e sem identificação, estão guardados em uma caixa. Um estudante retira, ao acaso, sucessivamente e com reposição, dois desses CDs. Qual é a probabilidade de que os dois CDs retirados sejam de música sertaneja?

Para interpretar esse problema, os autores utilizaram o diagrama de árvore.



Fonte: Iezzi et al. (2016, p. 271)

Para o cálculo de  $p(S \cap S)$ , foi feito da seguinte forma:

$$p(S \cap S) = p(S \text{ na } 1^{\text{a}} \text{ retirada}) \cdot p(S \text{ na } 2^{\text{a}} \text{ retirada} | S \text{ na } 1^{\text{a}})$$

Nesse caso, como o CD extraído na primeira retirada é repostado, na segunda retirada a caixa de CDs contém a mesma quantidade de antes. Logo trata-se da independência entre os eventos.

Portanto,

$$p = p(S \cap S) = \frac{8}{20} \cdot \frac{8}{20} = 0,16 = 16\%$$

Assim, de modo geral, tem-se  $p(A|B) = p(A)$ , ou seja, se o fato de ter ocorrido o evento B não altera a probabilidade de ocorrer o evento A, dizemos que A e B são eventos independentes e vale a relação:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

E em geral, sendo  $A_1, A_2, \dots, A_n$  eventos independentes, temos:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot \dots \cdot p(A_n)$$

No LD03, a seção que se refere à probabilidade de eventos independentes parte de um problema que envolve o lançamento simultâneo de um dado e uma moeda. Adotando C para cara e K para coroa, tendo o espaço amostral S.

$$S = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6)\}$$

$$n(S) = 12.$$

Considerando:

- A: sair cara na moeda
- B: sair um número múltiplo de 3 num dado

Então:

$$A = \{(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6)\} \text{ e } P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(C, 3), (C, 6), (K, 3), (K, 6)\} \text{ e } P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$A \cap B = \{(C, 3), (C, 6)\} \text{ e } P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Após a resolução da probabilidade da interseção de dois eventos, é aplicada na definição de probabilidade condicional.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Então o autor explica que em dois eventos, A e B, são independentes se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro, isto é,  $P(A|B) = P(A)$  e  $P(B|A) = P(B)$ .

Por consequência tem-se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

E para eventos dependentes, tem-se:

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$$

No estudo sobre eventos dependentes e independentes, a forma de abordagem dos três livros didáticos é bastante semelhantes, uma vez que os três partem de um problema. A resolução difere um pouco no LD02, pois os autores utilizam como técnica de resolução, a

árvore das possibilidades, uma forma de visualização do espaço amostral e do evento que interessa. Os problemas são resolvidos ao passo em que os conceitos são construídos. Sobre eventos independentes e dependentes, o LD02 atende habilidade da BNCC que se refere ao diagrama de árvore como estratégia de resolução. Em geral, sobre esse assunto, todos os LD analisados atendem às habilidades do documento orientador, quando oportuniza ao aluno identificar e descrever os espaços amostrais de eventos aleatórios para resolver problemas e a habilidade que propõe o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. Uma outra proposta da BNCC é que o aluno realize contagem das possibilidades, e os problemas que os LD apresentam atendem à essa habilidade (BRASIL, 2018).

A independência de eventos se configura como um importante elemento para a compreensão da probabilidade. Porém, crianças, jovens e adultos apresentam dificuldades na compreensão deste conceito. Muitas vezes essas dificuldades acontecem por ignorar a independência de eventos sucessivos em uma situação aleatória (BATISTA; BORBA, 2016; PINHEIRO; SILVA; PIETROPAOLO, 2018).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou analisar como o tema probabilidade é abordado em três livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2018-2020. Nos LD analisados, o conteúdo é abordado no segundo ou terceiro ano do Ensino Médio. O estudo de probabilidade promove a compreensão de fenômenos não determinísticos, onde o estudante constrói a sua capacidade de fazer julgamentos bem fundamentados e tomar de decisões adequadas, reconhecendo-se como um indivíduo capaz de atuar na realidade que o cerca. E nesse sentido, o livro didático, que serve de apoio tanto para professores, quanto para estudantes, é uma ferramenta que pode atender essa proposta.

A abordagem da probabilidade nos três livros analisados é bem parecida, embora, num contexto que envolve as abordagens, algumas foram mais exploradas que outras. A subjetiva, por exemplo, foi pouco explorada, mas devemos ter em mente que essa abordagem não é menos importante que as demais, pois em várias situações do dia a dia, ela se faz presente e válida na tomada de decisões.

O conceito de probabilidade pode e deve ser explorado em diferentes abordagens, no entanto, os resultados desta análise mostraram que apenas a abordagem clássica e a formal foram exploradas em unanimidade pelos livros analisados. Nos resultados apresentados, alguns

conceitos probabilísticos foram pouco explorados, como é o caso da abordagem geométrica da probabilidade, apresentando apenas um exercício com essa abordagem (LD02), e a abordagem subjetiva mencionada indiretamente em apenas um livro didático (LD03). Até mesmo a frequentista que é alvo de tantas discussões, inclusive proposta pela BNCC, pois a partir desta abordagem o aluno pode construir os principais conceitos de probabilidade, foi contemplada em apenas um dos livros (LD02).

Numa discussão acerca das competências e habilidades propostas pela BNCC, os resultados desta análise apontam que os livros didáticos analisados não atendem em sua totalidade o que o documento prevê, uma vez que foram publicados antes da BNCC ser homologada. Com relação aos conceitos básicos, a classificação de eventos, à probabilidade condicional e os eventos independentes, os três livros atendem as propostas do documento orientador. No entanto, com relação à definição e as abordagens, os três livros apresentam lacunas numa perspectiva das competências e habilidades previstas pela BNCC.

Considerando as propostas metodológicas dos livros analisados, observou-se que apresentam sugestões de aprofundamento do conteúdo por meio de textos que compreendem outras áreas, como a Biologia, a Genética, também propõem vídeos em sites, entre outros aspectos descritos na apresentação dos dados. Esses aspectos podem contribuir para o interesse dos estudantes em compreender a aplicação dos conteúdos em contextos diversos, tendo em vista que sempre surgem questionamentos de onde aplicar tal conhecimento.

Este estudo pode ser ampliado no sentido de possibilitar uma análise, tomando como referência a homologação e publicação da BNCC, uma vez que a última escolha do livro didático (antes da realização dessa pesquisa) ocorreu em 2017 para ser implementada nas escolas entre 2018 a 2020, com obras publicadas em 2016, isto é, antes da homologação do documento orientador. Logo, as próximas obras, possivelmente serão publicadas após a implementação da BNCC e poderá ser realizada de forma mais contundente observando-se as regularidades propostas pelo documento de orientação curricular, a BNCC.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Cecília Manoella Carvalho; FARIAS, Luiz Marcio Santos. Aporte da teoria antropológica do didático numa análise institucional sobre o saber probabilidade pa. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 20, n. 3, p. 164-187, 31 jan. 2018. Portal de Revistas PUC SP. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p164-187>. Acesso em: 22 maio 2020.

ALMEIDA, Cesário; CASAS GARCIA, Luis y LUENGO GONZALEZ, Ricardo. Estudo da Estrutura Cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º anos (17-18 anos de idade) de escolaridade sobre o conceito de Probabilidade: o contributo das Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold. **Relime [online]**. 2017, v. 20, n. 1, p.9-38. Disponível em <http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2011>. Acesso em: 22 maio 2020.

AMÂNCIO, Juliana Ramos; VIANNA, Claudia Coelho de Segadas; ROCHA., Nei Carlos dos Santos. Conhecimentos para a docência da Probabilidade no âmbito do PIBID na UFRJ. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, p. 1-22, dez. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2239>. Acesso em: 26 abr. 2020.

ARAÚJO, André Fellipe Queiroz; CARVALHO, José Ivanildo Felisberto de. A inter-relação entre a estatística e a probabilidade: um estudo sobre os conhecimentos de professores de matemática do ensino médio sobre a curva normal. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 3, n. 2, p. 263-289, ago. 2019. Disponível em: <http://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/22623>. Acesso em: 28 jun. 2020.

BATANERO, Carmen; HENRY, Michel; PARZYSZ, Bernard. The Nature of Chance and Probability. **Mathematics Education Library**, [s.l.], p. 15-37, 2005. Springer-Verlag. Disponível em: doi: [http://dx.doi.org/10.1007/0-387-24530-8\\_2](http://dx.doi.org/10.1007/0-387-24530-8_2). Acesso em: 22 maio 2020

BATANERO, Carmen; CHERNOFF, Egan J.; ENGEL, Joachim; LEE, Hollylynn S.; SÁNCHEZ, Ernesto. Research on Teaching and Learning Probability. **Icme-13 Topical Surveys**, [s.l.], p. 1-33, 2016. Springer International Publishing. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3>. Acesso em: 22 maio 2020.

BATISTA, Rita; BORBA, Rute. Lançando dados e moedas: relação de (in)dependência sob a ótica de crianças dos anos iniciais. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** - v. 7, n. 1, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3882>. Acesso em: 22 maio 2020.

BOROVCNIK, Manfred. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk Pensamento probabilístico e alfabetização em probabilidade no contexto do risco. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 18, n. 3, jan. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31495>. Acesso em: 22 maio 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 23 maio 2020.

CONTI, Keli Cristina; VILAS BÔAS, Sandra Gonçalves. Acaso e probabilidades nos anos iniciais: potencial dos jogos como mediadores na construção do conhecimento. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, v. 3, n. 2, p. 379-399, ago. 2019. Disponível em: <http://e-revista.unioeste.br/index.php/rebecem/article/view/22625>. Acesso em: 05 jun. 2020.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. O livro didático e a abordagem da estatística: o olhar do professor. **VIDYA**, v. 36, n. 2, p. 257-274, jul./dez., 2016 - Santa Maria, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1816>. Acesso em: 05 jun. 2020.

COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. 2. – 3 ed. – São Paulo: Ática, 2016.

EUGÊNIO, Robson da Silva. **Letramento probabilístico nos anos finais do Ensino Fundamental: um processo de formação dialógica com professores de matemática**. 2019. 232f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, PE. Recife, 2019.

FIGUEIREDO, Auriluci. Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 21, n. 5, nov. 2019. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45558>. Acesso em: 28 jun. 2020.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações**, vol 2. – 9 ed. – São Paulo: Saraiva, 2016.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática**, vol. 3. – 3 ed. – São Paulo: Moderna, 2016.

LOPES, Celi Espasandin; PORCIÚNCULA, Mauren; SAMÁ, Suzi. **Perspectiva para o ensino e a aprendizagem de estatística e probabilidade**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2019.

LOPES, Celi Espasandin; SOUZA, Leandro de Oliveira. Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica. Philosophical, phisicological and political aspects in study of probability and statistics in Elementary, Middle and High School. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 18, n. 3, jan. 2017. Disponível em: <http://ken.pucsp.br/emp/article/view/31494>. Acesso em: 24 maio 2020.

LOPES, José M; A SALVADOR, José; BALIEIRO FILHO, Inocêncio F. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, [s.l.], v. 7, n. 3, p. 47-62, 23 dez. 2013. FAI-UFSCar. Disponível em: [doi: http://dx.doi.org/10.14244/19827199500](http://dx.doi.org/10.14244/19827199500). Acesso em: 22 maio 2020.

MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira; MARTINS, Maria Niedja Pereira. Possibilidades de recursos para o ensino de probabilidade nos anos iniciais. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, PE, v. 7, n. 1, p. 1-21, 03 out. 2016. Disponível em:

[https://www.researchgate.net/publication/308793568\\_POSSIBILIDADES\\_DE\\_RECURSOS\\_PARA\\_O\\_ENSINO\\_DE\\_PROBABILIDADE\\_NOS\\_ANOS\\_INICIAIS\\_POSSIBILITIES\\_OF\\_RESOURCES\\_TO\\_TEACH\\_PROBABILITY\\_IN\\_PRIMARY\\_SCHOOL](https://www.researchgate.net/publication/308793568_POSSIBILIDADES_DE_RECURSOS_PARA_O_ENSINO_DE_PROBABILIDADE_NOS_ANOS_INICIAIS_POSSIBILITIES_OF_RESOURCES_TO_TEACH_PROBABILITY_IN_PRIMARY_SCHOOL) . Acesso em: 1 maio 2020.

NACARATO, Adair Mendes; GRANDO, Regina Célia (org.). **Estatística e probabilidade na educação básica: professores narrando suas experiências**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

NÓBREGA, Giselda Magalhães Moreno; SPINILLO, Alina Galvão. **A noção de possível na probabilidade e na combinatória em estudantes do ensino fundamental**. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – v. 7, n. 1, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/index.php/emteia/article/view/3894>. Acesso em: 24 maio 2020.

OLIVEIRA, Claudio R.; CORDANI, Lisbeth Kaiserlian. Julgando sob incerteza: heurísticas e vieses e o ensino de probabilidade e estatística. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 18, n. 3, jan. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31484/21943>. Acesso em: 27 maio 2020.

PINHEIRO, Maria Gracilene de Carvalho; SILVA, Angélica da Fontoura Garcia; PIETROPAOLO, Ruy César. Conhecimentos de Professores sobre a Probabilidade. **JIEEM** v.11, n.3, p. 236-244, 2018. Disponível em: <https://revista.pgskroton.com/index.php/jieem/article/view/7057>. Acesso em: 24 maio 2020.

RIBEIRO, Naiara Aparecida et al. Mapas conceituais na compreensão da aprendizagem significativa do conteúdo de probabilidade. **REnCiMa**, v.9, n.2, p. 167-181, 2018. Disponível em: <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1660>. Acesso em: 06 maio 2020.

SANTANA, Michelle Renata Moraes de; BORBA, Rute Elizabete Souza de Rosa. O ensino de probabilidade nos anos iniciais: um olhar sobre a abordagem nos livros didáticos. **EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/4995>. Acesso em: 22 maio 2020.

SANTOS, Danilo Messias Nascimento; ALVARENGA, Karly Barbosa. Uma análise dos conteúdos de Estatística em um livro didático. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju, v. 2, n. 1, 2014. Disponível em: [https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos\\_da\\_educacao\\_matematica/article/view/26](https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/index.php/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/26) . Acesso em: 22 maio 2020.

SANTOS, Wagner Dias; SANTOS JÚNIOR, Jorge dos; VELASQUE, Luciane de Souza. O desenvolvimento do letramento estatístico pelos livros didáticos e a base nacional comum curricular. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [s.l.], v. 9, n. 2, p. 210-229, 28 maio 2018. Cruzeiro do Sul Educacional. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.26843/rencima.v9i2.1664>. Acesso em: 22 maio 2020.

SCHREIBER, Karla Priscila; PORCIÚNCULA, Mauren. Mapeamento de pesquisas sobre Educação Estatística na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações: um olhar para a formação de professores de Matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 14, p. 1-17, set. 2019. Disponível em:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e62799>. Acesso em: 22 maio 2020.

