Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciência
Instituto de Matemática e Estatística

Roberto Batista de Oliveira

Expansão das Frações Contínuas dos Números de Ouro e Euler

Rio de Janeiro
2020

Roberto Batista de Oliveira

Expansão das Frações Contínuas dos Números de Ouro e Euler

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof.ª Dra. Mariana Gesualdi Villapouca

Rio de Janeiro
2020

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

O48 Oliveira, Roberto Batista de.
Expansão das frações contínuas dos Números de Ouro e Euler/ Roberto Batista de Oliveira. – 2020.
86 f. : il.

Orientadora: Mariana Gesualdi Villapouca.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Teoria dos números - Teses. 2. Frações contínuas - Teses. 3. Números de Euler - Teses. 4. Segmento áureo - Teses. I. Villapouca, Mariana Gesualdi. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 511

Patricia Bello Meijinhos CRB7/5217 -Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

_______________________________ _______________________

Assinatura Data

Roberto Batista de Oliveira

Expansão das Frações Contínuas dos Números de Ouro e Euler

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 03 de Setembro de 2020.

Banca Examinadora:

Prof.ª Dra. Mariana Gesualdi Villapouca (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Helvecio Rubens Crippa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. André da Rocha Lopes
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Eduardo Barbosa Pinheiro
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2020

DEDICATÓRIA

A toda minha família que acreditou em mim e compreendeu minhas ausências.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por estar sempre do meu lado.

Agradeço a minha Vó, Maria Aparecida, e minha mãe, Jucelha por ambas sempre ter acreditado e se empenhado para que eu pudesse estudar.

Agradeço a minha amada esposa, Adriana por estar sempre do meu lado, me apoiando e compreendendo, durante esse curso tão cansativo.

Agradeço a minha filha, Jasmin, meus irmãos Izidoro, Izamara e Jucimara por compreender minhas ausências.

Agradeço a meus colegas de classe Graziele, Leandro e Fernando pelos momentos de estudos e ajudas.

Agradeço a todos os professores. Em especial minha orientadora Mariana, por toda atenção, dedicação e paciência que teve comigo.

A sabedoria comunica a vida a seus filhos
e acolhe os que a procuram.
Bíblia Sagrada. Eclo 4,12

RESUMO

OLIVEIRA, Roberto Batista de.*Expansão das Frações Contínuas dos Números de Ouro e Euler* . 2020. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo sobre frações contínuas para conseguir representar o número de Ouro e o número de Euler de forma bem didática, para poder ser lido por qualquer estudante que gostar de matemática, com vários exemplos, além das demonstrações necessárias. As partes que vão requerer maior conhecimento matemático do leitor são as demonstrações. Tivemos como material base os três primeiros capítulos de (DíAZ; JORGE, 2007). Construímos a representação em frações contínuas dos números racionais por meio do algoritmo da divisão de Euclides e dos números irracionais usando a transformação de Gauss. Com a representação por frações contínuas dos números de Ouro e Euler encontramos ótimas aproximações para os mesmos.

Palavras-chave: Frações contínuas . Número de Ouro. Número de Euler . Transformação de Gauss.

ABSTRACT

OLIVEIRA, Roberto Batista de.*Expansão das Frações Contínuas dos números de Ouro e Euler*. 2020. 87 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2020.

This dissertation aims to conduct a study on continued fractions to be able to represent the Golden ratio and the Euler‘s number in a very didactic way, so that it can be read by any student who likes mathematics, with several examples, in addition to the necessary proves. The parts that will require the most mathematical knowledge from the reader are the proves. This work was based on the first three chapters of (DíAZ; JORGE, 2007). We constructed the continued fraction representation for rational number using the Euclidean algorithm and the irrational numbers using the Gauss map. With the representation by continued fractions of these numbers obtained, we found best rational approximations for them.

