Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Fabíolla dos Santos Andrade

Imagens digitais e matrizes: uma aplicação no Ensino Médio

Vitória da Conquista
2020

Fabíolla dos Santos Andrade

IMAGENS DIGITAIS E MATRIZES: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Fernando dos Santos Silva

Vitória da Conquista
2020

A567i Andrade, Fabíolla dos Santos.
Imagens digitais e matrizes: uma aplicação no ensino médio. / Fabíolla dos Santos Andrade, 2020.
92f. il.
Orientador (a): Dr. Fernando dos Santos Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista - BA, 2020.
Inclui referências. 74 - 77.
1. Matrizes. 2. Imagens digitais. 3. Sequência didática. I. Silva, Fernando dos Santos. II. Universidade Estadual Sudoeste da Bahia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Vitória da Conquista, III. T.

CDD: 512.9434

Catalogação na fonte: Juliana Teixeira de Assunção- CRB 5/1890
UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

Fabíolla dos Santos Andrade

IMAGENS DIGITAIS E MATRIZES: UMA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Fernando dos Santos Silva

Prof. Dr. Fernando dos Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia — UESB

Januario

Prof. Dr. Gilberto Januario
Universidade Federal de Ouro Preto — UFOP

Santana

Profª. Drª. Kátia Cristina Lima Santana
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia — UFRB

Vitória da Conquista – Ba, 24 de setembro de 2020

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida.

Ao meu esposo Iran Paulo, que sempre me apoiou e me incentivou, ajudando-me a conquistar forças para concluir este trabalho.

Aos meus filhos Letícia e Gustavo, pelo tempo de mãe que lhes foram privado.

Aos meus pais Antônio e Nilzete, que sempre acreditam em mim.

Aos meus amigos pelas orações.

Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT.

Aos colegas do Mestrado Profissional, pelo apoio durante a jornada de conclusão deste trabalho.

Aos alunos do 2º ano B, por aceitarem o desafio de participarem da atividade proposta.

Ao Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade pela oportunidade de realizar a pesquisa e por sempre confiar em meu trabalho.

A professora Ana Paula Perovano, pela dedicação, atenção e por todas as contribuições na elaboração desta dissertação.

Ao meu orientador, Dr. Fernando dos Santos Silva, pela paciência e dedicação destinados a mim.

Aos professores participantes da banca examinadora, que dividiram comigo este momento tão importante e esperado.

Resumo

ANDRADE, Fabíolla dos Santos. **Imagens digitais e matrizes: uma aplicação no Ensino Médio**. Vitória da Conquista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB-BA), 2020.

As imagens que estão na Internet ou as fotos postadas nas redes sociais são chamadas de imagens digitais. Uma imagem é considerada digital quando pode ser representada utilizando números. A Matemática tem um papel fundamental no processamento de imagens digitais, pois toda imagem digitalizada pode ser representada na forma de matriz na qual cada pixel que forma a imagem será representado por um elemento desta matriz. Dessa forma, podem ser feitas operações com as matrizes e perceber como estas operações modificam as imagens digitais. O objetivo deste trabalho é descrever a aplicação de uma proposta de ensino sobre o estudo de matrizes aplicada ao processamento de imagens digitais, para os alunos do Ensino Médio. Além disso, foram apresentados alguns conceitos importantes e necessários para a compreensão do processamento de imagens digitais. Dentre esses conceitos estão: a definição de imagem digital, os tipos de imagens no formato bitmap, como é a representação de uma imagem na forma matricial e como as operações com matrizes alteram uma imagem digital. Outro ponto relevante é a Decomposição por Valores Singulares, um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear, que dentre as inúmeras aplicações destacou-se a compressão de imagens digitais cujo o proposito é reduzir o espaço de armazenamento e acelerar a transmissão eletrônica das imagens. A escolha da escola e da turma para a plicação da sequência didática foi por ser a instituição que já lecionamos a disciplina Matemática, o Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade -Ba com a turma B do 2º ano do Ensino Médio. Por último foi descrito a experiência em sala de aula da aplicação de uma sequência didática intitulada “Imagens digitais e matrizes: uma aplicação no Ensino médio”, que mostra aos alunos a utilização do conteúdo de matrizes no processamento de imagens digitais binárias. Os dados da nossa pesquisa foram coletados a partir de observações feitas na pesquisa de campo. Como resultado da sequência apresentada destacou-se a participação dos alunos na realização das atividades proposta e a sua contribuição no processo de ensino da Matemática com o conteúdo de matrizes.

Palavras-chave: Matrizes. Imagens digitais. Sequência didática.

Abstract

ANDRADE, Fabíolla dos Santos. **How to Write a PROFMAT Dissertation**. Vitória da Conquista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB-BA), 2020.

The images that are on the Internet or the photos posted on social networks are called digital images. An image is considered digital when it can be represented using numbers. Mathematics has a fundamental role in the processing of digital images, since every digitized image can be represented in the form of a matrix in which each pixel that forms the image will be represented by an element of this matrix. In this way, operations can be performed with the matrices and understand how these operations modify digital images. The objective of this work is to describe the application of a teaching proposal on the study of matrices applied to the processing of digital images, for high school students. In addition, some important and necessary concepts for understanding digital image processing were presented. Among these concepts are: the definition of digital image, the types of images in bitmap format, how is the representation of an image in the matrix form and how operations with matrices change a digital image. Another relevant point is the Decomposition by Singular Values, one of the most important results of Linear Algebra, which among the numerous applications stood out the compression of digital images whose purpose is to reduce the storage space and speed up the electronic transmission of the images. The choice of the school and the class for the application of the didactic sequence was because it is the institution that we already teach the Mathematics discipline, the Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade -Ba with class B of the 2nd year of high school. Finally, the classroom experience of applying a didactic sequence entitled "Digital images and matrices: an application in high school" was described, which shows students the use of matrix content in the processing of binary digital images. Our survey data was collected from observations made in the field research. As a result of the sequence presented, the participation of students in carrying out the proposed activities and their contribution to the mathematics teaching process with the content of matrices stood out.

Keywords: Matrices. Digital images. Didactic sequence.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

A matemática está presente em vários momentos do nosso dia a dia, seja nas operações financeiras, nas formas dos objetos a nossa volta, nas medidas de comprimento, nas construções, na escola e em muitas outras situações nas quais desempenha um papel de fundamental importância.

Além de modelar fenômenos e problematizar questões, a matemática é uma ciência que contribui para o desenvolvimento do pensamento, amplia a crítica e nos leva a reflexões. De acordo com o PCNEM, a Matemática "contribui para o desenvolvimento do processo de pensamento e a obtenção de atitudes, desenvolve no estudante a capacidade de resolver problemas, analisar situações proporcionando a formação de uma visão ampla e científica da realidade" (BRASIL, 1998, p. 40). A matemática é considerada uma ciência de grande relevância, pois é utilizada em todas as atividades profissionais e em todas as áreas do conhecimento.

Nós professores de matemática, muitas vezes preparamos o roteiro de aula, nos empolgamos com a apresentação de um conteúdo que consideramos relevante e, de repente, nos encontramos em uma situação que nos deixa constrangidos quando somos questionados sobre a aplicabilidade de determinados conteúdos.

Alguns alunos não conseguem perceber onde certos conteúdos podem ser aplicados e qual a utilidade em estudá-los. Talvez a razão desta dificuldade seja porque alguns conceitos matemáticos não estão associados a determinados fenômenos naturais e sociais para serem compreendidos. Nem sempre é possível mostrar uma aplicação de forma contextualizada, porém a Matemática é essencial na "formação de todos os estudantes, pois contribui para uma visão de mundo, fortalecendo capacidades exigidas ao longo da vida social e profissional [...], sendo uma ciência com características próprias, tendo papel integrador junto as demais ciências da natureza" (BRASIL, 2002, p. 111).

Uma aplicação da computação gráfica, ainda pouco conhecida no ensino de matemática é o processamento de imagens digitais como recurso de ensino e aprendizagem de matrizes nas escolas. Se ampliarmos uma imagem na tela do computador ou celular iremos perceber que a mesma é formada por pequenos pontos, que são chamados de *pixels* e esses estão relacionados aos elementos de uma matriz. Uma imagem formada por 1080×600 *pixels*, significa que ela possui 1080 linhas e 600 colunas, ou seja, 648000 *pixels*.

O artigo "Matrizes e Imagens Digitais" de Pesco e Bortolossi (2013) nos mostra uma aplicação interessante que é o uso de matrizes no processamento de imagens digitais. É por meio destas operações com matrizes que um programa gráfico pode alterar uma imagem digital, mudando a posição, a escala e rotacionando a mesma.

Segundo Gonzalez e Woods (2010, p. 4-5), "uma imagem digital pode ser interpretada como uma matriz, desse modo cada elemento da matriz representa um pixel na imagem digital". Consequentemente, as operações feitas nas matrizes que representam imagens digitais, irão resultar em transformações na imagem digital.

Ao escolhermos o conteúdo de Matrizes, pensamos em elaborar atividades que estimulassem e facilitassem a apropriação significativa do conteúdo, estabelecendo assim a relação da teoria e da prática, com a intenção de contribuir com o ensino da Matemática.

Os jovens estão a cada dia mais ligados ao mundo digital, em especial às redes sociais nas quais são postadas e compartilhadas inúmeras imagens digitais. Associar as imagens digitais com matrizes é uma forma de mostrar a relação existente entre a disciplina matemática e a matemática presente em uma atividade do cotidiano dos alunos. A esse respeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, destacam que:

> Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver (BRASIL, 2006, p. 9).

Diante da explanação apresentada questionou-se: Em que medida uma sequência didática abordando a aplicação de Matrizes às imagens digitais contribui para o ensino de matemática para os alunos de uma turma do Ensino Médio?

A fim de responder esse questionamento o objetivo geral desse trabalho é descrever a aplicação de uma proposta de ensino sobre o estudo de matrizes aplicada ao processamento de imagens digitais, para os alunos do Ensino Médio.

Como objetivos específicos temos:

- Explorar os conceitos envolvendo matrizes apresentando uma interpretação onde cada matriz pode ser considerada uma imagem digital e vice-versa.

- Explorar os conceitos de Álgebra Linear envolvendo Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares para compreender o processo de compressão de imagens.

- Analisar como foi a aplicação de uma Sequência Didática com os alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Em minha prática como professora de Matemática, tenho observado que os livros didáticos para o 2º ano do Ensino Médio pouco exploram a aplicação de Matrizes. Nas poucas aplicações encontradas sobre matrizes, observamos sempre a utilização dessas em tabelas como as planilhas do Excel, tabelas de campeonato de futebol ou em tabelas de desempenho de notas dos estudantes. Porém, o conteúdo de matrizes possui várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Administração, Economia, Engenharia, Computação entre outros.

Como material de pesquisa e fundamentação teórica, utilizamos como principais referências: Pesco e Bortolossi (2013), Gonzalez e Woods (2010) e Gomes e Velho (1994).

Este trabalho possui o caráter da uma pesquisa qualitativa, pois segundo Bicudo, a maioria das investigações seguem procedimentos qualitativos, visto que "sempre buscam contextualizar o fenômeno investigado, a problemática levantada ou, ainda, a ocorrência de acontecimentos [...] e a descrição pormenorizada do percebido/observado"(BICUDO, 2014, p. 7).

Mostraremos neste trabalho o estudo sobre a utilização de matrizes no processamento de imagens digitais, com a finalidade de contribuir com o processo de ensino da matemática para os alunos. Mostraremos a relação existente entre imagens e matrizes, traremos uma aplicação de matrizes que é a Decomposição por Valores Singulares, responsável pela compressão de imagens e por último apresentaremos o relato da aplicação de uma sequência didática com os alunos do 2º ano do Ensino Médio.

O trabalho foi aplicado na turma B do 2º ano do Ensino Médio, período diurno, do Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade em Vitória da Conquista – Bahia, onde leciono Matemática desde 2007, como professora efetiva. Essa turma é composta por 39 discentes.

A escolha da turma para desenvolver o estudo se deu no início do ano letivo de 2020, ainda na Jornada Pedagógica, quando houve a divisão da carga horária e ficamos sabendo que lecionaria como professora desta turma de 2º ano. Durante a Jornada Pedagógica apresentamos o projeto para o corpo docente da escola, que aprovou e incentivou a aplicação do mesmo por se tratar de uma atividade pedagógica relevante em que serão abordados conceitos e definições matemáticas para a compreensão e interpretação de fatos do cotidiano dos estudantes.

Após a apresentação do nosso projeto de pesquisa na Jornada Pedagógica, solicitamos da direção da escola a autorização para realização das atividades propostas. Como os alunos do 2º ano são menores de idade, solicitamos também uma autorização dos pais, conforme o modelo do apêndice E, para que os alunos pudessem participar da nossa pesquisa.

Os dados obtidos do nosso trabalho sugerem que o processamento de imagens digitais binárias contribui significativamente no processo de ensino de Matrizes para os alunos do 2º ano do Ensino Médio.

O trabalho está dividido em cinco capítulos, descritos a seguir:

Capítulo 1, apresentaremos um breve panorama histórico a respeito das Imagens Digitais, o que são imagens digitais e qual a sua relação com a Matemática, em especial com Matrizes. Mostraremos também como as operações aplicadas às matrizes modificam as imagens digitais e como esse conteúdo vem sendo discutido no Brasil.

Capítulo 2, baseado na literatura disponível, apresenta um breve histórico a respeito da origem das Matrizes, a sua definição, as principais operações e alguns tipos de matrizes. Também será exposto uma aplicação das imagens digitais utilizando a Decomposição por Valores Singulares (DVS). Dedicaremos um espaço para mostrar quais as possibilidades de Ensino de Matrizes e as razões para utilizá-las em sala de aula. Terminaremos citando outros trabalhos já apresentados sobre aplicabilidade do uso de matrizes.

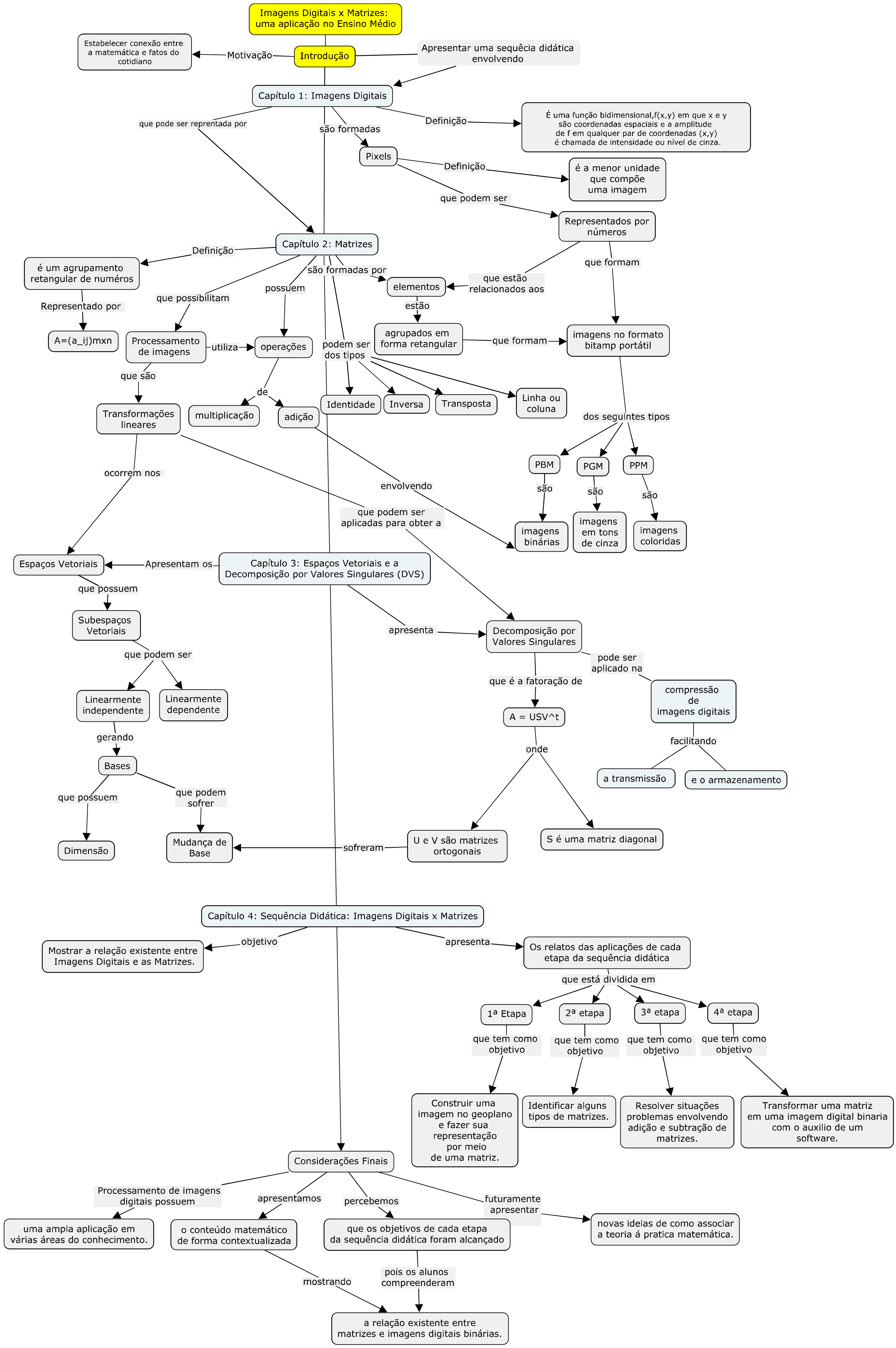
Capítulo 3, mostraremos algumas notações, definições e resultados importantes que serão utilizadas na demonstração do Teorema da Decomposição por Valores Singulares, a qual possui diversas aplicações, entre elas a otimização do armazenamento de imagens digitais. Essa decomposição consiste na fatoração $A = U\Sigma V^t$. Após a demonstração do Teorema da Decomposição em Valores Singulares traremos um exemplo passo a passo de como é feita a fatoração de uma matriz.

Capítulo 4, apresentamos a execução da sequência didática na aulas, como ocorreram as aplicações das etapas, bem como a opinião dos alunos diante da atividades propostas.

No último capítulo apresentamos a conclusão com as considerações finais sobre todo o trabalho realizado, que nos mostra a importância das Matrizes na computação gráfica e o relato do que foi observado após a aplicação da sequência didática.

Após as referências teremos os apêndices com toda a sequência didática disponível para que outros educadores possam replicar as atividades aqui relatadas.

Ao final de cada capítulo traremos um mapa conceitual, que é uma estrutura gráfica na qual apresentamos, de forma esquematizada, os conteúdos abordados, estabelecendo uma ligação entre eles, facilitando assim a compreensão do trabalho.



Imagens Digitais x Matrizes: uma aplicação no Ensino Médio
Introdução
Motivação
Estabelecer conexão entre a matemática e fatos do cotidiano
Apresentar uma sequêcia didática envolvendo
Capítulo 1: Imagens Digitais
que pode ser reprentada por
são formadas
Definição
É uma função bidimensional,f(x,y) em que x e y são coordenadas espaciais e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x,y) é chamada de intensidade ou nível de cinza.
Pixels
Definição
é a menor unidade que compõe uma imagem
que podem ser
Representados por números
que formam
Capítulo 2: Matrizes
Definição
é um agrupamento retangular de numéros
Representado por
A=(a_ij)mxn
que possibilitam
Processamento de imagens
utiliza
operações
possuem
são formadas por
elementos
que estão relacionados aos
estão
agrupados em forma retangular
que formam
imagens no formato bitamp portátil
podem ser dos tipos
Identidade
Inversa
Transposta
Linha ou coluna
que são
Transformações lineares
de
multiplicação
adição
dos seguintes tipos
PBM
PGM
PPM
são
são
são
imagens binárias
imagens em tons de cinza
imagens coloridas
envolvendo
ocorrem nos
que podem ser aplicadas para obter a
Espaços Vetoriais
Apresentam os
Capítulo 3: Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares (DVS)
que possuem
Subespaços Vetoriais
que podem ser
Linearmente independente
Linearmente dependente
gerando
Bases
que possuem
que podem sofrer
Dimensão
Mudança de Base
apresenta
Decomposição por Valores Singulares
pode ser aplicado na
compressão de imagens digitais
facilitando
a transmissão
e o armazenamento
que é a fatoração de
A = USV^t
onde
U e V são matrizes ortogonais
S é uma matriz diagonal
sofreram
Capítulo 4: Sequência Didática: Imagens Digitais x Matrizes
objetivo
Mostrar a relação existente entre Imagens Digitais e as Matrizes.
apresenta
Os relatos das aplicações de cada etapa da sequência didática
que está dividida em
1ª Etapa
2ª etapa
3ª etapa
4ª etapa
que tem como objetivo
que tem como objetivo
que tem como objetivo
que tem como objetivo
Construir uma imagem no geoplano e fazer sua representação por meio de uma matriz.
Identificar alguns tipos de matrizes.
Resolver situações problemas envolvendo adição e subtração de matrizes.
Transformar uma matriz em uma imagem digital binaria com o auxilio de um software.
Considerações Finais
Processamento de imagens digitais possuem
uma ampla aplicação em várias áreas do conhecimento.
apresentamos
o conteúdo matemático de forma contextualizada
percebemos
que os objetivos de cada etapa da sequência didática foram alcançado
futuramente apresentar
novas ideias de como associar a teoria á pratica matemática.
mostrando
pois os alunos compreenderam
a relação existente entre matrizes e imagens digitais binárias.

1 Imagens Digitais

As imagens vistas na tela do computador são exemplos de imagens digitais. Essas podem ser convertidas em matrizes, e cada elemento desta matriz é denominada de *pixel*. *Pixel* é um estrangeirismo originário do inglês, que é a junção de *picture e element*, ou seja, elemento de imagem (GONZALEZ; WOODS, 2010). Quando representamos uma imagem por meio de matrizes, podemos então realizar operações nessas matrizes e ver de que maneira essas operações afetam a imagem.

Ao longo deste capítulo apresentaremos os conceitos necessários para a compreensão do processamento de imagens digitais. Veremos também um breve histórico sobre imagens digitais, a sua definição, a relação entre imagens digitais e matrizes e outros estudos relacionados ao tema que foram discutidos no Brasil.

1.1 O que são imagens digitais

Uma imagem digital é aquela que pode ser representada por números. Segundo Gonzalez e Woods (2010):

> Uma imagem pode ser definida como uma função bidimensional, $f(x, y)$, em que x e y são coordenadas espaciais (plano), e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x, y) é chamada de intensidade ou nível de cinza da imagem nesse ponto. Quando x, y e os valores de intensidade de f são quantidades finitas e discretas, chamamos de imagem digital (GONZALEZ; WOODS, 2010, p. 1).

