Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Igor Magalhães Cunha

Sobre os ombros de gigantes: Um ensaio invertido com a História da Matemática em sala de aula

Belo Horizonte
2020

Igor Magalhães Cunha

SOBRE OS OMBROS DE GIGANTES: UM ENSAIO INVERTIDO COM A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientador
Pedro Henrique Pereira Daldegan

Coorientação
Fernanda Aparecida Ferreira

Banca Examinadora
Douglas da Silva Tinti
Jane Lage Bretas

Belo Horizonte
2020

Cunha, Igor Magalhães
C972s Sobre os ombros de gigantes: um ensaio invertido com a história da matemática em sala de aula / Igor Magalhães Cunha. – 2020.
110 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática.
Orientador: Pedro Henrique Pereira Daldegan.
Coorientadora: Fernanda Aparecida Ferreira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática – História – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Metodologia – Teses. 3. Aprendizagem ativa – Teses. 4. Máximos e mínimos – Teses. 5. Teorema binomial – Teses. I. Daldegan, Pedro Henrique Pereira. II. Ferreira, Fernanda Aparecida. III. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. IV. Título.

CDD 510.9

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Igor Magalhães Cunha

SOBRE OS OMBROS DE GIGANTES: UM ENSAIO INVERTIDO COM A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 27 de agosto de 2020.

Igor Magalhães Cunha

Igor Magalhães Cunha
(Autor)

Pedro H. P. Daldegan.

Pedro Henrique Pereira Daldegan
(Orientador)

Belo Horizonte
2020

Dedico este trabalho a todos aqueles que se permitem sonhar e que acreditam que estamos aqui por um motivo maior.

> *Carpe diem.* Aproveitem o dia, garotos.
> Façam suas vidas serem extraordinárias!
> (Sociedade dos Poetas Mortos)

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família. Míriam, meu anjo, você esteve ao meu lado o tempo todo, me apoiando e sendo minha cúmplice de renúncias durante o mestrado. Amo você de uma forma que não sei explicar. Júlia e Luísa, meus maiores tesouros, agradeço a vocês os sorrisos, gritos, beijos, correrias, olhares, brincadeiras, abraços e bagunças, que nunca me deixavam perder a sanidade e sempre me mostravam o verdadeiro e real motivo de toda dedicação e estudo.

Aos meus pais, Tânia e Renato, agradeço os ensinamentos em busca do caminho certo que nem sempre segui; a educação e o esforço que fizeram para me ajudar a chegar onde estou. Mãe, você sempre me incentivou a querer ser mais. Você me deu asas, aprendi a usá-las e realmente o mundo se mostra pequeno quando alço meus voos. Pai, seu exemplo sempre ficará em meu coração. Devo a você o homem que sou hoje.

Ao meu irmão Addy, agradeço as brincadeiras e conselhos mais diversos, todo o apoio tecnológico e tudo o que você faz e representa para mim. Tenho muito orgulho de tê-lo ao meu lado. Anna e Sarah, obrigado por estarem sempre presentes mostrando toda a felicidade que uma família pode ter.

Aos meus amigos, que são poucos, mas que com certeza são para sempre. Wagner, valeu pela caminhada. Com certeza ficou tudo mais fácil com você ao meu lado. Estamos juntos desde a faculdade e essa conquista é nossa. Junto com William e Valério, obrigado por todos os momentos compartilhados e pelos conselhos. Brandão, Bruno e Guilherme, meus amigos mais antigos, agradeço o companheirismo, as histórias e as gargalhadas sempre que nos encontramos. Elas sempre me lembram que não podemos esquecer nossa infância. Crescemos juntos. Amo todos vocês.

Obrigado a todos por aguentarem minha ausência, meus momentos de raiva, tristeza e frustração. Por comemorarem comigo minhas vitórias ou simplesmente por estarem lá, nestes momentos felizes, muito obrigado.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Henrique Pereira Daldegan, as aulas e ensinamentos, que me fizeram lembrar o quanto a Matemática pode ser bela e apaixonante. Obrigado pela paciência e pelo tempo, pelas palavras de conforto e puxões de orelha. Obrigado por acreditar e por fazer de mim um matemático melhor.

A minha coorientadora, Profa. Dra. Fernanda Aparecida Ferreira, obrigado por desde o começo das aulas de TCC ver em mim uma chama que se inflamou neste trabalho. Agradeço o incentivo, as leituras, puxões de orelha e todo o referencial teórico que levarei para o resto da vida.

Por fim agradeço ao Presidente do Glorioso Clube Atlético Mineiro, Sérgio Sette Câmara, que montou um time tão ruim, mas tão ruim, que não conseguiu desviar minha atenção nestes dois anos e meio de estudo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo contribuir com o papel do professor, apresentando atividades sobre o estudo dos máximos e mínimos de funções e sobre o Binômio de Newton, envolvendo uma abordagem diferente da usualmente apresentada nos livros didáticos. Para o desenvolvimento e elaboração das atividades utilizamos como referenciais as metodologias de aprendizagem ativas, em particular alguns princípios da Sala de Aula Invertida, o trabalho colaborativo, o uso de tecnologias e a aplicação da História da Matemática como eixo estruturador, a fim de consolidar o conteúdo abordado. As atividades foram aplicadas em turmas da 2ª e 3ª séries do Ensino Médio de duas escolas da rede particular de Belo Horizonte. Os dados coletados durante a aplicação foram analisados por meio de uma abordagem qualitativa de cunho interpretativo e levaram em consideração a postura e as respostas dos alunos, seus comportamentos e suas produções discursivas ao longo do desenvolvimento das atividades. Além delas, apresentamos discussões e investigações que mostram a Matemática como uma ciência em evolução, em dois momentos específicos da História. O primeiro, com Pierre de Fermat e o nascimento do Cálculo, e o segundo com Sir Isaac Newton e a expansão de seu binômio. Baseadas nesses marcos históricos, as atividades desenvolvidas possibilitam um maior envolvimento dos alunos, incentivando o desenvolvimento de habilidades de pesquisa e estudo, possibilidades de interações entre alunos-Matemática-professores, além de apresentar uma Matemática mais envolvente e contextualizada.

Palavras-chave: História da Matemática. Ensino. Metodologias Ativas. Máximos e Mínimos. Binômio.

Abstract

This dissertation aims at contributing to the teacher's role, presenting activities on the study of the maximums and minimums of functions and on Newton's Binomial, involving a different approach from that presented in textbooks. For the development and elaboration of activities, we used active learning methodologies as a methodological reference, in particular the Flipped Classroom, collaborative work, the use of technologies and the application of the History of Mathematics as a structuring axis, in order to consolidate the content. The activities were applied in classes of the 2nd and 3rd grades of High School in two private schools in Belo Horizonte and the data collected during the application were analyzed using a qualitative approach of an interpretative nature and took into account the students' posture and responses, their behaviors and their discursive productions throughout the development of the activities. In addition to the activities, we present discussions and investigations that show Mathematics as an evolving science, in two specific moments of History. The first, with Pierre de Fermat and the birth of Calculus, and the second with Sir Isaac Newton and the expansion of his binomial. At both times, we seek to apply methods, the activities developed enable a greater involvement of the students, encouraging the development of research and study skills, possibilities of interactions between students-Mathematics-teachers, in addition to presenting a more engaging and contextualized Mathematics.

Keywords: History of Mathematics. Teaching. Active Learning. Maximum and minimum. Binomial.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

As dificuldades no ensino da Matemática e o baixo índice de aprendizagem são temas recorrentes de discussões entre professores. Acredita-se que parte destes problemas têm sua origem em metodologias de ensino utilizadas em sala de aula.

De acordo com o filósofo e educador Mário Sérgio Cortella:

> Temos alunos do século XXI, professores do século XX e metodologia do século XIX. Apesar disso, não podemos confundir escola tradicional, que busca excelência, com anacrônica, ultrapassada. A aula expositiva, que é antiga, não precisa ser velha. Devemos ter humildade para buscar o interesse dos alunos, partindo do que querem para, depois, passarmos ao que precisam. (CORTELLA[1], 2016 - informação verbal[1])

Mesmo com todos esses desafios, vale destacar que existem muitos alunos que gostam da Matemática como componente curricular e que pretendem seguir estudos relacionados a alguma área das Ciências Exatas e da Natureza. Segundo Santaló, "[...] basta mostrar as grandes linhas gerais e ensinar a aprender, deixando que cada aluno vá selecionando segundo seu gosto e sua vocação matemática". (SANTALÓ[2], 2015, p. 15).

As instituições de ensino vêm sofrendo transformações constantes relacionadas ao currículo e às metodologias tradicionais, em que os estudantes aprendem diversos conteúdos a partir de estratégias desenvolvidas pelo professor. Na maioria das vezes, essas estratégias se baseiam em revisões de conteúdos expostos, apresentações dos novos objetos do conhecimento, tendo sempre o professor como detentor do saber, acompanhando o processo de ensino-aprendizagem em situações propostas em sala e revisadas em deveres de casa.

Dessa forma tradicional, o ensino da Matemática atende uma parcela dos alunos, porém vai na contramão da perspectiva de se trabalhar uma Matemática para todos, conforme apresentado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que propõe sensibilizar a todos os indivíduos que frequentam a sala de aula, buscando alternativas que permitam

[1]Palestra: "A Educação no Século XXI e o Perfil das Educadoras e dos Educadores", que ocorreu na Universidade de São Paulo, no dia 02 de março de 2016.

aos estudantes atuarem como sujeitos ativos na construção dos seus próprios conhecimentos. Segundo Kummer:

> A matemática tem sido ensinada nas escolas de maneira bastante intensiva, seguindo currículos e quase em todos os lugares de forma parecida. Uma das justificativas dadas é que ela instrumentaliza para a vida. Alguém instrumentalizado significa que maneja bem as situações reais, nem sempre parecidas, que se apresentam todo dia. A matemática, da maneira que é ensinada, vinda pronta para o aluno que nem precisa pensar muito com problemas do tipo, "siga o modelo", com exigência de memorização, com pouca participação, completamente divorciada e distanciada da realidade da sua realidade, certamente, não consegue instrumentalizar o aluno. (KUMMER[3], 2016, p. 62)

Sabe-se que o processo de aprendizagem ocorre em diferentes momentos, do nível mais básico em direção ao nível mais complexo, sempre por meio de atitudes, competências e habilidades, individuais ou coletivas. Esses momentos necessitam de práticas e ambientes inovadores, que valorizam as capacidades dos alunos, oportunizando tanto o aprender individual quanto o coletivo, proporcionando argumentações, investigações e trabalhos, por meio dos quais são aplicados os conteúdos pelo aluno em seu próprio contexto. Esse processo torna a aprendizagem mais atrativa e contribui com a motivação para estudar e aprender.

Nesse novo contexto, a aula expositiva começa a dar lugar a momentos de discussões, de pesquisas em sala, oficinas e estudos dirigidos, com os quais os alunos podem ter contato antes da aula.

Ao utilizar novas metodologias, o professor interage com a participação do aluno em sala de aula, por meio de trabalhos, atividades em grupo ou discussão de problemas. O alunos sai de sua zona de conforto e ingressa em um contexto que o coloca no centro do processo de ensino-aprendizagem, desenvolvendo novas competências como a criatividade, a iniciativa, o pensamento critico, o trabalho em equipe e responsabilidade.

Vale ressaltar que aumentar a participação dos alunos não se restringe a diminuir o papel do professor. Ele é corresponsável com os alunos pelo planejamento e pelo uso de estratégias que favoreçam a participação e o desenvolvimento de competências e habilidades. O professor atua como facilitador do processo de aprendizagem e deixa de ser a única fonte de conhecimento. Ele torna-se responsável por mediar o ambiente e a cultura de aprendizagem, se tornando um educador moderador, contribuindo para que haja interação, motivação e protagonismo dos estudantes.

Visto que uma sala é, na maioria das vezes, heterogênea, não se pode mais conduzir uma aula com a dinâmica direcionada apenas para os alunos que possuem afinidades com a Matemática e suas tecnologias. Ao se relacionar com as novas metodologias no processo de aprendizagem, o aluno ganha destaque e passa a trabalhar de forma mais autônoma e colaborativa. Valendo-se das instruções do professor e de novos espaços de ensino e tecnologias, a figura do educador se torna mais desafiadora e questionadora.

Diante disso, podemos levantar algumas questões que incomodam os professores de Matemática das escolas atualmente. Como desenvolver a autonomia dos alunos durante o ensino e a aprendizagem da Matemática? Como podemos tornar o ensino motivador e atrativo, levando à potencialização da aprendizagem?

Na busca em apresentar possíveis respostas e alternativas para os professores, este trabalho se organiza a partir desse objetivo central e pretende compreender a utilização das Metodologias Ativas, em especial a Sala de Aula Invertida, em dois conteúdos abordados no Ensino Médio e seus contextos históricos para a construção da Ciência.

O primeiro momento é o estudo de e mínimos de funções sob a perspectiva de Pierre de Fermat. O segundo é o desenvolvimento do Binômio de Newton para expoentes inteiros. Em ambos os casos, ressaltamos que o papel do professor não é o de protagonista e sim o de mediador da aprendizagem. Na maior parte do tempo, os alunos são responsáveis pela investigação e pela construção do conhecimento.

Para alcançar esses objetivos, essa dissertação tem a estrutura de capítulos inter-relacionados com a História da Matemática, buscando apresentar, em cada um deles, o objeto de estudo e seu personagem chave, por meio de uma proposta de atividade aplicando Metodologias Ativas com a Sala de Aula Invertida e o uso de tecnologias. Ao final, apresentamos os comentários gerais e nossas conclusões após a aplicação das atividades.

No segundo capítulo, fazemos uma rápida apresentação das Metodologias Ativas, que trazem uma nova perspectiva para o papel do professor, as possibilidades que elas apresentam, como gamificações, videoaulas, estudos dirigidos e o uso de tecnologias, sempre tendo como referência o aluno instrumentalizado pelo ensino da Matemática. Em especial, iremos trabalhar com princípios da Sala de Aula Invertida, reforçando o protagonismo e o trabalho colaborativo entre os alunos.

Ainda no Capítulo 2, apresentamos a importância de se contextualizar historicamente o conteúdo que está sendo trabalhado em sala de aula. A História da Matemática, utilizada como eixo estruturador do conteúdo, contribui para motivar os alunos e principalmente para atrair aqueles que não têm afinidade com a matéria, além de permitir aos alunos uma visão da Matemática construtiva e necessária para o desenvolvimento da Ciência. Por fim, apresentamos a ferramenta tecnológica que iremos utilizar em uma das atividades - o *software* GeoGebra - e algumas de suas funcionalidades, reforçando a importância do uso de recursos computacionais como uma ferramenta capaz de catalizar o ensino em sala de aula.

O terceiro capítulo é destinado a Pierre de Fermat[4], apresentando um pouco de sua vida e obra e tendo como referencial seu trabalho *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*. Neste trabalho, Fermat apresenta o estudo e análise de retas tangentes para permitir o cálculo dos pontos de máximos e de mínimos de uma função. Com base nesses dados históricos, apresentamos a interpretação geométrica proposta por Fermat, que foi um dos campos explorados por Newton para a fundamentação das ferramentas de seu Cálculo Diferencial e Integral.

Com Sir Isaac Newton iniciamos o quarto capítulo deste trabalho. Tendo como referência Katz[5], apresentamos um pouco de sua biografia, desde sua infância, passando pelo *Principia* até suas desavenças com Leibniz. O capítulo direciona o leitor para a expansão de seu binômio e termina apresentando a expansão para expoentes negativos proposta por Leonhard Euler.

Os capítulos finais são dedicados às atividades e metodologias aplicadas, assim como às expectativas e conclusões das propostas. Aplicamos duas atividades que utilizam Metodologias Ativas, onde os alunos podem investigar e definir seus resultados por meio de leituras e discussões, além de poder consolidar o conteúdo da aprendizagem por meio da História da Matemática. Na sequência, seguem as considerações finais fundamentadas nos resultados e nas análises realizadas.

2 Metodologias Ativas

Aulas expositivas e teóricas correspondem a um modelo de ensino explorado há muito tempo. Nesse formato de aula, o professor é o único responsável por conduzir a aula e os alunos participam, na maioria das vezes, de forma passiva. Com isso, o principal problema encontrado nesse cenário é fazer com que os alunos mantenham-se motivados e interessados durante a exposição do conteúdo.

Em contrapartida, as Metodologias Ativas consistem em uma mudança de paradigma do aprendizado e da relação entre o aluno e o professor. Seu pressuposto teórico fundamental é fazer o aluno se tornar o protagonista do processo de ensino-aprendizagem, criando uma autonomia no aprender-fazendo, o que também transforma o professor, que passa a ser um mediador do processo. Elas são ferramentas didáticas que servem para fortalecer a aquisição do conhecimento no processo de ensino-aprendizagem. Conforme Neves et al.,

> As metodologias ativas surgem para beneficiar este fato, uma vez que elas acabam por diversificar as características individuais da aprendizagem. Sendo assim, elas aprofundam os conhecimentos, estimulam a comunicação, ampliam a capacidade de ouvir o outro, estimulam os trabalhos em equipe e desenvolvem a motivação individual e coletiva. (NEVES et al.[6], 2018, p. 12).

As Metodologias Ativas podem ser aplicadas em sala de aula, por meio do Ensino Híbrido, que consiste na união do ensino tradicional e presencial com aquele a distância (EaD), da Sala de Aula Invertida, que consiste na inversão do modelo tradicional, no qual o professor passa o conteúdo e em seguida, em casa, o aluno tenta resolver os exercícios e identificar suas dúvidas, e da gamificação no processo pedagógico, que adota regras e lógicas de jogos para tornar o ensino mais atrativo e potencializar a aprendizagem por meio do engajamento dos alunos. Assim, podemos incentivar a participação, melhorando a criatividade e a autonomia, com foco em resoluções de situações-problema.

Um dos grandes desafios para os professores é tornar o ensino mais atrativo, eficiente e significativo para os alunos. Os modelos tradicionais de ensino apresentam os professores como detentores oficiais do conhecimento. São eles quem ministram as aulas e que carregam em si a responsabilidade de transmitir a matéria de cada disciplina, por vezes em aulas expositivas, para depois demandar aos alunos a realização da tarefa de casa, com foco na assimilação do conteúdo.

Com o passar do tempo, os novos modelos de ensino propõem transformar os professores em educadores mediadores no processo de aprendizagem, possibilitando aos alunos aprender o conteúdo por meio de novas sequências didáticas e de novas ferramentas pedagógicas. Como o acesso à informação é muito rápido e fácil para a maioria dos alunos, o professor pode passar a utilizar o espaço da sala para responder dúvidas e, principalmente para acompanhar os alunos na realização dos exercícios, pesquisas e projetos. Ainda são necessários investimentos para a utilização dos recursos computacionais e o uso da internet para fins educacionais, mas estas mudanças trouxeram a necessidade de rever não só os currículos escolares, mas também o ambiente, a duração das aulas, as relações aluno-ensino-professor, o uso das tecnologias e as diferentes metodologias de ensino.

As Metodologias Ativas buscam atender as demandas deste novo perfil de aluno, que necessita de desafios mais complexos, onde ele possa desenvolver uma postura proativa nas atividades individuais assim como o espírito colaborativo em trabalhos coletivos, pois quando as aprendizagens ocorrem de forma ativa, exigem a participação intensa e dinâmica em diversas etapas do ensino, como a escrita, a problematização, a discussão de hipóteses e a análise das possibilidades.

Ao utilizar as Metodologias Ativas, o professor não se limita apenas em transmitir os conteúdos, e sim em estimular a pesquisa e a discussão entre os alunos. Ao assumir o protagonismo, o aluno é capaz de desenvolver habilidades e competências essenciais para sua formação intelectual e social. Os alunos devem explorar situações e buscar alternativas para a solução de problemas práticos. Segundo Aguiar, "[...] quanto maior for o envolvimento do aluno, maiores serão as possibilidades de aprendizagem significativa, com uma mudança conceitual efetiva e duradoura" (AGUIAR[7], 1995, p. 14).

As mudanças também são necessárias nas escolas que, ao redefinir a sequência de aprendizagem, devem reorganizar o tempo e o espaço físico das salas de aula, para explorar os espaços virtuais, sempre com a supervisão do professor, em atividades cooperativas, estudos de caso, videoaulas, problematizações e estudos dirigidos realizados pelos alunos.

Segundo Moran[8] (2015), a aprendizagem ativa ocorre em projetos, jogos e resolução de problemas, em espaços reais e virtuais, com o ensino realizado de forma presencial, semipresencial ou a distância, mesclando atividades individuais com atividades em grupo, valorizando a cooperação dos alunos para alcançar objetivos comuns.

Entre os pontos positivos na aplicação dessa estratégia de ensino, que pode ser comprovada neste trabalho, destacam-se o interesse e a motivação dos alunos, o surgimento de competições sadias entre eles, o espírito colaborativo de equipe, o desenvolvimento da autonomia dos alunos e o dinamismo nas aulas. Além disso, o aluno se torna corresponsável por sua aprendizagem, ao invés de delegá-la ao professor. Ou seja, o aluno que durante o processo de ensino e aprendizagem está agindo por objetivo próprio e não apenas por seguir ordens, assume o papel de protagonista e o professor passa a atuar como mediador/planejador.

Enfim, as Metodologias Ativas apresentam caminhos para mostrar aos professores novas possibilidades de ensino, em que os alunos podem aprender de maneira ativa, investigando situações problemas, desafios, jogos e atividades individuais e coletivas. Possivelmente, uma das maiores contribuições das Metodologias Ativas é propor caminhos que permitam essas mudanças, com alunos desenvolvendo sua autonomia, reconhecendo suas capacidades cognitivas que não são apresentadas no método tradicional de ensino, e com professores repensando suas estratégias em todo o processo de ensino, sempre embasando a sequência didática com a postura ativa dos alunos, trabalhando juntos em situações mais propícias a interações e ao convívio mediado pela aprendizagem e motivado pela busca do conhecimento.

2.1 A Sala de Aula Invertida

A Sala de Aula Invertida (*Flipped Classroom*) como uma das Metodologias Ativas tem sido cada vez mais comentada por educadores e pesquisadores no Brasil e no mundo. Nessa prática, o ensino e a aprendizagem não precisam ocorrer obrigatoriamente dentro da sala de aula, com carteiras enfileiradas, quadro e com o professor no centro do processo. Além disso, a metodologia favorece a pesquisa, a investigação e a construção do conhecimento por parte de um aluno cidadão, capaz de realizar argumentações coerentes e trabalhar em equipe. O professor deixa de ser o foco do processo, que se volta para as necessidades de aprender do aluno.

Essa proposta de ensino foi apresentada em 2007, no Estado do Colorado. Os professores norte-americanos Jonathan Bergmann e Aaron Sams[1], começaram a gravar vídeos dos conteúdos quando detectaram a dificuldade de seus alunos em frequentar as aulas, pois muitos precisavam se ausentar para competir pelas equipes esportivas da instituição. Com isso, outros alunos começaram a ter acesso ao material produzido e os professores perceberam que esse era um ótimo caminho para dar maior foco no processo de aprendizagem. Com os alunos assistindo às aulas em casa, os professores poderiam dedicar mais tempo a conceitos em que apresentassem maior dificuldade.

Transferindo informações básicas para fora da sala de aula, os professores possibilitavam aos alunos a preparação prévia para atividades e desenvolvimento de conceitos durante a aula, que ajudavam os estudantes a desenvolver habilidades como comunicação e autonomia. Com isso, houve melhora significativa no rendimento dos alunos e na utilização do tempo em sala. Segundo Valente:

> Há diferentes maneiras de combinar as atividades presenciais e a distância, sendo a Sala de Aula Invertida ou *flipped classroom* uma delas. Segundo essa abordagem, o conteúdo e as instruções sobre um determinado assunto curricular não são transmitidos pelo professor em sala de aula. O aluno estuda o material antes de ele frequentar a sala de aula, que passa a ser o lugar de aprender ativamente, realizando atividades de resolução de problemas ou projetos, discussões, laboratórios etc., com o apoio do professor e colaborativamente dos colegas. (VALENTE[9], 2014, p. 79).

Bishop, Verleger et al.[10] definem Sala de Aula Invertida como uma metodologia com duas partes relacionadas: a primeira com atividades de aprendizagem interativas colaborativas dentro de sala de aula - ponto abordado neste trabalho - e a segunda com orientação individual e uso de tecnologias fora da sala de aula. Tal característica da metodologia propõe não usar o tempo em sala para ministrar aulas expositivas.

Assim, ainda para Bishop, Verleger et al.[10], para entender a Sala de Aula Invertida, devemos ter como referência metodologias de aprendizagem centradas no aluno. Sem isso, perdemos a essência da proposta, que deixa de existir. A Sala de Aula Invertida é composta por etapas que requerem interação entre os alunos e que são desenvolvidas por meio das tecnologias digitais, como videoaulas. Assim, essas metodologias permitem o desenvolvimento de uma base filosófica para a aplicação dessas atividades. Ignorar este

[1]Jonathan Bergmann foi professor durante 24 anos e atualmente trabalha com professores, escolas e empresas para ajudá-los a repensar a prática educacional. Aaron Sams é um empresário e cofundador da *Flipped Learning Network*. O livro *Flip Your Classroom: Reach Every Student in Every Class Every Day*, lançado em 2012, está disponível em sua primeira versão no site https://www.academia.edu.

fato e conceituar a Sala de Aula Invertida com base apenas na presença (ou ausência) de computador ou tecnologias, constitui-se em um grande erro.

Neste ponto, vale ressaltar que essa metodologia dialoga muito com o uso de tecnologias e isso é um fator restritivo no país, pois os alunos da maioria das escolas no Brasil não têm acesso ao computador, muito menos a um laboratório de informática. Com isso, o professor deve buscar alternativas para solucionar esse problema sem perder a essência da proposta. Uma pesquisa realizada pelo Comitê Gestor da Internet no Brasil[2], divulgada em 2019, aponta que 58% dos domicílios no Brasil não têm acesso a computadores e 33% não dispõem de internet. Entre as classes mais baixas, o acesso é ainda mais restrito. A pesquisa ainda aponta que as escolas das áreas rurais não têm acesso à rede mundial de computadores, por não terem infraestrutura para o sinal chegar aos locais mais remotos.

Ainda segundo dados divulgados pela *Teacher Task Force*[3], uma aliança internacional coordenada pela UNESCO, mais de 800 milhões de estudantes que estão com aulas suspensas não contam com um computador em casa, enquanto 43% do total de alunos não têm acesso à internet. Por isso, entender a multiplicidade de formatos sob os quais os conteúdos podem ser oferecidos é uma forma de considerar as diferentes realidades socioeconômicas dos alunos no Brasil.

Mesmo assim, motivados após as leituras das obras de Schreiber et al.[11] e Suhr[12], buscamos aprofundamento em outras obras para entender melhor a metodologia, suas vantagens e seus problemas. A proposta da utilização da Sala de Aula Invertida é aproximar o ensino amplo, não só da Matemática como das outras matérias, das realidades vividas pelos alunos, dialogando com as outras áreas do conhecimento, permitindo que o aluno busque e construa o conhecimento, pesquise e, em seguida, consolide o conteúdo em atividades práticas. Durante esse processo, espera-se que o aluno entenda como o conhecimento surgiu, quais foram as suas principais motivações e quais são suas aplicações atualmente.

Com o envolvimento maior do aluno, ele pode buscar novas ferramentas que o auxiliam a desenvolver o que se deve aprender, enquanto na metodologia tradicional o professor decide o que deve ser ensinado. A Sala de Aula Invertida aumenta as interações

[2]Pesquisa TIC Educação 2018, divulgada em 2019, por meio do Centro Regional de Estudos para o Desenvolvimento da Sociedade da Informação. Disponível em https://cetic.br. Acesso em 25 de junho de 2020.

[3]Pesquisa divulgada em abril de 2020, com base em dados do Instituto de Estatística da UNESCO. Disponível em https://en.unesco.org/news/startling-digital-divides-distance-learning-emerge. Acesso em 25 de junho de 2020.

interpessoais entre os alunos, criando um grau de comprometimento e envolvimento maior com a construção do conhecimento. Assim, ele torna a aprendizagem mais significativa, aprimora sua curiosidade investigativa e transforma, ao mesmo tempo, a educação e o ensino de uma forma mais efetiva.

Outro ponto importante que devemos enfatizar quando o assunto é o uso dessa metodologia são os desafios apresentados para o professor, que deve iniciar a transformação dos alunos em pesquisadores. O professor deve deixar de ser um mero replicador de tarefas e exercícios, extrapolar o senso comum e quebrar o paradigma da atual forma de educar, utilizando redes tecnológicas e motivando a investigação científica. Ao sair de sua zona de conforto, o professor inicia um processo de redescobrir o conteúdo e passa a reconstruir sua prática. Assim, ele passa a mediar a aprendizagem valorizando estudos dirigidos e videoaulas objetivando um processo de aprendizagem mais eficiente, interessante e personalizado.

Essas mudanças não são fáceis e são enfrentadas pelo professor e pelo aluno. A falta de apoio dos pais e responsáveis, que ainda não entenderam a proposta dessa nova metodologia, esbarra com o pouco incentivo em se desenvolver a capacidade investigativa e autônoma dos alunos. Ao se propor aplicar essa nova proposta, o professor deve entender que haverá uma alteração em seu posicionamento em sala de aula e que será exigido dele um preparo antecipado do material e de todas as possibilidades que a tecnologia permite atualmente. Do aluno, se espera um maior compromisso e responsabilidade, essenciais para a formação de um aluno-cidadão.