Keywords: Continued fractions. Golden ratio. Euler number. Gauss map.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

ϕ	Número de Ouro
e	Número de Euler

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

É notório que os matemáticos sempre buscam por padrões até mesmo em números irracionais, que como diz a lenda na época de Pitágoras, eram considerados um erro de Deus. Uma ótima ferramenta para isso são as frações contínuas, que é uma forma de representar um número real, sendo uma série de frações com a próxima compondo o denominador da anterior e todas com numeradores iguais a um. Veremos seu formato na Definição 1.

Além de nos concederem algumas sequências invejáveis para muitos dos números irracionais, também podemos obter excelentes aproximações para os números de ouro e de Euler, por exemplo. Essa é uma das aplicações das frações contínuas. Por meio dessas podemos encontrar por exemplo $\frac{55}{34}$ e $\frac{987}{610}$ como aproximações para o número de Ouro (ϕ) com margens de erro destas aproximações bem pequenas, como veremos a seguir:

$$\left|\phi - \frac{55}{34}\right| < \frac{1}{1156} \qquad \left|\phi - \frac{987}{610}\right| < \frac{1}{372100}$$

e ainda $\frac{87}{32}$ e $\frac{1457}{536}$ para o número de Euler (e), com margem de erro das aproximações:

$$\left|e - \frac{87}{32}\right| < \frac{1}{1024} \qquad \left|e - \frac{1457}{536}\right| < \frac{1}{266256}$$

O mais convencional para escrevermos uma aproximação de um número irracional por meio de uma fração é com denominador de base 10. Sendo que podemos verificar que as frações obtidas pelas frações contínuas apresentam uma melhor precisão utilizando menos algarismos. Observando a comparação do número de Ouro temos:

$$\left|\phi - \frac{55}{34}\right| < \left|\phi - \frac{161}{100}\right| \qquad \left|\phi - \frac{987}{610}\right| < \left|\phi - \frac{161803}{100000}\right|$$

e do número de Euler:

$$\left|e - \frac{87}{332}\right| < \left|e - \frac{171}{100}\right| \qquad \left|e - \frac{1457}{536}\right| < \left|e - \frac{27182}{10000}\right|$$

Este trabalho tem como objetivo apresentar as frações contínuas de uma forma bem simples para que qualquer estudante iniciante no curso de matemática ou até mesmo um curioso interessado na área consiga ler e compreender o material. O mesmo está bem detalhado e com alguns exemplos para o leitor.

No primeiro capítulo faremos a apresentação das frações contínuas, dando ênfase para os números racionais, observando e demonstrando o fato de que eles possuem uma representação finita por meio das frações contínuas. Para isso teremos como princípio básico o algoritmo da divisão de Euclides e em seguida o algoritmo das divisões sucessivas, o famoso método do jogo da velha.

No segundo capítulo faremos a construção em frações contínuas dos números irracionais por meio da Transformação de Gauss e veremos que o conceito de restos do algoritmo da divisão de Euclides também será útil. Concluiremos que os números irracionais possuem uma representação em frações contínuas infinita. Além de observarmos que por meio das frações contínuas encontramos ótimas aproximações dos números irracionais.

No terceiro capítulo iremos trabalhar, apresentando e demonstrando, algumas das principais propriedades das frações contínuas, com destaque para as propriedades dos convergentes. Podemos dizer que esse é o capítulo chave para conseguirmos os objetivos dos capítulos seguintes. Assim concluindo que a sequência dos números racionais formados pelos n-ésimos convergentes de um número x irracional convergirá para o próprio x.

No quarto capítulo apresentaremos o número de Ouro, com toda a beleza da razão áurea interlaçando com a fabulosa sequência de Fibonacci, apresentando um pouco do contexto histórico, encontrando a relação entre elas e construindo a representação em frações contínuas da razão áurea observando a extrema elegância da mesma. Além de encontrarmos aproximações espetaculares para o número de ouro e concluindo que o quociente entre números consecutivos da sequência de Fibonacci convergem para a razão áurea.

No quinto capítulo apresentaremos o número de Euler com um pouco de seu contexto histórico e suas diferentes representações. E construiremos sua representação em frações contínuas, e com ela perceberemos que até números irracionais cuja sua representação decimal apresenta uma sequências de números sem padrão podem apresentar uma lógica. Além de encontrarmos ótimas aproximações por meio de números racionais, obtida pela representação em frações contínuas.

