

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RAFAEL LUZ DUARTE

**INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM  
CONTEXTUALIZADA NO COTIDIANO DOS ALUNOS.**

FORTALEZA

2013

RAFAEL LUZ DUARTE

**INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM  
CONTEXTUALIZADA NO COTIDIANO DOS ALUNOS.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr<sup>o</sup> Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Universidade Federal do Ceará  
Biblioteca do Curso de Matemática

---

D874i Duarte, Rafael Luz  
Introdução à estatística e probabilidade : uma abordagem contextualizada no cotidiano dos alunos /  
Rafael Luz Duarte. – 2013.  
55 f. : il. color., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de  
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2013.  
Área de Concentração: Ensino de Matemática.  
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Estatística - Metodologia. 2. Teoria das probabilidades. I. Título.

---

CDD 519.5

RAFAEL LUZ DUARTE

**INTRODUÇÃO À ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE: UMA ABORDAGEM  
CONTEXTUALIZADA NO COTIDIANO DOS ALUNOS.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Aprovada em: \_\_/\_\_/\_\_\_\_.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Luiz Antônio Caetano Monte  
Universidade de Fortaleza (Unifor)

À minha esposa Fabrícia Ávila Duarte

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus principalmente, pois sempre estive ao meu lado, dando-me força e determinação para concluir mais essa importante etapa na minha vida.

Aos amigos e companheiros da turma em especial aos que formaram comigo um grupo maravilhoso de estudo para as provas: Thiago, Ricardo, Fernando e Eduvânio.

À minha família, em especial a minha esposa pela compreensão e ao meu pai pelo apoio, em todos os momentos, bons ou ruins.

Aos verdadeiros alunos parceiros que sempre me motivam a continuar dando aula.

Ao Prof Drº Jonatan Floriano, por dedicar seu tão valioso tempo na orientação desta dissertação.

Ao Prof Drº Marcelo Melo, pelo acompanhamento, dedicação e coordenação do curso

À CAPES, pelo auxílio financeiro oferecido durante os anos de curso e produção desta dissertação.

À UFC, por ter dado todo suporte e auxílio financeiro e pedagógico na minha formação e dos meus amigos.

“A coisa de maior extensão no mundo é o universo, a mais rápida é o pensamento, a mais sábia é o tempo e a mais cara e agradável é realizar a vontade de Deus.”

Tales de Mileto (640 - 550 a.C.)

## RESUMO

A Estatística desde tempos muito antigos tem a sua importância e atualmente ainda mais em campos como a pesquisa de preços e pesquisa de intenção de votos de uma eleição. As metodologias de ensino de matemática também têm sido desenvolvidas para se adaptarem a mudança de comportamento dos estudantes, porém não bastam apenas novas abordagens, para lecionar qualquer conteúdo é necessário um embasamento teórico bem além do que os alunos possuem de conhecimento prévio, já que o professor deve no mínimo tentar levar o aluno a pensar além do que é proposto pelo plano inicial. Por isso, começamos abrangendo a teoria das probabilidades para servir de embasamento para os leitores que venham a se interessar pela prática dessa nova metodologia de abordagem da estatística descritiva, baseada no cotidiano dos alunos, suas vivências tanto na escola como no ambiente que vivem e convivem. Essa metodologia foi aplicada em uma turma inteira do 3º ano do ensino médio da escola Eliézer de Freitas Guimarães e em outras duas manteve-se a tradicional, mostrando um resultado satisfatório em rendimento, conseqüentemente no aprendizado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Estatística, Probabilidade, Pesquisa, Cotidiano, Interação, Tabelas, Gráficos, Alunos, Professor.



## **ABSTRACT**

The statistics from very ancient times has its importance and now even more in fields such as research and research prices of intent to vote in an election. The methods of teaching mathematics have also been developed to adapt to changing students' behavior, but are not enough new approaches to teach any content requires a theoretical well beyond what the students have prior knowledge, since the teacher should at least try to get the student to think beyond what is proposed under the initial plan. Therefore, we begin covering the theory of probability to serve as the basis for readers who may be interested in the practice of this new approach methodology of descriptive statistics, based on students' everyday lives, their experiences both at school and in the environment that they live and socialize. This methodology was applied to an entire class of 3rd year of high school E.E.M. Eliezér de Freitas Guimarães and two others remained traditional, showing satisfactory results in yield, thus learning.

**Keywords:** Statistics, Probability, Search, Everyday, Interaction, Tables, Charts, Student, Teacher.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1</b> - Representação da reunião, interseção e complementar de eventos .....	<b>21</b>
<b>Figura 2</b> - Caminhos que levam de A a C passando por B .....	<b>25</b>
<b>Figura 3</b> - Pesquisa Eleitoral do município de Caucaia .....	<b>32</b>
<b>Figura 4</b> - Resultado final da eleição para prefeito de Caucaia em 2012 .....	<b>33</b>
<b>Figura 5</b> - Passo inicial para a construção do gráfico de colunas .....	<b>42</b>
<b>Figura 6</b> - Passo intermediário para construção do gráfico de colunas .....	<b>43</b>

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1</b> - Exemplos de gráficos .....	<b>40</b>
<b>Gráfico 2</b> - Gráfico de barras verticais ou gráfico de colunas .....	<b>40</b>
<b>Gráfico 3</b> - Exemplo de gráficos de barras horizontais .....	<b>41</b>
<b>Gráfico 4</b> - Exemplo de gráfico de segmentos ou de linha .....	<b>41</b>
<b>Gráfico 5</b> - Exemplo de gráfico de setores .....	<b>42</b>
<b>Gráfico 6</b> - Gráfico de Colunas da Tabela 5 .....	<b>43</b>
<b>Gráfico 7</b> - Gráfico de Colunas da Tabela 6 .....	<b>44</b>

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Tabela de licitação da merenda escolar .....	<b>34</b>
<b>Tabela 2</b> – Início da construção da Tabela de Frequências .....	<b>36</b>
<b>Tabela 3</b> – Construção da coluna $f_i$ na Tabela de Frequências .....	<b>37</b>
<b>Tabela 4</b> – Construção da coluna $f_r$ na Tabela de Frequências .....	<b>38</b>
<b>Tabela 5</b> – Construção das colunas $F_i$ e $F_r$ na Tabela de Frequências .....	<b>38</b>
<b>Tabela 6</b> – Aplicação para a turma com a pesquisa na escola .....	<b>39</b>
<b>Tabela 7</b> – Tabela 5 com coluna da média aritmética .....	<b>46</b>
<b>Tabela 8</b> – Tabela 7 novamente .....	<b>49</b>

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	<b>13</b>
<b>2. OBJETIVOS</b> .....	<b>15</b>
<b>3. PRÉ- REQUISITOS</b> .....	<b>16</b>
<b>4 PÚBLICO ALVO</b> .....	<b>16</b>
<b>5. MATERIAIS E TECNOLOGIA</b> .....	<b>17</b>
<b>6. DIFICULDADES PREVISTAS</b> .....	<b>18</b>
<b>7. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>19</b>
<b>7.1 Probabilidade</b> .....	<b>19</b>
<b>7.1.1 Experimentos Aleatórios</b> .....	<b>19</b>
<b>7.1.2 Espaço Amostral e Eventos</b> .....	<b>20</b>
<b>7.1.3 Operações entre Eventos</b> .....	<b>20</b>
<b>7.1.4 Definição Clássica, Frequentista e Axiomática de Probabilidade</b> .....	<b>22</b>
<b>7.1.5 Métodos de Contagem</b> .....	<b>25</b>
<b>7.1.6 Probabilidade Condicional</b> .....	<b>28</b>
<b>7.1.7 Independência de Eventos</b> .....	<b>30</b>
<b>8. METODOLOGIA</b> .....	<b>31</b>
<b>8.1 1ª e 2ª aulas</b> .....	<b>31</b>
<b>8.1.1 Um pouco de história e atualidade</b> .....	<b>31</b>
<b>8.1.2 Noções de Estatística</b> .....	<b>31</b>
<b>8.2 3ª e 4ª aulas</b> .....	<b>36</b>
<b>8.2.1 Distribuição de Frequências: Absoluta, Relativa e Acumuladas</b> .....	<b>36</b>
<b>8.3 5ª e 6ª aulas</b> .....	<b>39</b>
<b>8.3.1 Gráficos e sua representações</b> .....	<b>39</b>
<b>8.4 7ª e 8ª aulas</b> .....	<b>44</b>
<b>8.4.1 Medidas de Tendência Central: Média, Moda e Mediana</b> .....	<b>44</b>
<b>8.5 9ª e 10ª aulas</b> .....	<b>48</b>
<b>8.5.1 Probabilidade e Frequência Relativa</b> .....	<b>48</b>
<b>9. AVALIAÇÃO GERAL E CONCLUSÕES</b> .....	<b>52</b>
<b>10. DESDOBRAMENTOS</b> .....	<b>53</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>54</b>
<b>APÊNDICE</b> .....	<b>55</b>

## 1. Introdução

O ensino de matemática tem se transformado com o passar do tempo, a didática da matemática teve sua origem a partir de atividades desenvolvidas basicamente por matemáticos, nos Institutos de Investigação acerca do ensino de Matemática (IREM), criados na França logo após a Reforma Educativa do final dos anos 60, com a qual se deu impulso ao ensino da “matemática moderna”.

Desde 2007, atuando em sala de aula em uma mesma escola, tenho percebido uma mudança de comportamento dos alunos que necessitam de uma matemática mais dinâmica e aplicada à realidade em que eles estão inseridos, seja com exemplos teóricos ou mesmo prático como aulas e pesquisas de campo. Segundo Paulo Freire, a pesquisa é fundamental na construção do conhecimento do educando.

“Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino\*\*. Esses que-fazerem se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade.” (FREIRE, Pedagogia da Autonomia, pág. 29, 1996.)

Na primeira parte do trabalho é abordada a fundamentação teórica para o leitor que esteja interessado em aplicar essa metodologia, tenha um melhor embasamento para tal.

Na segunda parte da metodologia trata-se de uma sequência de aulas que traz uma forma de abordar os conteúdos com situações que chamem a atenção da turma, em seguida comenta-se a origem da Estatística, pois a história e o porquê foram estudados cada conteúdo também é fundamental, e a partir de então, entra a pesquisa de campo. A turma será dividida em equipes para coletar informações de preços de itens da cesta básica em estabelecimentos próximos as suas respectivas residências e com esses dados aplicaremos nos conteúdos. Inicialmente definiremos os conceitos do conteúdo, trabalhando boa parte, com exemplos e atividades da pesquisa feita pelos alunos, aperfeiçoando assim o conhecimento.

“O professor realiza primeiro o trabalho inverso ao do cientista, uma recontextualização do saber: procura situações que deem sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados.” (PARRA, CECÍLIA, Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas, pág. 26, 1996.)

Na terceira parte teremos o envolvimento da Estatística com a Probabilidade, assunto atualmente muito importante em concursos e vestibulares, como por exemplo, o ENEM.

Na parte final temos possíveis dificuldades encontradas e sugestões de continuidade do trabalho como a coleta dos dados e aplicação numa planilha no programa Excel (Microsoft Office) ou Calc (Br Office).

## 2. Objetivos

O objetivo principal do trabalho é mostrar como abordar a Estatística de uma forma mais interessante e interativa com os alunos com uma sequência de aulas, envolvendo também a Probabilidade. O PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) comenta sobre a forma de trabalhar esse conteúdo.

“Uma das grandes competências propostas pelos PCNEM diz respeito à contextualização sociocultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade.” (PCNEM BRASIL 2009, Pág. 126).

Ainda como base o PCNEM temos as seguintes competências e habilidades a atingir:

- “Identificar formas adequadas para descrever e representar dados numéricos e informações de natureza social, econômica, política, científico-tecnológica ou abstrata.”
  - “Ler e interpretar dados e informações de caráter estatístico apresentados em diferentes linguagens e representações, na mídia ou em outros textos e meios de comunicação.”
  - “Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.”
  - Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.
- (PCNEM 2009, pág.123 a 125)

Quanto à primeira habilidade citada anteriormente, ele será muito trabalhado na pesquisa de campo que será proposta aos alunos, mas também constará na forma de abordagem dos conteúdos como a pesquisa eleitoral proposta na introdução ao assunto.

A segunda habilidade será bem trabalhada com sugestões de leitura de matérias publicadas em mídias virtuais, como jornais e sites de notícias que disponibilizam esse acesso gratuito sobre assuntos ligados a educação prioritariamente, mas anteriormente pesquisada pelo professor.