Essas imagens são formadas por pontos, que são chamados de *pixel*. *Pixel* é o menor elemento que forma uma imagem digital, sendo o conjunto de milhares de *pixels* que compõem uma imagem. Quanto maior o numero de *pixel*, maior será o número de detalhes disponíveis no momento da captura da foto, permitindo uma melhor resolução de imagem no momento da sua impressão.

Uma imagem digital pode ser representada por uma matriz, em que cada pixel da imagem será representado por um elemento da matriz. "Os elementos dessa imagem digital são chamados de *elementos da imagem, elementos da figura , "pixels" ou "pels"*, esses dois últimos, abreviações de "picture elements"(elementos da figura)" (GONZALEZ; WOODS, 2010, p. 36).

1.2 Breve panorama histórico sobre Imagens Digitais

De acordo Gonzalez e Woods (2010), as primeiras imagens digitais começaram a ser aplicadas no início do século XIX, quando buscavam-se meios de aperfeiçoar a qualidade das impressões das imagens transmitidas por cabos submarinos entre Londres e Nova Iorque através do sistema Bartlane. O sistema Bartlane é um equipamento especializado de impressão, que codificava as imagens para transmissão a cabo, as quais eram então reconstruídas no terminal receptor. No início da década de 20, o sistema Bartlane conseguiu reduzir o tempo de transmissão de uma imagem que levava cerca de sete dias para apenas três horas. A Figura 1.1 foi uma das primeiras imagens digitais transmitidas utilizando o sistema de cabo submarino.

Figura 1.1: Fotografia digital produzida em 1921

Fonte: Gonzalez e Woods (2010, p. 2).

O sistema Bartlane codificava uma imagem em cinco níveis de intensidade distintos, este é um dos motivos da baixa qualidade e resolução percebida na Figura 1.1, porém essa capacidade seria expandida, já em 1929, para 15 níveis de intensidade. A Figura 1.2 nos mostra uma imagem que foi codificada com 15 níveis, podemos perceber uma melhora na sua qualidade.

Figura 1.2: Fotografia digital produzida em 1929

Fonte: Gonzalez e Woods (2010, p. 2).

Vale mencionar que a área de Processamento de Imagens passou por um grande avanço depois de três décadas, quando surgiram os primeiros computadores de grande porte e o início do programa espacial norte-americano. Em 1964 no Jet Propulsion Laboratory (Pasadena, California - EUA) começaram o uso de técnicas computacionais para o melhoramento de imagens, quando as imagens da lua transmitidas pela sonda *Ranger 7* eram processadas por um computador e eram corrigidas as distorções feitas pela câmera de TV acoplada à sonda. Segundo Gonzalez e Woods (2010), as técnicas utilizadas serviram de base para o aprimoramento de realce e restauração de imagens que foram feitas mais tarde em outros programas espaciais, como as expedições tripuladas da série Apollo.

De 1964 aos dias atuais, a área de processamento de imagens vem passando por um grande avanço e suas aplicações são possíveis em todas as áreas da atividade humana.

Na área médica, o uso de imagens no diagnóstico tornou-se comum e os avanços em processamento de imagens vêm possibilitando uma maior facilidade de interpretação de imagens radiográficas. Na área biológica, a capacidade de processar automaticamente imagens obtidas de microscópios, facilita muito a execução de tarefas laboratoriais com alto grau de precisão e repetibilidade. Nas áreas da Geografia, Sensoriamento Remoto, Geoprocessamento e Meteorologia, as imagens capturadas por satélites são processadas e interpretadas facilmente contribuindo nos trabalhos nestas áreas. Além desta áreas citadas, inúmeras outras também vem sendo beneficiadas com o avanço no processamento de imagens digitais, como a área da Astronomia, Segurança, Publicidade e Direito.

1.3 Imagens Digitais no formato bitmap portátil

A imagem digital é a representação numérica de uma imagem bidimensional, constituída por uma matriz binária (composta por zero e um) de modo a permitir seu processamento, sua transferência, sua impressão ou sua reprodução.

De acordo com Filho e Neto (1999), as imagens no formato PBM (Portable bitmap) foram inventadas por Jef Poskanzer na década de 1980. Esse modelo de imagem permitia que bitmaps monocromáticos fossem transmitidos em uma mensagem de e-mail como texto ASCII (do inglês *American Standard Code for Information Interchange*; Código Padrão Americano para o Intercâmbio de Informação).

Segundo Lopes (2003), Poskanzer desenvolveu a primeira biblioteca de ferramentas para lidar com o formato PBM, a Pbmplus, em 1988. Nela continha principalmente ferramentas para converter entre PBM e outros formatos gráficos. No final de 1988, a Poskanzer havia desenvolvido os formatos PGM (Portable Grey Map) e PPM (Portable Pixel Map).

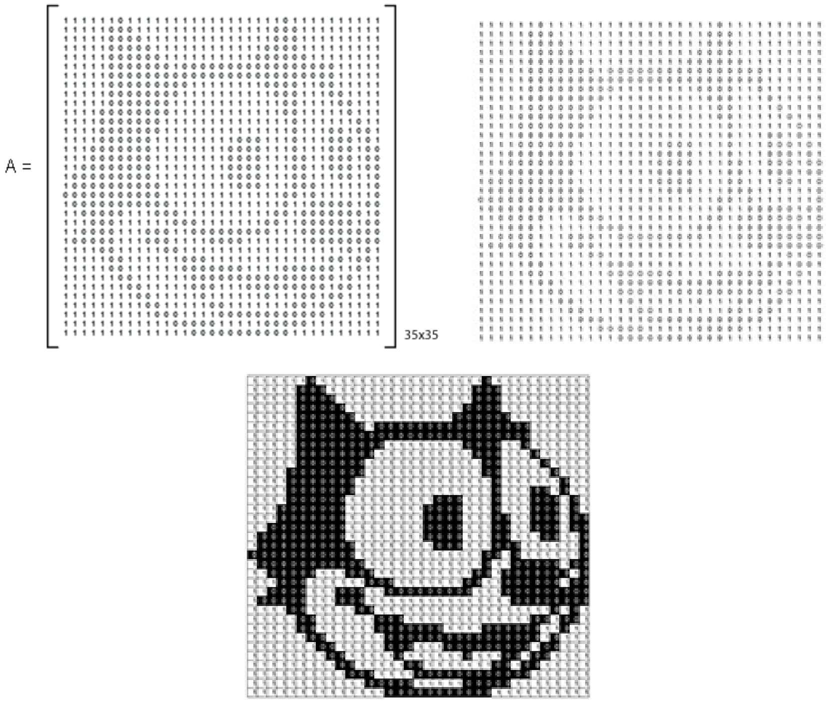
Esses três tipos de imagens ficaram conhecidas como imagens no formato PBM, ou apenas imagem *bitmap*. Bitmap, como diz sua tradução literal do inglês, é um "mapa de bits", ou seja, uma representação visual formada por um conjunto de unidades de informação chamadas *bits* (binary digits), ou ainda, uma imagem formada por um aglomerado de pontos de luz, esses conhecidos como *pixels*.

Uma imagem digital pode ser formada apenas pelas cores branco e preto, que são as imagens binárias e essas estão no formato PBM. Uma imagem binária pode ser associada a uma matriz, por meio de um algoritmo computacional. Geralmente é utilizado o número 1 para a cor branco e o número 0 para a cor preto. De acordo Gonzalez e Woods:

> Quando lidamos com imagens binárias, podemos pensar em grupos de pixels de frente (valor 1) e de fundo (valor 0). Ao lidar com imagens binárias, costuma-se referir a união, interseção e complemento como as operações lógicas OU (OR), E (AND) e NÃO (NOT), onde "lógicas" provêm da lógica matemática na qual 1 e 0 expressam verdadeiro e falso, respectivamente (GONZALEZ; WOODS, 2010, p. 53).

A Figura 1.3 nos mostra a representação matricial do gato Felix, que é uma imagem binária, na qual são utilizados zeros e uns (*bits*) como elementos da matriz.

Figura 1.3: Imagem no formato PBM



Fonte: Pesco e Bortolossi (2013, p. 45).

Além das imagens em preto e branco, temos também imagens em tons de cinza. Essas imagens estão no formato PGM. Gonzalez e Woods (2010) afirmam que uma imagem em escalas de cinza também pode ser representada por uma matriz. Neste caso, cada pixel irá representar uma tonalidade de cinza. Um *pixel* é formado por 8 *bits* e cada *bit*, usa os valores 0 e 1 para formar uma imagem. O número total de cores de uma imagem é determinado pelo número de *bits* utilizados para representar cada cor. Essa quantidade de cores é calculado pela formula 2^n, onde n é a quantidade de *bits*. Como um *pixel* contém 8 *bits*, então $2^8 = 256$, logo teremos 256 tonalidades de cinza, essas tonalidades variam de 0 (cor com menor intensidade, preto) e 255 (cor com maior intensidade, branco). A Figura 1.4 nos mostra uma imagem em tons de cinza.

Figura 1.4: Imagem no formato PGM

Fonte: Acervo da autora (2020).

As imagens coloridas também podem ser representadas por matrizes (GONZALEZ; WOODS, 2010). Para representar uma imagem colorida, podemos utilizar o sistema RGB (Red - Green - Blue). Nesse sistema a cor é definida pela quantidade de vermelho (Red), pela quantidade de verde (Green) e pela quantidade de azul (Blue) que compõe a imagem. Estas imagens estão no formato PPM. Cada *pixel* de uma imagem colorida tem uma variação de intensidade de cada uma das cores (vermelho - verde - azul) igual a $2^8 = 256$, logo poderemos ter $256^3 = 16777216$ cores diferentes. Cada uma dessas cores é representada por uma matriz. A Figura 1.5 nos mostra uma imagem no formato PPM.

Figura 1.5: Imagem no formato PPM

Fonte: Acervo da autora (2020).

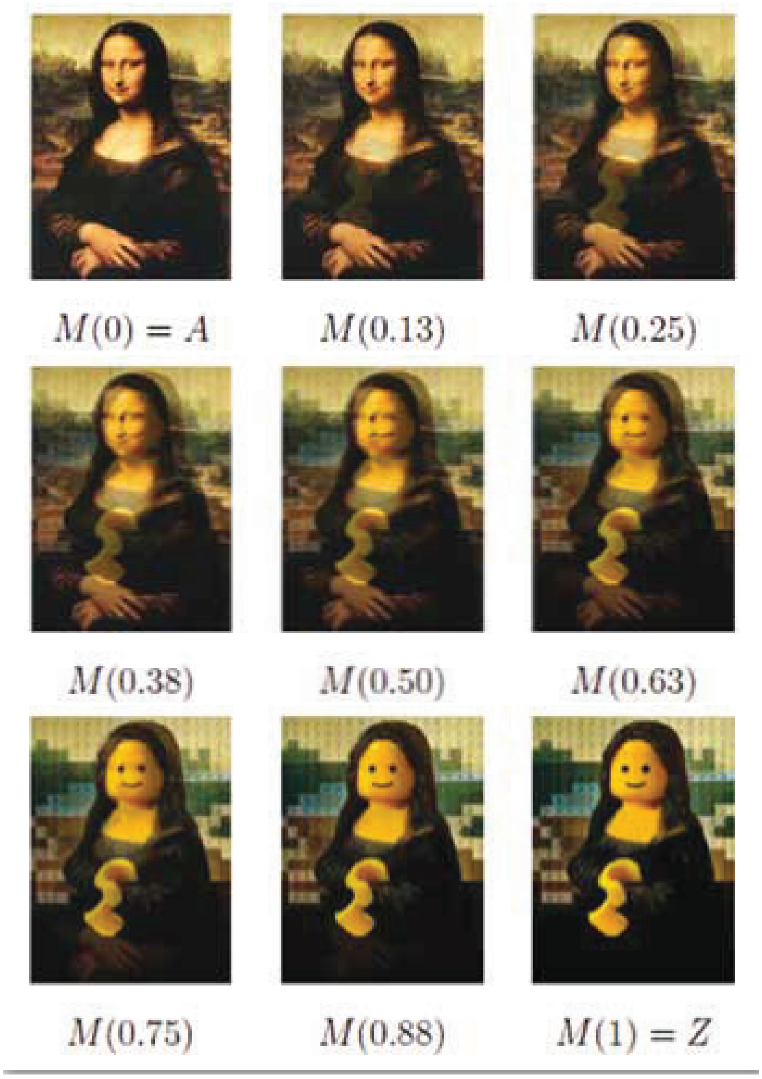
1.4 Exemplo de processamento de imagens digitais

As operações com imagens digitais desempenham um papel importante na computação gráfica. Consideraremos operações entre imagens digitais a aplicação de operações aritméticas e lógicas, que são feitas pixel a pixel, em que o resultado destas operações sempre resulta em uma nova imagem digital.

No artigo escrito por Pesco e Bortolossi (2013) podemos ver um exemplo de como essas operações realizadas em matrizes podem alterar completamente uma imagem.

A Figura 1.6 nos mostra uma imagem com efeito de transição, para obter este efeito utilizamos duas imagens de mesmo tamanho, a multiplicação por um escalar e a adição de matrizes, e com essas operações é possível obter este tipo de transformação.

Figura 1.6: O retrato da Mona Lisa na sua versão Lego



Fonte: Pesco e Bortolossi (2013, p. 46).

1.5 Representação Matricial

Segundo Gomes e Velho (1994), a representação de uma imagem por uma matriz $m \times n$ possibilita o uso de técnicas de álgebra linear no processamento de imagens.

Uma matriz (C_{ij}) de ordem $m \times n$ que representa uma imagem digital é chamada de resolução geométrica da imagem. Cada *pixel* da imagem tem coordenadas inteiras (i,j) que estão relacionados com um elemento da matriz.

Na Figura 1.7 podemos ver como é a representação de uma imagem em forma matricial.

A Figura 1.8 mostra a convenção dos eixos para a representação de imagens digitais.

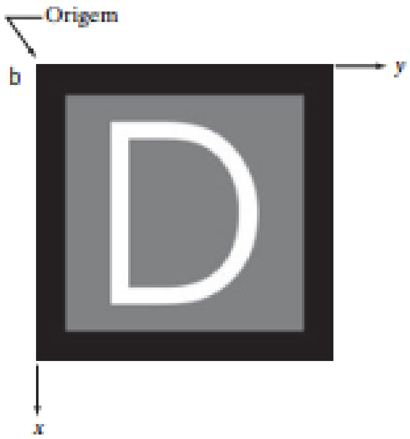
Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala de uma imagem, na verdade está mudando a posição dos *pixels* que a forma. Em computação gráfica isso tudo é feito por operações com matrizes, a partir das transformações geométricas,

Figura 1.7: Representação de uma matriz

$$f(x,y) = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton e Rorres (2012, p. 26)

Figura 1.8: Convenção dos eixos



Fonte: Gonzalez e Woods (2010, p. 36).

que são: rotação, reflexão, escala e translação.

O espaço de imagens $I = \{f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow C\}$ possui uma estrutura de espaço vetorial, com as operações de soma, $f+g$, e produto de uma função por um escalar λf:

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

$$(\lambda f)(x,y) = \lambda . f(x,y).$$

Quando representamos uma imagem na forma matricial, as operações acima ficam reduzidas às operações de adição, e produto de uma matriz, com entradas vetoriais, por um escalar, que são comuns na álgebra de matrizes.

Ápos apresentarmos a relação entre o processamento de imagens digitais e as matrizes, traremos algumas publicações que mostram uma abordagem desse conteúdo de forma diferente da que foi proposta neste trabalho.

1.6 Estudos correlatos no Brasil

Existe uma vasta área de aplicação do processamento de imagens digitais no dia a dia, o que torna um amplo e promissor campo para novos estudos. Há um crescente interesse de pesquisadores brasileiros da área de Educação Matemática em refletir, preparar e formular diferentes tipos de metodologias a respeito do ensino e da aprendizagem de matrizes relacionado a imagens digitais.

Podemos perceber este interesse em algumas publicações relacionadas ao conteúdo, como o artigo intitulado “Imagens Digitais e Matrizes”, publicado por Pesco e Bortolossi (2013), que nos mostra de uma maneira interessante o processamento de imagens digitais no tocante a matrizes, com enfoque em professores e alunos do ensino médio. Nele podemos ver como uma imagem digital pode ser representada por meio de uma matriz e como as operações efetuadas nessas matrizes modificam as imagens.

Uma outra aplicação de matrizes encontrada neste artigo e bastante utilizada no processamento de imagens é a Decomposição em Valores Singulares, no qual é possível comprimir imagens utilizando a habilidade de decompor uma matriz como produto de matrizes com estruturas especiais. O referido artigo foi o que motivou o presente trabalho apresentando modelos elementares na aplicação de matrizes no processamento de imagens digitais.

Na dissertação intitulada “Processamento de Imagens Digitais e o Ensino de Matrizes”, o autor apresenta uma sequência didática mostrando a relação entre as imagens digitais e as matrizes através de uma aplicação prática utilizando como ferramenta o software MATLAB. Segundo o autor:

> Esta sequência de aulas tem como principal objetivo transmitir ao professor e ao aluno do ensino médio a riqueza de um conteúdo vasto, atual e que envolve o conhecimento de matrizes, assunto pouco explorado no que diz respeito as suas aplicações, promovendo aprendizado através de situações-problema, mostrando como este conteúdo se insere nas questões do nosso cotidiano além de melhorar a percepção do aluno e estimular a busca por novos caminhos para se ensinar o conteúdo matrizes (SILVA, 2014, p. 36).

A sequência elaborada por Silva (2014) sugere sete horas aula no laboratório de informática para que sua aplicação seja possível. Ao final dessas aulas espera-se que os alunos “tenham entendido as definições e saibam utiliza-las para interpretar situações-problemas envolvendo o tema, mostrando domínio nos cálculos e o uso correto do MATLAB”.

Sabemos que os professores sempre estão em busca de novos métodos para dinamizar o ensino da Matemática e a utilização de um software pode ser um estímulo para os alunos, pois, segundo Silva (2014, p.48), “os alunos são levados de uma maneira rápida a tentar coisas diferentes, a novas descobertas, a observar propriedades, a testar parâmetros, a investigar o conteúdo ministrado pelo professor[...]”.

Uma outra dissertação, intitulada “Uma experiência didática com dobradura de papel e geometria das transformações no plano no ensino de matrizes no Ensino Médio”, Freire (2018) relata sua experiência na aplicação de uma sequência didática que traz dobraduras de malhas quadriculadas quadradas, impressas em papel vegetal, como modelo concreto para reflexões, podendo conectar a álgebra das matrizes quadradas com as transformações geométricas no plano. No referido trabalho Freire (2018) afirma que:

> Fizemos a ponte entre a matemática curricular escolar e a matemática científica, uma vez que os alunos puderam vislumbrar uma pequena parcela da aplicação da teoria das matrizes que está associada à imagem digital encontrada nas telas dos celulares, tablets, computadores, notebooks e televisores, tão presentes e marcantes em nossas vidas (FREIRE, 2018, p. 66).

Ao mostrar uma aplicação que consegue relacionar matrizes com imagens digitais através das transformações geométricas feitas no papel vegetal, os alunos puderam perceber que as imagens observadas no celular ou televisão podem sofrer transformações por meio das operações com matrizes e assim compreender que a Matemática está presente em vários momentos do nosso dia e não é uma disciplina isolada.

Em uma publicação feita no Boletim online de Educação Matemática (Revista BOEM), com o título "Produções criativas de matrizes e de transformações geométricas com metodologias ativas", Azevedo e Maltempi (2019) propõe o estudo de matrizes com foco em transformação geométricas com a utilização de material concreto e das metodologias ativas, destacando o estudo das produções criativas das matrizes. Nesse trabalho os alunos criaram imagens de personagens e foram incentivados a pensar, argumentar e analisar as transformações geométricas das figuras associadas as suas matrizes correspondentes a partir de questões norteadoras. Os autores Azevedo e Maltempi (2019) afirmam que:

> O propósito de construir personagens em forma de matrizes não era deixar o processo de aprendizagem "bonitinho" ou superficial em termos conceituais e procedimentais. Mas, objetivamos oportunizar aos alunos a compreensão das ideias matemáticas específicas sobre matrizes e suas transformações, dando-lhes a chance de escolher e inventar desenhos de seu interesse pessoal e estabelecer relações entre o conteúdo matemático, com autonomia e criatividade (AZEVEDO; MALTEMPI, 2019, p. 19).

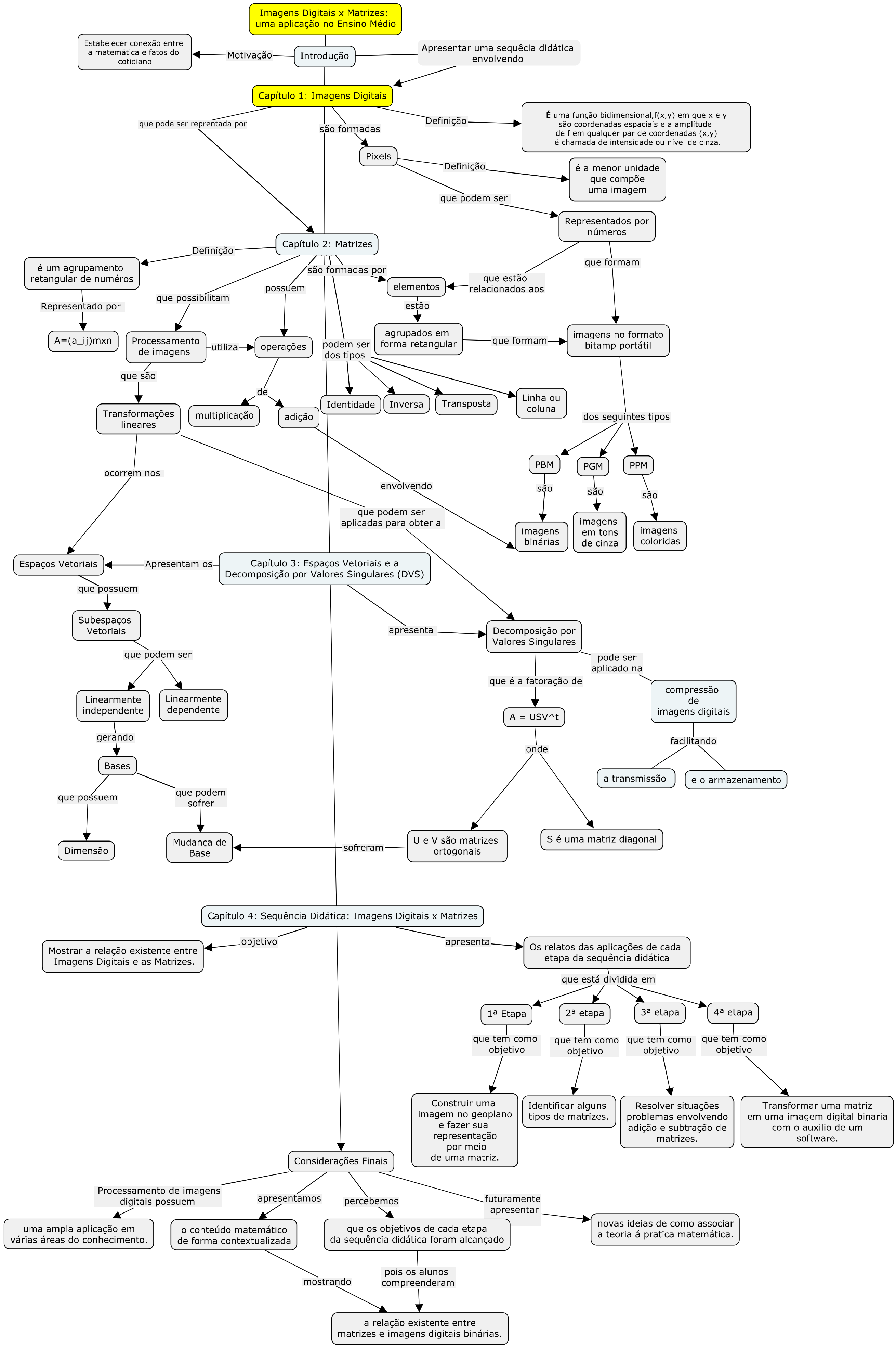
Quando os alunos conseguiram associar os personagens criados por eles ao estudo de matrizes, o processo de aprendizagem se tornou mais prazeroso e dinâmico, pois segundo Azevedo e Maltempi (2019), o estudo de matriz, não se resumiu a procedimentos e possibilitou a comunicação, a colaboração e a criatividade dos alunos.