1 A EXPANSÃO EM FRAÇÕES CONTÍNUAS DOS NÚMEROS RACIONAIS

Apresentaremos neste capítulo o algoritmo da divisão de Euclides e a definição de máximo divisor comum (mdc) para a construção das frações contínuas de um número racional.

Frações contínuas é uma expressão que apresenta uma série de frações, como veremos na Definição abaixo, onde todos os numeradores são iguais a um. Podendo assim representar um número real qualquer.

***Definição* 1.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Denominamos de fração contínua de um número real x, a seguinte representação:*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}, \text{ onde, } a_0 \in \mathbb{Z},\ a_i \in \mathbb{N}^\star, \text{ com } i \in \mathbb{N}^\star.$$

Assim, podemos escrever $x = a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots]$.

1.1 Algoritmo da divisão de Euclides

Nesta seção mostraremos o algoritmo da divisão de Euclides, o máximo divisor comum (mdc) entre dois inteiros e o algoritmo das divisões sucessivas. Pois estas ferramentas serão importantes no estudo das expansões em frações dos números irracionais.

***Teorema* 1** (Algoritmo da divisão de Euclides)**.** *(HEFEZ, 2016) Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem unicamente dois números inteiros q e r tais que*

$$a = bq + r \quad com \quad 0 \leq r \leq |b|$$

Chamaremos a, b, q e r, respectivamente de divisor, dividendo, quociente e resto.

Demonstração: Vamos demonstrar a existência e a unicidade dos números q e r.

Pela sentença, $a = bq + r$ com $0 \leq r \leq |b|$, temos que $r \in \mathbb{N}$. Considere o conjunto:

$$A = \{r = a - bq; q \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$$

Existência: Sendo $a \geq b$, logo $-a \leq -b$, assim existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q(-b) \geq -a$, logo $a - qb \geq 0$, assim $r \in \mathbb{N}$. Logo A não é um conjunto vazio. Pelo princípio da boa ordenação

[1], temos que o conjunto A tem como menor elemento possível o zero, pois $r \geq 0$ e que r é o menor elemento.

Vamos mostrar agora que $r < |b|$.

Supondo, por absurdo, que $r \geq |b|$, assim existe $x \in \mathbb{N}$ tal que $r = |b| + x$, logo $0 \leq x < r$, o que contradiz o fato de r ser o menor elemento do conjunto A. Logo, $r < |b|$.

Unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, com $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant r < |b|$ e $0 \leqslant r' < |b|$.

Temos que $|b| > r$, logo $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$, também temos que:

$$\begin{aligned} bq + r &= bq' + r' \\ bq - bq' &= r' - r \\ b(q - q') &= r' - r \\ |b||q - q'| &= |r' - r| < |b| \end{aligned}$$

$|b||q - q'| < |b|$, só é possível se $|q - q'| = 0$. Logo $q = q'$.

Assim temos que:

$$\begin{aligned} |b| \cdot 0 &= |r' - r| \\ 0 &= |r' - r| \\ r &= r' \end{aligned}$$

Com isso $q = q'$ e $r = r'$, logo q e r são únicos.

■

Assim, mesmo quando um inteiro $b \neq 0$ não divide o número inteiro a é possível efetuar a divisão de a por b com resto.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} \smile{r} & q \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 38 & 5 \\ \cline{2-2} 3 & 7 \end{array} \qquad \text{Logo, } 38 = 5 \cdot 7 + 3 \text{ com } 0 \leqslant 3 < 5$$

$$\begin{array}{r|r} 10 & 10 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array} \qquad \text{Logo, } 10 = 10 \cdot 1 + 0 \text{ com } 0 \leqslant 0 < 10$$

$$\begin{array}{r|r} 50 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array} \qquad \text{Logo, } 50 = 5 \cdot 10 + 0 \text{ com } 0 \leqslant 0 < 5$$

[1] O Princípio da boa ordenação ou princípio da boa ordem diz que todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 10 \\ \hline \underbrace{8} & 0 \end{array} \qquad \text{Logo, } 8 = 10 \cdot 0 + 8 \text{ com } 0 \leqslant 8 < 10$$

O máximo divisor comum entre dois números inteiros é uma das aplicações do algoritmo da divisão de Euclides.