Quando superados, esses desafios apresentados poderão proporcionar uma aprendizagem muito mais dinâmica, lúdica e criativa, com o intuito de formar alunos conscientes da sua participação no mundo tentando, de alguma forma, suprir as necessidades dos professores e alunos do atual cenário educacional.

Após a transferência do protagonismo educacional para o aluno, o papel do professor é guiar e orientar os caminhos da pesquisa e da investigação em sala, contribuindo assim para o desenvolvimento da autonomia dos alunos, uma vez que, com a Sala de Aula Invertida, as aplicações dos conhecimentos em qualquer espaço de aprendizagem ocorre de forma fluida e dinâmica através de investigações, conversas e discussões. Com o conhecimento discutido e aplicado em grupo, ele pode ser consolidado no ambiente de aprendizagem individual por cada aluno.

Segundo Farkas em Rodrigues[13] (2015), as competências socioemocionais e as habilidades não-cognitivas, como perseverança, autocontrole, motivação e capacidade de trabalhar em grupo (colaboração) têm sido tratadas como habilidades que devem se expandir para o pleno desenvolvimento de jovens e crianças e para promoção do sucesso individual dos estudantes.

Finalmente, o estudo e a aplicação da Sala de Aula Invertida nos levam a acreditar que as contribuições desta nova metodologia de ensino são positivas e de grande valia, pois contribuem para o desenvolvimento de competências e habilidades (propostas pela Base Nacional Comum Curricular - BNCC), com a aprendizagem ativa, a construção do pensamento crítico e reflexivo diante de várias situações problema, incentiva o trabalho em equipe e a autonomia, pois além de ser o protagonista, o aluno deve saber argumentar e transitar em varias áreas do conhecimento para encontrar a melhor estratégia para a solução de um problema. Porém, para que a Sala de Aula Invertida realmente tenha este impacto transformador positivo, é necessário e fundamental que todos os envolvidos no processo, professores, coordenadores, diretores, pais e alunos, compreendam e acreditem em todo o potencial relacionado com a aprendizagem.

2.2 História da Matemática

Segundo o Professor Ubiratan D'Ambrosio[14] (1991), existe algo de errado com a Matemática que estamos ensinando. O conteúdo que tentamos passar adiante por meio dos sistemas escolares é obsoleto, desinteressante e inútil. O professor de Matemática, durante sua carreira, pode se deparar com desafios que relacionam o cotidiano e a sala de aula. Desde o início de sua formação, na Universidade ou em sala de aula, esses desafios geralmente passam despercebidos e apenas a vivência da prática docente permite vir a descobri-los com o passar do tempo.

A sala de aula sempre se apresentou como um lugar de desafios. Um desses desafios é a tarefa de despertar o interesse dos alunos em relação ao conteúdo matemático em meio às questões interdisciplinares ou contextualizadas com um saber complexo que não se mostra acessível para a maioria. Diante deste desafio, perguntas das mais diversas surgem: como mudar essa interpretação com relação à compreensão da Matemática pelos alunos? Como mostrar que a Matemática pode e deve ser trabalhada de uma forma mais aplicável e conectada com a realidade cotidiana? Como responder à pergunta que a todo o momento surge em sala de aula: “Professor, para que eu aprendo isso?”. De acordo com Miorim:

> A partir da aquisição de conhecimento histórico e filosófico dos conhecimentos matemáticos, o professor tem a possibilidade de diversificar suas técnicas pedagógicas e tornar-se mais criativo na elaboração de suas aulas, as quais podem provocar o interesse dos alunos para o estudo da Matemática. (MIORIM[15], 1998, p. 31)

Ao utilizar a História da Matemática durante suas aulas - independente do eixo temático ou do segmento - o professor inicia um diálogo com seus alunos sobre o processo da construção do conteúdo de maneira robusta e embasada. Ao utilizar essa ferramenta, ele atrai a atenção dos alunos, fazendo com que a aprendizagem ocorra de forma natural, estabelecendo conexões com outras áreas do conhecimento. Referenciando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC),

> Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática. Entretanto, esses recursos e materiais precisam estar integrados a situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos (BRASIL[16], 2017, p. 298).

Desta forma, o conteúdo deve ser trabalhado com o professor aplicando a História da Matemática como pano de fundo ou até mesmo como eixo estruturador, e não simplesmente relacionando o conteúdo matemático ao contexto histórico. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam como é importante trabalhar com a História da Matemática, apontando que

> [...] ao verificar o alto nível de abstração matemática de algumas culturas antigas, o aluno poderá compreender que o avanço tecnológico de hoje não seria possível sem a herança cultural de gerações passadas. Desse modo, será possível entender as razões que levam alguns povos a respeitar e conviver com práticas antigas de calcular, como o uso do ábaco, ao lado dos computadores de última geração (BRASIL[17], 1998, p. 42).

Com a História da Matemática, os professores de hoje (e os de amanhã) podem trabalhar lado a lado com as Metodologias Ativas para cativar e atrair todos os alunos em cada etapa da construção do saber, que se inicia no reconhecimento e na construção de um conceito matemático até a sua formalização e fundamentação no processo histórico. Assim, os alunos são apresentados aos desafios que foram enfrentados pela ciência e pelos matemáticos em um determinado momento, pesquisando e analisando, até serem capazes de determinar o conceito que se está estudando. Dessa forma, a Matemática permite se tornar uma linguagem e ferramenta universal, que dialoga com outras áreas do conhecimento e se fundamenta, durante o breve momento de uma aula, como a resposta de uma problematização concreta que foi vivida por alguém.

A aplicação da História da Matemática em atividades escolares e acadêmicas, juntamente com a Metodologia Ativa da Sala de Aula Invertida, permite ao aluno compreender o contexto em que Matemáticos anteriores ao advento do computador resolviam seus problemas. Assim, ele é capaz de perceber que a Matemática pode ser tratada como uma linguagem construída pelo homem para explicar o mundo através de esforço, estudo, dedicação e criatividade. Desta maneira, fazemos nossas as palavras de Antoni Zygmund, citadas em Bekken:

> Para o estudante, é muito instrutivo aprender não somente o resultado final, a última formulação, mas também a história de seu desenvolvimento. Com isto, não apenas toma conhecimento do processo do desenvolvimento intelectual, mas também constata que as dificuldades que pode encontrar para assimilar novas ideias não se devem necessariamente à falta de condições de sua parte, e sim ao alto grau de sofisticação necessário para captar as ideias em questão. Ao perceber as desventuras de seus predecessores, sentir-se-á menos desanimado pelas suas. (ZYGMUND apud BEKKEN[18], 1994, p. 69)

Novamente, ao fazer a fundamentação teórica de um conteúdo utilizando a História da Matemática, o professor apresenta aos alunos um novo modo de aprender, diferente daquele que estão acostumados. Com isso, eles devem perceber que o conhecimento está em constante ampliação e com isso, serem capazes de buscar soluções para problemas ainda mais complexos, que necessitam de ferramentas mais elaboradas para serem resolvidos.

Em sala de aula, essa investigação pode ocorrer com amplo protagonismo dos alunos, sendo supervisionada pelo professor por meio de perguntas e desafios, sistematizando o conhecimento construído por eles. Em seguida, ele pode consolidar a experiência vivida pelos alunos e ampliar seus conhecimentos sugerindo novas atividades.

Conhecendo a História, os alunos podem produzir e desenvolver novos conteúdos, pois a interpretação para um problema pode despertar a curiosidade de criar novas perguntas e buscar respostas. Assim, o professor é capaz de resgatar o conhecimento utilizado em uma outra época, onde a Ciência era mais romântica e investigativa, sem as ferramentas que existem atualmente. Isso oportuniza o trabalho com uma Matemática mais desafiadora e estimulante, com suas regras e rigores próprios, e ao mesmo tempo dinâmica, em constante diálogo com as necessidades de outras áreas do conhecimento.

2.3 Recurso Computacional - GeoGebra

Nessa seção apresentaremos algumas ferramentas do *software* GeoGebra. A versão que utilizaremos é a 6.0.574.0 (*offline*), disponibilizada em 19 de fevereiro de 2020. As informações que constam nessa seção podem ser encontradas em Hohenwarter et al.[19]. Além disso, essa seção tem como referenciais os textos de Gravina[20] e Valente[21].

O GeoGebra Classic é um *software* educativo, dinâmico e livre, pois é possível copiar, aperfeiçoar, executar, modificar e distribuir o programa livremente e sem fins lucrativos. O programa está disponível gratuitamente no site http://www.geogebra.org e qualquer pessoa pode instalá-lo em seu computador ou em dispositivos móveis, sem perder sua funcionalidade. O programa foi criado por Markus Hohenwarter em 2001, como projeto de pós graduação, e tinha como principal finalidade ser uma ferramenta para o auxílio no ensino de procedimentos algébricos e geométricos.

O *software* é muito didático e de fácil utilização. Ele permite aos alunos construir e visualizar o que está sendo trabalhado. Em sua tela de apresentação, temos barra de menus e de ferramentas e diversos comandos, que permitem ao usuário compreender melhor as suas utilidades e aplicações. De acordo com Silva:

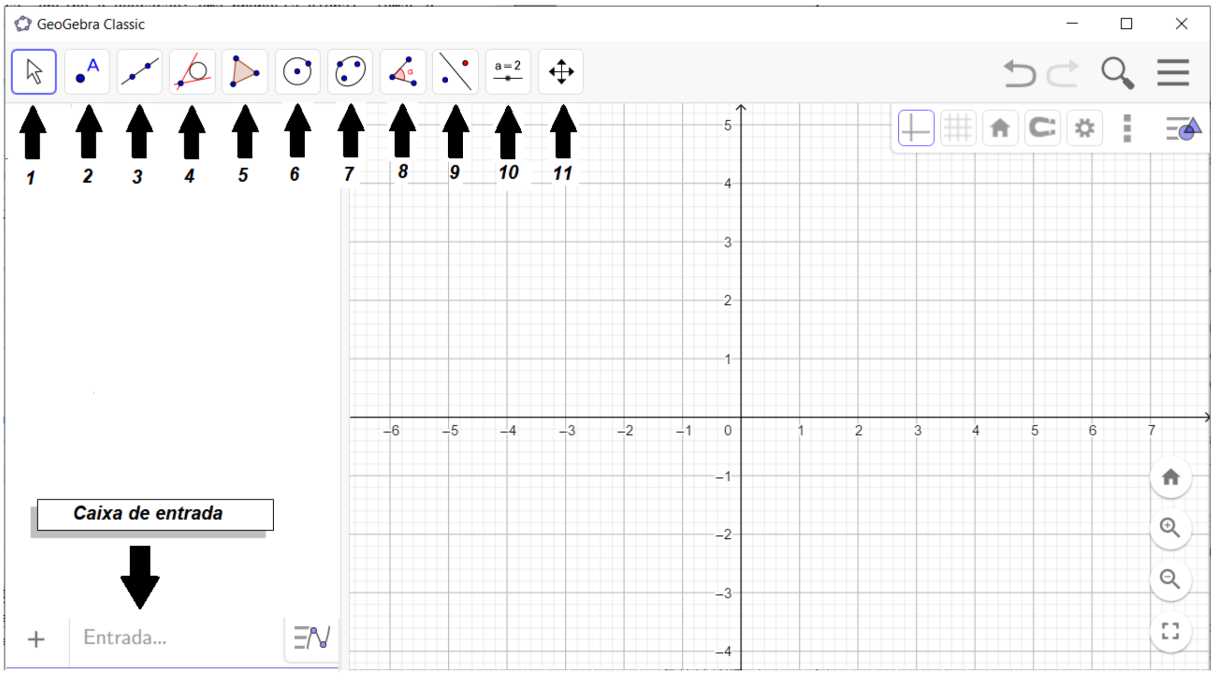
> As tecnologias em suas mais variadas formas acabam ampliando as capacidades intelectuais dos seres humanos, colocando à disposição uma gama de informações e acesso de formas distintas com ambientes e ferramentas também distintos e, juntamente com toda a evolução os educandos e as instituições de ensino acabam sendo afetados e acompanham estas mudanças (SILVA[22], 2010, p. 267).

Na barra de ferramentas do GeoGebra, como apresentado na Figura 2.1, existem onze botões de comando que permitem, nesta ordem:

1. Selecionar e mover objetos ou girá-los em torno de um ponto
2. Criar pontos, interseções e pontos médios
3. Criar retas, semirretas e segmentos de retas
4. Criar retas perpendiculares, paralelas, mediatrizes, bissetrizes e tangentes

5. Construir polígonos regulares e não regulares
6. Construir circunferências, círculos e arcos
7. Construir cônicas
8. Construir ângulos e calcular áreas, distância entre dois pontos e inclinações de retas
9. Realizar reflexões, rotações e translações, ampliar e reduzir objetos
10. Controle deslizante, inserir caixa de texto, ocultar objetos
11. Mover a janela de visualização, exibir objetos e rótulos, apagar objetos

Figura 2.1: Funcionalidades do GeoGebra



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Ao utilizar o GeoGebra em sala de aula, o professor permite o acesso a uma aula informatizada e dinâmica, incluindo os alunos no processo de criação, com situações em que as construções com régua e compasso não fossem práticas. Assim, com uma atividade bem planejada e direcionada, eles poderão produzir e acompanhar a aula com a interface gráfica, uma vez que com os recursos computacionais é possível fazer análises mais rápidas, avançadas e dinâmicas. Embora a construção com régua e compasso ainda seja de extrema relevância, em muitas vezes podem tornar o ensino cansativo e mecânico. De acordo com Silva,

> O GeoGebra, que mantém possível o estudo de conteúdos de forma mais próxima ao que era feito com lápis e papel, transforma também as possibilidades de experimentação, de visualização e de heurística dos humanos envolvidos nesse coletivo que aprende (SILVA[22], 2014, p. 55).

Com suas funcionalidades, o GeoGebra permite ao professor trabalhar conteúdos como funções, que transitam entre a Geometria e a Álgebra. O professor pode ajudar os alunos a visualizar e principalmente a compreender conceitos matemáticos de forma concreta, onde o aluno é capaz de construir o objeto de estudo e assim dar sentido ao seu raciocínio durante a resolução de uma situação problema. A visualização da imagem na interface gráfica contribui para a compreensão dos conteúdos e pode minimizar o grau de abstração da matemática, pois os alunos desenvolvem a capacidade de unificar as imagens mentais e suas representações com as habilidades de visualização e construção.

Por meio do *software*, os alunos podem construir pontos, retas, polígonos, funções e alterar todos esses objetos após a construção. Novamente, o GeoGebra permite relacionar variáveis de funções e tem comandos que calculam raízes, inclinações e distâncias. Assim, ele trabalha com ferramentas de geometria junto com outras ligadas à álgebra e permite ao professor diferentes formas de uso com os alunos. A ferramenta pode ser utilizada para investigar a solução de um problema em situações que introduzem conceitos novos e que permitem a construção do conhecimento matemático, desenvolvendo a habilidade para lidar com estratégias de resolução e o modo de expressar uma solução encontrada.

Dessa forma, os professores estão diante de uma mudança de paradigma e de uma grande oportunidade: utilizar os recursos computacionais, tal qual o GeoGebra, como parte do processo de construção do conhecimento e ainda realizar mudanças em suas metodologias, reorganizando as situações de aprendizagem. Parafraseando Thomas S. Kuhn, “As crises são uma pré condição necessária para a emergência de novas teorias” (KUHN[23], 1975, p. 107). Assim, se ele estiver correto, o professor pode assumir um outro papel, permitindo o acesso e o uso dos recursos computacionais como uma ferramenta de ensino em sala de aula, pois eles passam a desempenhar um papel muito importante neste processo. Quando os recursos computacionais ganham espaço dentro de sala, o professor passa a ter novas e inúmeras possibilidades de informatização e de abordagem dos conteúdos, mudando a metodologia das tarefas repetitivas e se apropriando de situações mais importantes para a aprendizagem. A BNCC orienta que os professores podem

> [...] utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade. (BRASIL[16], 2017 p. 474)

Assim, como o GeoGebra e outros recursos computacionais permitem a exploração de uma quantidade grande de ações e atividades pedagógicas, o professor deve pesquisar as funcionalidades que o programa tem a oferecer, com o objetivo de tornar as aulas mais interessantes e assim, proporcionar momentos de investigação por meio do programa. Isso significa que, além de se tornar um mediador, o professor pode assumir também o papel de criador de ambientes de aprendizagem, que facilitam a construção dos conteúdos pelo aluno. Novamente, de acordo com a BNCC, nesses ambientes,

> As aprendizagens são voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica. (BRASIL[16], 2017, p. 475)

Para finalizar, acreditamos que, ao utilizar os recursos computacionais em sala de aula, o professor é capaz de melhorar a transmissão do conhecimento por experimentação, pois é possível transitar entre o abstrato e a visualização do conteúdo, produzido pelo aluno. Com isso, ao apresentarmos a atividade que utiliza o GeoGebra (Capítulo 5), desejamos que o leitor perceba que o processo transita entre a álgebra e a geometria, por meio da resolução de problemas, e finaliza com a possibilidade de novos campos de investigações. Além disso mostramos que o uso dessas ferramentas, junto com a prática do professor e o envolvimento dos alunos, pode significar um avanço do processo de ensino e aprendizagem dos discentes.

3 Pierre de Fermat

Neste capítulo, apresentamos ao leitor um pouco da vida e obra de Pierre de Fermat, jurista e magistrado por profissão, mas que se dedicava à Matemática apenas em suas horas de lazer. Mesmo assim, era tratado por Blaise Pascal (1623 - 1662) como o maior matemático de seu tempo.

Fermat era um amante da Matemática que, mesmo sem possuir formação específica na área, é responsável por inúmeros resultados nas mais diversas áreas, como no campo da Probabilidade e na Teoria dos Números. Na Geometria Analítica, ao tratar problemas de máximos e mínimos, tema que iremos abordar nesse capítulo, Fermat desenvolveu um método para determinar tangentes. É importante dizer que, no século XVII, a Matemática estava ainda se recuperando da Idade das Trevas, portanto não é de se admirar o caráter amador dos trabalhos desenvolvidos por Fermat.

Em seguida, apresentaremos o modo proposto por Fermat para determinar os máximos e os mínimos envolvendo gráficos de funções, com uma abordagem diferente da usual que envolve o uso de fórmulas ou que necessita do uso de uma ferramenta como o Cálculo Diferencial.

Esperamos que, com o passar do texto, o leitor seja capaz de perceber que Pierre de Fermat foi na realidade um dos precursores do Cálculo, ao desenvolver, de maneira simples e intuitiva os primeiros conceitos de tangentes e derivadas. Porém, devemos ter em mente que essa interpretação ocorre quando abordamos seus escritos com toda a fundamentação de Cálculo, que não eram conhecidas no século XVII. Fermat foi um dos principais referenciais seguidos por Isaac Newton para a formalização da sua ferramenta principal, tanto que, em 1934, o professor norte-americano, Louis Trenchard Moore, descobriu uma nota escrita por Newton dizendo que seu Cálculo, antes tido como de invenção independente, fora baseado no “método de monsieur Fermat para estabelecer tangentes” (NEWTON apud SANTOS[24], 2009, p. 16).

3.1 Biografia

Figura 3.1: Pierre de Fermat

Fonte: http://clubes.obmep.org.br (2019)

Pierre Simon de Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne, Normandia, na França, em 1601. Era filho de aristocratas, seu pai era mercador de couros e cônsul da cidade. Pouco se sabe sobre sua infância. Fermat iniciou seus estudos em casa. Estudou línguas e ciências jurídicas. Após seus estudos, ele ingressou na área jurídica e seguiu carreira até se tornar Juiz Supremo na Corte Criminal, analisando e julgando solicitações reais.

Mesmo seguindo a carreira de jurista, Fermat sempre demonstrou grande interesse pela Matemática e reservava seus momentos livres para se dedicar aos estudos relacionados à Matemática, à Física e à Literatura Clássica. A partir de restaurações em obras matemáticas antigas que iam sendo encontradas ou resgatadas, principalmente da Biblioteca de Alexandria, que fora incendiada pelos árabes (646 d. C.), Fermat iniciou uma fase de grandes descobertas na área da Matemática.

Um exemplo dentre as obras que foram salvas do incêndio e restauradas por Fermat foi a *Aritmética de Diophante*[1], obra que continha quase dois mil anos de conhecimentos matemáticos. Fermat costumava fazer suas anotações nas margens deste livro e mesmo não se dedicando totalmente à Matemática, Fermat realizou grandes descobertas na área. Porém, devido a sua simplicidade de caráter e modéstia, poucas de suas descobertas foram divulgadas. Talvez por isso, ele recebeu a alcunha de "o príncipe dos matemáticos amadores".

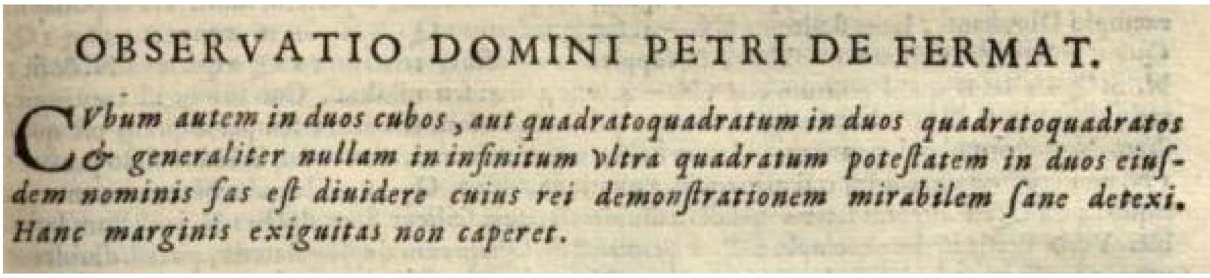
Fermat fazia suas anotações e resultados em lugares pouco convencionais, como

[1] A *Aritmética*, uma obra sobre números poligonais da qual se conhece apenas um fragmento, está escrita em grego e é um tratado analítico de teoria algébrica dos números. É constituída por 13 livros, como nos diz o próprio prefácio da obra. Desses, apenas 6 eram conhecidos na língua original; posteriormente, apareceram mais 4, traduzidos em árabe, que alguns historiadores julgam fazer parte da obra.

as margens dos livros estudados e, principalmente, em conversas entre amigos através de cartas, mostrando que não havia intenção dele em publicar suas descobertas. Esse fato pode ser reconhecido pela existência de resultados, fórmulas e conjecturas formuladas por Fermat que ficaram conhecidas pelo nome de outras pessoas que estudaram seus escritos e realizaram as demonstrações.

Em 1670, Clément-Samuel, o filho mais velho de Fermat, publicou a *Aritmética de Diophante* junto com todos os resultados de seu pai, inclusive com o que conhecemos hoje como o *Último Teorema de Fermat*, apresentado na Figura 3.2.

Figura 3.2: Último Teorema de Fermat



OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

CVbum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum vltra quadratum poteſtatem in duos eiuſdem nominis fas eſt diuidere cuius rei demonſtrationem mirabilem ſane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Fonte: Fermat in Alexandrinus et al.[25] (2020)

O enunciado do Último Teorema de Fermat, escrito na margem de seu exemplar *Aritmética*, de Diofanto, é o seguinte:

> Cubem autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi hanc marginis exiguitas non caperet. (FERMAT[25], 1670, p. 191)

No enunciado acima, Fermat afirma que é impossível um cubo ser escrito como a soma de dois cubos ou uma quarta potência ser escrita como uma soma de dois números elevados a quatro, ou, em geral, que qualquer número elevado a uma potência maior do que dois ser escrito como a soma de duas potências semelhantes.

Em linguagem matemática, isso quer dizer que para $x^n + y^n = z^n$, não existe nenhum conjunto de inteiros positivos x, y, z e n (com $n > 2$) que satisfaça a equação. Junto do Teorema, ao final, constava a frase:

> Eu tenho uma demonstração realmente maravilhosa para esta proposição, mas esta margem é muito estreita para contê-la (FERMAT apud EVES[26], 1997, p. 391).

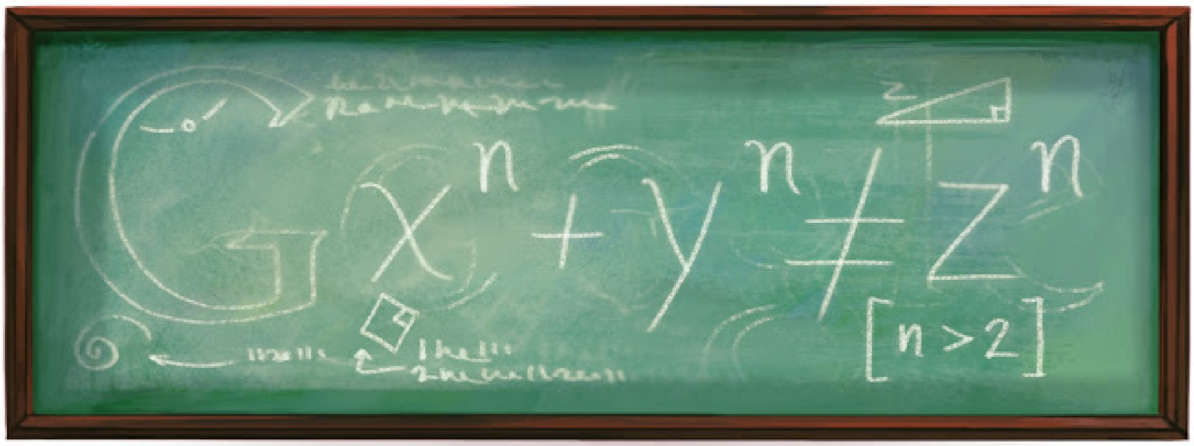
Durante mais de 300 anos, vários matemáticos como Leonhard Euler (1707 - 1783) e Carl Gauss (1777 - 1855) se empenharam nesse teorema. Com o avanço da computação foram testados diversos valores x, y e z, porém nenhum deles verificou a igualdade.

Fato curioso sobre o teorema, conta-se que o matemático alemão Paul Wolfskehl (1856 - 1906), que tinha dia e hora marcada para seu suicídio, enquanto esperava pelo momento, encontrou em sua biblioteca uma referência sobre o problema. Decidido em demonstrá-lo, Wolfskehl nem percebeu que passava da hora de seu suicídio. Fato é que, em seu testamento, destinou toda sua fortuna a quem demonstrasse o teorema que lhe salvou a vida.

O Último Teorema de Fermat teve sua comprovação em 1995, 358 anos após ter sido descoberto pelo mundo. Como tese de seu PhD em Matemática, Andrew Wiles concluiu o trabalho de sua vida, que colocaria seu nome entre os grandes Matemáticos.

Em 2011, o Google homenageou os 410 anos de Fermat, estampando em sua página inicial, a imagem que consta na Figura 3.3.

Figura 3.3: Homenagem do Google a Fermat (17 de agosto de 2011)



Fonte: https://google.com/doodles/pierre-de-fermats-410th-birthday (2020)

Outro resultado interessante escrito por Fermat foi encontrado em uma biblioteca em Leyden, na Holanda, onde ele descreve o *Método da Descida Infinita*, através do qual Fermat pode ter realizado a maioria de suas descobertas. Tal método é uma espécie de "indução matemática às avessas" e é bastante útil para estabelecer resultados negativos quando precisamos provar a impossibilidade de uma relação entre inteiros positivos. Segundo Neto[27], o método consiste na seguinte ideia:

1. Supor que uma dada equação possui uma solução em inteiros não nulos.

2. Concluir daí que ela possui uma solução em inteiros positivos que seja, em algum sentido, mínima.

3. Deduzir a existência de uma solução positiva menor que a mínima, chegando a uma contradição.

Consideremos um exemplo:

Exemplo 3.1.1: É possível aplicar o Método da Descida Infinita para demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Suponhamos que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Neste caso, existem p e q, números inteiros positivos, tais que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$ com $p > q$, pois $\sqrt{2} > 1$.

Como

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1},$$

temos que

$$\sqrt{2} + 1 = \frac{1}{\frac{p}{q} - 1}.$$

Logo,

$$\sqrt{2} = \frac{2q - p}{p - q}.$$

Fazendo $p_1 = 2q - p$ e $q_1 = p - q$, temos que $\sqrt{2} = \dfrac{p_1}{q_1}$. Notemos que $0 < p_1 = 2q - p$ e $p_1 < p$. De fato, como $\sqrt{2} < 2$, então $p < 2q$ e daí $0 < 2q - p = p_1$. Como $q < p$, então $0 < p_1 = 2q - p < 2p - p = p$, isto é, $0 < p_1$ e $p_1 < p$.

Agora, como $\sqrt{2} = \dfrac{p_1}{q_1}$, podemos repetir o mesmo argumento e encontrar inteiros positivos p_2 e q_2, com $p_2 < p_1 < p$. Esse processo pode ser então repetido infinitamente, o que conduz a um absurdo, pois os números p_i devem ser todos inteiros positivos.

Podemos aproveitar o Método da Descida Infinita para analisar um caso particular do Último Teorema de Fermat, em que n é um múltiplo de 4 na equação $x^n + y^n = z^n$.