A terceira habilidade será atingida após o término da apresentação dos conteúdos e realização das atividades propostas, já que nas duas habilidades anteriormente citadas os alunos vão exercitar bastante a leitura e a interpretação.

A quarta habilidade será trabalhada com situações que relaciona Estatística e Probabilidade.



### **3. Pré-requisitos**

Para que o aluno acompanhe bem esse conteúdo ele precisa ter o conhecimento das quatro operações com números inteiros e decimais, pois no cálculo de média aritmética, por exemplo, nem sempre os termos a serem aplicados serão inteiros.

Outro conhecimento fundamental é o cálculo de porcentagem, utilizado basicamente na frequência relativa e também em interpretação e problemas envolvendo gráficos de colunas.

E finalmente ter visto o conteúdo da teoria das Probabilidades no ano anterior.

### **4. Público Alvo**

Como os conteúdos necessários para o aluno acompanhar bem a Estatística e Probabilidade são do ensino fundamental, o assunto poderia ser abordado em qualquer um dos anos do ensino médio, mas em especial para alunos do 3º ano, já que a Estatística é abordada na grande maioria dos livros didáticos apenas no 3º ano e a Probabilidade é vista quase sempre apenas no 2º ano e no 3º ano uma revisão sobre o assunto é de grande importância, já que é um dos assuntos muito cobrado em vestibular/ENEM.

O livro didático é importante nesse processo, pois dependendo da linguagem utilizada nele, o aluno pode rever o que foi passado nas aulas e o professor aplica atividades relacionadas ao que foi visto para fixar ainda mais o conhecimento. É claro que o professor pode elaborar seu próprio material sobre o assunto, como um TD, porém algumas dificuldades poderiam surgir como a xerox limitada nas escolas. E como o professor terá que fazer algumas pesquisas e planejamentos, com a utilização do livro, teria mais tempo para esse fim.

## 5. Materiais e Tecnologia

**5.1 Quadro e giz/pincel:** Pensando em ser o mais aplicável possível na maioria das realidades, usam-se muitos desses dois componentes, inclusive pode-se ficar apenas nos dois, mas a ideia é inovar, então o professor se deve ater as novas tecnologias como planilhas eletrônicas e slides.

**5.2 Computador/Data Show:** Uma vez que este trabalho está digitado, o professor com conhecimentos em Power Point ou outro programa gerador de slides, pode sim transformar em apresentação de slides. Mas, além do conhecimento e boa vontade para produzir as telas, é necessário que a escola tenha estrutura para que as aulas não sejam prejudicadas, ou seja, sala fechada e climatizada para que a projeção fique bem nítida e carteiras/cadeiras que possibilitem o aluno a escrever aquilo que for necessário.

**5.3 Papel e caneta/lápis:** As pesquisas de campo nos estabelecimentos foram feitas manuscritas, assim como também as atividades e parte da avaliação, então são materiais fundamentais no desenvolvimento da aprendizagem.

**5.4 Câmeras digitais:** Essa é uma sugestão de alunos que levaram uma câmera para um estabelecimento e fotografaram os preços e ao chegar em casa escreveram no papel os mesmos. É apenas uma sugestão.

**5.5 Planilhas eletrônicas:** Para o professor que vai utilizar data show, seria de um enriquecimento enorme mostrar como são feitos alguns cálculos e construção de gráficos com o auxílio de um programa de planilha eletrônica, já que os alunos do 3º ano, em sua maioria, se prendem muito a tecnologias, telefonia celular, redes sociais, atraindo assim muito a atenção deles.

## 6. Dificuldades Previstas

**6.1 Desinteresse:** Acredito que o desinteresse possa ser uma dificuldade, pois se os alunos não fizerem a pesquisa, a atividade fica tradicionalmente com o professor. O professor pode até trazer para a sala algumas pesquisas como a eleição municipal, por exemplo, mas como o trabalho sugere inserir a vida dos alunos nos conteúdos, a participação deles é fundamental para a metodologia.

**6.2 Defasagens de Conteúdos:** Para que as sequências de aulas sejam bem desenvolvidas, os alunos precisam ter um conhecimento básico, porém dependendo da localidade, uma parte considerável da turma chega muitas vezes ao 3º ano sem saber ao menos as quatro operações fundamentais com certa competência. Se o aluno não tem esse domínio provavelmente não dominará as operações com decimais, nem o básico de porcentagem.

Outro conteúdo importante é o cálculo da probabilidade, se no ano anterior não tiver sido bem trabalhado, pode trazer muita dificuldade, pois possivelmente o professor precisará de mais aulas e não apenas revisará, e sim terá que explicar quase tudo novamente.

**6.3 Escassez de estabelecimentos:** Dependendo da localidade, os alunos não terão tantas opções para pesquisar e fazer um levantamento. Nesse caso o ideal seria cada equipe ficar com um item da cesta básica e trazer para sala todos os preços, independentemente da marca, para que possam formar um conjunto de dados consideráveis, ou seja, acima de dez para que o comparativo seja mais atrativo.

**6.3 Poucos alunos na turma:** Caso a turma seja reduzida, a sugestão é que se trabalhe em duplas ou até mesmo individualmente mesmo, para que a quantidade de dados recolhidos seja considerável para um comparativo.

**6.3 Falta de Colaboração da Gestão:** Se os gestores não quiserem participar, a ideia é pesquisar na internet alguma licitação que tenha relação ou com a escola ou com a própria população do bairro ou município.

## 7. Fundamentação Teórica

### 7.1 Probabilidade

As origens históricas da teoria das probabilidades estão vinculadas a teoria dos jogos e aos nomes de Fermat e Pascal, que na metade do século XVII formalizaram pela primeira vez o conceito de probabilidade. Falamos aqui de história escrita (mesmo que isto seja uma redundância), já que existem indícios que o trabalho de Fermat e Pascal consolidou ideias que foram desenvolvidas a partir do século XII.

A definição axiomática de Kolmogorov fez parte da do processo de axiomatização da matemática a partir da metade do século XIX. Kolmogorov colocou como axiomas as propriedades comuns das noções de probabilidade clássica e frequentista, que desta forma viraram casos particulares da definição axiomática.

Andrei Nikolayevich Kolmogorov foi o mais influente matemático soviético do século XX nascido em Tambov, Rússia, iniciador da moderna teoria matemática da probabilidade, criou para ela uma base axiomática fundamentada na teoria dos conjuntos. Graduou-se em física e matemática na Universidade Estatal de Moscou (1925) e para lá foi nomeado professor (1931) e diretor do Instituto de Matemática (1933). Estudando problemas teóricos do cálculo de probabilidades, sua primeira publicação de importância foi um *paper General Theory of Measure and Probability Theory* (1929) e que resultou na formulação de um conjunto de princípios conhecido como a *axiomática de Kolmogorov* (1933), que provê o cálculo de probabilidades de uma base lógica formal. Nos anos 30 publicou mais dois *papers* em geometria: *On Topological Group Formulation of Geometry* e *On Formulation of Projective Geometry* e outro sobre probabilidade, *Foundations of Theory of Probability*. Sua obra abrange ainda pesquisas em álgebra e topologia, que ajudaram a estabelecer as bases de estudos posteriores de análise matemática. Eleito membro da Academia de Ciências da União Soviética (1939), depois (1950) dedicou-se ao estudo de problemas da teoria da informação, sistemas dinâmicos e mecânica clássica. Com originais contribuições no campo das teorias das probabilidades e topologia foram de grande importância para o desenvolvimento na física, química, biologia e cibernética. Interessado pelo ensino básico da matemática reestruturou o *currículo* matemático no sistema escolar soviético e também se interessou por pedagogia.

<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/AndreiNi.html>.

#### 7.1.1 Experimentos Aleatórios

Há uma grande classe de experimentos que, ao serem repetidos nas mesmas condições, produzem resultados diferentes. Ou, em outros termos, experimentos que, quando realizados, não apresentam resultados previsíveis de antemão.

**7.1.1.1 Definição:** *Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados experimentos aleatórios.*

**7.1.1.2 Exemplo:** Um casal resolve ter um filho, não se sabe de antemão qual é o sexo da criança.

**7.1.1.3 Definição:** *Os experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições conduzem ao mesmo resultado são denominados determinísticos.*

**7.1.1.4 Exemplo:** Se uma pedra cai de certa altura, podemos determinar sua posição e velocidade em qualquer momento da trajetória até a queda.

## **7.1.2 Espaço amostral e Eventos**

**7.1.2.1 Definição:** *Denominaremos espaço amostral associado a um experimento o conjunto de seus resultados possíveis. O espaço amostral será representado por S, cujos elementos serão denominados eventos simples ou pontos amostrais.*

**7.1.2.2 Exemplo:** No exemplo 5.1.1.3 o espaço amostral é o conjunto  $S = \{\text{masculino, feminino}\}$ .

**7.1.2.3 Definição:** *Denominaremos evento a todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento. Os eventos representados por um conjunto unitário, isto é, contendo somente um elemento do conjunto espaço amostral, são denominados eventos simples e quando não houver nenhum elemento, evento impossível. Diremos que o evento A ocorre quando o resultado do experimento é um evento simples pertencente a A.*

**7.1.2.4 Exemplo:** Ainda em relação ao exemplo 5.1.1.3, o evento criança nascer do sexo masculino possui apenas um elemento:  $A = \{\text{masculino}\}$ .

## **7.1.3 Operações entre eventos**

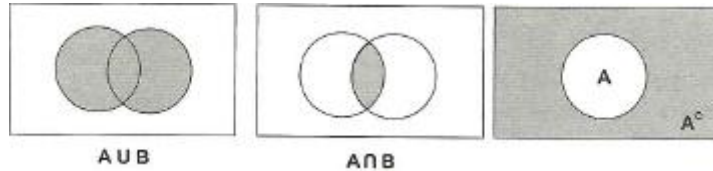
**7.1.3.1 Definição:** *A reunião de dois eventos A e B, denotadas  $A \cup B$ , é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre.*

**7.1.3.2 Definição:** *A interseção de dois eventos A e B, denotadas  $A \cap B$ , é o evento que ocorre se ambos ocorrem.*

**7.1.3.3 Definição:** *O complementar do evento A, denotado por  $A^C$ , é o evento que ocorre quando A não ocorre.*

Como os eventos são subconjuntos do espaço amostral, podemos representar a reunião, a interseção de dois eventos e o complementar de um evento pelos diagramas utilizados para representar subconjuntos de um dado conjunto.

Figura 1 – Representação da reunião, interseção e complementar de eventos.



Fonte: Dantas, Carlos Alberto Barbosa, Probabilidade: Um curso introdutório, 2008, pág. 20.

**7.1.3.4 Exemplo:** Uma urna contém bolas numeradas de um a quinze. Uma bola é retirada da urna e seu número anotado. Sejam  $A$  e  $B$  os seguintes eventos.  $A$ : o número da bola retirada é par,  $B$ : o número da bola retirada é múltiplo de três. Determine os eventos  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  e  $A^c$ . O espaço amostral  $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ ,  $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ ,  $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$  então  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15\}$ ,  $A \cap B = \{6, 12\}$  e  $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ .

Dizemos que o evento  $A$  implica no evento  $B$ , que denotamos  $A \subset B$ , se para todo  $w \in A$  tivermos  $w \in B$ . Isto corresponde à situação em que a ocorrência de  $A$  garante inevitavelmente a ocorrência de  $B$ .

Os eventos  $A$  e  $B$  são iguais se  $A \subset B$  e  $B \subset A$ .

Os eventos  $A$  e  $B$  são ditos mutuamente exclusivos, se eles não podem ocorrer simultaneamente. Isto equivale a  $A \cap B = \emptyset$ .