1.1.1 Máximo Divisor Comum

Nesta seção iremos definir o máximo divisor comum, e calcular o mesmo usando o método das divisões sucessivas (MOREIRA; MARTINEZ; SALDANHA, 2012). E essa ferramenta será muito útil para encontrarmos a expansão das frações contínuas de números racionais.

***Observação* 1.** *Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. A notação $b|a$ (lê-se b divide a) quer dizer que a é divisível por b. E a notação $b \nmid a$(lê-se b não divide a) quer dizer que a não é divisível por b.*

Sejam dois números inteiros a e b não nulos. Um número inteiro d será um divisor de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Por exemplo, os números $\pm1, \pm2, \pm5, \pm10$ são divisores comuns de 20 e 30. Dizemos que um número natural d é o máximo divisor comum de a e b, que vamos representar por $mdc(a, b)$, se possuir as seguintes propriedades:

- d é um divisor comum de a e b;
- Se c é um divisor comum de a e b, então $c|d$

Logo, $mdc(a, b) = d$.

Assim concluindo o exemplo $mdc(20, 30) = 10$

***Teorema* 2.** *(HEFEZ, 2016) Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $mdc(a, b - na)$, então $mdc(a, b)$ existe e é igual a $mdc(a, b - na)$.*

Demonstração: Seja $d = mdc(a, b - na)$. Como $d|a$ e $d|(b - na)$, assim $d|(b - na + na)$ com isso $d|b$, logo d é divisor comum de a e b. Suponha agora que c seja um divisor comum de a e b. Logo, c é um divisor comum de a e b e, portanto, $c|d$. Isso prova que $d = mdc(a, b)$. ∎

1.1.2 Algoritmo das divisões sucessivas

Nesta seção iremos construir o algoritmo das divisões sucessivas, onde aplicaremos o algoritmos da divisão de Euclides sucessivamente até encontrarmos um resto igual a zero.

Sendo que o último resto diferente de zero é o máximo divisor comum (mdc) entre os dois números trabalhados.

Dados $a, b \in \mathbb{N}^\star$, suponhamos que $1 < b < a$ e que $b \nmid a$. Logo pela divisão euclidiana podemos escrever

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r_1 & q_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|} \text{Quociente} & q_1 \\ \hline a & b \\ \hline \text{Resto} & r_1 \end{array} \Rightarrow a = bq_1 + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < b$$

Temos duas possibilidades:

a) $r_1 | b$. Neste caso, $r_1 = mdc(b, r_1)$ e, pelo Teorema 2, temos que:

$$r_1 = mdc(b, r_1) = mdc(b, a - q_1 b) = mdc(b, a) = mdc(a, b),$$

e o algoritmo termina.

b) $r_1 \nmid b$. Neste caso faremos a divisão euclidiana de b por r_1, obtendo

$$\begin{array}{r|l} b & r_1 \\ \cline{2-2} r_2 & q_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|} \text{Quociente} & q_1 & q_2 \\ \hline a & b & r_1 \\ \hline \text{Resto} & r_1 & r_2 \end{array} \Rightarrow b = r_1 q_2 + r_2, \text{ com } 0 < r_2 < r_1$$

Novamente temos duas possibilidades:

b_1) $r_2 | r_1$.

Nesse caso, $r_2 = mdc(r_1, r_2)$ e pelo Teorema 2, temos que:

$$r_2 = mdc(r_1, r_2) = mdc(r_1, b - q_2 r_1) = mdc(r_1, b) = mdc(a, b),$$

e o algoritmo termina.

b_2) $r_2 \nmid r_1$.