Antes de apresentar o resultado, precisaremos do Lema 3.1, que permite o estudo das soluções (x, y, z) da equação $x^2 + y^2 = z^2$, com x, y e z inteiros não nulos. Após determinar tais soluções, poderemos utilizar as informações obtidas para resolver outras equações em números inteiros. O lema, assim como sua demonstração, pode ser encontrado na revista *Eureka*, nº 7, de 2000 [27, p. 59].

Lema 3.1: As soluções (x, y, z) da equação $x^2+y^2 = z^2$, com x, y e z inteiros não nulos, são dadas por $(x, y, z) = (2uvd, (u^2 - v^2)d, (u^2 + v^2)d)$ ou $((u^2 - v^2)d, 2uvd, (u^2 + v^2)d)$, onde d, u, v são inteiros não nulos, com $u \neq v$, $mdc(u, v) = 1$ e u e v de paridades distintas.

Teorema 3.2: Se n for múltiplo de 4, então não existem inteiros não nulos x, y, z tais que $x^n + y^n = z^n$.

Demonstração. Seja $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$. Se $x^n + y^n = z^n$, então $(x^k)^4 + (y^k)^4 = (z^{2k})^2$, ou seja, (x^k, y^k, z^{2k}) será uma solução da equação $a^4 + b^4 = c^2$, que por sua vez pode ser escrita como $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$.

Dessa forma, devemos mostrar que essa última equação não admite soluções não nulas. Suponhamos então, por contradição, que existam inteiros positivos a, b, c tais que $(a^2)^2 + (b^2)^2 = c^2$, em que a, b e c foram escolhidos de tal forma que não exista outra solução positiva a', b' e c', com $c' < c$.

Aplicaremos o Método da Descida Infinita usando a minimalidade de c. De acordo com o Lema 3.1, temos que existem números inteiros u, v e d (consideramos $d = 1$ por simplicidade), primos entre si, tais que

$$a^2 = u^2 - v^2,\ b^2 = 2uv \text{ e } c = u^2 + v^2. \tag{3.1}$$

Notamos que $a^2 + v^2 = u^2$. Logo, utilizando o Lema 3.1, existem inteiros p e q, primos entre si, tais que

$$a = p^2 - q^2,\ v = 2pq \text{ e } u = p^2 + q^2. \tag{3.2}$$

Segue das relações (3.1) e (3.2) que $b^2 = 2uv = 4pq(p^2 + q^2)$. Como p e q são primos entre si, temos que ambos também são primos com $p^2 + q^2$. Logo, como $4pq(p^2 + q^2)$ é um quadrado perfeito, devemos ter p, q e $p^2 + q^2$ também são quadrados perfeitos. Denotemos

$$p = \alpha^2,\ q = \beta^2 \text{ e } \gamma^2 = p^2 + q^2,$$

em que α, β e γ são inteiros positivos. Para finalizar, segue que $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$ e, de acordo com as equações (3.1) e (3.2), temos que

$$c = u^2 + v^2 > u = p^2 + q^2 = \gamma^2 \geq \gamma,$$

o que contraria a minimalidade de c. Logo, não há soluções não nulas de $x^n + y^n = z^n$ quando n for múltiplo de 4. □

Os resultados de Fermat ocupam lugar de destaque público e suas anotações não se perderam graças à publicação realizada pelo filho de Fermat. Elas serviram de inspiração e desafio para grandes matemáticos, durante mais de três séculos.

Durante o século XVII, na França, o matemático e padre franciscano Marin Mersenne (1588 - 1648), intermediava a comunicação por cartas entre Fermat e outros matemáticos. Fermat gostava de escrever seus resultados sem a necessidade da publicação ou mesmo sem buscar o reconhecimento acadêmico por seus estudos. Mersenne havia se tornado amigo de Fermat, que permitia a publicação e a divulgação de sua obra, fazendo com que ela fosse conhecida pelos acadêmicos e demais matemáticos. Se dependesse exclusivamente de Fermat, boa parte de seus resultados não seriam conhecidos.

Por volta de 1660, Fermat mudou-se para Paris e ingressou na *Ordem Mínima de l'Annociade*, uma ordem religiosa católica de clausura monástica, que ficava perto do palácio real. Foi neste período que Fermat começou a se corresponder com Pascal sobre o que deu início à Teoria da Probabilidade, um assunto ainda desconhecido por Fermat. Essas correspondências tinham por objetivo descobrir leis matemáticas que descrevessem com uma maior precisão as leis do acaso. Juntos, Fermat e Pascal determinaram as regras essenciais da Probabilidade, chegando Pascal a se convencer de que poderia usar suas teorias para justificar a crença em Deus.

É provável que a maior contribuição de Fermat se realizou no campo da Teoria dos Números, onde se estuda a estrutura dos sistemas numéricos, as propriedades dos números inteiros positivos e dos números primos. Fermat é considerado o fundador das bases da Teoria dos Números, o que lhe atribui maior reconhecimento como matemático.

Além disso, suas relevantes contribuições o tornaram o maior matemático francês do século XVII.

Nesse campo do conhecimento numérico matemático, Pierre de Fermat desenvolveu vários resultados e teoremas, destaque para o "Último Teorema de Fermat" e para o "Pequeno Teorema de Fermat", que foi enunciado por Fermat em uma carta endereçada ao matemático Bernhard de Bessy (1604 - 1674) da seguinte forma:

> Se p é um número primo, então para qualquer inteiro a, $(a^p - a)$ é divisível por p. (HEFEZ[28], 2016, p. 135)

Nessa mesma carta, Fermat também apresentou a seguinte conjectura:

> Qualquer n é primo se e somente se $(2^n - 2)$ for divisível por n inteiro maior que 1. (HEFEZ[28], 2016, p. 135)

A ida desta segunda afirmação é um caso particular do "Pequeno Teorema de Fermat", mas a implicação contrária veio-se provar falsa apenas em 1819 com Pierre Sarrus (1798 - 1861), através de um contraexemplo: $2^{341} - 2$ é divisível por 341, mas $341 = 11 \times 31$, logo 341 é um número composto e não um número primo.

Em 1640, Fermat também se baseou em uma indução sobre apenas 5 casos ($n = 0$, 1, 2, 3, e 4) para formular a conjectura que afirmava que inteiros da forma $2^{2^n} + 1$, agora conhecidos como "números de Fermat" são sempre primos. Na época, ele conseguiu provar que os quatro primeiros números eram primos. Quase 100 anos depois, Euler mostrou que a suposição de Fermat era falsa, pois 641 divide $2^{2^5} + 1$. De fato, considerando o símbolo $\equiv$ para equivalência modular[2], temos que

$$641 = 2^7.5 + 1 \implies 2^7.5 \equiv -1 \mod 641.$$

Elevando a congruência à quarta potência, temos:

$$2^{28}.5^4 \equiv 1 \mod 641. \tag{3.3}$$

Ao mesmo tempo,

$$641 = 2^4 + 5^4 \implies 5^4 \equiv -2^4 \mod 641. \tag{3.4}$$

[2]Para mais informações sobre aritmética modular, sugerimos o livro *Fundamentos de Álgebra*[29].

Utilizando as equações (3.3) e (3.4), temos que

$$2^{28}.(-1).2^4 \equiv 1 \mod 641 \implies 2^{32} \equiv -1 \mod 641.$$

Assim podemos concluir que 641 divide $2^{32}+1$.

Fermat foi também um dos dois precursores da Geometria Analítica. O outro expoente criador foi René Descartes (que se referia a Fermat como Gabarola, um fanfarrão, talvez pela não formação matemática de Fermat, talvez pelo modo que este se dirigia a outros matemáticos). Como consta nas cartas de Fermat, endereçadas a De La Chambre em 1657:

> O que me confirma é que, por meio disso, eu entro em diálogo convosco e até mesmo ouso assegurar-vos antecipadamente que, se vós suportais que eu alie um pouco da minha geometria à vossa física, nós faremos um trabalho em comum que nos colocará primeiramente em oposição contra o senhor Descartes e todos os seus amigos. (FERMAT et al.[30], 1657, p. 279 apud GENUINO[31], 2018, p. 32).

A Geometria Analítica de Fermat se desenvolveu em 1629 e ele descreveu suas ideias em seu trabalho (não publicado) *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*. Neste trabalho, Fermat introduziu o conceito de eixos perpendiculares e pôde determinar as equações gerais da reta, circunferência, parábolas, elipses e hipérboles. Tais conceitos não constam na obra de Descartes, que teve acesso ao trabalho de Fermat meses antes de publicar sua obra intitulada *Geometria*, de 1637.

O método de Fermat para determinar tangentes, desenvolvido por sua abordagem aos problemas de máximos e mínimos, foi ocasião de outro embate. Quando Descartes soube do método de Fermat por Mersenne, desafiou Fermat a encontrar a tangente à curva $x^3 + y^3 = 3axy$, e declarou ao público que ele fracassaria. O próprio Descartes foi incapaz de resolver o desafio e não deve ter sido surpresa sua irritação quando Fermat o resolveu com facilidade (hoje esta curva chama-se *folium de Descartes*). De acordo com Venturi:

> É oportuno observar que a usual denominação **sistema cartesiano** (*Cartesius* é a forma latinizada de Descartes) é anacrônica historicamente, pois sua obra não contém eixos perpendiculares, eixos oblíquos, tampouco a equação de uma reta. Por mérito, o sistema cartesiano deveria denominar-se **sistema fermatiano**.
>
> No entanto, Descartes (que para sempre será lembrado como grande filósofo) superou Fermat pela utilização de uma notação algébrica mais prática (VENTURI[32], 1990, p. 18).

Tanto Fermat quanto Descartes se basearam nos estudos de François Viète (1540 – 1603), advogado e matemático francês e, com essa base fundamental, introduziram o método das coordenadas cartesianas na Álgebra e na Geometria e, com isso, a redução dos estudos realizados via resolução gráfica de equações.

Segundo Eves[26] (2011, p. 389), enquanto "Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia da equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da Geometria Analítica".

Outra das ocupações com a pesquisa matemática de Fermat estava atrelada ao Cálculo Diferencial e Integral, uma Matemática ainda em estágio embrionário e que estava sendo destrinchada naquela época. Fermat desenvolveu um método para traçar retas tangentes ao gráfico de uma função, tornando possível determinar seus valores de máximos e de mínimos locais. Este fato serviria, alguns anos mais tarde, de fundamentação para Isaac Newton (1642 - 1727) desenvolver o Cálculo. É louvável que essas ideias, que nasceram no século XVII, se tornaram uma importante ferramenta matemática para as áreas do conhecimento em que estão inseridas, facilitando o entendimento de físicos, químicos e matemáticos, iniciando um salto no campo das produções científicas e acelerando a evolução do conhecimento científico.

Pierre de Fermat morreu em janeiro de 1665, em Castres, França. Entre as diversas homenagens póstumas se destacam *Le Lycée Pierre de Fermat*, a mais antiga e prestigiada escola de Toulouse, e o monumento como professor da Faculdade de Ciências, em Beaumont de Lomagne.

3.2 Máximos e Mínimos de Fermat

Durante a educação básica, mais precisamente durante a 1ª série do Ensino Médio, os alunos aprendem sobre funções quadráticas, como determinar seu vértice e, a partir daí, localizar o ponto máximo ou mínimo da parábola. O conteúdo se torna mais complexo e o aluno aprende a resolver situações problema que envolvem valores máximos e mínimos, como área máxima de um terreno, a temperatura mínima de uma estufa, a arrecadação máxima de uma empresa, sempre relacionando esses problemas com o estudo realizado sobre o vértice da parábola e com a função do 2º grau. Quando o aluno se encontra na 2ª série do Ensino Médio, ao trabalhar com trigonometria, o conteúdo aborda as funções seno e cosseno e seus respectivos gráficos. Juntamente com a periodicidade das funções, o aluno deve estar apto a resolver problemas que envolvem os valores máximos e mínimos de uma função trigonométrica e suas aplicabilidades. De acordo com a BNCC:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL[16], 2017, p. 265).

Geralmente todas as situações problema trabalhadas na educação básica envolvem uma fórmula, estratégia ou um "macete" e, assim, o conhecimento é mecanizado na cabeça do aluno. Ao ingressar no Ensino Superior, os problemas que abordam a interpretação dos valores máximos e mínimos de funções diversas passa por uma outra abordagem e não dialoga, na maioria das vezes, com o que o aluno trabalhou durante sua vida escolar.

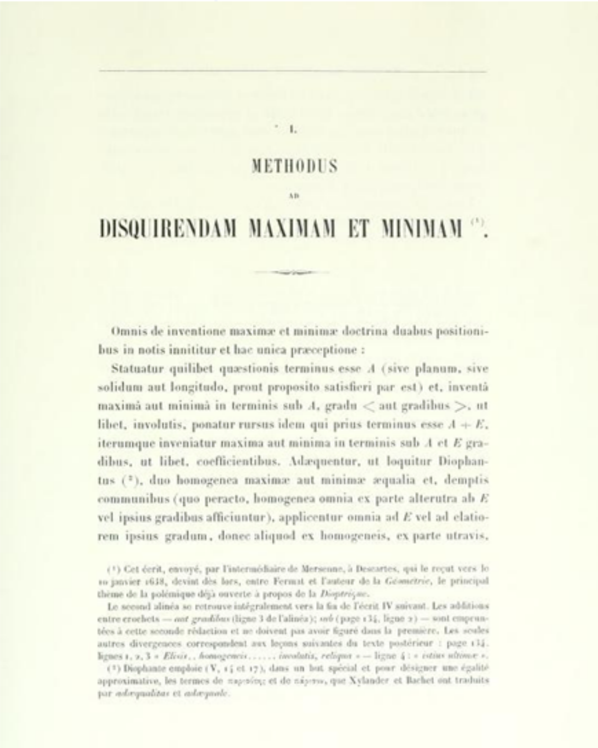
Situações que envolvem o estudo dos máximos e mínimos possuem aplicações diversas no cotidiano e, por envolverem muitas variáveis, às vezes são muito complexas de serem resolvidas sem uma técnica matemática ou uma estratégia de abordagem realmente válida. Nesta parte do trabalho, nosso objetivo é apresentar uma ferramenta robusta para o ensino de máximos e mínimos no Ensino Médio, para funções contínuas, proposto por Pierre de Fermat. O objetivo é apresentar aos alunos uma maneira de determinar esses pontos de máximos e/ou de mínimos de uma forma mais rápida, simples e que não depende de "decorebas" de fórmulas propostas em sala de aula.

Problemas que envolvem máximos e mínimos geralmente são relacionados com problemas de otimização e, com isso, em sua grande maioria, necessitam de uma ferramenta mais avançada do que as ensinadas no Ensino Médio. Essa ferramenta é o que conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral e o estudo da derivada com suas aplicações. Este trabalho visa resolver esses problemas que são trabalhados na educação básica sem necessitar da derivada na prática. O estudo de Fermat sobre máximos e mínimos propõe uma abordagem geométrica para o estudo das funções, de fácil entendimento e que pode ser trabalhada no Ensino Básico.

Nosso estudo se iniciou com a leitura em inglês do artigo *Methodus ad Disquirendam*

Maximam et Minimam, de 1638, escrito em latim por Fermat. Este artigo foi enviado para René Descartes via Padre Mersenne. A tradução para o inglês foi realizada por Jason Ross do francês, e pode ser encontrada em *Oeuvres de Fermat*, volume 3, página 133 a 136, como temos na Figura 3.4.

Figura 3.4: Método Para o Estudo dos Máximos e Mínimos



I.

METHODUS

AD

DISQUIRENDAM MAXIMAM ET MINIMAM (1).

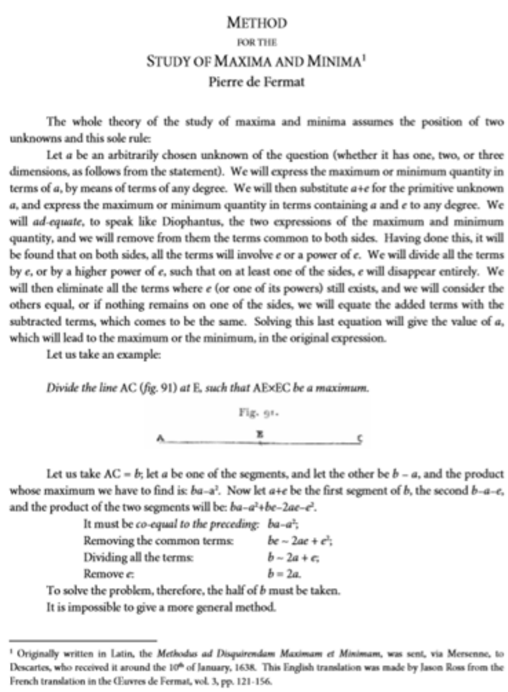
Omnis de inventione maximæ et minimæ doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica præceptione :

Statuatur quilibet quæstionis terminus esse A (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventâ maximâ aut minimâ in terminis sub A, gradu < aut gradibus >, ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A et E gradibus, ut libet, coefficientibus. Adæquentur, ut loquitur Diophantus (2), duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia et, demptis communibus (quo peracto, homogenea omnia ex parte alterutra ab E vel ipsius gradibus afficiuntur), applicentur omnia ad E vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis,

(1) Cet écrit, envoyé, par l'intermédiaire de Mersenne, à Descartes, qui le reçut vers le 10 janvier 1638, devint dès lors, entre Fermat et l'auteur de la *Géométrie*, le principal thème de la polémique déjà ouverte à propos de la *Dioptrique*.

Le second alinéa se retrouve intégralement vers la fin de l'écrit IV suivant. Les additions entre crochets — *aut gradibus* (ligne 3 de l'alinéa); *sub* (page 134, ligne 2) — sont empruntées à cette seconde rédaction et ne doivent pas avoir figuré dans la première. Les seules autres divergences correspondent aux leçons suivantes du texte postérieur : page 134, lignes 1, 2, 3 « *Elisis*, . *homogeneis* . . . . . . *involutis*, *reliqua* » — ligne 4 : « *citius ultimæ* ».

(2) Diophante emploie (V, 14 et 17), dans un but spécial et pour désigner une égalité approximative, les termes de [illegible] et de [illegible], que Xylander et Bachet ont traduits par *adæqualitas* et *adæquale*.



METHOD
FOR THE
STUDY OF MAXIMA AND MINIMA[1]
Pierre de Fermat

The whole theory of the study of maxima and minima assumes the position of two unknowns and this sole rule:

Let *a* be an arbitrarily chosen unknown of the question (whether it has one, two, or three dimensions, as follows from the statement). We will express the maximum or minimum quantity in terms of *a*, by means of terms of any degree. We will then substitute $a+e$ for the primitive unknown *a*, and express the maximum or minimum quantity in terms containing *a* and *e* to any degree. We will *ad-equate*, to speak like Diophantus, the two expressions of the maximum and minimum quantity, and we will remove from them the terms common to both sides. Having done this, it will be found that on both sides, all the terms will involve *e* or a power of *e*. We will divide all the terms by *e*, or by a higher power of *e*, such that on at least one of the sides, *e* will disappear entirely. We will then eliminate all the terms where *e* (or one of its powers) still exists, and we will consider the others equal, or if nothing remains on one of the sides, we will equate the added terms with the subtracted terms, which comes to be the same. Solving this last equation will give the value of *a*, which will lead to the maximum or the minimum, in the original expression.

Let us take an example:

Divide the line AC (*fig.* 91) *at* E, *such that* AE×EC *be a maximum.*

Fig. 91.

A E C

Let us take AC = *b*; let *a* be one of the segments, and let the other be $b - a$, and the product whose maximum we have to find is: $ba-a^2$. Now let $a+e$ be the first segment of *b*, the second $b-a-e$, and the product of the two segments will be: $ba-a^2+be-2ae-e^2$.

It must be *co-equal to the preceding*: $ba-a^2$;
Removing the common terms: $be \sim 2ae + e^2$;
Dividing all the terms: $b \sim 2a + e$;
Remove *e*: $b = 2a$.

To solve the problem, therefore, the half of *b* must be taken.

It is impossible to give a more general method.

[1] Originally written in Latin, the *Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam*, was sent, via Mersenne, to Descartes, who received it around the 10th of January, 1638. This English translation was made by Jason Ross from the French translation in the Œuvres de Fermat, vol. 3, pp. 121-156.

Fonte: http://science.larouchepac.com/fermat/fermat-maxmin.pdf (2019)

De acordo com Fermat:

> Toda a teoria do estudo de máximos e mínimos assume a posição de duas incógnitas e uma única regra: Seja escolhido um a arbitrário. Expressaremos as quantidades máxima ou mínima em termos de a, por meio de termos em qualquer grau. Em seguida, substituiremos $(a + e)$ pelo primitivo desconhecido a e expressaremos a quantidade máxima ou mínima em termos que contenham a e e em qualquer grau. Iremos *ad–equiparar*, para falar como Diofanto, as duas expressões do máximo e mínimo e removeremos deles os termos comuns a ambos os lados. Feito isso, pode-se concluir que em ambos os lados, todos os termos envolverão e ou uma potência de e. Dividiremos todos os termos por e ou por uma potência superior de e de modo que, em pelo menos um dos lados, e desapareça completamente. Depois eliminaremos todos os termos em que e (ou uma de suas potências) ainda existe, e consideraremos os outros iguais, ou se nada restar em um dos lados, nós iremos igualar os termos adicionados com os termos subtraídos, que passam a ser os mesmos. Resolvendo esta última equação, nos dará o valor de a, que levará ao

> máximo ou ao mínimo na equação original. (FERMAT apud ROSS[4], 1636, p. 1 - tradução dos autores)

Para deixar ainda mais claro para o leitor, o método de Fermat para encontrar máximos e mínimos de uma função polinomial f parte do pressuposto que, em um ponto de máximo ou de mínimo x, os valores de $f(x)$ e de $f(x+e)$ para e pequeno, são próximos. Fermat então forçou a igualdade $f(x) = f(x+e)$, para em seguida, dividir o resultado da igualdade por e e fazer $e = 0$. Os pontos de máximo e de mínimo são então calculados igualando-se a zero a expressão obtida:

$$g(x) = \frac{f(x+e) - f(x)}{e}$$

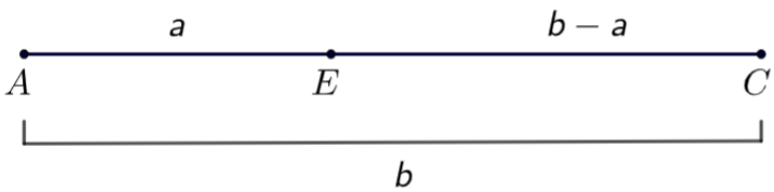
Em linguagem mais atual, essa expressão está relacionada à derivada da função $f(x)$, ou seja

$$g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+e) - f(x)}{e} = f'(x)$$

Para exemplificar, Fermat propõe em seu artigo um exemplo inicial, puramente geométrico, e que é apresentado (com algumas adequações de contexto) em praticamente todos os livros didáticos de Matemática utilizados no Ensino Médio do país. Usaremos o símbolo $\approx$ para *ad-equiparar* os termos, seguindo a terminologia adotada por Fermat.

Exemplo 3.2.1: Dados dois pontos distintos A e C, divida o segmento AC no ponto E, de tal forma que o produto $AE.EC$ seja o máximo possível, conforme a Figura 3.5:

Figura 3.5: Segmento AC

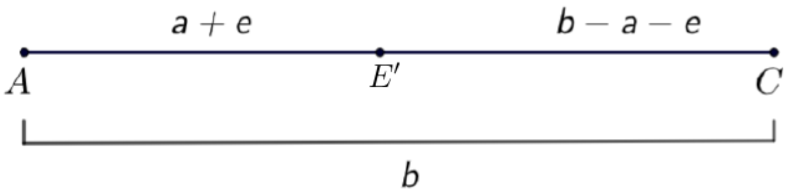


Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Consideremos $AC = b$ e tomemos $AE = a$. Consequentemente, $EC = b - a$. O produto com o possível valor máximo será dado por $AE.EC = a.(b-a)$.

Consideremos agora um segundo cenário, em que o corte do segmento AC é efetuado em um outro ponto E', ligeiramente próximo do anterior. Tomemos um valor e, positivo e arbitrário, de forma que $AE' = a + e$. Dessa forma, o segmento $E'C = b - a - e$, ou seja, a proposta é deslocar o ponto E ligeiramente, como podemos ver na Figura 3.6.

Figura 3.6: Novo Segmento AC



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Assim,

$$AE'.E'C = (a + e).(b - a - e)$$

Considerando $e \approx 0$, temos $(a + e) \approx a$, então podemos *ad-equiparar* os dois produtos

$$a.(b - a) \approx (a + e).(b - a - e),$$

$$ab - a^2 \approx ab - a^2 - ae + eb - ae - e^2.$$

Cancelando os termos equivalentes, temos

$$eb \approx 2ae + e^2.$$

Como $e \neq 0$, podemos simplificar a equação toda por e, obtendo

$$b \approx 2a + e.$$

Uma vez que $e \approx 0$, podemos considerá-lo desprezível na equação e então, removendo os termos em e, teremos agora uma igualdade em que

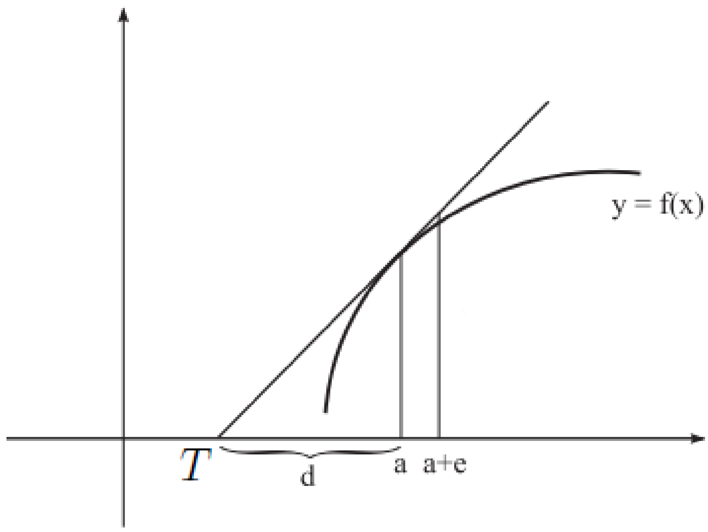
$$b = 2a.$$

Isso significa que o produto $AE.EC$ é máximo quando tomamos $b = 2a$.

Fermat também desenvolveu uma técnica para encontrar tangentes a uma curva polinomial do tipo $y = f(x)$. Ele não apresentou muitos detalhes para seu método, limitando-se a dizer que sua abordagem era similar a usada para encontrar máximos e mínimos. Por isso, o procedimento de Fermat não ganhou aceitação pelos matemáticos de sua época.

De acordo com Mol, "Para calcular a tangente no ponto $(a, f(a))$, Fermat partia da ideia que, para um e pequeno, o ponto $(a + e, (f(a + e))$ poderia ser considerado sobre a reta tangente" (MOL[33], 2013, p. 99). Observe a Figura 3.7,

Figura 3.7: Método de Fermat Para a Reta Tangente



Fonte: http://www.mat.ufmg.br - Adaptada (2020)

Assim, se T é a interseção da tangente com o eixo x e d é a distância entre os pontos T e $(a, 0)$, considerando semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{f(a)}{d} = \frac{f(a+e)}{d+e}.$$

Manipulando essa relação e dividindo o resultado por e para em seguida fazer $e = 0$, chegamos em uma expressão que permite calcular o valor de d. A inclinação da reta tangente obtida, $m = \frac{f(a)}{d}$ é exatamente o que conhecemos como $f'(a)$, se colocarmos e tender a 0.

O método proposto por Fermat pode ser expandido para outros tipos de funções contínuas, permitindo assim determinar os possíveis candidatos a pontos de máximos ou de mínimos locais. A interpretação se baseava no estudo do comportamento das imagens das funções nas proximidades das suas concavidades. Nestes locais, Fermat tinha consciência que, para valores próximos de x em seu domínio, a função não sofria variações na imagem.

Era de se esperar então que, tomando um valor e positivo, arbitrário e próximo de x, a imagem de $(x + e)$ estaria localizada também próxima à imagem de $f(x)$.

Mesmo com o trabalho de Fermat sendo um dos referenciais utilizados por Newton, o que o coloca como um dos precursores do Cálculo, vale ressaltar que Fermat foi censurado por vários matemáticos e filósofos naquela época. De acordo com Biacino, se analisarmos com bastante critério o método aplicado por Fermat, podemos perceber que ele viola o princípio da não contradição. Esse princípio afirma que duas afirmações contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo. Por exemplo, as duas proposições "A é B" e "A não é B" são mutuamente exclusivas (BIACINO[34], 2014, p. 2).

Constantemente Fermat utiliza o termo *adequação*, não indicando uma igualdade. Segundo sua terminologia, uma *adequação* é uma igualdade aproximada. Em seu método, Fermat atribui um valor e, "adequadamente" próximo de 0 (neste ponto $e \neq 0$) e, em seguida, simplifica ambos os termos da *adequação*. Após isso, ele muda a *adequação* para uma equação e toma $e = 0$.

