Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Wagner Tadeu Coelho Souza

A Educação Financeira No Ensino Médio: Da Escola para a Vida

Belo Horizonte
2020

Wagner Tadeu Coelho Souza

A EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: DA ESCOLA PARA A VIDA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Orientadora
Valéria Guimarães Moreira

Banca Examinadora
Erica Marlúcia Leite Pagani
Márcio Urel Rodrigues

Belo Horizonte
2020

Souza, Wagner Tadeu Coelho
S729e A educação financeira no ensino médio: da escola para a vida / Wagner Tadeu Coelho Souza. – 2020.
131 f.

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Orientadora: Valéria Guimarães Moreira.
Dissertação (mestrado) – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais.

1. Matemática financeira – Ensino médio – Brasil – Teses. 2. Base Nacional Comum Curricular – Teses. 3. Educação – Finalidades e objetivos – Teses. 4. Matemática – Ensino médio – Programa de atividades – Teses. I. Moreira, Valéria Guimarães. II. Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais. III. Título.

CDD 370.110981

Elaboração da ficha catalográfica pela bibliotecária Jane Marangon Duarte, CRB 6º 1592 / Cefet/MG

Wagner Tadeu Coelho Souza

A EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO: DA ESCOLA PARA A VIDA

Dissertação apresentada ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título de Mestre.

Aprovada: 19 de agosto de 2020.

Wagner Tadeu Coelho Souza

Wagner Tadeu Coelho Souza
(Autor)

Valéria Guimarães Moreira

Valéria Guimarães Moreira
(Orientadora)

Belo Horizonte
2020

Dedico esse trabalho, primeiramente, a Deus, que iluminou o meu caminho durante esta trajetória. À minha mãe, Maria, ao meu pai (sempre presente), às minhas irmãs, à minha esposa, aos meus filhos, aos amigos e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e resiliência para superar as dificuldades.

À minha querida mãe, Maria José Coelho Souza, heroína, meu grande amor, que sempre me deu apoio, amor incondicional e suporte para me tornar o homem que sou hoje.

Ao meu pai, Afonso Ligório Souza, que, mesmo não estando presente, sempre me apoiou e me lembrou da importância dos estudos. .

À minha irmã, Regina Célia Coelho de Sousa, que como uma segunda mãe, sempre me apoiou e deu o suporte que necessitava.

À minha irmã, Rejane Flaviana Coelho Souza, que, nos momentos alegres e tristes, sempre esteve ao meu lado.

À minha linda esposa, Eliane Nunes Gonçalves Rios, que com seu sorriso me conquistou e com seu amor e paciência me incentivou nos momentos de desânimo e cansaço.

À minha princesinha Lívia Souza Rios, que ilumina todos os meus dias com seu sorriso, me dando ânimo para sempre continuar.

Ao meu reizinho Théo Souza Rios, que chegou para alegrar ainda mais a minha vida e com suas gargalhadas me dão força para lutar pelos meus objetivos.

À tia Maria que, como um anjo da guarda, cuida tão bem dos meus maiores tesouros, me proporcionado tranquilidade para estudar e trabalhar.

Ao Mingau, que sempre esteve ao meu lado nas várias madrugadas de estudo.

Ao grande amigo Igor Magalhães Cunha, companheiro de Mestrado, que, nos vários momentos difíceis estendeu a mão e não deixou que eu desistisse.

À prof.(a) Valéria Guimarães Moreira, sinônimo de competência e dedicação, a quem serei eternamente grato.

Ao prof. Dr. Pedro Henrique Pereira Daldegan, que, além da competência demonstrou sensibilidade ao permitir que o meu sonho não fosse interrompido.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram/fazem parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Esta dissertação de mestrado busca fomentar uma discussão sobre a Educação Financeira no Ensino Médio. Considerando o alto índice de endividamento da população brasileira e a ausência de políticas públicas efetivas que acenem com uma mudança desse cenário, tornam-se necessárias ações que disseminem a discussão do tema na Educação Básica em todo o país, possibilitando que, na vida adulta, os alunos possam ter uma relação saudável, equilibrada e responsável em relação ao dinheiro no exercício da cidadania. Este trabalho tem como objetivo construir um material de apoio ao professor, para ser implementado no Ensino Médio, que promova discussões e aprendizagens à respeito de temas relativos à Educação Financeira que foram iniciadas no Ensino Fundamental. Na busca de atingir esse objetivo foram criadas duas sequências didáticas a serem trabalhadas com alunos do Ensino Médio que já adquiriram previamente conhecimentos sobre a Matemática Financeira, conteúdo essencial na busca do êxito dos alunos nas atividades propostas nessas sequências. Esse trabalho apresenta aspectos qualitativos e quantitativos, com características descritivas. O referencial teórico desta pesquisa baseia-se em documentos oficiais para a Educação Básica, de modo especial o BNCC, Base Nacional Comum Curricular, que traz a Educação Financeira como tema integrador entre as áreas de conhecimento, como também em trabalhos realizados por autores, tais como: Schneider (2008), Babinski (2017) e Zabala (1998). Os alunos que participaram dessa pesquisa já se aventuram em investimentos conservadores como poupança, CDB e tesouro Selic, porém, não possuem ainda nenhum tipo planejamento financeiro. Mudanças em cenários como esse, tão alarmante de endividamento da população, somente serão efetivas se abordarmos conhecimentos e discussões acerca da Educação Financeira na Educação Básica, tornando crianças, adolescentes e jovens capazes de compreender melhor o valor do dinheiro, economizar, investir e planejar seus gastos.

Palavras-chave: Matemática Financeira, BNCC e Sequência didática.

Abstract

This master's thesis proposes a discussion on Financial Education in High School. Considering the high indebtedness rate of the Brazilian population and the absence of effective public policies to change this scenario, it is mandatory to take actions that promote a discussion of the theme in basic education throughout the country, allowing students, to have a healthy, balanced and responsible relationship in relation to money in their adult life, in the exercise of citizenship. This work aims to provide the teacher with a support material to be implemented in High School and promote discussions and learning about themes related to Financial Education, which started in Elementary School. In order to achieve this objective, two didactic sequences have been created for high school students who had previously acquired knowledge about Financial Mathematics, an essential content in the search for student's success in the activities proposed in those sequences. This work presents both qualitative and quantitative aspects, with descriptive characteristics. The theoretical framework of this research is based on official documents for Basic Education, especially Brazil's National Common Curricular Base (BNCC), which brings Financial Education as an integrating theme between the areas of knowledge. Besides the BNCC, it also relies on works carried out by Schneider (2008), Babinski (2017) and Zabala (1998). The students participating in this research have already ventured into conservative investments such as savings and others. However, they still lack financial planning. Changes in scenarios like this so alarming scenario of indebtedness of the population will only be effective if we approach knowledge and propose discussions about Financial Education in Basic Education, making children, adolescents and young adults better able to understand value of money, saving, investing and planning their expenses.

Keywords: Financial Mathematics, BNCC and Teaching Sequence.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Em algum momento de sua vida você comprou algo e depois se arrependeu? Ou gastou mais do que recebeu? Saiba que você não está sozinho, aliás, você pertence a um grupo que no Brasil cresce a cada ano. Segundo o levantamento da Confederação Nacional do Comércio (CNC) realizado em janeiro de 2020[1], mais de 65% das famílias brasileiras declararam ter dívidas. Foram entrevistados cerca de 18 mil consumidores e a parcela média da renda comprometida com dívidas, é de 29,3%. O cartão de crédito é a principal causa do endividamento, mais de 79%, seguido dos carnês (15,6%) e do financiamento de carro (9,9%).

Vários fatores contribuem para esse cenário tão alarmante, dentre eles, destacam-se o desemprego, as altas taxas de juros, o aumento do custo de vida, a concentração de renda e a ausência de um planejamento financeiro. E esse cenário tende a ficar ainda pior ao longo do ano de 2020 e anos seguintes, pois, com o isolamento social devido a pandemia do COVID-19, muitos trabalhadores foram demitidos, empresas fecharam as suas portas, causando uma instabilidade econômica sem precedentes que afetará todos os brasileiros.

Esse grave cenário de endividamento está longe de ser um problema recente. Em 2010 foi criada a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF, uma política pública com o objetivo de contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudam a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. Para atingir esse objetivo a ENEF cria projetos com conteúdos para apoiar educadores, gestores, pais e alunos a desenvolver práticas financeiras conscientes.

Porém, ações como essa são pouco eficazes se considerarmos que uma grande parte da população não tem acesso à ela, por acontecer em um ambiente virtual, além disso, para famílias de baixa renda e escolarização, a atuação do Estado teria que ser mais didática e presencial. Nesse contexto, implementar nas escolas públicas e privadas a Educação

[1]Informações acessadas no link: https://www.brasildefato.com.br/2020/01/13/endividamento-bate-recorde-e-atinge-65-dos-brasileiros. Acesso em 10/02/2020.

Financeira (EF) seria uma estratégia mais eficaz para disseminar esse conhecimento.

Quanto mais cedo os alunos tiverem contato com técnicas e ferramentas que lhes permitam administrar melhor os seus recursos financeiros pessoais, mais rápido serão reduzidos os índices de inadimplência no Brasil, principalmente porque para muitos cidadãos a educação básica será a única ou uma das poucas oportunidades que terão de educar-se financeiramente.

Em 2017 foi homologada a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, que trouxe a Educação Financeira como um tema transversal da Educação Básica, inserindo essa discussão, de enorme importância para a sociedade, no ambiente escolar. Nesse documento, a Educação Financeira surge como um tema integrador para o ensino das diversas áreas do conhecimento. Porém, pela proximidade com a área de Matemática, a abordagem desse assunto geralmente fica a cargo do professor dessa área.

A implementação da Educação Financeira no Ensino Fundamental e consolidação no Ensino Médio, auxiliaria os estudantes a se tornarem mais críticos diante do excesso de "facilidades" apresentadas pelas propagandas, a extinguir despesas supérfluas, a buscar melhores fontes de renda, a desenvolver o hábito de poupar, a evitar pagamentos abusivos de juros, a enfrentar imprevistos financeiros, a planejar a aposentadoria e até a minimizar a possibilidade de o indivíduo cair em fraude, além disso, pode ainda viabilizar a realização de alguns sonhos possíveis com determinação e organização financeira.

Nesse contexto, esse trabalho tem como **objetivo principal construir um material de apoio ao professor, para ser implementado no Ensino Médio, que promova discussões e aprendizagens à respeito de temas relativos à Educação Financeira que foram iniciadas no Ensino Fundamental**. Para atingir esse objetivo foi utilizada como estratégia metodológica a aplicação de duas sequências didáticas sobre os temas: investimentos conservadores, consequências da inadimplência do cheque especial e cartão de crédito, o planejamento financeiro e orçamento familiar.

O público-alvo desse trabalho são alunos de Ensino Médio que tenham conhecimento prévio sobre os temas: porcentagem, juros compostos, taxas de juros, funções exponenciais, séries uniformes e sistemas de amortização. Nessa pesquisa, a primeira sequência didática proposta foi aplicada a 55 alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Belo Horizonte, com 5 encontros semanais de 50 minutos para a aplicação da primeira sequência didática. Já a segunda sequência didática não pôde ser realizada devido à suspensão das aulas durante o isolamento social provocado pela COVID-19.

A abordagem desse trabalho foi qualitativa ao investigarmos aspectos subjetivos como discussões sobre consumismo como os alunos, mas também foi quantitativa na análise das respostas apresentadas aos alunos nas atividades propostas. Além disso, essa pesquisa tem característica descritiva, pois, procura descrever o nível de conhecimento dos alunos sobre temas relacionados à Matemática Financeira e à Educação Financeira.

Essa dissertação de mestrado encontra-se, portanto, assim organizada: nesse presente capítulo, buscou-se apresentar a motivação da pesquisa, a proposta do tema, o objeto de pesquisa, indicar a metodologia de pesquisa aplicada e os objetivos propostos.

O capítulo 2, "Matemática Financeira", apresenta conceitos matemáticos que compõem o campo da Matemática Financeira, essencialS na fomentação das discussões sobre os temas ligados à Educação Financeira, que queremos promover aos alunos para os quais as sequências didáticas dessa dissertação são direcionados. Sendo assim, foram abordados os assuntos: razão, porcentagem, função afim e exponencial, progressões aritmética e geométrica, juros simples e composto, taxas de juros, séries uniformes e sistemas de amortização.

No capítulo 3, "Referencial teórico", é realizada uma pesquisa documental e bibliográfica buscando mostrar uma cronologia dos contextos e leis que regem/regeram a Educação Financeira no Brasil.

No capítulo 4 é apresentada a metodologia utilizada nessa pesquisa de mestrado, perpassando pelas etapas de sua realização.

O capítulo 5, "Análise dos dados", apresenta os dados coletados por meio de um questionário de sondagem, aplicado anterior ao início da sequência didática I, e uma atividade prática que foi aplicada ao final da sequência didática I, propostos nesta dissertação. Essa análise foi baseada exclusivamente nesses dois dados, destacando os aspectos quantitativos e qualitativos que contribuíram na observação do grau de interesse e aprofundamento do conhecimento dos alunos nos temas proposto e no objetivo que é o de promover uma discussão sobre os temas: investimentos conservadores, consequências da inadimplência dos cheque especial e cartão de crédito, planejamento financeiro e orçamento familiar, que são assuntos intimamente ligados à Educação Financeira.

No capítulo 6, são discutidas as considerações finais acerca de toda a pesquisa realizada de forma a fazer considerações em relação ao objetivo proposto nesse trabalho.

2 A Matemática Financeira

Para Santos a Matemática Financeira está ligada intimamente ao comportamento do dinheiro no tempo:

> De uma forma simplificada, podemos dizer que a Matemática Financeira é o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (time value money). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são a taxa de juros, o capital e o tempo. (SANTOS[1], 2005, p. 157).

Nesse contexto, o estudo da Matemática Financeira se torna indispensável para compreendermos como nosso capital evolui em carteiras de investimentos ou quais são as implicações quando deixamos de pagar a fatura do cartão de crédito, cheque especial ou algum tipo de tributo. Além disso, tem extrema importância em tomada de decisões rotineiras como: se um determinado pagamento deve ser feito à vista ou parcelado. Além disso, existem as tomadas de decisões mais complexas como investimentos na bolsa de valores. Aplicar adequadamente o dinheiro traz maior rentabilidade, maximizando assim os resultados.

Já para Schneider[2] (2008) a Matemática Financeira, como parte ou ramo da Matemática é composta de vários conteúdos interligados e interdependentes, formando um sistema de conceitos. Na busca de um entendimento maior sobre a Matemática Financeira, esse capítulo terá como foco abordar esse sistema de conceitos que formam a Matemática Financeira, servindo de referencial para os professores de Matemática e outros pesquisasdores que se aventurarem no estudo desse tema. Os conteúdos abordados serão: razão, porcentagem, função afim e exponencial, progressões, juros simples e compostos, séries uniformes e sistemas de amortização.

2.1 Razão e Porcentagem

A palavra razão vem do latim ratio, e significa "divisão". Esse conceito será muito útil para estudarmos porcentagem, comparações entre duas grandezas, etc.

Definição 2.1: A razão entre dois números reais a e b, em que $b \neq 0$, é definido por $\frac{a}{b}$. Se $b = 100$, a razão é chamada taxa percentual.

As razões podem ser dividas em dois casos: razão entre grandezas distintas e entre grandezas iguais. Lembrando que grandeza é tudo aquilo que pode ser mensurado. A razão entre grandezas distintas tem como resultado o surgimento de uma nova grandeza; por exemplo, a razão entre as medidas de distância e tempo tem como resultado a grandeza velocidade. Já quando a razão envolve medidas de mesma grandeza o resultado será uma constante; por exemplo, ao calcularmos a escala, dividimos a distância no desenho pela distância real e o resultado será um número sem unidade.

Exemplo 2.1.1: (ENEM[1] 2010[2]) No monte de Cerro Armazones, no deserto de Atacama, no Chile, ficará o maior telescópio da superfície terrestre, o Telescópio Europeu Extremamente Grande (E-ELT). O E-ELT terá um espelho primário de 42 m de diâmetro, "o maior olho do mundo voltado para o céu". Disponível em: http://www.estadao.com.br. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Ao ler esse texto em uma sala de aula, uma professora fez uma suposição de que o diâmetro do olho humano mede aproximadamente 2,1 cm. Qual a razão entre o diâmetro aproximado do olho humano, suposto pela professora, e o diâmetro do espelho primário do telescópio citado?

a) 1 : 20

b) 1 : 100

c) 1 : 200

d) 1 : 1.000

[1] O Exame Nacional do Ensino Médio - Enem tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. A partir de 2004, a prova passou a ser utilizada como ferramenta para ingresso em instituições do ensino superior e, em 2010, com sua inclusão no Sistema de Seleção Unificada - Sisu, foi reconhecido como o maior e mais completo exame educacional do Brasil.

[2] http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno7_azul_com_gab.pdf. Questão 137. Acesso em: 11/09/2020.

e) 1 : 2.000

Resolução: Estabelecendo a razão entre o diâmetro do olho humano e o diâmetro do espelho primário do telescópio E-ELT, temos:

$$\frac{2{,}1\ cm}{42\ m} = \frac{2{,}1\ cm}{4.200\ cm} = \frac{2{,}1}{4.200} = \frac{1}{2.000}.$$

Portanto, a razão será 1:2.000, o que significa que o diâmetro do espelho primário é 2.000 vezes maior que o diâmetro do olho humano.

A porcentagem está presente em nosso dia a dia, tornando-se uma ferramenta importante no cálculo e interpretação de situações corriqueiras como: indicadores econômicos, redução do IPI (Imposto sobre produto industrializado), resultados de pesquisas ou promoções, cálculo de juros em compras financiadas, financiamentos de carros, casas, apartamentos, empréstimos bancários, entre outras situações.

Como vimos na definição 2.1 a porcentagem é uma razão cujo denominador é 100, sendo representada pelo símbolo %. Por exemplo $\frac{25}{100} = 25\% = 0{,}25$. Assim, a porcentagem pode ser representada por uma fração, que, por sua vez, pode ser escrita na forma decimal.

É importante perceber que 100% refere-se a um inteiro, ou seja, quando consideramos o valor de 100% de uma grandeza, estamos levando em conta o total dessa grandeza. Ao calcularmos 200%, estamos considerando mais que um inteiro, isto é, consideramos duas vezes o total. Para realizar o cálculo da porcentagem de um valor, basta multiplicar esse valor pela porcentagem em sua forma decimal ou fracionária.

Exemplo 2.1.2: (ENEM 2010[3]) Um grupo de pacientes com hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%. Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de:

a) 16%

b) 24%

[3] http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2010/dia2_caderno7_azul_com_gab.pdf. Questão 171. Acesso em: 11/09/2020.

c) 32%

d) 48%

e) 64%

Resolução: O percentual de pacientes que não foram curados com o tratamento tradicional são: 100% - 40% = 60%, já o percentual de pacientes curados pelo primeiro tratamento são $\frac{1}{2}$.60%.35% = $\frac{1}{2}$.0,6.0,35 = 0,105 = 10,5% e os pacientes curados pelo segundo tratamento são $\frac{1}{2}$. 60% .45% = $\frac{1}{2}$.0,6.0,45 = 0,135 = 13,5%

Assim em relação ao total de pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de: 10,5% + 13,5% = 24%.

Portanto, a resposta correta é 24%.

2.2 Fatores de Reajuste e Desconto

Para calcularmos de forma mais rápida os decréscimos, descontos ou reduções utilizamos o fator de desconto, já para calcularmos os aumentos, acréscimos, podemos utilizar o fator de reajuste. O fator de desconto (ou fator reajuste) é um número que permite achar o novo preço de uma mercadoria, após um desconto (ou um reajuste) percentual, com uma única multiplicação. A seguir apresentaremos as fórmulas que representam os fatores de reajuste e descontos.

Se uma mercadoria que custa x reais sofre um desconto de $i\%$, então o novo valor dessa mercadoria será $x - \frac{i}{100}x = x\left(1 - \frac{i}{100}\right)$, ou seja, para encontrar o novo valor da mercadoria, basta mutiplicar seu valor inicial pelo fator de desconto que pode ser representado por:

$1 -$ taxa de redução (representação decimal da porcentagem).

Analogamente, se uma mercadoria que custa x reais sofrer um reajuste de $i\%$, então o novo valor dessa mercadoria será $x + \frac{i}{100}x = x\left(1 + \frac{i}{100}\right)$, ou seja, para encontrar o novo valor da mercadoria, basta mutiplicar seu valor inicial pelo fator de reajuste que pode ser representado por:

$1 +$ taxa de aumento (representação decimal da porcentagem).

Exemplo 2.2.1: O salário-mínimo no ano de 2015 sofreu um aumento de 8,84%. Sabendo que no ano de 2014 o salário-mínimo era de $R\$$ 724,00, qual será o valor do salário-mínimo para 2015?

Resolução: Observamos que o fator de reajuste é $1 + 0{,}0884 = 1{,}0884$. Portanto efetuando o produto $(1{,}0884) \cdot (724) = 788{,}0016$, obtemos que o novo salário será, como aproximação de duas casas decimais, igual a $R\$$ 788,00

Portanto, o novo valor da salário mínimo será de $R\$$ 788,00.

Exemplo 2.2.2: Um Ford Ka 1.0 com motor flex, ar-condicionado, direção elétrica e bluetooth custa: $R\$$ 35.390,00. Devido à redução do IPI (Imposto sobre produto industrializado) de 3%, qual será o valor a ser pago pelo carro?

Resolução: Observamos que o fator de desconto é $1 - 0{,}03 = 0{,}97$, portanto efetuando o produto $(0{,}97).(35.390{,}00) = 34.328{,}30$, obtemos que o novo valor do carro será $R\$$ 34.328,30.

Portanto o valor a ser pago pelo carro é de $R\$$ 34.328,30.

Exemplo 2.2.3: (ENEM2011[4]) Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de $R\$$ 3.800,00 gerado pela aplicação. A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

a) $R\$$ 4.222,22.

b) $R\$$ 4.523,80.

c) $R\$$ 5.000,00.

d) $R\$$ 13.300,00.

e) $R\$$ 17.100,00.

Resolução: Seja x a quantia inicial aplicada nas ações. No primeiro mês a pessoa perdeu $0{,}3x$, ficando com $0{,}7x$. No segundo mês ganhou $0{,}2.0{,}3x = 0{,}06x$, restando assim um total de $0{,}7x + 0{,}06x = 0{,}76x$. Temos que $0{,}76x = 3.800$, ou seja $x = 5.000$.

Portanto, a quantia inicial aplicada foi de $R\$$ 5.000,00.

[4] http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2011/05_AMARELO_GAB.pdf. Questão 162. Acesso em 11/09/2020

Exemplo 2.2.4: Em março de 2011, a garrafa de 500ml de suco de bujurandu custava $R\$$ 5,00. Em abril, o valor subiu 10% e, em maio, caiu 10%. Qual o preço da garrafa em junho?

a) $R\$$ 4,50.

b) $R\$$ 4,95.

c) $R\$$ 5,00.

d) $R\$$ 5,50.

e) $R\$$ 6,00.

Resolução: Aplicando sucessivamente o fator de reajuste e o fator de desconto temos qua o novo valor da garrafa de vinho que será $5.(1{,}10) \cdot (0{,}90) = R\$\ 4{,}95$.

Assim, o valor da garrafa suco de bujurandu em junho é de $R\$$ 4,95.

2.3 Função

O estudo das funções surgiu da necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências, criar modelos matemáticos e auxiliar em tomadas de decisões. Suas aplicações podem ser encontradas em diversas áreas do conhecimento como: na Química ao analisarmos decaimento radioativo, na Biologia ao investigarmos o crescimento de bactérias em uma colônia, na Geografia na observação do crescimento populacional, na Geologia na inspeção da magnitude de um terremoto.

No estudo da Matemática Financeira, as funções são relacionadas às aplicações de capitais nos regimes de Juros Simples e Compostos, que se relacionam com a função Afim e a função Exponencial, respectivamente. Então, com intuito de dar suporte ao estudo dos Juros Simples e Compostos, apresentaremos a definição de função e um estudo das funções Afim e Exponencial, como também apresentaremos problemas de aplicação na área da Matemática Financeira.

Definição 2.2: Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Dizemos que f é uma função de A em B e denotamos por $f : A \to B$ se f associa a cada elemento x do conjunto A um único elemento y (denotado por $y = f(x)$) do conjunto B.

O conjunto A é o *domínio da função f* que pode ser representado por $D(f)$, seus elementos geralmente são representados pela letra x, também conhecidos como variáveis independentes da função f. Já o conjunto B é o *contradomínio da função f* e pode ser representado por $CD(f)$.

Por definição, cada elemento x do domínio de f tem um único correspondente y no contradomínio de f e a esse valor de y dá-se o nome de *imagem de x* pela função f. O conjunto de todos os valores de y é chamado de *conjunto imagem da função f* e é representado por $Im(f)$. Assim, o conjunto imagem da função é um subconjunto do conjunto B.

O *gráfico da função f* é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano, tal que $x \in D(f)$ e $y \in Im(f)$. Ou seja,

$$G(f) = \{(x,f(x)); x \in D(f)\}.$$

2.4 Função Afim

A função Afim está presente no nosso dia a dia, muito mais do que podemos imaginar, afinal quando abastecemos o carro no posto de gasolina, o preço a ser pago depende da quantidade de litros de combustível colocada no tanque, uma relação de proporcionalidade direta, que pode ser representada por uma função Linear, um caso particular da função Afim. Já na profissão de vendedor, é rotineiro o salário ser composto por uma parte fixa e outra variável, que geralmente representa um percentual do valor total vendido no mês corrente. Temos ainda na Física uma função Afim que representa a correspondência entre as medidas de temperatura em graus Celsius e Fahrenheit e no estudo da cinemática (ramo da física que estuda os movimentos dos corpos), temos a função horária do espaço em relação ao tempo que também pode ser representada por uma função Afim. Para esse trabalho a relevância do estudo da função Afim está na busca de um melhor entendimento no estudo dos Juros Simples.

Definição 2.3: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se Afim quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$, tais que $f(x) = ax + b$.

A constante b recebe o nome de *valor inicial de f* ou *coficiente linear de f* e pode ser determinada pelo valor da função quando $x = 0$, assim, $b = f(0)$. A constante a é chamada de *coeficiente angular de f*. Segundo Lima[3] (2003), o nome coeficiente angular não é adequado, uma vez que não existe um ângulo envolvido na definição de f, apenas no gráfico de f, como veremos mais tarde.

Para a caracterização da constante a, escolhemos dois pontos distintos e arbitrários x_1 e x_2, pertencentes ao $D(f)$, que possuem, respectivamente, as imagens $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

ou seja, a constante a é dada por

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{2.1}$$

A equação (2.1) nos mostra que conhecendo a imagem de dois pontos arbitrários x_1 e x_2, podemos determinar o valor da constante a por meio da razão entre a variação na imagem $(\triangle y)$ e variação no domínio $(\triangle x)$ em um intervalo limitado.

Definição 2.4: Dados x, $x+h \in D(f)$, como $h \neq 0$, a constante $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se taxa de crescimento (ou de decrescimento), da função f no intervalo de extremos x, $x+h$.

E será justamente esse o valor da taxa de varição, constante, a que utilizaremos para caracterizar a função quanto ao seu crescimento e decrescimento. Portanto, precisamos antes conhecer a definição de uma função crescente e descrescente em um intervalo limitado.

Definição 2.5: Considere $f : D \to \mathbb{R}$ e $I \subset D$ um intervalo. Dizemos que f é

1. crescente em I se para todo $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) < f(x_2)$ e
2. decrescente em I se para todo $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$ temos que $f(x_1) > f(x_2)$.

Considere a função afim $f(x) = ax + b$. Como já visto anteriormente,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Assim, se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$; a partir de (2.1). concluímos que:

1. Se $a > 0$ então $f(x_1) < f(x_2)$ e portanto f é crescente em $\mathbb{R}$.

2. Se $a < 0$ então $f(x_1) > f(x_2)$ e portanto f é decrescente em $\mathbb{R}$.

3. Se $a = 0$ então $f(x_1) = f(x_2)$ e dizemos que a função é constante.

Para melhor entendimento desse crescimento ou decrescimento da função podemos utilizar a análise gráfica. Para isso, veremos qual figura geométrica representa o gráfico da função Afim.

O gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta e para ver isso basta mostrar que três pontos distintos e arbitrários P_1, P_2 e P_3 pertencentes ao gráfico de f são colineares. Para que isso ocorra, é necessário e suficente que o maior dos três números $D(P_1{,}P_2)$, $D(P_1{,}P_3)$ e $D(P_2{,}P_3)$, em que $D(P_i, P_j)$ indica a distância entre os pontos P_i, P_j, seja igual à soma dos outros dois.

Agora, dados os valores das abscissas x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}$, definimos os pontos $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$.

Calculando as distâncias ponto a ponto temos:

$$D(P_1{,}P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 + b - (ax_1 + b))^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2},$$

$$D(P_2{,}P_3) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 + b - (ax_2 + b))^2} = (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2},$$

$$D(P_1{,}P_3) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 + b - (ax_1 + b))^2} = (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2}.$$

Sem perda de generalização, suporemos, que $x_1 < x_2 < x_3$ donde segue imediatamente que:

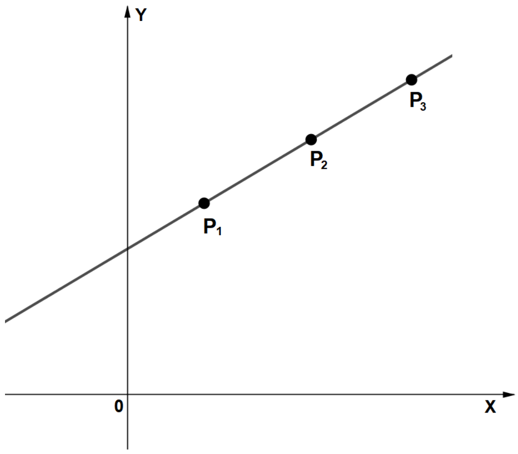
$$D(P_1{,}P_3) = D(P_1{,}P_2) + D(P_2{,}P_3).$$

A Figura (2.1) representa geometricamente a situação demonstrada acima.

Sendo o gráfico da função afim uma linha reta, segue da Geometria Euclidiana, que essa reta fica inteiramente definida quando se conhecem apenas dois de seus pontos distintos e arbitrários o que torna mais fácil a construção do seu gráfico.

Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto de interseção entre o gráfico da função e o eixo OY. Já o número a, nesse contexto, pode ser chamado de inclinação ou coeficiente angular da reta r, que é a representação geométrica do gráfico de f, pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo formado entre eixo OX e a essa reta r.

Figura 2.1: Gráfico de uma função Afim



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

De modo geral, dada a função Afim $f(x) = ax + b$, a reta r que é o gráfico de f, dois pontos (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in r$ e o ângulo θ formado pelo eixo x e a reta r, temos

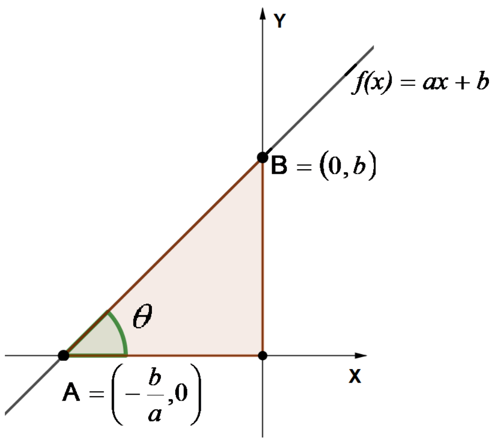
$$\operatorname{tg}\theta = a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.2}$$

em que $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. O número a é também é chamado de taxa de variação de f, como mencionado anteriormente.

A relação (2.2) é válida para qualquer valor de a. Como forma de completar os estudos, a seguir, mostraremos a válidade tanto para $a > 0$, quanto para $a < 0$.

Seja a reta da Figura (2.2) a representaçao geométrica da função $f(x) = ax + b$, sendo $a > 0$.

Figura 2.2: Tangente de θ, para 0< θ<$\frac{\pi}{2}$



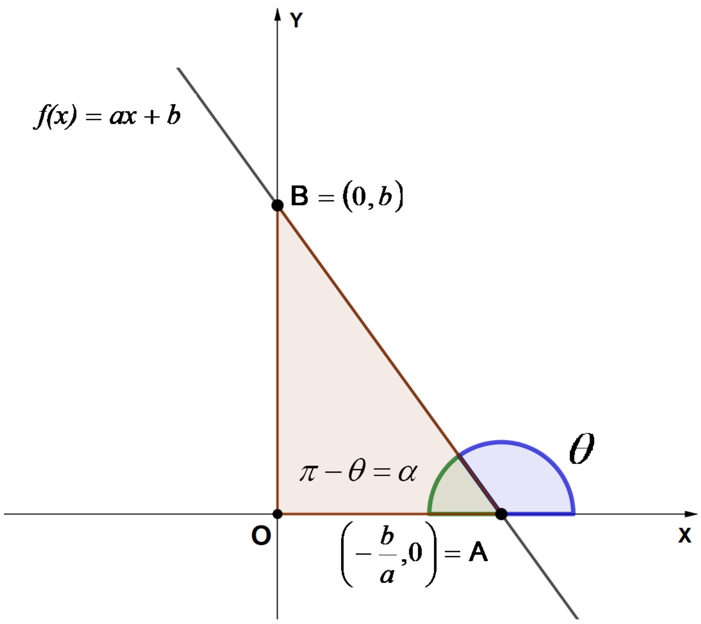
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Da trigonometria, temos que a tangente do ângulo θ é igual a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}} = \frac{b}{\frac{b}{a}} = a.$$

Agora, seja a reta da Figura (2.3) a representaçao geométrica da função $f(x) = ax+b$, para $a < 0$.

Figura 2.3: Tangente de θ, para $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Quando a é negativo, nós utilizamos o suplementar do ângulo θ para mostrar essa relaçâo. Para isso basta utilizar o suplementar de θ e mostrar que $a = -\operatorname{tg}(\pi - \theta) = \operatorname{tg}\theta$. Utilizando os pontos A,B e C definidos anteriormente, obtemos o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo A é igual a $\alpha = \pi - \theta$. Temos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} = -a.$$

Como $\operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg}\theta$, segue que

$$\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}(\pi - \theta) = -(-a) = a.$$

Finalmente, observamos que o ângulo θ depende do coeficiente angular a, assim se o coeficiente angular for positivo o ângulo de inclinação será agudo, se o coeficiente angular for negativo o ângulo de inclinação será obtuso. Além disso, para $a > 0$ quanto maior o valor de a maior será o ângulo de inclinação da reta.

Apresentaremos agora um exemplo de um problema de aplicação envolvendo a função Afim dentro do contexto da Matemática Financeira.

Exemplo 2.4.1: Um vendedor recebe mensalmente um salário fixo de $R\$$ 1.000,00 mais uma comissão de 5% sobre valor total de vendas do mês. Esse vendedor, a cada duas horas e meia de trabalho, vende o equivalente a $R\$$ 500,00. Supondo que mensalmente ele trabalhe 180 horas por mês, o que é preferível: um aumento de 20% no salário fixo, ou um aumento de 20% na taxa de comissão?

Resolução: O salário $S(x)$ desse vendedor pode ser representado pela função

$$S(x) = 1.000 + 0{,}05x,$$

sendo x o valor total vendido por ele no período de um mês. Assim, considerando as 180 horas mensais, ele vende, por mês, $\frac{500 \cdot 180}{2{,}5} = 36.000$. Agora, considerando que ele trabalhe 180 horas mensais e que receba um aumento de 20% no salário fixo nesse mês ele receberia $S(36.000) = 1.000.(1{,}2) + 0{,}05 \cdot (36.000) = R\$\ 3.000{,}00$, por outro lado se o aumento de 20% incidir somente na taxa de comissão o seu salário seria

$$S(36.000) = 1.000 + 0{,}05 \cdot (36.000) \cdot (1{,}2) = R\$\ 3.160{,}00.$$

Assim, a escolha mais vantajosa para esse vendedor seria de um aumento de 20% na sua taxa de comissão.

Dentre os casos particulares da função Afim, destacaremos a função Linear, definida pela fórmula $f(x) = ax$, que é um modelo matemático utilizado para resolver problemas de proporcionalidade, assunto esse com ampla aplicação como na Lei de Boyle-Mariotte (geralmente chamada apenas de Lei de Boyle), na Lei da gravitação universal, na Lei de Kepler e no Juros Simples.

Segundo Trajano (apud, LIMA. 2017, p. 92), duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta, e no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Se ao invés de grandezas no texto tivéssemos as palavras medidas, que são números reais, poderiamos traduzir a fala de Trajano da seguinte maneira. Uma proporcionalidade é uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, para quaisquer números reais c e x tem-se $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(c \cdot x) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa). Nessa formatação, as grandezas definidas por Trajano são os números reais x e y e a correpondência entre essas grandezas é a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, $y = f(x)$.

Assim, supondo que $a = f(1)$ e $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ definida para todo c e x reais, se $f(c \cdot 1) = c \cdot f(1)$ então $f(c) = c \cdot a$ o que equivale a $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo f é uma função Linear.

Daí podemos definir que as grandezas x e y são diretamente proporcionais ou (proporcionais) se existir um número a (chamado de coeficiente ou constante de proporcionalidade), tal que, $y = ax$ para todo valor de x.

Por fim, em problemas relacionados à proporcionalidade direta o que importa muitas vezes é saber apenas que se $y_a = f(x_a)$ e $y_b = f(x_b)$, então $\frac{y_b}{x_b} = \frac{y_a}{x_a}$ é constante. E quando essa correspondência $x_a \to y_a$, $x_b \to y_b$ é uma proporcionalidade, a igualdade $\frac{y_b}{x_b} = \frac{y_a}{x_a}$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três, a essa relação damos o nome de "regra de três".

Exemplo 2.4.2: Carlos contraiu um empréstímo com seu primo no valor de $R\$$ 5.000,00. Porém, devido ao grau de parentesco foi utilizado o regime de juros simples com taxa de juros de 5% ao mês em um período de 3 meses. Qual será a dívida de Carlos após esse período de 3 meses?

Resolução: Para resolver esse problema usaremos a regra de três simples.

Porcentagem	Capital
100%	5.000
5%	x

$\frac{100}{5} = \frac{5.000}{x}$

$100x = 25.000$

$x = 250$

Como esse valor corresponde ao juros cobrado em um período de apenas 1 mês, precisamos triplicar esse valor para obter o montante da dívida. Assim, o valor total da dívida será de $R\$$ 5.750,00.

2.5 Função Exponencial

A função Exponencial representa um crescimento ou um decrescimento característico de alguns fenômenos da natureza, por isso está presente em algumas áreas de conhecimento como na Química, Física e Biologia. As aplicações são inúmeras e a seguir destaco algumas delas:

1. Medicamentos

   Quando um certo medicamento é administrado a um paciente, o número de miligramas que permanece na corrente sanguínea do paciente após t horas é modelado por:

   $D(t) = A \cdot e^{-\beta \cdot t}$

   em que, A e β variam de acordo com o medicamento.

2. Decaimento Radioativo

   Uma substância radioativa decai de tal maneira que, a quantidade de massa restante após período de tempo t é dada pela função:

   $m(t) = B \cdot e^{-\alpha t}$ onde $m(t)$ é medido em quilogramas e B e α variam de acordo com a substância radioativa.

3. Crescimento Logístico

   As populações de animais não são capazes de crescer indefinidamente devido a limitação de seu habitat e alimentos. Sob tais condições, a população segue um modelo de crescimento logístico: $P(t) = \frac{d}{1+k \cdot e^{-ct}}$ onde c , d e k são constantes positivas , e t é medido em anos.

A função Exponencial possui inúmeras aplicações em diversas áreas do conhecimento e nessa seção temos o objetivo de entender o comportamento dessa função, apropriando desse conhecimento para compreender o funcionamento dos Juros Compostos, tema esse, importante na Matemática Financeira. Para introduzir o assunto de forma mais contextualizada, apresentaremos inicialmente um exemplo relacionado a juros compostos.

Exemplo 2.5.1: Victor resolveu investir o capital de $R\$$ 5.000,00 na poupança durante o período de 3 meses. Atualmente o valor da Selic é inferior a 8,5% ao ano o que restringe o valor do juros da poupança em 70% da taxa Selic, mais a TR. Assim, considerando na poupança é utilizado o regime de juros compostos, determine:

a) o montante de Victor, após esse período, sabendo que a TR será de 0% e a taxa de juros mensal da poupança será de 0,3%;

b) o montante de Victor, após t período.

Resolução: a) No primeiro mês de capitalização composta o valor do montante será de:

$M = 5.000 + 5.000 \cdot 0{,}003$

$M = 5.000 \cdot (1 + 0{,}003)$

$M = 5.000 \cdot 1{,}003 = R\$ \ 5.015{,}00$

Já no segundo mês teremos:

$M = (5.000 \cdot 1{,}003) \cdot 1{,}003$

$M = 5.000 \cdot (1{,}003)^2 = R\$ \ 5.030{,}05$

Para finalizar temos:

$M = [5.000 \cdot (1{,}003)^2] \cdot (1{,}003)$

$M = 5.000 \cdot (1{,}003)^3 = R\$ \ 5.045{,}14$

Portanto o montante de Victor após três meses será de $R\$$ 5.045,14.

b) Da alternativa anterior percebemos que o expoente do fator de reajuste 1,003 representa o número de meses investido, logo para t meses o montante será de

$M(t) = 5.000 \cdot (1{,}003)^t$.

O resultado da letra b representa uma função a qual damos o nome de Exponencial. A seguir temos a sua definição.

Definição 2.6: A função exponencial de base a é definida por

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \to a^x$$

tal que a é um número real fixo, chamado base, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Segue que a função assim definida satisfaz as seguintes propriedades, para todo $x, y \in \mathbb{R}$

1. $f(x).f(y) = f(x + y)$;

2. $a^1 = a$;

3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ quando $0 < a < 1$.

Desta forma, a função Exponencial fica inteiramente caracterizada se, e somente se, atender as propriedades (1), (2) e (3), ou seja, se uma função f possui essas três propriedades ela pode ser escrita como: $f(x) = a^x$, com $a = f(1)$.

Iniciaremos a demonstração da da função Exponencial para o conjunto $\mathbb{N}$. Assim, para $x \in \mathbb{N}^+$, temos que:

$$f(x) = f(1 + 1 + \cdots + 1) = f(1) \cdots f(1) = a.a \cdots a = a^x.$$

Agora precisamos saber o valor da função para $x = 0$, assim temos:

$f(0) = f(0 + 0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) = 1$.

Definido dessa forma, a igualdade $f(0) = 1$ preserva a propriedade(1). Ainda supondo que $x \in \mathbb{N}$, queremos definir o valor de $f(-x)$, assim temos,

$$-x + x = 0 \Rightarrow f(-x + x) = f(0) \Rightarrow f(-x) \cdot f(x) = 1 \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

Portanto, fica definida a função Exponencial para o conjunto $\mathbb{Z}$. Já para o conjunto Q, precisamos definir o valor da função para $r \in Q$, sendo $r = \frac{m}{n}$. Assim, temos

$$f\left(\frac{m}{n}\right)^n = f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) \cdot \ldots \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \cdots + \frac{m}{n}\right) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = f(m)$$

Assim, temos que

$$f\left(\frac{m}{n}\right)^n = f(m) \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{f(m)}.$$

Assim, fica definida a função Exponencial para o conjunto $\mathbb{Q}$, restando apenas a demonstração para o conjunto dos números Irracionais, que devido à complexidade da demonstração e principalmente pela proposta desse trabalho, não demonstraremos, admitindo assim que a função está definição também para esse conjunto.

Para um melhor entendimento do comportamento dessa função, estudaremos as características da curva exponencial, nome dado ao gráfico da função Exponencial. Para termos sustentação na construção desse gráfico precisaremos percorrer um caminho com algumas proposições e teoremas. Para iniciar precisamos estabelecer uma condição inicial que é a da função não assumir o valor de 0, pois se ela assumir esse valor, será identicamente nula, contrariando a propriedade (3).

Proposição 2.7: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, então $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui a propriedade (1), ou seja, $f(x+y) = f(x).f(y)$, então essa função não pode assumir o valor 0, a não ser que ela seja identicamente nula. Para provar isso, vamos supor que exista $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$. Então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$f(x) = f(x_0 + (x - x_0)) = f(x_0) \cdot f(x - x_0) = 0 \cdot f(x - x_0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo f, será identicamente nula; ou seja, se ela se anular em um ponto, ela se anularia em todos os pontos, contrariando a propriedade (3).

O próximo passo é analisar o estudo do sinal da função para todo x real.

Proposição 2.8: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = a^x$, então $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Supondo que exista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não identicamente nula e que satisfaça a propriedade (1), então f para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right).f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0.$$

Logo f é estritamente positiva para $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dessa proposição percebemos que a imagem da função f será sempre positiva, assim, o conjunto imagem de f será $\mathbb{R}^+$. Os próximos passos para a construção do gráfico serão, analisar a sua continuidade e o seu comportamento para todo o seu domínio.

Proposição 2.9: A função exponencial é contínua.

Demonstração: Provaremos que $\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ para dado $x_0 \in \mathbb{R}$.

Dado $x_0, h \in \mathbb{R}$ e $h > 0$; seja $x = x_0 + h$, temos que $h = x - x_0$ e a^{x_0} uma constante positiva. Tomando $\mid a^h - 1 \mid < \frac{\epsilon}{a^{x_0}}$ para um h suficientemente pequeno, temos:

$\mid a^x - a^{x_0} \mid = \mid a^{x_0+h} - a^{x_0} \mid = \mid a^{x_0} \cdot (a^h - 1) \mid = a^{x_0} \cdot \mid (a^h - 1) \mid < \epsilon$. Portanto o

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0},$$

para dado $x_0 \in \mathbb{R}$, o que garante a continuidade da função Exponencial.

Para entendermos o seu comportamento no intervalos $(0, +\infty)$, temos a proposição (2.10).

Proposição 2.10: Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$, $a > 1$. Se x cresce indefinidamente então f é ilimitada superiormente.

Demonstração: Para provar que a função f é ilimitada superiormente quando x cresce indefinitamente basta provar que

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

Seja $a = 1 + h$, $h > 0$. Para $n \in \mathbb{N}^*$, temos que

$$(1+h)^n = \binom{n}{0}h^0 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^n$$

(expansão do binômio de Newton)

Daí, $a^n = (1+h)^n = \binom{n}{0}h^0 + \binom{n}{1}h + \binom{n}{2}h^2 + ... + \binom{n}{n}h^n \leq 1 + nhparan \leq 1$. Como $h > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty}(a^n) \leq \lim_{n\to+\infty}(1+nh) = +\infty.$$

Logo

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty.$$

Portanto, para $a > 1$ o gráfico de $f(x) = a^x$ é ilimitado superiormente. Por outro lado, precisamos definir o seu comportamento para o intervalo $(-\infty,0)$, o que será feito na proposição (2.11). Vale ressaltar que para $x = 0$ a função já foi definida, sendo igual a $f(0) = 1$.

Proposição 2.11: Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $a > 1$. Se x decresce indefinidamente então os valores de $f(x)$ se aproximam de zero.

Demonstração:

Para provar que a função $f(x)$ tem seus valores se aproximando de zero quando x decresce indefinitamente basta prova que o

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

Assim, fazendo $x = -u$, temos

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{u \to +\infty} a^{-u} = \lim_{u \to +\infty} \left(\frac{1}{a^u}\right) = 0$$

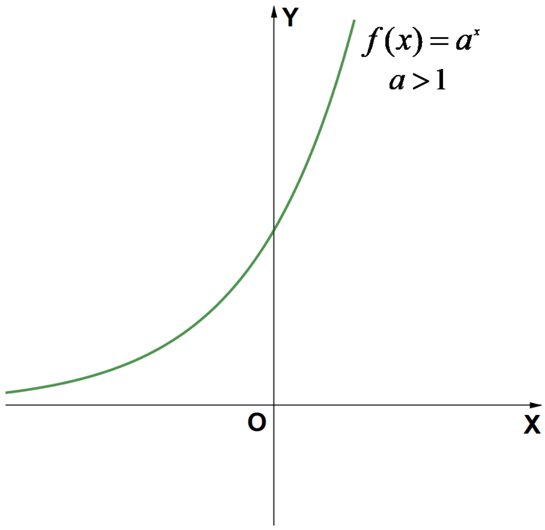
Portanto, como

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0,$$

então o gráfico de $f(x) = a^x$ se aproxima de zero.

Assim, baseado nas proposições (2.9), (2.10) e (2.11) podemos construir a reprentação gráfica da função Exponencial $f(x) = a^x$ para $a > 1$, conforme Figura (2.4).

Figura 2.4: Gráfico da função Exponencial crescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Observe que $a > 1$ a função possui um crescimento lento no intervalo $(-\infty,0)$ e um crescimento acelerado no intervalo $(0,\infty)$.

Precisaremos agora entender o comportamento do gráfico da função Exponencial $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$, e para isso baseamos a nossa análise nas duas próximas proposições.

Proposição 2.12: Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$. Se x cresce indefinidamente então os valores de $f(x)$ se aproximam de zero.

Demonstração: Para provar que a função $f(x)$ tem seus valores se aproximando de zero quando x cresce indefinidamente basta provar que

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Se $0 < a < 1$ então $\frac{1}{a} > 1$. Da proposição (2.10), temos que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^x = +\infty.$$

Logo,

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{a^{-x}}\right) = 0.$$

Portanto, como

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

Concluimos que a função $f(x) = a^x$, para $1 < a < 0$ se aproxima de zero quando x cresce indefinidamenete.

Definido que essa função é limitada inferiormente precisamos analisar o seu comportamento superiormente.

Proposição 2.13: Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, com $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$. Se x decresce indefinitivamente então a função f é ilimitada superiormente.

Demonstração: Para provar que a função $f(x)$ é ilimitada superiormente quando x decresce indefinidamente basta provar que

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Logo,

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{a^{-x}}\right) = +\infty.$$

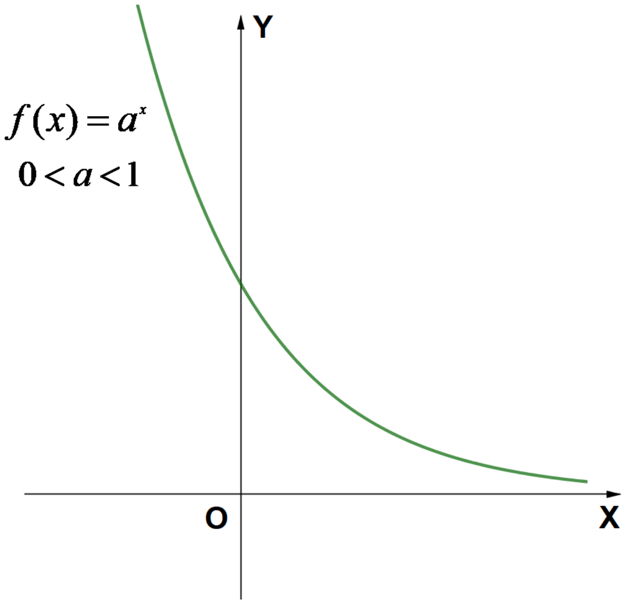
Portanto, como

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty,$$

então o gráfico de $f(x) = a^x$, para $0 < a < 1$ é ilimitada inferiormente.

Assim, baseado nas proposições (2.12) e (2.13), podemos construir as reprentação gráfica da função Exponencial $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$, conforme Figura (2.5).

Figura 2.5: Gráfico da função Exponencial decrescente



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Deste modo para $0 < a < 1$ a função possui um decrescimento acelerado no intervalo $(-\infty,0)$ e um decrescimento lento no intervalo $(0,\infty)$.

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do tipo Exponencial quando se tem $f(x) = b \cdot a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde a e b são constantes positivas. Se $a > 1$, f é crescente e se $0 < a < 1$, f é decrescente.

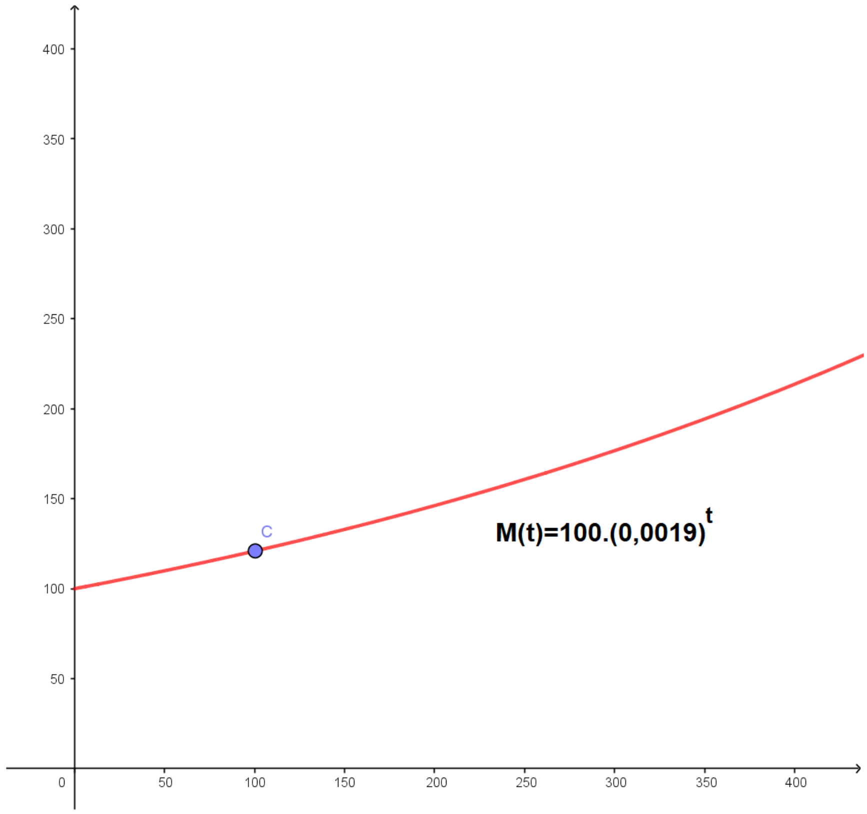
Assim, a fórmula $M_t = C_0 \cdot (1 + i)^t$, que determina o montante de um investimento ao longo do t com taxa i é um caso particular da função tipo Exponencial. Vejamos a seguir um exemplo de aplicação da função Exponencial em problemas no contexto da Matemática Financeira.

Exemplo 2.5.2: Marcos abriu uma conta poupança em um banco onde aplicou um capital de $R\$$ 100,00, no regime de capitalização composto. Sabendo que a taxa de juros ao mês desse banco é de 0,19%, e esboce o gráfico que representa a evolução do montante de Marcos.

Resolução:

O montante $M(t)$ de um capital C no regime de capitalização composta, aplicado a uma taxa i, após t meses, pode ser representdo algebricamente por uma função Exponencial do tipo $M(t) = C \cdot (1+i)^t$, daí temos que $M(t) = 100 \cdot (1{,}0019)^t$. Logo, o esboço do gráfico será:

Figura 2.6: Gráfico da função Exponencial crescente, $M(t) = 100 \cdot (1{,}0019)^t$



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

2.6 Sequências e Progressões

Segundo Lima (2017), em registros históricos temos conhecimento de que existiram estudos sobre sequências em civilizações muito antigas. Por exemplo, há indícios de que os egípcios, 4.000 anos atrás, já observavam padrões nos períodos de cheia do rio Nilo, para poder definir o melhor período para plantar sem que a colheita ficasse submersa. Então, os egípcios perceberam os ciclos de 365 dias, entre uma enchente e outra e criaram um calendário solar composto de doze meses, com 30 dias cada mês. Dividiram ainda os doze meses em três períodos de quatro meses cada uma, que seriam os períodos de semeação, crescimento e colheita. Já na Mesopotâmia, por volta de (1900 a 1600 a.C), surgiram tábuas babilônicas como a Plimpton 322 que contém a soma de uma progressão geométrica

$1 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^9$.

Nessa seção discutiremos sobre as progressões, aritmética e geométrica, dando continuidade ao estudo de assuntos relacionados à Matemática Financeira. Antes de inciarmos o estudo das progressões é preciso definir o que é uma *sequência (ou sucessão)* numérica.

Definição 2.14: Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada número natural n, a um número real $x_{(n)}$. Uma sequência finita é uma função $y : I_n \to \mathbb{R}$, em que o domínio é um subconjunto $I_n = \{1,2, \cdots, n\} \subset \mathbb{N}$, que associa a cada número natural $j \in I_n$, um número real y_j.

A representação de cada termo de uma sequência é feita por uma letra qualquer acompanhada de um índice subscrito, que indica qual a posição ou ordem do termo na sequência. O primeiro termo da sequência, por exemplo, pode aparecer indicado como a_1, o segundo termo por a_2, o terceiro termo por a_3 e assim sucessivamente até o n-ésimo termo representado por a_n. Desta maneira uma sequência pode ser escrita como $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$, ou de forma abreviada como (a_n). Para sequências finitas de tamanho n, usaremos a notação $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

2.6.1 Progressão Aritmética (PA)

No regime de capitalização simples, tema que será estudado na seção 2.7 , o saldo mensal de um investimento cresce em Progressão Aritmética, o que torna esta seção importante para o entendimento da Matemática Financeira.

Exemplo 2.6.1: (Enem/2013 - Adaptada) As projeções para a produção de arroz no período de 2021-2028, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. A tabela (2.1) apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Baseado nessa projeção, determine a quantidade arroz, em toneladas, que deverá ser produzida em 2028.

Resolução:

Baseado nas informações do quadro percebemos que os números que compõem a coluna “Projeto da Produção t”, formam uma sequência de crescimento constante,

Tabela 2.1: Tabela exemplo 2.6.1

Ano	Projeto da Produção t
2021	50,25
2022	51,50
2023	52,75
2024	54,00

Fonte: Questão 154 do Enem - Caderno Amarelo (2013) - Adaptada pelo autor

que denotaremos com k. Assim, determinaremos o valor de k e somaremos esse valor anualmente até chegar ao ano de 2028.

$k = 51{,}50 - 50{,}25$

$k = 1{,}25$

Agora que conhecemos o valor de k, vamos reproduzir o padrão observado até chegar ao ano de 2028.

Ano 2025: $54{,}00 + 1{,}25 = 55{,}25$

Ano 2026: $55{,}25 + 1{,}25 = 56{,}50$

Ano 2027: $56{,}50 + 1{,}25 = 57{,}75$

Ano 2028: $57{,}75 + 1{,}25 = 59{,}00$

Portanto, a quantidade arroz que deverá ser produzida em 2028 será de 59,00 toneladas.

Observamos que na sequência (55,25; 56,50; 57,75;$\cdots$; 59,00), cada termo, a partir do segundo, é obtido do anterior somando sempre o valor fixo 1,25, essa sequência é um exemplo de Progressão Aritmética, cuja definição será dada a seguir.

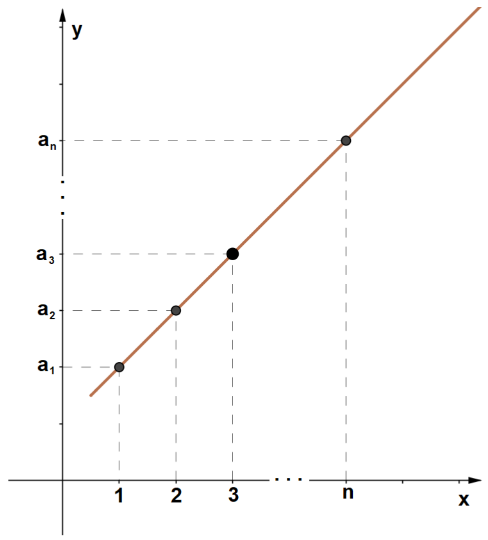
Definição 2.15: Uma Progressão Aritmética (PA) é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão e representada pela letra r, ou seja a sequência (a_n) é uma (PA) se $a_{n+1} - a_n = r$ para todo $n \geq 1$.

Para encontrarmos o termo geral de uma Progressão Aritmética $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$, observamos que para avançarmos um termo na PA basta somarmos a razão; para avançarmos dois termos, basta somarmos duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, ao passarmos de a_1 para a_7, por exemplo, avançamos seis termos, ou seja, $a_7 = a_1 + 6r$. De forma análoga, para retroceder um termo na PA basta subtrair a razão; para retroceder dois termos, basta subtrair duas vezes a razão e assim por diante, por exemplo para passarmos do termo a_5 para a_2, retrocedemos três termos, logo, $a_2 = a_5 - 3r$. De modo geral, considere $i,j \in \mathbb{N}$ com $i < j$. E então, para obtermos o termo a_j partindo do termo a_i avançamos $j - i$ termos, ou seja, $a_j = a_i + (j - i)r$. Finalmente, fazendo $i = 1$ e $j = n$, temos a *fórmula do termo geral de uma PA* dada por $a_n = a_1 + (n - 1)r$.