SILVA JÚNIOR, João Domingos Gomes da; COSTA, Liliana Manuela Gaspar Cerveira da. Ensinando Probabilidade através de um passeio pela Estatística. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 23, n. 57, p. 126-137, jan./mar. 2018. Disponível em:

<http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/897>. Acesso em: 22 maio 2020

SOARES, Elisabeth; LOPES, Celi Espasandin. UMA ANÁLISE SOBRE AS ATIVIDADES DE PROBABILIDADE PROPOSTAS EM LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [s.l.], v. 9, n. 6, p. 65, 19 dez. 2018. Cruzeiro do Sul Educacional. Disponível em: doi: <http://dx.doi.org/10.26843/rencima.v9i6.2099>. Acesso em: 22 maio 2020.

SOUZA, Giselle Corrêa; SOUZA, Leandro de Oliveira. Arranjos com repetição e simulações probabilísticas: obstáculos de aprendizagem. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 14, p. 1-16, set. 2019. Disponível em:

<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e62783>. Acesso em: 05 jun. 2020.

VASQUEZ ORTIZ, Claudia; ALSINA, Ángel. Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del Conocimiento Didáctico-matemático. **Educ. mat**, México, v. 29, n. 3, p. 79-108, 2017. Disponible en <[http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1665-58262017000300079&lng=es&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262017000300079&lng=es&nrm=iso)>. Acesso em: 29 maio. 2020.

VERBISCK, Janielly Taila dos Santos; BITTAR, Marilena. O ensino de probabilidade em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n.5, pp. 469-484, 2019. Disponível em:

[https://www.researchgate.net/publication/337177094\\_O\\_ensino\\_de\\_probabilidade\\_em\\_uma\\_colecao\\_de\\_livros\\_didaticos\\_dos\\_anos\\_iniciais\\_do\\_ensino\\_fundamentalThe\\_teaching\\_of\\_probability\\_in\\_a\\_collection\\_of\\_textbooks\\_from\\_the\\_early\\_years\\_of\\_elementary\\_school](https://www.researchgate.net/publication/337177094_O_ensino_de_probabilidade_em_uma_colecao_de_livros_didaticos_dos_anos_iniciais_do_ensino_fundamentalThe_teaching_of_probability_in_a_collection_of_textbooks_from_the_early_years_of_elementary_school). Acesso em: 22 maio 2020.

## CAPÍTULO III – Artigo 03

TAREFAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO  
TASKS FOR PROBABILITY TEACHING IN HIGH SCHOOL**Resumo**

Este artigo teve como objetivo analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem à estudantes da Ensino Médio. Para essa análise, foram considerados os constructos teóricos de seis marcadores de tarefas propostos por Barbosa (2013) e ampliado por Costa, Oliveira e Silva (2017), e suas especificidades, sendo eles: o contexto de referência, o uso da linguagem, a estrutura, o objetivo de ensino, a relação pedagógica e o foco de ensino. Também foram consideradas nesta análise os aspectos relacionados ao conhecimento especializado do professor de Matemática que ensina probabilidade num modelo teórico chamado *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), referentes aos domínios do conhecimento matemático e do conhecimento pedagógico do conteúdo e seus subdomínios (CARRILO et al., 2013; MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014). Essa pesquisa tem uma abordagem qualitativa, por assumir uma preocupação em compreender como se dá o ensino e a aprendizagem de probabilidade mediante a utilização de tarefas matemáticas. As tarefas analisadas foram uma do tipo exercício, a segunda também do tipo exercício, ambas retiradas de um livro didático do Ensino Médio, e uma terceira tarefa configurada como exploratória-investigativa, sendo um jogo de elaboração própria. Essa análise apontou que a implementação de tarefas de probabilidade quando bem planejadas e articuladas podem trazer bons resultados e promover situações de aprendizagem aos alunos da Educação Básica.

**Palavras-chave:** tarefas, ensino de probabilidade, marcadores de tarefa, conhecimento especializado do professor

**Abstract**

This article aimed to analyze how mathematical tasks for teaching probability can promote possible learning situations for high school students. For this analysis, the theoretical constructs of six task markers proposed by Barbosa (2013) and expanded by Costa, Oliveira and Silva (2017), and their specificities, were considered: the context of reference, the use of language, the structure, the teaching objective, the pedagogical relationship and the teaching focus. Also considered in this analysis were aspects related to the specialized knowledge of the Mathematics teacher who teaches probability in a theoretical model called Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK), referring to the domains of mathematical knowledge and pedagogical knowledge of the content and its subdomains (CARRILO et al. , 2013; MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014). This research has a qualitative approach, since it takes a concern to understand how teaching and learning of probability occurs through the use of mathematical tasks. The tasks analyzed were one of the exercise type, the second also of the exercise type, both taken from a high school textbook, and a third task configured as exploratory-investigative, being a game of its own elaboration. This analysis pointed out that the implementation of probability tasks when well planned and articulated can bring good results and promote learning situations for students of Basic Education.

**Keywords:** tasks, teaching probability, task markers, specialist knowledge of the teacher

## 1 INTRODUÇÃO

A Matemática constitui um contexto que, ao ser trabalhada na sala de aula, desempenha um papel importante, marcado por circunstâncias favoráveis à aprendizagem, por meio de uma interação construtiva entre os alunos, no qual o professor deixa de ser uma fonte exclusiva do saber e passa a ser compreendido como orientador da aprendizagem (PONTE; QUARESMA, 2012).

O ensino de Matemática tem se definido em novos rumos e essa transformação influencia diretamente na prática dos professores que enfrentam grandes desafios e responsabilidades no seu exercício profissional. Diante disso, é necessário que o professor obtenha uma postura de investigador e busque compreender o processo de aprendizagem de seus alunos, sempre numa reflexão sobre sua prática. Quando essa reflexão é feita de forma ponderada, sistemática e torna-se um hábito, permite ao professor a melhora da qualidade de sua aula, além do seu desenvolvimento profissional ao longo da vida (STEIN; SMITH, 2009; PONTE, 2014).

Numa perspectiva acerca do trabalho docente, é importante que o professor esteja aberto à utilização de diferentes ferramentas pedagógicas, de forma que estimule o pensamento criativo, lógico e crítico do estudante. Com o avanço da tecnologia, instrumentos como computadores, telefones celulares, tablets e afins, estão cada vez mais acessíveis em relação a outras épocas, e os estudantes estão inseridos nessa cultura, não apenas como consumidores, mas envolvendo-se diretamente numa interação social, apresentando um imediatismo de respostas, muitas vezes até gerando resultados superficiais (LITOLDO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018; BRASIL, 2018). É nesse momento que o professor tem a possibilidade de promover a aprendizagem de seus alunos a partir da interação e do compartilhamento de significados, e diante disso, o conhecimento do professor se torna fundamental para a aprendizagem dos seus alunos.

Apesar da inserção das novas ferramentas pedagógicas no trabalho docente, não podemos descartar a importância do livro didático, uma vez que esse recurso ainda continua sendo o principal norteador para o planejamento pedagógico do professor e também como fonte para a construção de conhecimentos pelos estudantes. Mesmo sendo considerado um dos principais recursos educacionais e reconhecida a sua importância nos processos de ensino e aprendizagem, nunca deverá ser a única fonte de orientação e deve estar sempre aliado ao conhecimento do professor, pois será esse conhecimento, o principal fator que impactará nos resultados da aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, a aprendizagem não deve se

processar apenas pela leitura de informações que o livro fornece, mas deve ser levado em conta também as atividades e tarefas sugeridas (MELO; LOPES; OLIVEIRA, 2017; BALL; HILL; BASS, 2005; LITOLDO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018).

Muitas vezes o professor utiliza o livro didático, principal material de apoio que tem em suas mãos, como subsídio teórico e prático para propor tarefas matemáticas. Mas a escolha da tarefa não é trivial, uma vez que o professor deve conhecer seus alunos e assim propor as tarefas adequadamente de modo que lhes auxiliem no desenvolvimento do pensamento matemático, orientando e incentivando-os para a realização das mesmas, por meio do seu conhecimento matemático especializado. Para isso, não se deve pautar apenas na resolução das questões propostas no livro didático, mas observar as diferentes estratégias e raciocínios empregados pelos seus alunos, bem como reconhecer o valor do percurso realizado pelo aluno, e não apenas a sua resposta final (JUNKERFEURBOM; KLÜBER, 2017; LITOLDO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018).

Diante disso, o objetivo desse estudo é analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem à estudantes da Educação Básica.

Muitos dos acontecimentos do cotidiano têm natureza aleatória, e nesse sentido, o estudo de probabilidade permite que o aluno compreenda a noção de acaso e incerteza, e reflita sobre a natureza das situações de probabilidade do mundo real (LOPES; PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2019). Devido ao conceito de probabilidade estar ligado a diferentes formas de pensar, isso se torna um desafio especial para o ensino de probabilidade, onde o seu papel está envolvido com a capacidade de interpretar e avaliar criticamente informações probabilísticas e fenômenos aleatórios (BOROVČNIK, 2016).

## 2 APORTES TEÓRICOS

As tarefas matemáticas podem ser classificadas de diversas formas, a depender da literatura utilizada. Nesse texto, foi escolhido Ponte (2005) e Stein e Smith (2009) para classificar as tarefas, além de Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017) que apresentam marcadores para análise de tarefas. Uma atividade quando implementada em sala de aula, pode sofrer influências do professor, pela forma como realiza as mediações, quanto pelo repertório do aluno. Nesse sentido, buscou-se apoio em Carrilo et al. (2013) para discutir sobre os possíveis conhecimentos a serem mobilizados por professores ao escolher e implementar tarefas

sobre probabilidade, levando em consideração as abordagens de probabilidade discutidas por Nacarato e Grando, (2013), Coutinho (2013), Borovcnik (2016), Lopes, Porciúncula e Samá (2019).

As tarefas, vistas como ferramentas que mediam o ensino e a aprendizagem de Matemática, podem ser classificadas, simultaneamente, considerando o grau de desafio (grau de dificuldade reduzido ou elevado) e o grau de estrutura (fechada ou aberta). Na tarefa fechada, o que é apresentado e o que é solicitado é feito de forma explícita, enquanto na tarefa aberta, o que é dado e o que é solicitado não é determinado explicitamente. Dentro do desenvolvimento de uma tarefa podem surgir outras, algumas formuladas e outras propostas pelo estudante ou pelo professor e ainda aquelas negociadas entre o professor e os estudantes. Diante disso, a tarefa se torna objetivo da atividade, e para exemplificá-las têm-se os exercícios, os problemas, a investigação e a exploração como modelos de tarefas (PONTE, 2005).

A construção dos conceitos matemáticos a partir de tarefas como o objeto de uma atividade, tornam as aulas de Matemática mais ricas e produtivas e podem ser desenvolvidas tanto pelo aluno, como pelo professor ou pode ser implementada em conjunto, aluno e professor. As tarefas podem ser propostas de forma explícita no início do trabalho com determinado conteúdo ou desenvolvida de maneira implícita a fim de proporcionar oportunidades de aprendizagem. Ao propor uma tarefa, o professor deve estar atento à condução de sua aula, levando em consideração a elaboração, a seleção e a sua realização, pois existem muitas variedades, como os problemas, os exercícios, as investigações, os projetos, os jogos e as modelagens em que os alunos se envolvem (PONTE, 2005; COSTA; OLIVEIRA, 2019).

As tarefas são vistas como o elemento organizador da atividade proposta pelo professor, algumas com o objetivo de apoiar a aprendizagem, outras com a finalidade de avaliação, e outras que servem para investigar como acontece o processo de aprendizagem do estudante, cada uma com suas vantagens e limitações (PONTE, 2014).

Quando o estudante se depara com situações em que ele utiliza unicamente procedimentos de memorização, o desempenho matemático pode ficar comprometido, reduzindo o seu pensamento em um único tipo de oportunidade, ou seja, a abordagem de baixo nível com a ausência de um contexto ou significado adicional. No entanto, há tarefas que podem oportunizar diferentes pensamentos no aluno, como aquelas que conduzem à conexão e reflexão para uma aprendizagem conceitual, algumas com exigência cognitiva mais elevada, encorajando-o às diversas formas de raciocinar (STEIN; SMITH, 2009).

Como fatores preponderantes da aprendizagem dos estudantes, têm-se as atividades realizadas por eles e as reflexões geradas por elas. No momento em que o estudante se envolve

na atividade, esta passa a ser compreendida como uma tarefa. A sua implementação nas aulas de Matemática tem um impacto bastante significativo em meio a aprendizagem dos alunos, além de oportunizar o professor a refletir sobre os processos de ensino e aprendizagem com vistas aos aspectos particulares de conteúdos. Vale ressaltar que, ao selecionar tarefas, o professor precisa estar ciente que existem outros fatores além do conteúdo e devem ser levados em consideração, como todo o processo cognitivo utilizado na realização dela, os procedimentos e estratégias, bem como a sua validação (PONTE, 2005; CYRINO; JESUS, 2014).

As tarefas planejadas com objetivos pedagógicos bem definidos, quando orientadas convenientemente, desempenham um papel fundamental nos processos de ensino e aprendizagem dos conteúdos de Matemática, além de proporcionar diferentes oportunidades de ampliação da aprendizagem e promover o desenvolvimento do raciocínio matemático no aluno. As tarefas matemáticas podem ser referenciadas num contexto que envolve marcadores de tarefas. Os marcadores de tarefas servem como constructos teóricos para analisar a funcionalidade das tarefas propostas pelo professor nas aulas de Matemática (COSTA; OLIVEIRA; SILVA, 2017)

É importante que o professor tenha um olhar crítico sobre as tarefas para analisar como seus alunos podem aprender por meio delas. Elas podem ser definidas como situações que envolvem atividades da sala de aula para o desenvolvimento de alguma ideia matemática. Há aquelas que exigem apenas a execução de procedimentos de memorização e outras que estimulam que o aluno faça conexões com os conceitos. Diante disso, vale ressaltar a importância de se trabalhar diferentes tipos de tarefas, cada uma com seu propósito pedagógico, gerando um efeito cumulativo e conduzindo o aluno à compreensão sobre a natureza da matemática (STEIN; SMITH, 2009).

O professor precisa compreender como os estudantes aprendem a partir da implementação de tarefas em suas aulas, levando em consideração os aspectos que envolvem esse processo, como as condições de trabalho na escola, o grau de desafio matemático da tarefa (grau de dificuldade), podendo ser reduzido ou elevado, a sua estrutura que pode variar entre aberta ou fechada (COSTA; OLIVEIRA; SILVA, 2017).