Fermat fornece muitos exemplos para provar a eficácia de seu método utilizando funções algébricas. Porém, ao se interpretar essa *adequação* de Fermat, é preciso ter em mente que certos componentes cruciais da estrutura conceitual do Cálculo ainda não eram conhecidos por ele, o que só reforça toda importância de seu trabalho e sua interpretação geométrica sobre o método. Ainda, devemos ter em mente que nossa leitura do trabalho de Fermat é anacrônica, pois somos influenciados pelo conhecimento de Cálculo que temos hoje.

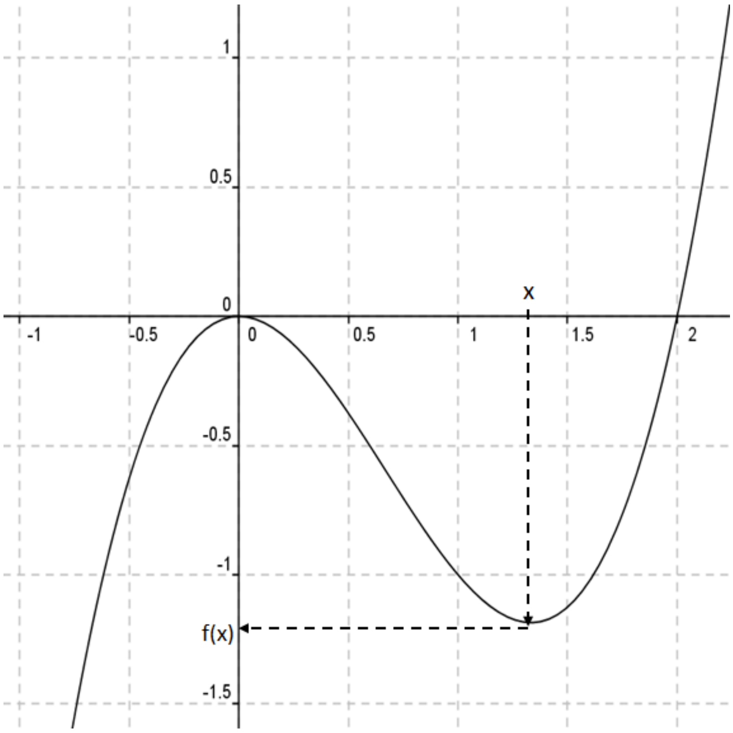
As dúvidas e críticas sobre o trabalho de Fermat só terminaram em 1821, quando os conceitos de limite de uma função e de derivadas foram definidos pela primeira vez por Cauchy (1789 - 1857) em sua obra *Curso de Análise*.

Exemplo 3.2.2: De maneira análoga à apresentada no Exemplo 3.2.1, podemos exemplificar o método de Fermat utilizando a função $f(x) = x^3 - 2x^2$, cujo gráfico está na Figura 3.8. Percebemos que a função possui um candidato a máximo local e um a mínimo local.

Portanto, era bastante lógica a afirmação que

$$f(x) \approx f(x + e).$$

Figura 3.8: Gráfico de f



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Assim,

$$x^3 - 2x^2 \approx (x+e)^3 - 2(x+e)^2.$$

Desenvolvendo os produtos notáveis, obtemos

$$x^3 - 2x^2 \approx x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 2x^2 - 4xe - 2e^2.$$

Cancelando-se os termos semelhantes

$$3x^2e + 3xe^2 + e^3 - 4xe - 2e^2 \approx 0.$$

Agora, como $e \neq 0$, podemos dividir todos os termos por e para obter

$$3x^2 + 3xe + e^2 - 4x - 2e \approx 0.$$

Para finalizar o processo, uma vez que e é um valor próximo de zero, ele se torna desprezível na operação e os termos contendo e são eliminados. Logo, obtemos uma igualdade sem o valor e arbitrário:

$3x^2 - 4x = 0.$

Assim, temos que

$x(3x - 4) = 0,$

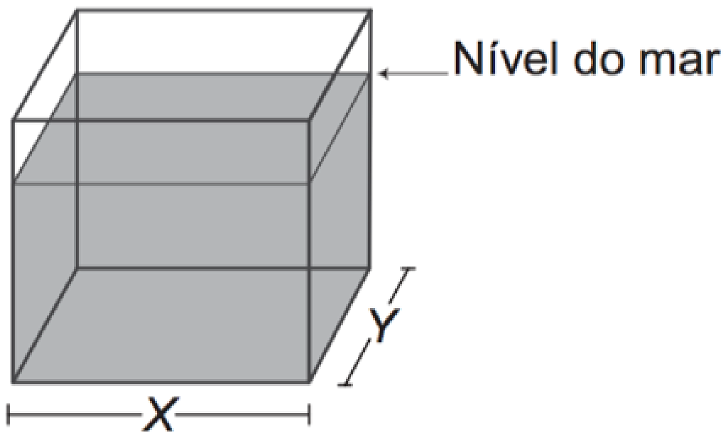
onde podemos concluir que

$x = 0$ ou $x = \frac{4}{3}.$

Estes valores podem ser verificados sem maiores dificuldades no gráfico.

Exemplo 3.2.3: (ENEM - 2017) - Viveiros de lagostas são construídos por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares (Figura 3.9), fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais. Quais devem ser os valores de x e de y para que a área

Figura 3.9: Viveiro



Fonte: ENEM (2017)

da base do viveiro seja máxima?

Como 100 metros de tela serão utilizados para a lateral da tela, temos que

$2x + 2y = 100 \implies x + y = 50.$

A área da base do viveiro (A) poderá ser calculada por $A = x.y$. Logo, podemos escrever a área em função de um dos lados, por exemplo, x, de forma que $A(x) = x(50 - x)$

e, portanto, $A(x) = -x^2 + 50x$.

Aplicando a proposta de Fermat, devemos investigar o que ocorre com a função $A(x)$ quando assumimos valores próximos do valor de x que retorna a área máxima. Para isso, vamos novamente tomar um valor arbitrário e, próximo de 0, de tal forma que $A(x) \approx A(x + e)$. Assim, temos que:

$$x(50 - x) \approx (x + e)(50 - x - e),$$

$$-x^2 + 50x \approx 50x - x^2 - ex + 50e - ex - e^2,$$

e assim, temos

$$2ex + e^2 - 50e \approx 0.$$

Como $e \neq 0$, podemos simplificar a equação toda por e, obtendo assim

$$2x + e - 50 \approx 0.$$

Uma vez que $e \approx 0$, podemos considerá-lo desprezível. Temos agora uma igualdade em que

$$2x - 50 = 0.$$

Assim, cada lado x do viveiro deverá ter 25 metros de comprimento.

Ressaltamos que, em seu artigo, Fermat apresentou seu método somente pra funções algébricas. Contudo, acreditamos ser uma excelente oportunidade para o leitor se relacionar com a aplicação da técnica também em funções trigonométricas. A diferença crucial nesta extrapolação é que, ao final, não tomaremos $e = 0$, mas faremos e tender a 0. Por exemplo, aplicaremos a técnica para a função $f(x) = \text{sen}(x)$.

Exemplo 3.2.4: Determine os valores máximos e mínimos para a função $f(x) = \text{sen}(x)$.

Aplicando a técnica de Fermat, temos que, para um e arbitrário

$$f(x + e) \approx f(x).$$

Assim,

$$\text{sen}(x+e) \approx \text{sen}(x).$$

Desenvolvendo o seno da soma de dois arcos,

$$\text{sen}(x)\cos(e) + \cos(x)\,\text{sen}(e) \approx \text{sen}(x),$$

onde

$$\text{sen}(x)\cos(e) - \text{sen}(x) + \cos(x)\,\text{sen}(e) \approx 0,$$

$$\text{sen}(x)[\cos(e) - 1] + \cos(x)\,\text{sen}(e) \approx 0.$$

Efetuando-se a divisão por e, temos

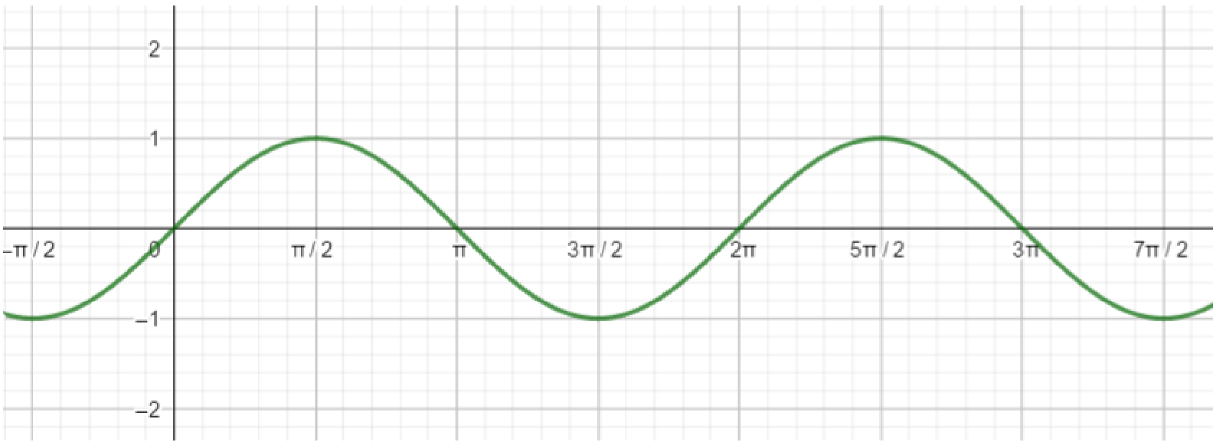
$$\text{sen}(x)\frac{\cos(e)-1}{e} + \cos(x)\frac{\text{sen}(e)}{e} \approx 0.$$

Sabemos que $\lim_{e\to 0} \frac{\cos(e)-1}{e} = 0$ e que $\lim_{e\to 0} \frac{\text{sen}(e)}{e} = 1$. Logo,

$$\cos(x) = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Podemos verificar a solução através do gráfico apresentado na Figura 3.10.

Figura 3.10: Gráfico da Função sen(x)



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Concluímos então que o estudo de Fermat sobre curvas polinomiais da forma $y = f(x)$ apresentou uma estratégia muito engenhosa para determinar os pontos em que a função assume seu valor máximo ou mínimo. Analisando a curva de modo geral, os valores de $f(x)$ e do ponto vizinho $f(x+e)$ são bem diferentes, porém no máximo ou no mínimo a variação será quase imperceptível. Essa interpretação pode ser apresentada para alunos do Ensino Médio com o auxílio de um *software* didático com interface gráfica.

Como veremos, a investigação realizada por Fermat pode ser apresentada aos alunos para determinar os pontos de máximo e mínimo, igualando $f(x)$ e $f(x+e)$. Ao perceber que os valores são quase iguais, podemos concluir que, quanto menor o intervalo e entre os dois pontos, mais perto chegamos da solução procurada. Assim, ao abordar o estudo dos máximos e dos mínimos de um modo mais amplo, poderemos observar como a utilização da reta tangente nos pontos de máximo e mínimo de funções contínuas nos permite perceber o conceito inicial de derivada apresentado pelo método de Fermat e nos leva a abordar outros tipos de funções e conteúdos no Ensino Médio.

4 Sir Isaac Newton

Neste capítulo visitaremos a história de Sir Isaac Newton, sua vida e obra, a disputa com Leibniz pela descoberta do Cálculo Infinitesimal, destacando como Newton apresentou sua forma de proposta de expansão do Binômio e o Teorema Binomial Generalizado.

Isaac Newton foi um físico, astrônomo e matemático inglês. Desde pequeno manifestava interesse por atividades manuais. Ainda criança fez um moinho de vento, que funcionava, e um quadrante solar de pedra, que se acham hoje na Sociedade Real de Londres. Seus trabalhos sobre a formulação das três leis do movimento levaram à lei da Gravitação Universal; seus trabalhos sobre a composição da luz branca conduziram à moderna Física Óptica; na Matemática ele lançou os fundamentos do Cálculo Infinitesimal.

Conforme relatos de Abraham de Moivre (1667 - 1754), grande amigo de Newton, ele despertou interesse pela Matemática no momento que adquiriu um livro de Astronomia, numa feira na Universidade de *Cambridge*, e notou que não tinha condições de compreender a Matemática nele contida. Na tentativa de ler um livro de Trigonometria, ficou convencido que precisava aumentar seus conhecimentos de Geometria e dessa forma decidiu-se a ler *Os Elementos* de Euclides.

> Em algum momento de 1663 ou 1664, Newton escreveu em seu caderno a máxima "Amicus Plato amicus Aristoteles magis amica veritas" (Platão é meu amigo, Aristóteles é meu amigo, mas meu melhor amigo é a verdade). Chegara a um ponto importante de seu desenvolvimento intelectual (BRENNAN[35], 2003, p. 27).

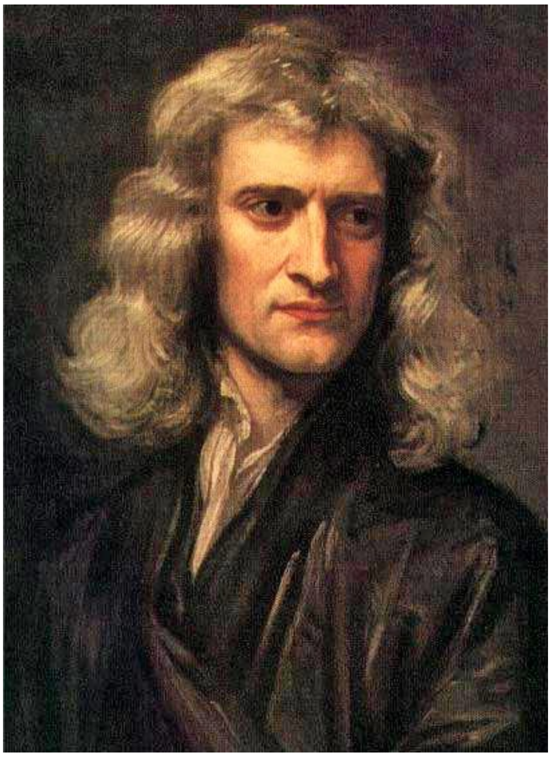
O leitor também poderá perceber que é um equívoco comum atribuir a Newton o desenvolvimento do Binômio que é apresentado na Educação Básica. O nome na verdade é uma homenagem a ele por seu estudo de regras que valem para $(a+b)^n$ quando o expoente n é fracionário ou inteiro negativo, o que leva ao estudo de séries infinitas.

Ao final do capítulo iremos abordar a proposta da expansão para expoentes inteiros realizada por Leonhard Euler e em seguida finalizaremos com o Teorema Binomial Generalizado.

4.1 Biografia

Isaac Newton foi Físico, Astrônomo, Matemático, Alquimista, Teólogo e Filósofo Natural. Nasceu na noite de Natal de 1642, com o mesmo nome do pai. Foi criado pelos avós e desde cedo realizava pequenas descobertas, construindo miniaturas mecânicas e engenhosas. Sempre desconfiado das pessoas que viviam ao seu redor, relutava em divulgar seus trabalhos. Era tímido, nervoso e temperamental. Desde cedo se dedicou aos pioneiros da ciência, como René Descartes (1596 - 1650), Nicolau Copérnico (1473 - 1543), Galileu Galilei (1564 - 1642), Johannes Kepler (1571 - 1630) e Pierre de Fermat (1601 - 1665).

Figura 4.1: Sir Isaac Newton



Fonte: https://br.pinterest.com (2019)

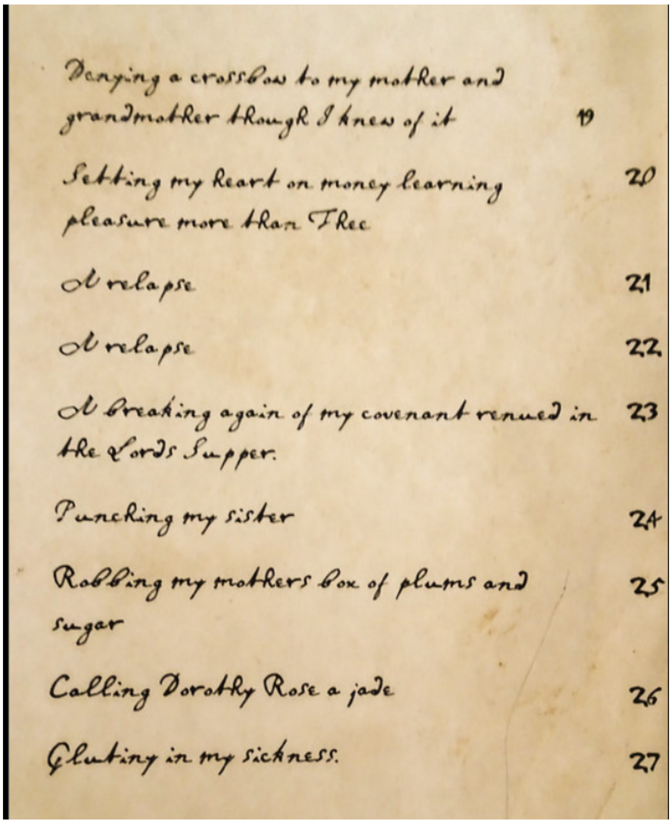
Aos 18 anos ingressou no *Trinity College*, Universidade de *Cambridge*, onde estudou e trabalhou como prestador de serviços gerais. Durante a graduação, graças a um livro de Astrologia, sua atenção se voltou para a Matemática. Após ler *Os Elementos*[1] de Euclides, Newton considerou o conteúdo da obra muito simples e de fácil análise. Já ao ler *La Géométrie*[2] de Descartes, achou as proposições muito difíceis. Não demorou muito para Newton desenvolver sua própria Matemática, descobrindo o Teorema Binomial Generalizado, conjecturando as primeiras hipóteses sobre a Gravitação Universal, sobre séries infinitas e, em seguida, formulando o que chamou de método dos fluxos, que conhecemos hoje por Cálculo Infinitesimal.

Um fato curioso é que Newton tinha uma própria lista com 48 pecados cometidos antes de 1662, apresentados na Figura 4.2.

[1] *Os Elementos* é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escrito por Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Ele engloba uma coleção de definições, postulados (axiomas), proposições (teoremas e construções) e provas matemáticas das proposições. Os treze livros cobrem a geometria euclidiana e a versão grega antiga da teoria dos números elementar.

[2] Publicado em 1637, *La Géométrie* é um apêndice ao Discurso sobre o método. Escrito por René Descartes, foi o primeiro trabalho a propor a união da Álgebra com a Geometria em um único assunto chamado Geometria Analítica , que envolve traduzir a Geometria em equações algébricas.

Figura 4.2: Lista de Pecados



Denying a crossbow to my mother and grandmother though I knew of it 19

Setting my heart on money learning pleasure more than Thee 20

A relapse 21

A relapse 22

A breaking again of my covenant renued in the Lords Supper. 23

Punching my sister 24

Robbing my mothers box of plums and sugar 25

Calling Dorothy Rose a jade 26

Glutiny in my sickness. 27

Fonte: www.flickriver.com (2019)

Alguns dos pecados mais peculiares que constavam nessa lista e que, de certa forma, permitem um vislumbre da personalidade de Newton, podem ser vistos abaixo:

- *Comendo uma maçã na Igreja.*
- *Fazendo tortas no domingo à noite.*
- *Roubando cerejas de Eduard Storer.*
- *Negando o que eu fiz.*
- *Gula.*
- *Batendo na minha irmã.*
- *Ameaçando meu pai Smith e minha mãe de queimar sua casa com eles dentro.*
- *Gula.*
- *Tendo pensamentos e sonhos sujos.*
- *Desejando morrer e esperando a morte de alguns.*
- *Acertando muitos.*

Durante os anos de 1665 e 1667, a Universidade de *Cambridge* esteve fechada devido à peste bubônica. Durante esses dois anos, quando estava em sua cidade natal, Newton desenvolveu os primeiros passos do Cálculo. Interessou-se por várias questões físicas, como ótica, ondas e gravitação universal. Contudo, estudos mostraram que esse relato era um mito disseminado pelo próprio Newton para ganhar a disputa polêmica com Leibniz (1646 - 1716) sobre a descoberta do Cálculo Diferencial e Integral.

Newton afirmava que entre 1666 e 1669 havia realizado o desenvolvimento do Cálculo - com o nome de *Método de Fluxos e Fluentes* - e já havia escrito dois livros até 1671, porém não os publicou. A divulgação do conteúdo se deu apenas para colegas próximos. O primeiro desses livros só foi publicado em 1704 e o segundo em 1736 – nove anos depois de sua morte. Já Leibniz desenvolveu seu Cálculo alguns anos depois de Newton, entre 1675 e 1676, em Paris. Ele divulgou suas descobertas através de publicações em 1684 e 1686. Assim, Leibniz pôde se proclamar como o inventor do Cálculo e passou a ser considerado um dos maiores matemáticos vivos de seu tempo.

Ao ficar sabendo do sucesso de Leibniz, Newton ficou arrependido de não ter publicado o que havia descoberto décadas antes e passou a reivindicar para si o título de maior impulsionador da Matemática na época. De acordo com a *American Mathematical Society*, na revisão do livro *A guerra do Cálculo*, Leibniz, como membro da *Royal Society*[3], havia tido contato com a obra de Newton antes de desenvolver seu próprio trabalho. Sabendo disso, Newton passou a contatar outros cientistas da época para defenderem seu lado e para atacarem Leibniz.

A disputa refletiu a realidade que conhecemos hoje sobre os dois matemáticos. Newton se mostrou colossal, vingativo e dedicado em seus escritos e acreditava que os segundos inventores não tinham direitos. Leibniz era menos obsessivo, se permitia brincar com o assunto, mas também era um adversário bastante incisivo em suas colocações com relação ao conteúdo. Ele e alguns outros matemáticos passaram a acusar Newton de plágio. Para isso, Leibniz passou a escrever dezenas de cartas explicando a situação e pedindo apoio a sua causa para membros da comunidade científica da época.

É difícil apresentar um veredito final para a pergunta "Quem formulou o Cálculo?". A certeza que podemos ter é a contribuição científica dos dois, que só não foi de maior impacto por causa da disputa. Tanto Newton quanto Leibniz demonstraram seus resultados independentemente, Newton iniciando seus estudos com aplicações da diferenciação, anos antes do rival. Os estudos de Leibniz se iniciaram com a integração, com a representação

[3]Fundada em 1660, a *Royal Society* é uma instituição destinada à promoção do conhecimento científico. Foi inspirada pelas ideias do cientista e filósofo inglês Francis Bacon (1561 - 1626) e se tornou uma instituição dedicada a expandir as fronteiras do conhecimento por meio do desenvolvimento da Ciência, Matemática, Engenharia e Medicina.

gráfica utilizada atualmente e, após o contato com o trabalho de Newton, foi capaz de tornar inteligível "a todos" a teoria do Cálculo. A disputa terminou com a morte de Leibniz em 1716. É bem provável que, caso este tivesse vivido por mais tempo, o embate teria durado ainda mais. Aliás, Newton continuou defendendo seu ponto de vista e escrevendo artigos mesmo após a morte do rival.

Em 1669, Newton foi nomeado para a cadeira Lucasiana (cargo destinado para os professores mais notáveis de uma instituição de Ensino Superior ou universidade) na Universidade de *Cambridge*, onde ficou durante dezoito anos. Sua primeira produção como professor Lucasiano foi em *Óptica*, onde argumentou que a luz branca era, de fato, uma junção de diferentes raios refratados em direções diferentes, e que cada direção produzia uma cor. Esse estudo suscitou muito interesse e muitas discussões entre os cientistas, que atacavam veementemente as ideias de Newton. Este fato, juntamente com a disputa contra Leibniz, fez com que Newton jurasse nunca mais publicar nada relacionado às Ciências. A principal consequência disso foi o atraso do progresso matemático na Inglaterra em relação ao restante da Europa por quase um século, uma vez que a maioria de suas ideias inovadoras só foram publicadas muitos anos depois das descobertas.

Durante o período de 1673 a 1683, as atividades mais relevantes de Newton se basearam no campo da Álgebra e na Teoria das Equações. Com o passar do tempo, Newton se voltou para a Mecânica e para o estudo da Gravitação relacionada com as órbitas dos planetas, tendo os estudos e os resultados de Kepler como fundamentação teórica. Ele estabeleceu a compatibilidade da sua lei de gravitação com as leis do movimento planetário de Kepler, mas essas descobertas não foram divulgadas antes de 1684. Nesse ano, Halley (1656 - 1742) acabou se interessando pelas ideias de Newton e, ao procurá-lo para discutir sobre as leis do movimento planetário, contribuiu com várias proposições que seriam fundamentais para o *Principia*, possivelmente o livro de Ciências Naturais com maior influência já publicado. O tratado completo, conhecido por *Philosophiae naturalis principia mathematica*, foi custeado por Halley e publicado em 1687.

Em seus registros, Newton interagia com conhecimentos que estavam dispersos nas obras de Descartes, como as leis do movimento, principalmente a primeira, a Lei da Inércia. De Kepler, Newton abordou as três leis do Movimento Planetário e de Galileu Galilei, ele analisou os estudos das quedas dos corpos. O *Principia* foi escrito em três volumes e aborda temas contendo a fundamentação para a Mecânica Clássica, Mecânica dos Fluidos e as Leis da Gravitação Universal. Vale ressaltar que, apenas por insistência e motivação do próprio Halley, é que Newton enviou seus resultados para a *Royal Society*. Com isso, ele passou a se dedicar mais à teoria e escreveu o primeiro livro do *Principia* por volta de 1685. Um ano mais tarde o segundo volume já estava pronto e o terceiro já havia sido iniciado.

Newton se relacionava bastante com outros matemáticos através de cartas. Destaque para as escritas a Henry Oldenburg (1619 - 1677), que era secretário da *Royal Society*, nas quais Newton descreveu e explicou o Teorema Binomial Generalizado. Newton desenvolveu as expansões como parte de seu estudo sobre séries infinitas. O Teorema Binomial Generalizado foi descrito em duas cartas de 1676 de Newton a Oldenburg e foi publicado pelo matemático John Wallis (1616 - 1703) dando crédito a Newton. Segue abaixo a notação proposta por Newton, retirada de Eves[26] (2004, p. 438):

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{(m-2n)}{2n}BQ + \frac{(m-2n)}{3n}CQ + \frac{(m-3n)}{4n}DQ + \ldots$$

Em seu estudos Newton percebeu que era possível relacionar séries infinitas de modo muito semelhante ao que era trabalhado em expressões polinomiais finitas. A generalização dessa análise infinita foi confirmada quando Newton extraiu a raiz quadrada de $(1-x^2)$ pelo processo algébrico conhecido na época e, depois, verificou por interpolação o binômio $(1-x^2)^{-1}$. Isso comprovou que o Teorema Binomial para $n=-1$ apresentava o mesmo resultado. Com isso Newton percebeu que poderia trabalhar com séries infinitas e que o Teorema Binomial também seguia as mesmas leis da Álgebra. Assim, as séries infinitas já não deviam mais ser consideradas ferramentas para realizar aproximações.

A partir da abordagem de Newton sobre séries infinitas, Wallis apud Boyer e Gomide[36] descreveu que "Essas séries infinitas ou séries convergentes indicam a designação de alguma quantidade particular por uma progressão regular de quantidades, que continuamente se aproximam dela, e que se prolongadas infinitamente devem ser iguais a ela" (1996, p. 288).

Mesmo que Newton não tenha publicado o Teorema Binomial, nem apresentado uma prova definitiva, ele redigiu em 1669 e publicou exposições de sua análise infinita em *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, no ano de 1711. Nessa obra, ele diz que

> E tudo que a análise comum, isto é, a álgebra executa por meio de equações com número finito de termos, desde que possa ser feito, esse novo método sempre pode executar por meio de equações infinitas. Por isso não hesitei em dar a isso o nome de Análise também. Pois os raciocínios aqui não são menos certos que na outra; nem as equações menos exatas; embora nós mortais cujos poderes de raciocínio estão restritos a limites estreitos, não possamos nem exprimir, nem conceber todos os termos dessas equações de modo a saber exatamente delas as quantidades que queremos... Para concluir, podemos decidir com justiça que pertence à Arte Analítica, aquilo por cuja ajuda as Áreas e Comprimentos etc. das Curvas podem ser exata e geometricamente determinados. (BOYER[36], 1996, p. 288)

Em 1692, Newton foi acometido por uma doença que durou quase dois anos e implicava, de certa maneira, em um distúrbio mental. A maior parte de sua vida e produção acadêmica a partir de então foi destinada à Química, à Alquimia e à Teologia.

Já em 1696, Newton começou a trabalhar na Casa da Moeda como inspetor e em seguida como diretor da instituição. Em 1703 foi eleito presidente da *Royal Society*, cargo que ocupou até sua morte. Em 1705 recebeu o título de cavaleiro real.

Com exceção do *Principia*, todas as obras de Newton só apareceram anos após suas descobertas e, na maioria das vezes, por pressão de pessoas próximas a ele. As obras, em ordem cronológica, são:

1. *Principia* (1687)
2. *Opticks* (1704)
3. *Arithmetica universalis* (1707)
4. *Analysis per series, fluxiones e Methodus differentialis* (1711)
5. *Lectiones opticae* (1729)
6. *The method of Fluxions and Infinites Series* – traduzido do original em latim (1736)

Isaac Newton morreu aos oitenta e quatro anos de idade em 1727, em Kensington, nos arredores de Londres, após uma complicada doença. Seu corpo está enterrado na Abadia de Westminster, onde lhe foi erguido o maior dos monumentos ali existentes, onde é lembrado como o homem que através da matemática abriu as portas para a exploração do espaço. Alexandre Pope, um dos maiores poetas britânicos da história, escreveu em homenagem a Newton: "A Natureza e as leis da Natureza jaziam ocultas na noite; Deus disse 'Faça-se Newton', e a luz se fez." (EVES[26], 1996, p. 441).