Como em uma PA, $a_n = a_1 + (n - 1)r$, a função que associa a cada número natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função Afim f definida por $f(x) = rx + (a_1 - r)$.

Em outras palavras, (a_n) é uma Progressão Aritmética se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1,a_1), (2,a_2), (3,a_3)$, etc. pertence a uma mesma reta, conforme a Figura 2.7.

Figura 2.7: Progressão Aritmética no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Como vimos na seção 2.4, a função Afim $f(x) = ax + b$ é classificada com relação ao seu crescimento. Da mesma forma, podemos classificar uma PA como

1. **Constante**: quando cada termo é igual ao sucessor, ou seja, $a_{n+1} = a_n$, e portanto $a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow a_n + r - a_n = 0 \Rightarrow r = 0$.

2. **Decrescente**: quando, a partir do segundo termo, cada termo é menor que o anterior, ou seja, $a_{n+1} < a_n$, e portanto $a_{n+1} < a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Rightarrow a_n + r - a_n < 0 \Rightarrow r < 0$.

3. **Crescente**: quando , a partir do segundo termo, cada termo é maior que o anterior, ou seja, $a_{n+1} > a_n$, e portanto $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Rightarrow a_n + r - a_n > 0 \Rightarrow r > 0$.

Veremos agora, como determinar a soma (S_n) dos n primeiros termos de uma PA.

Tal fórmula[5] foi descoberta em 1787, por uma criança de 10 anos chamada Carl Friedrich Gauss [6], durante uma aula de matemática, após seu professor pedir para que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100.

A ideia utilizada por Gauss, apesar de simples, foi genial, principalmente para uma criança de 10 anos. Para resolver o problema ele escreveu a sequência de 1 a 100 duas vezes, porém, na segunda em ordem decrescente. Iniciou somando o primeiro termo ao último, o segundo ao penúltimo e assim sucessivamente. Nesse momento ele percebeu que todos os resultados eram iguais a 101. Portanto, para somar todos os números de 1 a 100 bastava somar 50 vezes o número 101, isto é, calcular $50 \cdot 101 = 5.050$.

O pensamento de Gauss ilustra a ideia central usada para demonstrar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PA.

Lema 2.16: A soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Demonstração:

Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma de trás para frente, $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_3 + a_2 + a_1$. Daí,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observe que, ao passarmos de um par de parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta r e a segunda parcela diminiu r, o que não altera a soma. Portanto, todos os parênteses são iguais a $(a_1 + a_n)$. Como são n parênteses, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n,$$

que equivale a

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

[5]Informação acessada no site: http://rpm.org.br/cdrpm/4/1.htm, em 25/05/2020.

[6]Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 e viveu até 1855 e é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos e por isso ele é conhecido como “o príncipe da matemática”. Ele contribuiu para diversas áreas da ciência, como Matemática, Astronomia e Física.

Exemplo 2.6.2: Um pai resolve depositar todos os meses uma certa quantia na caderneta de poupança de sua filha. Pretende começar com $R\$$ 5,00 e aumentar $R\$$ 5,00 por mês, ou seja, depositar $R\$$ 10,00 no segundo mês, $R\$$ 15,00 no terceiro mês e assim por diante. Após efetuar o décimo quinto depósito, a quantia total depositada por ele será de

a) $R\$$ 150,00

b) $R\$$ 250,00

c) $R\$$ 400,00

d) $R\$$ 520,00

e) $R\$$ 600,00

Resolução: Por hipótese temos que o $a_1 = 5$, $n = 15$ e $r = 5$. Daí podemos calcular o termo a_{15}, assim,

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{15} = 5 + 14 \cdot 5$

$a_{15} = 75$

Com essa informação podemos determinar a quantia total depositada por ele após 15º depósito, que será:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

$$S_{15} = \frac{(5 + 75) \cdot 5}{2}$$

$S_{15} = R\$\ 600{,}00$

Portanto, a quantia total depositada por ele foi de $R\$$ 600,00.

2.6.2 Progressão Geométrica (PG)

Segundo a teoria de Malthusiana[7] a população mundial cresceria no ritmo de uma Progressão Geométrica, enquanto as reservas alimentares cresceriam seguindo uma

[7] A Teoria Malthusiana, ou Malthusianismo, foi elaborada por Thomas Robert Malthus no ano de 1798 e defendia que a população cresceria em ritmo acelerado, superando a oferta de alimentos, o que resultaria em problemas como a fome e a miséria. Malthus – pastor da Igreja Anglicana e professor de História Moderna – escreveu uma das mais importantes obras sobre o crescimento demográfico: Ensaio sobre o Princípio da População.

Progressão Aritmética. Devido a tal desproporção, os indivíduos empenhariam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos. Uma seleção natural, de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros. Ainda bem que essa teoria Malhusiana não é mais aceita, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande!

Quando fala-se em um crescimento no ritmo de uma Progressão Geométrica é necessário entender o quanto isso é acelerado e, apesar de não mais precisarmos nos preocuparmos com a taxa de crescimento populacional, ainda precisamos ficar atentos à taxa de crescimento dos juros do cartão de crédito ou cheque especial que corrói o orçamento de muitas famílias sem um bom planejamento financeiro. Baseando-nos nesse crescimento discutiremos nesta seção o tema Progressões Geométricas.

Exemplo 2.6.3: Um banco pratica sobre o seu serviço de cheque especial a taxa de juros compostos de 11% ao mês. Assim, para cada 100 reais de cheque especial utilizado, o banco cobra 111 reais no primeiro mês, 123,21 reais no segundo, e assim por diante. Determine o quanto o banco cobra no terceiro, quarto e quinto meses.

Resolução:

De acordo com o texto podemos determinar a taxa de reajuste mensal utilizando a fórmula $i = (1 + 0{,}11) = 1{,}11$, assim, a cobrança dos próximos meses serão:

$3^{\underline{o}}$ mês: $123{,}21 \cdot 1{,}11 = 136{,}76$

$4^{\underline{o}}$ mês: $136{,}76 \cdot 1{,}11 = 151{,}80$

$5^{\underline{o}}$ mês: $151{,}80 \cdot 1{,}11 = 168{,}50$

Portanto, os valores cobrados nos próximos três meses pelo banco serão de $R\$$ 136,76, $R\$$ 151,80 e $R\$$ 168,50.

Exemplo 2.6.4: Determinados bens patrimoniais sofrem desvalorização comercial devido ao uso e desgaste natural ao longo do tempo. Os carros e maquinários de indústrias são alguns dos itens que mais sofrem desvalorização com o passar dos anos. Supondo que o valor de um carro em 2010, seja de $R\$$ 80.000,00 e que sofra uma depreciação anual constante de 2%, qual será o valor de revenda desse carro nos próximos 5 anos?

Resolução: A taxa de desconto anual pode ser determinada utilizando a fórmula: $(1 - i) = (1 - 0{,}02) = 0{,}98$, assim, temos:

Ano 2011: $80.000{,}00 \cdot 0{,}98 = R\$\ 78.400{,}00$

Ano 2012: $78.400{,}00 \cdot 0{,}98 = R\$$ 76.832,00

Ano 2013: $76.832{,}00 \cdot 0{,}98 = R\$$ 75.295,36

Ano 2014 $75.295{,}36 \cdot 0{,}98 = R\$$ 73.789,45

Ano 2015 $73.789{,}45 \cdot 0{,}98 = R\$$ 72.313,66

Portanto os valores desse carro nos próximos cinco anos serão de: R\$ 78.400,00; R\$ 76.832,00; R\$ 75.295,36; R\$ 73.789,45 e R\$ 72.313,66.

Nos dois exemplos anteriores, as taxas de crescimento são de +11% e -2%, respectivamente, e cada termo da sequência pode ser obtido do termo anterior multiplicando pelo fator $(1+i)$, em que i é a taxa de variação dos termos. Progressões geométrica são sequências nas quais a taxa de variação i de cada termo para o seguinte é constante.

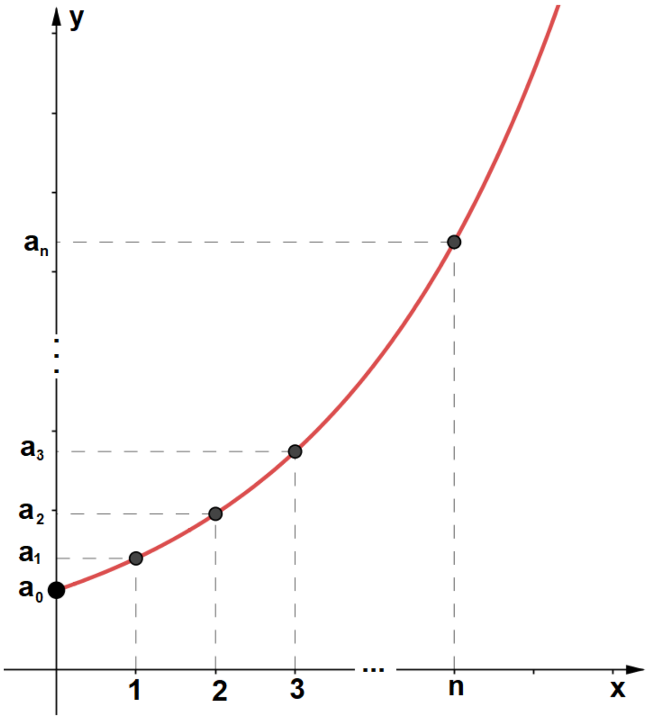
Definição 2.17: Uma progressão Geométrica (PG) é uma sequência na qual o quociente entre cada termo e o termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado de razão da progressão e geralmente representado pela letra q, ou seja a sequência (a_n) é uma (PG) se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ para todo $n \geq 1$.

Para encontrarmos o termo geral de uma Progressão Geométrica $(a_1, a_2, a_3,...)$, observamos que para avançarmos um termo basta multiplicar esse termo pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Assim, ao passarmos de a_1 para a_3, avançamos dois termos, ou seja, $a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_3 = a_1 \cdot q^2$, de forma análoga, para passarmos de a_5 para a_2, retrocedemos três casas, logo, $a_2 = \frac{a_5}{q \cdot q \cdot q} = \frac{a_5}{q^3}$. De modo geral, para deslocar um termos de uma posição para outra basta elevar a razão ao número de casas entre esses termos. Se considerarmos uma PG representada por $(a_1,..., a_i,..., a_j,...)$, com $i,j \in \mathbb{N}$; $i < j$, então para obtermos termos a_j partindo de a_i avançamos $j - i$ termos, ou seja, $a_j = a_i \cdot q^{(j-i)}$. Por fim, sendo $i = 1$ e $j = n$, temos a fórmula do termo geral da PG dada por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Como em uma PG, $a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}$, a função que associa a cada número natural n o valor de a_n é simplesmente uma função do tipo Exponencial f definida por $f(x) = a_1 \cdot q^{x-1}$.

Nesse contexto existe uma relação direta entre os termos de uma Progressão Geométrica e um subconjunto da imagem de uma função Exponencial. De fato, seja (a_n) uma Progressão Geométrica, então os pontos $(1,a_1), (2,a_2), \cdots, (n,a_n), \cdots$ pertencem ao gráfico da função Exponencial $y = a_1 \cdot q^{n-1}$, em que q é a razão da PG. Para uma ilustração dessa situação, veja a Figura 2.8.

Figura 2.8: Progressão Geométrica no plano cartesiano



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Como vimos na seção 2.5, a função Exponencial $f(x) = a^x$ é classificada com relação ao seu crescimento. Da mesma forma, podemos classificar uma PG como

Daí, podemos classificar o comportamento de uma Progressão Geométrica em:

1. **Constante**: quando, cada termo é igual ao sucessor, ou seja, $a_{n+1} = a_n$, e isso ocorre em duas situações:

   a) Todos os termos nulos: $a_1 = 0$ e um q qualquer.

   b) Todos o termos $a_n \neq 0$, assim,

   $a_{n+1} = a_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow q = 1.$

2. **Decrescente**: quando, a partir do segundo termo, cada termo é menor que o anterior, e isso ocorre em duas situações:

   a) Na PG com termos positivos se temos $a_{n+1} < a_n$, então

   $$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow 0 < q < 1.$$

   b) Na PG com termos negativos se temos $a_{n+1} < a_n$, então

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow q > 1.$$

3. **Crescente**: quando, a partir do segundo termo, cada termo é maior que o anterior, e isso ocorre em duas situações:

   a) Na PG com termos positivos se temos $a_{n+1} > a_n$, então

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow q > 1.$$

   b) Na PG com termos negativos se temos $a_{n+1} > a_n$, então

   $$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow 0 < q < 1.$$

   Por fim, pode-se notar que esses tipos de PG crescente e decrescente podem ser associados a reajustes e descontos sucessivos.

Veremos agora, como determinar a soma (S_n) dos n primeiros termos de uma PG.

Lema 2.18: A soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

Por definição

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n. \tag{2.3}$$

Multiplicando essa igualdade por q e usando que $a_{k+1} = a_k q$, para $1 \leq k \leq n$, obtemos que

$$qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_{n+1}. \tag{2.4}$$

Subtraindo a equação (2.3) da equação (2.4), encontramos a igualdade $S_n - qS_n = a_1 - a_{n+1}$. Observando que $a_{n+1} = a_1 q^n$, temos que

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n.$$

Finalmente, como $q \neq 1$,

$$S_n = a_1 \cdot \left(\frac{1-q^n}{1-q}\right).$$

A seguir um exemplo de aplicação da Progressão Geométrica no contexto da Matemática Financeira.

Exemplo 2.6.5: No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 10.000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte aumentou a produção em 50%. Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria. Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t, para $t \geq 1$?

Resolução: De acordo com o texto no primeiro ano a indústria fabricou 10.000 unidades, e com um aumento de 50%, no segundo ano 15.000 unidades, no terceiro 22.500 unidades e assim durante um tempo t anos. Como cada valor da produção anual dessa fábrica equivale à produção do ano anterior multiplicada por 1,5, podemos concluir que a sequência formada pela produções anuais representa uma Progressão Geométrica. Assim temos, $a_1 = 10.000$, $q = 1{,}5$ e, usando a fórmula do termo geral da PG, concluimos que:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \rightarrow a_n = 10.000 \cdot 1{,}5^{t-1}$$

Logo a expressão que determina o número de unidades produzida em cada ano t é $P(t) = 10.000 \cdot 1{,}5^{t-1}$.

2.7 Juros Simples

Os regimes de capitalização expressam como os juros são calculados e como são incorporados ao capital no decorrer do tempo.

Nessa perpectiva podem ser nomeados em regime de capitalização simples, que será estudado nessa seção ou regime de capitalização composto que será discutido na próxima seção. A seguir um exemplo do regime de capitalização simples.

Exemplo 2.7.1: Carlos precisa quitar um débito no cartão de crédito e assim, evitar pagar juros, que nesse caso são elevados. Por isso resolveu pedir ao seu irmão um empréstimo no valor de $R\$$ 1.200,00. O pedido de Carlos foi atendido com a condição dele pagar uma taxa de juros simples de 2% ao mês durante 4 meses. Determine os juros e o montante pagos por Carlos após esse período.

Resolução:

Como o sistema de capitalização é simples, os acréscimos mensais são constantes e iguais a $0{,}02 \cdot 1.200 = 24$. Assim,

1º mês: $1.200 + 24 = 1.224$

2º mês: $1.224 + 24 = 1.248$

3º mês: $1.248 + 24 = 1.272$

4º mês: $1.272 + 24 = 1.296$

Portanto, o juros pagos por Carlos no período de 4 meses será de $R\$$ 96,00 e o montante igual a $R\$$ 1.296,00.

No regime de capitalização simples são incorporados mensalmente ao capital inicial valores constantes que chamamos de juros e ao resultado dessa soma (capital incial + juros) denominamos como montante, que nesse caso tem crescimento linear e por isso comportam-se como numa função Afim.

Lema 2.19: No regime de juros simples de taxa i, um prinicpal C_0, transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0.(1 + n.i)$, para $n \in \mathbb{N}$.

De modo geral, a taxa percentual de juros i incide, a cada período de tempo n, apenas sobre o valor inicial C emprestado ou aplicado. Nesse modelo, não ocorre a cobrança de juros J sobre os juros gerados em períodos anteriores. Como o crescimento ao longo do tempo é linear, podemos afirmar que juros simples se comportam com um caso particular de uma função Afim. Vejamos como funciona.

Considere o capital inicial C_0 e a taxa de juros i. Ao final do primeiro período, a taxa de juros incidirá apenas sobre o C_0, sendo assim, o montante C_1 será igual a $C_1 = C_0 + C_0.i = C_0 + J_{(0,1)}$, em que o juros produzidos entre os períodos 0 e 1 será representado por $J_{(0,1)}$. Entre os períodos 1 e 2, temos apenas um período, então pela característica da capitalização simples temos que os juros produzidos $J_{(1,2)}$ será igual $C_0.i$, assim concluimos que $J_{(0,1)} = J_{(1,2)}$. Ao final do segundo período teremos um montante C_2 dado por:

$$C_2 = C_0 + J_{(0,1)} + J_{(1,2)} = C_0 + iC_0 + iC_0 = C_0 \cdot (1 + 2i).$$

Analogamente, temos que $J_{(0,1)} = J_{(2,3)}$, então ao final do terceiro período o capital acumulado será dado por:

$$C_3 = C_0 + J_{(0,1)} + J_{(1,2)} + J_{(2,3)} = C_0 + iC_0 + iC_0 + iC_0 = C_0 \cdot (1 + 3i).$$

Considerando o padrão observado chegamos a igualdade

$$C_n = C_0 + J_{(0,1)} + J_{(1,2)} + J_{(2,3)} + ... + J_{(n-1,n)} = C_0 + iC_0 + iC_0 + ... + iC_0 = C_0 \cdot (1 + n.i).$$

A demonstração da veracidade dessa igualdade será feita pelo princípio da indução finita.

Para n = 1, temos $C_1 = C_0.(1 + i)$ o que é verdade na capitalização simples. Suponha que o resultado vale para $n = k$ (hipótese de indução). Vamos provar que o resultado também vale para $n = k + 1$ (tese de indução). Como o resultado vale para $n = k$, então; $C_k = C_0 \cdot (1 + k \cdot i)$.

Sabemos que entre os períodos k e $k + 1$, apenas C_0 renderá juros, assim,

$$C_{k+1} = C_0 + J_{(0,1)} + J_{(1,2)} + ... + J_{(k-1,k)} + J_{(k,k+1)} = C_k + iC_0.$$

Por hipótese de indução, sabemos que

$$C_k = C_0 \cdot (1 + ik);$$

Então,

$$C_{k+1} = C_0 \cdot (1 + ik) + iC_0 = C_0 + i \cdot C_0 \cdot (k + 1)$$
$$C_{k+1} = C_0 \cdot [1 + i \cdot (k + 1)].$$

Logo, pelo princípio de indução finita, o resultado vale para todo $t \in \mathbb{N}$, isto é,

$$C_n = C_0.(1 + n.i).$$

Assim, os juros produzidos por Co entre as épocas 0 e t, será dado por

$$J_{(0,n)} = C_n - C_0 = C_0 \cdot (1 + n.i) - C_0.$$

Portanto,

$$J_{(0,n)} = C_0 \cdot i \cdot n.$$

Por fim, no regime de juros simples, vemos que o montante cresce em Progressão Aritmética cuja razão é dada por $i \cdot C_0$. Esse sistema de capitalização simples era utilizado nas situações de curto prazo, porém, hoje não mais utilizamos. A seguir, temos um exemplo de aplicação da fórmula do montante acumulado no regime de capitalização simples.

Exemplo 2.7.2: Uma cliente fez um empréstimo, a juros simples, de $R\$$ 600,00 em um banco, a uma taxa de 4% ao mês, por dois meses. Quando ela foi pagar, o gerente do banco informou-lhe que poderia sortear uma taxa i_d para ter um desconto sobre o valor de sua dívida. Fez-se o sorteio e foi lhe concedido o desconto, resultando no pagamento de $R\$$ 602,64. Dessa forma, o valor da taxa i_d sorteada foi de?

Resolução: Em se tratando do regime de capitalização simples, temos que o montante $M = C_0 + C_0 \cdot i \cdot n$, logo após dois meses a dívida era de

$$M = 600 + 600 \cdot 0{,}04 \cdot 2$$
$$M = R\$\ 648{,}00,$$

porém, como o cliente teve um desconto cuja a taxa era i_d, temos que:

$$648 \cdot (1 - i_d) = 602{,}64,$$

assim,

$$i_d = 0{,}07 \text{ ou } 7\%.$$

2.8 Juros Compostos

No regime de capitalização composta os juros são calculados levando em conta a atualização do capital, ou seja, o juros incide não apenas no valor inicial, como na PA, mas também sobre os juros acumulados (juros sobre juros). O crescimento do capital inicial segue o comportamento de uma PG, pois a cada período n, o juros gerado é incorporado ao capital atual (saldo devedor) e sua acumulação se dá de forma exponencial, conforme exemplo a seguir.

Exemplo 2.8.1: Uma aplicação de $R\$$ 10.000, no regime de juros compostos, é feita por 3 meses a juros de 10% ao mês. Qual o valor que será resgatado ao final do período?

Resolução:

Considerando que o sistema de capitalização é composto, podemos determinar o acréscimo mensal multiplicando o saldo devedor pela taxa de reajuste, que pode ser determinada por $(1 + i) = (1 + 0{,}1) = 1{,}1$. Assim, temos mês a mês os valores

1º mês: $1.000 \cdot 1{,}1 = 1.100$

2º mês: $1.100 \cdot 1{,}1 = 1.210$

3º mês: $1.210 \cdot 1{,}1 = 1.331$

Logo, será resgatado após três meses de investimento a quantia de $R\$$ 1.331,00.

O regime de capitalização dos juros compostos é o mais utilizado no sistema financeiro e nos cálculos de empréstimos. O total de juros cobrados nesse regime pode ser determinado pela fórmula que está expressa na definição (2.20).

Definição 2.20: O total de juros obtidos no regime de capitalização composta, por um capital inicial C_0 a uma taxa i e ao fim de n períodos a que se refere a taxa é dado, para todo $n \in \mathbb{N}$, por $J_n = C_0[(1+i)^n - 1]$.

Demonstração:

Para $n = 1$, teremos que $J_1 = C_0[(1+i)^1 - 1] = C_0.i$. Logo, o resultado vale para $n = 1$.

Para $n = 2$, teremos os juros produzidos por J_1 e por C_0:

$J_2 = J_1 + i(J_1 + C_0) = J_1 + i \cdot J_1 + i \cdot C_0 = i \cdot C_0 + i \cdot i \cdot C_0 + i \cdot C_0$

$J_2 = C_0 \cdot (2i + i^2) = C_0 \cdot (1 + 2i + i^2 - 1) = C_0 \cdot [(1+i)^2 - 1]$

Portanto, também vale para $n = 2$. Assim, suponha que o resultado vale para $n = t \geq 2$ (hipótese de indução). Provemos que vale para $n = t + 1$ (tese de indução). De fato, para $n = t + 1$, temos:

$$J_{t+1} = J_t + i \cdot (J_t + C_0) = J_t + i \cdot J_t + i \cdot C_0.$$

Pela hipótese de indução, sabemos que $J_t = C_0 \cdot [(1+i)^t - 1]$. Logo,

$J_{t+1} = C_0 \cdot [(1+i)^t - 1] + i.C_0 \cdot [(1+i)^t - 1] + i \cdot C_0$

$J_{t+1} = C_0 \cdot [(1+i)^t - 1 + i \cdot (1+i)^t - i + i]$

$J_{t+1} = C_0 \cdot [(1+i)^t + i.(1+i)^t - 1]$

$J_{t+1} = C_0 \cdot [(1+i)^t \cdot (1+i) - 1]$

$J_{t+1} = C_0 \cdot [(1+i)^{(t+1)} - 1]$

Portanto, o resultado vale para $n = t + 1$, assim, pelo princípio de indução finita, vale para todo número natural e o termo $(1 + i)$ é chamado de fator de capitalização. Já o montante C_n representado pela soma do capital C_0 com os juros J_n capitalizados durante um certo período n de tempo pode ser calculado utilizando a fórmula $C_n = C_0.(1+i)^n$. Esse montante também pode ser denominado como Valor Futuro ou Valor de Resgate e é representado por uma função do tipo Exponencial.

Definição 2.21: O montante obtido por um capital inicial C_0, taxa i, ao fim de n períodos a que se refere a taxa é dado, para todo $n \in \mathbb{N}$, é dado por $C_n = C_0(1+i)^n$.

Demonstração:

Sabemos que o montante de uma aplicação que rende juros corresponde ao capital inicial C_0 adicionado dos juros devidos a aplicação. Assim, no caso do regime de juros compostos, a uma taxa i, teremos a expressão do montante C_n, ao fim de n períodos a que se refere a taxa i, dado por:

$$C_n = C_0 + J_n = C_0 + C_0 \cdot [(1+i)^n - 1] = C_0 \cdot [(1+i)^n - 1 + 1].$$

Assim,

$$Cn = C_0 \cdot (1+i)^n.$$

Essa fórmula, no regime de capitalização composta, do montante acumulado no período n se assemelha à fórmula do termo geral da Progressão Geométrica $a_n = a_1.q^{n-1}$, cujo primeiro termo vale C_0 e a razão $(1+i)$.

Exemplo 2.8.2: Após uma auditoria, foi constatado que uma empresa tinha um débito com a prefeitura no valor de $R\$$ 1.000,00. Ao invés de efetuar o pagamento, a empresa investiu esse valor em ações da bolsa de valores e impetrou com um processo pedindo anistia do pagamento da dívida, porém, esse pedido foi indeferido. Um ano após, o valor a ser pago havia sido reajustado para $R\$$ 1.295,60, devido ao acrescido de multa e correção monetária. Considerando que o investimento teve taxa de juros composta de 2% ao mês, capitalizados mensalmente, qual o valor a empresa, além da aplicação, deverá dispor para quitar a dívida?

Resolução: O montante que a empresa terá após 12 meses será de

$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$

$C_{12} = 1.000 \cdot (1 + 0{,}02)^{12}$

$C_{12} = R\$ \; 1.268{,}24$

Assim, a empresa terá de dispor de $R\$$ 27,36 além do valor da aplicação a fim de quitar a sua dívida.

2.9 Taxas de juros

Uma das primeiras perguntas quando se solicita um empréstimo pessoal ou quando se procura um investimento, conservador ou arrojado, é sobre qual é o valor da taxa de juros. Afinal, para quem recorre a um emprestímo é importante fazê-lo em um banco com menores taxas e quem quer investir é imprescindível que as taxas sejam as maiores possíveis. O que muitas pessoas não sabem é que existem no mercado mais de uma taxa.

A *taxa nominal* é uma taxa de juros em que a unidade referencial não coincide com a unidade de tempo da capitalização. Por exemplo, ela pode ser fornecida em termos anuais, e seus períodos de capitalização podem ser diários, mensais, trimestrais ou semestrais. Essa diferença na unidade de tempo pode ser usada como estratégia para ludibriar o consumidor, afinal uma taxa nominal anunciada por uma empresa de 12% ao ano, será maior do que isso quando calculamos a *taxa efetiva*.

A taxa efetiva de juros é uma taxa em que a unidade referencial coincide com a unidade de tempo da capitalização, ou seja, é a taxa que o consumidor realmente paga por um empréstimo. Para melhor entendimento da diferença entre essas duas taxas precisamos entender primeiramente o conceito de *taxas equivalentes*.

Duas taxas são equivalentes quando aplicadas a um mesmo valor durante um mesmo período, geram o mesmo montante acumulado. O conceito de taxas equivalentes está, portanto, diretamente ligado ao regime de juros compostos. Basicamente, elas geram um mesmo valor no futuro aplicadas ao mesmo valor inicial, baseado na definição (2.20).

Definição 2.22: Se I é a taxa de crescimento de uma grandeza relativamente ao período de tempo T e i é a taxa de crescimento relativamente ao período t, e se $T = nt$, então $1 + I = (1 + i)^n$.

Demonstração: Seja G_0 o valor inicial de uma grandeza e após um período T esse valor será igual a $G_0(1 + I)^1$. Como o período T equivale a n períodos de tempos iguais a t, o valor da grandeza será também igual a $G_0(1 + i)^n$. Assim,

$$G_0(1 + I)^1 = G_0(1 + i)^n \Rightarrow 1 + I = (1 + i)^n.$$

Baseado na definição (2.22) podemos mostrar que uma taxa de 6% ao ano não equivale a uma taxa mensal de 0,5% ao mês, conforme veremos no exemplo (2.9.1).

Exemplo 2.9.1: A caderneta de poupança remunera seus aplicadores à taxa de 6% a.a., capitalizada mensalmente no regime de juros compostos. Qual é o valor do juros obtido pelo capital de $R\$$ 80.000,00 durante 2 meses?

Resolução: A taxa de referência de $I = 6\%$ ao ano difere do tempo de capitalização que é de 2 meses, o que nos mostra que essa taxa de 6% é uma taxa nominal, assim, para encontrarmos a taxa efetiva i, para isso utilizaremos a definição (2.22). Assim,

$$1 + I = (1+i)^n \Rightarrow 1 + 0{,}06 = (1+i)^{12} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[12]{1{,}06} \Rightarrow i = 0{,}004868 = 0{,}4868\%$$

Agora podemos calcular o montante gerado pelo capital de $R\$$ 80.000,00 no período de dois meses e depois o valor dos juros.

$M = 80.000 \cdot (1{,}004868)^2$ $M = 80.780{,}78$

Assim, o juros obtido foi de $R\$$ 780,78.

Além das taxas efetivas, nominal e equivalentes, ainda temos a *taxa real*, que é taxa de juros que apura os ganhos ou perdas em relação a uma taxa de inflação. Podemos dizer então que a taxa real é o verdadeiro ganho financeiro. A taxa real pode ser calculada pela seguinte expressão matemática: $(1 + i_n) = (1 + r) \cdot (1 + j)$, onde:

i_n = taxa de juros nominal

j = taxa de inflação do período

r = taxa real de juros

Exemplo 2.9.2: Um banco, que ao realizar um empréstimo, oferece taxas pré-estabelecidas, emprestando $R\$$ 10.000,00 receberá, no prazo máximo de um ano, o valor de $R\$$ 13.000,00. Se a inflação do período foi de 3%. Determine a taxa real de juros do empréstimo?