O propósito desta dissertação aqui desenvolvida é mostrar a utilização de matrizes no processamento de imagens digitais, além disso trouxemos o relato da experiência na aplicação de uma sequência didática utilizando como material concreto um geoplano magnético, facilitando assim a compreensão da relação existente entre as imagens binárias e as matrizes.

Ao longo deste capítulo foram apresentados conceitos básicos para compreensão de imagens digitais e a sua relação com matrizes. Percebemos que os trabalhos relacionados a área de processamento digital de imagens vem crescendo em nosso país, com um aumento significativo dos estudos envolvendo matrizes.

No capítulo seguinte veremos a definição de matrizes, algumas propriedades e de que maneira as operações realizadas nas matrizes poderão afetar as imagens. Traremos ainda outras possibilidades de ensino de matrizes relatados em trabalho acadêmicos publicados no Brasil.

O mapa conceitual a seguir apresenta os principais conceitos e a relação existente entre eles, permitindo, assim, uma melhor compreensão sobre as imagens digitais.


Imagens Digitais x Matrizes: uma aplicação no Ensino Médio
Introdução
Motivação
Estabelecer conexão entre a matemática e fatos do cotidiano
Apresentar uma sequêcia didática envolvendo
Capítulo 1: Imagens Digitais
Definição
É uma função bidimensional,f(x,y) em que x e y são coordenadas espaciais e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x,y) é chamada de intensidade ou nível de cinza.
que pode ser reprentada por
são formadas
Pixels
Definição
é a menor unidade que compõe uma imagem
que podem ser
Representados por números
que formam
imagens no formato bitamp portátil
dos seguintes tipos
PBM
PGM
PPM
são
são
são
imagens binárias
imagens em tons de cinza
imagens coloridas
que estão relacionados aos
Capítulo 2: Matrizes
Definição
é um agrupamento retangular de números
Representado por
A=(a_ij)mxn
são formadas por
elementos
estão
agrupados em forma retangular
que formam
que possibilitam
Processamento de imagens
utiliza
operações
possuem
de
multiplicação
adição
envolvendo
que são
Transformações lineares
podem ser dos tipos
Identidade
Inversa
Transposta
Linha ou coluna
ocorrem nos
que podem ser aplicadas para obter a
Espaços Vetoriais
Apresentam os
Capítulo 3: Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares (DVS)
apresenta
Decomposição por Valores Singulares
pode ser aplicado na
compressão de imagens digitais
facilitando
a transmissão
e o armazenamento
que é a fatoração de
A = USV^t
onde
U e V são matrizes ortogonais
S é uma matriz diagonal
sofreram
que possuem
Subespaços Vetoriais
que podem ser
Linearmente independente
Linearmente dependente
gerando
Bases
que possuem
Dimensão
que podem sofrer
Mudança de Base
Capítulo 4: Sequência Didática: Imagens Digitais x Matrizes
objetivo
Mostrar a relação existente entre Imagens Digitais e as Matrizes.
apresenta
Os relatos das aplicações de cada etapa da sequência didática
que está dividida em
1ª Etapa
2ª etapa
3ª etapa
4ª etapa
que tem como objetivo
que tem como objetivo
que tem como objetivo
que tem como objetivo
Construir uma imagem no geoplano e fazer sua representação por meio de uma matriz.
Identificar alguns tipos de matrizes.
Resolver situações problemas envolvendo adição e subtração de matrizes.
Transformar uma matriz em uma imagem digital binaria com o auxilio de um software.
Considerações Finais
Processamento de imagens digitais possuem
uma ampla aplicação em várias áreas do conhecimento.
apresentamos
o conteúdo matemático de forma contextualizada
percebemos
que os objetivos de cada etapa da sequência didática foram alcançado
futuramente apresentar
novas ideias de como associar a teoria á pratica matemática.
mostrando
pois os alunos compreenderam
a relação existente entre matrizes e imagens digitais binárias.

2 Matrizes

Neste capítulo abordaremos aspectos da história das Matrizes, sua definição, alguns tipos de matrizes e suas principais operações. Mostraremos também o resultado dessas operações no processamento de imagens digitais binárias. O objetivo deste capítulo é apresentar as definições e operações necessárias para o entendimento do processamento de imagens digitais binárias.

2.1 A história das Matrizes

As matrizes e determinantes tiveram seus primeiros vestígios no século II a.C., quando os chineses já resolviam situações problemas recorrendo ao que chamamos hoje de sistemas de equações lineares, utilizando processos em que estavam implícita a idéia de matriz. Conforme Anton e Rorres (2012), por um longo período as matrizes e determinantes permaneceram esquecidas, reaparecendo fortemente somente no século XVII.

O estudo sobre Matrizes é relativamente novo, tem um pouco mais de 150 anos. O primeiro a utilizar o nome matrizes foi James Joseph Sylvester, em 1850, porém ele não tinha a menor idéia de qualquer possível utilidade prática sobre matrizes, eram vistas apenas como mero ingrediente dos determinantes. Alguns autores como Eves (2011) e Boyer (1974) apontam que o matemático inglês Arthur Cayley, numa memória de 1958, foi o primeiro a estudar as matrizes, porém a sua preocupação era com a forma e estrutura algébrica, foi ele quem introduziu os conceitos de soma, multiplicação entre matrizes e de matrizes por escalares.

Segundo Eves (2011), um dos primeiros estudos sobre a álgebra das matrizes foi realizado por Arthur Cayley e estava ligado à transformações lineares do tipo

$$x' = ax + by,$$

$$y' = cx + dy,$$

onde a, b, c, d são números reais, e que podem ser imaginadas como aplicações que levam o ponto (x,y) no ponto (x',y'). Logo, a transformação anterior fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a, b, c, d de modo que pode ser simbolizada pelo quadro

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

que chamamos *matriz*.

Foi ele também quem sugeriu a notação de barras verticais para representar o determinante de uma matriz ainda quando era estudante.

A teoria das matrizes possuem diversas aplicações. Em 1984 o irlandês Willian Hamilton criou a Teoria dos quatérnions, porém Cayley negava a influência dessa teoria nos seus estudos e toda essa discussão iniciou-se quando Cayley mostrou que um quatérnion poderia ser representado na forma de matriz.

Após o aperfeiçoamento da teoria das matrizes, foram surgindo várias aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Eves (2011, p. 553) destaca que "a álgebra tornou-se o vocabulário da matemática dos dias de hoje e foi apelidada *a chave-mestra da matemática*". O estudo sobre matrizes é imprescindível no desenvolvimento de diversas áreas, como engenharias, medicina, genética, computação gráfica, física entre outros.

2.2 Alguns conceitos

2.2.1 Definição e representação

Segundo Anton e Rorres (2012, p. 26) "uma *matriz* é um agrupamento retangular de números. Dizemos que os números nesse agrupamento são as entradas na matriz" .

As matrizes são representadas por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna ocupadas pelo elemento. Abreviadamente, representamos a matriz A na forma:

$$A = (a_{ij})_{m\times n}.$$

2.2.2 Igualdade de matrizes

Duas matrizes são iguais se tiverem a mesma ordem $m \times n$ e se suas entradas correspondentes forem iguais.

A igualdade de duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ de mesma ordem pode ser expressa escrevendo

$$(a_{ij}) = (b_{ij}).$$

2.3 Operações com matrizes

2.3.1 Adição de matrizes

Se A e B são matrizes de mesma ordem, então $A + B$ é a matriz obtida somando as entradas de B correspondente as entradas de A.

A adição de matrizes tem as seguintes propriedades:

- Comutativa: $A + B = B + A$

  Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ matrizes do mesmo tipo, então:

  $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = b_{ij} + a_{ij}$, pois a_{ij} e b_{ij} são números reais, e para eles é válida a propriedade comutativa.

  Se $(b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A$, então:

$$A + B = B + A.$$

- Associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$

  Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes do mesmo tipo, então:

  $A + (B + C) = ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})$.

  Como $((a_{ij}) + (b_{ij}) + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})) = (A + (B + C)$ e sabemos que (a_{ij}), (b_{ij}) e (c_{ij}) são números reais, e para eles é válida a propriedade associativa.

  Então:

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

- Elemento neutro: $A + 0 = A$

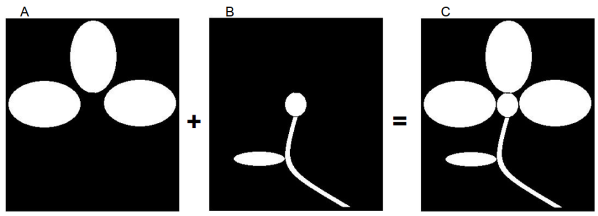
  Sejam $A = (a_{ij})$ e $0 = (b_{ij})$, duas matrizes do mesmo tipo, tais que, os elementos de O sejam todos nulos. Então, a matriz $A + 0$ será uma matriz $C = (C_{ij})$, cujos elementos $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Como todos os elementos da matriz 0 são iguais a zero, temos $C = (c_{ij}) = (a_{ij}) = A$, logo :

$$A + 0 = A.$$

Exemplo de adição de imagens

Sejam A e B matrizes (imagens), imagens de mesmo tamanho , então a soma $A+B = C$, onde C será uma imagem com as mesmas características de A e B. A Figura 2.1 mostra adição entre imagens.

Figura 2.1: Adição de imagens



Fonte: Silva (2014, p. 37).

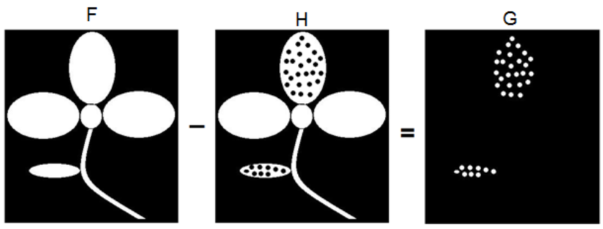
2.3.2 Subtração de matrizes

Se F e G são matrizes (imagens) de mesma ordem, então $F - G$ é a matriz obtida subtraindo as entradas de G correspondentes as entradas de F.

Exemplo de subtração de imagens

Na Figura 2.2 podemos ver um exemplo de subtração entre imagens.

Figura 2.2: Subtração de imagens



Fonte: Silva (2014, p. 38).

2.3.3 Multiplicação de um escalar por uma matriz

Seja α um número real e uma matriz A, a matriz que se obtém multiplicando por α todos os elementos de A é representada por $\alpha A = \alpha(a_{ij})$. Na multiplicação de um escalar por uma matriz são válidas algumas propriedades:

- Associativa da multiplicação:

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

  Esta propriedade estabelece que se uma matriz é multiplicada por dois escalares, você pode multiplicar os escalares entre si e, em seguida, multiplicar o resultado pela matriz. Ou você pode multiplicar a matriz por um escalar e, em seguida, multiplicar a matriz resultante pelo outro escalar.

- Distributiva da multiplicação:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

Esta propriedade estabelece que um escalar pode ser distribuído na soma de matrizes.

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B.$$

Essa propriedade estabelece que uma matriz pode ser distribuída na soma de escalares.

- Identidade multiplicativa:
$$1A = A.$$
Esta propriedade estabelece que ao multiplicar qualquer matriz A pelo escalar 1, o resultado é simplesmente a matriz original A.

2.3.4 Multiplicação de matrizes

Encontramos a definição para multiplicação de matrizes no livro de Anton e Rorres (2012) descrita da seguinte maneira:

> Se A for uma matriz $m \times r$ e B for uma matriz $r \times n$, então o produto AB é a matriz $m \times n$ cujas entradas são determinadas como segue. Para obter a entrada na linha i e coluna j de AB destacamos a linha i de A e a coluna j de B. Multiplicamos as entradas correspondentes da linha e da coluna e então somamos os produtos resultantes (ANTON; RORRES, 2012, p. 28).

É importante observar que a multiplicação de duas matrizes só é possível quando o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

A multiplicação de matrizes possuem as seguintes propriedades:

- Associativa: $(AB)C = A(BC)$.

  Esta propriedade determina que podemos alterar o agrupamento em torno de uma multiplicação de matrizes. Por exemplo, podemos multiplicar a matriz A pela matriz B, e então multiplicar o resultado pela matriz C, ou podemos multiplicar a matriz B pela matriz C e então multiplicar o resultado pela matriz A.

- Distributiva: $(A + B)C = AC + BC$ ou $C(A + B) = CA + CB$.

  Esta propriedade determina que podemos fazer operações simultâneas de adição e multiplicação entre várias matrizes, desde que as matrizes dadas obedeçam as regras básicas de adição e multiplicação.

Exemplo de combinação de imagens, utilizando a multiplicação de matrizes.

Uma aplicação para multiplicação de um escalar por uma matriz é a chamada “mistura de imagens”, em que a operação se reduz a uma combinação linear.

Um exemplo clássico dessa situação é a operação de “dissolve” de imagens mostrada por Gomes e Velho (1994): dadas duas imagens f e g, e um número real $0 \leq t \leq 1$, definimos o dissolve h_t de f e g:

$$h_t = dissolve_t(f,g) = (1-t)f + tg.$$

A Figura 2.3 abaixo mostra um dissolve das imagens (a) e (b), onde o valor do parâmetro t é 0,4.

Figura 2.3: Mistura de imagens

Fonte: Gomes e Velho (1994, p.55).

Podemos observar, que quando $t = 0$, obtemos o "dissolve" $= f$ e para $t = 1$, temos o dissolve igual a g.

A combinação genérica de imagens é muito útil nas aplicações pelo fato de possibilitar uma mistura adaptativa, na qual o peso de cada imagem na média da combinação varia entre os diversos *pixels* de cada região do domínio da imagem (GOMES; VELHO, 1994).

Esse é um tipo de aplicação que chama a atenção dos alunos devido a possibilidade de combinação e montagem entre fotos. Dessa forma os alunos percebem que todo esse processamento entre imagens é o resultado de operações entre matrizes.

2.4 Tipos de matrizes

2.4.1 Matriz transposta

Denomina-se transposta de uma matriz A a matriz A^t cujas linhas coincidem ordenadamente com as colunas de A. Seja:

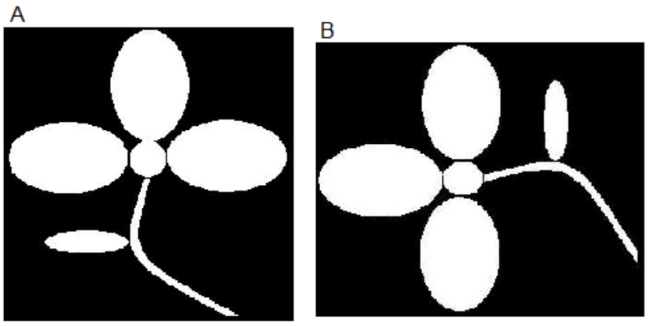
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

Então:

$$\mathbf{A^t} = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}.$$

A Figura 2.4 nos mostra o que a matriz transposta faz em uma imagem.

Figura 2.4: Imagens Transpostas



Fonte: Silva (2014, p. 40).

2.4.2 Matriz identidade

Definimos matriz identidade (ou matriz unidade) de ordem n a matriz $I_n = (a_{ij})_{n\times n}$, tal que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se i = j} \\ 0, \text{ se i} \neq \text{j} \end{cases}$$

$$\forall i,j \in 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Uma matriz identidade de ordem n é uma matriz quadrada $n \times n$, onde os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais elementos são todos iguais a zero. Uma propriedade importante da matriz identidade é: Seja A uma matriz qualquer, do tipo $n \times n$, então:

$$AI_n = I_nA = A.$$

2.4.3 Matriz inversa

Seja $AB = BA = I_n$, isto é, existe uma matriz que se for multiplicada por A, em qualquer ordem, resultará na matriz identidade. Sempre que isso ocorrer para uma matriz quadrada A, dizemos que A é invertível. E quando isso ocorre dizemos que a matriz B é a matriz inversa de A.

Teorema 2.1. Se uma matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$ possui inversa , então essa inversa é única.

Demonstração. Suponhamos que as matrizes B e C sejam inversas da matriz A. Então, $AB = BA = I_n$ e $AC = CA = I_n$. Logo $BA = AC$. Por outro lado, $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$.
Então: $B = C$, o que conclui o teorema.

□

Propriedades da matriz inversa:

- Se A é invertível, então A^{-1} é invertível e

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Demonstração. Para mostrar que A^{-1} é invertível devemos procurar por uma matriz X tal que:

$$A^{-1}X = I = XA^{-1}.$$

A matriz A certamente satisfaz essas equações, por isso A^{-1} é invertível e A é uma inversa de A^{-1}. Como inversas são únicas, temos que $(A^{-1})^{-1} = A$. □

- Se A e B são matrizes invertíveis, então AB é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração. Devemos mostrar que existe uma matriz X tal que:

$$(AB)X = I = X(AB).$$

A afirmação diz que substituindo-se $B^{-1}A^{-1}$ por X teremos as igualdades satisfeitas. Verificamos que :

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Analogamente, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, logo, AB é invertível e sua inversa é $B^{-1}A^{-1}$. □

- Se A é uma matriz invertível, então A^t é invertível e

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Demonstração. Usando a propriedade acima, temos:

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n.$$

$$(A^{-1})^tA^t = (AA^{-1})^t = I_n^t = I_n.$$

□

2.5 Ensino de Matrizes: quais possibilidades?

Hoje existem diversos trabalhos mostrando como podemos ensinar matrizes com aplicações contextualizadas, em que o processo ensino e aprendizagem se torna mais prazerosa para os alunos. De acordo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), “Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história" (BRASIL, 2017, p. 522).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) também nos orienta que para o aluno aprender matemática no Ensino Médio deve ser mais que memorizar resultados e que o conhecimento deve ser vinculado ao domínio de um saber fazer e pensar matemática. Compreendemos que o objetivo do estudo de matrizes deve sempre proporcionar aos estudantes uma construção de significados e não um treinamento mecânico.

Observando alguns trabalhos já publicados sobre o ensino de matrizes, destacamos três que trazem formas diferentes de abordar o conteúdo.

A dissertação intitulada "Exploração do conceito de multiplicação de matrizes através das tecnologias digitais: *site* e *softwares educativos*", escrito por Chereguini (2013), traz uma sequência didática aplicada aos alunos do 2º ano do Ensino Médio que tem por finalidade propiciar a compreensão do conteúdo de matrizes, dando ênfase ao uso das tecnologias como aliada na resolução de problemas de forma que eles compreendam o conteúdo e as suas aplicações. A autora afirma que "o uso da tecnologia em sala de aula pode auxiliar na atração do discente e em uma aprendizagem mais satisfatória" (CHEREGUINI, 2013, p. 22). E sobre o uso dessas tecnologias devemos utiliza-lá aliada aos estudos, como destaca a competência 5 da BNCC:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017, p. 9).

Ao apresentar o conteúdo de matrizes, a autora percebeu o desinteresse e dificuldade na compreensão de tal assunto por parte dos alunos. Com o uso das tecnologias observou que os alunos tendem a se envolver mais com a disciplina e percebeu que "foi possível despertar a curiosidade e propiciar a compreensão do conteúdo de matrizes pelos discentes" (CHEREGUINI, 2013, p. 7).

Em outra dissertação, intitulada "Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo de matrizes", o autor Oliveira (2017b) nos mostra diversas propostas de atividades com variadas aplicações de matrizes. Entre essas aplicações, o autor utiliza o software *GeoGebra* como principal agregador de teoria e prática, com foco no estudo de transformações geométricas. Com o *Geogebra* é possível visualizar as transformações sofridas em cada figura gerada por meio de uma matriz. Também são apresentadas aplicações de matrizes na computação gráfica e como essas operações com matrizes podem transformar as imagens digitais.

Oliveira (2017b, p. 67) conclui que "a utilização do software GeoGebra para realização de atividades que envolvam transformações geométricas planas e operações com matrizes é eficiente, pois torna o processo de ensino aprendizagem significativo e agradável."

Na Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática (REBECEM), encontramos um artigo por título "Uma abordagem de matrizes na perspectiva de resolução de problemas" Ribeiro et al. (2019), nele os autores trazem o relato de atividades aplicadas a duas turmas de 2º ano do Ensino Médio no qual o enfoque foi a resolução de problemas.

Segundo os autores Ribeiro et al. (2019), um dos fatores que os levaram a trabalhar com Resolução de Problemas foi por não quererem simplesmente escrever definições no quadro e que os alunos reproduzissem procedimentos sem entendê-los. Segundo os PCN de Matemática do Ensino Fundamental:

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1998, p. 40).