4.2 O Binômio de Newton

Nesta seção apresentaremos o conceito de números binomiais e o desenvolvimento do Binômio de Newton para expoentes inteiros e positivos. Em seguida, faremos uma abordagem histórica para o Triângulo de Pascal, relacionando-o com os coeficientes binomiais e a expansão do binômio. Inicialmente, apresentaremos o conceito de fatorial para, em seguida, definirmos números binomiais.

Dado um número natural n, $n \geq 2$, o fatorial de n, representado por $n!$, é o produto dos n primeiros números naturais positivos, escritos desde n até 1, ou seja:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Convenciona-se que $0! = 1$ e $1! = 1$. A notação para fatorial foi apresentada pela primeira vez por Christian Kramp (1760 - 1826) em sua obra *Élements d'arithmétique universelle*, datada de 1808.

Definição 4.1: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$, com $k \leq n$. Chamamos de **coeficiente binomial** n sobre k, e denotamos por $\binom{n}{k}$, o número

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4.1}$$

A notação $\binom{n}{k}$ foi introduzida pelo matemático alemão Andreas Von Ettingshausen (1796 - 1878) em 1826, embora estes números, como veremos a seguir, já fossem conhecidos séculos antes na China e na Índia. O número n é usualmente chamado de numerador e o número k de denominador do coeficiente binomial.

Exemplo 4.2.1: Utilizando a equação (4.1), temos que

- $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{120}{6 \cdot 2} = 10.$

- $\binom{10}{6} = \dfrac{10!}{6!(10-6)!} = \dfrac{10!}{6!4!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!4!} = 210.$

4.2.1 Binômio de Newton com Expoentes Inteiros Positivos

Vamos iniciar o estudo do Binômio de Newton trabalhando com a expansão da potência $(x+a)^n$, sendo n um número natural. Podemos garantir este resultado utilizando a indução matemática[4], como apresentado a seguir.

Teorema 4.2: Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é válida a igualdade

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xa^{n-1} + \binom{n}{n}a^n. \quad (4.2)$$

Demonstração. Usaremos indução matemática. A igualdade é imediata para $n = 1$.

Suponhamos que a igualdade seja válida para algum $n = k$ inteiro positivo. Devemos mostrar então que ela também é válida para $n = k + 1$.

Multiplicando ambos os termos da equação (4.2) por $(x + a)$, temos

$$(x+a)^k(x+a) = \left(\binom{k}{0}x^k + \binom{k}{1}x^{k-1}a + \cdots + \binom{k}{k-1}xa^{k-1} + \binom{k}{k}a^k\right)(x+a).$$

Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
&(x+a)^{k+1} = x\left(\tbinom{k}{0}x^k + \tbinom{k}{1}x^{k-1}a + \tbinom{k}{2}x^{k-2}a^2 + \cdots + \tbinom{k}{k-1}xa^{k-1} + \tbinom{k}{k}a^k\right)\\
&+a\left(\tbinom{k}{0}x^k + \tbinom{k}{1}x^{k-1}a + \tbinom{k}{2}x^{k-2}a^2 + \cdots + \tbinom{k}{k-1}xa^{k-1} + \tbinom{k}{k}a^k\right).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&(x+a)^{k+1} = \tbinom{k}{0}x^{k+1} + \tbinom{k}{1}x^k a + \tbinom{k}{2}x^{k-1}a^2 + \cdots + \tbinom{k}{k-1}x^2a^{k-1} + \tbinom{k}{k}xa^k\\
&+\tbinom{k}{0}x^k a + \tbinom{k}{1}x^{k-1}a^2 + \tbinom{k}{2}x^{k-2}a^3 + \cdots + \tbinom{k}{k-1}xa^k + \tbinom{k}{k}a^{k+1}.
\end{aligned}$$

Podemos reorganizar os termos agrupando os monômios de mesmo grau e aplicar a Relação de Stifel:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Assim teremos

$$\begin{aligned}
(x+a)^{k+1} &= \tbinom{k}{0}x^{k+1} + \tbinom{k+1}{1}x^k a + \tbinom{k+1}{2}x^{k-1}a^2 + \tbinom{k+1}{3}x^{k-1}a^3 +\\
&\cdots + \tbinom{k+1}{k-2}xa^{k-2} + \tbinom{k+1}{k-1}xa^{k-1} + \tbinom{k+1}{k}xa^k + \tbinom{k}{k}a^{k+1}.
\end{aligned}$$

[4] O método da indução matemática é um procedimento muito utilizado para provar afirmações relacionadas aos números naturais. É um método válido de demonstração que pode aparecer em qualquer domínio da Matemática. Sugerimos o livro *Fundamentos de Álgebra*[29] caso o leitor deseje ler mais sobre o assunto.

Porém, sabemos que

$$\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$$

e

$$\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1}.$$

Logo, podemos reescrever a equação na forma

$$(x+a)^{k+1} = \tbinom{k+1}{0}x^{k+1} + \tbinom{k+1}{1}x^k a + \tbinom{k+1}{2}x^{k-1}a^2 + \tbinom{k+1}{3}x^{k-1}a^3 + \dots$$
$$\dots + \tbinom{k+1}{k-2}xa^{k-2} + \tbinom{k+1}{k-1}xa^{k-1} + \tbinom{k+1}{k}xa^k + \tbinom{k+1}{k+1}a^{k+1}.$$

Portanto, a igualdade também é válida para $n = k+1$. Logo, por indução, podemos concluir que a expansão é válida para todo n natural. □

Também podemos representar a expansão dada pelo Teorema 4.2 utilizando a notação de somatório, ou seja,

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{(n-k)}.$$

4.2.2 O Triângulo Aritmético

Existe uma correspondência entre os coeficientes da expansão do Binômio de Newton com expoentes inteiros positivos e o Triângulo de Pascal, também conhecido como Triângulo Aritmético.

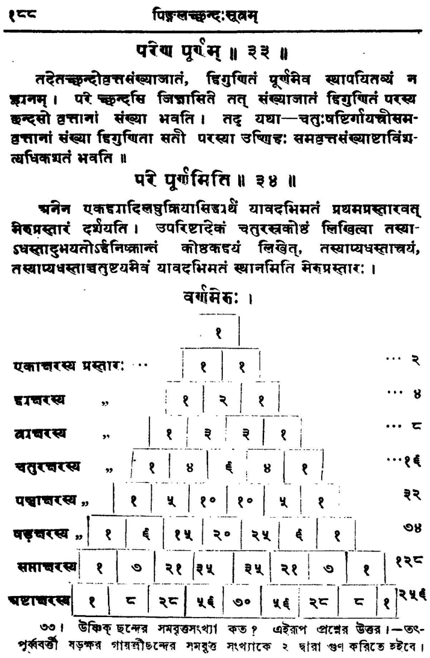
Na China, o Triângulo Aritmético era conhecido como o Triângulo de Yang Hui, na Itália como Triângulo de Tartaglia e como triângulo combinatório. Foi na França que o Triângulo recebeu a denominação de Triângulo de Pascal, dando o crédito para o homem que dedicou seus estudos para reconhecer e demonstrar várias das propriedades desse triângulo.

Os primeiros livros a citar o Triângulo Aritmético surgiram aproximadamente 2000 anos antes de Pascal, na Índia, quando o sábio Pingala (200 a.C.), ao estudar métricas em músicas, publicou sua obra *Chandra Sutra*. De acordo com o Professor José Francisco Silveira, Pingala foi capaz de perceber que a expansão das métricas, sucessivamente, de uma, duas, três, ou várias sílabas, podia ser disposta na forma de um triângulo.

> Desenhe um quadradinho; abaixo dele desenhe dois outros, de modo que juntem-se no ponto médio da base dele; abaixo desses dois, desenhe outros três e assim por diante. A seguir, escreva 1 no primeiro quadradinho e nos da segunda linha. Na terceira linha escreva 1 nos quadradinhos dos extremos, e no do meio escreva a soma dos números acima dele. Prossiga fazendo o mesmo nas demais linhas. Nessas linhas, a segunda dá as combinações com uma sílaba, a terceira dá as combinações com duas sílabas e assim por diante (PINGALA apud SILVEIRA[37], 2001).

O Triângulo de Pingala pode ser visto na Figura 4.3, extraído de uma reedição de sua obra, *Chandra Sutra*, relançada no ano de 1931.

Figura 4.3: Triângulo de Pingala



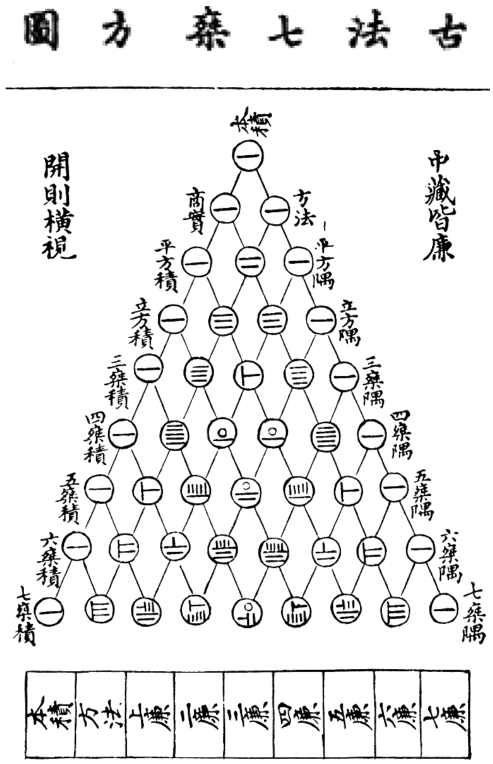
Fonte: https://archive.org/details/ChhandaSutra-Pingala (2019)

Já na China, o matemático chinês Yang Hui (1238 - 1298), estudou o Triângulo Aritmético buscando a compreensão de suas propriedades e apresentando a imagem mais conhecida em livros didáticos do país, como podemos ver na Figura 4.4.

Na Europa, mais precisamente na França, o matemático Blaise Pascal (1623 - 1662) estudou intensa e profundamente o Triângulo Aritmético e suas propriedades. A produção *Traité du Triangle Arithmétique*, como podemos ver na Figura 4.5, foi publicada 1665, três anos depois de sua morte. Pascal teve várias contribuições nas áreas de estudo da Física e da Matemática, entre elas o estudo do Triângulo Aritmético.

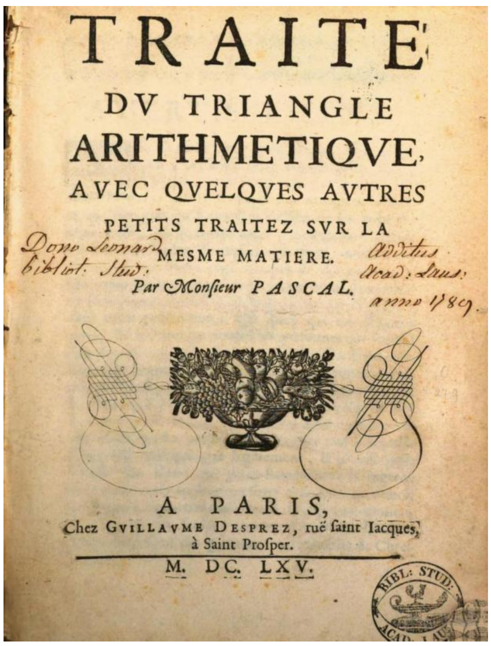
Em sua obra, ele explica diversas propriedades do triângulo. Em 1730, Abraham de Moivre (1667 - 1754) utilizou a nomenclatura Triângulo de Pascal – *Triangulum*

Figura 4.4: Triângulo Aritmético de Yang Hui



Fonte: https://pt.wikipedia.org (2019)

Figura 4.5: Tratado do Triângulo Aritmético (1665)

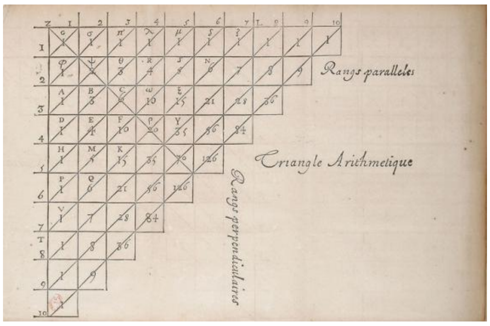


Fonte: https://archive.org (2019)

Arithmeticum Pascalianum – em sua obra *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. Desde então, a partir desta data, o Triângulo Aritmético foi renomeado para "Triângulo de Pascal".

Na Figura 4.6, temos o triângulo construído por Pascal, que consiste em uma construção numérica, seguindo uma lei de formação única e disposto em linhas e em colunas. Os resultados formam uma espécie de tabela que se prolonga em forma de triângulo. Cada termo do triângulo é denominado número binomial e está relacionado com a expansão do Binômio de Newton.

Figura 4.6: O Triângulo Aritmético de Pascal



Fonte: https://www.philomag.com (2019)

Nos livros didáticos, o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$ - Teorema (4.2) - é apresentado como Binômio de Newton. Podemos mostrar sua relação com o Triângulo de Pascal com alguns exemplos simples, desenvolvendo $(x+a)^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5.

$$(x+a)^0 = \binom{0}{0}x^0a^0$$

$$(x+a)^1 = \binom{1}{0}x^1a^0 + \binom{1}{1}x^0a^1$$

$$(x+a)^2 = \binom{2}{0}x^2a^0 + \binom{2}{1}x^1a^1 + \binom{2}{2}x^0a^2$$

$$(x+a)^3 = \binom{3}{0}x^3a^0 + \binom{3}{1}x^2a^1 + \binom{3}{2}x^1a^2 + \binom{3}{3}x^0a^3$$

$$(x+a)^4 = \binom{4}{0}x^4a^0 + \binom{4}{1}x^3a^1 + \binom{4}{2}x^2a^2 + \binom{4}{3}x^1a^3 + \binom{4}{4}x^0a^4$$

$$(x+a)^5 = \binom{5}{0}x^5a^0 + \binom{5}{1}x^4a^1 + \binom{5}{2}x^3a^2 + \binom{5}{3}x^2a^3 + \binom{5}{4}x^1a^4 + \binom{5}{5}x^0a^5$$

Desenvolvendo os termos, temos:

$$\begin{aligned}
(x+a)^0 &= 1\\
(x+a)^1 &= x+a\\
(x+a)^2 &= x^2+2xa+a^2\\
(x+a)^3 &= x^3+3x^2a+3xa^2+a^3\\
(x+a)^4 &= x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4\\
(x+a)^5 &= x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5
\end{aligned}$$

Tomando agora apenas os coeficientes, temos o Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Assim, podemos verificar que os números que formam o triângulo acima correspondem aos coeficientes binomiais $\binom{n}{k}$ para diferentes valores de n e k, que aparecem na expansão do binômio $(x+a)^n$ (Teorema 4.2).

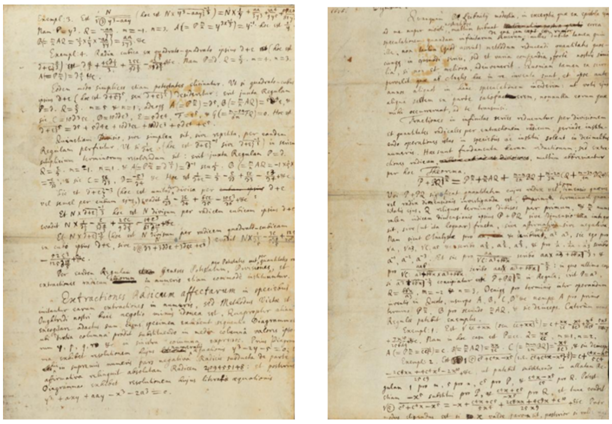
4.3 O Binômio de Newton com Expoentes Inteiros

Em 1665, Newton, Leibniz (1646 - 1716) e Oldenburg (1615 - 1677), trocaram correspondências. Em uma delas - Figura 4.7 - Newton mostrou o desenvolvimento de $(x+a)^n$ para n fracionário. Segundo Boyer e Gomide[36] "Newton não passou diretamente do Triângulo de Pascal para o teorema binomial, mas indiretamente de um problema de quadratura para o teorema binomial" (1996, p. 271). Tudo indica que o nome atribuído para o conteúdo "Binômio de Newton", trabalhado no Ensino Médio, nada mais foi que uma homenagem a Newton por ter demonstrado a expansão do binômio com expoentes racionais.

Foi em 1665, quando tinha 22 anos, que Newton deduziu a expansão em série infinita para o caso em que o expoente é racional. Ele não publicou sua descoberta, mas enviou uma carta em 1676 (chamada hoje *epistola prior*) com exemplos de como usá-la, endereçada a Henry Oldenburg.

Quando Leibniz tomou conhecimento do conteúdo da carta, perguntou como Newton

Figura 4.7: Manuscritos de Sir Isaac Newton



Fonte: https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03977/30 (2020)

havia deduzido a série binomial. Newton então escreveu uma segunda carta, *epistola posterior*, quatro meses depois, na qual explicou como havia concluído sua descoberta investigando as áreas sob as curvas $y = (1 - x^2)^{\frac{n}{2}}$ de 0 a x para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Para os casos em que n é par, os cálculos se mostravam bastante simples. Fazendo interpolações e observando regularidades, Newton pôde determinar os resultados para valores ímpares de n. Foi então que ele percebeu que poderia obter as mesmas respostas por meio de uma série infinita. Caso o leitor se sinta instigado em aprofundar o estudo sobre o Teorema Binomial Generalizado, assim como entender a teoria de séries, recomendamos a leitura da seção correspondente no livro de Cálculo - Volume 2, de James Stewart.

Para trabalhar com o Binômio com expoentes racionais ou reais é necessário dar significado aos coeficientes binomiais com um índice superior arbitrário, o que não pode ser feito usando a fórmula usual com fatoriais. No entanto, para um número arbitrário $r \in \mathbb{R}$, podemos definir os números binomiais presentes no Teorema Binomial Generalizado:

Definição 4.3: Sejam dois números $r \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$. Chamamos de **coeficiente binomial generalizado** r sobre k e indicamos por $\binom{r}{k}$ o número dado por

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)}{k!}.$$

Teorema 4.4 (Teorema Binomial Generalizado): Considere $x,a,r \in \mathbb{R}$. Se $x > a$, então:

$$(x+a)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k}a^k = x^k + rx^{r-1}a + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}a^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}a^3 + \ldots$$

Quando r é um número inteiro não negativo, os coeficientes binomiais para $k > r$ se anulam e, portanto, essa equação se reduz ao Teorema Binomial usual, em que existem no máximo $r + 1$ termos diferentes de zero. Para outros valores de r, a série possui infinitos termos diferentes de zero.

Exemplo 4.3.1: Para exemplificar o caso em que $r \in \mathbb{Q}$, consideremos $r = \dfrac{1}{2}$.

$$\sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 - \cdots$$

Exemplo 4.3.2: Agora, para exemplificar o caso para $r \in \mathbb{R}$, consideremos $r = \sqrt{2}$.

$$(x+1)^{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}x + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)x^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - 1\right)x^3 + \frac{1}{12}(13 - 9\sqrt{2})x^4 + \cdots .$$

A proposta que Newton apresentava em suas cartas relacionava o estudo de séries binomiais (séries de Maclaurin) e as áreas sob curvas de funções, o que praticamente inviabiliza seu ensino na Educação Básica do país, pois envolvem um conteúdo que só é ensinado em cursos superiores, exigindo uma maturidade e um conhecimento mais amplo da Matemática.

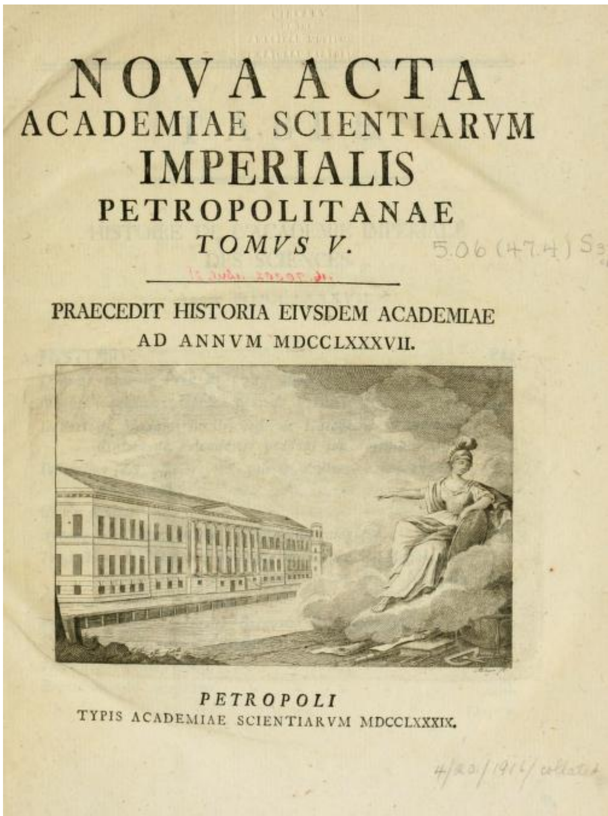
Contudo, encontramos uma demonstração da expansão binomial apresentada por Leonhard Euler em 1787 e publicada dois anos depois (veja as Figuras 4.8 e 4.9) puramente algébrica e que pode ser ensinada a alunos do Ensino Médio. A demonstração desse resultado não atende de imediato o propósito desse trabalho e pode ser encontrada em Leachenski et al.[38], assim como a demonstração e a tradução do artigo original de Euler. Vale ressaltar que a leitura de Leachenski et al.[38] serviu como um dos motivadores da atividade que será desenvolvida nesse trabalho e que os autores merecem destaque pela tradução na íntegra do artigo original em latim.

Em seu artigo, Euler afirma que independente da natureza do expoente n e com $|x| < 1$, a potência $(1 + x)^n$ sempre poderá ser expressa como uma soma infinita na forma:

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots \tag{4.3}$$

Em que A, B, C, D, $\ldots$ são coeficientes que seguem o mesmo desenvolvimento para $n \in \mathbb{N}$, já apresentado no Teorema (4.2). Sendo assim, inicialmente iremos apresentar o exemplo em que $n \in \mathbb{Z}$, calculando $(1 + x)^{-2}$, seguindo a proposta de Euler.

Figura 4.8: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1789)



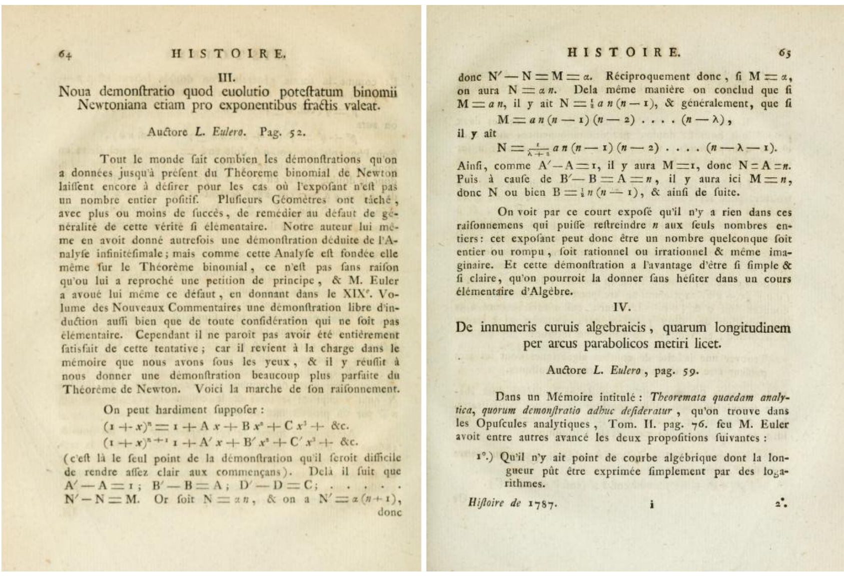
NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS V.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXVII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXIX.

Fonte: https://archive.org/details/novaactaacademia05impe (2019)

Figura 4.9: Nova Demonstração do Binômio por Euler



64 HISTOIRE.

III.

Noua demonſtratio quod euolutio poteſtatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat.

Auctore *L. Eulero.* Pag. 52.

Tout le monde ſait combien les démonſtrations qu'on a données jusqu'à préſent du Théoreme binomial de Newton laiſſent encore à déſirer pour les cas où l'expoſant n'eſt pas un nombre entier poſitif. Pluſieurs Géomètres ont tâché, avec plus ou moins de ſuccès, de remédier au défaut de généralité de cette vérité ſi élementaire. Notre auteur lui même en avoit donné autrefois une démonſtration déduite de l'Analyſe infinitéſimale; mais comme cette Analyſe eſt fondée elle même ſur le Théorème binomial, ce n'eſt pas ſans raiſon qu'ou lui a reproché une petition de principe, & M. Euler a avoué lui même ce défaut, en donnant dans le XIX^e. Volume des Nouveaux Commentaires une démonſtration libre d'induction auſſi bien que de toute conſidération qui ne ſoit pas élementaire. Cependant il ne paroit pas avoir été entièrement ſatisfait de cette tentative; car il revient à la charge dans le mémoire que nous avons ſous les yeux, & il y réuſſit à nous donner une démonſtration beaucoup plus parfaite du Théorème de Newton. Voici la marche de ſon raiſonnement.

On peut hardiment ſuppoſer:

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c.$$
$$(1+x)^{n+1}\ 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \&c.$$

(c'eſt là le ſeul point de la démonſtration qu'il ſeroit difficile de rendre aſſez clair aux commençans). Delà il ſuit que $A'-A=1$; $B'-B=A$; $D'-D=C$; . . . . . $N'-N=M$. Or ſoit $N=\alpha n$, & on a $N'=\alpha(n+1)$, donc

HISTOIRE. 65

donc $N'-N=M=\alpha$. Réciproquement donc, ſi $M=\alpha$, on aura $N=\alpha n$. Dela même manière on conclud que ſi $M=\alpha n$, il y aît $N=\frac{1}{2}\alpha n(n-1)$, & généralement, que ſi

$$M=\alpha n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\lambda),$$

il y aît

$$N=\frac{1}{\lambda+2}\alpha n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-\lambda-1).$$

Ainſi, comme $A'-A=1$, il y aura $M=1$, donc $N=A=n$. Puis à cauſe de $B'-B=A=n$, il y aura ici $M=n$, donc N ou bien $B=\frac{1}{2}n(n-1)$, & ainſi de ſuite.

On voit par ce court expoſé qu'il n'y a rien dans ces raiſonnemens qui puiſſe reſtreindre n aux ſeuls nombres entiers: cet expoſant peut donc être un nombre quelconque ſoit entier ou rompu, ſoit rationnel ou irrationnel & même imaginaire. Et cette démonſtration a l'avantage d'être ſi ſimple & ſi claire, qu'on pourroit la donner ſans héſiter dans un cours élémentaire d'Algèbre.

IV.

De innumeris curuis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet.

Auctore *L. Eulero*, pag. 59.

Dans un Mémoire intitulé: *Theoremata quaedam analytica, quorum demonſtratio adhuc deſideratur*, qu'on trouve dans les Opuſcules analytiques, Tom. II. pag. 76. feu M. Euler avoit entre autres avancé les deux propoſitions ſuivantes:

1°.) Qu'il n'y ait point de courbe algébrique dont la longueur pût être exprimée ſimplement par des logarithmes.

Hiſtoire de 1787. i 2°.