Neste caso faremos a divisão euclidiana de r_1 por r_2, obtendo

$$\begin{array}{r|l} r_1 & r_2 \\ \cline{2-2} r_3 & q_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|} \text{Quociente} & q_1 & q_2 & q_3 \\ \hline a & b & r_1 & r_2 \\ \hline \text{Resto} & r_1 & r_2 & r_3 \end{array} \Rightarrow r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ com } 0 < r_3 < r_2$$

Esse procedimento continua até que $r_n | r_{n-1}$, com $r_n, r_{n-1} \in \mathbb{N}^\star$, e o resto, r_{n+1} seja zero. Como os restos são cada vez menores e são números naturais, possuindo como menor elemento o zero. Com isso pelo princípio da boa ordenação o processo é finito.

$$a > b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n > 0, \text{ sendo } r_i \in \mathbb{N} \text{ e } i \in \mathbb{N}^\star$$

Logo, $mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \ldots = mdc(r_{n-1}, r_n)$

Quociente	q_1	q_2	q_3	$\cdots$	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\cdots$	r_{n-1}	$r_n = mdc(a,b)$
Resto	r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_n	0

Tabela 1 - Algoritmo das divisões sucessivas-mdc

***Exemplo* 1.** *Calculemos o mdc de 30 e 20.*

Quociente	1	2	
30	20	10	
Resto	10	0	

Pela tabela temos que $mdc(30, 20) = 10$.

1.2 A Expansão em frações contínuas de um número racional

Nesta seção iremos construir a expansão das frações contínuas no caso racional usando o algoritmo da divisão de Euclides, algoritmo das divisões sucessivas e a função parte inteira.

Como sabemos podemos representar os números racionais $\frac{59}{171}$, $\frac{23}{28}$ e $\frac{23}{7}$ na forma decimal dividindo numerador pelo denominador. Ficam assim:

- $\frac{59}{171} = 0,345029239766081871345029239766081871\ldots$
- $\frac{23}{28} = 0,821428571428571428571428571428571428571428571\ldots$
- $\frac{23}{7} = 3,285714285714285714285714285714285714\ldots$

Apesar de serem dízimas periódicas, estas representações decimais são bem desagradáveis aos olhos, ficando até difícil identificar a periodicidade. Nesta seção veremos uma outra forma de representar esses números racionais.

***Definição* 2.** *A **função parte inteira** de um número real x é o único número inteiro i tal que*

$$i \leq x < i + 1$$

A parte inteira de x é denotado por $\lfloor x \rfloor$.

***Exemplo* 2.** *Escreva a parte inteira dos números racionais abaixo:*

a) $\lfloor 1,5 \rfloor = 1$, *visto que* $1 \leq 1,5 < 2$

b) $\lfloor -7,3 \rfloor = -8$, *visto que* $-8 \leq -7,3 < -7$

c) $\left\lfloor \dfrac{8}{3} \right\rfloor = 2$, *visto que* $2 \leq \dfrac{8}{3} < 3$

***Proposição* 1.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Seja x um número racional no intervalo $(0,1)$. Então existem números naturais $a_1, \ldots, a_n$ tais que:*

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

Demonstração:

Como $x \in (0,1)$, existem r_1 e $r_0 \in \mathbb{N}$ tais que $x = \dfrac{r_1}{r_0}$, $mdc(r_1, r_0) = 1$ e $r_1 < r_0$. Aplicando o algoritmo das divisões sucessivas, temos que existem $r_2, a_1 \in \mathbb{N}$ com $0 \leq r_2 \leq r_1$ tais que $r_0 = a_1 r_1 + r_2 \Leftrightarrow \dfrac{r_0}{r_1} = a_1 + \dfrac{r_2}{r_1}$, sendo:

$$0 \leqslant \frac{r_2}{r_1} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor = a_1$$

.

Se $r_2 = 0$, então $x = [a_1]$ e o processo termina e temos $x = \dfrac{1}{a_1}$.