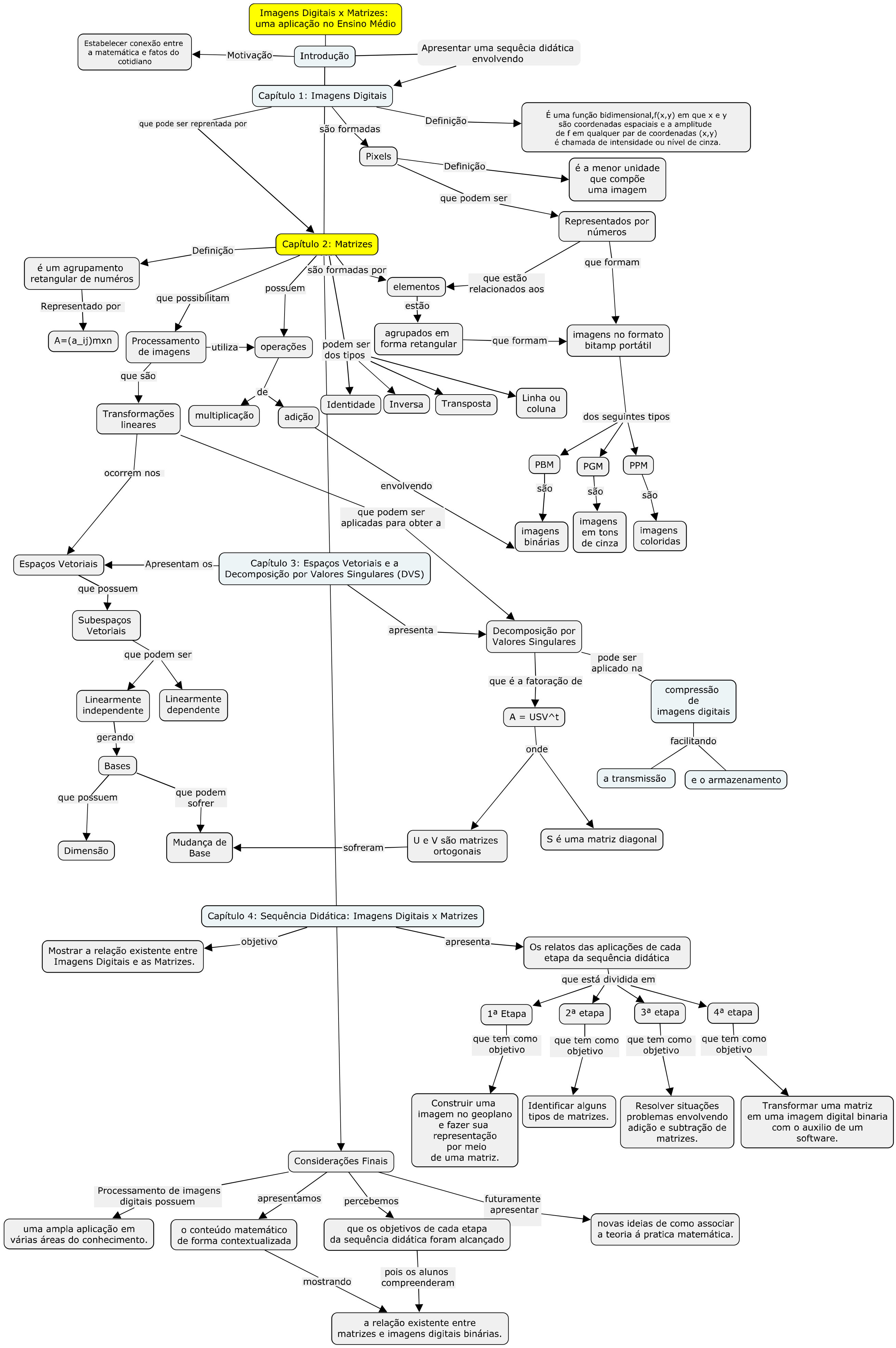
O conceito de Matrizes ocupa lugar de destaque nas diversas áreas da matemática e suas aplicações. Dessa forma podemos pensar diversas maneiras de como trabalhar este conteúdo de forma contextualizada e prazerosa com os alunos.

Citamos apenas três trabalhos com propostas distintas, mas sabemos que existem outras publicações na área de Educação Matemática que trazem sequências didáticas e relatos de práticas envolvendo o conteúdo de matrizes. A exemplo de Mesquita (2017) e Trindade (2017).

Ao longo deste capítulo abordamos conceitos necessários para o entendimento de operações com matrizes e o processamento de imagens. Mencionamos também alguns trabalhos publicados que mostram outras possibilidades do ensino de matrizes.

No próximo capítulo apresentaremos a Decomposição de Valores Singulares (DVS), que é a otimização do espaço de armazenamento de imagens. Sabemos que uma imagem pode ser representada por uma matriz e, desta forma, podemos decompor esta matriz em um produto de três matrizes, duas ortogonais e uma diagonal, o que torna possível a obtenção de uma matriz com uma quantidade de dados reduzida e dentre todas as matrizes com a mesma quantidade de dados, esta nova matriz obtida é a mais próxima possível da matriz original. Traremos também algumas definições fundamentais, como a de Espaços Vetoriais, que será necessária para o entendimento da demonstração da Decomposição de Valores Singulares.

Com o auxílio do mapa conceitual a seguir recapitularemos os conceitos e definições apresentados neste capítulo e a relação existente entre o o processamento de imagens e o estudo de matrizes.



Imagens Digitais x Matrizes: uma aplicação no Ensino Médio
Introdução
Motivação
Estabelecer conexão entre a matemática e fatos do cotidiano
Apresentar uma sequêcia didática envolvendo
Capítulo 1: Imagens Digitais
Definição
É uma função bidimensional,f(x,y) em que x e y são coordenadas espaciais e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x,y) é chamada de intensidade ou nível de cinza.
que pode ser reprentada por
são formadas
Pixels
Definição
é a menor unidade que compõe uma imagem
que podem ser
Representados por números
que formam
imagens no formato bitamp portátil
dos seguintes tipos
PBM
PGM
PPM
são
imagens binárias
imagens em tons de cinza
imagens coloridas
Capítulo 2: Matrizes
Definição
é um agrupamento retangular de números
Representado por
A=(a_ij)mxn
que possibilitam
Processamento de imagens
utiliza
operações
de
multiplicação
adição
que são
Transformações lineares
possuem
são formadas por
elementos
que estão relacionados aos
estão
agrupados em forma retangular
que formam
podem ser dos tipos
Identidade
Inversa
Transposta
Linha ou coluna
envolvendo
ocorrem nos
que podem ser aplicadas para obter a
Espaços Vetoriais
Apresentam os
Capítulo 3: Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares (DVS)
que possuem
Subespaços Vetoriais
que podem ser
Linearmente independente
Linearmente dependente
gerando
Bases
que possuem
Dimensão
que podem sofrer
Mudança de Base
sofreram
apresenta
Decomposição por Valores Singulares
pode ser aplicado na
compressão de imagens digitais
facilitando
a transmissão
e o armazenamento
que é a fatoração de
A = USV^t
onde
U e V são matrizes ortogonais
S é uma matriz diagonal
Capítulo 4: Sequência Didática: Imagens Digitais x Matrizes
objetivo
Mostrar a relação existente entre Imagens Digitais e as Matrizes.
apresenta
Os relatos das aplicações de cada etapa da sequência didática
que está dividida em
1ª Etapa
2ª etapa
3ª etapa
4ª etapa
que tem como objetivo
Construir uma imagem no geoplano e fazer sua representação por meio de uma matriz.
Identificar alguns tipos de matrizes.
Resolver situações problemas envolvendo adição e subtração de matrizes.
Transformar uma matriz em uma imagem digital binaria com o auxilio de um software.
Considerações Finais
Processamento de imagens digitais possuem
uma ampla aplicação em várias áreas do conhecimento.
apresentamos
o conteúdo matemático de forma contextualizada
percebemos
que os objetivos de cada etapa da sequência didática foram alcançado
futuramente apresentar
novas ideias de como associar a teoria á pratica matemática.
mostrando
pois os alunos compreenderam
a relação existente entre matrizes e imagens digitais binárias.

3 Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares – DVS

A matriz é a forma como podemos guardar informações sobre as imagens digitais. Quando as imagens digitais são representadas por matrizes, podemos então utilizar de técnicas de Álgebra Linear no processamento dessas imagens. Anton e Rorres (2012) afirmam que toda matriz está associada a uma transformação linear. Desta forma, percebemos que os conhecimentos em Álgebra Linear, em especial os Espaços Vetoriais, são importantes às ciências aplicadas, em especial à computação gráfica.

Como este trabalho pretende mostrar a relação entre as imagens digitais e matrizes, resolvemos trazer uma aplicação extremamente importante que é a Decomposição por Valores Singulares (DVS). De acordo Poole (2004), dentre muitas aplicações da DVS, uma das mais impressionantes é seu uso para comprimir imagens digitais de modo que elas possam ser transmitidas eletronicamente com eficiência por satélite, fax, Internet ou semelhante.

3.1 Exemplo de aplicações em imagens utilizando a decomposição DVS

A imagem 3.1 nos mostra a foto do matemático Gauss, ela tem 340×280 pixel, na qual cada pixel está relacionado com um dos 256 tons de cinza. Essa foto corresponde a uma matriz $A_{340\times 280}$, ou seja, 95200 números. Porém transmitir e manipular uma imagem desse tamanho é caro. A Decomposição por Valores Singulares (DVS) nos mostra que podemos fatorar todo tipo de matriz e que toda matriz pode ser escrita na forma fatorada $A = USV^t$, dessa forma podemos transmitir apenas uma parte da imagem, a parte da imagem de maior importância.

Figura 3.1: Aplicação da DVS

Fonte: Poole (2004, p. 569).

A DVS é muito utilizada em transmissão de imagens, pois os primeiros valores singulares são os que guardam maior quantidade de informações da imagem digital e por essa razão é possível formar imagem de posto menor, mas que contenha informações suficientes para gerar uma imagem bem próxima da original.

3.2 Espaços Vetoriais Reais

Mostraremos algumas definições importantes que serão utilizadas na demonstração da Decomposição de valores Singulares (DVS). Os conceitos aqui abordados estão conforme: Anton e Rorres (2012), Lay (1999) e Poole (2004).

Definição 3.1. (Espaço Vetorial)

Seja V um conjunto no qual duas operações, chamadas adição e multiplicação por escalares, estão definidas. Se **u** e **v** estão em V, a soma de **u** e **v** é denotada por **u** + **v**, e se c é um escalar, o múltiplo escalar de **v** por c é denotado por c**v**. Se os axiomas a seguir são verdadeiros para todo **u**, **v** e **w** em V e para todos os escalares c e d, então V é chamado **espaço vetorial** e seus elementos são chamados **vetores**.

1. **u+v** está em V.
2. **u+v = v+u**.
3. **(u+v)+w = u+(v+w)**.
4. Existe um elemento **0** em V, chamado **vetor nulo**, tal que **u+0 = u**.
5. Para cada **u** em V, existe um elemento **-u** em V tal que **u+(-u) = 0**.
6. c**v** está em V.
7. c (**v+w**) = c**v** + c**w**.
8. (c+d)**v** = c**v** + d**v**.
9. c(d**u**) = (cd)**u**.
10. 1**u** = **u**.

Definição 3.2. (Subespaço Vetorial)

Um subespaço W de um espaço vetorial V é chamado de subespaço de V se W é um espaço vetorial com os mesmos escalares, a mesma direção e a mesma multiplicação por escalar que V.

Teorema 3.3. Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V. Então, W é um subespaço de V se, e somente se, as seguintes condições se verificam:

1. Se **u** e **v** estão em W, então **u + v** está em W.
2. Se **v** está em W e c é um escalar, então c**v** está em W.

A demonstração do teorema 3.3 poderá ser encontrado na referência Poole (2004, p. 392).

Definição 3.4. (Dependência Linear)

Um conjunto de vetores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ em um espaço vetorial V é **linearmente dependente** se existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$, não todos nulos, tais que:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k = 0.$$

Um conjunto de vetores não linearmente dependente é chamado de **linearmente independente**.

Definição 3.5. (Bases)

Um subconjunto β de um espaço vetorial V é uma base de V se:

1. β gera V;
2. β é linearmente independente.

Definição 3.6. (Espaço com produto interno)

Um produto interno em um espaço vetorial V é uma operação que associa a cada par de vetores **u** e **v** em V um número real (**u**,**v**) tal que as seguintes propriedades valem para todos os vetores **u**, **v** e **w** e todos os escalares c:

1. $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$.
2. $\langle u,v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$.
3. $\langle cu,v \rangle = c\langle u,v \rangle$.
4. $\langle u,u \rangle \geq 0$ *e* $\langle u,u \rangle = 0$ se, e somente se, u = 0. Um espaço vetorial com um produto interno é chamado de **espaço vetorial interno**.

Definição 3.7. Sejam **u** e **v** vetores em um espaço V com produto interno.

1. O comprimento (ou norma) de **v** é $\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\langle \mathbf{v},\mathbf{v} \rangle}$.
2. A distância entre **u** e **v** é $d(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \| \mathbf{u}\text{-}\mathbf{v} \|$.
3. **u** e **v** são ortogonais se $\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = 0$.

Definição 3.8. (Autovalores e autovetores)

Seja A uma matriz $n \times n$. Denomina-se autovalor de A a um escalar λ que satisfaz a equação $Av = \lambda v$, para algum vetor não nulo v, chamado de autovetor associado ao autovalor λ. Os autovalores de uma matriz A são precisamente as soluções λ da equação: $det(A - \lambda I) = 0$.

Definição 3.9. (Valores singulares) Se A é uma matriz $m \times n$, os **valores singulares** de A são as raízes quadradas dos autovalores de A^tA, e são denotados por $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$. É uma convenção ordenar os valores singulares de modo que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_n$. Os valores singulares de uma matriz A são únicos.

Definição 3.10. (Matrizes singulares) Uma matriz A de dimensão $n \times n$ é dita singular quando det(A)=0.

Teorema 3.11. (Teorema da diagonalização)

Uma matriz $A_{n\times n}$ é diagonalizável se,e somente se, A tem autovetores linearmente independentes.

Demonstração. A demonstração se encontra em Lay (1999, p. 289-290). □

Definição 3.12. (Matriz ortogonal)

Uma matriz $A_{n\times n}$ é dita ortogonal se seus vetores colunas formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.13. Uma matriz $A_{n\times n}$ é ortogonal se e somente se $A^tA = I$.

Demonstração. Pela definição, uma matriz $An \times n$ é ortogonal se, e somente se, sua colunas satisfazem

$$a_i^t a_j = \sigma_{ij}.$$

No entanto, $a_i^t a_j$ é o elemento (i,j) de A^tA. Logo, A é ortogonal se e somente se $A^tA = I$. □

Propriedades de uma matriz ortogonal

Se uma matriz A é uma matriz ortogonal $n \times n$, então:

1. As colunas de A formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.
2. $A^tA = AA^t = I$.
3. $A^t = A^{-1}$.
4. $\langle Ax,Ay\rangle = \langle x,y\rangle$.
5. $\| Ax \|_2 = \| x \|_2$.

Definição 3.14. (Matrizes simétricas)

Uma matriz simétrica é uma matriz A tal que $A^t = A$. Esse tipo de matriz é necessariamente quadrada.

Propriedades de uma matriz simétrica

1. Todos os autovalores de uma matriz simétrica real são reais.
2. Autovetores associados a autovalores distintos de uma matriz simétrica com elementos reais são ortogonais.

Essas são algumas das definições e teoremas necessários para que possamos entender a demonstração do Teorema da Decomposição por Valores Singulares que será abordada na próxima seção.

3.3 Decomposição por Valores Singulares (DVS)

Vimos na seção anterior que podemos comprimir imagens digitais utilizando a Decomposição por Valores Singulares. Nesta seção demonstraremos este teorema e um exemplo da DVS de uma matriz 3×3.

A fatoração da matriz A, como será mostrada no Teorema 3.15, é chamada de **Decomposição por Valores Singulares (DVS)** de A. As colunas de U são chamadas de **vetores singulares à esquerda** de A e as colunas de V são chamadas de **vetores singulares à direita** de A.

Definimos a "diagonal principal" de uma matriz retangular, como entradas diagonais de uma matriz , a fileira de entradas que começa no canto superior esquerdo e se estende até onde for possível.

Teorema 3.15. Seja A uma matriz $m \times n$, então A pode ser expressa como :

$$A = U\Sigma V^t,$$

em que U e V são matrizes ortogonais e Σ é uma matriz $m \times n$ cujas entradas diagonais são os valores singulares de A e cujas demais entradas são nulas.

Demonstração. Vamos dividir essa demonstração em quatro partes:

1. Vamos construir a matriz V.
   Seja A uma matriz $m \times n$. Então $A^t A_{n\times n}$ é uma matriz simétrica e pode ser diagonalizada por uma matriz ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad e \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

   A é diagonalizável se e somente se existem autovetores suficientes para formar uma base para o $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.16. Um conjunto ortonormal de vetores é um conjunto ortogonal de vetores unitários. O conjunto $v_1,\ldots,v_n$ é ortonormal se e somente se :

$$\langle v_i,v_j\rangle = \delta_{ij},$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Seja $v_1,\ldots,v_n$ uma base ortonormal para $\mathbb{R}^n$ consistindo em autovetores de A^tA, e sejam $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ os autovalores associados. Então, se $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} [A^tA]v_i &= \lambda_i v_i \\ \| Av_i \|^2 &= v_i^t A^t A v_i \\ &= v_i^t(\lambda_i v_i) \\ &= \lambda_i(v_i^t v_i) \\ &= \lambda_i \| v_i \|^2 \\ &= \lambda_i. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_i = \| Av_i \|^2 \geq 0.$$

Vamos supor que as colunas de V estejam ordenadas de modo que cada autovalor correspondente estejam da seguinte forma:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0.$$

Os valores singulares de A são dados por $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ e $i = 1,\ldots,n$.
Seja r o posto da matriz A. (O posto da matriz A é igual ao valores singulares não-nulos). Pelas propriedades de matrizes simétricas, sabemos que o posto da matriz A^tA é o mesmo da matriz A, logo A^tA terá posto r. Então,
$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ e $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \ldots = \lambda_n = 0$.
A mesma relação também é valida para os valores singulares, então:
$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ e $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_n = 0$.
Cada vetor v_i é chamado de vetor singular a direita de A associado a um valor singular $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, onde as colunas de V são os autovetores de A então podemos

escrever a matriz $V_1 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_r \\ | & | & & | \end{bmatrix}$ e $V_2 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_{r+1} & v_{r+2} & \dots & v_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$.

Então $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$.

2. Vamos construir a matriz U.

   Para determinar a matriz ortogonal U ,podemos observar que os valores singulares da matriz A(os valores singulares de uma matriz são únicos), definidos por σ_1,$\sigma_2, \dots$,σ_n são as raízes quadradas dos autovalores de A^tA e correspondem aos comprimentos dos vetores Av_1,$Av_2, \dots$,Av_n de $\mathbb{R}^m$, ou seja, $\sigma_i = \|Av_i\|$, com $i = 1, 2, \dots$,m. Então podemos normalizar Av_1,$Av_2, \dots$,Av_n, considerando :

$$u_i = \frac{Av_i}{\| Av_i \|} = \frac{1}{\sigma_i}Av_i,$$

   ou seja,

$$Av_i = \sigma_i u_i.$$

   Cada vetor u_i é chamado de vetor singular à esquerda de A associado ao valor singular σ_i, com $1 \geq i \geq r$ e com $r + 1 \geq i \geq m$. Podemos então considerar:

$$U_1 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_1 & u_2 & \dots & u_r \\ | & | & & | \end{bmatrix} \text{ e } U_2 = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ u_{r+1} & u_{r+2} & \dots & u_r \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

   Logo , $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$.

3. Vamos agora determinar a matriz Σ.

   Por hipótese sabemos que a matriz $A_{m\times n}$ possui σ_n valores singulares, e estes valores estão em ordem decrescente, pois $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ e que $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$, logo podemos afirmar que a matriz

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} D & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix}, \text{onde } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r \end{bmatrix}.$$

   A matriz D será uma matriz diagonal de posto r, com os r valores singulares de A e cada matriz O é uma matriz nula de tamanho apropriado, então Σ terá a forma de blocos.

4. Fatoração

   Agora que já definimos quem são as matrizes U, Σ e V mostraremos que $U\Sigma V^t$ é de fato a matriz A:

$$U\Sigma V^t = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & \vdots & O \\ \dots & \dots & \dots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$U\Sigma V^t = U_1 D V_1^t;$$

$$U\Sigma V^t = A V_1 V_1^t;$$

$$U\Sigma V^t = A.$$

□

3.4 Exemplo de decomposição por valores singulares

- Encontre uma decomposição por valores singulares da matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:
1º Passo: Calcular A^tA
Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad e \ \mathbf{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então A^tA será:

$$\mathbf{A^tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2º Passo: Encontrar os valores dos autovetores. Os autovetores são as raízes da equação $det(A^tA - \lambda I) = 0$.
Seja

$$\mathbf{det(A^tA - \lambda I)} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

Seus autovalores são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$.

3º Passo: Encontrar os valores singulares de A. Os valores singulares de A são:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{2}, \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1 \text{ } e \text{ } \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{0} = 0.$$

4º Passo: Encontrar o valor dos autovetores correspondentes a cada λ .

- Calculo dos autovetores associados a λ_1:

$$(A^tA - \lambda I) = 0.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 1 & 0 \\ 1 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = y$ e $z = 0$. Fazendo $y = 1$, temos $x = 1$, logo:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Calculo dos autovetores associados a λ_2:

$$(A^tA - \lambda I) = 0.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = 0$, $y = 0$ e $0z = 0$. Fazendo $z = 1$, temos:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculo dos autovetores associados a λ_3:

$$(A^tA - \lambda I) = 0.$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 1-0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $x = -y$, e $z = 0$. Fazendo $x = -1$, temos $y = 1$, logo:

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz ortogonal V:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

diagonaliza A^tA.

5º Passo: Pelo Teorema da decomposição de valores singulares, sabemos que:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6º Passo: Vamos calcular U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esses vetores u_1 e u_2, formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$, então temos :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, podemos escrever a matriz A como uma Decomposição por Valores Singulares (DVS):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma V^t.$$

3.5 Exemplo da aplicação da DVS em imagens

A Decomposição por Valores Singulares (DVS) pode ser utilizada para comprimir imagens digitais reduzindo assim seu espaço de armazenamento e acelerar sua transmissão eletrônica. Vejamos o exemplo da fotografia do matemático Christian Felix Klein (1849 - 1925), figura 3.2, essa imagem tem $720 \times 524 = 377289$ píxel.

Figura 3.2: Imagem original

Fonte: Pesco e Bortolossi (2013, p. 47).

Com a decomposição por valores singulares da imagem original, podemos calcular as matrizes para r = 1 , r = 5 , r = 10 e r = 20, obtendo assim imagem bem próxima da original. A imagem original possui r = 524.

A figura 3.3 nos mostra as imagens formadas após a aplicação da DVS.

Figura 3.3: Imagens com a aplicação da DVS

Fonte: Pesco e Bortolossi (2013, p. 47).