Resolução: Considerando um empréstimo de $R\$$ 10.000,00 e o pagamento de $R\$$ 13.000,00, concluimos que essa diferença de $R\$$ 3.000,00 equivale a uma taxa de juros nominal de 30%. Assim, temos

$i_n = 30\% = 0{,}3$ (juros nominal)

$j = 3\% = 0{,}03$ (taxa de inflação)

$r = ?$ (taxa real)

Substituindo os valores na fórmula $(1 + i_n) = (1 + r) \cdot (1 + j)$, temos:

$(1 + 0{,}3) = (1 + r) \cdot (1 + 0{,}03)$

$1{,}3 = (1 + r) \cdot (1{,}03)$

$1{,}3 = 1{,}03 + 1{,}03 \cdot r$

$1{,}3 - 1{,}03 = 1{,}03 \cdot r$

$0{,}27 = 1{,}03 \cdot r$

$r = 0{,}2621 = 26{,}21\%$

A taxa real de juros do empréstimo é de aproximadamente 26,21%.

Por fim, vale ressaltar que a taxa de juros não é um único fator que onera um financiamento, existem taxas e cobranças feita pelo banco que são descritas em letras minúsculas nas propagandas, tais como: taxa de análise de crédito, Imposto sobre Operações Financeiras (IOF), taxa de Abertura de Crédito (TAC), taxas administrativas em geral, taxa de manutenção de cadastro. O conjunto dessas cobrança compoem o Custo Efetivo Total (CET), uma espécie de taxa que engloba todos os encargos e despesas decorrentes das operações de crédito e arrendamento mercantil, contratados por pessoas físicas ou empresas. Ela é dada em valor percentual, representada ao mês ou ao ano e sua definição é determinada por cada banco, o que torna o CET um dos fatores mais importantes na escolha do financiamento e do banco.

2.10 Séries Uniformes

Muitas pessoas desconhecem que ao antecipar parcelas de um empréstimo ou financiamento reduzimos prazo do pagamento e consequentemente o juros pagos no período. O Código de Defesa do Consumidor, inclusive, dá direito ao beneficiário de ter uma redução proporcional dos juros e encargos.

Suponhamos que exista uma prestação P que deveria ser paga daqui a n meses a uma taxa mensal $i\%$ e deseja-se antecipar seu pagamento para hoje (data focal 0), qual seria o valor atual dessa prestação? Como a prestação paga daqui a t meses sofre uma capitalização composta, para obter o valor presente devemos descapitalizar o valor dessa prestação. Assim o valor atual da prestação V_p será de

$$V_p = \frac{P}{(1+i)^n} = P \cdot (1+i)^{-n}$$

Exemplo 2.10.1: Diego tem que honrar um compromisso no valor de $R\$$ 2.400,00 daqui a 4 meses. Determine o valor que ele irá pagar se decidir quitar sua dívida na data de hoje sabendo que a taxa de juros compostos aplicada é de 7% ao mês.

Resolução:

Para determinarmos o valor atual devemos descapitalizar o valor da prestação, trazendo o valor da prestação para o tempo 0.

$$V_p = \frac{P}{(1+i)^n} = \frac{2.400}{(1+0{,}07)^4} = 2.360{,}35$$

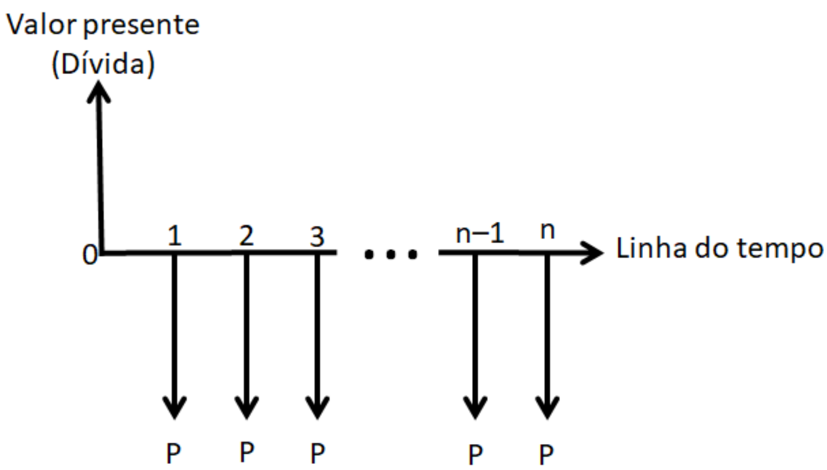
Importante ressaltar que os valores R\$2.306,35 (data focal 0) e R\$ 2.400,00 (data focal 4), nesse contexto, são capitais equivalentes.

São chamados de capitais equivalentes, dois (ou mais) capitais, com datas de vencimento diferentes, que quando transportados para uma mesma data (data focal), a mesma taxa, produzirem, nessa data, valores iguais.

Geralmente ao comprar um produto nos é oferecido o parcelamento do pagamento em parcelas de mesmo valor, assim, se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme. Essa série uniforme pode ser postecipada, quando o primeiro pagamento ocorre ao final do primeiro período de tempo, antecipada, quando o primeiro pagamento ocorre no início do período de tempo, ou ainda diferida, quando o primeiro pagamento ocorre a partir do 2º período, a esse intervalo compreendido entre o ínicio da dívida e o primeiro pagamento damos o nome de carência.

A série postecipada está representada geometricamente na Figura (2.9), Esse diagrama é conhecido como fluxo de caixa, e nele as setas representam entradas quando o sentido for norte, e saídas quando o sentido for sul.

Figura 2.9: Diagrama de Fluxo de Caixa - Série Postecipada



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Teorema 2.23: O valor de uma série uniforme postecipada de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a

$$A = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Demonstração: O valor da série na época 0 é

$$V_p = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica, temos

$$V_p = \frac{P}{(1+i)} \cdot \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-(\frac{1}{1+i})} = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Exemplo 2.10.2: Allan comprou um fogão financiado em quatro parcelas iguais, cujo preço à vista era de $R\$$ 1.200,00, considerando que a taxa de juros praticada pela loja é de 5% a.m. e que Allan pagará a primeira prestação após 1 mês da data da compra, determine o valor de cada parcela.

Resolução: De acordo com o enunciado temos:

$V_p = 1.200{,}00$

$i = 0{,}05$

$n = 4$

Susbstituindo esses valores na fórmula temos:

$$V_p = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{2.5}$$

$$1200 = P \cdot \frac{1-(1+0{,}05)^{-4}}{0{,}05} \tag{2.6}$$

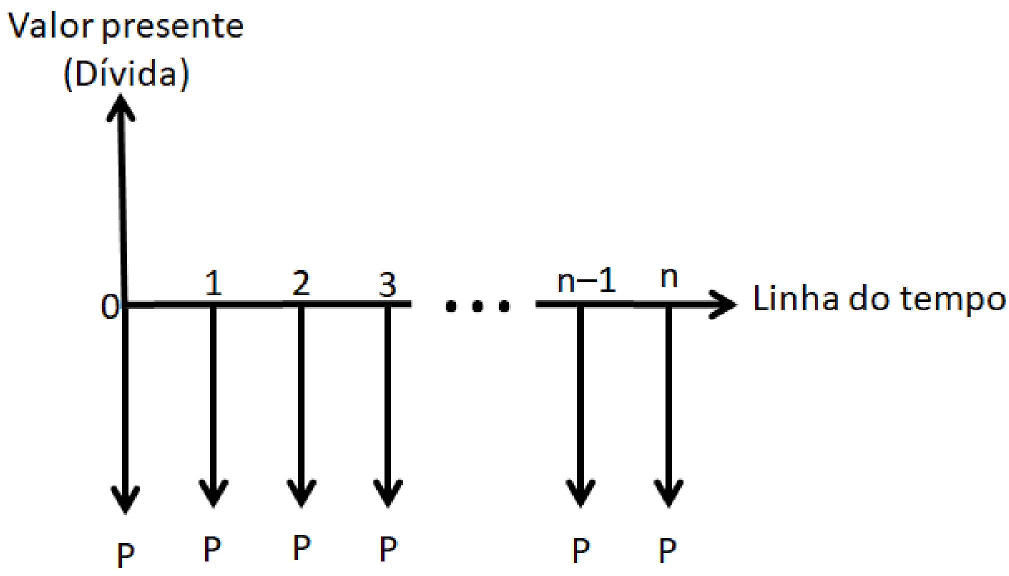
$$P = \frac{1200 \cdot 0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-4}} \tag{2.7}$$

$$P = 338{,}41 \tag{2.8}$$

Assim, cada prestação mensal será de $R\$$ 338,41.

Já a série antecipada, cujo o primeiro pagamento ocorre no início do período, pode ser representada geometricamente pela Figura (2.10).

Figura 2.10: Diagrama de Fluxo de Caixa - Série Antecipada



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O valor de uma série uniforme antecipada de n pagamentos iguais a P, com pagamento no início do período, sendo i a taxa de juros, será

$$A = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i).$$

Demonstração: O valor da série na época 0 é

$$V_p = P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}},$$

dividindo os dois membros por (1+i), temos:

$$\frac{V_p}{(1+i)} = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n},$$

assim, no segundo membro temos a soma de n termos de uma progressão geométrica,

$$\frac{V_p}{(1+i)} = \frac{P}{(1+i)} \cdot \frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-(\frac{1}{1+i})} = P \cdot \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

e por fim,

$$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i)$$

Exemplo 2.10.3: Determinar o valor, à vista, de uma série de 6 prestações de $R\$$ 20.000,00, vencíveis mensalmente, sendo a primeira no ato da compra, sabendo que a taxa é de 5% a.m.

Resolução: De acordo com o enunciado temos: $P = 2.000{,}00$, $i = 0{,}05$ e $n = 6$

Susbstituindo esses valores na fórmula, temos:

$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot (1+i)$

$V_p = 2.000 \cdot \left[\frac{1-(1+0{,}05)^{-6}}{0{,}05}\right] \cdot (1+0{,}05)$

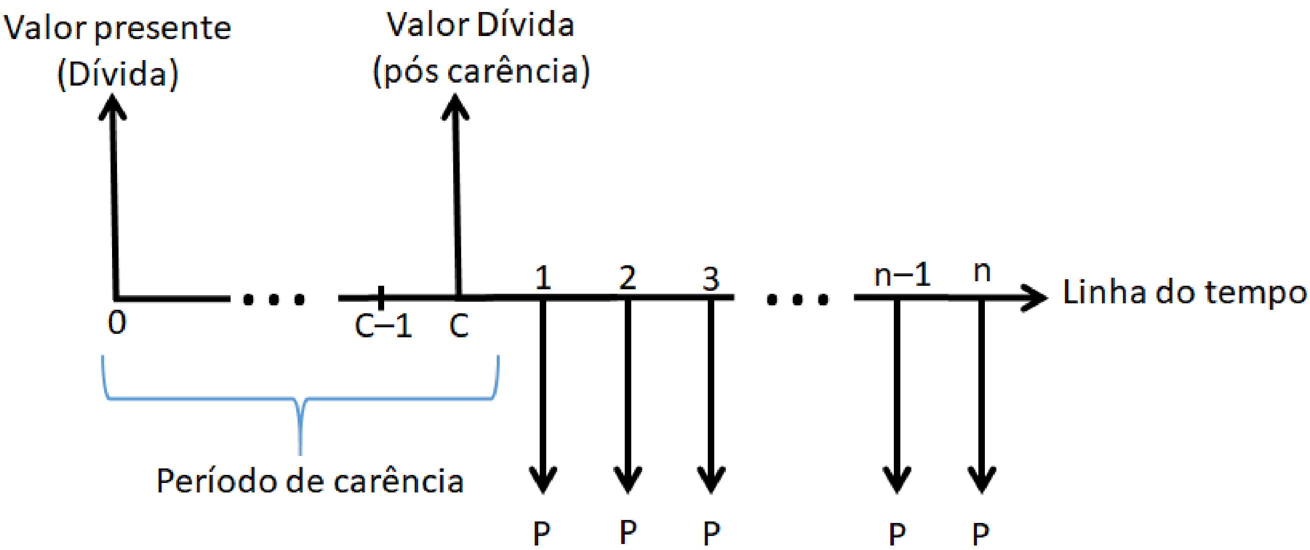
$V_p = 2.000 \cdot 5{,}329489$

$V_p = R\$\ 106.589{,}78$

Assim, o valor presente será de $R\$$ 106.589,78.

No caso da série uniforme diferida ela se subdivide em diferida postecipada ou antecipada. Considerando uma série uniforme diferida postecipada, cujo fluxo é mostrado na Figura (2.11), a qual mostra na primeira linha do tempo, o período de carência "c" a ser considerado.

Figura 2.11: Diagrama de Fluxo de Caixa - Série uniforme diferida postecipada



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

O valor presente de uma série diferida postecipada pode ser calculado em duas etapas:

Na primeira descapitaliza-se a série em questão de "n" períodos para o valor presente intermediário (Valor da dívida pós carência) que passará a ser um valor futuro único em relação à data de início do prazo de carência. Na segunda etapa descapitaliza-se essse valor futuro único para o valor presente na data atual, através dos "c" períodos de tempo, assim temos:

$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot \frac{1}{(1+i)^c}$

$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i \cdot (1+i)^c}\right]$

Por outro lado, se a série for unifome diferida antecipada, dizemos que a série de "n" termos será deslocada de 1 (um) período para a esquerda. Assim, temos:

$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] \cdot \frac{1}{(1+i)^{c-1}}$

$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i \cdot (1+i)^{c-1}}\right]$

Exemplo 2.10.4: Uma mercadoria encontra-se em promoção e é comercializada em 5 prestações iguais de $R\$$ 150,00 a loja está oferecendo ainda uma carência de 5 meses para o primeiro pagamento. Determine o valor à vista desta mercadoria, sabendo-se que a taxa de juros praticada pela loja é de 3% ao mês.

Resolução: De acordo com o enunciado temos:

$P = 150{,}00$

$i = 0{,}03$

$n = 5$

$c = 5$

Susbstituindo esses valores na fórmula temos:

$$V_p = P \cdot \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i \cdot (1+i)^{c-1}}\right] \tag{2.9}$$

$$V_p = 150 \cdot \left[\frac{1-(1+0{,}03)^{-5}}{0{,}03 \cdot (1+0{,}03)^{5-1}}\right] \tag{2.10}$$

$$V_p = R\$\ 610{,}35 \tag{2.11}$$

2.11 Sistemas de Amortização

Segundo o artigo 6º da Constituição Federal, todo brasileiro tem direito a moradia; porém, uma grande parcela dessa população não tem assegurado esse direito. Assim, o sonho da casa própria, comum a uma grande parte dos brasileiros, parece mais uma utopia. Para alcançar esse sonho e fugir do pesadelo do aluguel é comum a população recorrer a um financiamento imobiliário, geralmente feito por meio de um empréstimo, que depois será devolvido ao banco.

Assim, optando pelo financiamento, o próximo passo passa a ser definir qual o sistema de amortização do empréstimo que vai solicitar à financeira.

Definição 2.24: Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, de modo que cada prestação corresponde à soma entre o reembolso do capital e do pagamento dos juros do saldo devedor.

O sistema de amortização especifica como o valor principal do financiamento será pago ao longo do contrato. Existem alguns sistemas de amortização de empréstimo, no Brasil, os mais utilizados são o Sistema de Amortização Constante - SAC e o Sistema Francês de Amortização, também conhecido como PRICE.

No SAC a amortização é constante e por isso as prestações são decrescentes, já no PRICE as prestações são constantes e por isso a amortização da dívida será crescente mês a mês.

Sistema de Amortização Constante – SAC

Sua principal característica é a constância do valor das amortizações no fluxo de pagamentos. O valor fixo da parcela de amortização A é determinado, dividindo-se o saldo devedor inicial SD_0 (valor total do empréstimo) pelo número n de períodos, $A = \frac{SD_0}{n}$, o valor de cada parcela de juros J_k a ser paga, é determinado pelo saldo devedor do período SD_k, multiplicado pela taxa efetiva de juros i, $J_k = SD_k \cdot i$, por fim, a prestação mensal P_k é o somatório da amortização e juros ocorridos no período $P_k = A + J_k$, conforme podemos observar na tabela (2.2).

Tabela 2.2: Planilha de fluxo para o Sistema de Amortização Constante

k	Prestação (P_k)	Amortização (A_k)	Juros (J_k)	Saldo Devedor (SD_k)
0	0	0	0	SD_0
1	$P_1 = A + J_1$	$A = \frac{SD_0}{n}$	$J_1 = (SD_0).i$	$SD_1 = SD_0 - A$
2	$P_2 = A + J_2$	$A = \frac{SD_0}{n}$	$J_2 = (SD_1).i$	$SD_2 = SD_1 - A$
3	$P_3 = A + J_3$	$A = \frac{SD_0}{n}$	$J_3 = (SD_2).i$	$SD_3 = SD_2 - A$
4	$P_4 = A + J_4$	$A = \frac{SD_0}{n}$	$J_4 = (SD_3).i$	$SD_4 = SD_3 - A$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$P_n = A + J_n$	$A = \frac{SD_0}{n}$	$J_k = (SD_{n-1}).i$	$SD_n = SD_{n-1} - A$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Teorema 2.25: No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos

$$A = \frac{SD_0}{n}, SD_k = \frac{(n-k)}{n} \cdot SD_0, J_k = i \cdot SD_{k-1}, P_k = A + J_k$$

Demonstração: Se saldo devedor inicial SD_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a $A = \frac{SD_0}{n}$. O saldo devedor da dívida, após k amortizações, é $SD_k = SD_0 - k \cdot \frac{SD_0}{n} = \frac{n-k}{n} \cdot SD_0$. As duas últimas fórmulas são óbvias.

Exemplo 2.11.1: Um empréstimo de R\$ 800.000,00 deve ser devolvido em 5 prestações semestrais pelo Sistema de Amortizações Constantes (SAC) à taxa de 4% ao semestre. Construa uma tabela indicando os valores das prestações, juros e amortização.

Dados: $SD_0 = 800.000$

n = 5 semestres (número de prestações)

i = 4% a.s. (0,04)

Resolução:

Inicialmente calcularemos o valor a amortização utilizando do fórmula:

$$A = \frac{SD_0}{n} = \frac{800.000}{5} = 160.000.$$

O próximo passo é preencher a tabela (2.3).

Tabela 2.3: Exemplo (2.11.1)

k	Prestação (P_k)	Amortização (A_k)	Juros (J_k)	Saldo Devedor (SD_k)
0	0	0	0	SD_0
1	192.000	160.000	32.000	640.000
2	185.600	160.000	25.600	480.000
3	179.200	160.000	19.200	320.000
4	172.800	160.000	12.800	160.000
5	166.400	160.000	6.400	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

A prestação e o saldo decrescem numa Progressão Aritmética decrescente, dando a impressão de se tratar de um problema relacionado ao juros simples.

Sistema francês de Amortização - Tabela PRICE

Neste sistema, as prestações mensais P são constantes e compostas de duas parcelas: amortização A_k e juros J_k, os juros J_k, de determinado período n, são calculados, aplicando-se à taxa, ao saldo devedor do período anterior $n-1$, a amortização A_k é obtida, subtraindo a parcela de juros da prestação, já o saldo devedor do período SD_k é conhecido pela diferença entre o saldo anterior e a parcela de amortização, confomre tabela (2.4).

Tabela 2.4: Planilha de fluxo para o Sistema francês de Amortização

k	Prestação (P_k)	Amortização (A_k)	Juros (J_k)	Saldo Devedor (SD_k)
0	0	0	0	SD_0
1	P	$A_1 = P - J_1$	$J_1 = (SD_0).i$	$SD_1 = SD_0 - A_1$
2	P	$A_2 = P - J_2$	$J_2 = (SD_1).i$	$SD_2 = SD_1 - A_2$
3	P	$A_3 = P - J_3$	$J_3 = (SD_2).i$	$SD_3 = SD_2 - A_3$
4	P	$A_4 = P - J_4$	$J_4 = (SD_3).i$	$SD_4 = SD_3 - A_4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	P	$A_n = P - J_n$	$J_k = (SD_{n-1}).i$	$SD_n = SD_{n-1} - A_n$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Nesse sistema o valor da prestação pode ser calculado utlizando a fórmula:

$$P = SD_0 \cdot \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right].$$

Demonstração:

Dado um saldo devedor SD_0, que deverá ser pago em n prestações, com valor fixo P e taxa i, temos que:

$S_n = 0$, afinal para quitar o financiamento o saldo deverá ser zerado.

$SD_0 \cdot (1+i)^n - P \cdot (1+i)^{n-1} - P \cdot (1+i)^{n-2} - \cdots - P = 0$

$SD_0 \cdot (1+i)^n = P[(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1]$

$SD_0 \cdot (1+i)^n = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}\right]$

$SD_0 \cdot (1+i)^n = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$

$P = SD_0 \cdot \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]$

Exemplo 2.11.2: Um financiamento, baseado na sistema de amortização francês (PRICE), no valor de $R\$$ 20.000,00 deve ser quitado em 8 meses, com uma taxa de juros de 4% ao mês. Determine o valor de cada prestação.

Resolução: Utilizando a fórmula

$$P = SD_0 \cdot \left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \right], \tag{2.12}$$

temos:

$$P = 20.000 \cdot \left[\frac{0{,}04}{1-(1+0{,}04)^{-0{,}04}} \right] \tag{2.13}$$

$$P = R\$ \ 2.970{,}56 \tag{2.14}$$

Assim, o valor de cada prestação será de $R\$$ 2.970,56

Para finalizar como as prestações nesse sistema são constantes, os juros decrescem, e a amortização segue uma progressão geométrica crescente de razão $(1+i) = (1+0{,}04) = 1{,}04$ dando uma ideia de juros compostos. A tabela Price, em financiamentos imobiliários, é o sistema de amortização mais utilizado no Brasil, contudo, por dar uma ideia de juros compostos é alvo de questionamentos legais.

3 Da origem da Matemática Financeira ao nascimento da Educação Financeira no Brasil

Para melhor entendimento das mudanças propostas na BNCC sobre o tema Educação Financeira precisamos compreender o processo histórico que culminou na inserção dos estudos de Educação Financeira na Educação Básica, que antes abordava somente a Matemática Financeira.

Assim, esse capítulo terá como finalidade revisar o tratamento dado aos conteúdos de Matemática Financeira e Educação Financeira em documentos oficiais e obras desses temas na área da Matemática. Para isso, apresentaremos alguns elementos históricos que vão desde a origem da moeda até conceitos atuais sobre Educação Financeira na Educação Básica, tudo fundamentado em documentos pesquisados e na análise de autores.

Na próxima seção o trabalho do autor Schneider (2008) teve grande relevância como norteador de alguns fatos históricos compreendidos entre a origem da moeda até o surgimento da Matemática Financeira.

3.1 Breve histórico sobre a origem da Matemática Financeira

Segundo Schneider (2008), nas civilizações mais antigas os homens eram nômades e desfrutavam das terras sem a possuir, suas únicas posses eram o seu rebanho, das terras eles apenas retiravam o necessário para sua sobrevivência. Quando se iniciou a comunicação entre os primeiros grupos humanos, surgiu ideia de troca de mercadorias, porém, nesse momento, sem a mínima preocupação de equivalência de valores. Nasce, então, a primeira forma de comércio entre as sociedades, a troca direta de mercadorias, assim descrita por Ifrah[4] (1997):

> o primeiro tipo de troca comercial foi o escambo, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto sem a intervenção de uma "moeda" no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade. (IFRAH, 1997, p. 145).

Com o desenvolvimento do artesanato, da cultura e de uma repartição desigual dos produtos na natureza, surgiram as primeiras dificuldades nas trocas, afinal não existia a possibilidade de comparação entre as mercadorias a serem permutadas. Conforme as comunicações entre os grupos se intensificavam e o número de transações comerciais aumentava, o escambo direto passa de solução para um estorvo, afinal, cada um valorizava a sua produção conforme achava conveniente. Além disso, se uma das partes não tivesse interesse na mercadoria da outra, não havia negócio.

Houve portanto, a necessidade se criar um sistema relativamente mais estável de avaliação e equivalência, uma espécie de "moeda-mercadoria". Segundo Ifrah (1997), a primeira moeda-mercadoria foi o boi e ela surge na Grécia pré-helênica. No século VIII a.C., na Ilíada de Homero, uma mulher hábil era avaliada em 4 bois, a armadura em bronze de Glauco em 9 bois e a de Diomedes (que era de ouro) em 100 bois.

Tal fato justifica o porquê da palavra latina pecúnia ter sentido de "fortuna, moeda, dinheiro", afinal, pecus significa "gado, rebanho" e o sentido próprio da palavra pecúnia corresponde ao "ter em bois".

Conforme o tempo passava outras civilizações também criaram suas moedas-mercadorias. Por exemplo, nas ilhas do Pacífico, as mercadorias eram estimadas em colares de pérolas ou conchas, na América Central pré-colombiana, os maias usavam algodão, cacau, cerâmica; os astecas, pedaços de tecido, semente de cacau; os chineses trocavam gêneros e mercadorias por padrões como dentes ou chifres de animais, conchas, couros e peles, já no Império Romano utilizou-se o sal como equivalência nas trocas comerciais, fato esse que no futuro daria origem a palavra "salário" (remuneração, geralmente em dinheiro, devida pelo empregador ao empregado para pagamento de serviços prestados), porém tais métodos apresentavam, contudo, sérias dificuldades de aplicação.

A medida que o comércio se desenvolvia, os metais desempenhavam um papel cada vez maior nas transações comerciais, vindo a tornar-se no fim das contas a "moeda de troca" preferida dos vendedores e compradores. O metal passou a ser fundido em pequenas peças de fácil transporte, peso igual e selados com a marca oficial de uma autoridade pública, a única que podia certificar o bom preço e o bom quilate.

> A invenção desse sistema ideal de troca comercial, segundo a opinião da maioria dos especialistas, foi atribuída à Grécia da Ásia (ou Ásia Menor) e à Lídia, no século VII antes da era cristã. Em razão das múltiplas vantagens que comportava, seu uso teria se espalhado rapidamente por Grécia, Fenícia, Roma e entre inúmeros outros povos, inclusive na China. (IFRAH, 1997, p. 152).

Nos primeiros anos de utilização dos metais ouro, prata e cobre como moedas, eles possuíam seu valor real, ou seja, representavam fielmente seus valores de acordo com o metal que era usado na fabricação. Após certo tempo, os valores passaram a ser apenas nominais.

Conforme o comércio se desenvolvia as relações entre países se intensificavam e a troca de moedas ficava cada vez mais comum. Devido à ausência de uma padronização da quantidade de ouro em cada moeda de um país para outro, surge a necessidade de criar uma espécie de câmbio nas trocas de moedas de países distintos. Assim, alguns dos comerciantes começaram a se dedicar à atividade de troca ou câmbio de dinheiro, dando origem ao termo "cambistas".

Segundo Robert (1989), em um espaço de tempo relativamente curto esse "cambistas" acumularam fantásticas somas em dinheiro e por isso começaram a se ocupando de novas atividades, como a de guardar e emprestar dinheiro.

Como raramente as pessoas retiravam os seus valores em um espaço curto de tempo, eles passaram a emprestar certas quantias à terceiros com a condição de que ao devolvê-lo pagassem um valor adicional, o juros.

> [...] emprestarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este período – talvez em transações comerciais -, é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional. (ROBERT, 1989, p. 55-56).

Baseado na ideia de obtenção de uma vantagem financeira (soma adicional) surge o termo juros. Uma curiosidade desta época é que; como os cambistas trabalhavam sentados num banco de madeira em algum lugar do mercado, local onde faziam o intercâmbio de sua mercadoria (o dinheiro), surgem futuramente as palavras "banqueiro" e "banco" no contexto financeiro.

No final do século XVI e XVII surgem poderosas casas bancárias na Europa e com elas uma nova espécie de transação, a conta corrente, utilizada ainda hoje pelos bancos. Segundo Robert[5] (1989), toda pessoas que possuíse dinheiro poderia depositar determinada quantia no banco sob a denominação de conta corrente. Mais tarde, se o depositante necessitasse efetuar um pagamento, ele deveria preencher um formulário impresso pelo próprio banco, chamado de cheque.

Surge assim o cheque, que nada mais é do que uma ordem que o depositante dá ao banco para que este pague ao seu portador uma soma estipulada, deduzindo assim esse valor de sua conta corrente. Portanto o cheque pode ser considerado como o primeiro papel-moeda.

Conforme os bancos se desenvolviam e a cobraça de juros passava a ser uma prática comum, nasce então uma relação entre os bancos e a utilização dos cálculos da Matemática Financeira. Segundo Gonçalves[6] (2007), o surgimento dos bancos está diretamente ligado ao cálculo de juros compostos e o uso da Matemática Comercial e Financeira.

Neste momento o comércio alcançava o seu auge e uma das atividades que mais cresce é o comércio de dinheiro: com o ouro e a prata. Assim os bancos se tornaram os grandes propulsores práticos para o avanço da Matemática Comercial e Financeira e da Economia durante os séculos XVI até XVII.

Com a atividade comercial se intensificando o interesse pela educação crescia e assim foram elaborados os primeiros escritos populares sobre a aritmética. A obra denominada Aritmética de Treviso é considerada a mais antiga aritmética impressa, ela foi publicada na cidade de Treviso, em 1478,

> [...] trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os algoritmos iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental. (GONÇALVES, 2007, p. 6).

Neste momento os cálculos aritméticos tornam-se a primeira ferramenta na resolução de problemas relacionados a área comercial, ferramenta essa que se fortalece, mais tarde, com o uso da álgebra, com a utilização de fórmulas e modelos matemáticos. A partir daí, foi possível nos apropriarmos dos conceitos da Matemática Financeira para melhor compreensão das relações econômicas e financeiras atuais e futuras.

3.2 A Matemática Financeira nos documentos oficiais do Brasil

A Constituição Federal[7] (BRASIL, 1988) garante a educação como dever do Estado, e assim a União ficou com a incumbência de legislar sobre diretrizes e bases da educação nacional. Mas somente em 1996 essa lei migra do campo ideológico para o campo real, por meio da promulgação da Lei nº 9.394, que ficou conhecida como LDB/96[8] (BRASIL, 1996). A Lei de diretrizes e bases da educação – LDB/96 propõe concepções, valores e finalidades para a educação brasileira e tem como função regulamentar o sistema educacional (público e privado), organizando, assim, toda a estrutura da educação brasileira.