Caso $r_2 \neq 0$ o processo continua com

$$r_1 = a_2 r_2 + r_3 \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = a_2 + \frac{r_3}{r_2}, \text{ sendo } 0 \leqslant \frac{r_3}{r_2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{r_1}{r_2} \right\rfloor = a_2$$

Se $r_3 = 0$, então $x = [a_1, a_2]$ e o processo termina. E temos:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Caso $r_3 \neq 0$ o processo continua com

$$r_2 = a_3 r_3 + r_4 \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_3} = a_3 + \frac{r_4}{r_3}, \text{ sendo } 0 \leqslant \frac{r_4}{r_3} < 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{r_2}{r_3} \right\rfloor = a_3$$

Se $r_4 = 0$, então $x = [a_1, a_2, a_3]$ e o processo termina. E temos:

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

Caso $r_4 \neq 0$ o processo continua até $r_{n+1} = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Visto que o processo termina quando a divisão é exata.

Como vimos $r_0 > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots \geq 0$ e como $r_i \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}$ concluímos, pelo princípio da boa ordenação, que o processo é finito e chegará ao fim quando o resto for igual a zero.

Quociente	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
r_0	r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_{n-1}	r_n
Resto	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_n	$r_{n+1}=0$

Tabela 2 - Algoritmo das divisões sucessivas - construção da expansão

Resumindo, se $x = \dfrac{r_1}{r_0} \in (0,1)$, com r_0 e $r_1 \in \mathbb{N}^\star$ e usando a relação obtida pelo algoritmo da divisão de Euclides, $r_n = a_{n+1}r_{n+1} + r_{n+2}$, temos que

$$x = \frac{r_1}{r_0} = \frac{r_1}{a_1r_1+r_2} = \frac{\frac{r_1}{r_1}}{\frac{a_1r_1+r_2}{r_1}} = \frac{1}{a_1+\frac{r_2}{r_1}} = \frac{1}{a_1+\frac{r_2}{a_2r_2+r_3}} = \frac{1}{a_1+\frac{\frac{r_2}{r_2}}{\frac{a_2r_2+r_3}{r_2}}} =$$

$$\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_3}{r_2}}} = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_3}{a_3r_3+r_4}}} = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{\frac{r_3}{r_3}}{\frac{a_3r_3+r_4}{r_3}}}} = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{r_4}{r_3}}}}$$

$$x = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}} = [a_1, a_2, \ldots, a_n]\ ;\ a_i \in \mathbb{N}^\star, \forall i = 1,2,\ldots n.$$

$\blacksquare$

***Observação* 2.** *Se $x \notin (0,1)$, então $x - \lfloor x \rfloor \in (0,1)$, logo, pela Proposição 1, existem $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{N}^\star$ tais que $x - \lfloor x \rfloor = [a_1, \ldots a_n]$. E assim, a sua representação fica da seguinte forma:*

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}} = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

onde $a_0 = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \mathbb{N}^\star$,$\forall i = 1,2,\ldots n$

$\blacksquare$

Observando a Tabela 2 podemos conjeturar o seguinte Lema.

***Lema* 1.** *Sejam dados r_n e a_n como na demonstração da Proposição 1 , temos que:*

$$\left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = a_{n+1}$$

Demonstração:

Dividindo toda a equação $r_n = a_{n+1}r_{n+1} + r_{n+2}$ por $r_{n+1} \neq 0$, temos:

$$\frac{r_n}{r_{n+1}} = a_{n+1} + \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}}$$

Como $r_{n+2} < r_{n+1}$, com r_{n+2} e $r_{n+1} \in \mathbb{N}$ e $r_{n+1} \neq 0$. Temos que $0 \leqslant \dfrac{r_{n+2}}{r_{n+1}} < 1$. Logo,

$$\left\lfloor \frac{r_n}{r_{n+1}} \right\rfloor = a_{n+1}$$

$\blacksquare$

***Exemplo* 3.** *Calcular a expansão em frações contínuas dos seguintes números racionais:*

a) $\dfrac{23}{7} = \dfrac{3\cdot 7+2}{7} = 3 + \dfrac{2}{7} = 3 + \dfrac{2}{2\cdot 3+1} = 3 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}$

Logo, $\dfrac{23}{7} = 3 + [3, 2]$

b) $\dfrac{23}{28} = \dfrac{23}{1\cdot 23+5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{5}{23}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{5}{4\cdot 5+3}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{5}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{1\cdot 3+2}}} =$