**7.1.3.5 Lema:** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  eventos do espaço amostral  $S$ , temos:

a)  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ;

b)  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ;

c)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ ;

d)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ ;

Demonstrações:

a) Precisamos mostrar que todo elemento pertencente ao lado esquerdo pertence ao lado direito da igualdade e vice-versa. Seja  $w$  um elemento do espaço amostral  $S$ , se  $w \in (A \cup B) \cap C$  então  $w \in (A \cup B)$  e  $w \in C$ . Daí decorre que  $(w \in A \text{ ou } w \in B)$  e  $w \in C$ . Usando a equivalência lógica  $(q \vee r) \wedge p \Leftrightarrow (q \wedge p) \vee (r \wedge p)$  temos:  $(w \in A \text{ e } w \in C)$  ou  $(w \in B \text{ e } w \in C)$ , ou seja,  $w \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

b) Utilizando o raciocínio semelhante ao do item anterior temos que  $w \in (A \cap B) \cup C$  então  $w \in (A \cap B)$  ou  $w \in C$ . Daí decorre que  $(w \in A \text{ e } w \in B)$

ou  $w \in C$ . Usando a equivalência lógica  $(q \wedge r) \vee p \Leftrightarrow (q \vee p) \wedge (r \vee p)$  temos:  $(w \in A \text{ ou } w \in C)$  e  $(w \in B \text{ ou } w \in C)$ , ou seja,  $w \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .

c) Devemos mostrar que: i)  $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$  e ii)  $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$

i) Seja  $w$  um elemento do espaço amostral  $S$ , se  $w \in (A \cup B)^C$  então  $w \notin A$  e  $w \notin B$ , isto é,  $w \in A^C$  e  $w \in B^C$ . Daí decorre que  $w \in A^C \cap B^C$ , logo  $(A \cup B)^C \subset A^C \cap B^C$ .

ii) Se  $w \in A^C \cap B^C$  então  $w \in A^C$  e  $w \in B^C$ , assim  $w \notin A$  e  $w \notin B$ . Daí decorre que  $w \notin A \cup B$ , ou seja,  $w \in (A \cup B)^C$ . Logo  $A^C \cap B^C \subset (A \cup B)^C$ . Portanto  $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ .

d) Devemos mostrar que: i)  $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$  e ii)  $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$

i) Seja  $w$  um elemento do espaço amostral  $S$ , se  $w \in (A \cap B)^C$ , então  $w \notin A \cap B$ . Logo,  $w \notin A$  ou  $w \notin B$ , isto é,  $w \in A^C$  ou  $w \in B^C$ . Disto segue  $w \in (A^C \cup B^C)$ , assim  $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$ .

ii) Se  $w \in (A^C \cup B^C)$  então  $w \in A^C$  ou  $w \in B^C$ , logo  $w \notin A$  ou  $w \notin B$ . Daí decorre que  $w \notin A \cap B$ , ou seja,  $w \in (A \cap B)^C$ , assim  $A^C \cup B^C \subset (A \cap B)^C$ . Portanto  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ . ■

### 7.1.4 Definição Clássica, Frequentista e Axiomática de Probabilidade.

**7.1.4.1 Definição clássica ou a priori (Fermat e Pascal, metade do século XVII).**

No contexto de um jogo e desde o ponto de vista de um jogador, consideram-se o conjunto de todos os resultados ou *casos possíveis*, sendo feita uma partição em dois subconjuntos: o dos resultados ou *casos favoráveis* e o dos não favoráveis (ao jogador). Assim a probabilidade do jogador ganhar define-se por:

**7.1.4.2 Definição:** Consideremos um espaço amostral  $S$  com  $N$  eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja  $A$  um evento de  $S$  composto de  $m$  eventos simples. A probabilidade de  $A$ , que denotaremos por  $P(A)$ , é definida por:

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

**7.1.4.3 Lema:** Seja  $S$  um espaço amostral finito satisfazendo as condições da definição anterior. A probabilidade então satisfaz:

i)  $P(A) \geq 0$ , para todo  $A \subset S$ ;

ii) Se  $A$  e  $B$  são eventos mutuamente exclusivos, então:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ;

iii)  $P(S) = 1$ .

Demonstrações:

i) Como  $N > 0$  e  $m \geq 0$  segue que  $P(A) \geq 0$ ;

ii) Suponha que  $A$  tem  $m_1$  eventos simples e que  $B$  tem  $m_2$  eventos simples. Como  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, eles não possuem eventos em comum, logo o número de eventos simples de  $A \cup B$  é  $m_1 + m_2$ . Portanto  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ;

iii) Como o número de eventos simples de  $S$  é  $N$ , segue da definição que  $P(S) = \frac{N}{N} = 1$ . ■

**7.1.4.4 Exemplos:** No experimento aleatório que consiste em lançar um dado honesto, atribui-se  $\frac{1}{6}$  a cada um dos eventos simples 1, 2, 3, 4, 5 e 6. “O evento obtido quando se lança o dado é par” tem probabilidade 0,5.

#### 7.1.4.5 Definição Frequentista de Probabilidade

Outra maneira de determinar a probabilidade de um evento consiste em repetir o experimento aleatório, digamos  $n$  vezes, e anotar quantas vezes o evento  $A$  associado a esse experimento ocorre. Seja  $n(A)$  o número de vezes em que o evento  $A$  ocorreu nas  $n$  repetições do experimento. A razão  $f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$  é denominada frequências relativa de  $A$  nas  $n$  repetições do experimento.

Repetindo-se o experimento um grande número de vezes, nas mesmas condições, e de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se que a frequência relativa de ocorrências do evento  $A$  tende a uma constante  $p$ .

Seja  $S$  o espaço amostral associado a um experimento aleatório. Considerando-se  $n$  repetições desse experimento nas mesmas condições, observemos que a frequência relativa está definida na classe dos eventos de  $S$  e suas propriedades são dadas no seguinte lema:

**7.1.4.6 Lema:** *A frequência relativa  $f_{n,A}$  definida na classe dos eventos do espaço amostral  $S$  satisfaz as seguintes condições:*

i) Para todo evento  $A$ ,  $0 \leq f_{n,A} \leq 1$ ;

ii) Se  $A$  e  $B$  são dois eventos de  $S$  mutuamente exclusivos, teremos:  $f_{A \cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$ ;

iii)  $f_{n,S} = 1$ .

Demonstrações:

i) Como  $n(A) \geq 0$  e  $n(A) \leq n$  segue que  $0 \leq f_{n,A} \leq 1$ ;



ii) Como os eventos A e B são mutuamente exclusivos, toda vez que um deles ocorre, o outro não ocorre, portanto o número de ocorrências de  $A \cup B$  é igual a soma de ocorrências de A com o número de ocorrências de B, isto é:  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ , dividindo tudo por n temos:  $f_{A \cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$ ;

iii) Como em toda realização do experimento algum ponto de S ocorre, então  $f_{n,S} = 1$  é verdadeira. ■

#### 7.1.4.7 Definição Axiomática de Probabilidade

A definição Probabilística de Kolmogorov fez parte do processo de axiomatização da matemática a partir da segunda metade do século XIX. Kolmogorov afirmou que a teoria das probabilidades poderia ser desenvolvida a partir de *axiomas*, da mesma forma que a geometria e a álgebra. Nestes axiomas ficam estabelecidos os entes matemáticos a serem estudados e as relações entre eles. Toda a teoria é construída a partir destes axiomas, independentemente de qualquer interpretação dos mesmos ou de suas consequências. A probabilidade está definida numa classe de eventos do espaço que satisfaz certas propriedades. Todas as operações que definimos entre os eventos conduzem a novos eventos que pertencem a essa classe. Como veremos a seguir, Kolmogorov colocou como axiomas as propriedades comuns das noções de probabilidade clássica e frequentista, que desta forma viraram casos particulares da definição axiomática.

**7.1.4.8 Definição:** *Seja S um conjunto não vazio. Uma probabilidade em S é uma função de conjunto  $P(\cdot)$  que associa a subconjuntos A de S um número real  $P(A)$  que satisfaz:*

- i) para todo  $A \subseteq S$  vale que  $0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- ii)  $P(S) = 1$ ;
- iii) Se  $A \subseteq S$ ,  $B \subseteq S$  e  $A \cap B = \emptyset$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

**7.1.4.9 Teorema:** *Seja S um conjunto não vazio. Uma probabilidade em S é uma função de conjunto que associa a subconjuntos A de S um número real  $P(A)$  que satisfaz:*

- iv)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- v)  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ;
- vi) se  $A \subseteq B$ , então  $P(A) \leq P(B)$  e  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ ;
- vii)  $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$ ;
- viii)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

Demonstrações:

iv)  $P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$ , ou seja,  $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$ , então  $P(\emptyset) = 0$ ;

v)  $S = A \cup A^c$  e  $A \cap A^c = \emptyset$ , então  $P(A \cup A^c) = 1$  e daí  $P(A^c) = 1 - P(A)$ ;

vi) Se  $A \subseteq B$  então  $B = A \cup (B - A)$ , portanto  $P(B) = P(A) + P(B - A)$ ; desta última igualdade decorrem  $P(A) \leq P(B)$ , então  $P(B - A) = P(B) - P(A)$ ;

vii)  $B - A = B - (B \cap A)$ , de acordo com vi temos:  $P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$ ;

viii)  $A \cup B = A \cup (B - A)$ , sendo  $A \cap (B - A) = \emptyset$ ; pelo axioma iii temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$ , usando o resultado obtido em vii temos:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ . ■

### 7.1.5 Métodos de Contagem

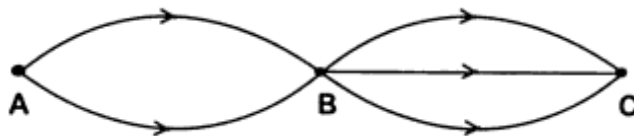
A definição clássica atribuiu a um evento  $A$ , composto de  $M$  eventos simples, probabilidade  $\frac{M}{N}$ , onde  $N$  é o número de eventos simples do espaço amostral. Para calcularmos a probabilidade de um evento qualquer precisamos portanto contar o número de eventos simples desse evento.

Um procedimento muito elementar de contagem tem sido apresentado sob título de princípio fundamental da contagem.

Suponhamos que uma tarefa pode ser executada em duas etapas. Se a primeira etapa pode ser realizada de  $n$  maneiras e a segunda de  $m$  maneiras então a tarefa completa pode ser executada de  $m.n$  maneiras.

**7.1.5.1 Exemplo:** Desejamos ir da cidade A a cidade C. Os caminhos de A a C passam pela cidade B; Se há dois caminhos que ligam A a B e três que ligam B a C, de quantas maneiras podemos ir de A a C? O número de caminhos que ligam A a C é seis. Se designarmos por 1 e 2 os caminhos que ligam A e B são 13, 14, 15, 23, 24, 25.

Figura 2 – Caminhos que levam de A a C passando por B.



Fonte: Dantas, Carlos Alberto Barbosa, Probabilidade: Um curso introdutório, 2008, pág. 29.

**7.1.5.2 Definição:** Uma amostra de tamanho  $n$  de um conjunto  $C$  que tem  $N$  elementos é um subconjunto de  $n$  elementos retirados de  $C$

As amostras podem ser retiradas de um conjunto de duas maneiras: com reposição ou sem reposição. Nas amostras com reposição cada elemento selecionado é repostado no conjunto antes da próxima retirada. No caso de amostras sem reposição, como o nome diz, os

elementos não são repostos após cada retirada. Os elementos da amostra poderão ainda ser ordenados ou não.

**7.1.5.3 Definição:** *Uma amostra é dita ordenada se os seus elementos forem ordenados, isto é, se duas amostras com os mesmos elementos, porém em ordens distintas, forem diferentes.*

**7.1.5.4 Exemplo:** Considere uma classe com vinte estudantes. O conselho de classe é formado por três estudantes: um presidente, um secretário e um tesoureiro. Ao escolhermos uma amostra de três estudantes para formarem o conselho, deveremos considerar as amostras ordenadas, pois ainda que duas amostras sejam formadas pelas mesmas pessoas, se elas executam tarefas distintas, devem considerar como diferentes.

As amostras não ordenadas sem reposição, de tamanho  $n$  de um conjunto com  $N$  elementos, são denominadas na maioria dos textos elementares de probabilidade ou de combinatória de combinações de  $N$  elementos tomados  $n$  a  $n$ . Quando não for estabelecida nenhuma qualificação, estaremos admitindo que os elementos são todos distintos e que a amostra é não ordenada. As amostras ordenadas sem reposição são denominadas arranjos. Utilizaremos tanto um nome como outro.

**7.1.5.5 Lema:** *O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho  $n$ , de um conjunto com  $N$  elementos, será denotado por  $(N)_n$ , é dado por:*

$$(N)_n = N \cdot (N - 1) \cdots (N - n + 1).$$

Demonstração: As amostras são retiradas sem reposição, portanto o primeiro elemento da amostra pode ser retirado de  $N$  maneiras, o segundo de  $(N - 1)$  maneiras, e assim por diante até o  $n$ -ésimo que pode ser retirado de  $(N - (n - 1))$  maneiras. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras de retirar uma amostra de tamanho  $n$  é dado pelo produto desses números. ■

**7.1.5.6 Exemplo:** No exemplo 5.1.5.4 com a escolha de três alunos dentre vinte, o número de maneiras que o conselho de classe pode ser formado é igual ao número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 de um conjunto de 20 elementos. Pelo lema temos:  $(20)_3 = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6.840$ .