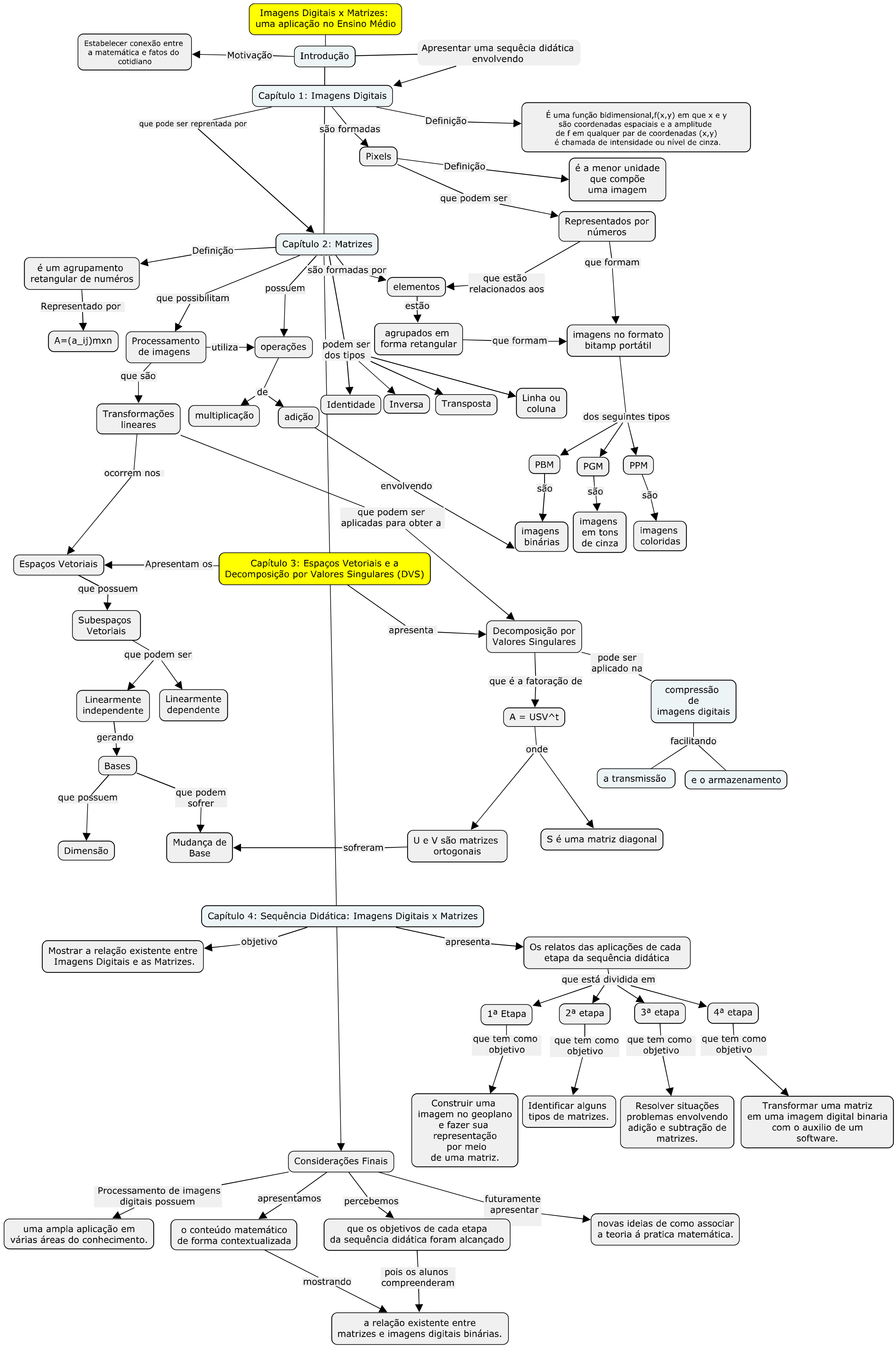
A SVD é muito útil para otimizar o armazenamento de imagens digitais, pois ao invés de armazenar todos os elementos da matriz da imagem original, é necessário apenas que armazenem os primeiros valores singulares de Σ e os primeiros vetores de U e V, resultantes da decomposição de $A = U\Sigma V^t$.

Vimos até o momento várias operações com matrizes e mostramos que uma imagem digital pode ser representada por uma matriz. Pensando nesta relação, elaboramos uma sequência didática sobre Matrizes e imagens digitais, em especial as imagens binárias, que poderá ser utilizada com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, na qual abordaremos a definição de matrizes e algumas operações matriciais.

Não iremos abordar na sequência didática o estudo com espaços vetoriais e a DVS, por se tratar de um conteúdo estudado no nível superior e devido a complexidade dos cálculos em matrizes com muitas linhas e colunas, o que necessitaria do uso de algum software. Porém, não poderíamos deixar de destacar a importância da Decomposição por Valores Singulares na Computação Gráfica, pois segundo Anton e Rorres (2012, p. 515) “o primeiro passo na compressão de uma imagem visual é representá-la como uma matriz numérica, a partir da qual a imagem possa ser recuperada quando for necessário”.

No próximo capítulo apresentaremos os relatos da aplicação da sequência didática que busca apresentar aos alunos a relação existente entre o processamento de imagens digitais binárias e matrizes.

No mapa conceitual a seguir percebemos a organização e a hierarquia existente entre definições e teoremas necessários para demonstração do Teorema da Decomposição por Valores Singulares.


Imagens Digitais x Matrizes: uma aplicação no Ensino Médio
Introdução
Motivação
Estabelecer conexão entre a matemática e fatos do cotidiano
Apresentar uma sequêcia didática envolvendo
Capítulo 1: Imagens Digitais
que pode ser reprentada por
são formadas
Definição
É uma função bidimensional,f(x,y) em que x e y são coordenadas espaciais e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x,y) é chamada de intensidade ou nível de cinza.
Pixels
Definição
é a menor unidade que compõe uma imagem
que podem ser
Representados por números
que formam
imagens no formato bitamp portátil
Capítulo 2: Matrizes
Definição
é um agrupamento retangular de números
Representado por
A=(a_ij)mxn
que possibilitam
Processamento de imagens
utiliza
operações
possuem
são formadas por
elementos
que estão relacionados aos
estão
agrupados em forma retangular
que formam
podem ser dos tipos
Identidade
Inversa
Transposta
Linha ou coluna
de
multiplicação
adição
que são
Transformações lineares
ocorrem nos
que podem ser aplicadas para obter a
envolvendo
dos seguintes tipos
PBM
PGM
PPM
são
são
são
imagens binárias
imagens em tons de cinza
imagens coloridas
Espaços Vetoriais
Apresentam os
Capítulo 3: Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares (DVS)
apresenta
Decomposição por Valores Singulares
pode ser aplicado na
compressão de imagens digitais
facilitando
a transmissão
e o armazenamento
que é a fatoração de
A = USV^t
onde
U e V são matrizes ortogonais
S é uma matriz diagonal
sofreram
que possuem
Subespaços Vetoriais
que podem ser
Linearmente independente
Linearmente dependente
gerando
Bases
que possuem
Dimensão
que podem sofrer
Mudança de Base
Capítulo 4: Sequência Didática: Imagens Digitais x Matrizes
objetivo
Mostrar a relação existente entre Imagens Digitais e as Matrizes.
apresenta
Os relatos das aplicações de cada etapa da sequência didática
que está dividida em
1ª Etapa
2ª etapa
3ª etapa
4ª etapa
que tem como objetivo
que tem como objetivo
que tem como objetivo
que tem como objetivo
Construir uma imagem no geoplano e fazer sua representação por meio de uma matriz.
Identificar alguns tipos de matrizes.
Resolver situações problemas envolvendo adição e subtração de matrizes.
Transformar uma matriz em uma imagem digital binaria com o auxilio de um software.
Considerações Finais
Processamento de imagens digitais possuem
uma ampla aplicação em várias áreas do conhecimento.
apresentamos
o conteúdo matemático de forma contextualizada
percebemos
que os objetivos de cada etapa da sequência didática foram alcançado
futuramente apresentar
novas ideias de como associar a teoria á pratica matemática.
mostrando
pois os alunos compreenderam
a relação existente entre matrizes e imagens digitais binárias.

4 Sequência Didática: Imagens Digitais x Matrizes

Neste capítulo apresentamos os relatos das aplicações sobre a sequência didática: Imagens digitais x Matrizes, aplicada a alunos do 2º ano do Ensino Médio.

A BNCC destaca a importância da formação do aluno de forma integral, proporcionando uma aprendizagem significativa, que compreende o desenvolvimento cognitivo e o socio emocional do aluno.

Durante as aulas de matemática é muito comum ouvir do aluno: onde eu vou usar isso professor? Percebemos que alguns alunos não conseguem fazer uma conexão entre os conteúdos estudados em sala de aula com situações do cotidiano. Segundo Ponte (1994), os alunos não percebem para que serve os conteúdos de matemática, nem porque são obrigados a estudá-los.

Nem sempre conseguimos mostrar uma aplicação de um conteúdo matemático para o nosso aluno, porem quando o conteúdo trabalhado em sala é contextualizado o aluno tem a oportunidade de desenvolver conceitos e habilidades que tornarão essenciais a sua formação. De acordo o Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p. 111).

Quando os alunos aprendem matemática de forma contextualizada, estabelecendo conexões entre o conteúdo e outros conhecimentos, eles desenvolvem habilidades e competências que são de extrema importância para sua formação, pois são capazes de compreender o mundo que os cercam e de resolver situações e problemas reais.

Pensando desta forma, elaboramos uma sequência didática que tem como objetivo que o aluno perceba a relação de Matrizes com imagens digitais, conteúdo bem presente na vida dos estudantes, como nas fotos postadas nas redes sociais, as imagens na tela do celular e do computador.

Zabala (1998, p. 18) define sequência didática como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. Desta forma elaboramos a sequência didática de forma planejada, analisando como seria a sua aplicação e, posteriormente, a avaliação dos resultados obtidos após cada etapa aplicada, com o intuito de verificar se os alunos conseguiram relacionar as imagens digitais com o estudo de matrizes.

Esta sequência foi desenvolvida no Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade, situado em Vitória da Conquista, distante 518 km da capital do estado, Salvador, em uma região periférica da cidade e com o IDEB igual a 3,3 no ano de 2017, essa nota está acima do IDEB do estado da Bahia, que naquele ano foi de 3,0. Antes de 2017 não tínhamos IDEB por escola, apenas o IDEB do estado, por essa razão não possuíamos meta para o referido ano.

Participaram da pesquisa os 39 alunos do 2º Ano B do Ensino Médio de Tempo Integral, todos aceitaram participar e os mesmos estão identificados como $A1, A2, \ldots, A39$. As Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral (EMTI) foram criadas criado pelo Ministério da Educação (MEC) por meio da Portaria nº 1.145 no ano de 2016. Esse programa tem por objetivo apoiar os sistemas de ensino público dos estados e do Distrito Federal, oferecendo a ampliação da jornada escolar e a formação integral e integrada do estudante.

A sequência didática foi dividida em quatro etapas. Na 1ª etapa 38 alunos estavam presentes e o objetivo da aula foi que os alunos conseguissem construir uma imagem binária com o auxílio do geoplano e, depois, representá-la por meio de uma matriz. Na 2ª etapa 39 alunos estavam presentes e o objetivo da aula foi que o aluno pudesse identificar os tipos de matrizes. Na 3ª etapa 35 alunos estavam presentes e o objetivo da aula foi resolver situações problemas que envolviam as operações de adição e subtração de matrizes. A tabela 4.1 nos mostra de forma mais clara como foi a frequência dos alunos nas etapas aplicadas.

Tabela 4.1: Frequência dos alunos em cada etapa aplicada

Etapas	Número de alunos presentes
1ª	38
2ª	39
3ª	35

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Não foi possível a aplicação da 4ª etapa por conta da suspensão das aulas devido à pandemia do COVID-19. No dia 18 de março, o governador da Bahia, Rui Costa, assinou o decreto 19.635/2020 suspendendo as aulas por 30 dias em todas as escolas da rede estadual e privadas da Bahia. Esse decreto foi renovado várias vezes e até o presente momento as unidades escolares da Bahia encontram-se com suas atividades suspensas.

O objetivo da aula seria construir uma imagem no geoplano, depois transformá-la em uma matriz numérica, programar essa matriz com o auxílio do Notepad e com o auxílio de um leitor de imagens visualizar a imagem na tela do computador ou celular. Para a aplicação de cada etapa planejamos duas horas aula.

Utilizamos para coleta de dados gravador de voz e registros feitos por alunos. Registramos visualmente as aula com fotos. Após a coleta analisamos as falas, observando o que cada aluno havia entendido sobre o assunto, cada foto, examinando os resultados das atividades realizadas no geoplano e os áudios feitos pelos alunos, as observações feitas entre eles, a fim de avaliarmos cada etapa aplicada.

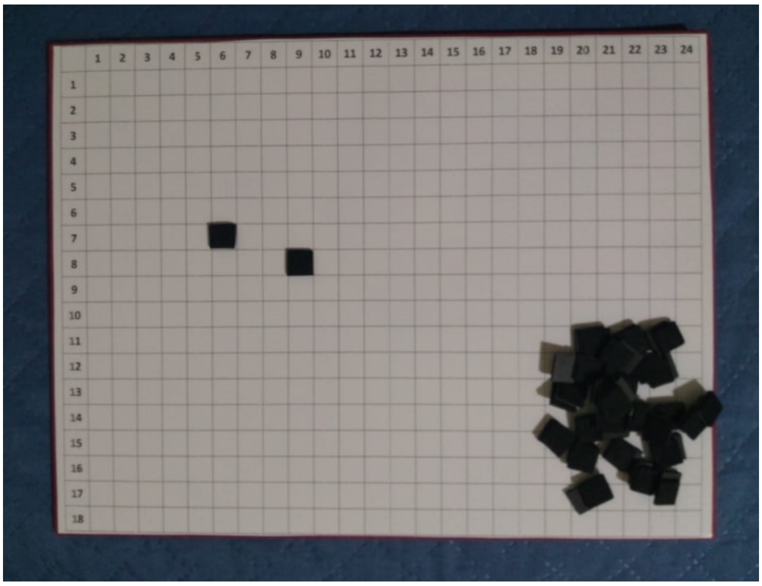
4.1 Aplicação da primeira etapa

Na primeira etapa da sequência didática o objetivo foi construir uma imagem no geoplano, seguindo os comandos dados e, depois, representar essa imagem por meio de matriz.

O geoplano é um material criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno. Constitui-se por uma placa de madeira, marcada com uma malha quadriculada ou pontilhada. Em cada vértice dos quadrados formados fixa-se um prego, onde se prenderão os elásticos, usados para "desenhar" sobre o geoplano. Segundo Machado (2006), o geoplano pode ser considerado como um material concreto de grande importância no processo ensino e aprendizagem da matemática, pois percebemos que o mesmo favorece o processo de representação mental indispensável à abstração de conceitos.

O geoplano, utilizado nas atividades aqui apresentadas, foi feito com uma placa de metal, devidamente quadriculado, com peças magnéticas, e construído pela autora com material de baixo custo. A Figura 4.1 ilustra o geoplano utilizado.

Figura 4.1: Geoplano



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Utilizamos o geoplano como material manipulável, para que os alunos pudessem criar imagens e representá-las na forma de matrizes, relacionando cada ponto da imagem do geoplano com os elementos de uma matriz. As imagens digitais estão presentes em várias situações do nosso cotidiano. Elas são utilizadas nas páginas da Internet, nas fotos digitais, em reconhecimento facial e até em exames clínicos como nas tomografias.

As imagens digitais são formadas por *pixel*, estes *pixels*, são números que estão organizados em matrizes para serem interpretados pelo computador.

Iniciamos a atividade questionando aos alunos sobre o que são imagens digitais e onde podemos encontrá-las.

Como respostas, alguns alunos disseram:

Aluno $A15$: *Em fotos.*

Aluno $A22$: *Na tela da TV.*

Pesquisadora: *Será que uma imagem digital tem alguma relação com a matemática?*

Aluno $A15$: *Os pixel?!!*

Pesquisadora: *Muitas vezes somos questionados para que serve este ou aquele conteúdo de matemática, agora iremos estudar uma aplicação do conteúdo de matrizes e as imagens digitais. Como foi dito pelo aluno* $A5$, *o pixel é a menor parte de uma imagem digital e um conjunto de pixels formam uma imagem inteira.* Durante a discussão apenas esses alunos citados responderam ao questionamento.

Foi interessante perceber pelas respostas dos alunos que eles já sabiam onde são encontradas as imagens digitais e que conseguiram relacioná-las com a matemática.

Após esse questionamento sobre o que são imagens digitais e onde podemos encontrá-las, a turma foi dividida em grupos com três alunos, cada grupo recebeu um geoplano,

ficaram por algum tempo manuseando livremente o material e logo depois foi solicitado que os alunos seguissem alguns comandos dados pela pesquisadora. Esses comandos são as posições (localizações) de cada peça no geoplano e é dado por um par ordenado, onde o primeiro valor representa a posição da linha e o segundo valor a coluna no geoplano.
(1,8), (1,9), (1,10), (1,11), (2,6), (2,7), (2,12), (2,13), (3,5), (3,11), (3,12), (3,14), (4,4), (4,15), (4,16), (4,17), (4,18), (4,19), (5,4), (5,20), (6,3), (6,12), (6,14), (6,21), (7,3), (7,12), (7,14), (7,22), (8,2), (8,4), (8,16), (8,17), (8,18), (8,22), (9,2), (9,4), (9,6), (9,16), (9,17), (9,18), (9,22), (10,2), (10,4), (10,7), (10,22), (11,2), (11,3), (11,4), (11,7), (11,10), (11,21), (12,2), (12,4), (12,5), (12,7), (12,10), (12,21), (13,2), (13,4), (13,5), (13,7), (13,10), (13,16), (13,20), (14,2), (14,4), (14,5), (14,7), (14,11), (14,16), (14,18), (14,19), (15,3), (15,7), (15,8), (15,9), (15,12), (15,13), (15,14), (15,15), (15,16), (15,17), (16,4), (16,5), (16,6), (16,10), (16,13), (17,11), (17,14), (17,15), (18,10), (18,11), (18,12), (18,13), (18,14), (18,15) e (18,16)

Durante a atividade, alguns alunos ficaram confusos com a ordem dos comandos, pois alguns se atrapalharam com o conceito de linha e coluna, então explicamos que a linha é representada na horizontal e que a coluna na vertical, após a explicação sobre linha e coluna, falamos mais pausadamente até que os mesmos estivessem adaptados com o processo de localização dos pontos no geoplano.

O aluno *A*5 fez o seguinte comentário: *Uau! Está formando um desenho. Vocês nem estavam percebendo isso?*

Foi possível notar que alguns alunos ainda não tinham percebido que os comandos dados e a execução de montagem das peças no geoplano formaria uma imagem. Depois do comentário citado, os alunos agora queriam saber qual a imagem que seria ser formada. Alguns alunos deram o seu palpite:

Aluno *A*12: *Tá parecendo que é um carro.*

Aluno *A*17: *Eu acho que é um boneco.*

Antes mesmo do término dos comandos os alunos perceberam que a imagem formada era do Snoopy.

O motivo da escolha da imagem do Snoopy foi o fato do personagem ser bastante conhecido. Ele foi criado em 1950 por Charles Schulz, com uma animação feita inicialmente na forma de tirinhas, que conquistou pessoas em vários países do mundo. Além disso, foi possível desenhar o personagem utilizando apenas as cores preta e branca, o que tornou mais fácil relacionar a imagem com pixel, pois a sequência apresentada foi pensada utilizando imagens binárias.

A Figura 4.2 nos mostra os alunos durante a construção da imagem do Snoopy no Geoplano.

Figura 4.2: Alunos construindo a imagem.

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

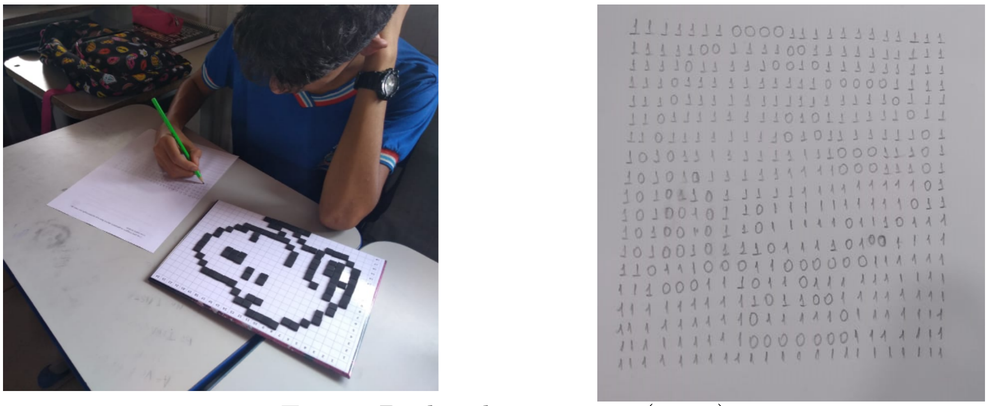
Após a construção da imagem do Snoopy no geoplano, foi feito pela pesquisadora um breve comentário sobre a primeira imagem digital que se tem registro e a sua relação com a matemática, mostrando que uma imagem tem uma representação matricial:

A primeira fotografia inteiramente digital que se tem registro foi realizada em 1957 por Russell Kirsch, ela tinha 176 pixels e era a foto do seu filho com três meses de idade. Essa foto foi registrada em preto e branco. Uma imagem digital é formada por pontos chamados de "pixel", cada pixel está associado a um elemento da matriz. Uma imagem em preto e braco está associada a uma matriz cujos elementos são 1 para a cor branco e 0 para cor preto.

Logo após o comentário, foi então solicitado que os alunos fizessem a representação matricial da imagem feita no geoplano, percebemos que o aluno formou o conceito de matriz . A Figura 4.3a ilustra o aluno $A23$ no momento da elaboração da representação matricial do Snoopy formada no geoplano e a Figura 4.3b nos mostra essa representação finalizada.

Figura 4.3: Aluno elaborando a representação matricial

(a) Imagem do Snoopy no geoplano. (b) Representação matricial



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Pelo registro do aluno percebemos que o mesmo não coloca a representação matricial dentro dos parenteses, isso porque a definição formal ainda não havia sido trabalhada com os alunos e, portanto, não tinham contato formal com o conteúdo de Matrizes.

A seguir, apresentamos mais um diálogo que foi constituído após esse momento:

Pesquisador: *Qual a relação da imagem formada com a matemática?*

Aluno $A12$: *Usamos números para formá-las.*

Aluno $A23$: *Com linhas e colunas formamos matrizes.*

Aluno $A31$: *Que é possível criar uma imagem através de uma matriz.*

Aluno $A17$: *A matemática tá em tudo, então tá nas imagens também*

Percebemos pela fala do Aluno $A17$ que o mesmo sabia que as imagens estavam relacionadas com a matemática, porém não conseguiu expressar de que forma específica essa relação.

A Matemática é considerada pelos alunos uma disciplina importante, pois está presente em todos os segmentos da nossa vida, mas, infelizmente, grande parte dos alunos possuem dificuldades em entender conceitos e definições matemáticas, e por isso apresentam dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Desse modo, quando relacionamos fatos do nosso cotidiano com a matemática, despertamos a curiosidade dos alunos que são levados a interagir com o que está sendo ensinado. Souza (2009, p. 15) afirma que " é preciso fazer os alunos verem a matemática na vida real, [$\cdots$] ligar a matemática que se estuda nas salas de aula com a matemática do cotidiano".