A LDB/96, em um dos seus artigos, determina a criação de uma base nacional, porém flexibilizando uma parte desse currículo de acordo com as características regionais.

> Art. 26 Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma **base nacional comum**, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma **parte diversificada**, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996, n.p. grifo nosso)

Nesse documento, oficializa-se a existência de temas transversais que, segundo o Ministério da Educação (MEC), buscam uma prática educacional voltada para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades em relação à vida pessoal, coletiva e ambiental. Assim, cabendo aos sistemas e redes de ensino, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos propostas pedagógicas que abordem temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. O que não significa o surgimento de outras disciplinas, mas sim, temas trabalhados de forma transversal, nas áreas e/ou disciplinas já existentes.

A LDB/96 proporcionou grandes avanços à educação, ampliando a obrigatoriedade no ensino, incorporando o Ensino Médio como parte obrigatória correspondendo à Educação Básica no Brasil. No entanto, as orientações para que esse ensino pudesse desenvolver um trabalho considerando a base comum curricular só foram propostas a partir de 1998, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN[9] (BRASIL, 1998). É justamente esse o primeiro documento em que surge o tema Matemática Financeira no ensino fundamental.

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc. É necessário trabalhar situações-problema sobre a **Matemática Comercial e Financeira**, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais. (BRASIL, 1998, p. 86, grifo nosso)

Surge o embrião da Educação Financeira, afinal os PCN sugerem uma formação de alunos que saibam avaliar e tomar decisões relacionadas a área de finanças, assim, o estudo da Matemática Financeira passa uma ferramenta importante na formação de alunos mais críticos financeiramente.

Em 2002, surge os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – PCNEM[10] (BRASIL, 2002a), como complemento do PCN. O documento PCNEM surge com a ideia de unir qualidade de ensino, formação cidadã e a organização do ensino voltado para o desenvolvimento de "competências e habilidades" dos estudantes. Com isso, uma nova proposta de "escola" surge referendada pelo texto do PCN+: Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias[11] (BRASIL, 2002b), que deixa claro que a escola de ensino médio pode constituir uma oportunidade única de orientação para a vida comunitária e política, econômica e financeira, cultural e desportiva, especialmente para jovens de famílias economicamente marginalizadas ou apartadas de participação social.

Já em 2006, é lançado um documento chamado Orientações Curriculares Nacionais para Ensino Médio (OCNEM)[12] (BRASIL, 2006), em substituição ao documento Parâmetros Curricular Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Este novo documento coloca em foco a reorganização curricular, com a priorização da diversidade cultural da escola e utilizando o currículo de forma complementar as políticas socioculturais.

Esse documento traz pela primeira vez de forma explicita o conteúdo de Matemática Financeira como plano de fundo no estudo das funções exponenciais.

> Dentre as aplicações da Matemática, tem se o interessante tópico de **Matemática Financeira** como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. (BRASIL, 2006, p. 75, grifo nosso)

Além disso, como base para o estudo das funções Afim e Exponenciais o documento sugere o estudo das Progressões Aritmética e Geométrica, deixando claro que os pré-requisitos mínimos para o estudo da Matemática Financeira são: funções afim e exponencial, progressões aritmética e geometria, juros simples e composto, razão, proporção, regra de três e porcentagem.

> As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas ("determine a soma...", "calcule o quinto termo..."). (BRASIL, 2006, p. 75)

Nesse momento já fica bem claro que não devemos mais tratar a Matemática Financeira com algo alheio aos alunos, assim surgindo a necessidade de algo prático, que tenha sentido e função na vida dos nossos alunos. Nesse caso o próximo passo passa ser o surgimento da Educação Financeira como será visto na próxima seção.

3.3 A Educação Financeira nos documentos oficiais do Brasil

Em 2017, depois de ampla discussão envolvendo professores de todo o país, foi promulgada a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), documento de caráter normativo confere à Educação Financeira (EF) a condição de tema transversal para o ensino das diversas áreas do conhecimento.

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, destacam-se: [...] bem como saúde, vida familiar e social, educação para o consumo, **educação financeira** e fiscal, trabalho, ciência e tecnologia e diversidade cultural (Parecer CNE/CEB nº 11/2010 e Resolução CNE/CEB nº 7/201023). Na BNCC, essas temáticas são contempladas em habilidades dos componentes curriculares, cabendo aos sistemas de ensino e escolas, de acordo com suas especificidades, tratá-las de forma contextualizada. (BRASIL, 2017, p. 19 e 20. grifo nosso)

Segundo a BNCC, a inserção do tema Educação Financeira nas escolas fornecerá subsídios para que os estudantes lidem com as diferentes situações financeiras do cotidiano, estando aptos a tomarem decisões mais assertivas no seu planejamento financeiro, reduzindo assim, os índices de inadimplência.

Sobre as orientações para a inserção da Educação Financeira na escola, Campos[13] (2012) aponta que:

> É fundamental que orientações para a inserção da Educação Financeira na Educação Básica sejam analisadas com mais profundidade, buscando perceber quais são seus reais objetivos. Por trás de ações que aparentemente buscam contribuir para a formação financeira dos indivíduos podem existir interesses maiores, como a busca de alternativas para que os consumidores não atinjam a inadimplência, mas continuem atendendo aos apelos do consumo e permaneçam dentro de limites aceitáveis de endividamento. (CAMPOS, 2012, p. 40).

Já no ensino médio, foco desse trabalho, a Educação Financeira tem o papel de consolidação e apresenta competências e habilidades específicas que estão intimamente ligados ao tema. Na competência específica 1, temos

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para **interpretar situações em diversos contextos**, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. (BRASIL[14], 2018, p. 532, grifo nosso)

Segundo a BNCC, essa competência específica, que é bastante ampla, pressupõe habilidades que podem favorecer a interpretação e compreensão da realidade pelos estudantes, tornando-os capazes de analisar criticamente o que é produzido e divulgado nos meios de comunicação (livros, jornais, revistas, internet, televisão, rádio etc.), que muitas vezes, de forma imprópria, os induz ao erro. Um bom exemplo dentro desse contexto são os financiamentos e empréstimos pessoais, situação na qual o consumidor é lesado ao ter embutido nas prestações taxas altas e/ou abusivas, sem que os mesmos sejam informados forma explicita. Já no contexto do dia a dia é importante o entendimento da população sobre as taxas de inflação, conforme citados na Habilidade (EM13MAT104) referente à Competência Específica 1.

> (EM13MAT101) Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das **taxas de variação** com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica, tais como índice de desenvolvimento humano, **taxas de inflação**, entre outros, investigando os processos de cálculo desses números, para analisar

> criticamente a realidade e produzir argumentos. (BRASIL, 2018, p. 533, grifo nosso)

Já na Competência Específica 2 a proposta é colocar os estudantes em situações nas quais precisam investigar questões de impacto social que os mobilizem a propor ou participar de ações individuais ou coletivas que visem solucionar eventuais problemas. Nesse sentido, favorece a interação entre os estudantes, de forma cooperativa, para aprender e ensinar Matemática de forma significativa.

> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2018, p. 534)

Nesse contexto o aluno pode utilizar planilhas eletrônicas com objetivo de controlar o orçamento familiar ou mesmo simular juros em financiamentos no intuito de tomar a melhor decisão, ou ainda criar relatórios com gráficos para melhor interpretação e controle de seus investimentos. Essas situações são contempladas na habilidade a seguir.

> (EM13MAT202) Planejar e executar pesquisa amostral usando dados coletados ou de diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de **relatório contendo gráficos** e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.
> (EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), **planilhas para o controle de orçamento familiar**, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões. (BRASIL, 2018, p. 534, grifo nosso)

Na competência Específica 3, segundo a BNCC estão relacionadas habilidades ligadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, geométricos, estatísticos, probabilísticos, entre outros.

> Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2018, p. 535)

Nesse contexto os estudantes do Ensino Médio devem desenvolver habilidades que servirão para resolver problemas reais ao longo de sua vida, nesse sentido, o estudo das funções aplicadas à matemática financeira tem papel fundamental no intuito de entender a evolução do dinheiro no tempo, como se calcula o valor das taxas de financiamento ou empréstimo e assim tomar melhores decisões. E as habilidades a seguir deixam bastante claro a importância da Matemática financeira.

> (EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem **juros compostos**, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
> (EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da **Matemática Financeira** e o do crescimento de seres vivos microscópicos, entre outros.
> (EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, **Matemática Financeira**, entre outros. (BRASIL, 2018, p. 536, grifo nosso)

Para a BNCC a Competência Específica 4 sugere a inclusão de ao menos duas representações distintas para cada situação matemática sempre que possível, variando as abordagens ao longo do desenvolvimento dos assuntos, mesmo que a transição entre elas seja complexa às vezes.

> Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (BRASIL, 2018, p. 537)

Baseado nessa competência os estudantes passariam a dominar um conjunto de ferramentas que potencializa de forma significativa sua capacidade de resolver problemas, comunicar e argumentar; enfim, ampliam sua capacidade de pensar matematicamente. No âmbito da Educação Financeira transitar pelas representações gráficas e algébricas pode facilitar a interpretação e comunicação dos seus resultados, por exemplo ao explicar como é feito o cálculo do imposto de renda, tema citado da habilidade vinculada a essa competência.

> (EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (**tabela do Imposto de Renda**, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade,

> imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 539, grifo nosso)

Por fim, a Competência Específica 5 motiva a investigação e formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 540)

Aqui se destacam as habilidades ligadas à capacidade de investigar e formular argumentos para a resolução de problemas através de dados observados e até mesmo estratégias para a indução dos resultados por meio de distintas abordagens nas mais diversas situações. Deseja-se então que os alunos consigam validar seus resultados através de argumentações formais com ou sem o uso de demonstrações. Nesse cenário as habilidades a seguir serão bases para demonstrações e melhor entendimento da origem das fórmulas, por exemplo, no financiamento de um imóvel, o aluno será capaz de deduzir a fórmula para o cálculo das prestações e isso será um referencial quando for fechar o financiamento no banco.

> (EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos da **Matemática Financeira** ou da Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
> (EM13MAT507) Identificar e associar sequências numéricas (PA) a funções afins de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
> (EM13MAT508) Identificar e associar sequências numéricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, incluindo **dedução de algumas fórmulas** e resolução de problemas. (BRASIL, 2018, p. 541, grifo nosso)

Somado a esse conjunto de Habilidades e Competências específicas da Matemática, a Educação Financeira, tema transversal da BNCC, acaba sendo incorporada às atribuições do professor de Matemática, devido a proximidade do tema com a disciplina e constante relação com o conhecimento de Matemática Financeira, principalmente nas discussões dos assuntos como taxas de juros, inflação, aplicações financeiras (rentabilidade e liquidez de um investimento) e impostos.

Mas vale lembrar que, segundo a BNCC, essa temática favorece um estudo interdisciplinar envolvendo as dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, além da econômica, sobre as questões do consumo, trabalho e dinheiro. Tornando possível, por exemplo, desenvolver um projeto com a História, visando ao estudo do dinheiro e sua função na sociedade, da relação entre dinheiro e tempo, dos impostos em sociedades diversas, do consumo em diferentes momentos históricos, incluindo estratégias atuais de marketing.

Baseado nas contribuições legais citadas acima, aprofundaremos na próxima seção na discussão acerca da Educação Financeira no Brasil ao longo dos últimos anos.

3.4 O nascimento da Educação Financeira no Brasil

O Brasil viveu um extenso período de instabilidade econômica e em decorrência desde fato, as décadas de 80 e 90 foram marcadas por picos de hiperinflação e nem mesmo os planos econômicos: Cruzado (1986), Bresser (1987), Verão (1989), Collor I (1990) e Collor II (1991) foram capazes de conter a inflação. Naquele tempo, os brasileiros conviviam diariamente com a necessidade de consumo imediato em razão da perda de poder de compra, afinal, era comum se comprar um produto pela manhã e ao final do dia o preço ser reajustado. A inflação literalmente corroía nossas chances de comprar e isso comprometia a capacidade de planejamento econômico-financeiro em longo prazo.

Assim, até o fim dos anos 1990, o assunto educação financeira ficou restrito às dicas de investimento de especialistas em produtos do mercado financeiro, ensinando como preservar ou multiplicar o seus recursos, porém, essas dicas tinham como público alvo um grupo restrito de pessoas que já possuíam algum recurso disponível que poderia ser investido por certo tempo. Claramente nesses casos o foco nunca foi de orientar às pessoas a planejar suas finanças ou mostrar o caminho para a organização de um plano que resultasse em poupar.

Portanto, é claro que o atraso ou a demora no tratamento mais aprofundado e específico da educação financeira tem relação direta com a histórica instabilidade econômica do país, que só foi resolvida com o advento do Plano Real em 1994.

Contudo pode-se afirmar que a Educação Financeira no Brasil teve como primeira ação pública a criação do Comitê de Regulação e Fiscalização dos Mercados Financeiros, de Capitais, de Seguros, de Previdência e Capitalização (Coremec), que foi instituído pelo Decreto 5.685 de 25/01/2006 e tinha como finalidade de promover a coordenação e aprimoramento da atuação das entidades da administração pública federal que regulam e fiscalizam as atividades relacionadas à captação pública da poupança popular. Já em 31 de maio de 2007 o Coremec, com o intuito de melhorar o grau de educação financeira da população brasileira, constituiu o Grupo de Trabalho (GT) que tinha como principal objetivo propor uma estratégia nacional de educação financeira. Para auxiliar na execução da ENEF, foi lançado, em agosto de 2008, o sítio (<www.vidaedinheiro.gov.br>), com a finalidade inicial de cadastrar ações de educação financeira, gratuitas e de conteúdo não comercial, existentes no Brasil, permitindo a formação de inventário nacional.

Em 22 de dezembro de 2010 a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) foi instituída como política de Estado de caráter permanente, e suas características principais são a garantia de gratuidade das iniciativas que desenvolve ou apoia e sua imparcialidade comercial.

> Art. 1° Fica instituída a Estratégia Nacional de Educação Financeira - ENEF com a finalidade de promover a educação financeira e previdenciária e contribuir para o fortalecimento da cidadania, a eficiência e solidez do sistema financeiro nacional e a tomada de decisões conscientes por parte dos consumidores. (BRASIL, n.p, 2010)

A estratégia foi criada através da articulação de nove órgãos e entidades governamentais e quatro organizações da sociedade civil, que juntos integram o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF.

> Art. 3° Com o objetivo de definir planos, programas, ações e coordenar a execução da ENEF, é instituído, no âmbito do Ministério da Fazenda, o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF [...] (BRASIL, n.p, 2010)

A criação da ENEF está em linha com o que preconiza a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OCDE) e fóruns globais como o G20. O estabelecimento de estratégias em nível nacional é uma das melhores formas de assegurar a eficiência e a relevância de programas de educação financeira e seus impactos de longo prazo. A partir daí a Educação Financeira começou a ganhar repercussão nacional, inclusive no âmbito escolar.

Em 20 de dezembro de 2017 a Base Nacional Comum Curricular[15] (BNCC) (BRASIL, 2017) foi homologada pelo ministro da Educação, Mendonça Filho.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação[16] (PNE). (BRASIL, 2017, p. 7).

A inclusão da Educação Financeira como tema transversal na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) favorece ainda mais a proliferação em massa da Educação Financeira no Brasil.

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora. Entre esses temas, [...] educação para o consumo, educação financeira [...] (BRASIL, 2017, p. 19 e 20).

Essa transversalidade possibilita o diálogo entre a Educação Financeira e outros assuntos correlatos, como a educação econômica e a educação para o consumo em quatro áreas de conhecimento: Linguagem e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias e Ciências Humanas e suas tecnologias. Um exemplo na área do conhecimento da Linguagem e suas tecnologias, na qual uma das habilidades previstas entre o 3º e o 5º anos para língua portuguesa trata especificamente de "ler e compreender, com autonomia, boletos, faturas e carnês [...]" (BRASIL, 2017).

Apesar da possibilidade do alinhamento entre o tema Educação Financeira e as quatro áreas de conhecimento é na Matemática que ela é citadas com mais ênfase. Por exemplo, na unidade temática Números no ensino fundamental, a Base prevê que um aspecto a ser considerado seja o estudo de conceitos básicos de economia e finanças, visando à educação financeira dos alunos. A aquisição de habilidades com relação à porcentagem deve ser adquirida do 5° ao 9° ano.

Já no ensino médio os alunos devem utilizar a Matemática Financeira como ferramenta para desenvolver as habilidades de interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e na elaboração de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), sempre com o intuito de tomar decisões mais assertivas, visando sempre uma boa saúde financeira.

Porém, vale ressaltar o desenvolvimento de novos hábitos, comportamentos e valores financeiros não surgem apenas com a utilização de planilhas e calculadoras, a mudança deverá ser mais visceral. Na próxima seção buscaremos a definição de Educação Financeira com intuito de encontrarmos suporte para formar alunos mais críticos e capazes elaborarem planos e planejamentos financeiros eficientes.

3.5 Definição contemporânea da Educação Financeira

Segundo a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE[17] (2005) que é referência para a Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF[18] (2010), Educação Financeira é

> [...] processo mediante o qual os indivíduos e as sociedades melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, formação e orientação, possam desenvolver os valores e as competências necessários para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos neles envolvidos e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações que melhorem o seu bem-estar. (OCDE, 2005, p. 4)

Para Saito[19] (2007), Educação Financeira é processo de transmissão de conhecimento que permite o aprimoramento da capacidade financeira dos indivíduos, de modo que estes possam tomar decisões fundamentadas e seguras, tornando-se mais integrados à sociedade com uma postura proativa na busca de seu bem estar.

Porém, no Brasil em 2020 mais de 65,3% das famílias brasileiras possuem algum tipo de dívida, segundo o levantamento da Confederação Nacional do Comércio (CNC), realizado em janeiro de 2020.

Dados que evidenciam uma formação financeira precária ou inexistente. Para Campos (2012) a escola tem que ter um papel relevante na discussão da Educação Financeira.

> Por outro lado, discutir a Educação Financeira no sistema de ensino é vislumbrar a possibilidade de atingir diversos segmentos da população, tendo em vista a busca da universalização¸ são da Educação Básica. É importante ainda considerar que os estudantes podem levar questões

> para serem discutidas em seus lares, ampliando o alcance da proposta. (CAMPOS, 2012, p. 23)

Mas quando se fala em Educação Financeira no universo da Educação Matemática os professores de Matemática criam um abismo entre o teórico e a realidade, seguindo na contramão dos ensinamentos do Paulo Freire que em sua obra Pedagogia do Oprimido deixa claro que devemos estabelecer uma necessária intimidade entre os saberes curriculares fundamentais e a experiência social dos alunos.

Segundo Sá[20] (2012), existem, basicamente, duas grandes vertentes de ensino da Matemática. Para alguns, ensinar Matemática é a busca do rigor, é o uso e a descrição de algoritmos e fórmulas e problemas de aplicação. De acordo com essa concepção, normalmente, não há qualquer tipo de discussão sobre por que e para que se aprende Matemática.

Para outros, o ensino da Matemática está preocupado com o desenvolvimento de conteúdos matemáticos contextualizados, respeitando diversidades, estimulando a investigação e o espírito crítico do aluno/cidadão. Nessa perspectiva deve existir um elo inquebrável que une a Matemática Financeira e a Educação Financeira, afinal, como poderíamos analisar se a taxa é ou não é abusiva? Qual será o melhor investimento para aplicar minha reserva financeira? Devo pagar à vista ou parcelado? São dúvidas rotineiras como essas que tornam a Matemática Financeira o alicerce da Educação Financeira, pois ela dará suporte na busca de respostas mais assertivas.

> Educação financeira sempre foi importante aos consumidores, para auxiliá-los a orçar e gerir a sua renda, a poupar e investir, e a evitar que se tornem vítimas de fraudes. No entanto, sua crescente relevância nos últimos anos vem ocorrendo em decorrência do desenvolvimento dos mercados financeiros, e das mudanças demográficas, econômicas e políticas. (OCDE, 2005, p. 2)

Apesar de tamanha importância a Educação Financeira, por um longo tempo, viveu a sombra da Matemática Financeira, conteúdo esse que tinha como foco apenas a aplicação de algoritmos e fórmulas, um processo meramente mecanizado e totalmente distante nossa realidade.

> A utilização do cotidiano das compras para ensinar matemática revela práticas apreendidas fora do ambiente escolar, uma verdadeira etnomatemática do comércio. Um importante componente da etnomatemática é possibilitar uma visão crítica da realidade, utilizando instrumentos de

> natureza matemática. Análise comparativa de preços, de contas, de orçamento, proporciona excelente material pedagógico (D'AMBROSIO[21], 2002, p. 23).

Nesse cenário, o uso do termo Educação Financeira pode ser o elo entre o saber curricular e a experiência social vivenciada por seus alunos como cidadãos. Discutir aspectos ligados ao desequilíbrio financeiro, à falta de planejamento, ao desemprego e seus efeitos nas famílias torna-se relevante.

Para Savoia, Saito e Santana[22] (2007) a Educação Financeira pode ser entendida como um processo de transmissão de conhecimento que permite que as pessoas desenvolvam habilidades para que elas possam tomar decisões seguras e melhorar o gerenciamento de suas finanças pessoais.

> Mudanças tecnológicas, regulatórias e econômicas elevaram a complexidade dos serviços financeiros. Mas a insuficiência de conhecimento sobre o assunto, por parte da população, compromete as decisões financeiras cotidianas dos indivíduos e das famílias, produzindo resultados inferiores ao desejado. (SAVOIA; SAITO; SANTANA, 2007, p. 1122)

Para Conef[23] (2013) outro objetivo da Educação Financeira é desenvolver a cultura da prevenção.

> [...] é prudente planejar pensando nas intempéries da vida. Ninguém está isento de enfrentar situações adversas e inesperadas que podem demandar o uso de uma quantia de dinheiro não prevista no orçamento. Para garantir maior tranquilidade diante de tais situações, há de se conhecer o leque de opções disponíveis, tais como: evitar desperdícios, guardar dinheiro, fazer seguros diversos ou investimentos ou dispor de planos de previdência (pública ou privada). (CONFEF, 2013, p. 5)

Domingos[24] (2011) relata que pesquisas apontando o fato de que pessoas que ficam milionárias de um dia para o outro, em pouco tempo, voltarão a ser pobres e isso se justifica porque essas pessoas não sabem gerir o dinheiro.

Portanto, educar sob o olhar da Educação Financeira é uma maneira de contribuir para o futuro das crianças e jovens, favorecendo sua formação cidadã e tornando-os capazes de tomar suas próprias decisões e atuar de forma crítica em relação aos problemas colocados pela vida em sociedade. Para isso é necessário que indivíduos de todos os grupos sociais, considerando suas especificidades em suas diversas faixas etárias sejam inseridas no processo de uma Educação Financeira significativa.

Atualmente vivemos um momento ímpar na nossa história, o isolamento social provocado pela pandemia do COVID-19 mudou drasticamente a rotina da população, obrigando o fechamento de diversos empreendimentos. Como consequência instaurou-se uma crise econômica sem precedentes, já que as empresas, não tendo receita, reduzem o quadro de funcionários, os autônomos e profissionais informais ficam sem fonte de renda e a população permanece em compasso de espera de uma ajuda do governo que não chega, aliás o que não deixa de chegar são as contas e necessidades essenciais.

Por fim, nesse contexto de caos econômico surge a necessidade de se repensar os gastos em casa, gerenciar melhor os recursos e acima de tudo ter um controle financeiro eficaz. Afinal, conhecer o quanto se gasta e com o quê, possibilita identificar para onde o dinheiro está indo e, assim, orquestrar melhor as ações em prol de uma saúde financeira. E quem sabe após passar essa crise econômica e seus desdobramentos, todos nós envolvidos no processo da Educação Básica possamos dar real importância à Educação Financeira.

4 Metodologia

Essa pesquisa de Mestrado teve uma abordagem tanto qualitativa como quantitativa. Sendo que as duas abordagens se complementam.

A pesquisa qualitativa surge ao investigarmos aspectos subjetivos, como consumismo, planejamento financeiro e investimentos. Conhecimentos que demonstram familiaridade com a Educação Financeira.

> As características da pesquisa qualitativa são: objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de descrever, compreender, explicar, precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural[...] (GERHARDT; SILVEIRA[25], 2009, p. 32)

A pesquisa quantitativa tem caráter mais objetivo, no momento que o pesquisador tabula os resultados obtidos, pois considera que a realidade pode ser compreendida com base da análise de dados. Nesta pesquisa essas abordagem se fez necessária durante a análise do questionário de sondagem e uma atividade prática.

> A pesquisa quantitativa, que tem suas raízes no pensamento positivista lógico, tende a enfatizar o raciocínio dedutivo, as regras da lógica e os atributos mensuráveis da experiência humana. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p. 33)

Esse é um trabalho de pesquisa descritiva, pois, procura descrever o nível de conhecimento dos alunos sobre os temas de Matemática Financeira e a Educação Financeira.

> A pesquisa descritiva exige do investigador uma série de informações sobre o que deseja pesquisar. Esse tipo de estudo pretende descrever os fatos e fenômenos de determinada realidade (TRIVIÑOS[26], 1987, p. 110).

O objetivo dessa pesquisa foi de construir um material de apoio ao professor, para ser implementado no Ensino Médio, que promovesse discussões e aprendizagens à respeito de temas relativos à Educação Financeira que foram iniciadas no Ensino Fundamental, com alunos da 3ª série do Ensino Médio de uma escola particular de Belo Horizonte, sobre vários temas relativos à Educação Financeira.

Para alcançar esse objetivo foram propostas duas sequências didáticas, que promoviam discussões sobre os temas, atividade prática e um questionário de sondagem a que foram realizados e discutidos em sala. A primeira sequência didática prevê a realização de 5 encontros de 50 minutos cada e tem como temas centrais os investimentos conservadores e as consequências da inadimplência do cartão de crédito e débito. Já a segunda sequência, prevê a realização de 2 encontros e tem como temas centrais o planejamento financeiro e o orçamento familiar.

Após a aplicação de uma atividade prática[1] e um questionário[2] de pesquisa foram efetuados a tabulação dos dados, que segundo Marconi e Lakatos[27] (2010) pode ser apresentada dessa forma para ser melhor compreendida.

> É a disposição dos dados em tabelas, possibilitando maior facilidade na verificação das inter-relações entre eles. É uma parte do processo técnico de análise estatística, que permite sintetizar os dados de observação, conseguidos pelas diferentes categorias e representá-los graficamente. Dessa forma, poderão ser melhor compreendidos e interpretados mais rapidamente. (MARCONI; LAKATOS, p. 34, 2010)

Após finalizar a análise dos dados, esses foram sintetizados com o intuito de identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre Matemática Financeira e, principalmente, o conhecimento a cerca de diversos assuntos pertinentes à Educação Financeira.

Todos os 55 alunos voluntários que participaram dessa pesquisa, autorizada pela direção do colégio, são alunos da 3ª série do Ensino Médio que foram escolhidos por atenderem ao critério de conhecimento prévio sobre conhecimentos ligados à Matemática Financeira. Todos os alunos foram informados de todo o processo.

Na próxima seção definiremos a sequência didática, segundo os autores elemento esse fundamental desse trabalho.

Como a faixa etária dos alunos que participaram dessa sequência é menor que 18 anos foi solicitado previamente aos responsáveis o preenchimento do termo de consentimento livre e esclarecido/responsável[3].

[1] A atividade encontra-se nas páginas 85 e 86.
[2] O questionário encontra-se no apêndice B, nas páginas 111 a 114.
[3] O modelo desse termo está no apêndice A na página 110

4.1 Sequência Didática

A palavra “sequência” significa “ação de seguir”, assim podemos dizer que as sequências didáticas formam um conjunto de “etapas continuadas” referentes a um tema, que auxiliam os professores no processo de ensino/aprendizagem, tornando a abordagem mais significativa para os alunos. A sequência didática constitui uma alternativa de organização ao modelo tradicional de ensino, que Zabala[28] (1998) caracteriza por quatro fases, que são: “comunicação da lição; estudo individual; repetição do conteúdo sem discussão ou ajuda recíproca; avaliação para julgamento quantitativo (nota) e sanção administrativa.” (p. 54).

Esse modelo tradicional é criticado por Zabala (1998) que propõe organizar o ensino estruturado como uma sequência didática: “[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.” (p. 18).

Nessa definição, a sequência didática deve apresentar atividades ordenadas e sequenciadas, dispostas a atender ao objetivo educativo que se destina. Assim, no seu planejamento, precisamos definir desde as atividades iniciais até aquelas que irão marcar sua finalização. Além disso, é importante que os objetivos educacionais de uma sequência didática sejam de conhecimento de todos, do professor aos alunos aos quais se destina.

Nesse contexto, cabe ao professor expor aos estudantes o que vai ser realizado na sequência didática, como vai ser feito, por que vai ser feito e o que se pretende alcançar com a sua aplicação, tornando imprescindível um planejamento prévio das aulas, minimizando assim a improvisação em sala.

Na construção de uma sequência didática temos como o primeiro passo criar um plano de aula, conforme modelo da Figura (4.1). Esse plano se caracteriza pela descrição detalhada do trabalho docente durante as aulas. Seus elementos são: título, caracterização (alunos, escola, ambiente escolar), objetivo geral, metodologia de ensino e o tempo de duração que pode ser uma ou mais aulas. A seguir temos o modelo elaborado com base em Guimarães e Giordan[29] (2011).

De modo geral, o plano de aula fica restrito aos registros dos seus objetivos, atividades e avaliação, por outro lado, a sequência didática agrega o material de apoio ao plano de aula. Assim, a sequência didática representa a junção entre o plano de aula e o material de apoio que são disponibilizados aos alunos. Esse trabalho teve como objetivo construir duas sequências didáticas, que compõem ações promovidas pela escola na busca da consolidação da Educação Financeira no Ensino Médio, conforme orienta a BNCC.

Figura 4.1: Modelo de tabela do Plano de Aula

<table>
<tr><td colspan="4">Plano de aula para uma sequência didática</td></tr>
<tr><td colspan="4">Título</td></tr>
<tr><td colspan="4">Público-alvo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Caracterização dos alunos</td><td>Caracterização da escola</td><td>Caracterização do ambiente escolar</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Problematização</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>Objetivo geral</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Metodologia de ensino</td></tr>
<tr><td>Aulas</td><td>Objetivos específicos</td><td>Conteúdo</td><td>Dinâmica das atividades</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Avaliação</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bibliografia</td><td>Referencial teórico</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Material utilizado</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado Guimarães e Giordan (2011, p. 4).