**7.1.5.7 Lema:** *O número de amostras ordenadas com reposição de tamanho  $n$ , de um conjunto com  $N$  elementos é igual a  $N^n$ .*

Demonstração: De fato, como após cada retirada o elemento retirado é repostado, então cada uma das  $n$  retiradas temos  $N$  escolhas possíveis. Pelo princípio fundamental da contagem o número dessas amostras é  $N^n$ . ■

**7.1.5.8 Exemplo:** Considere o conjunto das quatro primeiras letras do alfabeto {a, b, c, d}. O número de amostras ordenadas sem reposição de tamanho 3 é igual a  $(4)_3 = 4.3.2 = 24$ . Já o número de amostras de tamanho 3 retiradas com reposição é igual a  $4^3 = 64$ .

**7.1.5.9 Definição:** *Uma amostra ordenada sem reposição de tamanho  $n$  de um conjunto com  $n$  elementos será denominada uma permutação dos  $n$  elementos.*

**7.1.5.10 Lema:** *O número de permutações de  $n$  elementos, denotado por  $P_n$ , é dado por:  $P_n = n!$ .*

Demonstração: Basta substituir  $N$  por  $n$  na expressão de  $(N)_n$  dada pela fórmula  $(N)_n = N.(N-1)...(N-n+1)$ . ■

**7.1.5.11 Exemplo:** Considere o conjunto dos inteiros de 1 a 3. O número de permutações desse conjunto é  $P_3 = 3.2.1 = 6$  e as permutações são as seguintes: 123, 132, 213, 231, 312 e 321.

**7.1.5.12 Definição:** *Uma amostra é dita não ordenada se os seus elementos não forem ordenados, assim um amostra não ordenada de tamanho  $n$  coincide com um subconjunto de tamanho  $n$ .*

Uma amostra não ordenada, de tamanho  $n$ , sem reposição, de um conjunto com  $N$  elementos será também, como mencionamos, denominada uma combinação de  $N$  elementos tomados  $n$  a  $n$ . O número dessas amostras será denotado  $C_{N,n}$ .

**7.1.5.13 Lema:** *O número de amostras não ordenadas sem reposição de tamanho  $n$ , de um conjunto com  $N$  elementos, é dado por:  $C_{N,n} = \frac{(N)_n}{P_n}$ .*

Demonstração: Vamos designar o conjunto de  $N$  elementos por  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ . Uma amostra não ordenada sem reposição de tamanho  $n$  é um subconjunto desse conjunto com  $n$  elementos. Consideremos, por exemplo, a amostra de tamanho  $n$  composta pelos elementos:  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Esta amostra pode gerar  $n!$  amostras ordenadas sem reposição. Como isso é válido para qualquer amostra não ordenada e o número dessas é  $C_{N,n}$  temos:

$$(N)_n = C_{N,n} \cdot P_n$$

$$C_{N,n} = \frac{(N)_n}{P_n} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)}{n!}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador por  $(N-n)!$ , podemos reescrever  $C_{N,n}$  da seguinte forma:

$$C_{N,n} = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \text{ que é o coeficiente binomial } \binom{N}{n}. \quad \blacksquare$$

**7.1.5.14 Exemplo:** Seis times participam de um interclasse de basquete. Cada uma das equipes enfrenta todas as demais. Quantos jogos são realizados?

Para determinar o número de jogos, precisamos calcular o número de amostras não ordenadas de tamanho 2 de um conjunto com 6 elementos. Pela fórmula obtida temos:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = 15.$$

**7.1.5.15 Lema:** O número de partições de um conjunto de  $N$  elementos em  $k$  subconjuntos, com  $n_1, n_2, \dots, n_k$  elementos, respectivamente, é igual a:  $\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$ .

Demonstração: Seleccionamos inicialmente do conjunto com  $N$  elementos um subconjunto de tamanho  $n_1$ . Do conjunto remanescente com  $N - n_1$  elementos seleccionamos um subconjunto com  $n_2$  elementos, Dos  $N - (n_1 + n_2)$  retiramos  $n_3$  e assim sucessivamente até que a última etapa restam  $n_k$  elementos e o processo termina. A primeira retirada pode ser feita de  $\binom{N}{n_1}$  maneiras, a segunda de  $\binom{N-n_1}{n_2}$ , e assim por diante, sendo que a última pode ser feita de  $\binom{N-(n_1+n_2+\dots+n_{k-2})}{n_{k-1}}$  maneiras. Pelo princípio fundamental da contagem, o número de maneiras de retirar  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$ , restando  $n_k$  elementos para o último subconjunto, é igual ao produto:

$$\binom{N}{n_1} \cdot \binom{N-n_1}{n_2} \cdot \dots \cdot \binom{N-(n_1+n_2+\dots+n_{k-2})}{n_{k-1}}.$$

Substituindo nessa fórmula cada

coeficiente binomial pela sua expressão em termos dos fatoriais obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{N!}{n_1! \cdot (N-n_1)!} \cdot \frac{(N-n_1)!}{n_2! \cdot (N-(n_1+n_2))!} \cdot \dots \cdot \frac{(N-(n_1+n_2+\dots+n_{k-2}))!}{n_{k-1}! \cdot (N-(n_1+n_2+\dots+n_{k-1}))!} \\ &= \frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 7.1.6 Probabilidade Condicional

Os conceitos de probabilidade condicional e de independência de eventos são conceitos típicos da Teoria das Probabilidades e que servem para distingui-la de outros ramos da Matemática.

**7.1.6.1 Definição:** *Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e supondo que  $P(A) > 0$ , a probabilidade condicional de B dado A é definida por:  $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .*

**7.1.6.2 Exemplo:** Vamos considerar o experimento que consiste em lançar um dado duas vezes em uma superfície plana e observar o número de pontos na face superior do dado em cada um dos lançamentos. Vamos supor que não se presenciem os lançamentos do dado, mas se receba a seguinte informação: “em cada um dos lançamentos, o número de pontos observados é menor ou igual a dois”. Vamos denotar por A esse evento. Nessas condições, pergunta-se: qual é a probabilidade de que a soma dos pontos nos dois lançamentos seja igual a quatro? Ou seja, designando por B o evento “soma dos pontos nos dois lançamentos igual a quatro”, queremos saber qual é a probabilidade de ocorrer o evento B, sabendo-se que o evento A ocorreu. Para o espaço amostral associado aos dois lançamentos e para os eventos A e B temos:

$$S = \{(i, j) : i, j \text{ são inteiros } 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 6\};$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \text{ e } A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

Dizer que o evento A ocorreu é equivalente a dizer que pode não se levar em conta qualquer ponto do espaço amostral que não pertença a A, ou seja, pode-se considerar o evento A como novo espaço amostral para o experimento. Desta maneira a probabilidade de B ocorrer dado A é igual a  $\frac{1}{4}$ , pois dos quatro pontos de A, apenas o ponto  $(2, 2) \in B$  e os quatro pontos são equiprováveis.

Aplicando a fórmula obtida anteriormente temos:

$$A \cap B = \{(2, 2)\}, \text{ logo } P(A \cap B) = \frac{1}{36}; P(A) = \frac{4}{36}, \text{ então podemos escrever:}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B | A) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} \Rightarrow P(B | A) = \frac{1}{4}.$$

**7.1.6.2 Lema:** *Seja A um evento tal que  $P(A) > 0$ . A probabilidade condicional satisfaz:*

i) *Para todo evento B  $P(B | A) \geq 0$ ;*

ii) *Se  $B_1, B_2, \dots, B_n$  são eventos mutuamente exclusivos então:*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n B_k \mid A\right) = \sum_{k=1}^n P(B_k \mid A);$$

iii) *Se S denota o espaço amostral  $P(S | S) = 1$ .*

Demonstração: A parte *i* decorre imediatamente da definição de probabilidade condicional e do fato da probabilidade de um evento ser sempre não negativa.

A parte *ii* decorre da definição de probabilidade condicional e da aditividade da probabilidade, expressa pela fórmula  $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ . De fato, sejam,  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , eventos mutuamente exclusivos temos:

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{k=1}^n B_k | A) &= \frac{P((\bigcup_{k=1}^n B_k) \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\bigcup_{k=1}^n (B_k \cap A))}{P(A)} = \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{\sum_{k=1}^n P(B_k | A) \cdot P(A)}{P(A)} = \\ &= \sum_{k=1}^n P(B_k | A). \end{aligned}$$

A demonstração de *iii* é imediata, pois,  $P(S | S) = \frac{P(S)}{P(S)} = 1$ . ■

### 7.1.7 Independência de Eventos

Vamos introduzir a noção de independência para dois eventos e posteriormente estender a definição para um número qualquer de eventos

**7.1.6.1 Definição:** *Sejam  $A$  e  $B$  dois eventos e suponha que  $P(A) > 0$ . O evento  $B$  é dito independente do evento  $A$  se:  $P(B | A) = P(B)$ .*

A probabilidade de  $B$  não se altera com a informação de que o evento  $A$  ocorreu. Usando a probabilidade condicional podemos escrever:

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Se o evento  $B$  é independente do evento  $A$  então esperamos que  $A$  também seja independente de  $B$ . De fato isso ocorre:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A).$$

**7.1.6.2 Definição:** *Os eventos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são independentes se:*

$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_n})$ , para todo  $k = 2, 3, \dots, n$  e todo  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ .

## 8. Metodologia

### 8.1 1ª e 2ª aulas

#### 8.1.1 Um pouco de história e atualidade

Antes de entrar no assunto, é interessante o professor mostrar o porquê de se estudá-lo, no caso, a importância do estudo de estatística. Como ela se originou, sua importância na época e atualmente. Como exemplos podemos citar que Moisés, no 4º livro do velho testamento, fez um levantamento de quantos homens estavam aptos para guerrear em Israel; o imperador César Augusto ordenou que fosse feito um censo em Roma para cobrar mais impostos.

Nos dias de hoje o censo pode e deve ser utilizado para benefício do povo. Por exemplo: Quanto cada escola deve receber para que não falte merenda escolar? Quantas escolas são necessárias para que nenhuma criança ou adolescente fique sem estudar por falta de vagas? Essas questões são respondidas com o censo escolar e com o censo do país, ou seja, através de pesquisa e levantamentos é que o governo distribui corretamente a verba para a merenda escolar e se é necessário ou não construir ou ampliar escolas.

#### 8.1.2 Noções de Estatística

Nas primeiras aulas do ano letivo, uma atividade que pode contribuir para o aprendizado da estatística é registrar todos os dias o cardápio da merenda escolar, esse registro será utilizado para exemplificar a tabela de frequências.

Antes de iniciar a primeira aula sobre estatística é fundamental que o professor pesquise sobre o último pleito eleitoral que atingiu de forma mais direta os alunos. No caso particular da escola que leciono (E.E.M. Eliézer de Freitas Guimarães), localizada no município de Caucaia-CE no bairro Nova Metrópole, o último pleito eleitoral foi em 2012, que foram as eleições municipais que incluem também a escolha dos vereadores, essas afetam mais diretamente que as próximas eleições em 2014 que será para presidente, governador, senador e deputados estaduais e federais. Atingem de forma mais direta porque os vereadores visitam todos os bairros do município em busca de votos, ou seja, o cidadão tem mais



oportunidades de ter contato, já os candidatos a presidente, governador, senador e deputados nem sempre visitam todas as regiões do estado. Para iniciar a aula o professor entra com o seguinte questionamento: Vocês sabem dizer como é feita uma pesquisa de intenção de votos? Se algum responder que sim e falar de forma coerente, melhor ainda. Se não, a próxima pergunta é: Vocês acham que ela é feita com todos os eleitores? Podemos afirmar que com certeza que responderão não, nesse momento o professor apresenta os resultados da última pesquisa realizada antes do dia da eleição, e em seguida mostra o resultado final da eleição, no caso particular da escola em que eu trabalho ficaria assim:

Figura 3 – Pesquisa Eleitoral do município de Caucaia



- Washington Góis (PRB) - 29%
- Naumi Amorim (PSL) - 17%
- Paulo Gurgel (PSDB) - 4%
- Amarílio Melo (PRTB) - 1%
- Édson Silva (PPL) - 1%
- Juscelino de Souza (PSOL) - não pontuou
- Brancos e nulos - 4%
- Não sabe, não responderam - 4%

O Ibope ouviu 406 eleitores entre os dias 30 e 31 de agosto. A margem de erro é de cinco pontos percentuais para mais ou para menos.

A pesquisa está registrada no Tribunal Regional do Ceará (TRE-CE) com o número 025/2012.