Observando as falas citadas anteriormente notamos que os alunos conseguiram relacionar uma imagem binária com matrizes, percebemos que foram capazes, pela construção da imagem no geoplano e como conseguiram transformá-la em uma matriz. Desta forma, concluímos que o objetivo da atividade foi alcançado.

A dificuldade encontrada durante a realização da atividade foi apenas o tempo, planejamos duas horas aula no entanto não foram suficientes para o término da atividade. Como a manipulação do geoplano é algo novo, os alunos ficaram envolvidos, criando figuras, vendo como utilizava o geoplano e, por isso, precisaram de um pouco mais de tempo para se familiarizarem com o material. Para aqueles que pensam em replicar essa proposta, a sugestão é que seja reservada três horas aula para a aplicação desta etapa da sequência.

4.2 Aplicação da segunda etapa

O objetivo dessa etapa é que os alunos sejam capazes de identificar alguns tipos de matrizes. Iniciamos a 2ª etapa relembrando que na primeira aula foi possível associar uma imagem binária a uma matriz. Que fizemos a imagem do Snoopy no geoplano e depois a sua representação matricial. Então foi feito a pergunta aos alunos: *Mas o que realmente é uma matriz?*

Aluno $A14$: *Uma tabela?!*

Aluno $A22$: *Um conjunto de números.*

Outros alunos também responderam a pergunta, porém as respostas foram as mesmas já dadas pelos alunos acima citados. Ao analisarmos as respostas percebemos que os alunos associaram a matriz a uma tabela, que foi um ponto positivo, pois iríamos trabalhar nesta etapa a definição de matriz. Então, após o comentário desses dois alunos, foi trabalhado a definição de matrizes.

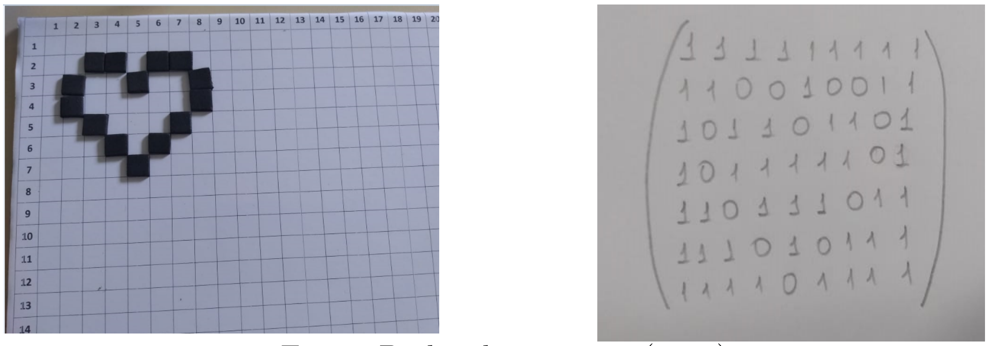
As definições utilizadas na sequência didática foram obtidas no livro didático adotado pela escola.

Definição de matrizes: Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1. Denomina-se matriz $m \times n$ (lê-se m por n) uma tabela retangular formada por $m \cdot n$ números reais, dispostos em m linhas e n colunas (DANTE, 2016, p. 65).

Para darmos início as atividades propostas, os alunos foram orientados novamente como na 1ª etapa a sentarem em grupos com três pessoas. Cada grupo recebeu um geoplano e como atividade solicitamos que criassem imagens no mesmo e depois fizessem a representação matricial. Os grupos criaram várias imagens: bonecos, letras e formas geométricas. A Figura 4.4a nos mostra uma imagem feita pelos alunos $A22$, $A13$ e $A15$ e a Figura 4.4b a sua representação matricial.

Figura 4.4: Imagem elaborada pelos alunos e a sua representação matricial

(a) Imagem feita pelos alunos. (b) Representação matricial



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Podemos então perceber que o aluno $A12$ fez a representação matricial conforme visto na definição, utilizando os parenteses, diferentemente da representação matricial feita pelo aluno $A23$, que mostramos na figura 4.3b, que não foi colocado os parenteses.

Seguimos então a aplicação da 2ª etapa, agora questionando aos alunos se eles conseguiam associar matrizes a outros exemplos da nossa realidade. E apenas dois alunos deram a sua opinião:

Aluno $A2$: *O boletim de notas*

Aluno $A3$: *Um cartão de jogo da loteria*

Pesquisadora: *Muito bem, podemos associar uma matriz a vários exemplos do nosso dia a dia. E hoje nós veremos alguns tipos de matrizes.*

As repostas dadas pelos alunos nos surpreenderam, pois os alunos conseguiram relacionar o conteúdo com exemplos do seu dia a dia, porém esperávamos que outros alunos também dessem suas opiniões, mas isso não aconteceu.

Trabalhamos a definição de algumas matrizes especiais, a saber: matriz quadrada, matriz linha, matriz coluna e matriz transposta.

Definição de matriz quadrada: Em uma matriz $m \times n$, quando $m = n$ (o número de linhas é igual ao número de colunas), diz-se que a matriz é quadrada do tipo $n \times n$ ou simplesmente de ordem n (DANTE, 2016, p. 67).

Foi também dito que em uma matriz quadrada os elementos a_{ij} com $i = j$ formam a diagonal principal da matriz. Depois definimos o que são matrizes linha e coluna, que são matrizes que possuem apenas uma linha ou uma coluna.

Neste momento, fizemos o seguinte questionamento:

Pesquisadora: *Será que todas as matrizes possuem diagonal principal?*

Aluno $A23$: *Não! As matrizes linha e coluna, por exemplo, não possuem diagonal principal.*

Aluno $A2$: *Acho que só as matrizes quadradas que vão ter diagonal principal.*

Pesquisadora: *Isso mesmo, apenas as matrizes quadradas possuem diagonal principal.*

Percebemos pela fala de alguns alunos, que os mesmos conseguiram associar a existência da diagonal principal apenas em matrizes quadradas.

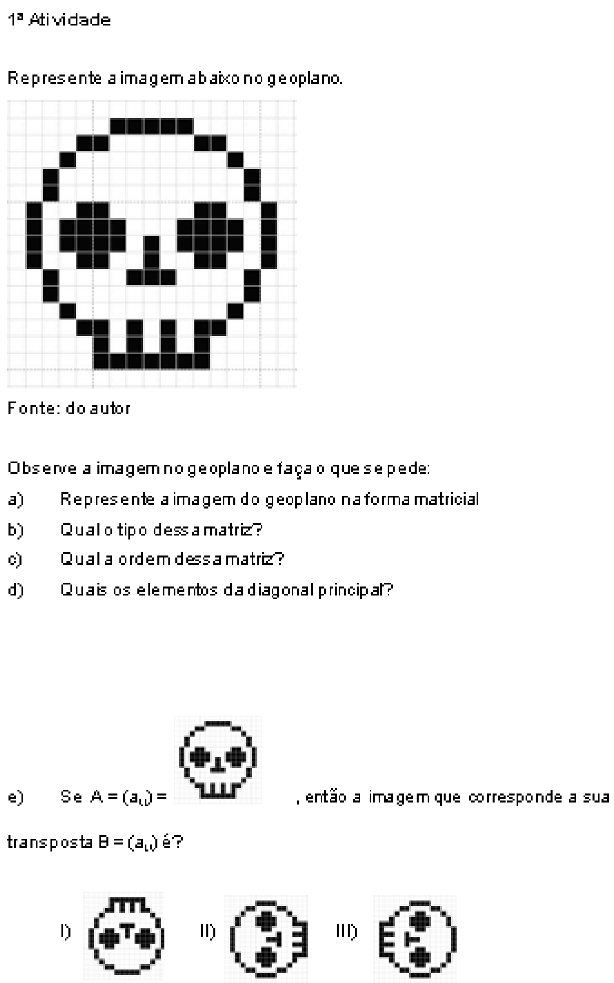
Continuamos a aula definindo a matriz transposta, que é um tipo de matriz especial.

Definição da matriz transposta: Seja A uma matriz $m \times n$. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A (DANTE, 2016, p. 73).

Como os alunos já estavam divididos em grupo, então foi entregue o geoplano e uma atividade impressa, a imagem desta atividade está logo abaixo, e solicitamos que os mesmos tentassem responder.

A Figura 4.5 nos mostra a primeira questão da atividade. A imagem da caveira foi elaborada pela pesquisadora, a partir de um gráfico de bordado de ponto cruz, pois foi possível relacionar esse gráfico com uma matriz binária.

Figura 4.5: Atividade impressa


1ª Atividade

Represente a imagem abaixo no geoplano.

Fonte: do autor

Observe a imagem no geoplano e faça o que se pede:

a) Represente a imagem do geoplano na forma matricial

b) Qual o tipo dessa matriz?

c) Qual a ordem dessa matriz?

d) Quais os elementos da diagonal principal?

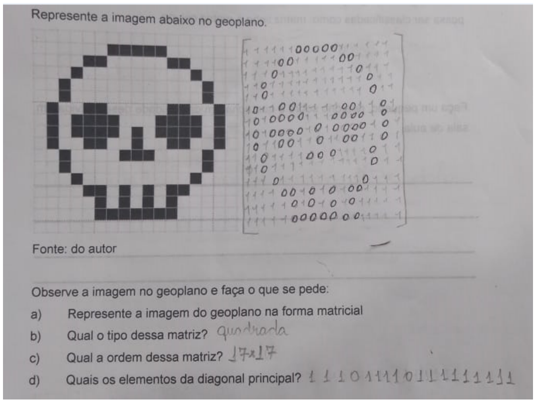
e) Se $A = (a_{ij})$ = , então a imagem que corresponde a sua transposta $B = (a_{ji})$ é?

I) II) III)

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Na primeira questão da atividade os alunos não tiveram dúvidas nos itens a), b), c) e d). Todos responderam conforme o que foi trabalhado em sala de aula. A Figura 4.6 nos mostra uma solução da atividade.

Figura 4.6: Resolução da atividade impressa



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

No item e) os alunos ficaram em dúvida entre as alternativas II) e III).

Porém solicitamos que os alunos lessem no livro didático a definição de matriz transposta.

Definição de matriz transposta de acordo o livro didático adotado pela escola:

Seja A uma matriz $m \times n$. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A (DANTE, 2016, p. 73).

Após a leitura da definição fizemos a seguinte observação: *A matriz transposta troca de lugar a linha pela coluna, em sua respectiva ordem, então o que podemos concluir com isso?*

Aluno $A17$: *Vou trocar a primeira linha de lugar com a primeira coluna, a segunda linha com a segunda coluna e assim por diante.*

Pesquisador: *Exatamente! Então qual seria a alternativa que representa a matriz transposta da imagem?*

Aluno $A17$: *A segunda , o II)*

Aluno $A12$: *O III)*

Pesquisadora: *Isso mesmo* $A17$. *Não poderia ser a alternativa III)* $A12$, *pois temos que obedecer uma ordem na troca das linhas e colunas. A alternativa III) não está correta pois a 1ª linha da imagem original está no lugar da última coluna na alternativa III). E como disse* $A17$, *temos que trocar a primeira linha de lugar com a primeira coluna, a segunda linha com a segunda coluna e assim por diante.*

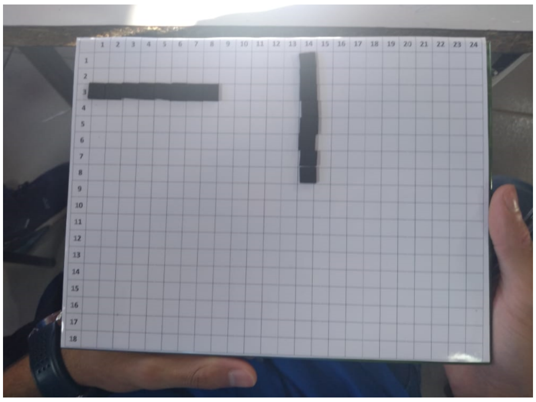
Durante essa discussão apenas os alunos $A12$ e $A17$ deram a sua opinião. Esperava que outros alunos também participassem oralmente, se envolvessem na discussão, mas isso não aconteceu.

A segunda questão da atividade impressa era a seguinte:

Crie imagens no geoplano de tal forma que a sua representação matricial possam ser classificadas como: matriz linha e matriz coluna.

A figura 4.7 nos mostra as imagens feitas pelos alunos representando matrizes linha e coluna.

Figura 4.7: Imagens feitas pelos alunos na 2ª questão

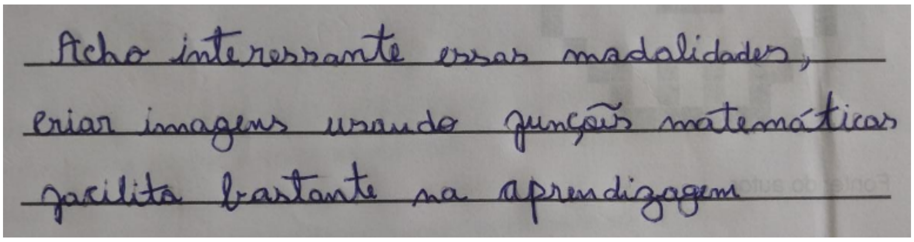


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Depois que todos concluíram a atividade, foi solicitado aos alunos que fizessem um pequeno relato sobre o que acharam da atividade desenvolvida. Os relatos são importantes pois utilizaremos as informações como dados para a nossa pesquisa.

As Figuras 4.8 e 4.9 nos mostram qual a opinião do alunos sobre a atividade.

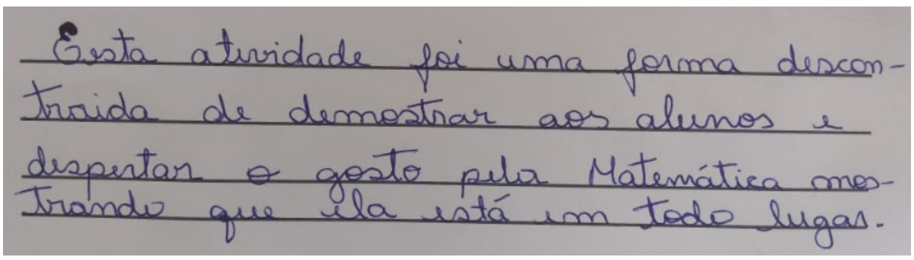
Figura 4.8: Opinião dos alunos sobre a atividade



Acho interessante essas modalidades,
criar imagens usando funções matemáticas
facilita bastante na aprendizagem

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Figura 4.9: Opinião dos alunos sobre a atividade



Esta atividade foi uma forma descon-
traida de demostrar aos alunos e
despertar o gosto pela Matemática mos-
trando que ela está em todo lugar.

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Observamos, pelos relatos dos alunos, que eles gostaram do tipo de atividade proposta, que eles perceberam que existe uma relação entre a matemática e as imagens digitais, porém em nenhum relato os alunos escreveram sobre os tipos de matrizes que estudamos durante essa etapa.

Portanto, ao final da atividade pude perceber que os alunos foram capazes de representar uma imagem na forma matricial e também souberam identificar e relacionar os vários tipos de matrizes com as imagens feitas no geoplano. Não houve nenhuma surpresa durante a aula e o tempo previsto de duas horas aula foi o suficiente para a realização da 2ª etapa.

4.3 Aplicação da terceira etapa

Nesta 3ª etapa, temos como objetivo que os alunos possam resolver situações-problemas que envolvam matrizes e as operações de adição e subtração entre elas.

Como já havíamos relacionado imagens binárias a matrizes nas etapas anteriores, começamos esta etapa com o seguinte questionamento:

Pesquisadora: *Nas últimas aulas vimos que uma imagem pode ser representada por uma matriz, então como seria somar matrizes?*

Aluno $A14$: *Juntar imagens?!*

Apenas o aluno $A14$ deu a sua opinião sobre como seria somar matrizes. Como os outros alunos não opinaram, foi feito outro questionamento.

Pesquisadora: *Mas o que seria necessário fazer para "juntar", somar imagens, já que uma imagem pode ser representada por matrizes?*

Aluno $A23$: *Somar os pixel.*

Aluno $A21$: *Somar os elementos?!*

Pesquisadora: *Então em uma soma entre matrizes temos que somar os elementos correspondentes. Uma observação importante, é que só podemos somar matrizes do mesmo tipo, ou seja, se somarmos duas matrizes, elas precisam ter a mesma quantidade de linhas e a mesma quantidade de colunas.*

Após essa conversa, trabalhamos a definição de soma e subtração de matrizes conforme a definição apresentada no livro didático adotado pela escola.

Definição para soma de matrizes: Dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, a soma de A com B (representa-se por $A + B$) é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$ (DANTE, 2016, p. 70).

Em outras palavras, a matriz soma C é do mesmo tipo de A e B e é tal que cada um de seus elementos é a soma de elementos correspondentes de A e B.

Definição para subtração de matrizes: Sendo A e B duas matrizes do tipo $m \times n$, denomina-se diferença entre A e B (representada por $A - B$) a soma da matriz A com a matriz oposta de B, isto é, $A - B = A + (-B)$ (DANTE, 2016, p. 71).

Durante a exposição das definições os alunos não participavam da aula e percebemos que muitos estavam dispersos.

Após a apresentação das definições a turma foi dividida em grupos com 3 pessoas, mas antes da entrega da atividade foi feito o seguinte comentário:

Pesquisadora: *Vocês já ouviram falar em sistema binário?! Um computador "pensa" ou seja, seus dados são processados com apenas 0 e 1. Isso é o Sistema Binário.*

Percebemos que alguns alunos já tinham ouvido falar que o computador processava seus dados utilizando o sistema binário, mas não souberam explicar como isso acontecia.

Pesquisadora: *Imagens digitais que usam apenas duas cores (em geral, preta e branca) são denominadas imagens binárias. Uma imagem binária é formada por bits, bit é a menor unidade de uma imagem, e um bit só pode assumir dois valores o número 0 que indica a cor preta e o número 1 indica a cor branca. Nesse tipo de matriz binária a soma e multiplicação são definidas de maneiras diferentes das somas e multiplicações usuais.*

Então foi feito o questionamento:

Pesquisadora: *Qual o resultado de somar 0 + 1 no sistema binário?*

Aluno *A*22: *1*

Pesquisadora: *Vamos pensar esses números 0 e 1, como as cores preta e branca, será que se eu somar a cor preta com a branca , qual será o resultado?*

Aluno *A*14: *Preto. Então a soma de 0 +1 será 0.*

Pesquisadora: *E se somar 1 + 1?*

Aluno *A*31: *2*

Pesquisadora: *Não. O sistema binário só tem os algarismos 0 e 1, não existe o algarismo 2 no sistema binário.*

Aluno *A*14: *Então qual o resultado de 1 + 1 no sistema binário?*

Pesquisadora: *Vamos pensar nas cores novamente, a cor branca somada com a cor branca será qual cor?*

Aluno *A*14: *Branco.*

Pesquisadora: *Exatamente! Na atividade que será entregue a vocês, tem uma tabelinha que irá auxiliá-los na soma e subtração de matrizes.*

Percebemos que os alunos apresentaram dificuldades em efetuar as operações no sistema binário, pois alguns estavam efetuando as somas como se fosse no conjuntos dos números naturais. Ao somarem 1 + 1 eles estavam colocando como resultado 2, porém perceberam que tinha algo errado, pois não conseguiram relacionar o número dois com as cores branco e preto, que no sistema binário a cor branca está relacionado ao número 1 e a cor preta ao número 0.

A atividade impressa entregue aos alunos traz as operações de adição e subtração de matrizes, mostrando como as operações realizadas com as matrizes correspondem a transformações na imagem. A figura 4.10 nos mostra a atividade entregue aos alunos.

Figura 4.10: Atividade impressa

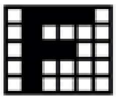
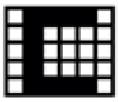
1ª Atividade

Já sabemos que uma imagem binária pode ser representada por uma matriz. Observe as imagens abaixo e resolva o que se pede.

Como vamos trabalhar com "bits", considere a seguinte tabela de adição no sistema binário. (A cor preta será representada por 0 e a branca por 1).

0 + 0 =	0
0 + 1 =	0
1 + 0 =	0
1 + 1 =	1

(Observação: o oposto de 0 é 1 e de 1 é 0)

Seja A =  e  :

Fonte: da autora

a) Faça a representação matricial de cada uma das imagens acima (podem usar o geoplano como auxilio) e some as matrizes. O resultado obtido será uma nova matriz, faça a sua representação no geoplano.

b) Faça a representação matricial de cada uma das imagens acima (podem usar o geoplano como auxilio) e subtraia as matrizes. O resultado obtido será uma nova matriz, faça a sua representação no geoplano.

O que significa somar imagens binárias?

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A atividade foi executada com tranquilidade, apenas no início dos cálculos que alguns se confundiram com a soma de matrizes binárias por ser algo novo para os alunos. Porém com um pouco mais de atenção, os alunos realizaram toda a atividade.

Durante a execução da atividade despertou o interesse dos discentes nas operações matriciais, pois queriam saber qual a imagem que seria formada ao somar e subtrair as matrizes. Enquanto faziam a soma das matrizes, muitos alunos já tinham percebido que o resultado encontrado como imagem seria a letra E. Porém a subtração levou um pouco mais de tempo para ser realizada, pois tinham que substituir o elemento oposto de 0 ou 1, de acordo a operação efetuada.

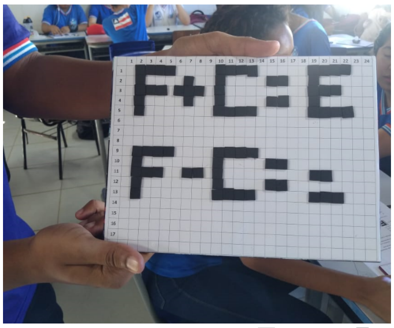
Pela definição trabalhada no início da aula sobre subtração de matrizes, sabemos que: Seja A e B duas matrizes de mesma ordem, a diferença entre A e B é a soma da matriz A com a matriz oposta de B, isto é:

$A - B = A + (-B)$

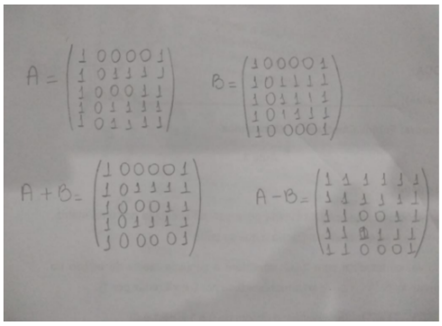
As Figuras 4.11 e 4.11a nos mostra o resultado obtido pelos alunos nos itens a) e b) da atividade.

Figura 4.11: Atividade realizada pelos alunos

(a) Representação da imagem.