A primeira sequência tem como tema central os investimentos conservadores e os impactos da inadimplência do cartão de crédito e cheque especial. Os objetivos dessa sequência são de comparar as taxas de juros nos diversos investimentos, interpretar o impacto da inflação na poupança, comparar opções de pagamento e preparar os indivíduos para tomar decisões que priorize sua saúde financeira.

Já a segunda sequência o foco é o planejamento financeiro e o orçamento familiar e os objetivos são de compreender a importância de um planejamento financeiro, de construir uma tabela de orçamento familiar e estabelecer estratégias para redução de dívidas. Para a construção dessas sequências foi seguido alguns parâmetro inicias, que servem de orientações para facilitar no processo ensino/aprendizagem. Segundo Babinski[30] (2017), são eles:

a) Evitar inserir em demasia uma série de atividades com objetivos desconexos;

b) Evitar criar uma sequência abordando um conteúdo extenso em um período muito curto;

c) Iniciar a sequência somente após o professor ter trabalhado todos os pré-requisitos;

d) Calcular corretamente o tempo de duração de cada atividade, evitando assim trabalhar de forma rápida para conseguir terminar no prazo;

e) A sequência deve ser flexível, ou seja, dependendo dos resultados obtidos durante a aula, o planejamento poderá sofrer alterações;

f) A sequência deve ter uma intencionalidade, bem como objetivos e conteúdos direcionados para que os alunos compreendam passo a passo o que deve ser feito em cada etapa;

g) Sempre que possível, utilizar recursos didáticos diversificados, pois, além de atingir um número maior número de alunos em sala de aula, a atividade possibilitará o contato com diferentes formas de aprendizado.

h) Utilizar recursos metodológicos variados, tais como: software, lápis, papel, calculadora, material concreto, medições, plantas, etc., com o objetivo de abranger uma maior compreensão dos conteúdos ministrados.

Na próxima seção serão apresentadas essas duas sequências didáticas cujo o público-alvo deverá ser formado por alunos de Ensino Médio que dominem conhecimentos sobre Matemática Financeira. O período de aplicação da sequência didática I deverá ser de 5 encontros semanais e da sequência didática II de 2 encontros semanais, todos de 50 minutos cada.

4.2 Proposta de Sequência Didática

Nessa seção serão apresentadas as duas sequências didáticas que compõe esse trabalho com seus objetivos, habilidades da BNCC, tempo de duração, equipamentos de apoio, desenvolvimento, textos motivadores e atividades propostas.

4.2.1 Sequência Didática I

Tema: Investimentos conservadores

Público–alvo: alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Número de encontros: 05 aulas de 50 minutos.

Recursos Utilizados: Software PowerPoint e Excel.

DESENVOLVIMENTO

Encontro 01: Sensibilização e aplicação de um questionário. O primeiro contato com os alunos teve como meta informá-los sobre os objetivos do projeto, tempo de duração, esclarecimento de eventuais dúvidas e por fim, aplicar um questionário, que afere o conhecimento prévio sobre os temas que são abordados na sequência didática. Ao final desse encontro deverá ser entregue aos alunos seis textos[4] motivadores cujos títulos são: "CADERNETA DE POUPANÇA", "TAXA REFERENCIAL", "TAXA SELIC", "COMO A INFLAÇÃO AFETA A POUPANÇA E O SEU BOLSO", "BRASILEIROS ACREDITAM QUE INFLAÇÃO FECHARÁ 2020 EM 4,8%, DIZ FGV" E "INVESTIMENTOS CONSERVADORES", que devem ser estudados para discussão nos próximos encontros.

Encontros 02 e 03: Discussão sobre os temas: investimentos conservadores, inflação, cheque especial e cartão de crédito.

A proposta desses encontros é de fomentar uma discussão sobre os temas propostos. No encontro 02 a discussão fica restrita aos temas: a origem do dinheiro, a diferença entre a Matemática Financeira e a Educação Financeira, poupança, taxa Selic, TR e inflação. Já no encontro 03 deve-se discutir sobre cheque especial, cartão de crédito e outros investimentos conservadores como: Certificado de Depósito Bancário – CDB, Linha de Crédito Imobiliário – LCI, Linha de Crédito do Agronegócio – LCA e Tesouro Selic.

Encontro 04: Atividade prática

Neste encontro deverá ser aplicado uma atividade prática no laboratório de informática com o intuito de finalizar a sequência didática. Ao final da atividade devemos entregar os textos motivadores da próxima sequência didática cujo temas são: planejamento financeiro e orçamento familiar.

ATIVIDADE PRÁTICA

Objetivos

I Compreender como são calculados os juros da poupança.

II Comparar as taxas da poupança com as taxas da inflação.

III Interpretar algum impacto da inflação na economia.

IV Comparar opções de pagamentos.

Habilidades da BNCC

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos

[4] Os seis textos motivadores da sequência didática I encontram-se nos anexos A ao F, nas páginas 119 a 127.

gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2017, p. 525)

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. (BRASIL, 2017, p. 533)

ATIVIDADE PROPOSTA

No início do ano de 2019, Davi que estava descontente com seu emprego resolveu pedir demissão, porém essa atitude intempestiva teve desdobramentos na sua vida financeira, afinal em 4 meses ele gastou todas as suas economias, fato que o fez recorrer às linhas de crédito: cheque especial e cartão de crédito. Depois de longos 12 meses, Davi conseguiu outro emprego que lhe rendia uma renda líquida de $R\$$ 2.500,00, porém, além das dívidas do cheque especial e cartão de crédito, ele possui um gasto fixo mensal de $R\$$ 1.800,00, restando $R\$$ 700,00 para ele quitar suas dívidas. A dívida do cartão de crédito é de $R\$$ 3.000,00 e os juros cobrados são de 10% ao mês sobre o saldo devido, já o débito com o cheque especial também é de $R\$$ 3.000,00 e a taxa cobrada é de 8% ao mês. Agora, responda:

A) No texto Davi tomou algumas decisões, quais dessas decisões você discorda?

B) Segundo o texto, após 12 meses desempregado, Davi conseguiu se inserir novamente no mercado e agora possui uma renda de $R\$$ 700,00 por mês para pagar as dívidas. Qual seria a melhor decisão: extinguir primeiramente a dívida do cartão de crédito e somente depois iniciar a quitação do cheque especial, extinguir primeiramente a dívida do cheque especial e somente depois iniciar a quitação do cartão de crédito ou investir simultaneamente $R\$$ 350,00 em cada dívida? Justifique.

C) Pagando somente os $R\$$ 700,00 mês e iniciando pelo cartão de crédito, em quanto tempo Davi quitaria as duas dívidas?

D) Uma opção mais viável de se quitar uma dívida é trocar essa dívida por outra de menor taxa. Supondo que Davi conseguisse um empréstimo pessoal de $R\$$ 6.000,00 a uma taxa de 3% ao mês, em quanto tempo ele quitaria o empréstimo se mantivesse o pagamento de $R\$$ 700,00 mensais?

E) Agora, se ao invés de uma dívida de $R\$$ 6.000,00, Davi tivesse um crédito desse valor e resolvesse aplicar esse capital em um investimento conservador durante 12 meses e 1 dia. Qual seria o melhor investimento: poupança, CDB ou LCI? (Dados: Selic: 4,5% a.a., CDI: 5,5% a.a., TR: 0%, CDB: 100% do CDI, LCI: 95% do CDI.)

Encontro 05: Fechamento

Por fim, esse encontro destina-se à correção das atividades práticas e ao esclarecimento de dúvidas sobre os temas discutidos.

4.2.2 Sequência Didática II

Tema: Planejamento financeiro e orçamento familiar **Público–alvo**: alunos da 3ª série do Ensino Médio. **Número de encontros**: 02 aula de 50 minutos. **Recursos Utilizados**: Software PowerPoint e Excel.

DESENVOLVIMENTO

Encontro 01: Discussão sobre os temas: planejamento financeiro e orçamento familiar. Nesse encontro motiva-se uma discussão sobre os temas: contracheque, impostos, planejamento financeiro e orçamento familiar, a partir da leitura prévia dos textos[5]: PLANEJAMENTO FINANCEIRO e DICAS PARA ORGANIZAR SEU ORÇAMENTO PESSOAL.

Encontro 02: Atividade prática. O encontro fica restrito a realização de uma atividade prática no laboratório de informática sobre o tema discutido na aula anterior, tendo como objetivo a validação da sequência didática.

ATIVIDADE PRÁTICA

Objetivos

I Preparar o indivíduo para questionar suas opções financeiras de forma rápida e concreta.

II Analisar criticamente situações envolvendo decisões sobre economia.

III Estabelecer estratégias para redução de dívidas.

IV Construir tabelas de orçamento familiar.

[5]Os dois textos motivadores da sequência didática II encontram-se nos anexos G e F, nas páginas 128 e 129.

Habilidade da BNCC

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões. (BRASIL, 2017, p. 526)

ATIVIDADE PROPOSTA

Uma planilha para controle do orçamento familiar é uma ferramenta utilizada para organizar suas receitas e despesas de maneira a entender melhor para aonde seu dinheiro está indo, além disso, é um elemento imprescindível em qualquer planejamento financeiro. Construa em uma planilha eletrônica o controle orçamentário da sua família. (Utilize valores fictícios)

Instruções [6]

Passo 1: Abra o Excel e crie uma nova planilha em branco. Em seguida, elabore uma tabela usando o exemplo da imagem abaixo, adequando às suas necessidades. O objetivo é estabelecer uma tabela para as receitas (ou seja, o dinheiro obtido durante o mês) e outra para as despesas (gastos do mês). Abaixo de cada categoria, é preciso inserir os consumos, seus respectivos valores e data de pagamento.

Figura 4.2: Panilha Orçamento familiar I

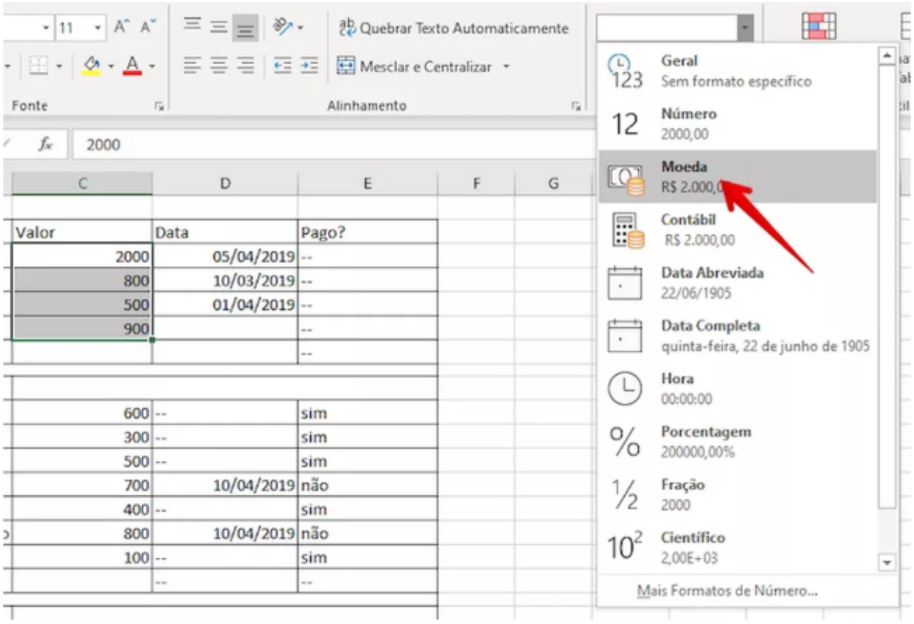
	A	B	C	D	E	F
1						
2		**Receitas**	Valor	Data	Pago?	
3		Salário	2000	05/04/2019	--	
4		Aluguel	800	10/03/2019	--	
5		Investimentos	500	01/04/2019	--	
6		Outros	900		--	
7		Total			--	
8						
9		**Despesas**				
10		Alimentação	600	--	sim	
11		Transporte	300	--	sim	
12		Mercado	500	--	sim	
13		Moradia	700	10/04/2019	não	
14		Lazer	400	--	sim	
15		Cartão de crédito	800	10/04/2019	não	
16		Outros	100	--	sim	
17		Total		--	--	
18						
19		Balanço				

Fonte: Helito Beggiora (2020)

[6] Os passos dessas instruções foram baseados no artigo "Como fazer uma planilha financeira no excel" que pode ser acessada no site: https://www.techtudo.com.br/dicas-e-tutoriais/2019/04/como-fazer-uma-planilha-financeira-no-excel.ghtml. Acesso em: 12/03/2020.

Passo 2: Agora, selecione as células em que você adicionou valores e altere o estilo para "Moeda". Para isso, na aba "Início", basta clicar em "Geral" e selecionar a opção indicada.

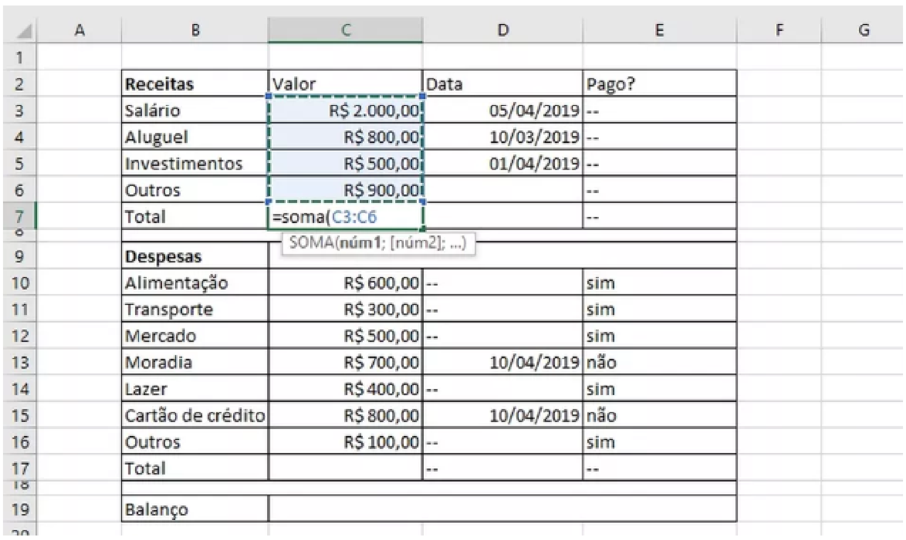
Figura 4.3: Panilha Orçamento familiar II



Fonte: Helito Beggiora (2020)

Passo 3: Na célula ao lado "Total" em despesas e receitas, entre com a fórmula "=soma" (sem aspas) e selecione todos os valores de cada categoria. Após fazer isso, pressione Enter. O Excel automaticamente somará as células assinaladas.

Figura 4.4: Panilha Orçamento familiar III



	A	B	C	D	E
1					
2		Receitas	Valor	Data	Pago?
3		Salário	R$ 2.000,00	05/04/2019	--
4		Aluguel	R$ 800,00	10/03/2019	--
5		Investimentos	R$ 500,00	01/04/2019	--
6		Outros	R$ 900,00		--
7		Total	=soma(C3:C6		--
9		Despesas			
10		Alimentação	R$ 600,00	--	sim
11		Transporte	R$ 300,00	--	sim
12		Mercado	R$ 500,00	--	sim
13		Moradia	R$ 700,00	10/04/2019	não
14		Lazer	R$ 400,00	--	sim
15		Cartão de crédito	R$ 800,00	10/04/2019	não
16		Outros	R$ 100,00	--	sim
17		Total		--	--
19		Balanço			

Fonte: Helito Beggiora (2020)

Passo 4: Em “Balanço”, você deve digitar “=” (sem aspas) e selecionar o total de receitas. Depois, digite o sinal de menos e clique sobre o total de gastos. Pressione Enter para calcular.

Figura 4.5: Panilha Orçamento familiar IV

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		**Receitas**	Valor	Data	Pago?		
3		Salário	R$ 2.000,00	05/04/2019	--		
4		Aluguel	R$ 800,00	10/03/2019	--		
5		Investimentos	R$ 500,00	01/04/2019	--		
6		Outros	R$ 900,00		--		
7		Total	R$ 4.200,00		--		
8							
9		**Despesas**					
10		Alimentação	R$ 600,00	--	sim		
11		Transporte	R$ 300,00	--	sim		
12		Mercado	R$ 500,00	--	sim		
13		Moradia	R$ 700,00	10/04/2019	não		
14		Lazer	R$ 400,00	--	sim		
15		Cartão de crédito	R$ 800,00	10/04/2019	não		
16		Outros	R$ 100,00	--	sim		
17		Total	R$ 3.400,00	--	--		
18							
19		Balanço	=C7-C17				

Fonte: Helito Beggiora (2020)

Passo 5: Após fazer as edições desejadas, clique duas vezes sobre “Pasta1” e digite o nome do mês.

Figura 4.6: Panilha Orçamento familiar V

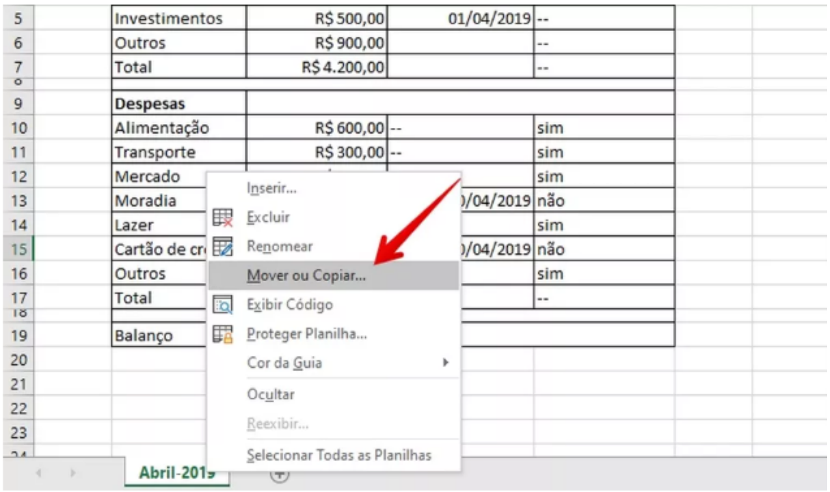
5		Investimentos	R$ 500,00	01/04/2019	--
6		Outros	R$ 900,00		--
7		Total	R$ 4.200,00		--
8					
9		**Despesas**			
10		Alimentação	R$ 600,00	--	sim
11		Transporte	R$ 300,00	--	sim
12		Mercado	R$ 500,00	--	sim
13		Moradia	R$ 700,00	10/04/2019	não
14		Lazer	R$ 400,00	--	sim
15		Cartão de crédito	R$ 800,00	10/04/2019	não
16		Outros	R$ 100,00	--	sim
17		Total	R$ 3.400,00	--	--
18					
19		Balanço	R$ 800,00		
20					
21					
22					
23					

Abril-2019

Fonte: Helito Beggiora (2020)

Passo 6: Para novos meses, você pode copiar a planilha já pronta. Para isso, clique com o botão direito do mouse sobre o mês atual e vá em "Mover ou Copiar...".

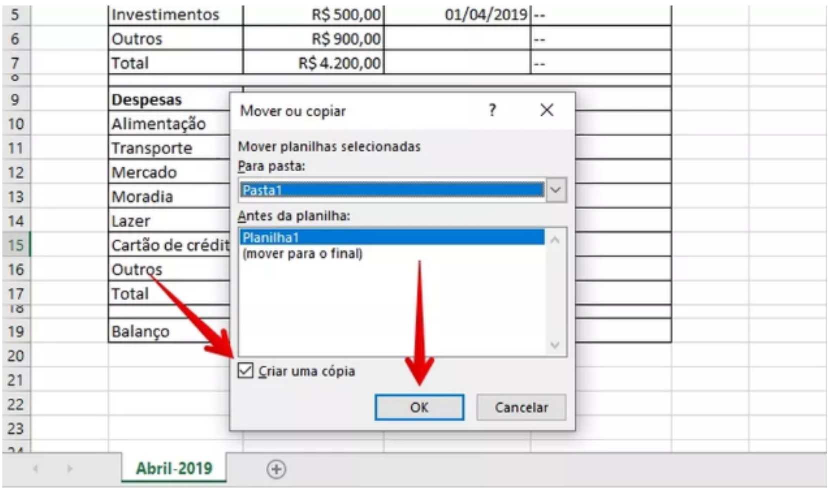
Figura 4.7: Panilha Orçamento familiar VI



Fonte: Helito Beggiora (2020)

Passo 7: Por fim, marque a opção "Criar uma cópia" e pressione "OK". Posteriormente, basta preencher com os gastos e receitas do novo mês que os cálculos serão realizados automaticamente.

Figura 4.8: Panilha Orçamento familiar VII



Fonte: Helito Beggiora (2020)

O próximo capítulo será destinado à análise da sequência didática I. Devido a pandemia da COVID-19, ocorreu a suspensão das aulas e não foi possível realizar a sequência didática II, porém espero, em um trabalho futuro, poder concluir a realização e análise dessa sequência.

5 Análise dos dados

Esse capítulo apresenta uma análise descritiva dos dados coletados durante a realização da sequência didática I, cujos temas abordados foram os investimentos conservadores e o uso indiscriminado do cartão de crédito e o cheque especial. Dentro desse contexto, essa sequência teve como objetivos: comparar a taxa da poupança com a taxa da inflação, apresentar as características dos investimentos conservadores, analisar as consequências da inadimplência no cartão de crédito e o cheque especial, incentivar o hábito de economizar e de investir, estimular a prática do consumo consciente e aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a criação de planilhas eletrônicas para tomada de decisões.

O capítulo será dividido em três seções, a primeira será a análise do questionário de sondagem que buscou traçar um perfil de conhecimento prévio dos alunos sobre o tema finanças, a segunda seção diz respeito as percepções do professor em relação a postura e participação dos alunos na aula motivacional e a terceira seção será uma análise dos resultados encontrados pelos alunos quando submetidos a uma atividade prática sobre investimentos e dívidas no cartão de crédito e cheque especial.

A seleção do grupo focal se restringiu a alunos com conhecimento prévio de alguns tópicos sobre a Matemática Financeira e foi formado por 55 alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola particular de Belo Horizonte.

5.1 Questionário de Sondagem

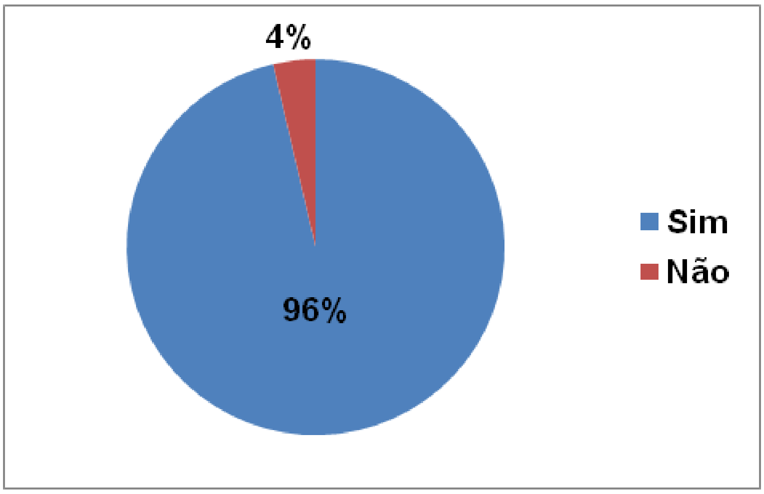
Para melhor entendimento sobre o tema Educação Financeira, esse trabalho buscou coletar impressões iniciais dos alunos por meio de um questionário que permitiu, entre outras questões, mensurar qualitativamente o grau de conhecimento dos entrevistados sobre a Educação Financeira no ensino médio.

O questionário proposto continha 13 questões sobre termos corriqueiros relacionado à finanças, nada que exigisse algum conhecimento específico de Matemática Financeira.

Como tema central desse trabalho procuramos investigar qual a finalidade da Educação Financeira na educação básica e 87,27% (48 alunos) dos entrevistados entendem que a Educação Financeira serve para aprendermos e adquirirmos hábitos financeiros racionais, na contramão 7,27% (4 alunos) acreditam que a sua única finalidade é aprender a usar o crédito e o restante 5,46% (3 alunos) a gastar o dinheiro.

Na busca de aferir uma capacitação pregressa, fornecida pelo colégio ou adquirida de forma autônoma, foram feitas duas perguntas aos alunos. A primeira se já haviam recebido alguma capacitação sobre a Educação Financeira e a segunda se eles já haviam buscado alguma fonte de informação sobre finanças. O resultado de ambas as perguntas foram idênticos, fato esse que se justifica devido a implementação da disciplina de Educação Financeira no colégio onde a pesquisa foi realizada, em 2019, para os alunos do 2º ano do ensino médio. Conforme o gráfico da Figura (5.1), 96,36% (53 alunos) já haviam recebido alguma capacitação ou adquirido de forma autônoma informações sobre Educação Financeira, já 3,64 % (2 alunos) que não haviam recebido ou buscada alguma capacitação.

Figura 5.1: Capacitação pregressa sobre Educação Financeira

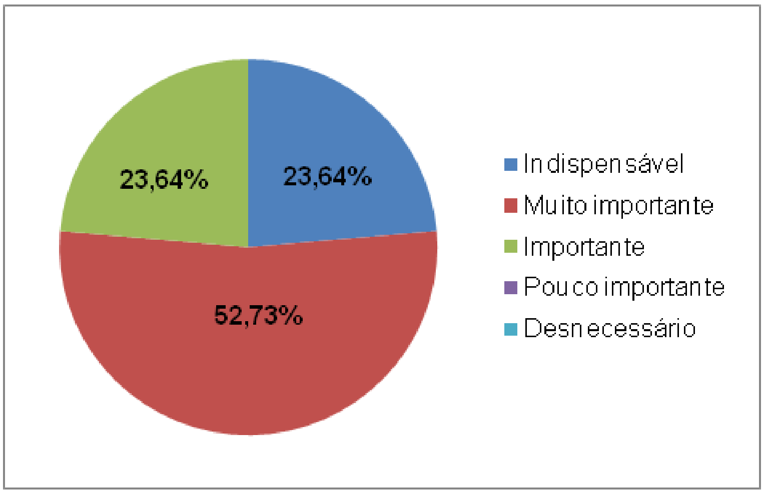


Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Tal resultado poderia nos ter surpreendido, pois a implementação da Educação Financeira sugerida pela BNCC no ensino médio, ainda não tem caráter compulsório, algo que ocorrerá apenas em 2021. Mas como já foi citado o colégio em questão, em 2019, resolveu se antecipar e inseriu na sua grade curricular uma disciplina chamada Educação Financeira que atualmente é lecionada na 2ª série do ensino médio, mas há previsão de que a partir de 2021 essa disciplina seja lecionada em todo o ensino médio. O grupo de alunos que respondeu que não tive nenhum tipo de capacitação e nem buscaram informações de forma autônoma é formado por 2 alunos que são novatos na instituição.

Outro questionamento, foi sobre qual o grau de importância que os alunos atribuem a Educação Financeira no Ensino Fundamental e Médio. De acordo com o gráfico da Figura (5.2), do total de alunos 23,64% (13 alunos) responderam que consideram o assunto imprescindível, já 52,73% (29 alunos) responderam ser muito importante e o restante 23,64% (13 alunos) disseram ser importante.

Figura 5.2: Grau de importância da Educação Financeira na Educação Básica



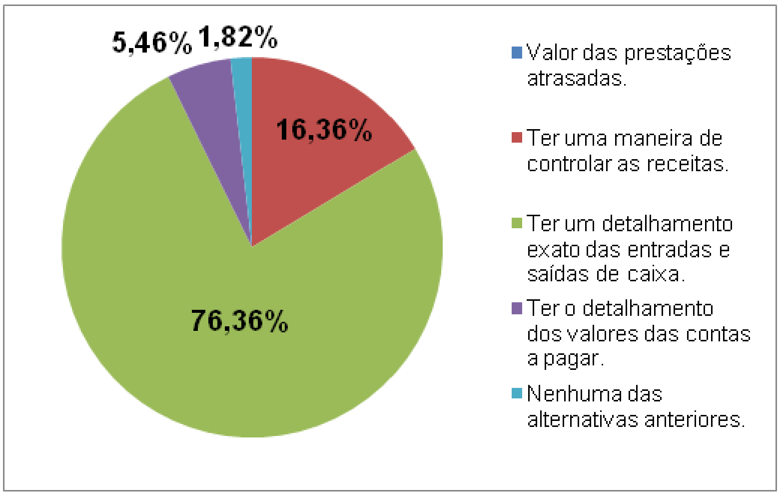
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Já as opções pouco importante ou desnecessário não receberam nenhum voto, resultado esse que mostra que os

alunos entendem que para ter uma saúde financeira no futuro é importante iniciar a Educação Financeira desde a educação básica.

Na busca do entendimento de um assunto mais específico, no contexto da Educação Financeira, foram criadas três perguntas sobre o orçamento financeiro. A primeira pergunta sondou se eles sabiam o que era orçamento financeiro e conforme podemos perceber no gráfico da Figura (5.3), 81,82% (45 alunos) responderam que tinham o conhecimento sobre o tema, resultado esse que nos causou certa estranheza, pois como 53 alunos já haviam tido aulas de Educação Financeira, imaginávamos que todos esses teriam conhecimento sobre o tema. A seguir foi questionado sobre o que seria indispensável em um orçamento financeiro, das cinco opções possíveis 76,36% (42 alunos) responderam que é ter um detalhamento exato das entradas e saídas de caixa, mostrando assim que do grupo de 45 alunos que responderam que sabiam o conceito de orçamento financeiro, existem 3 alunos na verdade não detinham tal conhecimento.

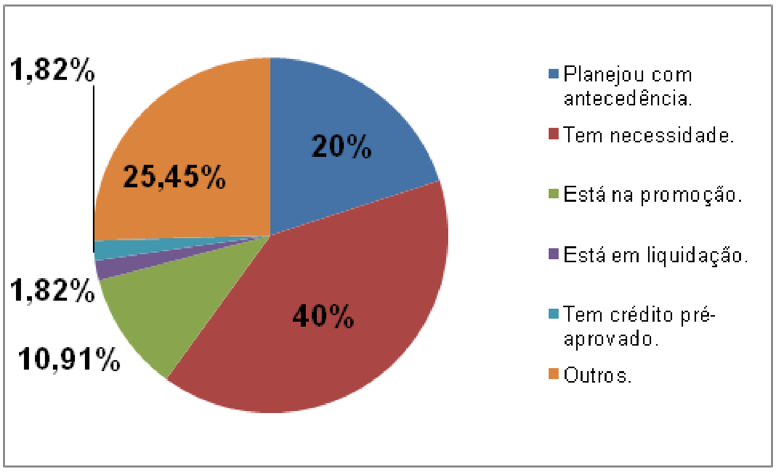
Figura 5.3: Conhecimento sobre orçamento financeiro



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Vale salientar que 16,36% (9 alunos) consideram ter uma maneira de controlar as receitas, pensamento esse ineficaz se não tivermos controle também dos gastos. E sobre o tema consumo procuramos entender o que motiva aos alunos a consumir e de acordo com o gráfico da Figura (5.4), 40% (22 alunos) afirmaram que consome somente o que é necessário, indo na contramão de um consumismo que aflige uma parte de nossa sociedade.