Fonte: https://archive.org/details/novaactaacademia05impe (2019)

Exemplo 4.3.3: Aplicando a propriedade dos expoentes negativos para números reais, realize a expansão do binômio $(1+x)^{-2}$:

$$(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+2x+x^2}. \tag{4.4}$$

A proposta apresentada por Euler consiste em reescrever o membro da direita da igualdade (4.4) como uma soma de monômios. Para isso, definimos

$$\alpha = 1 + 2x + x^2.$$

Agora, colocamos o termo de menor grau de α (no caso, 1), somado a outro termo fracionário com o denominador α, e igualamos a fração inicial. Em outras palavras, devemos determinar o valor de β_0, representado abaixo, que faz valer a igualdade:

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{\beta_0}{\alpha} \implies \beta_0 = 1 - \alpha \implies \beta_0 = -2x - x^2.$$

Assim, podemos reescrever a equação como

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{-2x - x^2}{\alpha}.$$

O procedimento se repete, tomando o termo de menor grau do numerador (no caso, $-2x$) somado com outro termo fracionário, resultando na mesma fração inicial, ou seja

$$\frac{-2x - x^2}{\alpha} = -2x + \frac{\beta_1}{\alpha}, \implies -2x - x^2 = -2x\alpha + \beta_1.$$

Como $\alpha = 1 + 2x + x^2$, então:

$$-2x - x^2 = -2x - 4x^2 - 2x^3 + \beta_1.$$

Portanto, $\beta_1 = 3x^2 + 2x^3$. Logo, temos que

$$(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\alpha} = 1 - 2x + \frac{3x^2 + 2x^3}{\alpha}.$$

Novamente, o processo se repete, agora isolando o termo $3x^2$. Precisamos então determinar

β_2. Temos

$$\frac{3x^2+2x^3}{\alpha} = 3x^2 + \frac{\beta_2}{\alpha} \implies 3x^2+2x^3 = 3x^2\alpha + \beta_2,$$

$$3x^2+2x^3 = 3x^2(1+2x+x^2) + \beta_2.$$

Logo $\beta_2 = -4x^3 - 3x^4$, então

$$(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\alpha} = 1 - 2x + 3x^2 + \frac{-4x^3-3x^4}{\alpha}.$$

Isolando agora o termo $-4x^3$ e repetindo o processo, obtemos:

$$\frac{-4x^3-3x^4}{\alpha} = -4x^3 + \frac{\beta_3}{\alpha} \implies \beta_3 = 5x^4 + 4x^5.$$

Consequentemente,

$$(1+x)^{-2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{\alpha} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \frac{5x^4+4x^5}{\alpha}.$$

Dando continuidade ao processo, obtemos uma soma com infinitos termos. Observando os coeficientes da expansão, podemos perceber que eles podem ser relacionados com os coeficientes binomiais quando o expoente n é um número natural, apresentado no Teorema 4.2, ou seja:

$$(a+x)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 \ldots.$$

Fazendo $a = 1$ e $n = -2$, temos

$$(1+x)^{-2} = 1 + \frac{(-2)}{1!}x + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}x + \frac{(-2)(-2-1)(-2-2)}{3!}x^3 \ldots,$$

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + \ldots$$

Assim, mesmo com o expoente inteiro e negativo, o comportamento dos coeficientes no desenvolvimento do binômio se comportam da mesma maneira de quando o expoente é um número natural.

A aplicação do exemplo escolhido, com o intuito de simplificar a notação e os cálculos, ainda é um caso do binômio $(a+b)^n$, pois:

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n.$$

Considerando a fração $\frac{b}{a} = x$, temos que

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n(1+x)^n.$$

Logo, todo binômio da forma $(a+b)^n$ pode ser escrito como o produto de $(1+x)^n$ por a^n.

Exemplo 4.3.4: Desenvolveremos o binômio $(1+x)^{-4}$:

$$(1+x)^{-4} = \frac{1}{(1+x)^4} = \frac{1}{1+4x+6x^2+4x^3+x^4}. \tag{4.5}$$

Sabemos que a proposta apresentada por Euler consiste em reescrever o membro da direita da igualdade (4.5) como uma soma de monômios. Para isso, definimos

$$\alpha = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$

Somando o termo de menor grau de α (no caso, 1), e a fração $\frac{\beta_0}{\alpha}$, iremos igualar à fração inicial para determinar o valor de β_0, que faz valer a igualdade:

$$\frac{1}{\alpha} = 1+\frac{\beta_0}{\alpha} \implies \beta_0 = 1-\alpha.$$

Assim, podemos reescrever a equação como

$$\frac{1}{\alpha} = 1+\frac{-4x-6x^2-4x^3-x^4}{\alpha}.$$

O procedimento se repete, tomando o termo de menor grau do numerador (no caso, $-4x$) somado com outro termo fracionário, resultando na mesma fração inicial, ou seja

$$\frac{-4x-6x^2-4x^3-x^4}{\alpha} = -4x+\frac{\beta_1}{\alpha}, \implies -4x-6x^2-4x^3-x^4 = -4x\alpha+\beta_1.$$

Como $\alpha = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$, então:

$$-4x-6x^2-4x^3-x^4 = -4x-16x^2-24x^3-16x^4-4x^5+\beta_1.$$

Portanto, $\beta_1 = 10x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 4x^5$. Logo, temos que

$$(1+x)^{-4} = \frac{1}{(1+x)^4} = \frac{1}{\alpha} = 1 - 4x + \frac{10x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 4x^5}{\alpha}.$$

Novamente, o processo se repete, agora isolando o termo $10x^2$. Precisamos determinar β_2. Temos

$$\frac{10x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 4x^5}{\alpha} = 10x^2 + \frac{\beta_2}{\alpha} \implies 10x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 4x^5 = 10x^2\alpha + \beta_2.$$

Como $\beta_2 = -20x^3 - 45x^4 - 36x^5 - 10x^6$, então

$$(1+x)^{-4} = \frac{1}{(1+x)^4} = \frac{1}{\alpha} = 1 - 4x + 10x^2 + \frac{-20x^3 - 45x^4 - 36x^5 - 10x^6}{\alpha}.$$

Isolando agora o termo $-20x^3$ e repetindo o processo, obtemos:

$$\frac{-20x^3 - 45x^4 - 36x^5 - 10x^6}{\alpha} = -20x^3 + \frac{\beta_3}{\alpha} \implies \beta_3 = 35x^4 + 84x^5 + 70x^6 + 20x^7.$$

Consequentemente,

$$(1+x)^{-4} = \frac{1}{(1+x)^4} = \frac{1}{\alpha} = 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \frac{35x^4 + 84x^5 + 70x^6 + 20x^7}{\alpha}.$$

É claro que podemos continuar o processo indefinidamente e assim determinar os coeficientes da expansão proposta. Porém, o desenvolvimento apresentado por Euler mostra que o Binômio de Newton será válido para qualquer valor $n \in \mathbb{Z}$, que é a proposta inicial deste capítulo. De uma forma geral, temos que, para esses valores de n:

$$(x+1)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}x^4 + \dots \quad (4.6)$$

Comparando o resultado de (4.5) com a Equação (4.6), temos:

$$(x+1)^{-4} = 1 + (-4)x + \frac{(-4)[(-4)-1]}{2}x^2 + \frac{(-4)[(-4)-1][(-4)-2]}{6}x^3 + \frac{(-4)[(-4)-1][(-4)-2][(-4)-3]}{24}x^4 + \dots,$$

ou seja,

$$(x+1)^{-4} = 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 + \dots$$

que novamente verifica a expansão do binômio para expoentes negativos.

Aqui é importante ressaltar que a técnica de Euler não se restringe aos expoentes inteiros. Na verdade o processo também é válido para expoentes racionais (consultar [38, p. 47]). Porém, nosso foco são as expansões para os expoentes inteiros. Já vimos que a expressão (4.6) é válida para os expoentes inteiros negativos e podemos aplicá-la também para expoentes naturais.

Exemplo 4.3.5: Desenvolva o binômio $(x+1)^5$ aplicando a expressão (4.6).

Temos que

$$(x+1)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}x^4+\ldots.$$

Tomando $n=5$, temos:

$$\begin{aligned}(x+1)^5 = 1+5x+\frac{5(5-1)}{2}x^2+\frac{5(5-1)(5-2)}{6}x^3+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{24}x^4 \\ +\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{120}x^5.\end{aligned}$$

Logo $(x+1)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$.

Com isso, apresentamos uma alternativa puramente algébrica para o desenvolvimento do Binômio de Newton que pode ser aplicada no Ensino Médio. Em uma das atividades propostas nesse trabalho podemos envolver tanto a demonstração da expansão em sua versão usual, que aborda números binomiais, quanto a proposta de Euler, direcionada para um fechamento de conteúdo, abordando assuntos que extrapolam a sala de aula e ampliam a capacidade de assimilação dos alunos. Podemos apresentar como vantagens dessa abordagem o fato de obtermos expansões para os expoentes inteiros e permitir a ampliação do estudo para expoentes reais.

5 Percurso Metodológico 1

Neste capítulo apresentaremos a proposta de atividade relacionada ao estudo dos mínimos e máximos de funções aplicando a técnica desenvolvida por Pierre de Fermat, nossas expectativas iniciais, a aplicação da atividade e os resultados obtidos. O capítulo se encerra com as principais análises e conclusões.

5.1 Máximos e Mínimos - Uma Abordagem Sob o Olhar de Pierre de Fermat

A proposta de atividades envolvendo o estudo dos máximos e mínimos com a abordagem dada por Pierre de Fermat, apresentada no Capítulo 3, constitui inicialmente na aplicação de um estudo dirigido, para alunos da 3ª série no Ensino Médio, fazendo uso da Metodologia Ativa - Sala de Aula Invertida - e do GeoGebra.

Com essa atividade pretendemos fazer com que os alunos construam e reforcem a definição dos máximos e mínimos de funções estudadas no Ensino Médio para, em seguida, trabalharem com as aplicações juntamente com o reconhecimento e a compreensão de conceitos que serão abordados em sala de aula. Inicialmente as atividades abordam problemas que envolvem máximos e mínimos de funções do 2º grau. Na sequência, este conhecimento será ampliado para outros tipos de funções polinomiais e até mesmo para o estudo das funções trigonométricas.

O conteúdo será consolidado utilizando como ferramenta a História da Matemática, apresentando quem foi Pierre de Fermat e a interpretação geométrica proposta por ele, introduzindo assim uma ferramenta matemática inicial e bastante robusta para a fundamentação do cálculo de derivadas. De acordo com a BNCC,

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem

> construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade (BRASIL[16], 2017, p. 471).

A atividade se iniciou com os alunos recebendo um material prévio (estudo dirigido), elaborado pelo professor, contendo conceitos, problemas e ferramentas que foram utilizadas durante o desenvolvimento da aula. Entre os itens desse estudo dirigido estão construções de gráficos utilizando *software* didático, problemas de aplicação para máximos e mínimos - estudo do vértice de uma parábola - construção dos gráficos e análise de valores máximos e mínimos em funções com grau maior que 2, exercícios de aplicação e outras atividades para reconhecimento e fixação do conteúdo.

Durante a atividade proposta neste trabalho, foi possível realizar a construção e a interpretação geométrica da reta tangente (e sua inclinação) ao gráfico de uma função. Com o GeoGebra, os alunos foram capazes de construir gráficos e estudar os coeficientes angulares em qualquer ponto do gráfico. Durante a atividade, seguimos os seguintes passos:

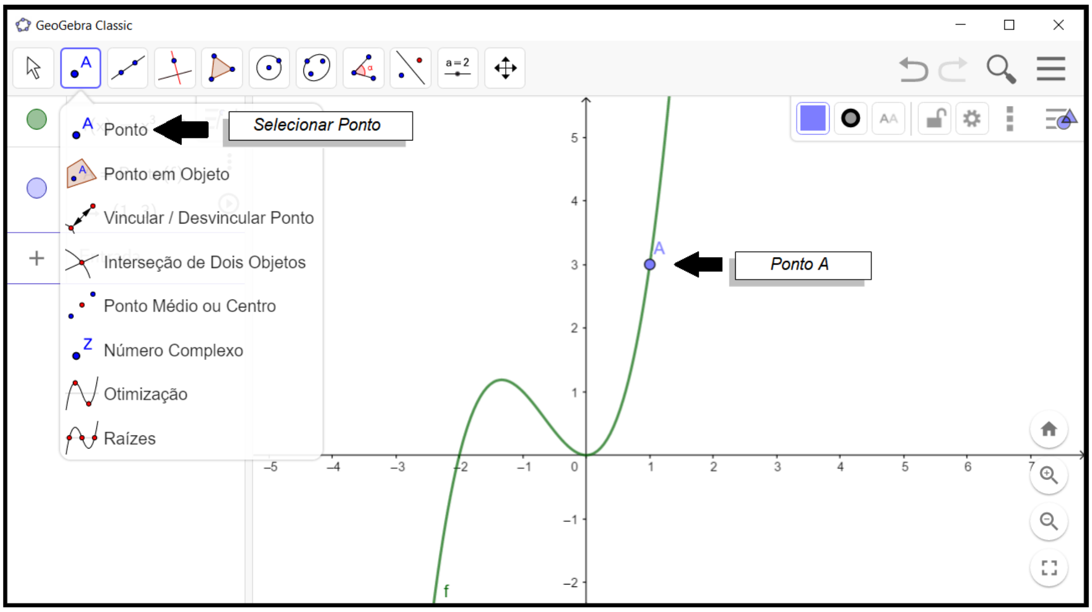
1. Para deixar a visualização dos valores durante a construção, vamos exibir a malha quadriculada. Para isso, os alunos deverão clicar no botão de exibir ou esconder a malha, como pode ser visto na Figura 5.1.

Figura 5.1: Exibir ou Esconder malha

Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

2. Após inserir a função e gerar seu gráfico, os alunos deverão marcar um ponto A qualquer sobre o gráfico, como na Figura 5.2.

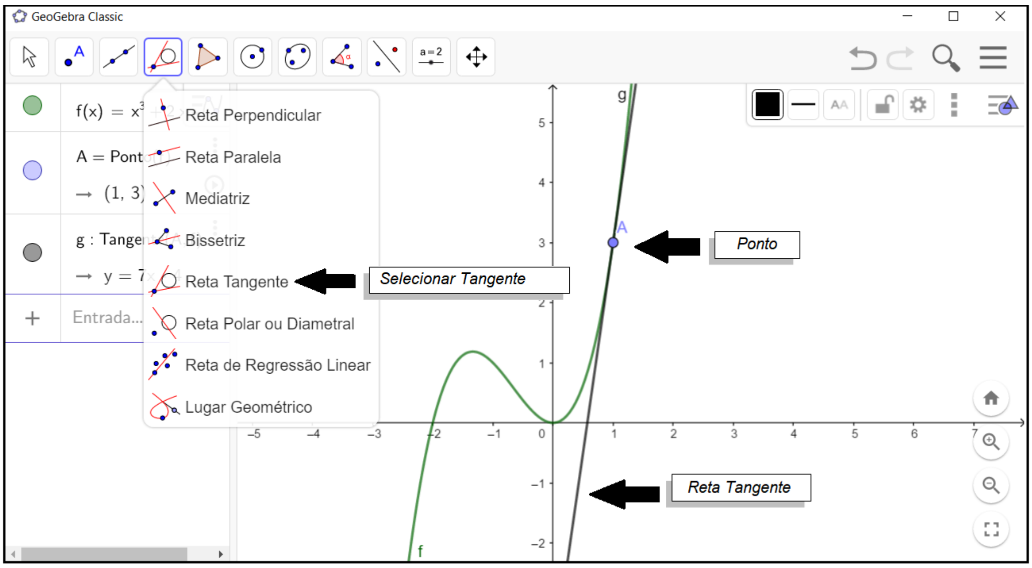
Figura 5.2: Inclusão do Ponto A



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

3. A construção da reta tangente ao gráfico no ponto A ocorre acionando, na barra de ferramentas, a opção *Reta Tangente* e, em seguida, clicando sobre o ponto A e sobre o gráfico, de acordo com a Figura 5.3.

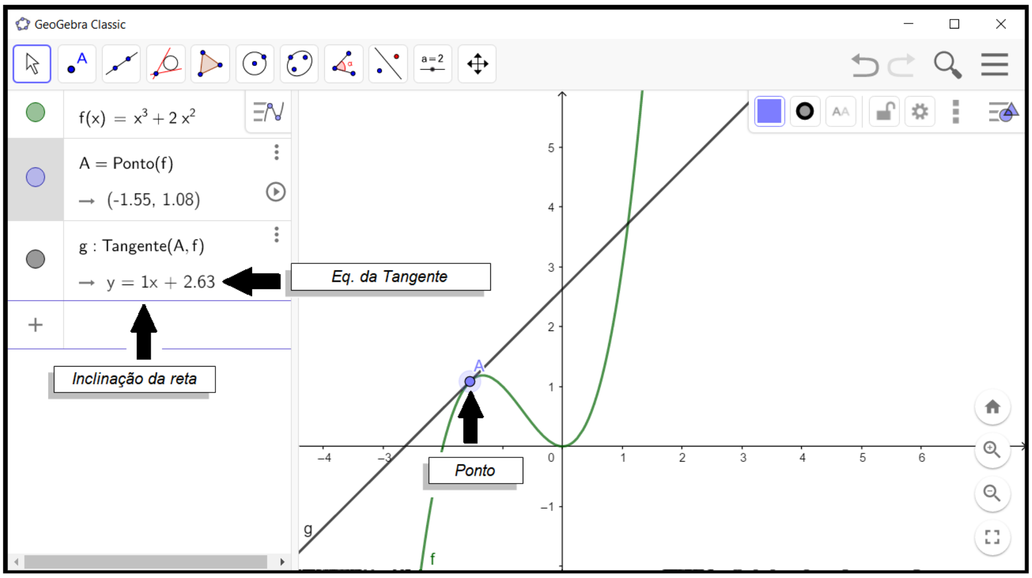
Figura 5.3: Reta Tangente ao Ponto A



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

4. Escolhendo o botão *Mover* na barra de ferramentas do GeoGebra, é possível movimentar o ponto A sobre o gráfico. Com isso, podemos notar que a inclinação da reta varia de acordo com o deslocamento do ponto A, como na Figura 5.4.

Figura 5.4: Equação da Reta Tangente



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

Com o estudo dirigido realizado, e em posse dos gráficos plotados, os alunos foram instigados a descobrir, por meio de fórmulas ou apenas por investigações, quais são os candidatos a pontos de máximos e de mínimos das funções exploradas na atividade. Tendo por base nossa experiência profissional, essa não parece ser uma tarefa tão complexa em se tratando das funções trigonométricas básicas e as quadráticas, uma vez que a maioria dos alunos da 2ª série do Ensino Médio já conheciam ferramentas matemáticas para realizar tal atividade. As principais dúvidas surgiram quando o gráfico não é usual (função do 3º grau, por exemplo). Neste sentido, buscamos trazer elementos visuais (geométricos) e algébricos que suscitaram respostas ao questionamento: Como determinar pontos de máximo ou mínimo em funções onde não são conhecidas fórmulas, ou em situações em que o gráfico não pode ser construído?

Nesse momento o professor iniciou a parte expositiva da aula, apresentando aos alunos Pierre de Fermat, sua vida e obra, suas contribuições para a ciência e sua proposta para determinar pontos de máximos e de mínimos locais em funções contínuas.

Este cálculo permitiu a interpretação inicial do traço de retas secantes que cortam o gráfico da função. Vale a ressalva que este procedimento proposto por Fermat ocorreu quase 60 anos antes da formalização do Cálculo Infinitesimal desenvolvido por Isaac Newton, e que, ao realizar o processo proposto por ele, temos o início de uma interpretação do cálculo da derivada primeira de uma função feita de maneira puramente intuitiva e com uma interpretação puramente geométrica, além de ser de fácil compreensão por parte dos alunos.

O estudo de situações que se trabalha no Ensino Médio é praticamente todo relacionado com a função quadrática e o estudo do vértice da parábola. Essas situações-problema são apresentadas como cálculo da área, valor da receita, medida da temperatura para trazer a realidade para mais perto dos alunos que, ao ingressar no Ensino Superior se deparam com situações bastante similares e que poderiam ser abordadas para diminuir a distância entre a Matemática que se ensina na escola e a Matemática que se exige em um curso de graduação, principalmente quando se trabalha nas disciplinas de Cálculo e de Geometria Analítica.

A sequência de atividades foi aplicada em uma turma da 3ª série do Ensino Médio. Com ela, pretendíamos analisar os resultados obtidos durante a experimentação e após a aprendizagem e, com isso concluirmos que o ensino de máximos e mínimos pode ser ampliado para funções de graus diferentes, com aplicações práticas, trabalhando com conceitos básicos envolvendo retas tangentes e desenvolvendo o estudo sob o ponto de vista de Pierre de Fermat, para com isso realizar melhorias nas sequências didáticas e aprofundar ainda mais o conhecimento do assunto pelos alunos e por que não, professores. Uma das principais contribuições que pretendíamos nesta sequência era mostrar que o GeoGebra pode ser fundamental para criar hipóteses e conjecturas. Com o material dinâmico aplicado à Matemática poderíamos esclarecer dúvidas, ampliar a discussão referente as estratégias de resolução e fornecer dados relevantes sobre a situação-problema.

A abordagem de Fermat sobre o estudo dos máximos e mínimos de funções pode se mostrar como uma ferramenta muito importante na resolução de problemas algébricos e geométricos, pois é uma estratégia de fácil entendimento tanto para os alunos como para os professores do Ensino Médio. Dessa forma, este trabalho pode contribuir de maneira muito significativa para o ensino da Matemática na Educação Básica, uma vez que envolve um conteúdo muito pouco explorado nesse nível de ensino. Assim, esperamos que as questões apresentadas aqui sobre máximos e mínimos de funções, utilizando Metodologias Ativas e ferramentas computacionais, sirvam para desenvolver a investigação, a criação e a solução de outras situações envolvendo esses conceitos, além de aprofundar os conhecimentos dos estudantes do Ensino Médio através da História da Matemática no que podemos entender como o nascimento do Cálculo Diferencial e Integral.

5.2 Atividade: Máximos e Mínimos de Fermat

Recursos Utilizados			
Sala Invertida	Estudo Dirigido	História da Matemática	GeoGebra

- **Máximo de uma função:** Considere uma função $f\colon A \to B$. Dizemos que f possui *máximo global* em $M \in A$ se $f(x) \leq f(M)$ para todo $x \in A$.
  - **Máximo local:** Dizemos que f admite um *máximo local* em $a \in A$ se existe um intervalo aberto (c,d) que contém a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todos os valores nesse intervalo.
- **Mínimo de uma função:** Considere uma função $f\colon A \to B$. Dizemos que f possui *mínimo global* em $m \in A$ se $f(m) \leq f(x)$ para todo $x \in A$.
  - **Mínimo local:** Dizemos que f admite um *mínimo local* em $b \in A$ se existe um intervalo aberto (c,d) que contém b tal que $f(b) \leq f(x)$ para todos os valores nesse intervalo.
- **Reta tangente a uma curva:** Fixamos um ponto A no gráfico de uma função f, e escolhemos um ponto B diferente. Fazendo B se aproximar de A, "caminhando" sobre a curva, a reta AB tende a uma posição-limite, que será a reta t. Nesse caso, t é chamada reta tangente de f em A, desde que ela não seja vertical.

1. Utilizando régua, construa os gráficos das seguintes funções reais:

    (a) $f(x) = x^2 - 8x + 9$

    (b) $g(x) = x^2 + 2x$, com domínio definido em [-1,2]

    (c) $h(x) = -2x^2 - 4x + 3$

    (d) $q(x) = -x^2 - 4$, com domínio definido em [-2,1]

2. Determine, de acordo com as definições acima, os valores máximos e mínimos (caso existam) das funções acima.

3. Utilizando o GeoGebra, construa o gráfico das seguintes funções reais:

    (a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

    (b) $g(x) = -x^4 + 2x^3 - x + 2$

    (c) $h(x) = \cos(2x)$

    (d) $q(x) = 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 26x^2 - 28x + 48$

        i. Determine, utilizando o *software*, todos os valores máximos e mínimos (caso existam), das funções acima.

        ii. Determine quais são os máximos e mínimos locais e quais são os máximos e mínimos globais das funções acima (caso existam).

4. Investigue as seguintes situações:

    (a) É possível que uma função possua vários/infinitos pontos de máximo e mínimo em seu domínio? Dê exemplos.

    (b) É possível que uma função não possua pontos de máximos e de mínimos em seu domínio? Dê exemplos.

5. Considere a função $f(x) = -x^2 + 8x - 7$.

    (a) Usando o GeoGebra, construa o gráfico da função.

    (b) Com auxílio de uma calculadora, complete a tabela:

x	3,75	3,80	3,85	3,90	3,95	4,00	4,05	4,10	4,15	4,20
$f(x)$										

(c) Considerando o gráfico da função anterior, selecione um ponto $A = (x, f(x))$ no gráfico e construa a reta tangente ao gráfico que passa por A.

(d) Deslocando o ponto A pelo gráfico da função e observando a equação da reta tangente, o que podemos concluir em relação ao coeficiente angular da reta?

6. Utilizando o GeoGebra, construa o gráfico da função $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x + 2$ e identifique o que se pede:

   (a) A função possui valores máximos ou mínimos locais? Registre-os.

   (b) Qual o valor máximo absoluto da função?

   (c) Qual o valor mínimo da função?

   (d) O que ocorre com as imagens para valores de x próximos desses pontos?

   (e) Podemos igualar essas imagens, uma vez que elas são valores muito próximos? Seria razoável propor esta igualdade?

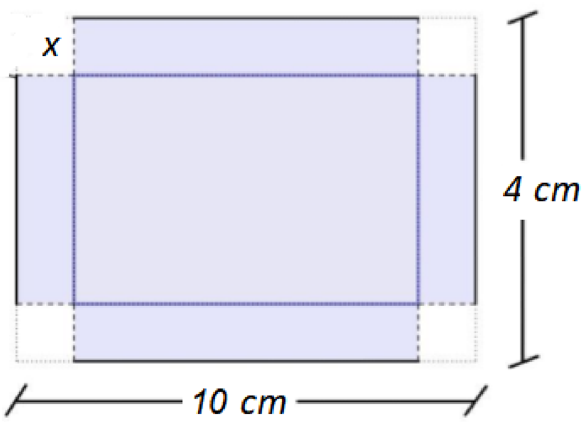
7. Considerando o gráfico da função anterior, selecione novamente um ponto $A = (x, f(x))$ no gráfico de f e construa a reta tangente ao gráfico que passa por A.

(a) Deslocando o ponto A pelo gráfico da função e observando a equação da reta tangente, o que podemos concluir em relação ao coeficiente angular da reta?

(b) O que podemos concluir quando a reta é tangente ao gráfico da função em seus pontos de máximos e de mínimos?

8. Com um pedaço retangular de papelão se quer construir uma caixa de máximo volume possível cortando um quadrado em cada canto, conforme indica a Figura 5.5. As dimensões da folha são 10 cm e 4 cm.

Figura 5.5: Caixa



Fonte: Elaborado pelos autores - (2020)

(a) Determine a função que relaciona o volume da caixa em função do valor de x.

(b) Qual o domínio dessa função?

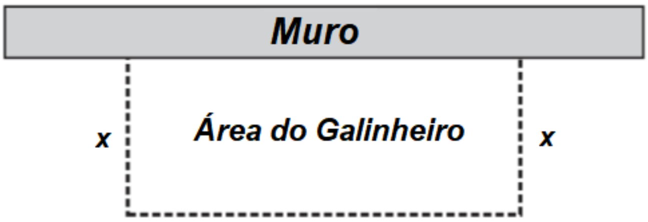
(c) Construa o gráfico que descreve essa situação no GeoGebra.

(d) Qual o ponto máximo dessa função?

(e) Qual a interpretação dos valores encontrados para a abscissa e para a ordenada nesse ponto?

9. Um fazendeiro precisa construir um galinheiro de forma retangular utilizando-se de uma tela com 16 metros de comprimento, aproveitando um muro de sua fazenda como o fundo do galinheiro, conforme a Figura 5.6:

Figura 5.6: Galinheiro



Fonte: Elaborado pelos Autores (2020)

(a) Determine a área ocupada pelo galinheiro em função de x.

(b) Com o auxílio de uma calculadora, complete a tabela abaixo, determinando o valor da área ocupada pelo galinheiro (A) para valores em que o comprimento do terreno (C) é igual a:

Comprimento (C)	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4
Área (A)								

(c) Determine as dimensões do terreno para que sua área seja máxima.

(d) Construa o gráfico da função área com auxílio do GeoGebra.

(e) Verifique os valores encontrados no item (b).

10. Considere uma função com máximo ocorrendo no ponto $(x,f(x))$. Considere também um valor e, arbitrário, de forma que $f(x){\approx}f(x+e)$. O que podemos concluir com relação às imagens obtidas?

11. Fazendo $f(x+e) \approx f(x)$, determine os pontos de máximos e mínimos das funções a seguir. No item (a), considere $a \neq 0$.

    (a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ (b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 1$ (c) $f(x) = \text{sen}(x)$

    Observação: Para o item (c) você precisará do GeoGebra para saber quanto valem $\frac{\text{sen}(e)}{e}$ e $\frac{\cos(e)-1}{e}$ quando e está perto de 0.

6 Análise da Atividade 1

A atividade de Mínimos e Máximos sob o olhar de Pierre de Fermat foi desenvolvida na segunda semana de março de 2020, em uma turma da 3ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Belo Horizonte. O contexto da atividade se deu logo antes de se iniciar a parte revisional para o ENEM, envolvendo funções quadráticas. Como o vértice da parábola foi estudado na 1ª série e seria revisado na 3ª série, os alunos tinham o domínio do uso de fórmulas para resolver situações-problemas envolvendo mínimos e máximos, construir gráficos de funções quadráticas e aplicar as fórmulas que determinavam a abscissa e a ordenada do vértice da parábola. Além disso, durante a 2ª série, os alunos aprenderam funções trigonométricas e, com isso, a desenvolver os gráficos de funções trigonométricas, a analisar a periodicidade e a amplitude destes gráficos. Com isso, a sala (com média de 30 alunos), já possuía certa maturidade para trabalhar e desenvolver a atividade envolvendo o estudo de mínimos e máximos em funções de diversos tipos de graus, e também para investigar o comportamento dos gráficos e suas imagens nos pontos próximos dos máximos e mínimos globais e locais.