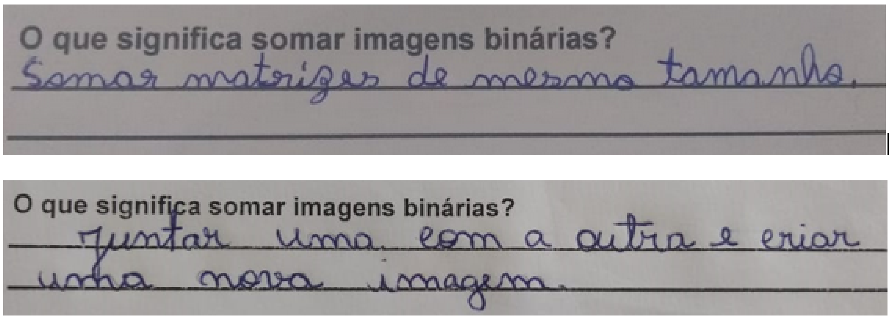
(b) Representação matricial



Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Os alunos também responderam a pergunta feita no final da atividade. *O que significa somar imagens binárias?* Podemos ver algumas respostas na figura 4.12.

Figura 4.12: Resposta dos alunos


O que significa somar imagens binárias?
Somar matrizes de mesmo tamanho.

O que significa somar imagens binárias?
Juntar uma com a outra e criar uma nova imagem.

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Percebemos, pelos comentários dos alunos, que o objetivo da 3ª etapa foi alcançado, pois eles resolveram toda atividade e conseguiram relacionar a soma e a subtração de matrizes ao processamento de imagens digitais.

Sabemos que quando é despertada a curiosidade nos alunos eles aprendem a gostar da disciplina, o que facilita o ensino da matemática. Atividades contextualizadas como estas que foram aplicadas nestas três etapas, permitem que o aluno compreenda situações do cotidiano, como as transformações que uma imagem digital pode sofrer, de forma criativa, motivadora e eficaz. De acordo Tufano (2001), contextualizar é o ato de colocar no contexto, ou seja, colocar alguém a par de alguma coisa; uma ação premeditada para situar um indivíduo em lugar no tempo e no espaço desejado.

Foram reservados para essa etapa duas horas aula, tempo suficiente para a sua aplicação. Não houve surpresas durante a aula.

4.4 Aplicação da quarta etapa

O objetivo desta 4ª etapa seria transformar uma matriz em uma imagem binária utilizando um software.

Infelizmente não foi possível a aplicação desta etapa, pois desde o final de 2019 o mundo vem passando por uma terrível crise na saúde com o Coronavírus.

Os primeiros casos começaram na cidade chinesa de Wuhan e hoje atingem praticamente todos os países do mundo. A Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou o coronavírus como pandemia no dia 11 de março de 2020. A doença já deixou mais de 680 mil mortos e cerca de 16 milhões de infectados no mundo.

Aqui no Brasil a primeira morte causada pelo Coronavírus aconteceu no dia 23 de janeiro de 2019 no estado de Minas Gerais. Após essa data a doença vem se espalhando por todo o país. No dia 06 de março de 2020 foi registrado o primeiro caso da doença na Bahia, na cidade de Feira de Santana, distante 100km da capital Salvador. No dia 18 de março de 2020 o governador do estado da Bahia, Rui Costa, assinou o decreto 19.549/2020 suspendendo as aulas em todas as escolas das redes estadual e privada da Bahia, válida por 30 dias e no dia 15 de abril de 2020 renovou o decretou com a suspensão das aulas até o dia 03 de maio. O decreto foi renovado no dia 28 de abril de 2020 mantendo as aulas suspensas até o dia 18 de maio. O decreto já foi renovado mais algumas vezes e neste momento as aulas estão suspensas até o dia 14 de agosto de 2020[1].

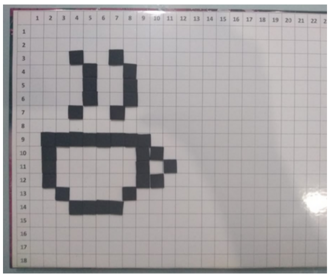
Diante disso, não foi possível a aplicação da 4ª etapa que estava agendada para acontecer no dia 23 de março. Os alunos foram avisados por meio de um comunicado via internet que não seria possível a aplicação desta etapa devido à atual circunstância.

Decidimos então descrever como seria a aplicação desta atividade. Primeiramente dividiríamos a turma em grupos de três alunos, como já vinha acontecendo. Entregaríamos a cada grupo um Geoplano e pediríamos que os mesmos criassem uma imagem no Geoplano, fizessem a representação matricial da imagem, digitasse essa matriz no Bloco de notas. Depois de programar toda matriz, salvaríamos como um arquivo do tipo *.txt e com o auxílio de um software visualizador, poderíamos ver a imagem digital na tela do computador. As figuras 4.13 nos mostram cada uma das partes dessa etapa.

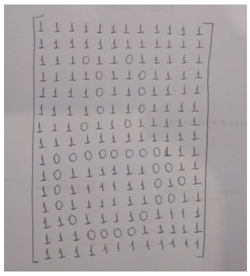
[1]BAHIA. DECRETO Nº19.635, DE 18 DE MARÇO DE 2020. Declara Situação de Emergência em todo o território baiano, afetado por Doença Infecciosa Viral - COBRADE 1.5.1.1.0, conforme a Instrução Normativa do Ministério da Integração Nacional nº 02, de 20 de dezembro de 2016, para fins de prevenção e enfrentamento à COVID-19, e dá outras providências, Bahia, mar 2020. Disponível em: <http://http://www.legislabahia.ba.gov.br/documentos/decreto-no-19549-de-18-de-marco-de-2020

Figura 4.13: Atividade realizada pela pesquisadora

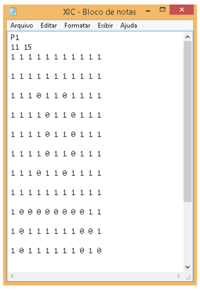
(a) Imagem no geoplano.



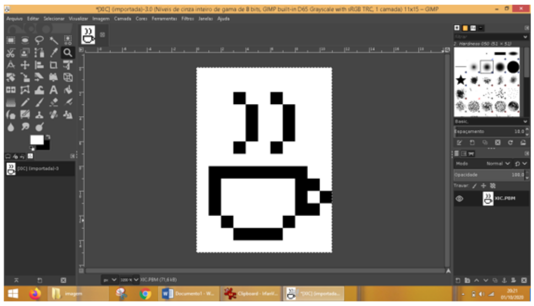
(b) Representação matricial.



(c) Programação no Bloco de Notas.



(d) Imagem Digital

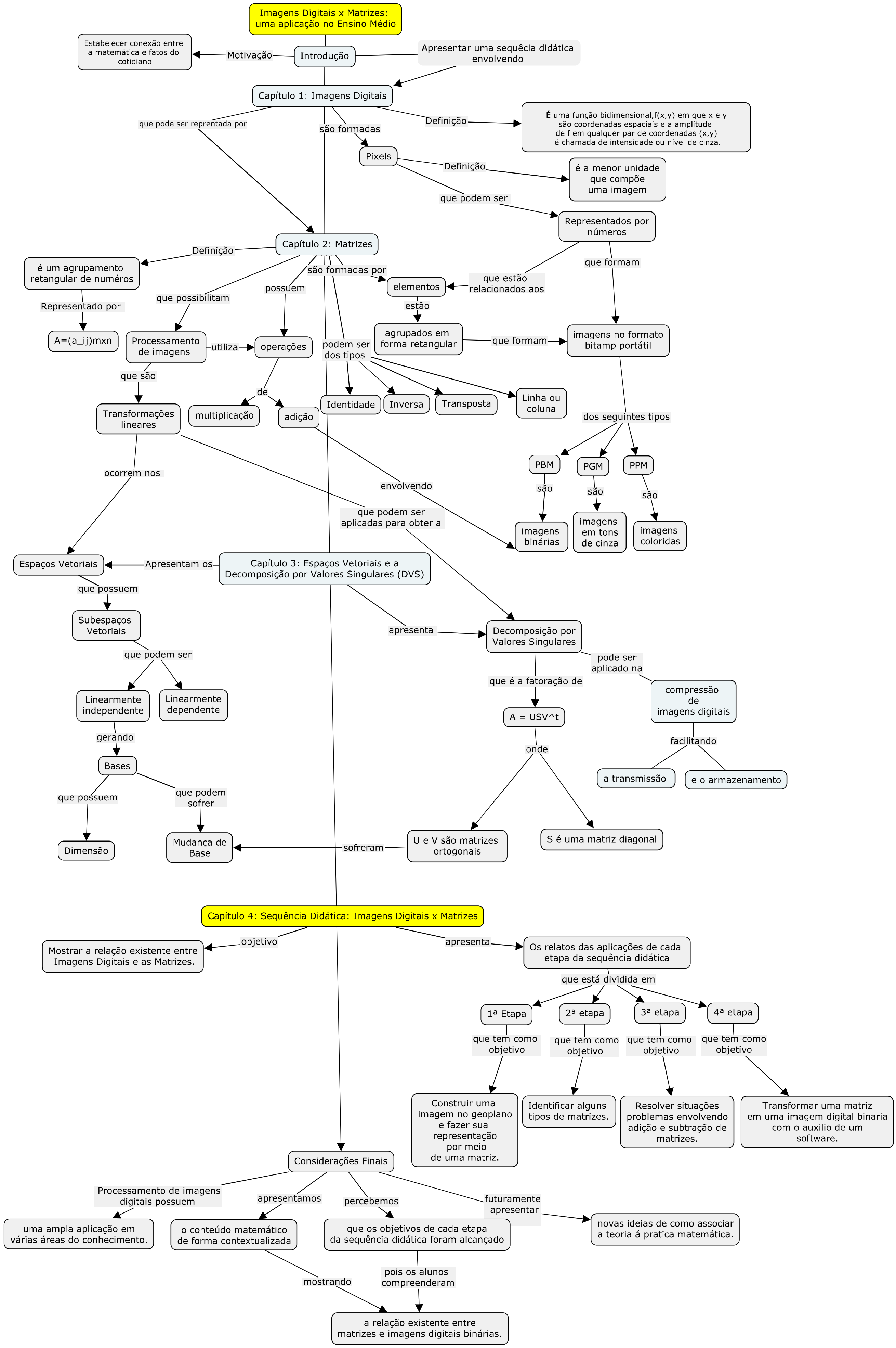


Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Infelizmente por conta da suspensão das aulas não foi possível a aplicação dessa etapa, mas temos certeza que seria uma experiência enriquecedora para os alunos, pois teriam a oportunidade de vivenciar essa experiência de criar uma imagem digital utilizando matrizes.

Toda a sequência está no apêndice desse trabalho. Para aqueles que pensam em aplicar esta etapa, a sugestão é que sejam reservadas duas horas aula.

O mapa conceitual a seguir mostra a relação existente entre as imagens digitais e as matrizes. Foi analisando essa relação que elaboramos e aplicamos a sequência didática apresentando uma aplicação pouco conhecida, que é o uso de matrizes no processamento de imagens digitais.


Imagens Digitais x Matrizes: uma aplicação no Ensino Médio
Introdução
Motivação
Estabelecer conexão entre a matemática e fatos do cotidiano
Apresentar uma sequêcia didática envolvendo
Capítulo 1: Imagens Digitais
Definição
É uma função bidimensional,f(x,y) em que x e y são coordenadas espaciais e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x,y) é chamada de intensidade ou nível de cinza.
que pode ser reprentada por
são formadas
Pixels
Definição
é a menor unidade que compõe uma imagem
que podem ser
Representados por números
que formam
imagens no formato bitamp portátil
dos seguintes tipos
PBM
são
imagens binárias
PGM
são
imagens em tons de cinza
PPM
são
imagens coloridas
Capítulo 2: Matrizes
Definição
é um agrupamento retangular de numéros
Representado por
A=(a_ij)mxn
que possibilitam
Processamento de imagens
utiliza
operações
de
multiplicação
adição
envolvendo
possuem
são formadas por
elementos
que estão relacionados aos
estão
agrupados em forma retangular
que formam
podem ser dos tipos
Identidade
Inversa
Transposta
Linha ou coluna
que são
Transformações lineares
ocorrem nos
que podem ser aplicadas para obter a
Espaços Vetoriais
Apresentam os
Capítulo 3: Espaços Vetoriais e a Decomposição por Valores Singulares (DVS)
que possuem
Subespaços Vetoriais
que podem ser
Linearmente independente
Linearmente dependente
gerando
Bases
que possuem
Dimensão
que podem sofrer
Mudança de Base
sofreram
apresenta
Decomposição por Valores Singulares
pode ser aplicado na
compressão de imagens digitais
facilitando
a transmissão
e o armazenamento
que é a fatoração de
A = USV^t
onde
U e V são matrizes ortogonais
S é uma matriz diagonal
Capítulo 4: Sequência Didática: Imagens Digitais x Matrizes
objetivo
Mostrar a relação existente entre Imagens Digitais e as Matrizes.
apresenta
Os relatos das aplicações de cada etapa da sequência didática
que está dividida em
1ª Etapa
que tem como objetivo
Construir uma imagem no geoplano e fazer sua representação por meio de uma matriz.
2ª etapa
que tem como objetivo
Identificar alguns tipos de matrizes.
3ª etapa
que tem como objetivo
Resolver situações problemas envolvendo adição e subtração de matrizes.
4ª etapa
que tem como objetivo
Transformar uma matriz em uma imagem digital binaria com o auxilio de um software.
Considerações Finais
Processamento de imagens digitais possuem
uma ampla aplicação em várias áreas do conhecimento.
apresentamos
o conteúdo matemático de forma contextualizada
mostrando
percebemos
que os objetivos de cada etapa da sequência didática foram alcançado
pois os alunos compreenderam
a relação existente entre matrizes e imagens digitais binárias.
futuramente apresentar
novas ideias de como associar a teoria á pratica matemática.

5 Considerações Finais

O estudo de Matrizes relacionado ao processamento de imagens digitais tem diversas aplicações em várias áreas do conhecimento humano, como economia, engenharia, física, computação entre outras. Essa é uma área de grande interesse de muitos pesquisadores brasileiros. Já existem diversos trabalhos publicados sobre o assunto com aplicações nas mais distintas áreas do conhecimento que vão muito além da própria Matemática. Dentre as quais, podemos citar as áreas de cunho tecnológico como as engenharias.

O problema que fundamentou o trabalho, foi verificar de que modo uma sequência didática abordando a aplicação de Matrizes às imagens digitais contribui para o ensino da Matemática dos alunos do Ensino Médio. Pois a utilização de matrizes no processamento de imagens digitais é uma aplicação ainda pouco explorada pelos professores de matemática.

Com este trabalho mostramos a relação existente entre as imagens digitais e as matrizes, trouxemos algumas aplicações das operações de matrizes e os efeitos produzidos nas imagens. Destacamos a aplicação da Decomposição por Valores Singulares (DVS), que é a fatoração de uma matriz qualquer na forma $A = U\Sigma V^t$. Ao representar uma imagem na forma de matriz, podemos então aplicar a DVS na compressão de imagens, possibilitando que sejam transmitidas mais rapidamente e que ocupem menos espaço de armazenamento.

A Decomposição por Valores Singulares possui diversas aplicações, podemos utiliza-la: no reconhecimento facial, na reconstrução de imagens, na criptografia entre outras. Porém, devido a pandemia, não houve tempo para implementá-las.

Aplicamos um sequência didática com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, para mostrar a relação entre imagens digitais e matrizes. Percebemos que os objetivos de cada etapa foram alcançados e verificamos que os alunos foram capazes de compreender a utilização das matrizes no processamento de imagens.

Quando elaboramos a sequência didática, procuramos atividades que realmente fosse possível a aplicação. Sabemos de todas as dificuldades encontradas nas escolas, como: a falta de estrutura, falta de material didático entre outros. Por isso escolhemos trabalhar com o geoplano magnético que é uma material de fácil aquisição e manuseio. E a utilização do mesmo foi de fundamental importância pois percebemos que facilitou a compreensão por parte dos alunos da relação existente entre as imagens binárias e as matrizes.

Observamos também que o processamento de imagens digitais é uma ferramenta didática que possibilita ao educando a aprendizagem do conceito de Matriz e suas operações de forma interativa.

Acreditamos que os objetivos dessa pesquisa foram alcançados, e que a partir dos objetivos específicos em explorar os conceitos envolvendo matrizes para interpretar o processamento de imagens digitais e a interpretação de como foi a aplicação da sequência didática com os alunos do 2º ano do Ensino Médio, foi possível atingir o objetivo geral que é descrever a aplicação da sequência didática sobre a relação existente entre o conteúdo de Matrizes e as imagens digitais.

Esperamos que este trabalho possa servir de suporte sobre o estudo de matrizes aplicada ao processamento de imagens digitais para professores, alunos e demais interessados nessa temática.

O processamento de imagens digitais é vasto e esse trabalho não esgotou o estudo sobre aplicações na matemática, avançamos na pesquisa quando apresentamos uma aplicação pouco conhecida sobre matrizes e uma sequência didática mostrando a relação entre matrizes e imagens digitais binárias. Esperamos que a partir dele possam surgir novas ideias para associar a teoria á prática em sala de aula, podendo assim melhorar o processo de ensino da matemática.

O estudo de matrizes aplicado ao processamento de imagens digitais possuem muitas aplicações. Como trabalhos futuros, pode-se elaborar uma sequência didática aplicada ao processamento de imagens coloridas utilizando como suporte algum software. Com relação a DVS, pode-se mostrar como aplicar essa decomposição em técnicas de reconhecimento facial. Deixamos como sugestão os trabalhos de: Pesco e Bortolossi (2013), Silva (2014) e Oliveira (2017a) como fonte de pesquisa para futuros trabalhos.

Bibliografia

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com aplicações**. Porto Alegre - RS: Bookman Companhia Editora LTDA, 2012.

AZEVEDO, G. T. de; MALTEMPI, M. V. **Produções criativas de matrizes e de transformações geométricas com metodologias ativas**. 2019. Disponível em: <http://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/15321>. Acessado em 20/04/2020.

BICUDO, M. A. V. Meta-análise: seu significado para a pesquisa qualitativa. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 9, p. 7–20, 2014.

BOYER, C. B. **História da matemática; tradução: Elza F**. [S.l.: s.n.], 1974.

BRASIL. **PCN**. 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acessado em 25/03/2020.

_____. **PCN+**. 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acessado em 01/03/2020.

_____. **PCNEM Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias–Parte III**. 2006. Disponível em:<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>.

_____. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2018-pdf/85121-bncc-ensino-medio/file>. Acessado em 22/04/2020.

CHEREGUINI, A. L. C. **Exploração do conceito de multiplicação de matrizes através de tecnologias digitais: sites e softwares educativos**. 2013. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São Carlos, 2013.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações: ensino médio**. 3ª. ed. São Paulo - SP: Ática, 2016.

EVES, H. Introdução à história da matemática, trad. **Higyno H. Domingues. Brasil: Editora UNICAMP**, 2011.

FILHO, O. M.; NETO, H. V. **Processamento digital de imagens**. [S.l.]: Brasport, 1999.

FREIRE, V. B. **Uma experiência didática com dobradura de papel e geometria das transformações no plano no ensino de matrizes no Ensino Médio**. 2018. 79 f. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas) — Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP, 2018.

GOMES, J.; VELHO, L. **Computação Gráfica: Imagem**. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, 1994.

GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento de Imagens Digitais**. São Paulo - SP: Editora Edgard Blucher Ltda, 2010.

IEZZI, G. et al. **Matemática: Ciências e Aplicações**. São Paulo - SP: Editora Saraiva, 2016.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações**. Rio de Janeiro - RJ: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1999.

LOPES, J. M. B. Formatos de imagem. **Computação Gráfica**, v. 3, 2003.

MACHADO, R. M. Minicurso: Explorando o geoplano. **II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em:< http://www. bienasbm. ufba. br M**, v. 11, 2006.

MESQUITA, N. B. Contextualização do ensino de matrizes como ferramenta motivadora. Universidade Federal de Alagoas, 2017.

OLIVEIRA, J. V. d. Estudo da decomposição em valores singulares e análise dos componentes principais. Volta Redonda, 2017.

OLIVEIRA, W. F. d. Uma proposta para ampliar a perspectiva de professores e alunos em relação ao estudo de matrizes. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2017.

PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. **Imagens Digitais e Matrizes**. **Gazeta de Matemática**, 2013. Acessado em 29/01/2020.

PONTE, J. P. da. Matemática: uma disciplina condenada ao insucesso. **Revista da Ensenhanza de Matematica**, v. 3, n. 4, 1994.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo - SP: Thomson, 2004.

RIBEIRO, D. M.; ARAUJO, L. C.; OLIVEIRA, E. S. de; CARISSIMI, A.; RIBEIRO, E. C. **Uma abordagem de matrizes na perspectiva de resolução de problemas**. 2019. Acessado em 23/04/2020.

SILVA, J. D. O. da. **Processamento de imagens digitais e o ensino de matrizes**. 2014. 160 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém-PA, 2014.

SOUZA, J. F. **Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática**. 2009. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2009.

TRINDADE, J. R. **Uma proposta de sequência didática para o ensino de matrizes no Ensino Médio**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, 2017.

TUFANO, W. **Contextualização. ln: FAZENDA, Ivani C. Dicionário em Construção: Interdisciplinaridade**. [S.l.]: São Paulo: Cortez, 2001.

ZABALA, A. **Á prática educativa** . Porto Alegre - RS: ArtMed, 1998.

A Sequência Didática - Primeira Etapa

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade
Disciplina: Matemática
Professora: Fabíolla dos Santos Andrade
Série: 2º ano do Ensino Médio

*Conteúdo: Matrizes
*Tempo estimado: 08 horas/aula
*Público: 2º ano do Ensino Médio
*Componente curricular: Matemática
*Material necessário: Geoplano magnético, papel, lápis e borracha.

1a Etapa

Aula 1: Relacionar uma imagem binária a uma tabela e logo depois a uma matriz
Número de aulas: 2h aula

- Pré-requisito:
    1. Operações básicas com números reais
    2. Organizar dados em uma tabela
- Objetivo:
    1. Construir um desenho no geoplano, seguindo os comandos dados pelo professor.
    2. Representar uma imagem por meio de matrizes.

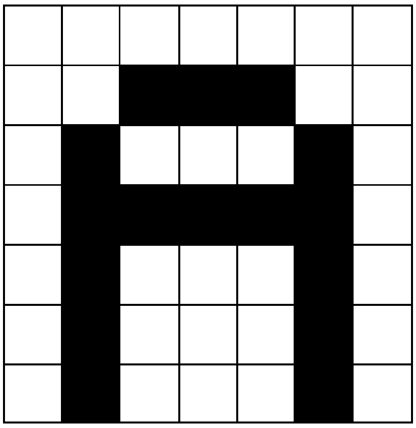
Imagens Digitais

As imagens que estão na tela do computador e celular ou as fotos tiradas com câmeras digitais são consideradas imagens digitais. Essas imagens são formadas por pontos, que são chamados de pixel. Quanto maior a quantidade de pixel de uma imagem, melhor será a sua qualidade. Uma imagem digital pode ser representada por uma tabela e consequentemente por uma matriz.