Figura 5.4: Perfil de consumo

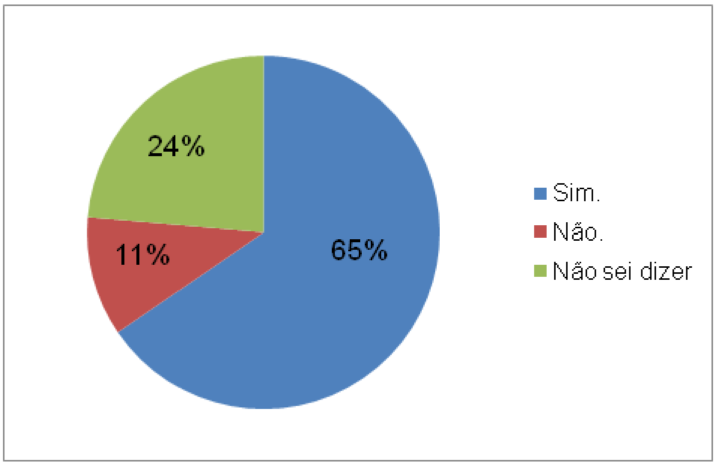


Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

É importante ressaltar que o fato do produto estar na promoção ou liquidação ou ter o crédito pré-aprovado ainda induzem muitas pessoas a consumir, nessa pesquisa foram 14,55% (8 alunos).

Ainda sobre o assunto orçamento financeiro foi perguntado aos alunos se seus pais costumam fazer algum controle das receitas e gastos mensais e conforme o gráfico da (5.5) do grupo 65,46% (36 alunos) afirmaram que seus pais tem esse controle.

Figura 5.5: Controle das receitas e despesas pelos pais

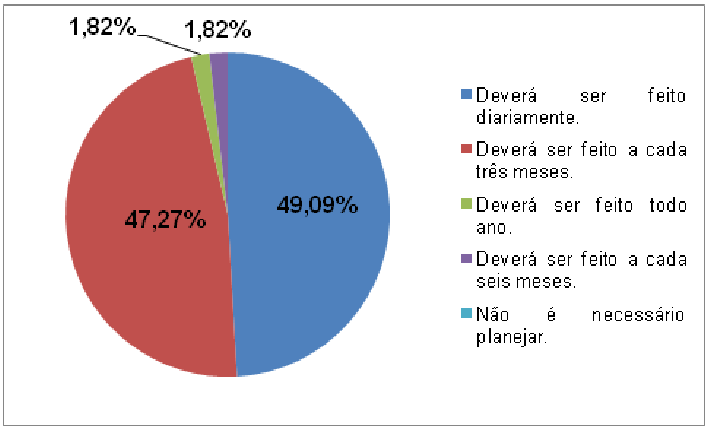


Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Um fato que não pode passar despercebido é que 26,64% (13 alunos) informaram que não sabiam se seus pais faziam algum controle financeiro, resultado que nos mostra que o assunto ainda é um tabu nas famílias ou os pais são centralizadores e não compartilham essa informação, contribuindo assim, para que os seus filhos não se interessem prematuramente sobre esse assunto.

Ainda sobre o tema orçamento familiar foi questionado sobre com que frequência se deve atualizar a planilha de receitas e despesas. No gráfico da Figura (5.6) podemos verificar que as opções mais votadas foram diariamente com 49,09% (27 alunos) e a cada três meses com 47,27% (26 alunos).

Figura 5.6: Frequência com que se deve acompanhar o planejamento financeiro



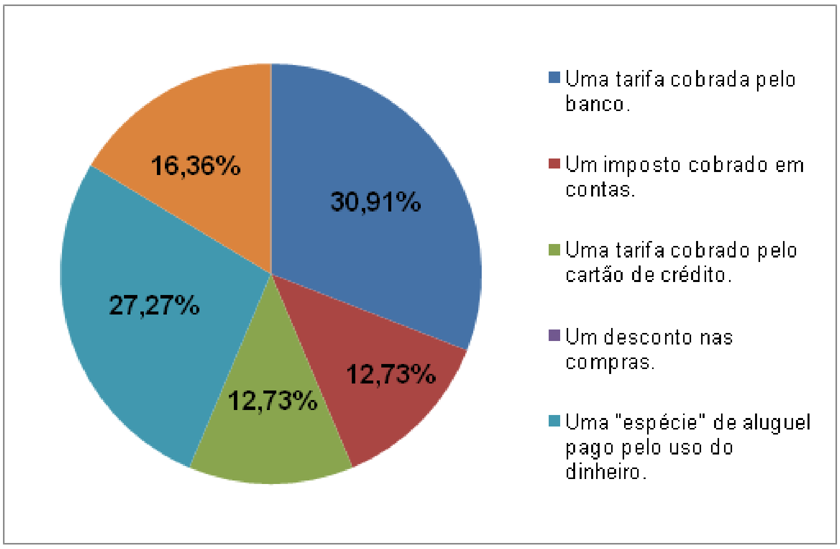
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Provavelmente essa distribuição equilibrada das respostas do controle diário e o trimestral se deu por causa da ausência da opção "deverá ser feita mensalmente" ou porque os alunos ainda não compreendam que em três meses de gastos desenfreados eles podem colocar todo um planejamento em risco.

Para analisarmos termos mais específicos do comércio foram feitas duas perguntas sobre as definições dos seguintes temas: inadimplência e juros.

Sobre o conceito de inadimplência, podemos perceber no gráfico da Figura (5.7) que 78,18% dos alunos entendem que é quando um dos agentes de um contrato falta ao cumprimento de suas obrigações no prazo estipulado, paralelamente 16,36% acreditaram que nenhuma das opções estava correta, mostrando assim que mesmo sendo um termo tão comum no mercado ainda pode ser desconhecido dos alunos.

Figura 5.7: Conceito de Inadimplência



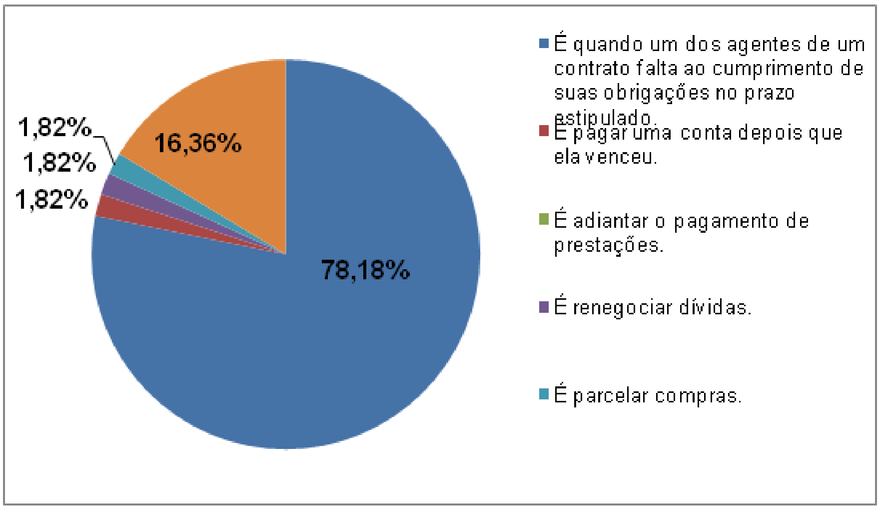
Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Já a palavra juros tem ampla divulgação nas aulas de matemática e nas práticas de mercado, por isso, aferir esse conceito fez parte dessa pesquisa. O resultado de certa forma foi surpreendente, de acordo com o gráfico da Figura (5.8) cerca de 30,91% (17 alunos) acreditam que o conceito de juros está ligado a cobrança de uma tarifa pelo banco e apenas 27,27% (15 alunos) definem juros como sendo uma "espécie" de aluguel pago pelo uso do dinheiro.

Esse resultado deixa claro que os professores de matemática ainda erram ao se prenderem a regras e aplicação de algoritmos sem nenhuma associação a vida cotidiana dos alunos.

A caderneta de poupança atrai mais de 80% da população brasileira, apesar da

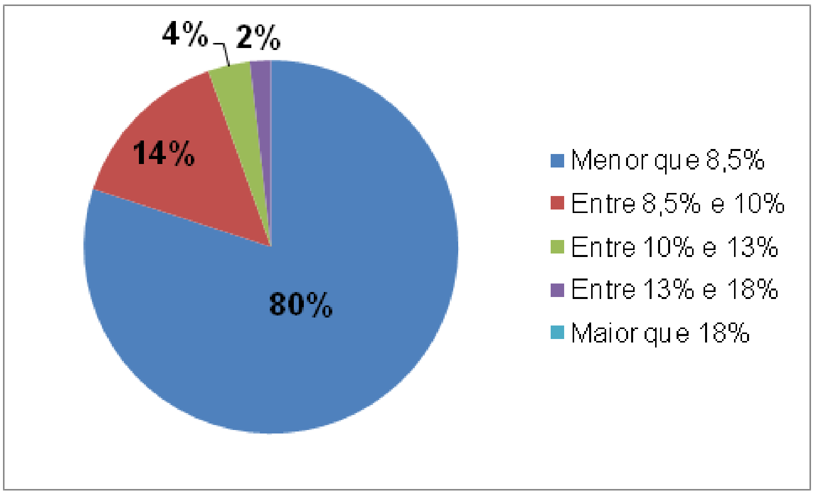
Figura 5.8: Conceito de Juros



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

maioria desconhecerem, por exemplo, como é feito o cálculo da taxa de juros. Um dos índices de referência para o cálculo da taxa de juros da poupança é a SELIC e assim foi aferido se os alunos tem noção aproximada do seu valor anual. Esse resultado está representado pelo gráfico da Figura (5.9).

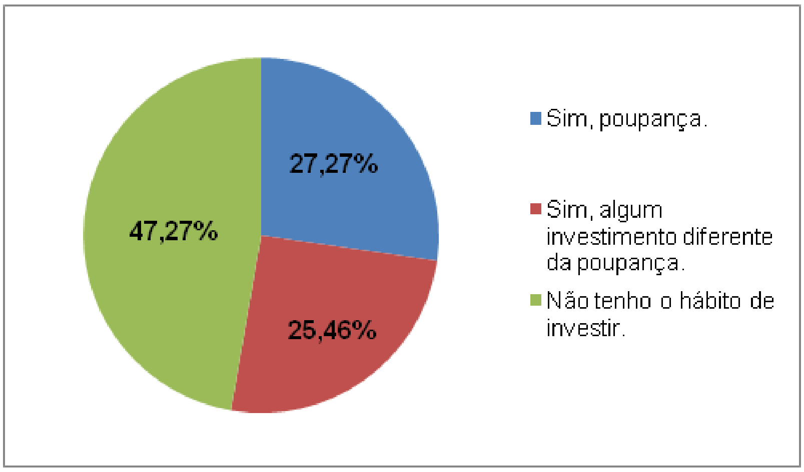
Figura 5.9: Valor atual da SELIC (% a.a.)



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Um grupo de 80% (44 alunos) dos entrevistados sabia estimar o valor aproximado da taxa SELIC, e por não ser um assunto usual em salas de aula, podemos afirmar que o tema "investimento" seja um assunto que a turma se interesse. Outro indício relacionado a investimento está representado no gráfico da Figura (5.10), nele podemos verificar que 90,90% (50 alunos) entrevistados tem o hábito de guardar dinheiro. Desse total 52,73% (27 alunos) investem em poupança ou algum outro tipo de investimento.

Figura 5.10: Perfil de investimento



Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Esses resultados corroboram para acreditarmos que os alunos já se interessam por investimentos, talvez motivados pela mídia que os bombardeiam com propagandas na redes sociais sobre investimentos. Porém ainda desconhecem alguns termos relacionados à finanças, o que mostra que precisamos mudar a forma como a escola aborda o tema Educação Financeira.

Mas é importante ressaltar que esse grupo de alunos compreendem que a ausência de uma formação mínima financeira na Educação Básica impacta na saúde financeira a longo prazo, por isso alguns deles já buscam informações de maneira autônoma, além de se aventurarem no universo dos investimentos. Destaca-se como ponto negativo a falta de conhecimento sobre o conceito de juros, assunto amplamente discutido em jornais, mídias eletrônicas e na própria escola, dando a entender que, ainda não existe um elo entre o saber curricular e a experiência social vivenciada pelos alunos.

Por fim, a realização do questionário de sondagem contribuiu significativamente na elaboração da aula motivacional, servindo de parâmetro para a delimitação do tema e nível de discussão, afinal, diferente de muitas escolas, esse alunos já tiveram no ano letivo anterior um contato com a Educação Financeira.

A próxima seção será a descrição da aula motivacional, além, de um relato comportamental dos alunos. E aos interessados, apresento no apêndice C localizado nas páginas 115 a 118 os resultados completos tabulados do questionário aplicado.

5.2 Aula Motivacional

A aula foi realizada no auditório do colégio e participaram dela os 55 alunos da 3ª série do Ensino Médio. A aula foi preparada de modo a promover uma discussão acerca dos temas investimentos conservadores e as consequências da inadimplência do cartão de crédito e cheque especial. Para isso foi utilizado como recurso didático uma apresentação montada pelo pesquisador no PowerPoint, utilizando notícias, gráficos e informações coletadas no teste de sondagem para provocar a discussão e apresentação oral sobre os temas propostos.

Inicialmente foi apresentado aos alunos o índice de inadimplência dos brasileiros, dado esse divulgado pela Confederação Nacional do Comércio (CNC) em janeiro de 2020[1]. A maioria dos alunos se mostrou perplexo ao saber que nessa pesquisa 65,3% das famílias brasileiras alegam ter alguma dívida, assim iniciamos nossa discussão na busca dos fatores que contribuem para esse cenário. Dentre as respostas possíveis foram citados: consumismo exagerado, inexistência de uma reserva de emergência, altas taxas de juros e ausência de formação mínima financeira nas escolas.

Após encerramos essa discussão foi apresentadoaos alunos a diferença entre Matemática Financeira e a Educação Financeira, temas fundamentais para esse projeto. Em seguida foram expostas as características de alguns investimentos conservadores. Dentre essas características estão: rentabilidade, liquidez, investimento mínimo inicial e incidência de imposto ou taxa. Os investimentos selecionados foram a poupança, o Certificado de Depósito Bancário - CDB, o A Letra de Crédito Imobiliário - LCI e o Tesouro Selic. Para um melhor entendimento desses investimentos discutimos também as característicastaxa Selic, a taxa referencial, o Certificados de Depósito Interbancário - CDI e a inflação.

Após findarmos a discussão sobre investimentos iniciamos um conversa sobre as características do cheque especial e cartão de crédito. Nesse momento discutimos o motivo pelo qual as taxas de juros dessas linhas de crédito são tão elevadas e chegamos ao consenso de que somente devemos utilizar essas linhas de crédito com responsabilidade.

Por fim, discutimos ações eficientes na busca da retomada do crédito quando o consumidor já se encontra endividado por uma dessas linhas de crédito. As soluções apresentadas pelos alunos se baseavam no controle dos gastos ou na busca de novas fontes

[1]Informações acessadas no link: https://www.brasildefato.com.br/2020/01/13/endividamento-bate-recorde-e-atinge-65-dos-brasileiros. Acesso em 10/02/2020.

de renda. Neste momento foi apresentado a eles a possibilidade de se trocar uma dívida por outra dívida com uma taxa menor, uma espécie de refinanciamento que pode ser solicitada no próprio banco ou em outro qualquer.

Na próxima seção serão apresentados os dados coletados em uma atividade prática no laboratório do colégio que teve como objetivo validar a sequência didática I.

5.3 Atividade Prática

Já dizia Freire[31] (1996), "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção" (p. 47). E foi nesse sentido de proporcionar aos alunos que assumissem um real protagonismo no universo da Educação Financeira que surgiu a ideia de uma aula prática. Além disso, foi uma oportunidade ímpar de observação do comportamento dos alunos quando confrontados com problemas rotineiros na vida financeira de uma boa parcela da população brasileira.

Antes de iniciar a prática, o grupo de 55 alunos foi previamente divididos em 26 duplas e 1 trio, que se dividiram em dois horários, no primeiro foram 13 duplas e no segundo 13 duplas e 1 trio. A atividade iniciou-se com uma breve explicação da proposta da atividade e quais rescursos poderiam ser utilizados. Após essa breve explanação os alunos iniciaram as atividades.

A atividade consistia em 5 questões discursivas sobre um texto que descrevia uma pessoa (Davi) que pediu o desligamento do emprego, gastou todas as suas economias em 4 meses e ao final de 12 meses se endividou no cartão de crédito e no cheque especial, sendo a dívida de $R\$$ 6.000,00 com $R\$$ 3.000,00 em cada linha de crédito. A primeira pergunta questionava aos alunos se eles discordavam de alguma decisão Davi. A resposta esperada era que Davi havia tomado algumas decisões equivocadas, e nelas se incluiam a de pedir demissão sem ter feito um planejamento que garantisse sua saúde financeira durante o período de desemprego ou mesmo pedir o desligamento sem ter outro emprego engatilhado e também acessar as linhas de crédito do cartão de crédito e do cheque especial.

Do número total de duplas, dez não citaram o fato de Davi ter pedido demissão do emprego, ou seja, mais de 37% das duplas deixaram passar desapercebido algo bastante nocivo ao planejamento financeiro de qualquer pessoa. Infelizmente existem pessoas que na primeira divergência no emprego pedem demissão, sem ter a ideia de como isso vai impactar negativamente no seu orçamento familiar. Já 14 duplas acharam importante citar o pedido de demissão como uma decisão equivocada e 3 duplas afirmaram que todas as decisões eram erradas, porém, não discriminaram quais eram essas decisões.

Em contrapartida todos os alunos citaram que utilizar o cheque especial e o cartão de crédito foram decisões equivocadas devido às altas taxas de juros. Por fim, houveram duplas que citaram o fato de Davi ter gastado toda a sua economia em 4 meses, porém, o texto não deixa claro como ele gastou essa quantia e nem o seu valor, assim não podemos afirmar que esse gasto foi uma decisão equivocada.

A segunda questão sugeria que o aluno tomasse uma decisão e o contexto era de que Davi voltara a trabalhar e mensalmente ele dispunha de $R\$$ 700,00 para quitação das dívidas, porém deveria decidir se quitava primeiramente o cartão de crédito, com taxa de juros de 10% ao mês, ou quitava primeiramente o cheque especial, com taxa de juros de 8% ao mês ou ainda se quitava simultaneamente as duas dívidas investindo $R\$$ 350,00 em cada.

A resposta esperada era que Davi quitasse primeiro a dívida de maior taxa de juros, ou seja, que investisse todo o seu dinheiro exclusivamente no pagamento do cartão de crédito. Do total de alunos, 16 duplas entenderam que essa seria a melhor decisão, ou seja, quase 60% da turma tomaria uma decisão assertivas, já 8 duplas optaram por pagamentos simultâneos, uma dupla não respondeu a essa pergunta e duas duplas responderam que investiriam 50% dos $R\$$ 700,00 e a outra metade pagaria simultaneamente o cartão de crédito e o cheque especial. O que essas duplas não entenderam que dificilmente elas conseguiram um investimento que tivesse taxas de juros superiores aos dos cartões de crédito e cheque especial.

A terceira pergunta sugeria iniciar o pagamento pelo cartão de crédito, assim Davi pagaria mensalmente $R\$$ 700,00 até a quitação total de suas dívidas, e a proposta era dos alunos determinarem em quanto tempo ele quitaria suas dívidas. Nesse momento os alunos foram orientados a utilizar o software Excel para facilitar as contas, porém imediatamente, surgiu a primeira e gigantesca dificuldade, pois, praticamente nenhum aluno sabia utilizar o Excel. Assim, foi descrito, no quadro, as funções básicas que eles utilizariam. A resposta esperada era de 17 meses para quitação total das dívidas. Mas apenas 5 duplas, ou seja, aproximadamente 18,5% dos alunos, acertaram o resultado; as outra respostas foram 7 meses (1 voto), 11 meses (1 voto), 12 meses (3 votos), 14 meses (4 votos), 15 meses (4 votos), 16 meses (2 votos), 18 meses (5 votos) e 19 meses (2 votos). Como os alunos utilizaram a planilha eletrônica como ferramenta para os cálculos eles deixaram pouco resgistro nessa questão, mesmo assim, foi possível interpretar que quem optou por 18 meses o fez pensando que o primeiro pagamento seria daí a trinta dias, quem registrou 14 meses fez o cálculo do pagamento do cartão de crédito que duraria 7 meses para sua quitação e depois dobrou o tempo, se esquecendo que enquanto se pagava o cartão de crédito a dívida do cheque especial aumentava, o que influenciava no tempo total de quitação das duas dívidas. A dupla que optou por 7 meses quitou somente o cartão de crédito e esqueceu que deveria pagar também o cheque especial. Os demais se equivocaram no desenvolvimento da atividade ou na utilização do software ou na interpretação da quitação de dívida, como por exemplo, muitos alunos pagavam primeiro a prestação e somente depois calculavam os juros sobre o saldo devedor, o que de fato não acontece.

A quarta questão sugeria que Davi utilizasse um financiamento em outra linha de crédito, com menor taxa, para quitação total da dívida. A questão era calcular o tempo mínimo que Davi levaria para quitar uma dívida de $R\$$ 6.000,00, considerando uma taxa de 3% ao mês. A resposta esperada era de 11 meses e, do total, doze duplas, aproximadamente 48% da turma, acertou a questão. Por outro lado, 10 duplas optaram por 12 meses, podendo ser interpretado como na questão anterior do pagamento iniciar somente daí 30 dias e as duplas restantes se distribuíram em 4 duplas que optaram por 10 meses e 1 dupla que optou por 18 meses.

Por fim, a última pergunta estava relacionada a investimentos conservadores e a proposta era do aluno ter disponível $R\$$ 6.000,00 para investir e ele deveria definir qual seria o investimento mais rentável no período de 12 meses. As opções de investimentos eram poupança, CDB e LCI, considerando que a Selic era de 4,5% ao ano, o CDI era de 5,5% ao ano e a TR de 0% ao ano. A resposta esperada era LCI e 17 duplas, aproximadamente 63%, marcaram essa opção, e suas justificativas foram feitas utilizando o desenvolvendo dos três investimentos ou simplesmente analisando a diferença nas taxas. Já três pessoas optaram no CDB e 7 duplas não conseguiram terminar essa questão e deixaram em branco.

De modo geral, essa prática corroborou na busca de se atingir os objetivos propostos pela sequência didática, pois durante essa atividade foi possível observar que os alunos entendiam muito bem sobre a poupança e a sua relação com a inflação. Também ficou claro para eles que o cheque especial e o cartão de crédito devem ser evitados, principalmente, quando ao resolver a questão 4, eles perceberam que trocando as dívidas de cartão de crédito e cheque especial por um financiamento com taxa menor, eles reduziram a quitação da dívida em 6 meses. Já na última questão eles demonstraram conhecimento sobre alguns investimentos conservadores.

Por outro lado, nessa atividade não foi possível aplicar conceitos matemáticos em um planejamento financeiro, devido ao isolamento social decorrente como uma medida preventiva da COVID-19 e suspensão por tempo indeterminado das aulas. Assim, foi inviabilizado, nessa pesquisa, a aplicação de uma segunda sequência didática planejada. Porém, a pesquisa não foi prejudicada, pois, essa proposta pode fazer parte de trabalhos futuros.

6 Considerações Finais

Em 2020 vivemos um momento ímpar da nossa história, uma pandemia assombra o mundo. A resposta para conter a evolução dessa pandemia foi o isolamento social sugerido pela Organização Mundial de Saúde – OMS. Tal medida se mostrou efetiva na redução do ritmo de contágio da população, evitando assim, o estrangulamento do sistema de saúde que não comportaria um número de pacientes de tal magnitude.

Além da tristeza das milhares de mortes devido ao Covid-19, ainda enfrentamos uma crise econômica sem precedentes, já que muitas empresas que prestam serviços não essenciais, foram obrigadas a fechar as suas portas, como consequência, muitos funcionários foram demitidos. O cenário de 2020 é de incertezas impossibilitando qualquer projeção de recuperação econômica, muitas pessoas ficaram desempregadas e várias pequenas e médias empresas encerraram suas atividades definitivamente.

Relatamos nessa pesquisa que, em janeiro de 2020, segundo a Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), 65,3% das famílias brasileiras declararam possuir alguma dívida, resultado que tende a se agravar com a pandemia do Covid-19.

Nesta perspectiva de crise econômica, nunca foi tão importante aos cidadãos ter uma boa saúde financeira, porém, estar preparado para situações inesperadas como a que vivemos em 2020 exige ser "educado" financeiramente, educação essa que grande parte da população brasileira não teve acesso.

Diante disso, a pesquisa teve como objetivo promover uma discussão sobre os temas investimentos conservadores, consequências da inadimplência dos cheque especial e cartão de crédito, planejamento financeiro e orçamento familiar, que são assuntos intimamente ligados à Educação Financeira. Para auxiliar na busca desse objetivo foram construídas duas sequências didáticas para aprofundar a discussão a cerda da Educação Financeira no Ensino Médio. A primeira sequência didática cujos temas eram investimentos conservadores e consequências da inadimplência do cartão de crédito e débito, foi aplicada e validada. Ao observarmos a implementação da primeira sequência didática acreditamos que o objetivo dessa pesquisa foi alcançado, já que os alunos participaram de forma efetiva durante todas as atividades propostas e o fato de alguns deles já investirem em carteiras diferentes da poupança tornou a discussão mais aprofundada, além disso, analisaram situações cotidianas relacionadas à finanças e tomaram decisões assertivas, porém, devemos ressaltar que muitos alunos desconheciam os perigos de se usar o cartão de crédito e cheque especial de forma irresponsável, além de não conhecerem a possibilidade da troca de linha de créditos, que possibilita a redução da taxa de juros. Contudo, muitos tiveram o primeiro contato com o software Excel, que é uma ferramenta importante para ser utilizada no controle dos gastos da família.

Já a segunda sequência, devido a suspensão das aulas em decorrência do Covid-19, não pode ser aplicada, mesmo assim, foi proposta por esse trabalho podendo ser desenvolvida futuramente, ou por professores do Ensino Médio que se interessem pelo trabalho. Durante a implementação das sequências surgiram algumas limitações, como a dificuldade de agendar encontros com as turmas pesquisadas, o número restrito de encontros, a falta de conhecimento dos alunos em Matemática Financeira e na utilização do software Excel, além da pandemia que impediu o projeto de prosseguir.

A partir da experiência vivenciada na realização dessa pesquisa observou-se que é interessante, após o término desse trabalho, a elaboração de um projeto com a mesma temática que se adapte a todos os alunos do Ensino Médio. Assim, ampliando o trabalho iniciado nas sequências didáticas aqui apresentadas e consequentemente, possibilitando um aprofundamento nas discussões sobre a Educação Financeira que contribuirá para formação de cidadãos que consumam de forma consciente, que se comportem diante das oportunidades de financiamentos disponíveis, que utilizem o crédito com sabedoria, que entendam a importância e as vantagens de se planejar, que acompanhem o orçamento pessoal e familiar e mantenham uma boa gestão financeira pessoal.

Diante da temática desse trabalho acreditamos que essa pesquisa surge como um primeiro passo de uma longa caminhada rumo a formação de nossos alunos da Educação Básica como cidadãos mais críticos e responsáveis financeiramente, pessoas que planejem melhor os seus gastos, construam uma reserva financeira para eventualidades e estejam prontos para tomada de decisões assertivas na administração de suas finanças.

Por fim, são vários os motivos que justificam a implementação e consolidação da Educação Financeira nas escolas, dentre eles entendemos que proporcionar uma formação financeira efetiva e continuada melhora o desempenho de cada indivíduo, contribuindo para o bem-estar coletivo, pois consideramos que um bom desempenho financeiro individual, a partir de atitudes austeras e planejadas, resultará em um desempenho financeiro coletivo mais eficiente e sólido, podendo assim, reduzir o alto índice de endividamento da população brasileira, que desde o início foi a mola propulsora dessa pesquisa de mestrado.

Referências

1 SANTOS, G. d. C. *Educação financeira: a matemática financeira sob nova perspectiva. 2005.* Tese (Doutorado) — Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência)–Faculdade de Ciências . . . , 2005.

2 SCHNEIDER, I. J. et al. Matemática financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas. Educação, 2008.

3 LIMA, E. L. *Números e funções reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

4 IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*. [S.l.]: Nova Fronteira, 1997.

5 ROBERT, J.; RANGEL, S.; MELENDEZ, S. *A origem do dinheiro*. [S.l.: s.n.], 1989.

6 GIORDAN, M. Elementos iniciais da elaboração da sd: título, público-alvo e problematização. *Acesso em: 16 janeiro de 2020.*, v. 30, 2007.

7 FEDERAL, S. Constituição federal de 1988. *Fonte: Planalto. gov. br: http://www. planalto. gov. br/ccivil_03/constituicao/constituicaocompilado. htm*, 1988.

8 BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB).* Brasília, 1996. Acesso em: 20 janeiro de 2020. Disponível em: <http://planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm/>.

9 BRASIL. *PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).* Brasília, 1998. Acesso em: 22 janeiro de 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>.

10 BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).* Brasília, 2002. Acesso em: 22 janeiro de 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>.

11 (MEC), S. d. E. M. e. T. S. BRASIL. Ministério da E.; TECNOLÓGICA.(SEMTEC), B. M. da Educação (MEC). Secretaria de Educação Média e. *PCN+ Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* [S.l.]: MEC/SEMTEC Brasília, 2002.

12 BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília, 2006. Acesso em: 21 janeiro de 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>.

13 CAMPOS, M. B. Educação financeira na matemática do ensino fundamental: uma análise da produção de significados. *Juiz de Fora: UFJF*, 2012.

14 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Ensino médio*. Brasília, 2018. Acesso em: 25 abril de 2020. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.