Uma outra possibilidade de analisar as tarefas é a partir dos marcadores, propostos por Barbosa (2013), e ampliado por Costa, Oliveira e Silva (2017), os quais permitem que o professor compreenda os atributos da tarefa. São eles:

a) O contexto de referência: o contexto matemático da tarefa está situado entre a matemática pura e a realidade. E entre os dois extremos tem-se a semirrealidade.

b) O uso da linguagem: trata-se do nível de rigor atrelado à tarefa, relacionado aos termos específicos. O uso da linguagem pode ser classificado em rigor forte ou fraco. O rigor forte está relacionado às exigências de termos específicos do conteúdo matemático, o qual o estudante deve conhecê-los e saber representá-los, enquanto o rigor fraco apresenta uma linguagem mais simples, sem a necessidade do uso de termos específicos do conteúdo.

c) A estrutura: varia entre aberta ou fechada. Quando a tarefa tem estrutura fechada, existe um direcionamento sobre o conteúdo mobilizado e a estratégia de resolução. Caso a tarefa não tenha questões que direcione os estudantes, trata-se da tarefa com estrutura aberta. Nesse último caso, o professor não tem controle sobre as respostas do aluno.

d) Objetivo de ensino: definem os objetivos acerca dos conteúdos selecionados e abordados. Varia entre simples e complexo. Quando o objetivo é simples, significa que não são incluídas outras possibilidades de exploração, apenas a estabelecida como objetivo principal. Já o objetivo complexo está relacionada com as várias possibilidades de exploração de conceitos.

e) Relação pedagógica: permite o posicionamento entre os alunos e o professor. Esse marcador é classificado entre isolamento forte e isolamento fraco. Quando o aluno se mantém distante dos estudantes durante a resolução da tarefa, trata-se de um isolamento forte, geralmente em tarefas fechadas e bem estruturadas, que não necessitam muito de orientações. Nas tarefas abertas, geralmente os alunos interagem mais com o professor. Nesse caso, o marcador é classificado como isolamento fraco.

f) Foco de ensino: esse marcador classifica a tarefa considerando os extremos conceitual ou procedimental. E ainda há a possibilidade de a tarefa estar classificada entre esses dois extremos, que é a classificação conceitual/procedimental. O foco conceitual significa que, na realização da tarefa o estudante vai construir os conceitos matemáticos, enquanto no foco procedimental, são realizados procedimentos como calcular, medir, representar etc., a fim de compreender relações matemáticas. E há aquelas que partem dos procedimentos para elaborar conceitos, logo são classificadas como conceitual/experimental.

Desse modo, quais os possíveis conhecimentos a serem mobilizados por professores quando estão a trabalhar (seleção e implementação) com tarefas para ensinar probabilidades?

O professor que ensina Matemática precisa estar conectado, não apenas com o conhecimento de sua disciplina, pois não é suficiente para que a promoção da aprendizagem seja completamente significativa. É importante que ele perceba que este conhecimento atenda a diferentes dimensões, tanto no âmbito pedagógico quanto em relação ao conteúdo de forma ampla e profunda para que se alcance a compreensão dos alunos. Essas especificidades da

atuação do professor é chamado de conhecimento especializado, que devem partir de conexões entre os conteúdos matemáticos e as relações com os demais temas e áreas do conhecimento (MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014; LITOLDO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2018).

Sabe-se que a Matemática vai além da quantificação de fenômenos determinísticos e dos cálculos com números e grandezas, pois estuda também a incerteza proveniente dos fenômenos aleatórios. Diante disso, vale enfatizar a importância de se promover situações que favoreçam o desenvolvimento do pensamento probabilístico e possibilite ao aluno a compreensão de diferentes situações que envolvam chance e eventos aleatórios em diferentes contextos, sejam eles escolares ou do cotidiano (BRASIL, 2018; NACARATO; GRANDO, 2013).

A probabilidade é o ramo da Matemática que estuda fenômenos não determinísticos, ou seja, aleatórios, e seu conceito está determinado em diferentes tipos de abordagens (clássico, frequentista, geométrico, subjetivo, axiomático), que podem gerar obstáculos para a sua compreensão, pois não existe uma forma única e precisa para definir aleatoriedade (LOPES; PORCIÚNCULA; SAMÁ, 2019). Sendo assim, o professor deve fazer uma articulação entre as diferentes abordagens probabilísticas para que o aluno não se prenda a um único conceito, que geralmente é o clássico, onde a probabilidade de um evento ocorrer é dada pela razão entre o número de eventos prováveis e o número de eventos possíveis (COUTINHO, 2013).

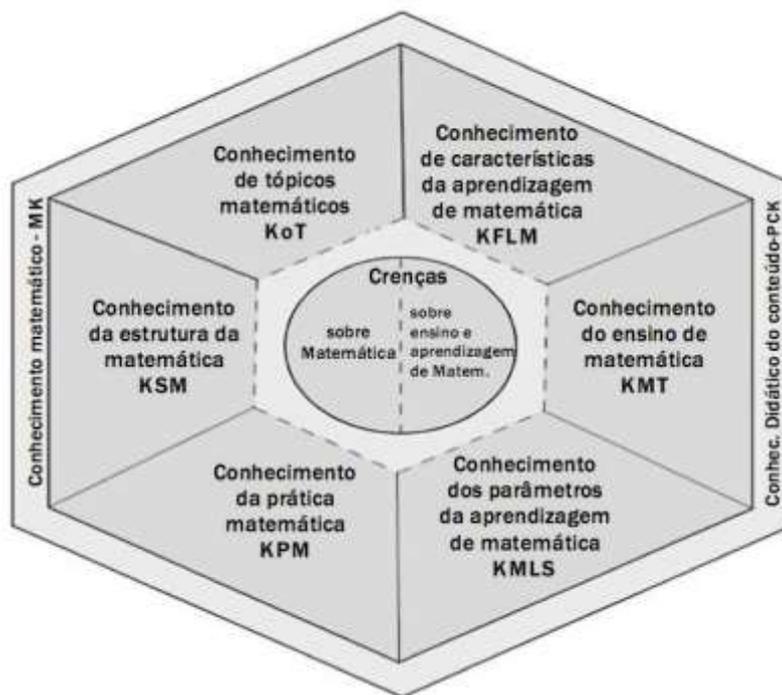
A Base Nacional Comum Curricular, BNCC, sugere que o professor assegure aos seus alunos o reconhecimento da importância dos conhecimentos matemáticos ligados à incerteza e ao tratamento de dados para descrever, explicar e prever fenômenos, observando que nem todos os fenômenos são determinísticos. E, para isso, a proposta do trabalho com a probabilidade parte do desenvolvimento da noção de aleatoriedade para que os alunos entendam que há evento certo, impossível e provável. O estudo deve ser ampliado e aprofundado a partir de tarefas que envolvam simulações ou experimentos, numa visão frequentista, e relacionem com os resultados obtidos por meio da probabilidade teórica (BRASIL, 2018).

A respeito do conhecimento de professores de Matemática existe um modelo teórico chamado de *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*<sup>7</sup> (MTSK), desenvolvido nos últimos anos que descreve o conhecimento especializado dos professores que ensinam Matemática. Possui dois domínios: o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo. O conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico do conteúdo estão descritos em três subdomínios cada, como representados abaixo.

---

<sup>7</sup> Conhecimento Especializado do Professor de Matemática

Figura 11 – Conhecimento especializado do professor que ensina Matemática



Fonte: Carrillo et al. (2013) traduzido por Moriel Júnior e Carrillo (2014)

Os domínios e subdomínios do conhecimento especializado do professor (CARRILLO et al., 2013) são:

- a) Conhecimento matemático:
  - i) KoT: conteúdos matemáticos a serem ensinados e seus diferentes aspectos;
  - ii) KSM: conexões entre os tópicos que permitem reconhecer certas estruturas matemáticas, sendo um sistema de elementos integrados;
  - iii) KPM: maneiras de proceder, como a comunicação matemática, o raciocínio e a prova, estruturas de uma demonstração, saber definir ou usar definições, saber argumentar, generalizar e explorar as representações.
- b) Conhecimento pedagógico do conteúdo:
  - i) KMT: Ensino de Matemática através de materiais, recursos, modos e estratégias de apresentar um conteúdo;
  - ii) KFLM: Características de aprendizagem, tais como a forma que os alunos aprendem, erros comuns e suas fontes, dificuldades e obstáculos;
  - iii) KMLS: Normas da aprendizagem, no que se refere às especificações curriculares, competências e habilidades, normas mínimas e formas de avaliação, materiais de apoio.

Estes domínios estão relacionados as especificidades do conhecimento do professor que ensina Matemática e podem servir de categorias para analisar investigações (MORIEL JÚNIOR; CARRILLO, 2014). O MTSK, por considerar todo o conhecimento do professor que ensina Matemática, ao tomar como referência o conhecimento matemático e o pedagógico como essencial, assume um papel central sobre um aprofundamento dos conteúdos, que, nesse estudo, trata-se do conteúdo de probabilidade, e as dimensões desse conhecimento e suas especificidades para investigar as distintas práticas do professor que ensina Matemática (BERNARDO et al., 2018).

### 3 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa tem o objetivo de analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem aos estudantes do Ensino Médio. Esse estudo se caracteriza como uma abordagem qualitativa, no momento em que assume a preocupação em estabelecer uma compreensão sobre objeto de estudo (BOGDAN; BIKLEN, 2010), no caso, o ensino de probabilidade.

Foram analisadas três tarefas matemáticas envolvendo conhecimentos de probabilidade, sendo duas extraídas do livro didático do segundo ano do Ensino Médio e um jogo proposto também para o Ensino Médio. A primeira foi do tipo exercício, numa análise simples sem a intenção de modificá-la. A análise deste tipo de tarefa se fez necessária por ser bastante utilizada, principalmente, considerando que muitas escolas e professores ainda assumem um modelo de ensino tradicional de aulas expositivas, onde o conteúdo é exposto e, em seguida, são cobrados os exercícios, baseando-se em conceitos e técnicas.

A segunda também foi uma tarefa do tipo exercício, no entanto, ela foi analisada em dois contextos: o contexto de hipótese em que o estudante teve contato com o conteúdo anteriormente, sendo classificada como um exercício. E o segundo contexto considera a hipótese em que o objetivo da tarefa é introduzir o conteúdo, de modo que o estudante construa os conceitos progressivamente, por meio da intervenção do professor. Nesse sentido, a tarefa deixa de ser um exercício, passando a se classificar como um problema. Esse tipo de tarefa foi escolhido para análise no intuito de apresentar as potencialidades que uma tarefa pode ter, a depender de como ela é planejada e abordada.

Em sequência, a terceira tarefa trata-se de um jogo com caráter exploratório-investigativa. Os jogos na Matemática tem uma larga tradição no ensino, além das importantes

potencialidades que podem ser exploradas, principalmente quando o professor associa a outro tipo de tarefa, como as investigativas, por exemplo.

Estas foram analisadas a partir dos marcadores de tarefas descritos por Barbosa (2013) e Costa, Oliveira e Silva (2017), diante dos possíveis conhecimentos que o professor necessita mobilizar para a exploração de cada tarefa. As tarefas são analisadas de acordo as especificidades que compõem cada marcador: a) contexto de referência, b) uso da linguagem, c) estrutura, d) objetivo de ensino, e) relação pedagógica e f) foco de ensino.

Com base nas discussões de Carrilo et al. (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014) sobre o modelo MTSK, foram observados os aspectos das tarefas que estão relacionados com o conhecimento especializado do professor de Matemática que ensina probabilidade, tendo em vista o domínio do conhecimento matemático (KoT, KSM e KPM) e o domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo (KMT, KFLM e KMLS).

#### 4 APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS DADOS

Para análise das tarefas, tomou-se como referência duas tarefas do livro didático, constante no PNLD 2018-2020, *Matemática: contextos e aplicações* (DANTE, 2016), sendo ambas do tipo exercício, porém, uma delas é analisada no contexto de problema. E como uma terceira proposta de tarefa, foi elaborado e analisado um jogo que envolve conhecimentos de probabilidade.

##### **Tarefa 01: tipo exercício**

Abaixo tem-se a tarefa que foi extraída do livro didático, do segundo ano do Ensino Médio.

Figura 12 – Tarefa do tipo exercício

4. Em uma caixa há 6 bolas brancas e 4 bolas vermelhas. Qual é a probabilidade de, ao acaso, ser retirada:
- a) uma bola vermelha?  $\frac{4}{10}$
  - b) uma bola branca?  $\frac{6}{10}$
- (**Observação:** Para indicar o evento “sair bola vermelha”, use índices assim:  $A = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ .)

Fonte: Dante (2016b, p. 237)

A tarefa contempla a definição clássica da probabilidade (razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis). Uma possível solução é apresentada abaixo:

Dados:

(1) Espaço amostral  $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ;

(2) Número total de bolas:  $n(\Omega)=10$

(3) Evento A: sair bola vermelha  $\rightarrow$  número de bolas vermelhas:  $n(A) = 4$

(4) Evento B: sair bola branca  $\rightarrow$  número de bolas brancas:  $n(B) = 6$

a) 
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

b) 
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Tomando os marcadores (BARBOSA, 2013; COSTA; OLIVEIRA; SILVA, 2017) para analisar a tarefa acima, classificada como exercício (PONTE, 2005), percebe-se que a mesma está situada num contexto de referência pautada na semirrealidade. O uso da linguagem proposta apresenta rigor forte, pois o termo probabilidade aparece numa oração simples; isso requer que o aluno saiba o que é probabilidade e como calculá-la.

A estrutura dessa tarefa é fechada, uma vez que todas as informações necessárias à resolução estão no próprio enunciado e pode ser resolvida como apresentada na possível solução. Fica explícito que o objetivo é calcular a probabilidade de um dado evento acontecer; este é um objetivo de ensino simples, não requer conexões com outros conceitos. Como se trata de uma tarefa com estrutura fechada, a relação pedagógica, que vai posicionar professor e aluno durante a realização, é do tipo isolamento forte, pois o aluno sozinho poderá resolver sem contactar o professor apresentando questionamento. O foco de ensino é procedimental, requer que o aluno apenas calcule mecanicamente a probabilidade para cada item, não permitindo o desenvolvimento de conceitos.

Com as características apresentadas sobre a tarefa acima, quais possíveis conhecimentos que o professor poderia mobilizar para potencializar a aprendizagem dos alunos?

Carrillo et al. (2013) e Moriel Júnior e Carrillo (2014) serviram como suporte nessa análise. No âmbito do conhecimento matemático, faz-se necessário que o professor possua conhecimento sobre os tópicos (KoT) – nesse caso, precisa dominar os conceitos de espaço amostral (1) e eventos (2) e (3) saber como se calcula probabilidade (4), precisa também conhecer como se representa o espaço amostral e eventos por meio da teoria de conjuntos; já o conhecimento da estrutura (KSM) é importante, pois o professor precisa também conhecer os conceitos de evento certo, impossível e mutuamente exclusivos, a definição teórica de probabilidade (clássica, apresentada pelo livro) e suas consequências.

O conhecimento da prática matemática (KPM) está ligado a linguagem a ser utilizada pelo professor, seja a oral ou a escrita, pois o processo de comunicação dessa matemática precisa ser claro, desde o uso de exemplos até as definições e o algoritmo usado; um exemplo é a representação utilizada em (1), quando se usa as letras (V e B) para representar cada uma das bolas, é muito comum em livros o uso do número de elementos do espaço amostral como se fosse o próprio espaço.

Sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo, a escolha da tarefa em análise é um exemplo do conhecimento do ensino de Matemática (KMT), pois estaria relacionado a escolha do professor para abordar um procedimento (4), além de identificar se os alunos compreenderam as noções de espaço amostral (1) e evento (2) e (3).

O conhecimento das características de aprendizagem de Matemática (KFLM) permite que o professor conheça como seus alunos aprendem Matemática, possíveis dificuldades, erros, estabelecimento de conexões; no caso da tarefa em questão, um possível equívoco pode ocorrer sobre o espaço amostral ser definido apenas pelo número de elementos que o caracteriza, além daqueles relacionados a frações equivalente, como simplificar frações. Já o conhecimento dos parâmetros de aprendizagem de Matemática (KMLS) tem a preocupação do entendimento sobre como, nesse caso, a probabilidade se faz presente nos currículos e documentos de orientação curricular oficiais; por exemplo, a BNCC propõe que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental a noção do conceito de probabilidade seja trabalhada, inicia-se em uma perceptiva subjetivista, passando pela frequentista até chegar a clássica nos anos finais e ganhando densidade no Ensino Médio.

Mesmo reconhecendo as limitações de uma tarefa do tipo exercício que possui um isolamento forte na relação pedagógica entre alunos e professor, ter uma estrutura fechada e o foco ser procedimental, cabe ao professor a partir dos seus conhecimentos potencializar a aprendizagem dos alunos. Essa potencialização pode ocorrer no momento de sistematização da tarefa, seja a correção realizada pelo professor no quadro ou convidando alunos para irem ao quadro, promover questionamentos e indagações a partir do seu repertório de conhecimento, alargando as fronteiras impostas pela tarefa. Portanto, cabe ao professor conhecer o tema que está trabalhando em seus múltiplos significados, como expostos acima, para poder produzir uma aprendizagem mais densa junto aos seus alunos.

## **Tarefa 02: tipo exercício**

Essa tarefa abaixo também foi retirada do livro didático do segundo ano do Ensino Médio, e mesmo se tratando de um exercício, será considerado num segundo momento a sua análise sob uma perspectiva de problema.

Figura 13 – Tarefa do tipo exercício

**8. No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, qual é a probabilidade de se obter soma par ou soma múltipla de 3?**

Fonte: Dante (2016b, p. 239)

Na análise da tarefa acima, a priori, classificada como exercício (PONTE, 2005), nota-se que o contexto de referência é a semirrealidade. Com relação à linguagem, trata-se de rigor forte, pois é necessário que o aluno possua conhecimento dos termos relacionados às propriedades para o cálculo da probabilidade nesse contexto e saiba utilizá-los na resolução. Apresenta uma estrutura fechada, pois os dados são expostos de acordo com o enunciado para a possível solução.

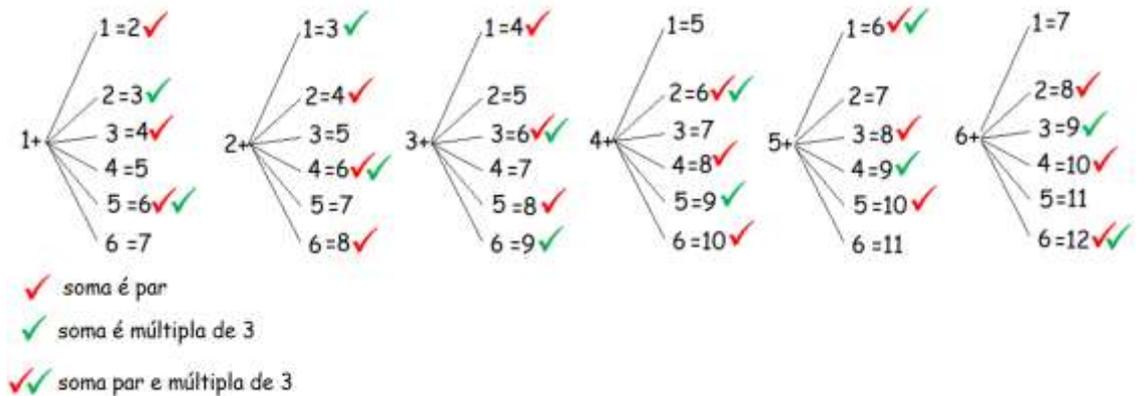
Embora o objetivo da tarefa seja calcular a probabilidade de um evento acontecer, requer conhecimento prévio de conceitos relacionados à teoria dos conjuntos, e assim, tornando o objetivo da tarefa complexo. Essa tarefa tem uma relação pedagógica com isolamento forte, uma vez que possibilita ao aluno resolvê-la de forma independente, sem recorrer ao auxílio do professor, e o foco do ensino está pautado em procedimentos, não exigindo que os conceitos seja desenvolvidos.

Num contexto de hipótese em que o aluno não possui conhecimentos teóricos, a tarefa que outrora se configura como exercício, neste momento torna-se um problema, pois o seu grau de desafio já não é reduzido, como no exercício, passando a ter a necessidade de um olhar mais crítico, podendo ser explorado de forma a desencadear a aprendizagem dos conceitos e definições, mobilizados através da intervenção do professor (5). É neste momento que o professor tem a possibilidade de reforçar as potencialidades de raciocínio dos alunos.

Ao deixar os estudantes à vontade para expressarem os resultados da maneira que acharem mais conveniente (6), notadamente eles vão construindo o conceito de (7) espaço amostral que, nesse contexto compõe-se de 36 resultados, (8) os eventos possíveis, podem ser citados nesse exercício, um por um e depois conta-se os (9) eventos favoráveis, que nesse caso são 24 possibilidades e escreve-se (10) a razão entre os casos possíveis e os casos favoráveis ( $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$ ).

A figura abaixo pode ser uma forma de escrever todos os casos possíveis e marcar os favoráveis.

Figura 14 – Representação dos elementos do espaço amostral



Fonte: autoria própria.

Este tipo de tarefa, a priori, deve ser considerado o raciocínio do aluno, que pode utilizar o conceito formal de probabilidade, ou pode construir caminhos através de argumentos coerentes, desenhos, ou esquemas para traduzir o seu pensamento lógico.

Ao observar, hipoteticamente, que os estudantes não dispõem de ferramentas suficientes para o cálculo formal da probabilidade, o professor pode construir conjuntamente, (11) o espaço amostral dando dicas de como procederem, sinalizando de acordo com o modelo abaixo, por exemplo. Mas deve deixar claro para os estudantes, que num espaço amostral muito grande, essa forma de resolução não é a mais adequada, por isso é necessário construir conjecturas que possam generalizar a resolução para qualquer situação-problema semelhante.

Figura 15 – Representação do espaço amostral e dos eventos

	1	2	3	4	5	6
1	X	○	X		X	
2	○	X		X		X
3	X		X		X	○
4		X		X	○	X
5	X		X	○	X	
6		X	○	X		X

Fonte: Dante (2016b, p. 239)

A intervenção do professor é realizada de forma criteriosa, pois é nesse momento que os conceitos necessários para a formalização da resolução desta tarefa são conjecturados.

Solicita-se do aluno que marque um X para o evento A e um círculo para o evento B. O estudante deve perceber que alguns valores recebem os dois sinais (o X e o círculo), ou seja, **(12)** esses valores fazem parte dos dois eventos, simultaneamente (intersecção). Então conta-se os quadrinhos marcados com o X e os quadrinhos marcados com o círculo, como na figura acima, lembrando-se de não contar duas vezes os resultados coincidentes, ou seja, retira-se **(13)** a intersecção e escreve-se **(14)** a razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis. O professor pode retomar o conceito de **(15)** união da teoria dos conjuntos para concluir a solução, retomando o que o problema está solicitando. A exigência do nível da tarefa pode se tornar mais elevada, na medida em que são utilizados procedimentos com conexões para, então, formalizar matematicamente os conceitos, como afirmam Stein e Smith (2009).

Seguindo com o que foi transcorrido acima, determina-se os dados:

**(16)** Número de elementos do espaço amostral  $n(\Omega) = 36$

**(17)** Evento A: a soma é par

**(18)** Evento B: a soma é um múltiplo de 3

**(19)**  $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

**(20)**  $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

**(21)**  $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Então, a probabilidade de se obter “soma par ou soma múltipla de 3” é dada por

**(22)**  $P(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

Generalizando, tem-se:

**(23)**  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A análise, considerando os possíveis conhecimentos mobilizados pelo professor a fim de potencializar a aprendizagem de seus alunos, tem seus aspectos sustentados pelo modelo MTSK. Com relação ao conhecimento matemático, a oportunidade de explorar as noções intuitivas sobre probabilidade num primeiro momento, possibilita que o professor mobilize conhecimentos da definição subjetiva da probabilidade **(5)** e **(6)**, valorizando o que o estudante possui de experiências e crenças acerca desse conhecimento. O professor deve dominar conceitos de espaço amostral **(7)**, **(11)** e **(16)**, eventos **(8)**, **(9)**, **(17)** e **(18)**, a definição clássica

da probabilidade **(10)**, **(14)**, **(19)** e **(20)**, representando os conteúdos a serem ensinados em face ao conhecimento sobre os tópicos (KoT).

Tendo em vista as conexões entre os tópicos que permitem conhecer certas estruturas matemáticas (KSM), o professor deve estabelecer uma relação entre conhecimentos da teoria dos conjuntos, união **(15)**, **(22)** e **(23)**, interseção **(12)**, **(13)** e **(21)**, com o ensino da probabilidade, observando o sistema de elementos integrados.

A maneira como proceder em sala de aula, unindo a teoria à prática, nesse contexto, está associada ao raciocínio e à comunicação para que o objetivo da tarefa seja atingido (KPM). A linguagem se faz importante na interpretação da imagem 04, transformada em símbolos matemáticos, e acarreta na formalização dos conceitos, uma vez que, ao substituir **(19)**, **(20)** e **(21)** em **(22)**, posteriormente é generalizada em **(23)**.

Acerca do domínio do conhecimento pedagógico do conteúdo, nessa tarefa 02, o professor deve criar um ambiente em que priorize a construção de uma estrutura matemática que fundamente o desenvolvimento da resolução da tarefa. Essa estratégia (KMT) valoriza o caminho a ser seguido acima do resultado final e ainda possibilita ao professor verificar as características da aprendizagem (KFLM) de seus alunos, observando possíveis dificuldades, ou perceber a necessidade de revisar algum conteúdo prévio, como **(21)** e **(22)**, por exemplo. O professor deve ter em mente também a importância das normas de aprendizagem (KMLS), seja no momento de determinar os critérios de avaliação, seja no planejamento, com intuito de atender as especificidades da BNCC, competências e habilidades, acerca do conteúdo trabalhado na tarefa, que nesse contexto traz uma relação entre a probabilidade clássica e axiomática.

Vale ressaltar ainda que, muitas vezes existe uma ideia falsa de que o aluno não tem condições de realizar uma tarefa se não foram ensinados antes. Entretanto, fora da escola eles aprendem muitas coisas que podem mobilizar as aulas de Matemática. Por isso, em termos de aprendizagem, é válido que eles descubram um método próprio do que esperar que aprendam apenas o método do professor e sejam capazes de reconhecer, perante uma situação dada, como o aplicar (PONTE, 2005).

A vantagem de se conhecer o procedimento formal matemático é que se torna mais viável a ser aplicada em situações semelhantes, porém não devemos descartar os procedimentos anteriores, pois os conceitos são adquiridos gradualmente a partir deles. E quando o aluno reflete e formaliza os conceitos matemáticos, desenvolve e fortalece a aptidão para aplicar esses conhecimentos a novos problemas (BISPO; RAMALHO; HENRIQUES, 2008).

### **Tarefa 03: tipo exploração/investigação**

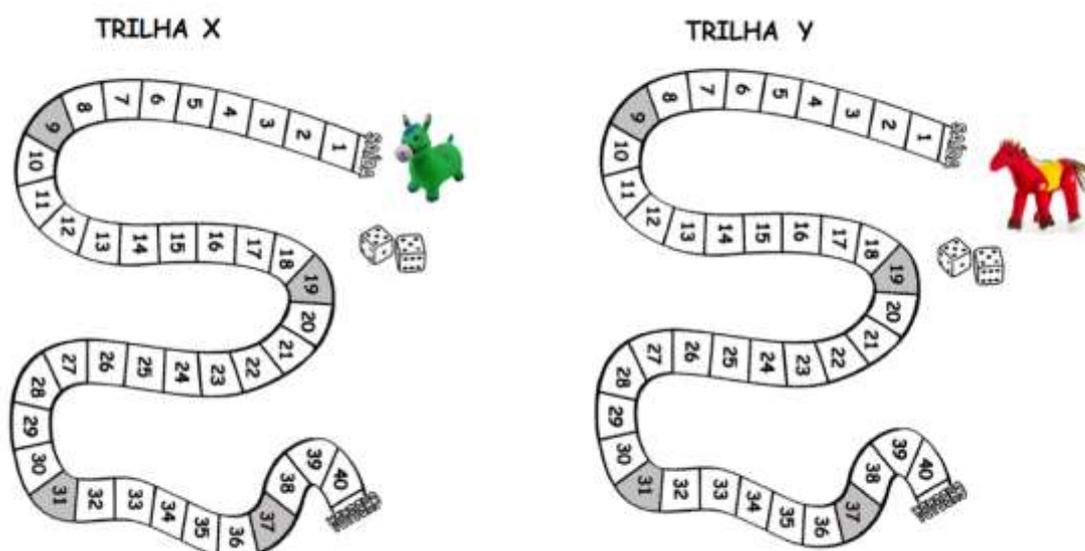
Essa terceira tarefa trata-se de um jogo elaborado e analisado como uma tarefa exploratória-investigativa, pois se constitui de natureza acessível e, ao mesmo tempo, desafiadora. De alguma forma, o jogo se constitui um problema, por ter regras bem definidas e o objetivo de vencer e tem importantes potencialidades para a aprendizagem. Tem natureza acessível ao possibilitar que todos os alunos obtenham o sucesso e o estímulo à autoconfiança, e no contexto específico desse jogo, exige uma efetiva experiência matemática tomando-a uma tarefa desafiadora, capaz de explorar conceitos e ideais matemáticas de maneira significativa, como afirma Ponte (2005).