Inicialmente, o estudo dirigido foi distribuído para todos os alunos, que trabalhariam e registariam seus resultados individualmente, mas que poderiam compartilhar informações e buscar soluções para as perguntas propostas coletivamente. O uso de calculadoras era permitido, assim como a pesquisa em qualquer outra fonte de consulta. O tempo definido para a aplicação da atividade foi de quatro aulas com 50 minutos cada, sendo uma aula por dia, de segunda a quinta, todas ocorrendo na parte da manhã. Todos os alunos foram orientados a trazer régua para construções no papel e sabiam trabalhar com o *software* GeoGebra, pois a proposta pedagógica da equipe de professores de matemática na escola é fazer com o que os alunos tenham contato com as ferramentas computacionais desde do início do Ensino Fundamental na escola e possam, assim, desenvolver habilidades e competências definidas pela Base Nacional Curricular do Ensino Médio.

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL[16], 2017, p. 266).

6.1 Aplicando a Atividade – Primeiras Impressões e Reações

Após as orientações preliminares, a atividade se iniciou e os alunos construíram os gráficos propostos no item (1) sem maiores problemas, pois se tratavam de funções polinomiais do 2º grau e, mesmo com intervalos definidos em seu domínio, não houve dúvidas com relação ao item proposto. Após isso, foram definidos os conceitos de mínimo e máximo de uma função e, com isso, os alunos determinaram tais pontos nos gráficos construídos. Alguns alunos perguntaram se havia a possibilidade de uma função possuir pontos de mínimos e/ou de máximos em seu gráfico, fato que foi comprovado com os gráficos construídos que possuíam restrição em seu domínio. Com isso, os alunos começaram a se perguntar se era realmente necessária essa restrição para ocorrer os dois pontos. Um aluno respondeu que não e considerou a função trigonométrica $f(x) = \text{sen}(x)$, que possuía vários pontos de máximos e mínimos. O professor definiu ainda os conceitos de máximos e mínimos locais para uma função. Em seguida, os alunos foram orientados a seguir a atividade e construir os gráficos das funções de grau maior que 2 no GeoGebra, para, assim reconhecer outras funções que possuíam máximos e mínimos locais e globais e diferenciá-los em seu gráfico.

As construções ocorreram sem maiores dificuldades, pois os alunos estavam acostumados com a linguagem de programação do GeoGebra, porém, vale destacar a surpresa com cada gráfico gerado, pois todos eram diferentes das funções usuais e possuíam características próprias, como quantidade de raízes e valores de máximos e mínimos em diversos pontos dos gráficos plotados.

Ainda utilizando o GeoGebra, foi solicitado aos alunos para encontrassem os pontos de máximos e mínimos das funções. O próprio *software* determina as coordenadas destes pontos, o que facilitou a atividade para os alunos, que se dedicaram mais ao item posterior, que pedia para os alunos definissem quais destes pontos eram máximos e mínimos locais e que diferenciassem estes pontos dos máximos e mínimos globais. Após algumas análises, os alunos conseguiram, com o suporte do GeoGebra, diferenciar os pontos propostos. Uma aluna perguntou então o que impedia de qualquer ponto no gráfico de uma função ser um máximo ou um mínimo local, uma vez que o domínio de uma função poderia ser alterado para realizar o estudo de um intervalo do gráfico. A resposta se deu de forma natural entre os alunos, quando perceberam que sem a restrição, a função deveria ter uma concavidade em seu gráfico para possuir o máximo/mínimo local. Assim, os alunos foram capazes de relacionar a quantidade destes pontos com a quantidade de concavidades que o gráfico poderia apresentar. Logo, quando perguntados se era possível uma função apresentar vários ou infinitos pontos de máximos e mínimos, rapidamente veio o exemplo das funções trigonométricas – que foram trabalhadas na 2ª série do Ensino Médio, assim como a análise completa de seus gráficos.

Outro ponto relevante na atividade foi que os alunos demoraram para perceber a existência de funções que não possuíam pontos de máximos e mínimos em seu gráfico. Foi necessária a intervenção do professor, que perguntou se havia algum tipo de função que não possuía concavidades. Somente então os alunos responderam a função polinomial do 1º grau e a reta não horizontal. Em um momento de conversas após a aplicação das atividades, os alunos confidenciaram que não pensaram na resposta mais simples pois estavam esperando algum tipo de "pegadinha" na pergunta e que, como a atividade estava sempre aumentando o grau das funções, a resposta deveria ser algum tipo de função que eles ainda não tinham trabalhado em sala de aula.

O segundo dia de atividades se iniciou com os alunos, juntamente com o GeoGebra e com o uso da calculadora, construindo o gráfico de uma função do 2º grau e investigando o comportamento da função em pontos próximos de seu vértice, apresentados no item (5). Os alunos completaram a tabela proposta e em seguida construíram uma reta tangente ao gráfico. Eles foram orientados a programar o GeoGebra para registrar a equação da reta em sua interface e, ao mover o ponto de tangência pela parábola, eles perceberam que o coeficiente angular da reta se alterava, entre valores positivos e negativos, passando pelo zero, que ocorria exatamente quando o ponto de tangência coincidia com o vértice da parábola. Alguns alunos perceberam que neste ponto específico a reta era horizontal e paralela ao eixo das abcissas. Quando eles compartilharam esta informação com a turma, mais alunos concluíram que a inclinação da reta podia ser relacionada com o comportamento da parábola. A inclinação era negativa quando a parábola era decrescente, positiva quando a parábola era crescente e nula em seu vértice.

Ainda no segundo dia, no item (6) da atividade os alunos deveriam construir o gráfico de uma função do 4º grau, localizar seus pontos de máximos e mínimos e analisar o que ocorre com os valores próximos destas concavidades. Novamente, com o auxílio do GeoGebra, localizar e definir esses pontos não foi um problema. Ao serem perguntados se era possível, ou na melhor hipótese, se seria razoável igualar as imagens destes pontos apenas pelo fato deles serem próximos, os alunos foram incisivos que não, pois cada valor do gráfico necessitaria de um valor no eixo x e sua imagem correspondente no eixo y. Caso igualássemos essas imagens, o gráfico poderia não representar a real característica da função e, para finalizar, um grupo de alunos afirmou que se fizéssemos isso, estaríamos quebrando uma das regras básicas de uma função, pois um valor do domínio teria várias imagens no contradomínio.

Posso afirmar que fiquei surpreso e bastante satisfeito com estes comentários/conclusões por parte dos alunos, pois alguns conceitos estavam bem consolidados na cabeça deles, mesmo não sendo o caminho que pretendia com a atividade. Para contornar este problema, sugeri que alterássemos a pergunta para "Avaliando apenas os valores das imagens e relacionando as inclinações das retas tangentes obtidas, é razoável admitir que estas retas são muito próximas e, com isso, admitir que as imagens também podem ser consideradas muito próximas, com variações desprezíveis entre elas?". Assim, consegui uma resposta positiva dos alunos e a atividade voltou ao rumo proposto. As retas tangentes retornaram valores muito próximos para suas inclinações - o GeoGebra foi programado para retornar valores com aproximação de dez casas decimais e os gráficos ampliados, retornavam valores bastante próximos, de forma que a diferença entre as inclinações eram muito pequenas.

O terceiro momento da atividade consistiu em resolver duas situações problema envolvendo o estudo de máximos e mínimos, nos itens (8) e (9). Com o auxílio do GeoGebra e com as atividades preliminares realizadas nos dois dias anteriores, os alunos conseguiram desenvolver sem maiores problemas as duas atividades, que consistiam em determinar a função que representava cada situação contextualizada, construir seus gráficos, calcular e determinar o valor máximo da área de um terreno e do volume de uma caixa, assim como investigar o que ocorre com esses valores em regiões próximas dos pontos de máximo.

É interessante relatar que os alunos, em sua grande maioria, preferiram resolver ambas as questões no papel primeiro e só em seguida utilizar o GeoGebra para plotar o gráfico e verificar os valores encontrados. Quando perguntados sobre essa preferência, alguns alunos responderam que se sentiam mais seguros em encontrar as respostas dos problemas e depois conferir se o resultado estava certo. Outro ponto importante ocorreu no item (8), letra (b), que pedia para determinar o domínio da função. Quando o gráfico da função foi construído no GeoGebra, os alunos tiveram de perceber que o domínio não era apresentado na interface e que os valores de x deveriam ser positivos e menores que 2 para que a caixa pudesse ser construída. Isso quer dizer que o gráfico deveria ser estudado no intervalo $]0,2[$ e que o valor máximo se encontrava nessa região.

A terceira aula terminou com o item (10) a ser resolvido. Os alunos deveriam propor uma função que possuía um ponto de máximo e investigar o que ocorria com os valores das imagens quando era proposto um acréscimo pequeno no valor de x. Após algumas discussões e investigações, os alunos responderam, embasados pelos itens anteriores da atividade, que as imagens seriam muito próximas e que a reta tangente deveria ter coeficiente angular zero ou próximo de zero.

As hipóteses levantadas por eles foram verificadas no dia seguinte, o último da atividade, em uma aula que se desenvolveu de forma diferente, onde o professor apresentou Pierre de Fermat, um personagem da História da Ciência que não era matemático de formação e que poderia ser como qualquer um dos alunos em sala que não pretendem seguir a área da Matemática ou da área das Ciências Exatas, mas que gostam de pesquisas e desafios. Com a atenção dos alunos, foi contado um pouco de sua vida e obra, suas pesquisas em diversos campos, o Último Teorema de Fermat (um aluno relatou que possuía um livro com este título em casa), suas desavenças com colegas matemáticos e outros fatos que tinham como intuito atrair ainda mais a atenção e o interesse dos alunos para o ponto final da atividade proposta, como calcular valores de máximos e mínimos aplicando a abordagem de Fermat.

A partir da pergunta do item (11), o professor realizou a interpretação geométrica proposta por Fermat utilizando a função quadrática do item (5), da qual os alunos possuíam a resposta para o seu valor máximo. Ao se calcular a aproximação $f(x+e)$ e realizar o que Fermat tinha feito, os alunos ficaram bastante surpresos quando perceberam que a resposta coincidia com o ponto de máximo no gráfico. Logo em seguida, o professor perguntou qual era a fórmula que permitia calcular o vértice da parábola. Os alunos responderam $-\frac{b}{2a}$ e foi solicitado que iniciassem, praticamente de imediato, a primeira parte do item (11), que consistia em reproduzir a proposta de Fermat na equação $f(x) = ax^2 + bx + c$. Foi necessária a intervenção do professor no momento de dividir a aproximação por e, e para em seguida, excluir os termos restantes com o termo e. Isso não impediu um *frisson* dentro da sala, pois os alunos perceberam que a estratégia retornava o valor de x do vértice da parábola, de uma maneira diferente, que não envolvia o uso da fórmula $-\frac{b}{2a}$.

Para verificar se o conteúdo havia sido compreendido, os alunos deveriam resolver a próxima etapa por conta própria e verificar os pontos utilizando o GeoGebra. Ocorreram alguns erros de cálculo, alguns erros de sinal quando aplicados os produtos notáveis, mas os alunos conseguiram concluir a proposta e verificar seus valores máximos e mínimos no *software*. Assim, ficou claro para eles que nesta etapa de estudos em que se encontram, a estratégia de Fermat poderia ser aplicada para o cálculo dos máximos e mínimos em funções de graus diversos, não sendo mais necessário limitar o ensino apenas às funções quadráticas.

Por fim, como um desafio e como último momento da atividade de Fermat, os alunos deveriam tentar aplicar a proposta em uma função trigonométrica, apresentado na letra (c) do item (11). O professor sugeriu que os passos deste item fossem compartilhados, para assim todos concluírem a atividade no mesmo momento. Assim, alguns alunos resolveram no quadro o seno da soma de dois arcos enquanto outros, utilizando o Geogebra, construíam os gráficos de $f(e) = \frac{\text{sen}(e)}{e}$ e de $f(e) = \frac{\cos(e)-1}{e}$, pois eles não possuíam o conhecimento do comportamento destas duas funções quando e se aproximava de zero. Foi necessária a intervenção do professor para concluir que $f(e) = \frac{\cos(e)-1}{e}$ tende a zero quando e se aproxima de zero pela direita ou pela esquerda. Com isso, os alunos conseguiram desenvolver a técnica aprendida para assim determinar que os máximos e mínimos da função $\text{sen}(x)$ ocorriam quando $\cos(x) = 0$, ou seja, para valores de $x = \frac{\pi}{2} + k.\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

6.2 Conclusões

Ao início da proposta, a pergunta mais realizada pelos alunos era sobre a aplicação dos conteúdos estudados. Com o decorrer da atividade, pudemos desenvolver conceitos, exemplos e aplicações do estudo de funções envolvendo máximos e mínimos e foi bastante gratificante perceber que o assunto de máximos e mínimos – tema recorrente na vida estudantil dos alunos em diversas disciplinas como a Matemática, Física e Química – possui aplicações que permitem a abordagem de um método que não envolve o "decoreba" de fórmulas e macetes, tornando atrativo o estudo e a pesquisa, fazendo com que a aprendizagem seja mais agradável. As resoluções dos exercícios pelo método tradicional e pelo método de Fermat permitiu perceber claramente que o estudo dos mínimos e máximos é engessado na Educação Básica em torno apenas da função do segundo grau e em alguns casos mais simples das funções trigonométricas. Acreditamos que os alunos podem aprender o assunto com mais maturidade matemática, envolvendo o contexto histórico, o trabalho colaborativo, o uso de ferramentas computacionais e aprofundando o conhecimento em outros conteúdos se o assunto for ensinado tendo como base a interpretação geométrica do método proposto por Fermat.

É importante ressaltar que o principal foco neste trabalho não é a implementação da teoria de Pierre de Fermat na Educação Básica ou nem mesmo comparar um método como mais fácil ou eficiente que outro. A proposta tem como foco o aluno e sua relação com o ensino da Matemática. Quando a possibilidade de escolhas, caminhos e estratégias é dada ao aluno, ele toma decisões com mais consciência e utiliza o método que prefere, podendo também ter a visão de que cada método permite a resolução de situações diferentes. Com isso, a absorção do conhecimento ocorre de maneira natural e o aluno faz parte do próprio processo de aprendizagem.

Tendo em vista o que foi exposto, as contribuições de ensino através de princípios das Metodologias Ativas, a História da Matemática e o uso de tecnologias como o GeoGebra, buscam atrair o gosto pela Matemática, permitindo desenvolver o estudo dos máximos e mínimos em sala de aula no Ensino Médio, incentivando a elaboração de estratégias pelos professores para o ensino de Matemática inovador e motivador de habilidades, como proposto na Base Nacional Comum Curricular.

Ao utilizar o GeoGebra, o professor pode instigar o estudante a buscar seu próprio caminho para a solução de um problema, permitindo a visualização do comportamento gráfico de diversas funções com uma abordagem mais ampla do conteúdo, possibilitando o trabalho colaborativo, a investigação e a pesquisa matemática, uma vez que o ensino de máximos e mínimos de funções tem sido tratado em gráficos já construídos nos livros didáticos e o estudo de situações-problemas se limita aos de uma função quadrática, com a utilização das coordenadas do vértice da parábola.

Assim, esta atividade propõe a reflexão sobre a aplicação das Metodologias Ativas, a necessidade de mostrar com a História da Matemática como determinado conteúdo surgiu e qual era a motivação na época em que foi desenvolvido, e utilizar os recursos computacionais em sala de aula no intuito de contribuir com a aprendizagem da Matemática.

7 Percurso Metodológico 2

Neste capítulo apresentaremos a proposta de atividade relacionada ao estudo do Binômio de Newton, nossas expectativas iniciais, a aplicação da atividade e os resultados obtidos. O capítulo se encerra com as principais análises e conclusões.

7.1 O Binômio de Newton - Um Estudo Alternativo em Conjunto com Euler

A proposta desta atividade é utilizar como Metodologia Ativa a Sala de Aula Invertida *in loco* e fazer com que os alunos assumam o protagonismo do processo de ensino-aprendizagem por meio de uma sequência didática que permita com que eles sejam capazes de conjecturar e reconhecer padrões, definir as principais fórmulas e aplicar o conhecimento adquirido para investigar problemas envolvendo produtos notáveis, o Triângulo de Pascal assim como suas propriedades mais importantes, a expansão e a fórmula do termo geral para o Binômio de Newton.

Com essa sequência, o professor pode estimular o trabalho colaborativo entre os alunos, promovendo uma experimentação matemática em forma de atividade investigativa em que os alunos podem resolver os problemas por etapas, como um jogo de perguntas e respostas, em que cada resposta correta leva todos os alunos para uma nova fase, promovendo assim um ensino dinâmico, lúdico e tendo o aluno com ponto central do processo.

Em seguida, após estruturar todo o conteúdo desenvolvido pelos alunos, pretendemos utilizar a História da Matemática e ampliar o conhecimento adquirido pelos alunos, mostrando que a expansão do Binômio pode ocorrer também para expoentes Inteiros e Racionais - e que de fato foi esse o trabalho realizado por Newton. Finalizamos a sequência didática com o desenvolvimento do Binômio com expoentes negativos, através de uma abordagem proposta por Leonhard Euler (1707 - 1783) que, diferentemente de Newton

- cuja proposta caminha por séries binomiais - trabalha com frações algébricas, que são mais próximas da realidade enfrentada pelos alunos em sala de aula durante os Ensinos Fundamental e Médio.

A sugestão é que as aulas sejam ministradas para alunos de turmas da 2ª série do Ensino Médio e que estas tenham conhecimento básico de análise combinatória, sequências numéricas e algébricas, assim como de operações envolvendo expressões algébricas.

Inicialmente, o professor introduz o conteúdo e solicita aos alunos que resolvam, aplicando qualquer método, o desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Logicamente, alguns alunos deverão resolver os problemas propostos aplicando os produtos notáveis conhecidos e trabalhados nas escolas durante o Ensino Fundamental; outros deverão realizar a multiplicação sucessiva entre os binômios através da propriedade distributiva. Os binômios iniciais,

$$(x+a)^0, (x+a)^1, (x+a)^2, (x+a)^3 \text{ e } (x+a)^4$$

poderiam ser resolvidos sem muita dificuldade por qualquer um dos métodos abordados pelos alunos.

O objetivo principal é fazer com que os alunos percebam, em alguma parte do processo que os métodos conhecidos e aplicados não se mostram robustos o suficiente para resolver potências maiores, sendo necessário buscar estratégias melhores, como uma fórmula geral, uma lei de formação ou algum processo lógico que permita o cálculo do desenvolvimento do binômio para potências maiores.

Para motivar os alunos, o professor pode sugerir investigações e discussões entre os alunos sobre a existência de padrões que poderiam ser reconhecidas no desenvolvimento dos binômios iniciais como, por exemplo, a relação entre a quantidade de termos e o expoente do binômio $(x+a)^n$, os expoentes dos termos em x (potências decrescentes) e os em a (potências crescentes) e, em um último exemplo, relações entre os coeficientes dos termos nos desenvolvimentos.

Segundo Garofalo:

> A aprendizagem baseada em problemas, *project based learning* (PBL), tem como propósito fazer com que os estudantes aprendam através da resolução colaborativa de desafios. Ao explorar soluções dentro de um contexto especifico de aprendizado, que pode utilizar a tecnologia e/ou outros recursos, essa metodologia incentiva a habilidade de investigar,

> refletir e criar perante a uma situação.
>
> O professor atua como mediador da aprendizagem, provocando e instigando o aluno a buscar as resoluções por si só. O docente tem o papel de intermediar nos trabalhos e projetos e oferecer retorno para a reflexão sobre os caminhos tomados para a construção do conhecimento, estimulando a crítica e reflexão dos jovens. (GAROFALO[39], Nova Escola, 2018)

Acreditamos que, sem muito esforço, os alunos devem ser capazes de perceber que o número de termos do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é $(n + 1)$ e que os expoentes dos desenvolvimentos seguem um padrão de crescimento/decrescimento. Em seguida, o professor pode solicitar que os alunos escrevam os coeficientes dos binômios trabalhados até então, alinhados um abaixo do outro, formando assim, as primeiras linhas do Triângulo de Pascal. Nesse momento, são introduzidos os números binomiais, fazendo com que os alunos relacionem estes números com os elementos do triângulo construído. Então, eles poderão pesquisar e dialogar entre si, buscando alguma forma de seguir o padrão encontrado no Triângulo e construir novas linhas seguindo a mesma regularidade. Realizada essa discussão e encontrando esse padrão, (que pode ocorrer através dos números binomiais ou pela relação de Stifel), os alunos devem ser capazes de "descobrir" qualquer linha do triângulo, iniciando assim, a expressão do termo geral do binômio.

Ainda analisando o Triângulo de Pascal, os alunos podem ser "desafiados" a buscar outras propriedades que podem ser verificadas através dos números binomiais, como a soma dos elementos das linhas (potência de 2), as propriedades das diagonais e das colunas. Acreditamos que quanto mais propriedades forem encontradas pelos alunos, mais ênfase pode ser dada às suas demonstrações. Nesse caso, é importante ressaltar que no contexto escolar, as provas apresentadas pelos alunos nem sempre seguem o rigor de uma demonstração matemática, mas mesmo assim, são de extrema importância no ensino da matemática, já que conferem veracidade no contexto de sala de aula.

Então, no terceiro momento da aula, os alunos deverão relacionar os resultados verificados até o momento, ou seja, os termos do desenvolvimento do binômio

$$(x + a)^n$$

e os coeficientes binomiais para, assim, serem capazes de escrever, de maneira autônoma e de posse da construção do próprio conhecimento, o desenvolvimento de um binômio geral, com $n+1$ termos, que é um dos objetivos da proposta apresentada nessa atividade.

Após este momento, com aplicações e novos exemplos construídos, o professor pode sugerir a possibilidade de haver alguma maneira de se descobrir um termo qualquer do desenvolvimento sem que toda a expansão do binômio seja escrita. Então os alunos são convidados a novamente se debruçar sobre o problema e relacionar cada coeficiente binomial com os expoentes de x e de a, assim como a posição do termo desejado, e então, definir a expressão para o termo geral do binômio.

Realizado esse momento de pesquisa, discussões e descobertas, o professor inicia a aula expositiva, apresentando o conteúdo que foi trabalhado pelos alunos com uma abordagem mais próxima da História da Matemática, discorrendo sobre a vida e obra de Isaac Newton, suas principais descobertas e sua importância para a ciência nos dias de hoje.

Na parte final da aula, o professor apresenta a ampliação da expansão do binômio com expoentes negativos, através de exemplos, aplicando a proposta elaborada por Euler em 1787, que trabalha com uma demonstração puramente algébrica que pode ser explicada e entendida por alunos da Educação Básica e mostrando que a aplicação do binômio não se limita a expoentes naturais, podendo ser trabalhado com expoentes em um conjunto maior do que é apresentado no Ensino Médio.

7.2 Atividade: Binômio de Newton e a Técnica de Euler

Recursos Utilizados		
Sala de Aula Invertida	História da Matemática	Trabalho Colaborativo

1. Utilizando seus conhecimentos, desenvolva os seguintes produtos notáveis:

   (a) $(x+a)^0$

   (b) $(x+a)^1$

   (c) $(x+a)^2$

   (d) $(x+a)^3$

   (e) $(x+a)^4$

   Agora, responda as seguintes perguntas:

   (i) Quais conclusões podem ser tiradas desses desenvolvimentos?

(ii) Existe alguma relação que podemos concluir quanto ao número de termos de cada desenvolvimento?

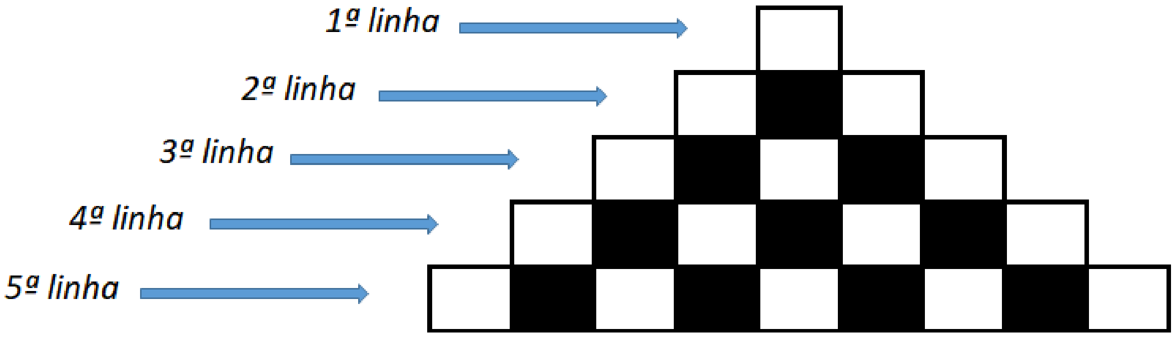
(iii) O método aplicado possibilita a resolução de produtos notáveis com expoentes maiores? Quais as principais desvantagens do método aplicado?

(iv) Observando os desenvolvimentos, quais as principais conclusões podem ser verificadas?

2. Escreva os coeficientes dos desenvolvimentos nos espaços abaixo:

(a) Observando com atenção a construção desse triângulo, quais são as principais características que podem ser concluídas?

Figura 7.1: Triângulo Aritmético



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

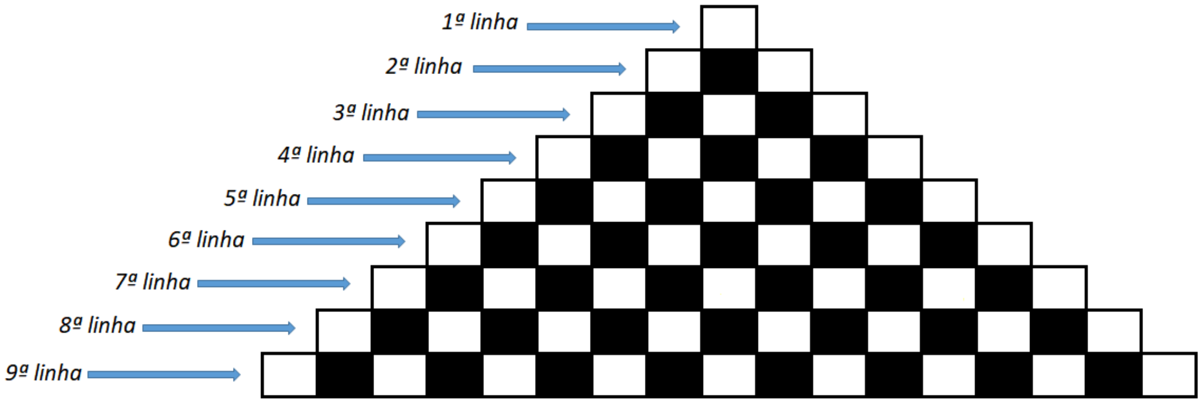
(b) Seria possível, através dessa análise, construir as próximas linhas deste triângulo?

(c) Complete as linhas do triângulo abaixo, seguindo a regra observada pela análise dos produtos notáveis.

3. Resolva as seguintes combinações simples:

(a) $\binom{6}{0}$ (b) $\binom{6}{1}$ (c) $\binom{6}{2}$ (d) $\binom{6}{3}$

Figura 7.2: Triângulo Aritmético



Fonte: Elaborado pelos autores (2020)

(e) $\binom{6}{4}$ (f) $\binom{6}{5}$ (g) $\binom{6}{6}$

Agora, responda:

(i) O que se pode concluir dos resultados obtidos?

(ii) Os demais termos do triângulo seguem a mesma regra? Verifique.

4. Tendo como base, os resultados encontrados no item (1) e no item (3), resolva o desenvolvimento do produto notável $(x + a)^8$, escrevendo os coeficientes binomiais e em seguida escrevendo-o em sua forma resolvida.

   (a) Existe alguma relação entre os números binomiais e os expoentes dos termos do desenvolvimento?

(b) A posição de cada termo no desenvolvimento pode ser relacionada com os números binomiais correspondentes?

5. Considerando as análises obtidas no item acima, resolva os seguintes problemas:

   (a) Qual o $4^{\underline{o}}$ termo do desenvolvimento de $(x+a)^9$?

   (b) Qual o $6^{\underline{o}}$ termo do desenvolvimento de $(x+a)^{12}$?

   (c) Qual o termo central do desenvolvimento de $(x+a)^8$?

6. Escreva uma expressão capaz de determinar qualquer termo do desenvolvimento do binômio $(x+a)^n$

7. Utilizando a fórmula do termo geral, obtida no item 5, resolva os seguintes problemas:

   (a) Qual o $3^{\underline{o}}$ termo do desenvolvimento de $(2x+3y)^5$?

   (b) Qual o termo independente do desenvolvimento de $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$?

   (c) Qual o termo central do desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$?

8. O que deve ser levado em consideração se o sinal do binômio for negativo? Tendo este conceito esclarecido, responda:

   (a) Qual o $5^{\underline{o}}$ termo do desenvolvimento de $(2x^3-3y^2)^5$?

   (b) Qual o termo central do desenvolvimento de $\left(\dfrac{2x}{y}-\dfrac{3y}{x}\right)^8$?

9. Curiosidade: O que ocorre quando o expoente é um número inteiro e negativo? O binômio pode ser expandido caso os expoentes não forem números naturais?

8 Análise da Atividade 2

A atividade proposta foi aplicada para 30 alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular em Belo Horizonte. Como o número de alunos era reduzido para a realidade da escola, em que cada turma tem por volta de 50 alunos, conseguimos acompanhar de perto e ter maior contato com os estudantes que participaram, o que propiciou uma melhor avaliação.