Veja um exemplo bem simples de como a imagem de uma letra pode ser representada através de uma tabela. A figura A.1 nos mostra a letra A e sua representação matricial.

Figura A.1: Imagem em representação matricial

1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1



Fonte: Elaborado pela autora (2020).

Para auxiliar na apresentação de informações ou facilitar cálculos, é comum a utilização de tabelas numéricas retangulares. Essas tabelas, compostas de certa quantidade de linhas (fileiras horizontais) e de colunas (fileiras verticais), são chamadas de matrizes. Existem três tipos de imagens: a binária (apenas as cores preto e branco), as imagens em tons de cinza e as imagens coloridas. Todas elas possuem uma representação matricial. A figura A.3 nos mostra os três tipos de imagens.

Figura A.2: Tipos de imagem

Fonte: Elaborado pela autora (2020).

1ª Atividade

Será dividida a turma em equipes com 3 alunos, e cada equipe receberá um geoplano magnético. Deixaremos os alunos manipularem livremente o geoplano e logo depois será solicitado que os mesmos sigam alguns comandos dados pelo professor. Será explicado as regras, onde cada peça terá uma posição no geoplano. O primeiro número corresponde a linha e o segundo a coluna.

- Coloque a primeira peça na posição (2,2)
- Coloque a segunda peça na posição (2,3)
- Coloque a terceira peça na posição (3,2)
- Coloque a quarta peça na posição (3,3).

Pergunta-se: Qual a imagem formada?

2ª Atividade

Ainda dividida a turma em equipes e utilizando o mesmo geoplano, daremos uma sequencia de comandos onde será possível construir a imagem do Snoopy.

Coloque uma peça em cada uma das seguintes posições:
(1,8), (1,9), (1,10), (1,11), (2,6), (2,7), (2,12), (2,13), (3,5), (3,11), (3,12), (3,14), (4,4), (4,15), (4,16), (4,17), (4,18), (4,19), (5,4), (5,20), (6,3), (6,12), (6,14), (6,21), (7,3), (7,12), (7,14), (7,22), (8,2), (8,4), (8,16), (8,17), (8,18), (8,22), (9,2), (9,4), (9,6), (9,16), (9,17), (9,18), (9,22), (10,2), (10,4), (10,7), (10,22), (11,2), (11,3), (11,4), (11,7), (11,10), (11,21), (12,2), (12,4), (12,5), (12,7), (12,10), (12,21), (13,2), (13,4), (13,5), (13,7), (13,10), (13,16), (13,20), (14,2), (14,4), (14,5), (14,7), (14,11), (14,16), (14,18), (14,19), (15,3), (15,7), (15,8), (15,9), (15,12), (15,13), (15,14), (15,15), (15,16), (15,17), (16,4), (16,5), (16,6), (16,10), (16,13), (17,11), (17,14), (17,15), (18,10), (18,11), (18,12), (18,13), (18,14), (18,15) e (18,16)

Após a construção, as equipes deverão explicar o que observaram. O professor deve intervir com perguntas sobre a figura construída:

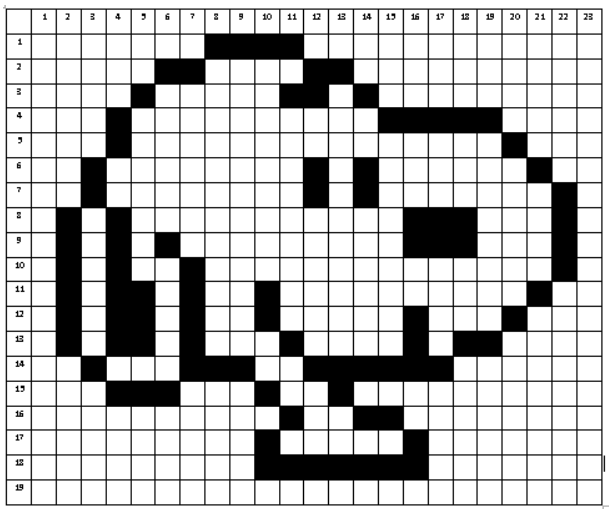
- Qual o nome da figura?
- Como foi construída no geoplano?
- Qual a relação dessa imagem com a matemática?

Será feita pelo professor um breve comentário sobre a origem das imagens digitais e a sua relação com a matemática, mostrando que uma imagem tem uma representação matricial. Cada pixel da imagem está relacionado a um elemento da matriz, e que as imagens binárias são representadas por matrizes cujos elementos são 0 (para a cor preta) e 1(para a cor branca).

> Uma imagem digital é formada por um grande número de pontos. Cada um desses pontos é chamado de "pixel". O "pixel" é a menor unidade de uma imagem digital. O megapixel é um múltiplo do pixel e corresponde a 1 milhão de pixels. Quanto maior o número de pixels, maior será o número de detalhes disponíveis no momento da captura da foto, tendo assim uma melhor resolução da imagem. Uma imagem binária pode ser associado por meio de um algoritmo computacional a uma matriz cujos os elementos são 0 e 1 (IEZZI et al., 2016, p. 72).

A figura A.3 nos mostra a imagem que deverá ser formada no geoplano, após todos os pontos serem marcados.

Figura A.3: Imagem formada no geoplano



Fonte: Elaborada pela autora (2020).

Logo depois os alunos deverão representar a imagem do Snoopy por meio de uma matriz binária.

Aula 2: Matrizes

Na primeira aula nós vimos que é possível associar uma imagem binária a uma matriz cujos elementos são 0 e 1. Usamos o geoplano como ferramenta para representar imagem e logo depois foi feita a representação dessas imagens na forma de matrizes. Mas o que é realmente uma matriz? Definição de matrizes Toda matriz tem o formato $m \times n$ (leia-se: m por n, com m e n $\in \mathbf{N}^*$), onde m é o número de linhas e n o número de colunas.

Representação de uma matriz:

As matrizes costumam ser representadas por letras maiúsculas e seus elementos por letras minúsculas, acompanhadas de dois índices que indicam, respectivamente, a linha e a coluna ocupada pelo elemento.

Na figura A.4, uma matriz A do tipo $m \times n$ é representada por:

Figura A.4: Representação matricial

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fonte: Dante (2016, p. 66)

3ª Atividade

Com a turma dividida em grupos de 3 pessoas, será solicitado a criação de imagens no geoplano e, depois, a sua representação por meio de matrizes. Será solicitado aos alunos um pequeno relatório sobre o que acharam da atividade desenvolvida em sala de aula.

- Pré – análise:

  Espera-se que os alunos percebam que as imagens digitais, em especial as binárias, podem ser representadas por matrizes. Que toda imagem possui uma quantidade de linhas e colunas. Que cada elemento de uma matriz é um pixel da imagem.

- Qual dificuldade os alunos poderão ter nessas atividades?

  Se atrapalharem com a localização de cada elemento da matriz, devido à ordem linha e coluna.

- Como trabalhar essa dificuldade:

  Se observada essa dificuldade em localização dos elementos da matriz, podemos utilizar a atividade proposta apresentada na figura A.5.

Figura A.5: Atividade proposta

Atividade Proposta

1) Observe a matriz A e responda:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 2 \\ 0 & 3 & 39 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

a) Quais os elementos da 2ª linha?
b) Quais os elementos da 3ª coluna?
c) Qual é o número que está da 3ª linha e 2ª coluna? E na 1ª linha e na 2ª coluna?
d) Qual o resultado da soma dos números da 1ª coluna?

Fonte: Elaborada pela autora (2020).

B Sequência Didática - Segunda Etapa

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade
Disciplina: Matemática
Professora: Fabíolla dos Santos Andrade
Série: 2º ano do Ensino Médio

2a Etapa

Aula 1: Matrizes especiais

Número de aulas: 2h aula

- Pré-requisito:

  1. Organizar dados em uma tabela

- Objetivo:

  1. Identificar os tipos de matrizes

Matrizes especiais

Qual a relação da imagem digital com as matrizes? Vocês conseguem associar matrizes a outros exemplos da nossa realidade? Hoje veremos alguns tipos de matrizes.

Exemplo: Este tipo de representação abaixo, pode ser considerado uma matriz?

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

A resposta é sim. Esse é um tipo de matriz especial.

Matriz linha e matriz coluna

São matrizes que possuem apenas uma linha ou uma coluna.

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é um exemplo de matriz linha

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ é uma exemplo de matriz coluna.

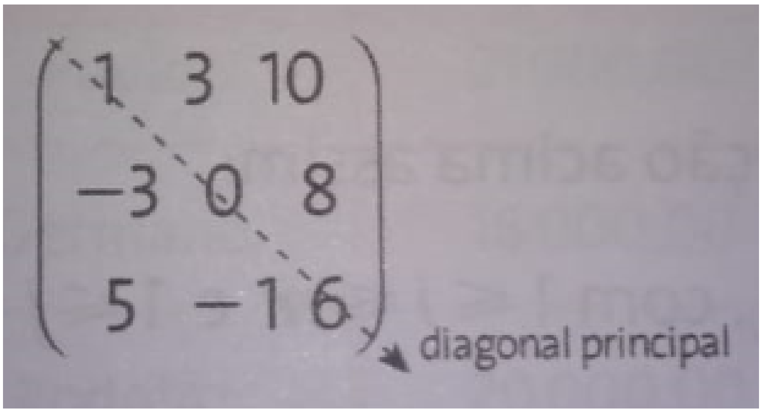
As matrizes quadradas são outro tipo de matriz bastante utilizado.

Matriz quadrada

Definição:

Em uma matriz $m \times n$, quando $m = n$ (o número de linhas é igual ao número de colunas), diz-se que a matriz é quadrada do tipo $n \times n$ ou simplesmente de ordem n. Em uma matriz quadrada de ordem n, os elementos a_{11},a_{22},$a_{33,...,}$$a_{nn}$ formam a diagonal principal da matriz (são os elementos a_{ij} com $i = j$). A figura B.1 nos mostra a representação de uma matriz quadrada, destacando a diagonal principal.

Figura B.1: Matriz quadrada



Fonte: Dante (2016, p. 67).

Matriz transposta

Seja A uma matriz $n \times m$. Denomina-se matriz transposta de A (indica-se por A^t) a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de A. Todas as definições podem ser retiradas do livro didático adotado pela escola.

Podemos ver uma das atividades aplicada nesta etapa na figura B.2.

2ª Atividade: Crie imagens no geoplano de tal forma que a sua representação matricial possa ser classificadas como: matriz linha e matriz coluna. Será solicitado aos alunos um pequeno relatório sobre o que acharam da atividade desenvolvida em sala de aula.

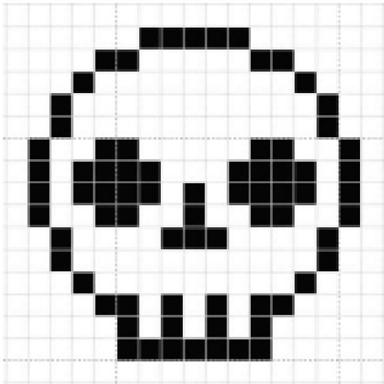
- Pré – análise:

  Espera-se que os alunos sejam capazes de representar e interpretar uma imagem como uma matriz e identificar os vários tipos de matrizes.

Figura B.2: Atividade

1ª Atividade

Represente a imagem abaixo no geoplano.



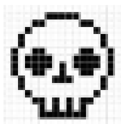
Observe a imagem no geoplano e faça o que se pede:

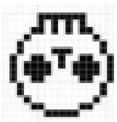
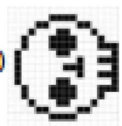
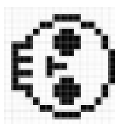
a) Represente a imagem do geoplano na forma matricial

b) Qual o tipo dessa matriz?

c) Qual a ordem dessa matriz?

d) Quais os elementos da diagonal principal?

e) Se $A = (a_{ij}) =$  , então a imagem que corresponde a sua transposta $B = (a_{j,i})$ é?

a)  b)  c) 

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

- Qual dificuldade os alunos poderão ter nessas atividades?

  Não conseguirem associar as imagens formadas no geoplano com os vários tipos de matrizes.

- Como trabalhar esta dificuldade?

  Podemos propor a construção de imagens mais simples, como quadrados, linhas e colunas, podendo ser feito o comando pelo próprio professor, como foi feito na construção do Snoopy da aula 1.

C Sequência Didática - Terceira Etapa

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade
Disciplina: Matemática
Professora: Fabíolla dos Santos Andrade
Série: 2º ano do Ensino Médio

3a Etapa

Aula 1: Adição e subtração de matrizes
Número de aulas: 2h aula.
Componente curricular: Matemática

- Pré-requisito:
    1. Operações básicas adição e subtração
- Objetivo:
    1. Resolver situações problema que envolva matrizes e as operações de adição e subtração entre elas.

Adição de matrizes

Como já vimos nas aulas anteriores, uma imagem binária pode ser representada por uma matriz. Então o que vocês acham o que seria somar duas imagens, ou melhor, o que seria somar matrizes? Alguém pode exemplificar? Para realizar a adição entre matrizes A e B, essas devem ser de mesma ordem, ou seja, devem possuir o mesmo número de linhas e colunas. Agora, para efetuar a operação, temos que somar termo a termo da matriz, isto é, elemento correspondente a elemento corresponde.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}$$

Subtração de matrizes

Para realizar a subtração entre matrizes A e B, elas também devem ser de mesma ordem, ou seja, devem possuir o mesmo número de linhas e colunas. Agora, para efetuar a operação, temos que subtrair termo a termo da matriz, isto é, elemento correspondente a elemento corresponde. Sendo A e B duas matrizes de mesma ordem, a diferença entre A e B (representada por $A - B$) é a soma da matriz A com a matriz oposta de B, isto é:

$$A - B = A + (-B)$$

A figura C.1 nos mostra a atividade aplicada nesta etapa.

Figura C.1: Atividade

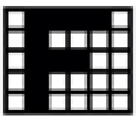
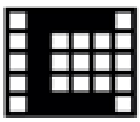
1ª Atividade

Já sabemos que uma imagem binária pode ser representada por uma matriz. Observe as imagens abaixo e resolva o que se pede.

Como vamos trabalhar com "bits", considere a seguinte tabela de adição no sistema binário. (A cor preta será representada por 0 e a branca por 1).

0 + 0 =	0
0 + 1 =	0
1 + 0 =	0
1 + 1 =	1

(Observação: o oposto de 0 é 1 e de 1 é 0)

Seja A =  e  :

Fonte: da autora

a) Faça a representação matricial de cada uma das imagens acima (podem usar o geoplano como auxilio) e some as matrizes. O resultado obtido será uma nova matriz, faça a sua representação no geoplano.

b) Faça a representação matricial de cada uma das imagens acima (podem usar o geoplano como auxilio) e subtraia as matrizes. O resultado obtido será uma nova matriz, faça a sua representação no geoplano.

O que significa somar imagens binárias?

____

____

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

- Pré – análise:

  Espera-se que os alunos sejam capazes de efetuar os cálculos envolvendo as operações com matrizes e associem as operações com imagens com as operações entre matrizes.

- Qual dificuldade os alunos poderão ter nessas atividades?

  Como o sistema binário é algo novo para a maioria dos alunos, eles podem apresentar dificuldades em efetuarem os cálculos com as operações de matrizes.

Sugestão de atividades

Deixamos a imagem da figura C.2 como sugestão de atividade, caso os alunos apresentem dúvidas na atividade proposta nesta etapa da sequência didática.

Figura C.2: Sugestão de Atividade

Atividade

A soma de imagens binárias nos dá a ideia de unir imagens. Vejamos o exemplo abaixo:

Fonte: da autora

A cor preta da imagem quando representado por meio de uma matriz o elemento correspondente será o numero 0 e a cor branca é o número 1.

A tabela abaixo nos mostra como é feita a adição das cores nas imagens.

0 + 0 =	0
0 + 1=	0
1 + 0 =	0
1 + 1 =	1

Observe a tabela acima e efetue as adições das matrizes binárias abaixo, depois transforme essa matriz em uma imagem.

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, qual a matriz C, sendo C = A+B?

Represente a matriz C encontrada na forma de imagem. (Lembre-se que o elemento 0 representa a cor preta e 1 a cor branca).

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

D Sequência Didática - Quarta Etapa

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
Colégio Estadual Dom Climério de Almeida Andrade
Disciplina: Matemática
Professora: Fabíolla dos Santos Andrade
Série: 2º ano do Ensino Médio

4ª Etapa

Aula 1: Transformar uma matriz em uma imagem digital binária
Número de aulas: 2h aula

- Pré-requisito:
    1. representar uma imagem binária em forma de matriz
    2. Noções básicas de computação
- Objetivo:
    1. Construir um desenho no geoplano, transformar esse desenho em uma matriz numérica, programar essa matriz no Notepad e depois visualizar a imagem digital formada com o auxilio de um leitor de imagens.

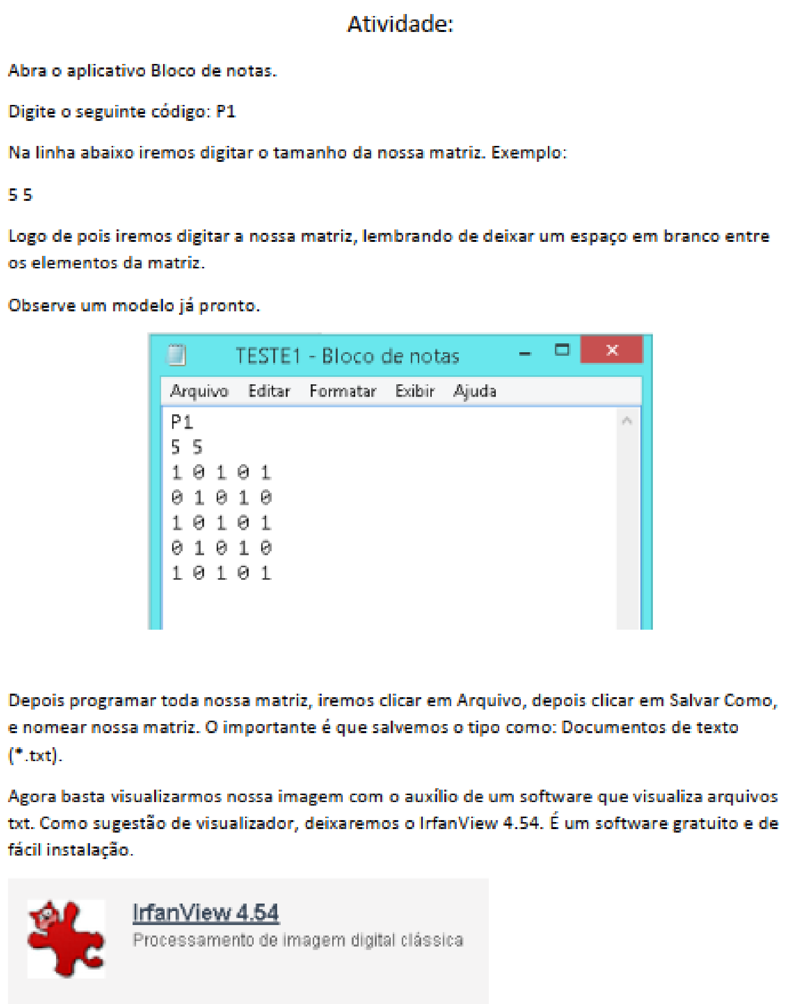
Transformando matrizes em imagens digitais binárias

Durante as últimas três aulas percebemos que existe uma relação entre as matrizes e o processamento de imagens digitais. Hoje veremos na prática como podemos transformar uma imagem criada pelos alunos em uma imagem digital binaria.

A figura D.1 é a atividade para ser aplicada com os alunos na 4ª etapa.

Ápos o término da atividade será possível colocarmos lado a lado a imagem feita pelo aluno no geoplano, a sua representação matricial e a imagem exibida na tela do computador, cumprindo assim o objetivo da atividade que é transformar uma imagem binária em uma imagem digital.

Figura D.1: Atividade



Atividade:

Abra o aplicativo Bloco de notas.

Digite o seguinte código: P1

Na linha abaixo iremos digitar o tamanho da nossa matriz. Exemplo:

5 5

Logo de pois iremos digitar a nossa matriz, lembrando de deixar um espaço em branco entre os elementos da matriz.

Observe um modelo já pronto.

TESTE1 - Bloco de notas

Arquivo Editar Formatar Exibir Ajuda

```
P1
5 5
1 0 1 0 1
0 1 0 1 0
1 0 1 0 1
0 1 0 1 0
1 0 1 0 1
```

Depois programar toda nossa matriz, iremos clicar em Arquivo, depois clicar em Salvar Como, e nomear nossa matriz. O importante é que salvemos o tipo como: Documentos de texto (*.txt).

Agora basta visualizarmos nossa imagem com o auxílio de um software que visualiza arquivos txt. Como sugestão de visualizador, deixaremos o IrfanView 4.54. É um software gratuito e de fácil instalação.

IrfanView 4.54

Processamento de imagem digital clássica

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Pré – análise:

Espera-se que os alunos sejam capazes de transformar uma imagem binária criada no geoplano em uma imagem binária digital, que será visualizada na tela do computador.

Qual dificuldade os alunos poderão ter nessa atividade? Alguns alunos poderão ter dificuldade em fazer a programação no Bloco de Notas. Se encontrada essa dificuldade o professor poderá auxiliá-lo a fazer essa programação.

E Termo de Consentimento Livre e Esclarecido para obtenção e utilização de imagem

---

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E DEPOIMENTOS

Eu____, CPF _______________, depois de conhecer e entender os objetivos, procedimentos metodológicos e beneficios da pesquisa, bem como estar ciente da necessidade do uso de minha imagem e/ou depoimento, especificados no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), AUTORIZO, através do presente termo, a pesquisadora **Fabíolla dos Santos Andrade** do projeto de pesquisa intitulado "**Imagens Digitais e Matrizes: uma aplicação no Ensino Médio**" a realizar as fotos que se façam necessárias e/ou a colher meu depoimento sem quais quer ônus financeiros a nemhuma das partes.

Ao mesmo tempo, libero a utilização destas fotos e/ou depoimentos para fins científicos e de estudos (livros, artigos, dissertações e slides), em favor da pesquisadora, acima especificado, obedecendo ao que está previsto nas Leis que resguardam os direitos das crianças e adolescentes (Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA, Lei Nº 8.069/1990), dos idosos (Estatuto do Idoso, Lei Nº 3.298/1999, alterado pelo Decreto Nº 5.296/2004).

Vitória da Conquista – Ba, ____ de ___________de _____

____

Participante da Pesquisa ou seu representante legal

____

Fabíolla dos Santos Andrade