Figura 16 – Primeiro momento: Tarefa do tipo exploratória

<p><b><u>Corrida de cavalos</u></b></p> <p><b>Regras do jogo:</b></p> <p>Duplas</p> <p><b>Sorteio para início do jogo:</b></p> <p>Para iniciar a corrida, cada aluno lança o dado. O que obtiver o maior resultado, escolhe a sua trilha.</p> <p>As duas trilhas devem estar posicionadas, uma ao lado da outra.</p> <p>Os dois jogadores lançam o dado, e observam os resultados.</p> <p>Trilha X – Avance uma casa, caso o maior resultado estiver entre os números 1, 2, 3, ou 4.</p> <p>Trilha Y – Avance uma casa, caso o maior resultado estiver entre os números 5 ou 6.</p> <p>Vence aquele que chegar primeiro ao final da trilha.</p> <p>Observação: É importante que se tenha algum aluno voluntário para anotar os resultados sorteados para a tarefa de investigação.</p>
--

Fonte: Elaboração própria

Figura 17 – Trilhas do jogo *Corrida de Cavalo*



Fonte: Adaptada de <https://www.educacaoetransformacao.com.br/atividades-folclore-educacao-infantil/atividades-folclore-educacao-infantil-trilha-folclore/>

Figura 18 – Segundo momento: Tarefa do tipo investigação

- 1) Sobre vencer, na sua opinião, esse jogo é justo? Justifique.
- 2) Quais são os possíveis casos para que o primeiro cavalo vença? Explique seu raciocínio.
- 3) E quais os possíveis casos para que o segundo cavalo vença? Explique seu raciocínio.
- 4) Preencha a tabela com as combinações de resultados para todas as jogadas e escreva X para os valores em que vencem o cavalo que está na trilha X, e Y para os valores que vencem o cavalo que está na trilha Y.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

RESPOSTA						
	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X	X	Y	Y
2	X	X	X	X	Y	Y
3	X	X	X	X	Y	Y
4	X	X	X	X	Y	Y
5	Y	Y	Y	Y	Y	Y
6	Y	Y	Y	Y	Y	Y

- 5) Depois de preencher a tabela e perceber os resultados, as hipóteses a respeito da primeira pergunta se confirmaram?
- 6) Construa uma tabela de frequências e em seguida um gráfico que melhor represente os resultados obtidos nas jogadas.
- 7) Escreva a razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis para cada resultado.  $P(X)$  e  $P(Y)$  vencer.

Fonte: Elaboração própria

Com relação ao contexto de referência, esta tarefa está situada na realidade, na qual os estudantes mobilizam uma ação através do jogo e a sua linguagem se caracteriza de um rigor

fraco, por apresentar uma linguagem simples. Sua estrutura é aberta devido ao seu caráter exploratório-investigativo. Com relação ao grau de desafio, é reduzido no primeiro momento (ação do jogo) e elevado no segundo momento (investigação). Por apresentar diferentes formas de explorar os conceitos de probabilidade, seu objetivo de ensino é complexo, uma vez que as respostas dos alunos tendem a ser diferentes. A intervenção do professor é necessária durante o desenvolvimento dessa tarefa, tornando a relação pedagógica interativa e, portanto, com isolamento fraco. Com relação ao foco de ensino, a realização da tarefa oportuniza aos alunos a construção dos conceitos, logo o seu foco é conceitual.

É uma tarefa que consiste em explorar conhecimentos relacionados ao tema de probabilidade, quando associada à investigação e contempla as abordagens clássica, frequentista, subjetiva e formal (axiomática) da probabilidade.

De início, a escolha da trilha parece não ter muito significado, porém trata-se de um fator que pode ser determinante para se obter o sucesso nesse jogo. Aparentemente, a chance de vencer quem escolhe a trilha X é maior, pois, um dado sendo lançado duas vezes, se o maior número for 1, 2, 3 ou 4, avança o cavalo da trilha X. Mas trata-se de uma falsa intuição, e o cálculo da probabilidade de cada um vencer, exclui essa dúvida, além de proporcionar reflexões frente às possíveis respostas dos estudantes no segundo momento da tarefa (investigação).

Após a realização da tarefa, o professor deve desenvolver mobilizar os conhecimentos necessários, junto aos estudantes, para a compreensão de independência de eventos, a partir da questão: “Lançando-se um dado duas vezes, qual a probabilidade de o maior valor ser 1, 2, 3, ou 4?”

(24) 1º lançamento (Evento A): sair 1, 2, 3 ou 4 (4 chances num total de 6 possibilidades:

$$P(A) = \frac{4}{6}$$

(25) 2º lançamento (Evento B): sair 1, 2, 3 ou 4 (4 chances num total de 6 possibilidades:

$$P(B) = \frac{4}{6}$$

Como o resultado do primeiro lançamento não influencia no resultado do segundo dado, então trata-se da definição de eventos independentes, onde

$$(26) P(X) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$(27) P(A \cap B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Então a probabilidade do cavalo da trilha X avançar é de  $P(X) = \frac{4}{9}$  ou 44,44%.

E nesse sentido, para concluir o raciocínio, o estudante é questionado: “Então, qual a probabilidade de o maior valor ser 5 ou 6?”. E para determinar essa probabilidade, basta que se faça o cálculo do evento complementar:

$$(28) P(Y) = P(\bar{X}) = 1 - P(X)$$

$$P(Y) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Então a probabilidade do cavalo da trilha Y avançar é de  $P(Y) = \frac{5}{9}$ , ou 55,56%.

Considerando para a análise os domínios e subdomínios do modelo teórico MTSK sobre os conhecimentos que o professor de Matemática deve mobilizar para potencializar a aprendizagem, o professor deve possuir os conhecimentos dos tópicos (KoT) em (24) e (25) sobre eventos e probabilidade laplaciana (clássica), (26) e (27) sobre conceitos de eventos independentes, associada com noções de conjuntos e em (28) envolvendo o conceito de evento complementar, também associado ao conceito de conjuntos. A resolução do item 4) do segundo momento (investigação), o espaço amostral e os eventos podem ser visualizados e servir de apoio para a mobilização desses conhecimentos em (24), (25), (26) e (27), atendendo ao subdomínio do conhecimento matemático para uma conexão entre os tópicos (KSM).

Ao conduzir a tarefa planejada em dois momentos, o primeiro sendo a ação do jogo, e o segundo, sendo o momento da investigação, os diferentes modos de comunicar matematicamente, como a construção dos conhecimentos partindo da intuição dos alunos, fazem uma conexão entre a teoria e a prática matemática (KPM), permitindo que uma situação real seja traduzida para uma linguagem abstrata e vice-versa.

Em relação ao conhecimento pedagógico do conteúdo, a utilização do jogo como estratégia para apresentar o conteúdo (KMT), tem papel importante nesse processo, pois pode contribuir para uma aprendizagem significativa, propiciando condições agradáveis e favoráveis ao ensino, além de desenvolver o senso crítico e criativo, estimular o raciocínio e descobrir novos conceitos. (ALVES, 2001). O momento após o jogo torna-se oportuno para que o professor perceba, através da investigação, como seus alunos aprendem, ao observar a justificativa das suas respostas, os seus possíveis erros ou acertos, ou ainda as dificuldades e obstáculos (KFLM) acerca do que lhe é proposto.

A prática avaliativa deve consistir no acompanhamento do desenvolvimento da atividade, observando o desempenho do aluno, coletiva e individualmente, os critérios preestabelecidos, e principalmente ter o cuidado de atender as especificações curriculares para o conteúdo (KMLS), que nesse contexto está relacionado à habilidade de resolver problemas que envolvem experimentos aleatórios sucessivos (24) e (25) proposta pela BNCC.

O cálculo formal ou axiomático é uma das maneiras de resolver esse problema. Mas deve-se considerar o desenvolvimento do raciocínio do estudante. Ele pode, por exemplo, representar os possíveis resultados numa tabela ou, senão, escrever literalmente todos os casos. E partir daí, o professor deve conduzi-lo à construção dos conceitos, formalizando as definições, através de símbolos e da linguagem matemática, pois é a formalização dos conceitos por meio dos axiomas que os resultados são construídos, descritos, simplificados e interpretados para depois serem validados (BATANERO et al., 2016).

Casos possíveis para que cada cavalo avance uma casa, considerando a primeira e segunda jogada do dado, respectivamente.

Quadro 4 – Espaço amostral no lançamento de dois dados

Cavalo da trilha X				Cavalo da trilha Y		
1 e 1	2 e 1	3 e 1	4 e 1	5 e 1	6 e 1	1 e 5
1 e 2	2 e 2	3 e 2	4 e 2	5 e 2	6 e 2	1 e 6
1 e 3	2 e 3	3 e 3	4 e 3	5 e 3	6 e 3	2 e 5
1 e 4	2 e 4	3 e 4	4 e 4	5 e 4	6 e 4	2 e 6
				5 e 5	6 e 5	3 e 5
				5 e 6	6 e 6	3 e 6
						4 e 5
						4 e 6

Fonte: Elaboração própria

Uma outra abordagem da probabilidade que está sendo explorada nesse jogo, no momento em que os itens 1, 2 e 3 são questionados ao aluno, é a definição subjetiva, pois essa interpretação não está diretamente envolvida com os cálculos e depende, em partes, da intuição, da experiência que o sujeito tem com o objeto, ou ainda a crença com base no julgamento pessoal (BATANERO et al., 2016)

No item 6 desta tarefa, quando o professor sugere que o aluno construa uma tabela de frequências e represente os resultados num gráfico, emerge o conhecimento da probabilidade frequentista, inclusive sugerido pela BNCC (BRASIL, 2018) quando propõe que o cálculo de probabilidade deve ser feito por meio de muitas repetições de um experimento.

A oportunidade de compartilhar seus pensamentos possibilita ao estudante uma reflexão e um olhar diferente sobre o jogo, pois novas hipóteses começam a ser produzidas, o que gera

no aluno a capacidade de desenvolver induções e conjecturas para generalizar seus cálculos, por conta do contato com o objeto de estudo. A importância da comunicação de conceitos e ideias matemáticas deve ser enfatizada para que gere um aprendizado mútuo e ainda possibilite um movimento de ação-reflexão-ação e investigação, além de questionamentos sobre sorte (NACARATO; GRANDO, 2013).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Considerando o objetivo dessa pesquisa, que foi analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem aos estudantes do Ensino Médio, verificou-se que a implementação de tarefas nas aulas de Matemática tem auxiliado os professores na mobilização de conceitos e técnicas e assim oportunizar ao aluno o desenvolvimento da sua capacidade de aprendizagem com autonomia. Nesse momento, o papel do professor é imprescindível para que a aprendizagem aconteça com sucesso, pois a escolha de uma tarefa adequada associada ao modo de conduzi-la pode impactar de forma positiva na aprendizagem dos alunos, bem como promover reflexões acerca da atividade profissional docente, o que contribui para uma melhoria na qualidade da sua aula.

As tarefas selecionadas para serem analisadas, a saber, duas extraídas do livro didático da segunda série do Ensino Médio e um jogo também proposto para o Ensino Médio, levam em consideração os constructos teóricos de marcadores de tarefas para o ensino e à aprendizagem de probabilidade e o modelo teórico sobre o conhecimento profissional do professor de Matemática (MTSK). Esses marcadores apresentam elementos norteadores para o planejamento e execução das tarefas propostas nas aulas, estando diretamente relacionados com o conhecimento especializado do professor de Matemática.

Nas tarefas analisadas, com relação ao conhecimento matemático probabilístico do professor, espera-se que ele esteja disposto a construir junto aos seus alunos os conceitos de eventos certos, possíveis e impossíveis, espaço amostral equiprovável e não equiprovável e eventos independentes, e que oriente os seus alunos a perceberem que existem outras abordagens de probabilidade além da clássica.

Na primeira tarefa, a análise consiste apenas no sentido do exercício, em que o ensino é feito de forma direta (expositiva) e os conceitos são aplicados de maneira prática. Geralmente

esse tipo de tarefa apresenta pouca intervenção do professor e é o momento em que o aluno põe em prática os conhecimentos que ele adquiriu anteriormente.

Na segunda tarefa, por exemplo, a sugestão é que o professor explore a abordagem frequentista e gere um debate que confronte os resultados com a visão clássica. Nesse tipo de tarefa o professor pode estimular que seus alunos participem através de perguntas, discussão sobre os possíveis resultados, tornando a tarefa com um caráter mais problemático. Os conceitos começam a fazer mais sentido. A proposta dessa segunda tarefa reforça o que afirma Ponte (2005, p. 14): “Não é uma ou outra tarefa pontual mais interessante que marca o estilo de ensino, mas sim o tipo de trabalho usual na sala de aula”. Isso deixa claro que os resultados dependem, em parte, de como o professor planeja e conduz a tarefa, através da mobilização dos conceitos que objetiva alcançar em seus alunos.

A terceira tarefa, nesse caso o jogo *Corrida de cavalo*, se apresenta tanto no formato de exploração, quanto de investigação. Geralmente os jogos para o ensino de Matemática envolvem esse tipo de abordagem. O momento da investigação talvez seja até mais rico no sentido de ensino e de aprendizagem, pois é nesse momento que o professor percebe o que seu aluno conhece a respeito do conteúdo. Nesse contexto, a tarefa tem o objetivo de detectar as possíveis dificuldades dos alunos com relação aos conceitos de probabilidade. Também é nesse momento que o professor reflete sobre as potencialidades e os possíveis obstáculos, além de proporcionar a oportunidade de modificá-la para uma próxima experiência. O contexto da tarefa analisada é bastante rico por permitir múltiplas abordagens do conteúdo de probabilidade, e a por meio da intervenção do professor, são contempladas as abordagens clássica, frequentista, subjetiva e formal (axiomática) da probabilidade.

A utilização dos procedimentos adequados para a construção desses conceitos tem extrema importância no ensino e na aprendizagem, pois quando o professor solicita que os dados sejam organizados numa tabela e posteriormente representados em gráfico, o aluno percebe o que esses dados representam, e desperta nele a capacidade de interpretar matematicamente aquele contexto. Então a abordagem formal é vista com mais significado e nesse momento o professor tem a oportunidade de conduzir o aluno a perceber que o que ele construiu no processo da realização da tarefa tem seus resultados demonstrados e validados matematicamente, utilizando a linguagem formal e simbólica. Isto é visto tanto na tarefa 02 quanto na 03.

Ao propor uma determinada tarefa direcionada para o ensino de probabilidade, é importante que o professor tenha um olhar para o conteúdo numa perspectiva de objeto de ensino e aprendizagem. Essa perspectiva também é vinculada ao conhecimento especializado

do professor de Matemática que ensina probabilidade, e nesse sentido, deve-se considerar como se dá a aprendizagem e quais as dificuldades que os alunos tem diante do ensino de probabilidade.

Um fator preponderante na implementação de tarefas é a sua diversificação de modo que valorize a interação entre professor e aluno, através da socialização das ideias matemáticas acerca do conteúdo. Em termos de avaliação, o professor deve ter em mente a importância de todo o processo, e não apenas o resultado final, observando se as especificidades curriculares estão sendo atendidas, como as competências e habilidades propostas para aquele conteúdo.

Como todo tema de pesquisa não se encerra ao final do trabalho escrito, esse tema dá margem a novas pesquisas e a continuação de estudos em trabalhos posteriores contribuindo com reflexões sobre o saber-fazer do professor e o processo de aquisição de conceitos aos estudantes a partir da implementação de tarefas matemáticas.