As aplicações da atividade ocorreram em sala de aula, nos dias 25 e 28 de novembro de 2019, no período da tarde, sendo dois horários de 50 minutos dia 25 e dois horários de 50 minutos no dia 28. Participaram da atividade 30 alunos que eram participantes de Olimpíadas do Conhecimento (Canguru de Matemática, OBM, OMM e OBMEP). Eles tinham conhecimento prévio de análise combinatória e probabilidade, sequências numéricas e expressões algébricas. Como eram alunos da 2ª série, eles ainda não tinham estudado o Triângulo de Pascal e o Binômio de Newton na escola, embora alguns já tivessem lido sobre o assunto.

Os alunos foram orientados que poderiam participar da atividade em grupos pequenos ou individualmente e que poderiam se deslocar pela sala para conversar e discutir estratégias com os demais colegas.

8.1 Aplicando a Atividade - Primeiras Impressões e Reações

A partir daí, os alunos iniciaram a atividade resolvendo os produtos notáveis do exercício (1). A maioria dos alunos resolveu aplicando a fórmula do desenvolvimento do quadrado da soma e do cubo da soma. Ao se depararem com o produto notável $(x+a)^4$, os alunos aplicaram a multiplicação dos desenvolvimentos resolvidos a partir de $(x+a)^2$. Como conclusões iniciais, os alunos perceberam que, caso os expoentes fossem maiores, o processo seria muito trabalhoso e desmotivante.

Após análises e discussões abertas em sala e com a participação de todos, os alunos conseguiram chegar às conclusões que o número de termos do desenvolvimento é uma unidade a mais que o expoente do binômio e que os expoentes se limitam ao valor do expoente em cada caso. Além disso, surgiu a hipótese que os expoentes seguiam certo padrão de construção, sendo os de x decrescentes e os de a, crescentes.

No item (3), os alunos completaram as primeiras linhas do triângulo proposto e construído tendo como suporte os resultados encontrados no item (1). Novamente, após algumas discussões e análises, os alunos concordaram que era possível completar as demais linhas do triângulo. Nesse momento, como a ideia dos alunos estava correta, foram apresentados o Triângulo de Pascal e a Relação de Stifel e como esta estava relacionada com a construção do triângulo.

Os alunos foram desafiados a tentar encontrar outras regularidades em relação ao triângulo construído. Foram detectadas as propriedades das diagonais e da soma dos termos em cada linha do triângulo, onde um aluno conseguiu perceber que a soma era uma potência de 2 e que o expoente desta potência era exatamente igual ao expoente do binômio. Outras propriedades foram discutidas em sala, mas sem a percepção inicial dos alunos.

Sem esforço, os alunos resolveram as combinações propostas no item (5) e rapidamente, foi percebido que os resultados das combinações estavam presentes nas linhas do triângulo de Pascal. Neste momento foi introduzido o que eram números binomiais e como eles poderiam ser representados no mesmo triângulo.

No item (6), os alunos conseguiram estabelecer as relações obtidas anteriormente para resolver o binômio $(x + a)^8$. Realmente foi uma surpresa quando dois alunos conseguiram perceber que existia uma relação entre os expoentes e os números binomiais e que a posição de cada termo também poderia ser relacionada com esses números. Com isso, os alunos conseguiram, através de exercícios, investigação, análises e discussões, determinar a fórmula do termo geral de um binômio quando o expoente é um número natural. Em seguida eles aplicaram o resultado obtido para resolver outros exemplos mais elaborados, em que os termos do binômio era apresentado em forma de frações ou em raízes.

Com a fórmula do termo geral, os alunos conseguiram resolver os exemplos apresentados no item (7) e se sentiram mais confiantes para resolver quaisquer binômios. Resolvemos outros exemplos que constavam em provas do IME e do ITA para, em seguida, aparecer a pergunta que restava: "O que acontece quando o sinal do binômio é negativo? Como saber se o termo da expansão era positivo ou negativo?" Um dos grupos sugeriu retornar no item (1) e resolver novamente os produtos notáveis, agora com sinais negativos. Com isso, ficou claro para eles que os sinais eram intercalados quando o sinal do Binômio era negativo. Assim, a fórmula do termo geral estava completa e o conteúdo foi amplamente contemplado e assimilado pelos alunos com sucesso.

No segundo dia de aula, foi apresentado um pouco da vida e obra de Isaac Newton e a surpresa foi tamanha quando os alunos ficaram sabendo que todo o conteúdo que havíamos estudado não tinha sido realizado por Newton. Uma mistura de risos, dúvidas e uma pitada de revolta podiam ser detectadas no meio dos alunos. Esta parte da aula então se iniciou com a explicação de que Newton havia realizado a expansão para expoentes racionais, o que era muito mais desafiador, tanto que os alunos começaram a se questionar como resolver o binômio quando o expoentes fosse fracionário. Explicado que o método de Newton envolvia séries e uma Matemática mais complexa, que só seria apresentada no Ensino Superior, foi possível perceber uma pequena frustração por parte dos alunos. Por que a pergunta, se eles não poderiam aplicar de imediato no Ensino Médio?

Para finalizar todo o conteúdo, a proposta foi mostrar como se resolveria a expansão de um binômio quando o expoente fosse inteiro e negativo. Explicamos que a técnica apresentada foi elaborada por Leonhard Euler e que envolvia soma de frações algébricas. Como exemplo, foi resolvido o binômio $(x+1)^{-2}$. Ao final, os alunos perceberam que a expansão também se comportava como que foi apresentado quando o binômio de Newton com expoentes naturais e que o método era possível de ser reproduzido no Ensino Médio, fato que era um dos objetivos principais desta atividade.

8.2 Conclusões

Aplicada a atividade, conversamos com os alunos nos dias seguintes. A resposta de todos era que a aula, nos moldes que foi ministrada, havia sido diferente de tudo o que eles tinham feito na escola até então. Foi novo, foi lúdico e havia uma disputa saudável no ar pois, ao mesmo tempo que todos queriam terminar e descobrir primeiro, todos conversavam e se ajudavam para alcançar os mesmos objetivos.

A proposta de passar a construção do conhecimento para eles havia se mostrado um sucesso. Eles se lembravam da fórmula do termo geral, explicavam o Triângulo de

Pascal e conseguiam reproduzir a expansão para expoentes inteiros (positivos e negativos). O momento de aprendizagem se tornou prático e intuitivo, os alunos se mostraram grandes investigadores e capazes de retornar respostas lógicas e concretas. O conteúdo, que a princípio era puramente teórico e com pouca aplicabilidade, se tornou prazeroso para os alunos, que foram motivados e entenderam como o processo se desenvolveu e como saber a história é importante para se consolidar o conhecimento adquirido.

Talvez o ponto negativo desta atividade tenha sido a pouca aplicabilidade do conteúdo no Ensino Médio - o Binômio de Newton não faz parte do conteúdo cobrado nos principais processos seletivos do País. Com isso, acreditamos que é inviável aplicar o conteúdo para alunos que não pretendem seguir a área das Ciências da Natureza e da Matemática, pois os alunos podem não se sentir motivados a aprender um conteúdo que não será cobrado na continuação de seus estudos.

Os alunos que realizaram esta atividade disputavam Olimpíadas de Matemática e tinham uma afinidade muito grande com a matéria, o que tornou tudo mais fácil. É importante também ressaltar que, se houvesse mais tempo, as aulas poderiam envolver mais exemplos e discussões mais elaboradas.

Com esta atividade, os alunos tiveram contato com esta ferramenta específica da Matemática, o Binômio de Newton, e foi notório como a Matemática está sempre andando junto com a história da humanidade. Todo o desenvolvimento, realizações, conceitos e formalizações foram construídas através das Metodologias Ativas, pois com a Sala de Aula Invertida, os alunos realmente se tornaram protagonistas do processo de ensino-aprendizagem, investigando e conseguindo deduzir todo o desenvolvimento do termo geral do binômio. O professor foi o mediador desse processo e mesmo as intervenções levavam os alunos a novos caminhos de investigação e de construção do conteúdo.

Como Metodologia Ativa, o trabalho colaborativo também merece destaque. Ao buscarem soluções para os desafios, os alunos desenvolveram um espírito de equipe, onde todos ajudavam a todos de tal forma que um ambiente de gamificação se apresentou dentro de sala, pois cada etapa do estudo dirigido se mostrava como a fase de um jogo e os alunos vibravam com cada etapa vencida.

A História da Matemática mostrou que Newton fez realizações grandiosas a partir de seus estudos e deixou um legado que permite honrá-lo com o nome do conteúdo. Mesmo com a BNCC orientando que o Ensino Médio tem como uma das premissas a expansão de abordagens de conteúdos apresentados aos alunos no Ensino Fundamental, o que acarretou a exclusão do Binômio de Newton dos conteúdos programáticos da maioria das escolas do país, esta atividade colabora para ampliar o conhecimento acadêmico do aluno, uma vez que ele é capaz de desenvolver competências e habilidades fundamentais para a sua formação, como a pesquisa, o trabalho em equipe, o desenvolvimento de hipóteses, entre outras.

Rapidamente, de acordo com a BNCC do Ensino Médio, na área de Matemática e suas tecnologias, que será aplicada em sua totalidade a partir de 2020, tem como prerrogativa legal normatizar

> [...] competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas (BRASIL[16], 2017, p. 266).

Com isso, acreditamos que esta atividade possa servir de ferramenta didática para facilitar o ensino do Binômio de Newton no Ensino Médio, uma vez que este conteúdo matemático é considerado um assunto muito trabalhoso de se abordar em sala de aula. Pode ser um pouco pretensioso, mas esperamos que esta atividade possar ser um material que o professor utilize em sala de aula e se aprofunde no assunto, uma vez que a maioria dos conceitos trabalhados aqui utilizam conhecimentos abordados durante o Ensino Médio.

9 Conclusões

Com este trabalho buscamos levantar a necessidade de começarmos a pensar em mudanças no ensino da Matemática na Educação Básica, como o papel do educador e do educando, a maneira de se abordar conteúdos e em como aplicar as Metodologias Ativas, que vem de frente contra o antigo modo de se ensinar e que ainda resiste com o professor centralizador, o quadro negro e conteúdos que nem sempre permitem ao aluno vislumbrar toda a potencialidade da Matemática como componente curricular.

Para isso, apresentamos duas atividades para o Ensino Médio, que podem auxiliar alunos e professores na compreensão dos conteúdos. Ao se abordar Pierre de Fermat, encontramos temas que compõem a Álgebra através de interpretações geométricas. O uso do *software* GeoGebra em sala facilitou o entendimento do conteúdo de modo que os professores podem adaptar diversos assuntos da Álgebra e da Geometria, estabelecendo uma melhor interação entre eles. Aos alunos, ficou claro que a construção e a visualização dos gráficos e das retas tangentes permitem a apreensão do conteúdo, assim como um grau de aprofundamento maior na matéria. O uso da informática é uma atividade comum no dia a dia da maioria dos alunos, que já estão habituados com a era digital, o que contribui para a percepção e os estimula durante as aulas.

A atividade de Fermat tratou o assunto de máximos e mínimos de uma função com uma abordagem diferente daquela que é ensinada no Ensino Médio da maioria das escolas. O GeoGebra é uma ferramenta que pode ser utilizada em conjunto com as Metodologias Ativas para poder estimular o interesse dos alunos e fazendo com que os professores de Matemática utilizem novas técnicas, como o uso da tecnologia e o trabalho colaborativo a favor do ensino. Da mesma maneira, podemos pensar na aplicação de estudos dirigidos que permitem a pesquisa, o diálogo e a investigação em sala de aula. Mas para isso, é necessário o aperfeiçoamento dos profissionais de educação quanto à utilização das Metodologias Ativas, pois eles serão os responsáveis por apresentar a proposta de ensino aos alunos, tornar o ambiente de aprendizagem flexível, pensado no aluno e capaz fornecer *feedbacks* e avaliar sempre que necessário.

Nesse sentido, vale concluir que são necessárias uma preparação antecipada e uma dedicação ainda maior por parte do professor. Ao se transferir o protagonismo para o aluno, não se transfere a quantidade de trabalho, uma vez que o professor precisa programar toda a tarefa com antecedência em casa para tentar prever os possíveis rumos que a atividade pode ter e assim corrigir o trajeto para atingir o foco final da aprendizagem.

Refletindo sobre os princípios da Sala de Aula Invertida, os alunos são capazes de assumir essa postura mais proativa, partindo da realidade em que eles estão inseridos e trabalhando em conteúdos ainda novos, com uma fundamentação teórica ainda limitada. Através de investigações e discussões ele inicia um processo de problematização da situação, que o direciona para o desenvolvimento de conceitos novos, que podem chegar a formulação de hipóteses. Nesse momento, os alunos são capazes de ampliar seu repertório teórico-cultural e com isso redefinir o espaço da realidade que eles se encontram.

Então, nesta parte do trabalho apresentamos algumas metodologias diferenciadas como o estudo dirigido para a abordagem da interpretação geométrica dos máximos e mínimos utilizando o *software* GeoGebra. A questão era mostrar se com o auxílio destas metodologias apresentadas melhoraria o aprendizado dos alunos quando comparado com anos anteriores, em que era utilizada o método tradicional de ensino. Podemos observar nas análises que a precisão da visualização, a manipulação dos objetos no *software*, proporcionaram uma maior compreensão das características presentes no desenvolvimento da interpretação geométrica, levando os alunos a compartilhar informações, investigar situações e a perceber com mais facilidade as variações e os diversos caminhos disponíveis.

Uma das dificuldades enfrentadas foi desenvolver funções de grau maior que dois e aprofundar o cálculo dos máximos e mínimos locais aplicando a proposta de Fermat, pois os alunos ainda não possuem maturidade algébrica suficiente para entender o conceito de retas tangentes a um gráfico e o de derivada de uma função. Mesmo assim, foi notável a participação dos alunos, já que fizeram todas as construções e resolveram todas as questões propostas na atividade e, em seguida, opinaram sobre a utilização desta proposta de ensino, considerando útil para a aprendizagem e fixação do conteúdo.

A segunda atividade, sobre o binômio de Newton, exigiu um pouco a mais da atenção dos alunos, pois a partir dela, fazendo uso da noção da construção do termo geral, foi possível desenvolver a expansão do binômio para expoentes negativos, utilizando a abordagem de Leonhard Euler. Percebemos que esta atividade esclareceu - e muito - as dúvidas frequentes entre os alunos, pois numa aula tradicional, onde o professor expõe todas os conceitos no quadro, acaba deixando o aluno mais confuso com tanta informação e conceitos expostos de uma só vez e, talvez, sem organização e tempo necessário.

Durante a atividade proposta foi bastante estimulante ver os alunos desenvolverem, por conta própria, o conhecimento sobre a expansão do binômio com expoentes inteiros positivos até a conclusão do termo geral. Novamente, vale ressaltar que os alunos que participaram dessa atividade são aqueles que fazem as olimpíadas do conhecimento, como o Canguru de Matemática, a OBMEP, a OBM e a Olimpíada de Matemática da Unicamp. Portanto, são alunos que estão sempre motivados com a Matemática e que têm uma maturidade para investigação e análise de padrões, variáveis que foram bastante relevantes para o sucesso da atividade.

Com a atividade do Binômio, este trabalho se propôs a responder questões sobre ser possível a definição de conceitos desenvolvidos de forma colaborativa pelos alunos, aplicando princípios da Sala de Aula Invertida *in loco* e deixando praticamente toda a construção do conhecimento por parte deles.

Ficou claro que, quando o professor planeja atividades com etapas e objetivos claros para o momento do desenvolvimento do conteúdo, existe uma maior interpretação e motivação por parte dos alunos. Acreditamos que seja essa a contribuição das Metodologias Ativas nas atividades, que é colocar os alunos como personagens principais de seu aprendizado. Durante a condição das aulas, o professor estimula o trabalho e a reflexão, mas esse processo é centrado no próprio aluno, fazendo com que a experiência da aprendizagem seja uma criação em conjunto entre o professor e os seus alunos. Assim, foi possível trabalhar as atividades propostas de uma maneira mais participativa, uma vez que o envolvimento da turma é que trouxe a fluidez dos conteúdos e a essência da Metodologia Ativa.

Isso foi comprovado na análise desta atividade, onde os alunos buscaram incessantemente os resultados corretos para cada item e assim atingiram seu objetivo final. Desde a conceituação dos números binomiais, passando pelo triângulo aritmético e finalizando com a análise de padrões que permitem a conclusão do termo geral, os alunos se envolveram e compartilharam frustrações e sucessos. Eles se sentiram desafiados pela atividade e mostraram que o trabalho colaborativo também é uma ferramenta muito valiosa no ensino da Matemática.

No processo da aprendizagem, o professor usamos o estudo dirigido procurando evitar passar para os alunos o conteúdo pronto e com os resultados definidos. De fato, ao seguir essa essência da Sala de Aula Invertida, criamos provocações aos alunos durante a aula e o ambiente se tornou um palco estimulante de debates e descobertas.

Em linhas gerais, foi um saldo positivo na investigação das potencialidades da metodologia aplicada e foi notável a capacidade dos alunos em exibir com precisão um dos conceitos mais importantes relacionados a este conteúdo, que é o termo geral. Mesmo entre professores da Educação Básica, o Binômio de Newton é um assunto que nem todos têm facilidade.

Em relação às metodologias aplicadas, atento para alguns pontos positivos, tais como a exploração de um conteúdo inédito para os alunos, e a análise precisa dos conceitos algébricos e numéricos gerados. Consideramos que esta atividade ainda possa ser aperfeiçoada e expandida para outros conteúdos pertinentes e isso poderá oferecer aos professores métodos diferenciados e persuasivos para melhorar ainda mais o ensino da Matemática. Aos alunos, isso poderá oferecer uma construção do conhecimento mais sólido, pois uma boa base de ensinamento proporciona uma melhor aprendizagem posterior, além de desenvolver a autonomia e a proatividade, fatos que ganharam destaque conforme foram acontecendo as aulas, de forma muito evidente.

Acreditamos que os alunos que participaram desta atividade apresentaram a capacidade de administrar o aprendizado conforme proposta organizada. Em ambas as atividades os alunos foram capazes de construir uma série de conhecimentos e, a partir de então eles se tornam responsáveis pela assimilação do conteúdo. Quando isso ocorre, as Metodologias Ativas e a Sala de Aula Invertida se revelam em essência, pois os alunos aprofundam conhecimentos, estimulam a comunicação, ampliam a capacidade de ouvir o outro, estimulam os trabalhos em equipe e desenvolvem a motivação individual e coletiva, o que faz com que o conteúdo se fundamente ainda mais.

A motivação manifestada pelos educandos, o desenvolvimento de competências e habilidades presentes na BNCC como o pensamento objetivo, crítico e criativo, a ampliação do repertório cultural, a argumentação, a empatia e a cooperação durante as atividades, proporcionaram os posicionamentos relatados nas análises das mesmas e convidam os alunos a deixar sua posição rotineira da sala de aula para compreender conceitos, propor e testar soluções em situações-problema. Dessa forma o estudante é motivado a interagir, assumindo no futuro, um papel mais participativo na sociedade, de forma que ele seja capaz de construir e expor argumentos, expressando seus princípios e valores.

Cabe ressaltar que os recursos pedagógicos adotados, como a Sala de Aula Invertida e a História da Matemática possibilitaram envolvimento por parte dos educandos. A interação dos alunos com esses recursos refletiu no desenvolvimento, na cooperação entre eles, nos *feedbacks* constantes em todos os momentos da atividade. O foco se manteve presente mesmo na parte final da atividade, quando o conteúdo foi aprofundado para o desenvolvimento do binômio com expoentes negativos, tanto que os alunos, em momentos posteriores à atividade, ainda traziam perguntas, trabalhos e pesquisas sobre o tema. Em todas essas situações, os alunos reforçaram que utilizaram estratégias individuais mas tendo como impulso inicial as argumentações em busca de soluções a partir de trocas de ideias com colegas em sala, o que possibilitou o respeito ao posicionamento do outro e o desenvolvimento do trabalho colaborativo.

Para finalizar, ressaltamos que as Metodologias Ativas/híbridas, desenvolvidas no contexto das atividades deste trabalho, assim como o ambiente escolar onde foram aplicadas não podem ser compreendidas como sequências didáticas que podem ser reproduzidas em todas as aulas de Matemática, nem aplicadas em todos os conteúdos abordados na Educação Básica, nem tampouco ser desenvolvida como algo "engessado" para ser aplicado pelos professores. De qualquer maneira, acreditamos que as propostas apresentadas nesta dissertação podem ser vistas como uma grande experiência que obteve sucesso para as situações e contextos em que foram aplicadas. Elas podem servir como um modelo de orientação para o planejamentos de aulas e o desenvolvimento de atividades que permitam um maior envolvimento das metodologias de ensino que possam ser desenvolvidas pelos professores em situações de ensino e aprendizagem, além de permitir uma estruturação histórica e um aprofundamento posterior por parte dos alunos, que podem passar a enxergar a Matemática com um componente curricular que transita em todas as áreas do conhecimento.

Tendo tudo isso exposto, acreditamos que novas pesquisas e novas interpretações são necessárias em relação à linha de investigação proposta neste trabalho, como o uso das Metodologias Ativas em outros campos da Matemática, a possibilidade de ensino em ambiente remoto e a aplicação em escolas com turmas mais heterogêneas e que apresentam maior dificuldade com a matéria. Enfim, ensinar Matemática carece de inovações e mudanças são necessárias, não somente no que diz respeito aos objetos de conhecimento estudados, mas também às metodologias, para que um movimento envolvendo professores, alunos, famílias e escolas possa produzir contribuições importantes para essa área do conhecimento.

Referências

1 CORTELLA, M. S. *A Educação no Século XXI e o Perfil das Educadoras e dos Educadores. In: XXII Reunião de Pesquisa e XIX Seminário de Iniciação Científica da FOUSP*. Universidade de São Paulo: [s.n.], 2016.

2 SANTALÓ, L. A. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. [S.l.]: Artmed, 1996. (Biblioteca Artmed. Conhecimento matemático).

3 KUMMER, T. *Um Caminho Para A Matemática*. Curitiba: Editora CRV, 2016.

4 FERMAT, P. Methodus ad disquirendam maximam et minimam (method for the study of maxima and minima). 1636. Traduzido por Jason Ross. Acesso em: 26 de jullho de 2020. Disponível em: <https://science.larouchepac.com/fermat/fermat-maxmin.pdf>.

5 KATZ, V. *A History of Mathematics: An Introduction*. [S.l.]: Addison-Wesley, University of Columbia, New York, 1998. (Katz Series).

6 NEVES, V. et al. *Metodologias Ativas: Inovações Educacionais no Ensino Superior*. [S.l.]: Pontes Editores, 2018.

7 AGUIAR, O. J. *Mudança conceitual em sala de aula: o ensino de ciências numa perspectiva construtivista*. Dissertação (Mestrado) — CEFET-MG, 1995.

8 MORAN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. *Coleção mídias contemporâneas. Convergências midiáticas, educação e cidadania: aproximações jovens*, v. 2, n. 1, p. 15–33, 2015.

9 VALENTE, J. A. Blended learning e as mudanças no ensino superior: a proposta da sala de aula invertida. *Educar em Revista*, SciELO Brasil, 2014. Acesso em: 23 de julho de 2020. Disponível em: <https://www.scielo.br/pdf/er/nspe4/0101-4358-er-esp-04-00079.pdf>.

10 BISHOP, J. L.; VERLEGER, M. A. et al. The flipped classroom: A survey of the research. In: *ASEE National Conference Proceedings*. [s.n.], Atlanta, GA. 2013. Acesso em: 18 de maio de 2020. Disponível em: <https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=3011&context=etd>.

11 SCHREIBER, K. P. et al. Sala de aula invertida no ensino de matemática: mapeamento de pesquisas científicas na área de ensino. *Educação Matemática Pesquisa*, 2018.

12 SUHR, I. R. F. Desafios no uso da sala de aula invertida no ensino superior. *Revista Transmutare*, 2016. Acesso em 26 de julho de 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rtr/article/view/3872>.

13 RODRIGUES, C. E. S. d. L. *As habilidades socioemocionais como a nova fênix das avaliações em larga escala?* Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2015. Acesso em: 26 de julho de 2020. Disponível em: <http://www.unirio.br/cla/ppgedu/dissertacoes/DissertaoPPGEduCarlosEduardoSerrinadeLimaRodrigues.pdf>.

14 D'AMBROSIO, U. et al. Matemática, ensino e educação: uma proposta global. *Temas & Debates - SBEM*, v. 4, n. 3, p. 1–16, 1991.

15 MIORIM, M. *Introdução à História da Educação Matemática*. [S.l.]: Atual Editora, São Paulo, 1998.

16 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2016. Acesso em: 25 abril de 2020. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

17 BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. *Secretaria de Educação Fundamental*, Brasília. 1998. Acesso em: 10 de julho de 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>.

18 BEKKEN, O. B. Equações de Ahmes até Abel. *Universidade Santa Úrsula - GEPEM*, Rio de janeiro. 1994.

19 HOHENWARTER, M. et al. *GeoGebra*. 2017. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 08 de abril de 2020.

20 GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, v. 1, p. 1–13, 1996.

21 VALENTE, J. A. Computadores e conhecimento: repensando a educação. *Unicamp*, p. 142, Campinas. 1993.

22 SILVA, L. P. da. A utilização dos recursos tecnológicos no ensino superior. *Revista Olhar Científico*, v. 1, n. 2, p. 267, 2010. Acesso em: 23 de julho de 2020. Disponível em: <http://www.pucrs.br/ciencias/viali/tic_literatura/artigos/tics/14-151-1-PB.pdf>.

23 KUHN, T. *A estrutura das revoluções científicas*. [S.l.]: Perspectiva, 1997. (Coleção Debates).

24 SANTOS, F. dos; FERREIRA, S. *Geometria Analítica*. [S.l.]: Bookman, 2009.

25 ALEXANDRINUS, D. et al. *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et De numeris multangulis liber vnus. Cum commentariis C. G. Bacheti V. C. & obseruationibus D. P. de Fermat senatoris Tolosani. Accessit Doctrinae analyticae inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de Fermat Epistolis*. excudebat Bernardus Bosc, è regione Collegij Societatis Iesu, 1670. Acesso em: 18 de junho de 2020. Disponível em: <https://archive.org/details/bub_gb_iGRuJyOtNUC/page/n190/mode/2up>.

26 EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. [S.l.]: UNICAMP, 1997.

27 NETO, A. C. M. Eureka, nº 7. *Sociedade Brasileira de Matemática. IMPA/SBM*, n. 7-2000, Rio de Janeiro. 2000. Acesso em: 25 de julho de 2020. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka7.pdf>.

28 HEFEZ, A. *Aritmética*. 2. ed. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. (Coleção Profmat).

29 FERNANDES, A. M. V. et al. *Fundamentos de Álgebra*. [S.l.]: UFMG, 2005.

30 FERMAT, P. de et al. *Oeuvres de Fermat: Correspondance*. [S.l.]: Gauthier-Villars et fils, 1894. (Oeuvres de Fermat).

31 GENUINO, L. C. C. et al. Estudo histórico do princípio da luz: Criação de uma cartilha para divulgação científica sobre a natureza dos fenômenos luminosos que opuseram Fermat & Descartes. Universidade Estadual da Paraíba, 2018. Acesso em 26 de julho de 2020. Disponível em: <http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/download/dissertações-/mestrado_profissional/2018/DISSERTACAO-LUIZ-CARLOS-CARNEIRO-GENUINO-.pdf>.

32 VENTURI, J. J. *Álgebra Vetorial e Geometria Analítica*. Scienctia et Labor, Curitiba, 2015. Acesso em: 23 de julho de 2020. Disponível em: <https://www.geometriaanalitica-.com.br/copia-indice1>.

33 MOL, R. S. Introdução à História da Matemática. *CAED-UFMG*, Belo Horizonte. 2013. Acesso em: 25 de junho de 2020. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/ead-/wp-content/uploads/2016/08/introducao_a_historia_da_matematica.pdf>.

34 BIACINO, L. A geometrical solution by Fermat to a problem of maximum. *Applied Mathematical Science*, v. 8, n. 136, p. 6827–6834, 2014. Acesso em: 26 de julho de 2020. Disponível em: <http://www.m-hikari.com/ams/ams-2014/ams-133-136-2014-/biacinoAMS133-136-2014.pdf>.

35 BRENNAN, R. *Gigantes da Física*. Jorge Zahar Editor, 2000. Acesso em: 26 de julho de 2020. (Ciência e Cultura). ISBN 9788571104488. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MbEPWZVM8vEC>.

36 BOYER, C.; GOMIDE, E. *História da Matemática*. [S.l.]: Edgard Blücher, 1996.

37 SILVEIRA, J. F. P. *O Triângulo de Pascal é de Pascal?* Porto Alegre: UFRGS, 2001. Acesso em: 04 de abril de 2020. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil-/histo2b.html>.

38 LEACHENSKI, A. A. et al. *Binômio de Newton com expoente negativo e fracionário*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2017. Acesso em: 26 de julho de 2020. Disponível em: <https://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/2430/1/Alan Alceu Leachenski.pdf>.

39 GAROFALO, D. *Como as metodologias ativas favorecem o aprendizado*. 2018. Acesso em: 25 de junho de 2020. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/11897-/como-as-metodologias-ativas-favorecem-o-aprendizado>.