Fonte: <http://g1.globo.com/ceara/eleicoes/2012/noticia/2012/09/ines-tem-39-e-dr-washington-29-para-prefeito-de-caucaia-diz-ibope.html>

Figura 4 – Resultado final da eleição para prefeito de Caucaia em 2012

		Justiça Eleitoral/ CE	Página 5 de 36		
		Gerenciamento 2012	18/12/2012		
		Eleição Municipal 2012	08:28:30		
		Oficial 1º Turno			
Anexo II - Resultado de votação por partido/coligação					
Município	Eleitores aptos	Seções	Seções agregadas	Seções com urna	Nº vagas vereador
13730 - CAUCAIA	193.059	571	23	548	17
<b>Cargo: Prefeito</b>					
10-PRB / 11-PP / 12-PDT / 13-PT / 19-PTN / 25-DEM / 31-PPS / 33-PMN / 36-PTC / 40-PSB / 55-PSD	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
*10 - WASHINGTON LUIZ DE OLIVEIRA GOIS PAULO DE TARSO MAGALHAES GUERRA	73.720		Eleito	43,96	48,01
14-PTB / 15-PMDB / 20-PSC / 22-PR / 27-PSDC / 44-PRP / 65-PC do B	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
15 - INÊS MARIA CORRÊA DE ARRUDA MARIA EMILIA PESSOA DE LIMA CARNEIRO	43.476		Não eleito	25,93	28,31
17-PSL / 70-PT do B	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
17 - NAUMI GOMES DE AMORIM JOSE MARIA VIANA DA COSTA JUNIOR	32.837		Não eleito	19,58	21,38
23-PPS / 28-PRTB	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
28 - AMARILIO FRANCISCO MOURA DE MELO VALDENICE DE PAULO PEREIRA	0		Não eleito	0,00	0,00
43-PV / 45-PSDB	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
45 - PAULO CESAR VIEIRA GURGEL LUIZ CARLOS MOREIRA DE MENEZES	3.233		Não eleito	1,93	2,11
50-PSOL	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
50 - JUSCELINO DE SOUZA RAIMUNDO NONATO PEREIRA DOS SANTOS	293		Não eleito	0,17	0,19
54-PPL	Votos		Situação	% comparec.	% válidos
54 - ANTONIO UEDSON DA SILVA LAERTE GARCIA DE ARAUJO	0		Não eleito	0,00	0,00

Fonte: <http://apps.tre-ce.jus.br/tre/eleicoes/ele2012/resultados/MUNICIPIOS/CAUCAIA/CAUCAIA-RES-RESULTADO-TOTALIZACAO.PDF>

Caso o professor não tenha condições de levar os alunos para o laboratório de informática, para mostrar esses resultados, escrevê-los no quadro é suficiente.

Em seguida, comparam-se os percentuais da pesquisa com o resultado final e volta a indagar os alunos sobre a quantidade de pessoas que foram entrevistadas e quantas participaram da eleição de fato, ou seja, a parte da população entrevistada é apenas uma amostra, já o conjunto de todos os eleitores forma a população. Com essa ideia de População e Amostra, podemos formalizar:

Uma **população** é um conjunto de elementos que têm pelo menos uma característica em comum.  
Uma **amostra** é um subconjunto finito formado por elementos extraídos de uma população.

Na sequência, o professor questiona a turma qual deles poderia dar outro exemplo de população e amostra, caso eles ainda não respondam é hora de iniciar a utilização do livro didático, no caso particular da escola que trabalho, os professores de matemática escolheram, para adotar, o livro Conexões com a Matemática e no início do assunto ele traz um texto sobre uma pesquisa feita pelo PNAD (Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios) com a quantidade estimada de famílias com acesso a TV analógica em 2008, mas é uma pesquisa feita com uma parte dos domicílios que no ano em questão totalizavam 57.557.000, o que torna inviável a consulta em todos eles, logo as famílias entrevistadas compõem a amostra e todos os domicílios a população.

Na compra de um aparelho de TV, além da marca, podemos escolher as dimensões da tela, os recursos disponíveis, bem como o preço. Cada uma dessas características – marca, dimensões da tela, recursos disponíveis e preço – é chamada de **variável**.

**Variável** é uma característica ou um atributo estudado em todos os elementos da amostra.

Para definirmos os tipos de variáveis com as quais iremos trabalhar, a ideia é solicitar do diretor da escola uma das planilhas de licitação da merenda escolar para mostrar aos alunos de que forma é feita essa licitação:

Tabela 1 – Tabela de licitação da merenda escolar

PAUTA DE COMPRAS					
N.º	ALIMENTO	ESPECIFICAÇÃO	ESPECIFIC. DA EMBALAGEM	QUANT. A SER ADQUIRIDA	PRAZO DE VALIDADE
01	Biscoito Cream Cracker	Boa Qualidade	PCT C/ 500 G	48 Kg	06 meses
02	Açúcar	Refinado	PCT C/ 01 KG	30 Kg	12 meses
03	Leite	Longa Vida B Qualidade	Cx C/ 1000ML	120 L	120 dias
04	Chocolate em pó	Boa Qualidade	PCT C/ 01 KG	10 Kg	06 meses
05	Doce	Em tablete	Pct com 500 gr	20 Kg	06 meses
06	Bebida	Láctea sabor morango enriquecida com ferro	Pct com 1000 ml	100 L	Perecível
07	Polpa de Fruta	Congelada	PCT C/ 01 KG	12 Kg	Perecível

Fonte: [licita.seplag.ce.gov.br/pub/106047/ELIEZER%202008-%20MER.doc](http://licita.seplag.ce.gov.br/pub/106047/ELIEZER%202008-%20MER.doc)

Após o diretor comentar um pouco o funcionamento das licitações e apresentar a tabela anterior, podemos tomar como exemplo a quantidade de quilos de açúcar, pergunta-se para a turma: A quantidade de quilos de açúcar pode ser representada por um número não inteiro? Espera-se que eles respondam não. Caso algum aluno tenha dúvida, uma pergunta para os alunos seria: De acordo com a planilha, onde constam pacotes com 1 kg, é possível que esse total seja representado por algum número não inteiro? Então podemos dizer que a

quantidade de quilos de açúcar representa uma **variável quantitativa discreta**, pois só pode representada por um número inteiro. Dentro da tabela podemos mostrar mais exemplos como o chocolate em pó.

Para mostrar a **variável quantitativa contínua**, perguntamos a turma se dentro da tabela poderíamos identificar alguma variável que pode ser representada por um número inteiro ou não. Uma sugestão seria o doce em tablete, pois 500g pode também ser 0,5 kg.

Quando uma variável não pode ser representada por um número, a ela pode ser atribuída uma qualidade, ou seja, adjetivo. Pergunta-se a turma onde na tabela poderíamos encontrar esse exemplo? Podemos citar aqui o exemplo do açúcar, que pode ser refinado como consta na tabela, mas também poderia ser cristalizado ou mascavo por exemplo. Quando atribuímos um atributo ou qualidade a variável, se trata de uma **variável qualitativa**.

Ao final desta aula de 50 minutos é importantíssimo pedir para a turma trazer na próxima aula, a segunda pesquisa que os alunos vão desempenhar: anotar numa folha os preços do quilograma de arroz de todas as marcas no estabelecimento comercial mais próximo da sua residência. Particularmente eu dividi a turma em 20 equipes e cada equipe ficou responsável por um estabelecimento. Para se chegar aos vinte estabelecimentos, demorou uma boa quantidade de tempo, ou seja, possivelmente será necessário mais uma aula de 50 minutos, pois primeiro os próprios alunos vão sugerir os estabelecimentos e em seguida as equipes serão formadas de acordo com a proximidade da residência dos alunos com o estabelecimento. Com as informações que as equipes trarão, o professor desenvolverá a tabela de frequências absoluta e relativa, além das frequências acumuladas.

Um ponto importante da aula é o exercício. Deve-se trabalhar, no mínimo, uma questão para fixar e avaliar o nível de aprendizado da turma.

1º Em um pet shop há 300 animais cadastrados. Para melhor atendê-los, foi feita uma pesquisa sobre o porte, a raça e a idade dos animais. Também foi verificado o número de banhos e de tosas durante o semestre e o tempo em que ficam hospedados em hotéis. Para isso, foram selecionados 160 animais.

- a) Determinar a população e a amostra dessa pesquisa;
- b) Identificar as variáveis qualitativas estudadas na pesquisa;
- c) identificar e classificar as variáveis quantitativas estudadas na pesquisa.

2º Identifique, nos itens abaixo, as variáveis e classifique-as em quantitativa discreta, quantitativa contínua ou qualitativa.

- a) Avaliação do trabalho realizado pela coordenação como excelente, boa ou ruim;
- b) Os números de telefone de uma lista telefônica;
- c) Grau de escolaridade dos professores da escola;
- d) Vendas anuais de uma empresa do setor de telefonia celular;
- e) Marcas de Bolachas Recheadas;
- f) Tamanhos da camisa da farda expressos por P, M e G;
- g) Tipos de queijo vendidos em um supermercado;
- h) Tipos de loja do Shopping Iandê;
- i) Número de livros que cada aluno recebe no início do ano letivo;
- j) preços de bicicletas;

## 8.2 3ª e 4ª aulas

### 8.2.1 Distribuições de Frequências: Frequência Absoluta, Relativa, e acumuladas.

O professor recolhe os dados trazidos pela turma e analisa qual marca aparece ou em todas as pesquisas ou na maioria delas. Na aplicação que fiz, uma marca apareceu em todas as pesquisas, os valores devem ser escritos no quadro e partir desses dados chegar a algumas conclusões:

Dados escritos no quadro em reais:

2,05 – 2,20 – 2,30 – 2,10 – 2,10 – 2,20 – 2,09 – 2,15 – 2,10 – 2,00

2,00 – 2,15 – 2,20 – 2,25 – 2,20 – 2,10 – 2,30 – 2,10 – 2,15 – 2,10

Juntamente com a turma, o professor escreve os dados em ordem crescente para facilitar tanto a construção da tabela como para facilitar o cálculo da mediana, conceito que será estudado no decorrer do conteúdo:

2,00 – 2,00 – 2,05 – 2,09 – 2,10 – 2,10 – 2,10 – 2,10 – 2,10 – 2,10

2,15 – 2,15 – 2,15 – 2,20 – 2,20 – 2,20 – 2,20 – 2,25 – 2,30 – 2,30

Agora, o próximo passo é construir a tabela de frequências. Inicialmente deve-se escrever a que os dados coletados se referem, no caso da pesquisa foi o preço do quilograma de arroz da marca “Tabajara”, para não usarmos o nome da marca:

Tabela 2 – Início da construção da Tabela de Frequências.

Preço do kg do Arroz Tabajara
----------------------------------


Preenche a primeira coluna com os valores coletados e, registra ao lado, quantas vezes cada um figurou na pesquisa registrando o total de informações:

Tabela 3 – Construção da coluna  $f_i$  na Tabela de Frequências.

Preço do kg do Arroz Tabajara	Número de Estabelecimentos ( $f_i$ )
2,00	2
2,05	1
2,09	1
2,10	6
2,15	3
2,20	4
2,25	1
2,30	2
Total	20

Com essas duas colunas, podemos definir o que é frequência absoluta:

A quantidade de vezes que cada valor é observado é chamada de **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência ( $f_i$ )**.

Para se chegar ao conceito de frequência relativa, o professor deve questionar de que forma poderíamos representar essas informações na forma de porcentagem? Um questionamento seria: Quantos por cento representa o quilograma mais vendido? Um dos pré-requisitos para que o aluno compreenda bem esse assunto é o estudo de porcentagem, o aluno conhecendo essa definição (parte em relação ao todo) pode chegar à conclusão que a frequência relativa seria relacionar  $f_i$  com o total, portanto:

A razão entre a frequência absoluta e o total de valores observados é chamada de **frequência relativa ( $f_r$ )**.

Uma observação importante é que a frequência relativa é geralmente calculada em porcentagem, ou seja, após escrever a razão entre  $f_i$  e o total, é necessário multiplicar por 100.

Tabela 4 – Construção da coluna  $f_r$  na Tabela de Frequências.