## REFERÊNCIAS

- ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith(2002). O método nas ciências sociais. Em: ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWAMDSZNADJDER, Fernando. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira, p. 147-178. Disponível em: [http://gephisnop.weebly.com/uploads/2/3/9/6/23969914/0\\_metodo\\_nas\\_ciencias\\_naturais\\_e\\_sociais\\_-\\_pesquisa\\_quantitativa\\_e\\_qualitativa.pdf](http://gephisnop.weebly.com/uploads/2/3/9/6/23969914/0_metodo_nas_ciencias_naturais_e_sociais_-_pesquisa_quantitativa_e_qualitativa.pdf). Acesso em: 24 maio 2020.
- ALVES, Eva Maria Siqueira. **A ludicidade e o ensino de matemática: uma prática possível**. Campinas, SP: Papirus, 2001.
- BERNARDO, Rosa Di; et al. Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: conexões em medidas. **Cadernoscenpec**. São Paulo, v.8, n.1, p.98-124, jan./jul. 2018. Disponível em: <http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/391>. Acesso em: 04 maio 2020
- BALL, Deborah Loewenberg.; HILL, Heather C.; BASS, Hyman. Knowing mathematics for teaching: who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? **American Educator**, n. Fall, p. 14-46, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/2027.42/65072> Acesso em: 24 maio 2020.
- BARBOSA, Jonei. Designing written tasks in the pedagogic recontextualising field: proposing a theoretical model. In: BERGER, M. (Ed.). Proceedings of the Seventh **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.19, n.3, pp.42-66. International Mathematics Education and Society Conference, Cape Town: MES 7, p.

213-223, jul. 2013. Disponível em: <http://mescommunity.info/mes7a.pdf>. Acesso em: 22 maio 2020.

BATANERO, Carmen; CHERNOFF, Egan J.; ENGEL, Joachim; LEE, Hollylynn S.; SÁNCHEZ, Ernesto. Research on Teaching and Learning Probability. **Icme-13 Topical Surveys**, [s.l.], p. 1-33, 2016. Springer International Publishing. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-31625-3>. Acesso em: 24 maio 2020.

BISPO, Regina; RAMALHO, Glória; HENRIQUES, Nuno. Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. **Análise Psicológica**, Lisboa, v. 26, n. 1, p. 3-14, jan. 2008. Disponível em [http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0870-82312008000100001&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0870-82312008000100001&lng=pt&nrm=iso). Acesso em: 25 maio 2020.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto – Portugal. Porto Editora, 2010. Disponível em: [https://www.academia.edu/6674293/Bogdan\\_Biklen\\_investigacao\\_qualitativa\\_em\\_educacao](https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao) Acesso em: 24 maio 2020

BOROVCNIK, Manfred. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk Pensamento probabilístico e alfabetização em probabilidade no contexto do risco. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 18, n. 3, jan. 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/31495> Acesso em: 24 maio 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 24 maio 2020.

CARRILLO, José; CLIMENT, Nuria; CONTRERAS, Luis Carlos; MUÑOZ-CATALÁN, Maria de la Cinta. Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. In: UBUZ, Behiye; HASER, Çiğdem, et al. (Ed.). **VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)**. Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara, 2013. p. 2985-2994. Disponível em: [http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17\\_Climent.pdf](http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG17/Wg17_Climent.pdf). Acesso em: 22 maio 2020.

COSTA, Wedeson Oliveira; OLIVEIRA, Andreia Maria Pereira de. A participação de professores na elaboração de tarefas matemáticas em um trabalho colaborativo. **Revemop**, [s.l.], v. 1, n. 1, p. 105, 10 jan. 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.33532/revemop.v1n1a6>. Acesso em: 25 maio 2020.

COSTA, Wedeson Oliveira; OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de; SILVA, Lílian Aragão da. Análise de materiais curriculares elaborados por professores na perspectiva dos marcadores de tarefas. Analysis of curriculum materials developed for teachers in view of tasks markers. **Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, [S.l.], v. 19, n. 3, p. 42-66, dez. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/32689> Acesso em: 24 maio 2020.

COUTINHO, Cileda Q. Silva. **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica**. Campinas, SP: Mercado das Letras, 2013.

CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; JESUS, Cristina Cirino de. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciênc. educ. (Bauru)**, Bauru, v. 20, n. 3, p. 751-764, Sept. 2014. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1516-73132014000300751&lng=en&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132014000300751&lng=en&nrm=iso). <http://dx.doi.org/10.1590/1516-73132014000300015>. Acesso em: 25 maio 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. 2. – 3 ed. – São Paulo: Ática, 2016b.

JUNKERFEURBOM, Maiara Aline; KLÜBER, Tiago Emanuel. Tarefas de investigação matemática em livros didáticos do 8º ano aprovados pelo programa nacional do livro didático – PNLD (2014). **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 22, n. 55, p.7-16, jul./set. 2017. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/722> Acesso em: 24 maio 2020.

LITOLDO, Beatriz Fernanda; ALMEIDA, Marieli Vanessa Rediske de; RIBEIRO, Miguel. Conhecimento especializado do professor que ensina matemática: uma análise do livro didático no âmbito das frações. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, [S.l.], v. 1, n. 3, p. 3-23, jun. 2018. Disponível em: <http://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/7370/4473> Acesso em: 25 maio 2020.

LOPES, Celi Espasandin; PORCIÚNCULA, Mauren; SAMÁ, Suzi. **Perspectiva para o ensino e a aprendizagem de estatística e probabilidade**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2019.

MELO, Carlos Ian Bezerra de; LOPES, Tânia Maria Rodrigues; OLIVEIRA, João Luzeilton de. Análise crítica do processo de escolha do livro didático de Matemática na EEF José Jucá, no município de Quixadá-CE. **Revista Thema**, [S.l.], v. 14, n. 4, p. 100-113, dez. 2017. Disponível em: <http://revistathema.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/552>. Acesso em: 28 maio 2020.

MORIEL JÚNIOR, Jefferson Gomes; CARRILLO, José. Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. In Maria Tereza González, Myriam Codes, David Arnau y Tomás Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: **SEIEM**, 2014. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/6087/> Acesso em: 01 maio 2020.

NACARATO, Adair Mendes; GRANDO, Regina Célia. **Estatística e probabilidade na Educação Básica: professores narrando suas experiências** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

PONTE, João Pedro da. **Gestão curricular em matemática**. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/3008> Acesso em: 24 maio 2020.

PONTE, João Pedro da (org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática**. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/15310> Acesso em: 24 maio 2020.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa. (2012). O papel do contexto nas tarefas matemáticas. **Interacções**, 22, 196-216. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/22634> Acesso em: 24 maio 2020.

STEIN, Mary Kay; SMITH, Margaret Schan. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 22-28, nov./dez. 2009. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/textos/stein-smith%2098.pdf> Acesso em: 24 maio 2020.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dessa pesquisa buscou-se investigar como a literatura científica, publicada em periódicos em Educação Matemática, e livros didáticos, aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), abordam o tema probabilidade na Educação Básica. Diante disso, foi considerada a retomada do problema de pesquisa de modo a compreender os resultados obtidos após a conclusão de cada etapa que compõe essa pesquisa, bem como as implicações para as pesquisas futuras e para a prática do professor que ensina probabilidade na Educação Básica.

### 5.1 Retomando o problema de pesquisa

Consideramos a questão problematizadora que norteia essa pesquisa para a compreensão dos aspectos que a compõem: como a literatura científica publicada em periódicos em Educação Matemática, livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e tarefas matemáticas, abordam o tema probabilidade na Educação Básica? Para a compreensão da problemática em questão, foram delimitadas três etapas que integram essa pesquisa, caracterizadas em artigos, em que seus objetivos individuais determinam os objetivos específicos desse estudo.

O primeiro objetivo específico dessa pesquisa foi analisar como a literatura publicada em periódicos nacionais em Educação Matemática discute o ensino e a aprendizagem de probabilidade na Educação Básica, abordado no capítulo I. O segundo objetivo específico, identificado no capítulo II, é analisar como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) no Ensino Médio. E o terceiro objetivo específico foi analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino

de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem à estudantes do Ensino Médio, discutido no capítulo III.

## 5.2 Compreensão dos resultados

Para a compreensão dos resultados dessa pesquisa, que tem como objetivo geral investigar como a literatura científica publicada em periódicos em Educação Matemática, livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) e tarefas matemáticas abordam o tema probabilidade na Educação Básica, foi necessário que se compreendesse os resultados obtidos em cada etapa configurada em artigos, já que a pesquisa tem seu formato em *multipaper*, e nessa proposta, os objetivos de cada artigo dessa pesquisa representam os objetivos específicos da pesquisa como um todo.

O primeiro estudo, cujo objetivo foi analisar como a literatura científica, publicada em periódicos em Educação Matemática discute a temática de probabilidade, se traduziu num estudo que possibilitou a construção de uma síntese sobre o ensino de probabilidade para a Educação Básica. Essa síntese toma como base a relação entre as categorias estabelecidas e as diferentes abordagens da probabilidade. Os resultados oportunizaram perceber que as discussões evidenciam pontos em comum no momento em que valorizam o aprendizado pautado, inicialmente, no que o estudante possui de conhecimentos e experiências sobre probabilidade, perpassando pelo planejamento e execução de tarefas relacionadas ao ensino dessa temática, por meio de experimentos, a partir de diferentes metodologias que favorecem as diversas abordagens do conceito de probabilidade.

O segundo estudo, cujo objetivo foi analisar como o tema probabilidade é abordado em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), destacou-se, entre os seus principais resultados, como foi explorada as diferentes abordagens que envolvem os conceitos de probabilidade. Algumas abordagens, como a clássica e axiomática, são abordadas nos três livros analisados, de formas diferentes, seja a partir da noção frequentista usando demonstrações, seja por meio de situações-problema. No entanto, outras não foram trabalhadas com tanta ênfase, mas vale ressaltar que a aprendizagem de probabilidade, para que seja desenvolvida com êxito, não deve ser feita, restringindo-se à uma única abordagem.

Com relação aos resultados apresentados no terceiro estudo, que teve como objetivo analisar de que forma as tarefas matemáticas para o ensino de probabilidade podem promover possíveis situações de aprendizagem à estudantes do Ensino Médio, apontaram que a implementação de tarefas de probabilidade quando bem planejadas e articuladas podem trazer

bons resultados, e promover situações de aprendizagem, além de auxiliar os professores na mobilização de conceitos e técnicas e assim contribuir para que o aluno desenvolva a sua capacidade de aprendizagem com autonomia. Destacou-se também que a diversificação de tarefas oportuniza a socialização das ideias matemáticas acerca do conteúdo, valorizando a interação entre o professor e o aluno.

De maneira geral, esses resultados apontados em cada estudo convergem para uma mesma dimensão. O modo que o professor aborda o conteúdo de probabilidade está intimamente relacionado com o seu conhecimento de conteúdo e os métodos utilizados de modo que esse conhecimento se desenvolva no aluno. As tarefas matemáticas são traduzidas como uma ponte de acesso entre o conhecimento mobilizado pelo professor e a bagagem de conhecimento do aluno advinda das experiências cotidianas dentro e fora da escola.

### **5.3 Implicações para pesquisas futuras**

O conteúdo de probabilidade é ainda bastante recente nos currículos escolares. O movimento sobre a importância do desenvolvimento do raciocínio probabilístico, base do que é hoje a Educação Estatística, só ganhou notoriedade a nível mundial a partir da década de 1970. Enquanto no Brasil, o movimento teve seus reflexos já no final da década de 1990, resultando na inserção do conteúdo na estrutura curricular de Matemática da Educação Básica, após muitas discussões na comunidade educacional e acadêmica.

Alguns desafios precisam ser vencidos, como as dificuldades que os professores podem apresentar em relação à probabilidade, uma vez que se trata de um conteúdo relativamente novo nos currículos da Educação Básica, além de apresentar variadas formas de abordagem. Os resultados dessa pesquisa mostram que a abordagem do conteúdo nos livros didáticos ainda é bastante limitada, geralmente atendendo à abordagem clássica e sendo reforçada pela abordagem axiomática, deixando de lado outras abordagens.

Diante disso, faz necessário que o campo de pesquisa acerca dessa temática seja ampliado, de forma a contribuir para a formação continuada do professor de Matemática que ensina probabilidade na Educação Básica.

Esse trabalho representa o recorte de uma realidade limitada por um contexto discutido sob o olhar do pesquisador ao interpretar as fontes de pesquisas utilizadas. Isso nos leva a compreender que ainda há muito a ser discutido, sendo mais uma motivação para admitir a ampliação e realização de novas pesquisas nesse campo da Matemática.

#### 5.4 Implicações para a prática do professor

Todo o processo dessa pesquisa esteve pautado no contexto do ensino e da aprendizagem de probabilidade na Educação Básica. No capítulo I, a síntese resultante da revisão sistemática de literatura discute o aprendizado desenvolvido a partir da interrelação entre os conhecimentos e experiências que o estudante já possui com vistas ao objeto de estudo dessa pesquisa, e as metodologias que valorizam as variadas abordagens do conceito de probabilidade.

No capítulo II, a análise dos livros didáticos desenvolvida nessa pesquisa abre espaço para reflexões de como a probabilidade é abordada nesse material, levando em conta que é a principal ferramenta que conduz o trabalho do professor em sala de aula. E nesse sentido, o capítulo III analisa três tarefas matemáticas com foco no ensino de probabilidade, sendo duas delas retiradas do livro didático. A análise dessas tarefas reforça a importância do conhecimento do professor, tanto com relação ao conteúdo matemático, quanto com o seu conhecimento de prática pedagógica. Esse terceiro estudo permite ao professor perceber que uma tarefa pode ser rica e produtiva e vai depender de como o ele conduz a sua execução, bem como compreender quais os conhecimentos precisam ser mobilizados. Sendo assim, o professor deve estar atento às suas práticas e observar o que é planejado, ensinado, avaliado e valorizado na sala de aula.

Diante dos resultados dessa pesquisa surgiu a ideia da elaboração de um manual pensado como material de apoio e orientação ao trabalho do professor na realização do planejamento de suas aulas sobre probabilidade. Nele são apresentadas tarefas que podem ser reestruturadas de modo a conduzir o aluno à construção dos conceitos que envolvem a probabilidade, com dicas de como proceder. O objetivo é contribuir com a prática do professor no sentido de dar suporte às suas aulas de probabilidade, saindo um pouco do contexto de aulas expositivas e tornando-as mais dinâmicas. Mas vale lembrar que o professor tem a autonomia de escolher a forma que lhe for mais conveniente, inclusive vale ressaltar a liberdade de adaptar cada atividade ao contexto que seus alunos vivenciam.

Esse material foi pensado no formato de manual, no intuito de facilitar o acesso e a utilização nas aulas de probabilidade, reconhecendo que geralmente os professores da Educação Básica tem uma alta carga horária de trabalho e, devido a essa demanda, dispõem de pouco tempo para leituras e aprofundamento no planejamento de suas aulas, ficando muitas vezes limitados às aulas expositivas com base apenas no livro didático.



MANUAL DE ORIENTAÇÃO E APOIO ÀS AULAS DE PROBABILIDADE

## APRESENTAÇÃO

O tempo todo estamos sujeitos à tomada de decisões em condições de incerteza. Fazer uma escolha num universo de possibilidades requer algum cuidado, uma certa experiência ou estratégias bem pensadas. Em situações de incertezas que precisamos julgar, fazer previsões ou estimar resultados, contar com a “sorte” talvez não seja o melhor caminho. Assim, a teoria da probabilidade pode nos ajudar a tomar decisões em tais condições.