15 BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, 2017. Acesso em: 25 abril de 2020. Disponível em: <http://basenacionalcomum-.mec.gov.br/>.

16 LIMA, K. Plano nacional de educação 2014-2024. *Educação*, v. 2024, p. 2015, 2014.

17 OCDE, O. M. *Guidelines for Collection and interpreting innovation 3rd Editions*. [S.l.]: OECD Publications, 2005.

18 BRASIL. *Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF)*. Brasília, 2010. Acesso em: 20 janeiro de 2020. Disponível em: <https://vidaedinheiro.gov.br/legislacao-2/>.

19 SAITO, A. T. *Uma contribuição ao desenvolvimento da educação em finanças pessoais no Brasil. 2007, 152p.* Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

20 SÁ, I. P. D. A educação matemática crítica e a matemática financeira na formação de professores. 2012.

21 D'AMBROSIO, U. *Educação Matemática: da teoria à prática*. [S.l.]: Papirus Editora, 2007.

22 SAVOIA, J. R. F.; SAITO, A. T.; SANTANA, F. de A. Paradigmas da educação financeira no brasil. *Revista de Administração Pública-RAP*, Escola Brasileira de Administração Pública e de Empresas, v. 41, n. 6, p. 1121–1141, 2007.

23 BRASIL. *Educação financeira nas Escolas Ensino médio*. Brasília, 2013. Acesso em: 23 janeiro de 2020. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br-/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15363-aluno-caderno03-2014&category_slug=marco-2014-pdf&Itemid=30192>.

24 DOMINGOS, R. *Terapia financeira: realize seus sonhos com educação financeira*. [S.l.]: Editora DSOP, 2013.

25 GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. [S.l.]: Plageder, 2009.

26 TRIVISIOS, A. N. Introdução à pesquisa em ciências sociais. *A pesquisa*, p. 133, 1987.

27 MARCONI MARINA DE ANDRADE E LAKATOS, E. M. Fundamentos da metodologia científica. 7. reimpressão. *S a ou Paulo: Atlas*, 2009.

28 ZABALA, A. A prática educativa: como ensinar; tradução ernani f. da f. *Rosa. Porto Alegre: Artmed*, 1998.

29 GUIMARÃES, Y. A.; GIORDAN, M. Instrumento para construção e validação de sequências didáticas em um curso a distância de formação continuada de professores. *VIIII Encontro Nacional De Pesquisa em Educação em Ciências. Campinas*, 2011.

30 BABINSKI, A. L. *Sequência Didática (SD): experiência da Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017.

31 FREIRE, P. Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa.(28º ed.) são paulo: Paz e terra. 1996.

Apêndice A
Termo de consentimento

O discente **(NOME DO ALUNO)** sob sua responsabilidade, está sendo convidado a participar de uma pesquisa com objetivo promover discussões e aprendizagens à respeito de temas relativos à Educação Financeira que foram iniciadas no Ensino Fundamental. Para a coleta desses dados utilizaremos dois instrumentos: um "questionário de sondagem" e uma "atividade prática" que segue anexado e este Termo. A referida pesquisa está sob a responsabilidade do professor de Matemática Wagner Tadeu Coelho Souza e está sendo realizada nas dependências do colégio, durante o horário escolar. Solicitamos sua colaboração para autorizar que o discente sob sua responsabilidade possa responder as perguntas, como também sua autorização para que os dados dessa pesquisa possam ser apresentados em eventos da área de Ensino e Educação Matemática e publicados em revistas científicas. A participação nessa pesquisa é voluntária e a desistência poderá ocorrer em qualquer momento. Salientamos, ainda, que os dados pessoais são confidenciais e, na publicação dos resultados, tais informações não serão divulgadas.

( ) Autorizo a participação na pesquisa.

( ) Não autorizo a participação na pesquisa.

Assinatura do responsável legal

Pesquisador:

Wagner Tadeu Coelho Souza

Telefone de contato: 987842879

Belo Horizonte, 27 de fevereiro de 2020.

Apêndice B
Questionário de Sondagem

01. Qual o seu gênero?

A) Feminino.

B) Masculino.

02. Que grau de importância você atribui a Educação Financeira no Ensino Fundamental e Médio?

A) Indispensável.

B) Muito importante.

C) Importante.

D) Pouco importante.

E) Desnecessário.

03. Para que serve uma boa Educação Financeira?

A) Para aprender a gastar o seu dinheiro.

B) Para aprender a adquirir hábitos financeiros racionais.

C) Para aprender como comprar a prazo.

D) Para aprender usar crédito.

E) Nenhuma das alternativas anteriores.

04. Você sabe o que significa orçamento Financeiro?

A) Sim.

B) Não.

05. O que é indispensável no orçamento Financeiro?

A) Valor das prestações atrasadas.

B) Ter uma maneira de controlar as receitas.

C) Ter um detalhamento exato das entradas e saídas de caixa.

D) Ter o detalhamento dos valores das contas a pagar.

E) Nenhuma das alternativas anteriores.

06. Seus pais costumam fazer algum controle dos gastos mensais?

A) Sim.

B) Não.

C) Não sei dizer.

07. Para obter um bom planejamento e acompanhamento financeiro podemos afirmar que:

A) Deverá ser feito diariamente.

B) Deverá ser feito a cada três meses.

C) Deverá ser feito todo ano.

D) Deverá ser feito a cada seis meses.

E) Não é necessário planejar.

08. O que é inadimplência?

A) É quando um dos agentes de um contrato falta ao cumprimento de suas obrigações no prazo estipulado.

B) É pagar uma conta depois que ela venceu.

C) É adiantar o pagamento de prestações.

D) É renegociar dívidas.

E) É parcelar compras.

F) Nenhuma das alternativas

09. O que são juros?

A) Uma tarifa cobrada pelo banco.

B) Um imposto cobrado em contas.

C) Uma tarifa cobrado pelo cartão de crédito.

D) Um desconto nas compras.

E) Uma "espécie" de aluguel pago pelo uso do dinheiro.

F) Nenhuma das alternativas.

10. Qual o valor, atualmente, da taxa Selic (% ao ano)

A) Menor que 8,5%.

B) Entre 8,5% e 10%.

C) Entre 10% e 13%.

D) Entre 13% e 18%.

E) Maior que 18%.

11. Você costuma gastar todo o valor recebido ou tem o hábito de guardar algum valor?

A) Gasto tudo.

B) Tenho o hábito de guardar.

12. Ao realizar uma compra, você compra por quê?

A) Planejou com antecedência.

B) Tem necessidade.

C) Está na promoção.

D) Está em liquidação.

E) Tem crédito pré-aprovado.

F) Outros.

13. Você fez algum tipo de investimento?

A) Sim, poupança.

B) Sim, algum investimento diferente da poupança.

C) Não tenho o hábito de investir.

Apêndice C
Resultados completos do questionário de sondagem

01. Qual o seu gênero?

A) Feminino. **(26 alunos)**

B) Masculino. **(29 alunos)**

02. Que grau de importância você atribui a Educação Financeira no Ensino Fundamental e Médio?

A) Indispensável. **(13 alunos)**

B) Muito importante. **(29 alunos)**

C) Importante. **(13 alunos)**

D) Pouco importante. **(0 alunos)**

E) Desnecessário. **(0 alunos)**

03. Para que serve uma boa Educação Financeira?

A) Para aprender a gastar o seu dinheiro. **(3 alunos)**

B) Para aprender a adquirir hábitos financeiros racionais. **(48 alunos)**

C) Para aprender como comprar a prazo. **(0 alunos)**

D) Para aprender usar crédito. **(0 alunos)**

E) Nenhuma das alternativas anteriores. **(4 alunos)**

04. Você sabe o que significa orçamento Financeiro?

A) Sim. **(45 alunos)**

B) Não. **(10 alunos)**

05. O que é indispensável no orçamento Financeiro?

A) Valor das prestações atrasadas. **(0 alunos)**

B) Ter uma maneira de controlar as receitas. **(9 alunos)**

C) Ter um detalhamento exato das entradas e saídas de caixa. **(42 alunos)**

D) Ter o detalhamento dos valores das contas a pagar. **(3 alunos)**

E) Nenhuma das alternativas anteriores. **(1 aluno)**

06. Seus pais costumam fazer algum controle dos gastos mensais?

A) Sim. **(36 alunos)**

B) Não. **(6 alunos)**

C) Não sei dizer. **(13 alunos)**

07. Para obter um bom planejamento e acompanhamento financeiro podemos afirmar que:

A) Deverá ser feito diariamente. **(27 alunos)**

B) Deverá ser feito a cada três meses. **(26 alunos)**

C) Deverá ser feito todo ano. **(1 aluno)**

D) Deverá ser feito a cada seis meses. **(1 aluno)**

E) Não é necessário planejar. **(0 alunos)**

08. O que é inadimplência?

A) É quando um dos agentes de um contrato falta ao cumprimento de suas obrigações no prazo estipulado. **(43 alunos)**

B) É pagar uma conta depois que ela venceu. **(1 aluno)**

C) É adiantar o pagamento de prestações. **(26 alunos)**

D) É renegociar dívidas. **(0 alunos)**

E) É parcelar compras. **(1 aluno)**

F) Nenhuma das alternativas. **(1 aluno)**

09. O que são juros?

A) Uma tarifa cobrada pelo banco. **(17 alunos)**

B) Um imposto cobrado em contas. **(7 alunos)**

C) Uma tarifa cobrado pelo cartão de crédito. **(7 alunos)**

D) Um desconto nas compras. **(0 alunos)**

E) Uma "espécie" de aluguel pago pelo uso do dinheiro. **(15 alunos)**

F) Nenhuma das alternativas. **(9 alunos)**

10. Qual o valor, atualmente, da taxa Selic (% ao ano)

A) Menor que 8,5%. **(44 alunos)**

B) Entre 8,5% e 10%. **(8 alunos)**

C) Entre 10% e 13%. **(2 alunos)**

D) Entre 13% e 18%. **(1 aluno)**

E) Maior que 18%. **(0 alunos)**

11. Você costuma gastar todo o valor recebido ou tem o hábito de guardar algum valor?

A) Gasto tudo. **(5 alunos)**

B) Tenho o hábito de guardar. **(50 alunos)**

12. Ao realizar uma compra, você compra por quê?

A) Planejou com antecedência. **(11 alunos)**

B) Tem necessidade. **(22 alunos)**

C) Está na promoção. **(6 alunos)**

D) Está em liquidação. **(1 aluno)**

E) Tem crédito pré-aprovado. **(1 aluno)**

F) Outros. **(14 alunos)**

13. Você fez algum tipo de investimento?

A) Sim, poupança. **(15 alunos)**

B) Sim, algum investimento diferente da poupança. **(14 alunos)**

C) Não tenho o hábito de investir. **(26 alunos)**

Anexo A
Caderneta de Poupança

A caderneta de poupança é uma aplicação de renda fixa simples e acessível a todos, inclusive aos menores de idade, que também podem ter uma conta em seu nome, desde que sejam representados ou assistidos pelo pai, mãe ou responsável legal. Para ter acesso, basta escolher um banco de sua preferência, apresentar alguns documentos necessários para a abertura da conta e aguardar a aprovação. Vale destacar que a rentabilidade da poupança é a mesma em qualquer instituição.

Aplicação isenta de custos. Na verdade, a cobrança de tarifas de abertura ou de manutenção, taxas de administração ou de performance, é proibida. Além disso, também não há incidência de tributos. Os rendimentos da caderneta não pagam Imposto de Renda.

Pontos positivos

1. Quando necessário, o resgaste pode ser imediato. Assim, costuma-se dizer que a poupança tem liquidez diária, exatamente porque os resgates podem ser realizados a qualquer momento, sem complicação.

2. A poupança conta com a proteção do FGC – o Fundo Garantidor de Créditos, mantido pelas instituições financeiras. O FGC assegura que, em caso de calote ou quebra do banco, quem tem dinheiro aplicado na caderneta receberá de volta até $R\$\ 250 mil$.

Pontos negativos

1. Embora tenha liquidez diária, a rentabilização do investimento na poupança funciona de um jeito diferente. A remuneração da caderneta é creditada mensalmente apenas na sua data de "aniversário", que é o dia do mês em que o depósito foi feito. Assim, uma aplicação realizada no dia 10 de um determinado mês só fará jus à remuneração exatamente no dia 10 do mês seguinte. Se resgatar o dinheiro no dia 9, perde-se todo o retorno do período.

2. A rentabilidade da caderneta de poupança é muito baixa – e o ganho real, próximo de zero ou até negativo.

Sobre a remuneração

As regras de remuneração da caderneta de poupança mudaram em 2012, após promulgação da Lei nº 12.703, de 7 de agosto de 2012 foi estabelecido um gatilho que altera o rendimento conforme o patamar em que se encontra a Selic, a taxa básica de juros da economia brasileira. Basicamente, funciona assim:

I Se a Selic estiver acima de 8,5% ao ano, o rendimento da poupança será de 0,5% ao mês mais a variação da TR;

II Se a Selic estiver igual a ou abaixo de 8,5% ao ano, o rendimento da poupança será equivalente a 70% da Selic mais a variação da TR.

Essa regra vale para os depósitos feitos a partir do dia 4 de maio de 2012, quando as novas regras passaram a valer. Quem mantém poupanças anteriores a essa data continua recebendo rendimentos como antigamente: 0,5% ao mês mais a variação da TR.

Texto adaptado do artigo: **Caderneta de Poupança: O que é, Como Funciona e Rendimento** <https://blog.rico.com.vc/caderneta-de-poupanca> Acesso: em 16/02/2020.

Anexo B
Taxa Referencial

A Taxa Referencial (TR) é uma taxa de juros referência – isto é, em que se baseiam outras taxas – criada em 1991. Hoje, a TR é usada para calcular o rendimento de alguns investimentos, como a caderneta de poupança. Ela é calculada pelo Banco Central (BC) diariamente e mensalmente e está disponível no site da instituição. O BC toma como base a média ponderada dos juros pagos, diariamente, por CDBsprefixados das 30 maiores instituições financeiras do país – a chamada Taxa Básica Financeira (TBF).

Para calcular a Taxa Referencial, basta utilizar a seguinte equação

$$\text{TR} = 100 \cdot \left(\frac{1+TBF}{R} - 1\right)$$

Além disso, você precisa calcular a variável R, que é o redutor, através da fórmula

$$\text{R} = (a+b) \cdot TBF$$

Onde:

a: é uma constante de valor 1,005;

b: é definido pelo TBF e divulgado pelo Banco Central (BC);

TBF: esta é a tarifa básica financeira divulgada diariamente pelo BC.

De acordo com as normas do Banco Central, a Taxa Referencial não pode ter valores negativos. Caso isso aconteça, a TR será zero.Existem duas variações da Taxa Referencial: a diária e a mensal. Basicamente, a TR mensal é a soma de todas as TRs diárias do mês – e é ela a utilizada na correção monetária de investimentos.No caso da poupança, por exemplo, a TR considerada para correção – junto com a Selic – é a mensal. Desde setembro de 2017, a TR está em 0% – ou seja: no caso da poupança, com a Selic inferior a 8,5%, ela não tem influência sob seu rendimento.

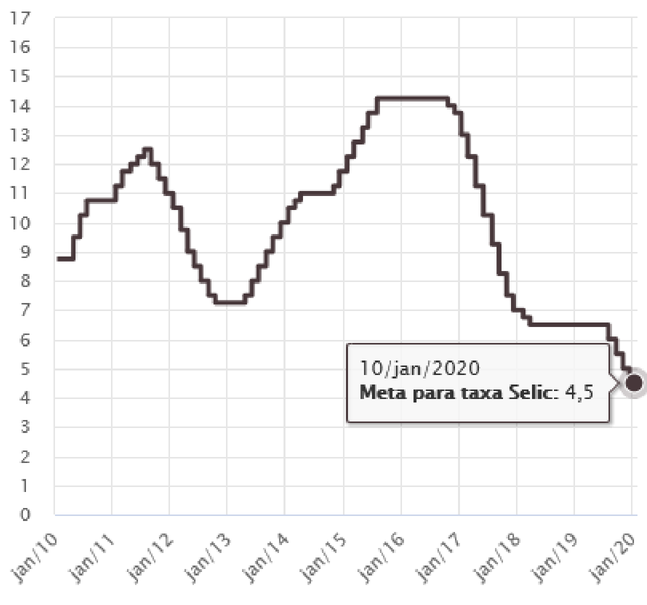
Texto adaptado do artigo: **Taxa Referencial – o que é e como ela é calculada?** <https://blog.nubank.com.br/taxa-referencial-o-que-e-e-como-ela-e-calculada/> Acesso: em 20/01/2020.

Anexo C
Taxa Selic

Selic é a sigla para Sistema Especial de Liquidação e Custódia. Ela é a taxa de juros básica da economia brasileira, Isso significa que ela influência todas as demais taxas de juros do Brasil, como as cobradas em empréstimos, financiamentos e até de retorno em aplicações financeiras.

A taxa Selic é definida a cada 45 dias pelo Copom (Comitê de Política Monetária), ligado ao Banco Central, que se baseia em inúmeros indicadores financeiros do país para chegar a uma taxa. Nessas decisões, a Selic pode tanto se manter estável, sem alterações, quanto aumentar ou diminuir em pontos percentuais.

Figura C.1: Evolução da taxa Selic



Fonte: Banco Central (2020).

Texto adaptado do artigo: **Taxa Selic** <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic> Acesso em: 20/01/2020.

Anexo D
Como a inflação afeta a caderneta e o seu bolso

A poupança está rendendo menos a cada ano. Isso é um problema para os investidores que mantêm todos os recursos aplicados na caderneta. E não é apenas uma questão de ganhar menos do que já se ganhou no passado. A redução da rentabilidade da poupança pode acabar levando a uma perda real de poder de compra. Os preços dos produtos e serviços na economia oscilam com o tempo – e o resultado disso é a inflação, que corrói o valor do dinheiro. O problema é que investimentos como a poupança estão oferecendo rendimentos tão baixos que estão cada vez mais próximos da inflação – em alguns momentos, até abaixo dela. Veja como foi a remuneração absoluta e real da caderneta nos últimos anos.

Tabela D.1: Remuneração Absoluta e Real da caderneta nos últimos anos - Banco Central

Ano	Retorno Absoluto (%)	Retorno real descontada a inflação (%)
2010	6,90	+0,94
2011	7,50	+0,94
2012	6,47	+0,60
2013	6,37	+0,43
2014	7,16	+0,71
2015	8,07	-2,34
2016	8,07	-2,34
2017	6,57	+6,62
2018	4,55	+1,12
2019	3,85	+0,42

Fonte: Abecip e Banco Central (2020)

Quando isso acontece, dizemos que o rendimento real da poupança – ou seja, o retorno descontada a inflação – está baixo ou até negativo, em alguns casos. Se essa situação se prolonga por muito tempo, o investidor tende a perder poder de compra, ou seja, não conseguirá manter o mesmo padrão de consumo no futuro, porque seu dinheiro valerá amanhã menos do que vale hoje. Em outras palavras, o investidor perde dinheiro com a poupança.

Texto adaptado do artigo: **Poupança: entenda como funciona o rendimento e saiba quando deixar de lado** <https://www.infomoney.com.br/guias/poupanca/> Acesso: em 21/01/2020.

Anexo E
Brasileiros acreditam que a inflação fechará 2020 em 4,8%, diz FGV

"A expectativa de inflação dos consumidores brasileiros para os próximos 12 meses, ou seja, a taxa acumulada de janeiro a dezembro de 2020, deverá ficar em 4,8%, segundo pesquisa realizada neste mês pela Fundação Getúlio Vargas (FGV)."

O texto foi adaptado do artigo: **Brasileiros acreditam que inflação fechará 2020 em 4,8%, diz FGV** <http://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2019-12/brasileiros-acreditam-que-inflacao-fechara-2020-em-48-diz-fgv> Acesso: em 21/01/2020.

Anexo F
Investimentos Conservadores

De todas as contas de investimentos que existem no Brasil, 85% são poupança. O percentual equivale a 62,6 milhões de contas, que concentram 39,2% dos recursos investidos. Os dados da Associação Brasileira das Entidades doMercado Financeiro e de Capitais (Anbima) dão uma boa ideia do quanto a poupança é popular no país. Acontece que existem outros investimentos, com o mesmo perfil de risco ou até mais seguros que a poupança, que oferecem um rendimento maior, mas nem todo mundo sabe ou confia nessa informação. Todas essas opções são conservadoras, o que significa, nas palavras do especialista, que o investidor empresta dinheiro para alguém – seja o banco, o governo ou empresas endividadas – e recebe de volta, com determinada taxa de juros. Tudo isso com a garantia de que o investimento não vai sofrer oscilações negativas e ainda é possível prever a taxa de retorno.

A seguir, conheça alguns investimentos tão seguros quanto a poupança, mas que rendem mais.

Veja a diferença de rentabilidade entre eles e a poupança em 2018.

Tabela F.1: Rentabilidade de alguns investimentos conservadores - Banco Central

Produto	Rentabilidade em 2018	Rentabilidade em 2019
Poupança	4,62%	3,33%
CDB (100% do CDI)	6,40%	5,17%
LCI ou LCA (90% do CDI)	5,74%	4,64%
Título público (Tesouro Selic)	6,21%	5,14%

Fonte: Abecip e Banco Central (2020)

Confira as características de cada um deles abaixo.

1. CDB – Certificado de Depósito Bancário

Características: o Certificado de Depósito Bancário (CDB) consiste num empréstimo para bancos, que utilizam o dinheiro para oferecer a clientes. Existem basicamente 2 tipos de CDB. Os pré-fixados e os pós-fixados.

A) Pré-Fixados: Você sabe exatamente quanto irá receber no vencimento. Exemplo: um título que possui uma taxa pré-fixada de 10% a.a. significa que você receberá exatamente 10% ao ano ao emprestar um valor X.

B) Pós-fixados: Você receberá um valor de acordo com o indexador. No geral, é utilizado o valor do CDI (Certificado de Depósito Interfinanceiro) como base para o CDB. O CDI é medido de acordo com o valor médio diário que os bancos emprestam dinheiro entre si. Exemplo: Investimos em um CDB que paga 95% do CDI. Se o CDI estiver pagando 10% ao ano, o nosso CDB irá render 9,5% ao ano. Você não deve esquecer que o CDI pode variar anualmente.

O CDB tem rentabilidade diária, mas não pode se sacar antes do período determinado por contrato, sob pena de multa.

Rentabilidade aproximada: perto de 100% do CDI.

Desconto de Imposto de Renda: sim, a tributação sobre o lucro varia de 15% a 22,5%, dependendo do tempo em que a aplicação foi mantida, conforme tabela abaixo.

Tabela F.2: Tabela das Alíquotas do Imposto de Renda - CDB

Período de Aplicação	Alíquota
Até 6 meses	22,5%
De 6 meses a 1 ano	20%
De 1 ano a 2 anos	17,5%
Acima de 2 anos	15%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Garantia de proteção do investimento: Fundo Garantidor de Crédito (o mesmo da poupança), no limite de 250 000 reais.

Possibilidade de sacar o dinheiro a qualquer momento: em alguns casos, sim.

Valor mínimo do investimento: entre $R\$$ 500,00 e $R\$$ 2.000,00 que varia de acordo com o banco.

2. LCI – A Letra de Crédito Imobiliário

Características: é o título emitido pelos bancos para levantar recursos utilizados para oferecer financiamentos no setor imobiliário. A Letra de Crédito Imobiliário (LCI) não permite sacar rapidamente, mas, por isso mesmo, oferece uma rentabilidade maior.

Rentabilidade aproximada: pode ser pós-fixada (superior a 12 meses): 97% do CDI, pré-fixada (superior a 12 meses): 8,7% a.a. ou 0,7% a.m. ou atrelada à inflação.

Desconto de Imposto de Renda: não.

Garantia de proteção do investimento: Fundo Garantidor de Crédito (o mesmo da poupança), no limite de 250 000 reais.

Possibilidade de sacar o dinheiro a qualquer momento: não, prazo mínimo de 3 meses.

Valor mínimo do investimento: entre $R\$$ 5.000,00 e $R\$$ 30.000,00 que varia de acordo com o banco.

3. LCA – Letra de Crédito do Agronegócio

Características: assim como a LCI, a Letra de Crédito do Agronegócio (LCA) trabalha com carência para movimentar o investimento, mas também é isenta de IR. Em geral, os bancos costumam exigir investimentos mais altos, tanto para LCI quanto para LCA.

Rentabilidade aproximada: pode ser pós-fixada (97% do CDI), pré-fixada (8,7% a.a. ou 0,7% a.m.) para um investimento de 12 meses ou atrelada à inflação.

Desconto de Imposto de Renda: não. Garantia de proteção do investimento: Fundo Garantidor de Crédito (o mesmo da poupança), no limite de 250 000 reais. **Possibilidade de sacar o dinheiro a qualquer momento**: não, prazo mínimo de 3 meses.

Valor mínimo do investimento: entre $R\$$ 5.000,00 e $R\$$ 30.000,00 que varia de acordo com o banco.

A principal vantagem da LCI ou LCA em relação a outros investimentos é a isenção de Imposto de Renda. Para se ter uma noção da vantagem que a isenção representa, um LCI ou LCA que pagam 100% do CDI pode ser tão atrativo quanto um CDB com taxas de 129% do CDI (para aplicações de até 180 dias), e render 75% mais que a poupança.

4. Tesouro Selic

Características: título público, negociado por meio da plataforma online Tesouro Direto. A rentabilidade é a mesma, independentemente do valor investido. Existem duas modalidades de compra de títulos: a tradicional e a programada. Na modalidade tradicional você compra os títulos manualmente através do site do Tesouro Direto ou pela corretora, caso ela tenha uma plataforma integrada. A modalidade programada permite agendar a ordem de compra ou venda. Na plataforma do Tesouro Direto podemos ver o valor de mercado de cada título. Mesmo que o valor do título pareça alto, não é necessário adquirir integralmente um título. O investidor pode comprar frações desses títulos, que varia de acordo com a modalidade escolhida. Na modalidade tradicional, é possível comprar frações mínimas de pelo menos 10%. Portanto, em um título que custa $R\$$ 1.000,00, o investidor pode comprar uma fração por $R\$$ 100,00.

Rentabilidade aproximada: 100% da taxa Selic (a poupança rende 70%).

Garantia de proteção do investimento: governo federal (mais seguro do que o Fundo Garantidor de Crédito, que garante a poupança em caso de falência da instituição financeira).

Desconto de Imposto de Renda: sim, a tributação sobre o lucro varia de 15% a 22,5%, dependendo do tempo em que a aplicação foi mantida, conforme tabela abaixo.

Tabela F.3: Tabela das Alíquotas do Imposto de Renda - Tesouro Selic

Período de Aplicação	Alíquota
Até 6 meses	22,5%
De 6 meses a 1 ano	20%
De 1 ano a 2 anos	17,5%
Acima de 2 anos	15%

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Existe ainda uma taxa cobrada pela Bolsa de Valores, de 0,25% ao ano.

Possibilidade de sacar o dinheiro a qualquer momento: sim.

Valor mínimo do investimento: depende do tipo de modalidade, porém o valor geralmente não ultrapassa $R\$$ 30,00.

O texto foi adaptado do artigo: **Seis investimentos conservadores que rendem mais que a poupança** <https://exame.com/investimentos-btg/seis-investimentos-conservadores-que-rendem-mais-que-a-poupanca/> Acesso em 21/01/2020.

Anexo G
Planejamento Financeiro

O planejamento financeiro é uma ferramenta de gestão aplicada aos seus recebimentos e gastos e como o próprio nome já diz, ele serve para você organizar todas as suas receitas e despesas, tanto o que já passou como o que está por vir, para que sempre você tenha o controle sobre suas finanças pessoais. Dessa forma, você evita compras por impulso que possam te endividar e sabe em tempo real o seu saldo. Ele nos ajuda não somente a economizar, cortar gastos, poupar e acumular dinheiro. Ele nos permite buscar uma melhor qualidade de vida tanto hoje quanto no futuro, proporcionando a segurança material necessária para aproveitar os prazeres da vida e, ao mesmo tempo, obter uma garantia para eventuais imprevistos. Mas o planejamento e o controle financeiro exigem das pessoas algo simples, mas "dolorido": trocar uma satisfação imediata (a compra de uma roupa nova ou uma TV de última geração) por uma promessa de equilíbrio financeiro no futuro. Isto pode parecer uma tarefa muito difícil, mas com o tempo, e um pouco mais de esforço e de disciplina, poderá se encaixar em nossa rotina.

Texto adaptado do artigo: **Como fazer um bom Planejamento Financeiro Pessoal?** <http://minhaseconomias.com.br/blog/controle-financeiro/como-fazer-um-bom-planejamento-financeiro-pessoal> Acesso: em 21/01/2020.

Anexo H
Dicas para a organizar seu orçamento pessoal

---

1. Evite gastar mais do que você ganha

Compras por impulso, imprevistos no dia a dia e o desemprego ou redução da renda fazem as dívidas acumularem.

2. Anote suas dívidas no papel

Escreva o nome dos locais que você deve e o valor da dívida em atraso. Inclua dívidas no cheque especial, prestações, faturas do cartão de crédito e empréstimos.

3. Faça um orçamento pessoal

Liste todos os seus ganhos e gastos mensais e some os valores dos ganhos e depois dos gastos. Se o valor dos gastos for maior que o valor dos ganhos, atenção! Você está gastando mais do que pode pagar.

4. Livre-se da bola de neve

Compartilhe seus gastos com a sua família. Assim, todos se envolvem e colaboram com reduções ou cortes e é possível estudar soluções para aumentar a renda da casa.

5. Defina estratégias

Após avaliar as finanças, escolha as dívidas para quitar primeiro. Priorize as contas de serviços essenciais, como água, luz e aluguel e aquelas com os juros mais altos.

6. Negocie com quem você está devendo

Entre em contato com os locais que você possui dívida e negocie os valores a serem pagos, através do parcelamento da dívida ou com um desconto, para pagamento à vista.

7. Descubra a causa do endividamento

Faça o seu orçamento mensal regularmente e veja se a sua vida financeira é sustentável. Se não for, mude o quanto antes seus hábitos.

8. Construa hábitos saudáveis

Assim que você quitar suas dívidas, guarde mês a mês uma parte da sua renda. Defina metas, sonhos, objetivos.

Texto adaptado do artigo: **Dicas para organizar seu orçamento pessoal** <http://caixa.gov.br/educacao-financeira/Paginas/default.aspx> Acesso em 21/02/2020.