Preço do kg do Arroz Tabajara	Número de Estabelecimentos ( $f_i$ )	Frequência Relativa ( $f_r$ )
2,00	2	$f_r = \frac{f_i}{Total} \Rightarrow \frac{2}{20} \times 100 = \frac{200}{20} = 10\%$
2,05	1	5,0%
2,09	1	5,0%
2,10	6	30,0%
2,15	3	15,0%
2,20	4	20,0%
2,25	1	5,0%
2,30	2	10,0%
Total	20	100,0%

A atenção e o aprendizado da turma melhoram com o professor calculando a primeira linha e deixando um tempo para os alunos terminarem o restante da coluna. Na sequência vêm as frequências acumuladas, uma pergunta para turma seria: O que vocês entendem da palavra acúmulo, ela dá ideia de que operação matemática? Normalmente eles relacionam a soma, então é isso mesmo que acontece, podemos calcular a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores, que chamamos de **frequência absoluta acumulada ( $F_i$ )**, e a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores, que chamamos de **frequência relativa acumulada ( $F_r$ )**.

Tabela 5 – Construção das colunas  $F_i$  e  $F_r$  na Tabela de Frequências.

Preço do kg do Arroz	Número de Estabelecimentos ( $f_i$ )	$f_r$	$F_i$	$F_r$
2,00	2	10,0%	2	10,0%
2,05	1	5,0%	$2 + 1 = 3$	$10,0 + 5,0 = 15,0\%$
2,09	1	5,0%	$3 + 1 = 4$	$15,0 + 5,0 = 20,0\%$
2,10	6	30,0%	$4 + 6 = 10$	50,0%
2,15	3	15,0%	$10 + 3 = 13$	65,0%
2,20	4	20,0%	$13 + 4 = 17$	85,0%
2,25	1	5,0%	$17 + 1 = 18$	90,0%
2,30	2	10,0%	$18 + 2 = 20$	100,0%
Total	20	100,0%	—	—

Esse é o momento para os alunos realizarem a atividade com o levantamento feito sobre o cardápio da merenda escolar, claro que o professor deve ter esse cardápio, caso os

alunos não tenham registrado todos os dias até então. Na minha aplicação obtive os seguintes resultados:

Tabela 6 – Aplicação para a turma com a pesquisa na escola.

Cardápio da Merenda	Quantidade de vezes servida (fi)	fr	Fi	Fr
Bat-gut com Bolacha	9	22,5%	9	22,5%
Cuscuz com ovo e café	4	10,0%	$9 + 4 = 13$	$22,5 + 10,0 = 32,5\%$
Macarronada	3	7,5%	$13 + 3 = 16$	$32,5 + 7,5 = 40,0\%$
Cachorro quente + suco	7	17,5%	$16 + 7 = 23$	57,5%
Pão com ovo e café	4	10,0%	$23 + 4 = 27$	67,5%
Bolacha com docinho	2	5,0%	$27 + 2 = 29$	72,5%
Frutas	4	10,0%	$29 + 4 = 33$	82,5%
Arroz com Frango	2	5,0%	$33 + 2 = 35$	87,5%
Suco com Bolacha	5	12,5%	$35 + 5 = 40$	100,0%
Total	40	100%	—	—

### 8.3 5ª e 6ª aulas

#### 8.3.1 Gráficos e suas representações

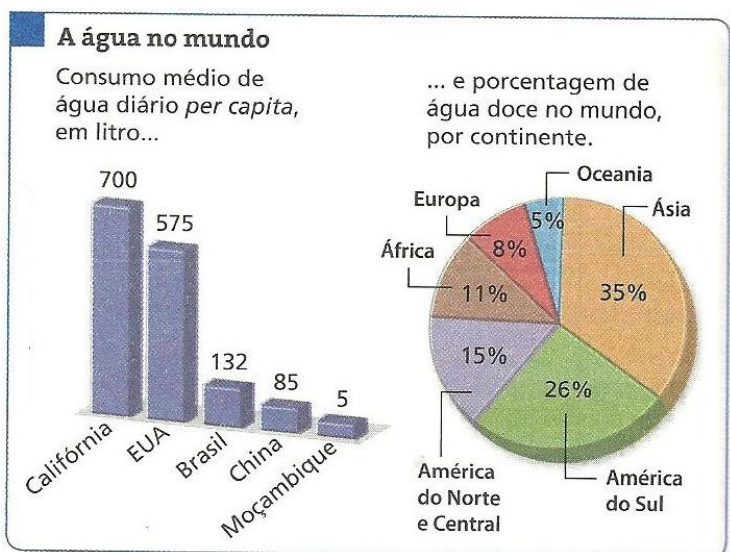
Utilizando o próprio livro didático, explicamos os tipos de gráficos.

Com certa frequência os resultados numéricos de uma pesquisa ou reportagem aparecem na forma de gráficos. Para tornar possível essa representação, é necessário obedecer três requisitos básicos: simplicidade, clareza e principalmente veracidade (sempre escrever a fonte das informações).

##### 8.3.1.1 Exemplos:



Gráfico 1 – Exemplos de gráficos



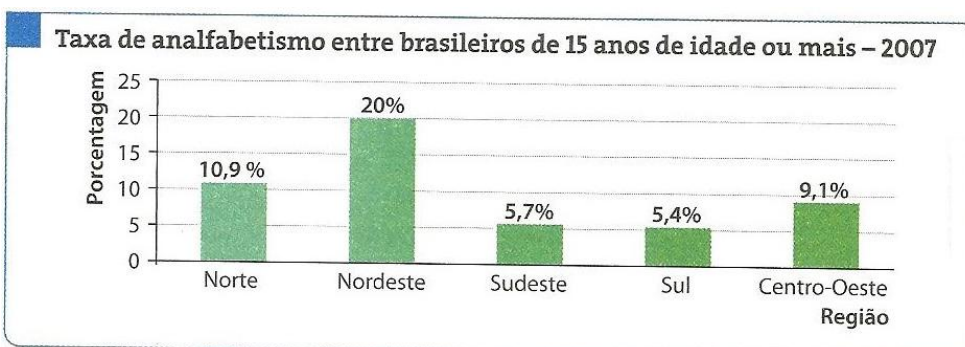
Dados obtidos em: Cai do céu, mas pode faltar.  
*Veja*, São Paulo, ano 41, n. 4, p. 88-9, 30 jan. 2008.

Fonte: Livro *Conexões com a Matemática*, Barroso, Juliane Matsubara Vol. 3 1ª Ed. Moderna pág. 38

### 8.3.1.2 Tipos de gráfico

- Gráfico de Barras Verticais: Apresentam os dados por meio de colunas retangulares verticais, com a altura de cada coluna correspondente a frequência absoluta ou relativa. Como no exemplo acima temos um gráfico de colunas utilizando frequência absoluta, mostraremos um gráfico com frequência relativa:

Gráfico 2 – Gráfico de barras verticais ou gráfico de colunas.



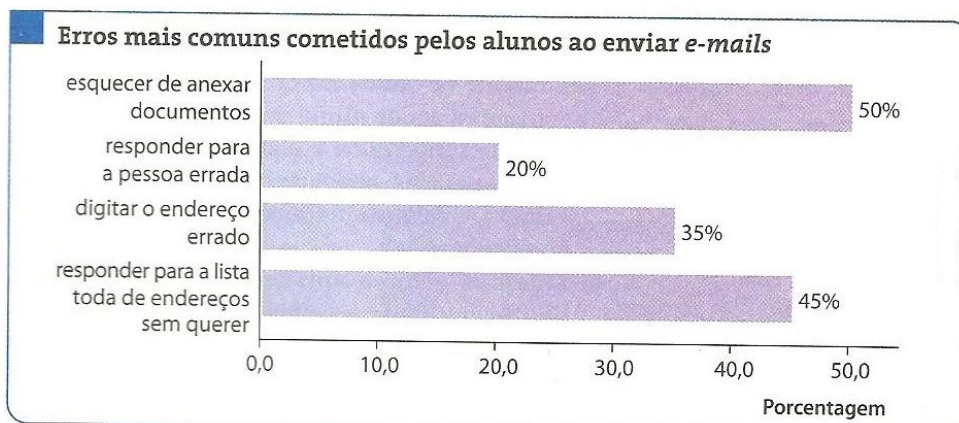
Dados obtidos em: IBGE. *Síntese de Indicadores Sociais*. 2008.  
 Disponível em: [www.ibge.gov.br](http://www.ibge.gov.br) Acesso em: 6 fev. 2010.

Fonte: Livro *Conexões com a Matemática*, Barroso, Juliane Matsubara Vol. 3 1ª Ed. Moderna pág. 38

- Gráfico de Barras Horizontais: Apresentam os dados por meio de barras retangulares horizontais, com a altura de cada coluna correspondente a frequência absoluta ou relativa.

### 8.3.1.3 Exemplo:

Gráfico 3 – Exemplo de gráficos de barras horizontais.



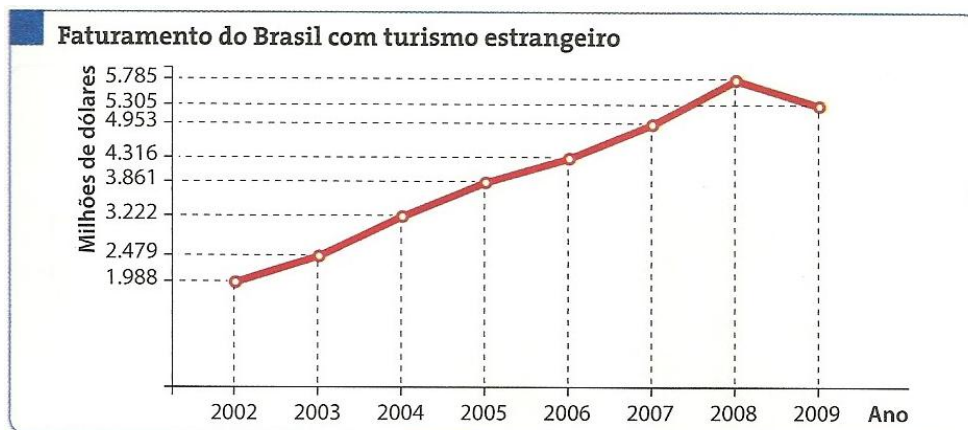
Fonte: Escola Acesso.

Fonte: Livro Conexões com a Matemática, Barroso, Juliane Matsubara Vol. 3 1ª Ed. Moderna pág. 38

- Gráfico de Segmentos: Também conhecido como gráfico de linhas, são muito empregados para representar duas grandezas que se relacionam. Para construí-lo, adotamos como referencial um plano cartesiano, no qual os pontos correspondentes aos dados levantados são marcados e, em seguida, unidos por meio de segmento de reta.

### 8.3.1.4 Exemplo:

Gráfico 4 – Exemplo de gráfico de segmentos ou de linha.



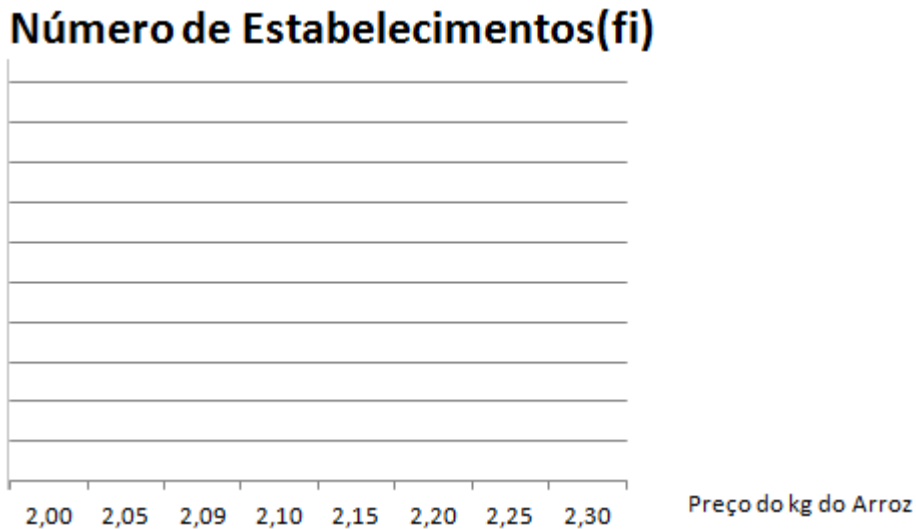
Dados obtidos em: Ministério do Turismo.  
Disponível em: [www.turismo.gov.br](http://www.turismo.gov.br)  
Acesso em: 6 fev. 2010.

Fonte: Livro Conexões com a Matemática, Barroso, Juliane Matsubara Vol. 3 1ª Ed. Moderna pág. 39

- Gráfico de Setores: Representam os dados em um círculo, no qual cada setor indica a quantidade (frequência relativa) de um valor observado. Nesse tipo de gráfico, a área e o ângulo de cada setor são diretamente proporcionais à porcentagem que representam em relação ao total (100%).