A probabilidade estuda a aleatoriedade e a incerteza para quantificar a possibilidade de um determinado evento acontecer. Em face ao reconhecimento da sua importância, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) orienta que desde os anos iniciais da Educação Básica, os estudantes tenham contato com esse conhecimento.

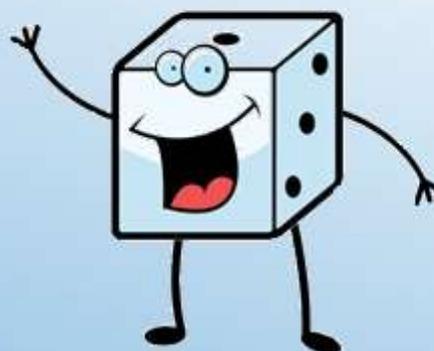
A busca por novas metodologias para o ensino de conteúdos matemáticos sempre foi constante, pois muitas vezes a Matemática é vista apenas como regras e expressões matemáticas a serem decoradas e aplicadas em exercícios sem sentido. No entanto, ela deve ser pensada para despertar no aluno o interesse e a valorização do conhecimento, e num contexto de ensino de probabilidade, deve-se partir das experiências que o aluno já possui, para que ele entenda a importância desse conhecimento e a sua aplicabilidade em situações do cotidiano.

A ideia da elaboração deste manual surgiu com os resultados dessa pesquisa do trabalho de conclusão de curso do Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal do Oeste da Bahia, como um material de apoio ao professor de Matemática da Educação Básica que ensina probabilidade. A partir de todo o estudo e das análises realizadas ao longo desta pesquisa, foi possível pensar num material que tivesse o objetivo de atender as propostas para o ensino de probabilidade.

Portanto a presente pesquisa tem como produto educacional um manual intitulada *Manual de orientação e apoio às aulas de probabilidade* que reúne materiais com o objetivo de contribuir com a prática do professor no sentido de dar suporte às suas aulas, saindo um pouco do contexto de aulas expositivas e tornando-as mais dinâmicas.

Esse material foi pensado num formato de manual para facilitar o seu acesso, uma vez que geralmente os professores da Educação Básica tem uma alta carga horária de trabalho e devido a essa demanda, dispõem de pouco tempo para leituras e aprofundamento no planejamento de suas aulas, ficando muitas vezes limitados às aulas expositivas com base apenas no livro didático.

Olá professor (a) de matemática! Te apresento esse manual que reúne materiais para você poder aplicar em suas aulas de probabilidade. Ele tem o objetivo de contribuir para enriquecimento das suas aulas, tornando-as mais dinâmicas.



## ÍNDICE

A PROBABILIDADE .....	07
Uma tarefa para a construção de conceitos.....	08
Probabilidade Clássica x Freqüentista – O uso de um simulador .....	10
Um jogo para exploração e investigação de conceitos de probabilidade .....	11
Construindo um simulador de probabilidade geométrica .....	13
Um problema contra-intuitivo .....	14
REFERÊNCIAS .....	16
Imagens .....	16



## A PROBABILIDADE

Você sabe o que é a probabilidade? Como surgiu? Quais as formas de abordagem? O que a BNCC propõe com relação a essa temática?



A teoria das probabilidades cria, elabora e pesquisa modelos para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios. É a parte da matemática que estuda fenômenos aleatórios, como uma maneira de medir a incerteza.

Existem variadas formas de abordar o conteúdo de probabilidade. Seja através do conceito clássico, frequentista, axiomático, geométrico ou subjetivo, a forma que o professor conduz a construção dos conceitos implica diretamente no resultado esperado.

A teoria das probabilidades tem seus primeiros registros na obra do italiano Girolamo Cardano (1501-1576) envolvendo jogos de azar. Mais tarde, Blaise Pascal (1623-1662) deu novo ampliou essa teoria, depois de trocar ideias com Pierre de Fermat (1601-1665) através de cartas em que discutiam problemas que envolviam jogos (SAMPAIO et al, 2019).

O conteúdo de probabilidade é ainda bastante recente nos currículos escolares. O movimento sobre a importância do desenvolvimento do raciocínio probabilístico, base do que é hoje a Educação Estatística, só ganhou notoriedade a nível mundial a partir da década de 1970. Enquanto no Brasil, o movimento teve seus reflexos já no final da década de 1990, resultando na inserção do conteúdo na estrutura curricular de Matemática da Educação Básica, após muitas discussões na comunidade educacional e acadêmica.

Hoje, a Base Nacional Comum Curricular, BNCC, propõe para a Educação Básica, que o ensino de probabilidade seja explorado desde os anos iniciais, através de conceitos de espaço amostral de eventos equiprováveis, o princípio multiplicativo ou modelos de simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. E para o final da Educação Básica é proposta a ampliação e aprofundamento desse conhecimento.

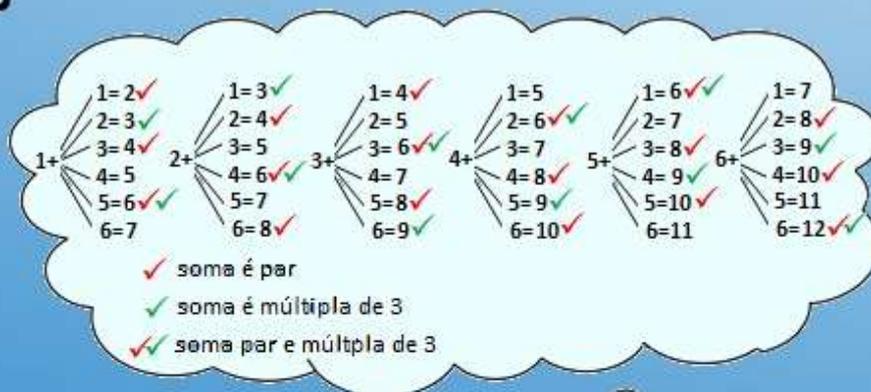
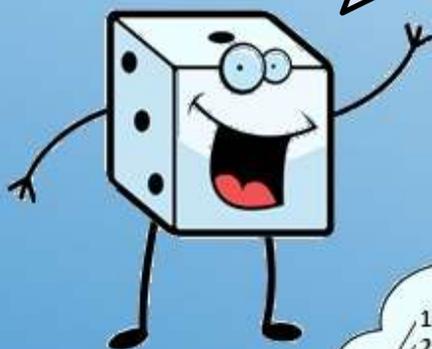
## Um problema para a construção de conceitos

No lançamento simultâneo de dois dados perfeitos distinguíveis, qual é a probabilidade de se obter soma par ou soma múltipla de 3?

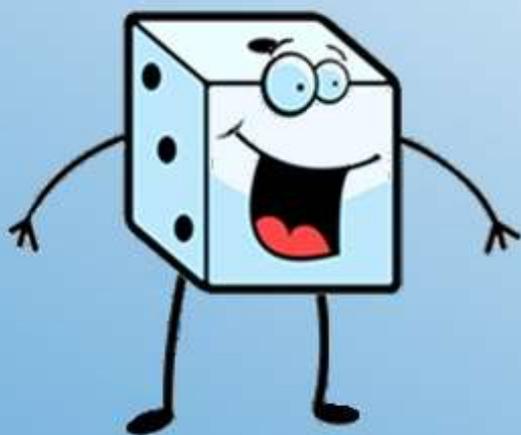
Fonte: Dante (2016b, p. 239)



Sugestão: considere o raciocínio do seu aluno. Ele pode utilizar o conceito formal de probabilidade, ou pode construir caminhos através de argumentos coerentes, desenhos, ou esquemas para traduzir o seu pensamento lógico.



Oriente-o na construção dos conceitos, solicitando que expresse o espaço amostral e os eventos A (a soma é par) e B (a soma é múltipla de 3) como na figura abaixo, marcando um X para o evento A e um círculo para o evento B.



Representação do espaço amostral e dos eventos

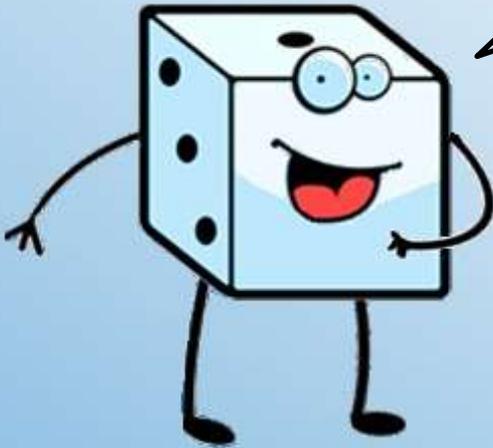
	1	2	3	4	5	6
1	X	○	X		X	
2	○	X		X		X
3	X		X		X	○
4		X		X	○	X
5	X		X	○	X	
6		X	○	X		X

Alguns conceitos da teoria dos conjuntos precisam ser revisados neste problema, como a união e a interseção de eventos.

Peça para seus alunos observarem a imagem que representa o espaço amostral e os eventos.

- Qual o número de elementos do espaço amostral?
- Quantos são os elementos que representam o evento A (a soma é par) marcados com um X? Então qual a probabilidade  $P(A)$ ?
- Quantos são os elementos do evento B marcados com um círculo? Então qual a probabilidade  $P(B)$ ?
- Agora vamos unir esses dois eventos. Quantos elementos tem o conjunto que representa a união desses eventos A e B, sem repetir os elementos coincidentes (interseção)?

Finalize, então, com a solução,  
de acordo com as etapas da  
tarefa proposta!



Número de elementos do espaço amostral  $n(\Omega) = 36$

Evento A: a soma é par

Evento B: a soma é um múltiplo de 3

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Então, a probabilidade de se obter “soma par ou soma

$$\text{múltipla de 3” é dada por } P(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{24}{36} =$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Generalizando, tem-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

## PROBABILIDADE CLÁSSICA X FREQUENTISTA

### O uso de um simulador

Vamos pensar agora numa tarefa que explore o  
conceito frequentista da probabilidade. Temos aqui um  
software que simula lançamentos de uma moeda!



### Simulador de lançamento de moeda

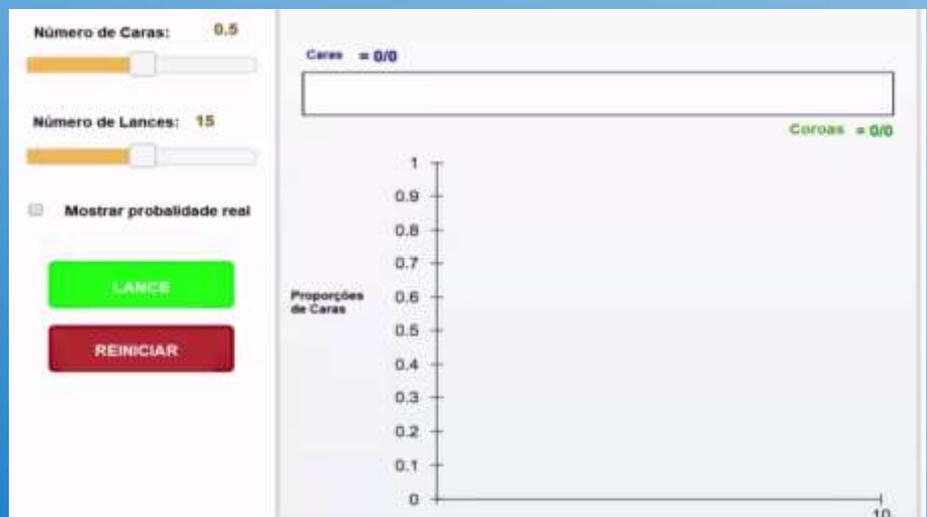


Imagem 01: software que simula o lançamento de uma moeda, disponível em:

[http://digfir-published.macmillanusa.com/stats\\_applet/stats\\_applet\\_10\\_prob.html](http://digfir-published.macmillanusa.com/stats_applet/stats_applet_10_prob.html)



A partir desta tarefa, é possível associar as abordagens clássica e frequentista da probabilidade e ainda confrontar os resultados.



Esta tarefa foi retirada do link <https://pt.khanacademy.org/math/ap-statistics/probability-ap/randomness-probability-simulation/a/theoretical-and-experimental-probability-coin-flips-and-die-rolls> e adaptada.

### Lançamento de uma moeda

1) Uma moeda justa tem 2 lados (cara e coroa), que têm a mesma chance de aparecer quando a moeda é jogada para cima. Qual é a probabilidade clássica de uma moeda honesta dar cara?

$P(\text{cara}) =$

2) Davi jogou uma moeda 20 vezes para cima e tirou cara nas 8 vezes. Com base nos resultados de Davi, qual é a probabilidade frequentista de a moeda dar cara?

$P(\text{cara}) \approx$

3) Por que os resultados clássico e frequentista não são iguais?

a)  Os resultados de um experimento nem sempre correspondem aos resultados teóricos, mas devem se aproximar depois de um grande número de tentativas.

b)  A moeda de Davi é obviamente injusta.

4) Davi continua jogando a sua moeda até ter um total de 100 lançamentos, e a moeda dá cara em 47 desses lançamentos. Com base nesses resultados, qual é a probabilidade frequentista de a moeda dar cara?

$P(\text{cara}) \approx$

5) O que é possível perceber sobre a probabilidade frequentista depois que Davi continuou lançando a moeda?

a)  A probabilidade frequentista ficou mais próxima da probabilidade clássica depois de mais lançamentos.

b)  A probabilidade frequentista ficou mais distante da probabilidade clássica depois de mais lançamentos de moeda.

Use o link acima e simule 15 lançamentos de uma moeda. Em seguida simule 200 lançamentos. E observe o gráfico dos resultados e discuta com seus alunos o que acontece com os resultados à medida que o número de lançamentos aumenta.

## Um jogo para exploração e investigação de conceitos de probabilidade



Vamos mobilizar conceitos com o lúdico?  
Esta é uma tarefa que se compõe de dois momentos. O momento do jogo e o da investigação. Após a realização da tarefa, mobilize os conhecimentos junto aos estudantes, para que eles compreendam os conceitos que envolvem independência de eventos.

### Tarefa do tipo exploração/investigação

#### 1º Momento: Jogo Corrida de cavalos

##### Regras do jogo:

Duplas

##### Sorteio para início do jogo:

Para iniciar a corrida, cada aluno lança o dado. O que obtiver o maior resultado, escolhe a sua trilha.

As duas trilhas devem estar posicionadas, uma ao lado da outra.