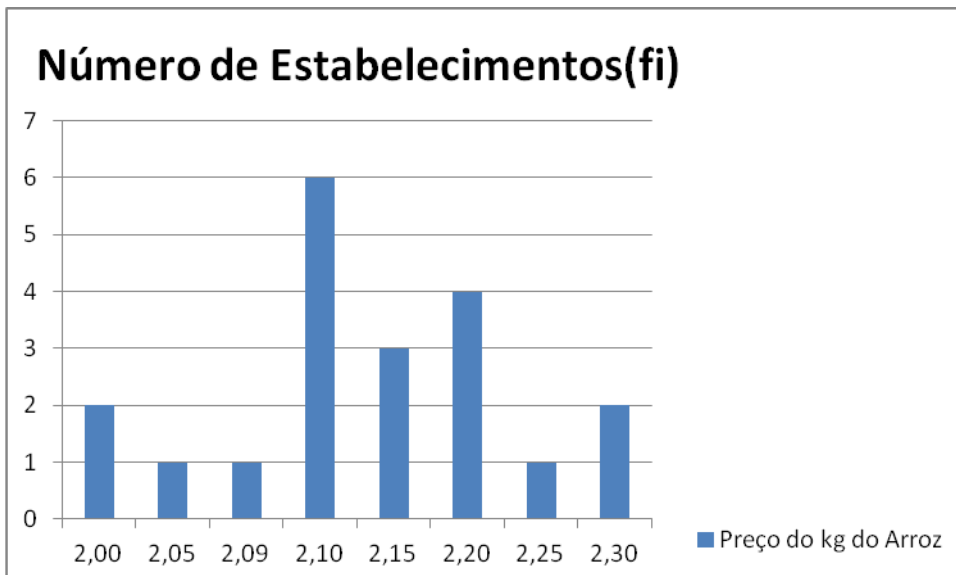


Figura 6 – Passo intermediário para construção do gráfico de colunas



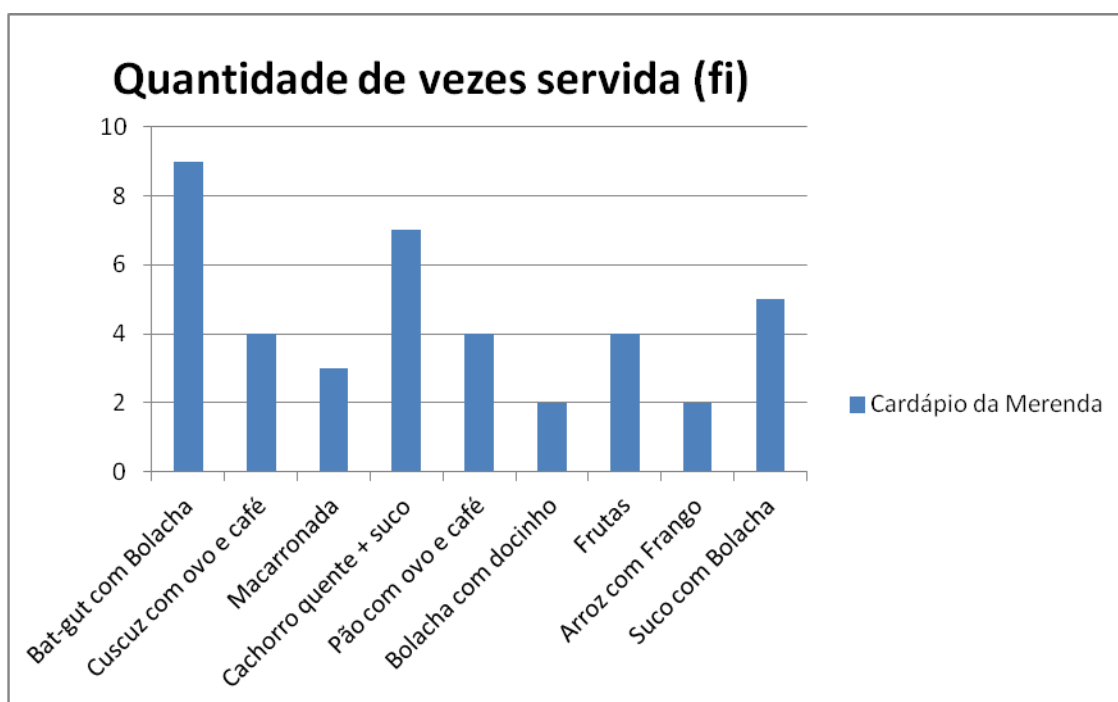
- Para finalizar, é importante observar que os valores do eixo “y” devem ser escritos com certo cuidado, observa-se o maior valor da frequência absoluta, no caso 6, já que é um valor pequeno, pode começar a partir do zero e aumentar o seu valor com intervalo de uma unidade. Finalizando com o desenho das colunas até os respectivos valores das frequências absolutas:

Gráfico 6 – Gráfico de Colunas da Tabela 5



Para finalizar esse tópico uma atividade será a turma desenhar o gráfico correspondente à tabela 6, seguindo os mesmos passos:

Gráfico 7 – Gráfico da tabela 6.



Uma observação importante é que nesse gráfico o eixo “y” é escrito com intervalo de duas unidades. Para que o desenho não fique tão exagerado, o aluno deve compreender que é subjetiva a escolha dos intervalos do eixo “y”, porém deve-se usar o bom senso. Por exemplo, se o maior valor da frequência absoluta for 25 não tem sentido ele escrever os dados no eixo “y” com intervalo de uma unidade, é mais viável escrever com intervalos de cinco unidades.

## 8.4 7ª e 8ª aulas

### 8.4.1 Medidas de Tendência Central: Média, Moda e Mediana

#### 8.4.1.1 Média Aritmética e Média Aritmética Ponderada

Para fazer uma pesquisa estatística, é preciso recolher e organizar dados de uma amostra significativa do tema abordado. Como em geral se obtém uma grande quantidade de dados, a apresentação do resultado da pesquisa exige a escolha de uma medida que resuma todos os valores levantados e por meio de um só número descrever as características desses dados.

As medidas estatísticas que descrevem a tendência que os valores têm de agrupamento em torno de certos valores recebem o nome de **medidas de tendência central**.

A próxima pesquisa para a turma fazer será coletar os resultados da primeira rodada do interclasse da escola. Como o conteúdo em questão é trabalhado no 2º bimestre, já se tem iniciado o campeonato, caso o campeonato não esteja em andamento sugiro o campeonato Brasileiro ou Estadual de futebol, trabalhar com os times locais acredito ser uma boa ideia. Na escola em que trabalho há dez turmas pela manhã e dez pela tarde, a professora de educação física organizou o campeonato da seguinte forma: a primeira rodada já seria mata-mata, ou seja, os vinte times realizariam dez partidas. A turma trouxe os seguintes resultados:

Jogo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Placar	2x2	2x1	5x1	0x2	0x0	0x3	1x1	2x0	2x0	2x1

Com os placares escrevemos a quantidade de gols de cada partida:

Jogo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Nº de Gols	4	3	6	2	0	3	2	2	2	3

A pergunta a se fazer com esses resultados é: Como se calcular a média de gols dessa rodada? Se algum aluno responder que se deve somar a quantidade de gols e dividir por 10, ótimo. Caso nenhum deles responda, o ideal é perguntar como é calculada a média do bimestre em matemática, por exemplo. No caso da escola em que trabalho, a média bimestral dos alunos é calculada com três notas: Avaliação Parcial, Nota de Desempenho Individual e Avaliação Bimestral. Como estamos trabalhando com 3º ano do ensino médio, espera-se que algum possa responder que basta somar a três notas e dividir por três, com esse raciocínio podemos voltar para a média de gols. Espera-se que agora algum deles responda que se deve somar e dividir por dez. Nesse momento já podemos introduzir a representação da média aritmética, ou seja,  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{4+3+6+2+0+3+2+2+2+3}{10} \Rightarrow \bar{x} = \frac{27}{10} \Rightarrow \bar{x} = 2,7 \text{ gols por partida.}$$

Utilizando esse raciocínio podemos escrever a definição formal de média aritmética.

**Média Aritmética** é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações, ou seja,  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$ . Onde  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  são os valores que a variável pode assumir e  $n$  é a quantidade de valores no conjunto de dados.

Uma ótima aplicação desse conceito é pedir para a turma calcular a média do preço do quilograma de arroz da tabela 5, se o professor perceber que a turma não precisa

exercitar soma de números inteiros, pode deixá-los utilizar calculadora, caso contrário é uma ótima oportunidade para eles exercitarem não apenas a adição, mas a divisão também.

Após a turma terminar, é um excelente momento para mostrar a média aritmética ponderada, acrescentando mais uma coluna na tabela 5, como na tabela abaixo:

Tabela 7: Tabela 5 com coluna da média aritmética.

Preço do kg do Arroz ( $x_i$ )	Número de Estabelecimentos ( $f_i$ )	fr	Fi	Fr	$x_i \cdot f_i$
2,00	2	10,0%	2	10,0%	4,00
2,05	1	5,0%	3	15,0%	2,05
2,09	1	5,0%	4	20,0%	2,09
2,10	6	30,0%	10	50,0%	12,60
2,15	3	15,0%	13	65,0%	6,45
2,20	4	20,0%	17	85,0%	8,80
2,25	1	5,0%	18	90,0%	2,25
2,30	2	10,0%	20	100,0%	4,60
Total	20	100,0%	—	—	42,84

$$\bar{x} = \frac{42,84}{20} \Rightarrow \bar{x} = \frac{21,42}{10} \Rightarrow \bar{x} \cong 2,14.$$

Depois de todo o trabalho que eles tiveram para calcular, alguns sempre dizem: por que o senhor não mostrou primeiro esse método? A resposta deve ser questionada para que alguém da turma possa pensar sobre isso, e finalmente é dizer que a média aritmética ponderada é utilizada quando há uma grande quantidade de informações que se repetem. Formalizando:

O número de vezes que um valor se repete recebe o nome de **peso** ( $f_i$ ), e a média aritmética calculada com pesos é chamada de **média aritmética ponderada**. Assim

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots + f_n \cdot x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n}.$$

sendo  $x_i$  os valores da variável e  $f_i$  é a frequência (pesos) com que cada um deles figura ou aparece.

#### 8.4.1.2 Mediana

Outra medida de tendência central que estudamos é a mediana, ou seja, termo central de um conjunto de dados.

**Mediana** de um grupo de valores previamente ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o valor que divide esse grupo em duas partes com o mesmo número de termos.

Sendo  $n$  o número de termos da distribuição temos:

- Se  $n$  é ímpar, a posição do termo central é dada por  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ;
- Se  $n$  é par, as posições dos dois termos centrais são dadas por  $\frac{n}{2}$  e  $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ .

Para verificar usaremos o exemplo do interclasse, vamos organizar na ordem crescente a quantidade de gols das partidas: 0, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6. Podemos observar que nenhum número da sequência consegue dividi-la exatamente em duas partes iguais, até se tenta com o último 2, mas ficam quatro dados a esquerda dele e cinco a direita, acontecendo algo análogo com o primeiro 3 da sequência, apenas invertendo os lados, mas se observarmos os dois números como sendo apenas um obtemos que tanto a esquerda quanto a direita de ambos tem a mesma quantia de dados, então essa sequência tem dois termos centrais, portanto a mediana ( $M_e$ ) de um conjunto de dados é dada pela média aritmética dos termos centrais:

$$M_e = \frac{2+3}{2} \Rightarrow M_e = 2,5.$$

Aproveitando essa mesma sequência, tirando o primeiro dado, ela fica da seguinte maneira: 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 6. Agora podemos observar que o primeiro três, e apenas ele, divide a sequência de dados em duas partes iguais, portanto  $M_e = 3$ .

### 8.4.1.3 Moda

A terceira mediada de tendência central é a moda. Ela é usada, por exemplo, para identificar a preferência em uma situação. Definir o número do pé mais vendido numa loja de sapatos para que sejam encomendados sempre em maior quantidade quando saírem novos lançamentos.

**Moda** é(são) o(s) valor(es) que aparece(m) com maior frequência no conjunto de valores observados.

Tomemos ainda o exemplo do interclasse, qual a quantidade de gols mais frequente nas partidas? Com certeza uma parte da turma, senão a maioria vai responder corretamente dois, logo  $M_o = 2$ . É importante observar que se na sequência outro três figurasse, teríamos dois valores modais, ou seja,  $M_o = 2$  e  $M_o = 3$ .



Para os alunos praticarem esses dois conhecimentos, utilizaremos a tabela 5, solicitando que calculem a mediana e a moda.

Lembrando os dados coletados e previamente ordenados para melhor calcular a mediana temos:

2,00 – 2,00 – 2,05 – 2,09 – 2,10 – 2,10 – 2,10 – 2,10 – 2,10 – 2,10

2,15 – 2,15 – 2,15 – 2,20 – 2,20 – 2,20 – 2,20 – 2,25 – 2,30 – 2,30

A moda é bem simples de visualizar, tanto aqui, mais ainda na tabela.  $M_o = 2,10$ . Quanto à mediana, como há 20 termos, ou seja, uma quantidade par de termos têm dois termos centrais, nas posições 10 e 11. Portanto a mediana é dada pela média aritmética desses dois valores:

$$M_e = \frac{2,10 + 2,15}{2} \Rightarrow M_e = 2,125$$

## 8.5 9ª e 10ª aulas

### 8.5.1 Probabilidade e Frequência Relativa

Um dos assuntos mais cobrados é o da teoria das probabilidades, mas o que será que ele tem haver com a estatística? Essa é uma ótima oportunidade para rever esse conteúdo, já que essencialmente ele é trabalhado no 2º ano, pois os livros didáticos em sua maioria traz esse conteúdo de uma forma bem detalhada, enquanto no 3º ano, apenas comenta nesse tópico, o ideal é revisar a definição e depois relacionar com a frequência relativa.

#### 8.5.1.1 Revisão de Probabilidade

Vejamos a seguinte situação com a turma. Suponha que um casal queira ter dois filhos, o primeiro filho poderá ser do sexo masculino (M) ou do sexo feminino (F), o segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Sabendo que a chance de nascer um filho do sexo masculino é igual à de nascer um filho do sexo feminino, independente do sexo dos filhos já existentes, que chance existe de esse casal ter os dois filhos do sexo masculino (M, M)?

Chamamos de S o conjunto espaço amostral logo  $S = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}$ . A ideia é pedir a turma para dizer quais seriam as possibilidades e em seguida vamos ao que chamaremos de um subconjunto de S, ou seja, evento A (dois filhos do sexo masculino), logo  $A = \{(M, M)\}$ , assim:  $n(A) = 1$  e  $n(S) = 4$ .

Dizemos que a chance de nascerem dois filhos do sexo masculino é de 1 em 4, ou  $\frac{1}{4}$ . Para transformar o valor da probabilidade em porcentagem basta multiplicar o resultado por 100:

$$\frac{1}{4} \times 100 \Rightarrow \frac{100}{4} = 25\% .$$

Nessa situação, consideramos que, para cada evento simples, eles têm a mesma chance de ocorrência, ou seja, os eventos elementares desse espaço amostral têm probabilidades iguais, então esse espaço amostral é denominado **espaço amostral equiprovável**.

Em um **espaço amostral equiprovável**, a probabilidade de ocorrência de um evento, indicada por  $P(A)$ , é a razão entre o número de elementos do evento,  $n(A)$ , e o número de elementos do espaço amostral,  $n(S)$ :  $P = \frac{n(A)}{n(S)}$ .

### 8.5.1.2 A relação entre Probabilidade e Frequência Relativa

Pela observação da transformação em porcentagem do resultado da probabilidade de um evento, perguntamos a turma: Com qual dado da nossa conhecida tabela 7, a probabilidade tem semelhança? É esperado que a turma respondesse frequência relativa. Voltando a tabela 7, fazemos o seguinte questionamento:

Tabela 8 – Tabela 7 novamente

Preço do kg do Arroz ( $x_i$ )	Número de Estabelecimentos ( $f_i$ )	fr	Fi	Fr	$x_i \cdot f_i$
2,00	2	10,0%	2	10,0%	4,00
2,05	1	5,0%	3	15,0%	2,05
2,09	1	5,0%	4	20,0%	2,09
2,10	6	30,0%	10	50,0%	12,60
2,15	3	15,0%	13	65,0%	6,45
2,20	4	20,0%	17	85,0%	8,80
2,25	1	5,0%	18	90,0%	2,25
2,30	2	10,0%	20	100,0%	4,60
Total	20	100,0%	—	—	42,84

De acordo com a tabela, qual a probabilidade de se escolher aleatoriamente um estabelecimento com o menor preço? Essa pergunta deve ser passada para a turma e depois de alguns minutos a resolução:

O espaço amostral são todos os estabelecimentos, então  $n(S) = 20$ , o evento menor preço tem dois estabelecimentos que não vamos citar o nome, mas em sala de aula eles foram observados, logo  $n(A) = 2$ . Assim a probabilidade é dada por:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P = \frac{2}{20} \Rightarrow P = \frac{1}{10} \times 100 \Rightarrow P = \frac{100}{10} \Rightarrow P = 10\% .$$

A pergunta que deve ser levantada para a turma é: Esse resultado já era esperado? É esperado que alguns alunos observem que a frequência relativa dos estabelecimentos com menor preço também é 10%. Muitos, senão todos os alunos poderão concluir e perguntar: professor, então a probabilidade e a frequência relativa são iguais? Antes de responder o ideal é mostrar outra situação em que isso não acontece, vejamos:

Um dado de 6 faces numeradas de 1 a 6 todas idênticas e não viciado é lançado duas vezes, ou seja, esse é o total de vezes que ele foi arremessado e nas duas oportunidades o resultado foi 1, qual a frequência relativa do resultado 1. A definição de frequência relativa é a razão entre a frequência absoluta e o total, nesse caso ficaria:

$$f_r = \frac{f_i}{T} \Rightarrow f_r = \frac{2}{2} \Rightarrow f_r = 1 \times 100 \Rightarrow f_r = 100\% .$$

Se a frequência relativa for igual à probabilidade, então a probabilidade do resultado ser 1 no lançamento de um dado é 100%? Vamos agora calcular essa probabilidade:  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{1\}$ , então temos:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P = \frac{1}{6} \Rightarrow P = \frac{1}{6} \times 100 \Rightarrow P = \frac{100}{6} \Rightarrow P \cong 16,67\% .$$

Alguns vão dizer que não estão entendendo mais nada, nesse momento é importante continuar o exemplo: O dado agora é lançado 100 vezes e dessas 100 vezes saiu 1 em 22 ocasiões, então como ficaria a frequência relativa novamente?

$$f_r = \frac{f_i}{T} \Rightarrow f_r = \frac{22}{100} \times 100 \Rightarrow f_r = 22\% .$$

Antes que alguém diga alguma coisa, finalizaremos lançando este mesmo dado 100.000 vezes, dentre os quais 16.656, resultou em 1. Nesse momento vários alunos vão dizer que isso não existe, que ninguém vai fazer isso. Colocando um pouco de humor no problema, podemos afirmar que um funcionário de um cassino em Las Vegas fez as seguintes experiências. Agora calculando realmente a frequência relativa temos:

$$f_r = \frac{f_i}{T} \Rightarrow f_r = \frac{16.656}{100.000} \times 100 \Rightarrow f_r = \frac{16.656}{100.0} \Rightarrow f_r \cong 16,66\% .$$

Comparando esse resultado com a probabilidade  $P \cong 16,67\%$ , o que podemos concluir sobre a relação entre frequência absoluta e probabilidade? Se alguém responder corretamente, ótimo, ou seja, com uma enorme quantidade de experimentos a frequência relativa pode ser equivalente à probabilidade. Mas e no início, por que deu exatamente igual? Algum aluno pode perguntar. A resposta é simples, todos os estabelecimentos formam um espaço amostral equiprovável, ou seja, todos tem a mesma chance de ser escolhido, mas se fizéssemos como no dado, vários sorteios, a frequência relativa só iria se aproximar da probabilidade se realizassem uma quantidade muito grande de sorteios.

Uma atividade para a turma seria utilizando a tabela 5. Qual a probabilidade de hoje no cardápio ser a merenda modal (da moda)?

Pela tabela 6 temos um total de 40 dias, e nesses 40 dias foram servidos “bat-gut” com bolacha nove vezes, então a frequência absoluta é nove, logo a frequência relativa dada na tabela é de 22,5%. Agora façamos com que todas as merendas juntas componham um espaço amostral equiprovável, ou seja, eles tenham a mesma chance de ocorrer, então a conjunto  $S$  tem nove elementos, logo  $n(S) = 9$  e o “bat-gut” com bolacha representa um elemento desse espaço amostral, logo  $n(A) = 1$ , então a probabilidade é:

$$P = \frac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P = \frac{1}{9} \times 100 \Rightarrow P = \frac{100}{9} \Rightarrow P \cong 11,11\% .$$

Então podemos concluir que nessa tabela a frequência relativa não pode ser dada como a probabilidade, pois a quantidade de experimentos não é suficientemente grande, assim como nos dois primeiros casos do dado.

## **9. Avaliação Geral e Conclusões**

Na 11ª aula é o momento de avaliação, realizar uma atividade para verificar o aprendizado. Propus uma questão para a turma valendo 5 pontos envolvendo tudo que foi abordado e para os 5 pontos restantes eles deveriam trocar as pesquisas, dos itens da cesta básica, entre si para cada equipe elaborar uma tabela com um item da cesta determinado por escolha ou sorteio e entregar num outro momento. Atividades propostas pelo livro didático em sala e domiciliares, bem como o comportamento e a participação nas atividades propostas, também podem entrar na nota final, enfim, observar os alunos em todos os aspectos.

Com tudo que foi feito neste trabalho, minha prática docente ganhou muito no que diz respeito à pesquisa e interação dos alunos com o meio em que estão inseridos, espero poder realizar esse tipo de trabalho com outros conteúdos, pois percebi uma motivação bem maior dos alunos que participaram das pesquisas de campo e na escola, isso sem mencionar o nível de aprendizado que foi alcançado, pois com a aplicação da atividade avaliativa escrita, os alunos da turma que trabalhei essa metodologia tiveram resultados bem melhores que as demais.

## **10. Desdobramentos**

**10.1 Utilizar planilhas eletrônicas:** Dentro de algumas explicações, por exemplo, mostrar como se calcular o total e, além disso, ensinar para os alunos um pouco de planilhas eletrônicas. Para isso o professor precisa ter esse conhecimento e a escola precisa ter uma estrutura de laboratório de informática.

**10.2 Continuar os registros do cardápio:** Atribuir a uma das equipes a tarefa de continuar registrando o cardápio até o fim do ano letivo para então novamente fazer um comparativo entre a frequência relativa e a probabilidade, inclusive essa pesquisa deve servir para junto com o registro do cardápio do próximo ano letivo, melhorar ainda mais a pesquisa nas turmas de 3º ano seguinte;

**10.3 Registrar a popularidade do grêmio estudantil:** Da mesma forma que se tem as intenções de votos, pode-se fazer uma pesquisa bimestral para no fim do ano letivo construir um gráfico múltiplo de linha mostrando para a comunidade escolar o índice de satisfação com os colegas,

## REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, Contexto e Aplicações**. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010. p. 274 – 293.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: MEC, 1999. p.364 .

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**. 30 ed. São Paulo: Paz e Terra, 1996. p.26-32.

DANTAS, Carlos Alberto Barbosa. **Probabilidade: Um curso Introdutório**. 3 ed revista. Editora da Universidade de São Paulo, 2008 p. 15 – 56.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2010 p. 30 – 60.

PARRA, Cecília. Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. 2ª reimpressão Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

Sites:

<http://www.portalmec.com.br>.

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br>.

<http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/AndreiNi.html>.

<http://g1.globo.com/ceara/eleicoes/2012/noticia/2012/09/ines-tem-39-e-dr-washington-29-para-prefeito-de-caucaia-diz-ibope.html>.

<http://apps.tre-e.jus.br/tre/eleicoes/ele2012/resultados/MUNICIPIOS/CAUCAIA/CAUCAIA-RES-RESULTADO-TOTALIZACAO.PDF>.

<licita.seplag.ce.gov.br/pub/106047/ELIEZER%202008-%20MER.doc>.

## APÊNDICE

Questão para avaliação escrita dos conhecimentos desenvolvidos:

Anote todas as idades dos alunos da turma no quadro e peça para resolver cada um dos seguintes itens:

- a) escrevam todas essas informações em ordem crescente; (0,25)
- b) Faça uma tabela com as idades dos alunos calculando a frequência absoluta, relativa, absoluta acumulada, e relativa acumulada. (2,5)
- c) Faça o gráfico de colunas utilizando a frequência absoluta com referência; (1,25)
- d) Calcule a média aritmética, mediana e a moda desse conjunto de dados; (1,0)
- e) Qual a probabilidade de escolhendo um aluno ao acaso, de ele está na faixa etária que é de dezessete anos? (0,5)