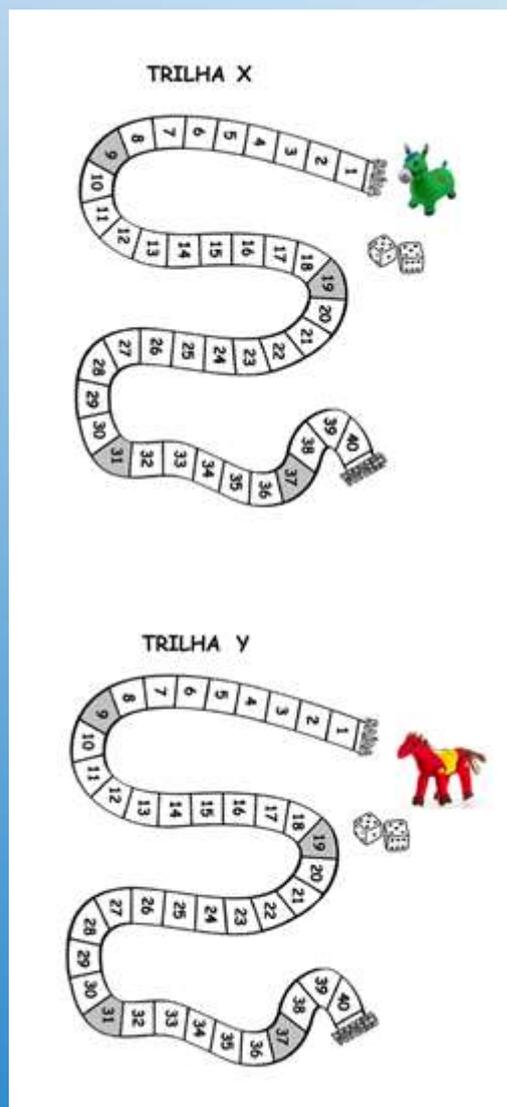
Os dois jogadores lançam o dado, e observam os resultados.

Trilha X – Avance uma casa, caso o maior resultado estiver entre os números 1, 2, 3, ou 4.

Trilha Y – Avance uma casa, caso o maior resultado estiver entre os números 5 ou 6.

Vence aquele que chegar primeiro ao final da trilha.

Observação: É importante que se tenha algum aluno voluntário para anotar os resultados sorteados para a tarefa de investigação.



Vamos investigar?



### 2º momento: Tarefa de investigação

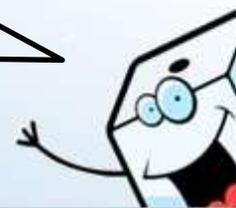
- 1) Sobre vencer, na sua opinião, esse jogo é justo? Justifique.
- 2) Quais são os possíveis casos para que o primeiro cavalo vença? Explique seu raciocínio.
- 3) E quais os possíveis casos para que o segundo cavalo vença? Explique seu raciocínio.
- 4) Preencha a tabela com as combinações de resultados para todas as jogadas e escreva X para os valores em que vencem o cavalo que está na trilha X, e Y para os valores que vencem o cavalo que está na trilha Y.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

RESPOSTA						
	1	2	3	4	5	6
1	X	X	X	X	Y	Y
2	X	X	X	X	Y	Y
3	X	X	X	X	Y	Y
4	X	X	X	X	Y	Y
5	Y	Y	Y	Y	Y	Y
6	Y	Y	Y	Y	Y	Y

- 5) Depois de preencher a tabela e perceber os resultados, as hipóteses a respeito da primeira pergunta se confirmaram?
- 6) Construa uma tabela de frequências e em seguida um gráfico que melhor represente os resultados obtidos nas jogadas.
- 7) Escreva a razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis para cada resultado.  $P(X)$  e  $P(Y)$  vencer.

“Lançando-se um dado duas vezes, qual a probabilidade de o maior valor ser 1, 2, 3, ou 4?”



Solução:

1º lançamento (Evento A): sair 1, 2, 3 ou 4 (4 chances num total de 6 possibilidades:  $P(A) = \frac{4}{6}$ )

2º lançamento (Evento B): sair 1, 2, 3 ou 4 (4 chances num total de 6 possibilidades:  $P(B) = \frac{4}{6}$ )

Como o resultado do primeiro lançamento não influencia no resultado do segundo dado, então trata-se da definição de eventos independentes. Logo,

$$P(X) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Então a probabilidade do cavalo da trilha X avançar é de  $P(X) = \frac{4}{9}$  ou 44.44%.

“Então, qual a probabilidade de o maior valor ser 5 ou 6?”



E para determinar essa probabilidade, basta que se faça o cálculo do evento complementar:

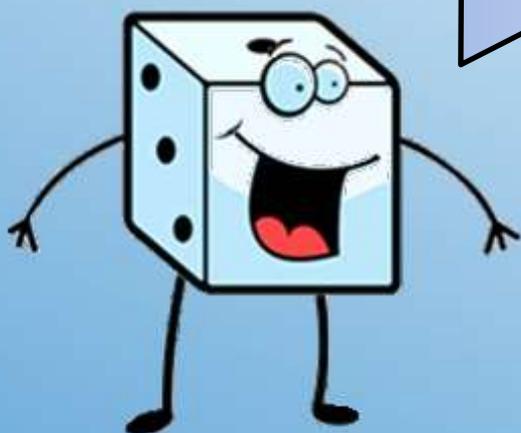
$$P(Y) = P(\bar{X}) = 1 - P(X)$$

$$P(Y) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Então a probabilidade do cavalo da trilha Y avançar é de  $P(Y) = \frac{5}{9}$ , ou 55,56%.

## Construindo um simulador de probabilidade

Vamos construir um simulador de probabilidade geométrica? Você sabia que a probabilidade geométrica é um caso particular da probabilidade clássica? Porém as medidas são variáveis contínuas como o comprimento, a área ou o volume.



Material necessário:

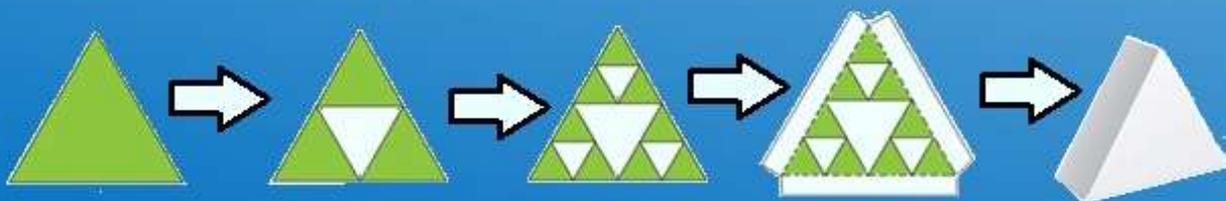
- 01 Cartolina ou papel cartão
- 01 tesoura
- Cola
- Régua
- Compasso

1) Represente um triângulo equilátero, determine a medida do comprimento do seu lado, por exemplo, 30 cm.

2) Determine o ponto médio de cada um de seus lados e unindo esses pontos, represente um novo triângulo equilátero.

3) Determine o ponto médio de cada lado dos triângulos externos e represente novos triângulos, unindo esses pontos conforme a figura abaixo. O uso da régua e compasso pode auxiliar na determinação do ponto médio.

4) Represente as abas ao redor do triângulo, dobre-as de modo que feche e tenha uma caixinha triangular.



Calcule a medida da área branca, da área pintada e da área total.

Você pode pegar uma bolinha pequena (gude, por exemplo) e soltá-la dentro da caixinha triangular, fazendo movimentos e anotando o resultado do experimento.

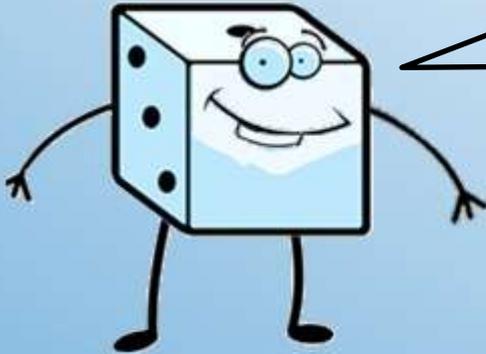
Repita o experimento 10 vezes, 50 vezes e 100 vezes.

A) Calcule a probabilidade da bolinha parar na área branca e compare com o resultado da simulação.

B) Faça o mesmo procedimento do item A), porém, considerando a probabilidade da bolinha acertar a área verde.

Fonte: Elaboração própria.

## Um problema contra-intuitivo



Às vezes, quando precisamos tomar uma decisão, alguém dá o seguinte conselho:  
“Ouça a sua intuição.”

Será que a nossa intuição sempre tem razão? Observe esse problema e discuta-o com seus alunos.

Nos Estados Unidos havia um programa de TV, em que Monty Hall, o apresentador do programa, mostra três portas fechadas aos concorrentes. Atrás de uma delas escondia um prêmio de valor alto, geralmente um carro, e nas outras duas portas, estava um bode em cada.



Fig. 1: Ilustração do problema de Monty Hall

Na 1ª etapa o concorrente escolhe uma das portas, mas não abre.

Na 2ª etapa, Monty Hall abre uma das portas que o concorrente não escolheu, sabendo que o prêmio não está ali.

Na 3ª etapa, o apresentador pergunta se o concorrente pretende continuar com a porta escolhida inicialmente, ou deseja mudar de porta.

Qual seria a estratégia mais conveniente? Trocar de porta ou continuar com a mesma? Qual das duas portas o participante tem mais chance de ganhar? Por que?

A intuição da maioria das pessoas é que não faz diferença trocar de porta ou continuar com a mesma, sendo  $\frac{1}{2} = 50\%$  de chance para cada porta.

Em 1990, Marilyn Vos Savant, escritora conhecida por apresentar um alto QI, citada no Guinness Book, afirmou que ao trocar de porta, a chance de ganhar o prêmio aumentaria em aproximadamente 66%, e isso gerou um debate nacional sobre o problema, levando a vários matemáticos experientes discordarem da sua resposta. Então ela convidou professores do Ensino Médio e solicitou que fizessem vários experimentos, e praticamente 100% dos experimentos comprovaram.



Vamos analisar as possibilidades?

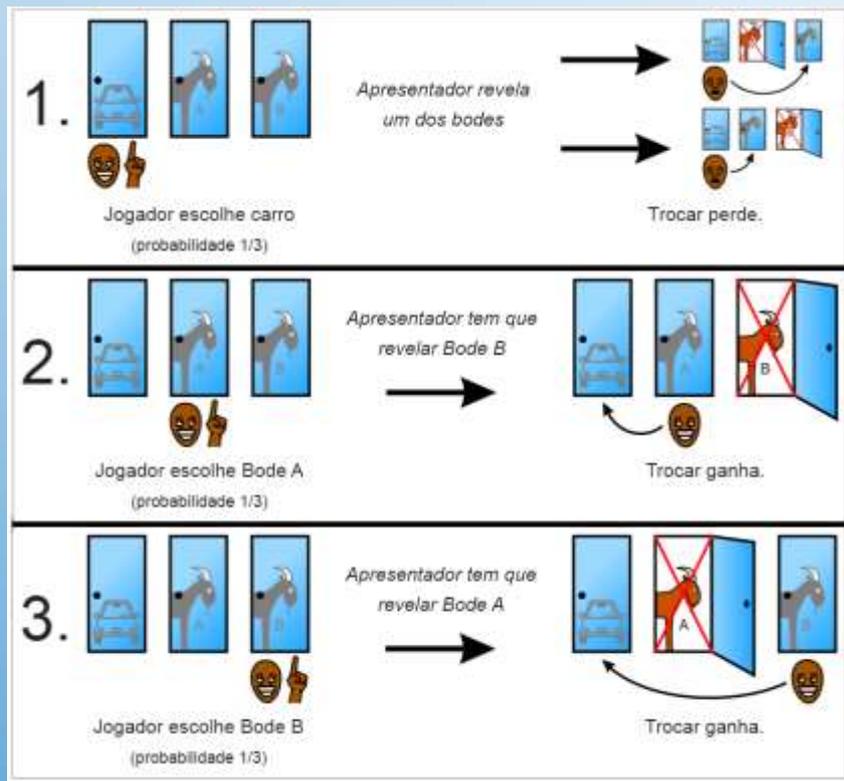
Considere que o jogador escolheu a porta A.

- Se o prêmio estiver na porta A, Monty Hall vai abrir ou a porta B ou C. O jogador troca de porta e perde o prêmio.
- Se o prêmio estiver na porta B, Monty Hall não vai abrir a porta B, pois o prêmio está lá. Então ele abrirá a C, o jogador troca para B e ganha.
- Se o prêmio estiver na porta C, o apresentador abrirá a porta B, o jogador troca para a C e ganha.

Logo, se o jogador escolher a porta A, ele tem duas chances de vencer, num total de três possibilidades. Logo  $\frac{2}{3} = 66,6\%$

Se o jogador escolher a porta B, ou a porta C, as condições são as mesmas. Assim, concluímos que as chances aumentam quando trocamos de porta.

## Ilustrando o problema



## REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 24 maio 2020.

BISPO, Regina; RAMALHO, Glória; HENRIQUES, Nuno. Tarefas matemáticas e desenvolvimento do conhecimento matemático no 5.º ano de escolaridade. **Análise Psicológica**, Lisboa, v. 26, n. 1, p. 3-14, jan. 2008. Disponível em [http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0870-82312008000100001&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.mec.pt/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0870-82312008000100001&lng=pt&nrm=iso). Acesso em: 25 maio 2020.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**, vol. 2. – 3 ed. – São Paulo: Ática, 2016b.

LOPES, José M; A SALVADOR, José; BALIEIRO FILHO, Inocêncio F. O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**, [s.l.], v. 7, n. 3, p. 47-62, 23 dez. 2013. FAI-UFSCar. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14244/19827199500>. Acesso em: 22 maio 2020.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM, 2005. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/3008> Acesso em: 24 maio 2020.

SOLDATELLI, Ângela. O Paradoxo da Porta dos Desesperados. **Cientia cum industria**, v.4, n.4, 228-231, 2016. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.18226/23185279.v4iss4p228>. Acesso em: 22 maio 2020.

### Imagens extraídas de:

<https://pt.slideshare.net/CarlinhaMoreira/trilha-do-folclore>

<https://br.stockfresh.com/image/6203758/dice-smiling>

<https://1.bp.blogspot.com/-RVhOqL->

<Kjdg/Vqd4JB3uY9I/AAAAAAAAAJHc/fXiW3jOfEAM/s1600/capture-20160126-113000.png>

<https://galeria.colorir.com/jogos/dados-1-pintado-por-dado-150396.html>

<https://br.pinterest.com/pin/682787993494329627/>

[https://br.freepik.com/vetores-premium/bolas-de-loteria-conceito-de-vetor-de-jogo-de-loteria-de-esportes\\_3291208.htm](https://br.freepik.com/vetores-premium/bolas-de-loteria-conceito-de-vetor-de-jogo-de-loteria-de-esportes_3291208.htm)

<https://www.todamateria.com.br/probabilidade/>

[https://www.americanas.com.br/produto/44410577?pfm\\_carac=cavalo%20de%20brinquedo&pfm\\_index=1&pfm\\_page=search&pfm\\_pos=grid&pfm\\_type=search\\_page](https://www.americanas.com.br/produto/44410577?pfm_carac=cavalo%20de%20brinquedo&pfm_index=1&pfm_page=search&pfm_pos=grid&pfm_type=search_page)

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema\\_de\\_Monty\\_Hall](https://pt.wikipedia.org/wiki/Problema_de_Monty_Hall)