$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{3}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1\cdot 2+1}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$

Logo, $\dfrac{23}{28} = [1, 4, 1, 1, 2]$

c) $\dfrac{59}{171} = \dfrac{59}{2\cdot 59+53} = \cfrac{1}{2+\cfrac{53}{59}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{53}{1\cdot 53+6}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{53}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{6}{8\cdot 6+5}}} =$

$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{5}{6}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{5}{1\cdot 5+1}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}$

Logo, $\dfrac{59}{171} = [2, 1, 8, 1, 5]$

Note que também podemos escrever $\dfrac{59}{171}$ como

$$\frac{59}{171} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1}}}}}} = [2,1,8,1,4,1]$$

Assim, tanto $[2,1,8,1,5]$ quanto $[2,1,8,1,4,1]$ são representações via frações contínuas do número $\frac{59}{171}$. Logo, para um número racional existe duas formas de representarmos sua expansão em frações contínuas. Sendo uma das formas $[a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$ e a outra da forma $[a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, (a_n - 1), 1]$. Mas por meio do algoritmo da divisão de Euclides só teremos a representação $[a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n]$.

Como já vimos nesta seção, construímos a expansão das frações contínuas de um número racional por meio do algoritmo da divisão de Euclides pelo método das divisões sucessivas.

***Exemplo* 4.** *Usando o algoritmo das divisões sucessivas encontre a representação em frações contínuas dos racionais abaixo:*

a) $\frac{23}{28}$

Como $\frac{23}{28} \in (0,1)$, *não teremos o elemento* a_0.

Quociente		
28	23	
Resto		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 28 & 23 \\ \cline{2-2} \underbrace{5} & 1 \end{array} \Rightarrow 28 = 23 \cdot 1 + 5 \Rightarrow$$

Quociente	1		
28	23	5	
Resto	5		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \cline{2-2} \underbrace{3} & 4 \end{array} \Rightarrow 23 = 5 \cdot 4 + 3 \Rightarrow$$

Quociente	1	4		
28	23	5	3	
Resto	5	3		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \cline{2-2} \underbrace{2} & 1 \end{array} \Rightarrow 5 = 3 \cdot 1 + 2 \Rightarrow$$

Quociente	1	4	1		
28	23	5	3	2	
Resto	5	3	2		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} \underbrace{1} & 1 \end{array} \Rightarrow 3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow$$

Quociente	1	4	1	1		
28	23	5	3	2	1	
Resto	5	3	2	1		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} \underbrace{0} & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Logo, como o resto foi zero o processo está terminado.

Quociente	1	4	1	1	2	
28	23	5	3	2	1	
Resto	5	3	2	1	0	

E usando os elementos da linha quociente temos que:

$$\frac{23}{28} = [1, 4, 1, 1, 2]$$

b) $\frac{23}{7}$

Como $\frac{23}{7} \notin (0, 1)$*, teremos o elemento* a_0*, assim* $\frac{23}{7} = 3 + \frac{2}{7}$ *e agora* $\frac{2}{7} \in (0, 1)$ *e* $a_0 = 3$.

Quociente		
7	2	
Resto		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} \underbrace{1} & 3 \end{array} \Rightarrow 7 = 2 \cdot 3 + 1 \Rightarrow$$

Quociente	3		
7	2	1	
Resto	1		

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ \cline{2-2} \underbrace{0} & 2 \end{array} \Rightarrow 2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Logo, como o resto foi zero o processo está terminado.

Quociente	3	2	
7	2	1	
Resto	1	0	

E usando os elementos da linha quociente, juntamente com o elemento a_0*, temos que:*

$$\frac{23}{7} = 3 + [3, 2]$$

2 A EXPANSÃO EM FRAÇÕES CONTÍNUAS DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

Neste capítulo faremos a construção das frações contínuas dos números irracionais, e apresentaremos a transformação de Gauss que será uma ferramenta que usaremos para tal construção.

2.1 Transformação de Gauss

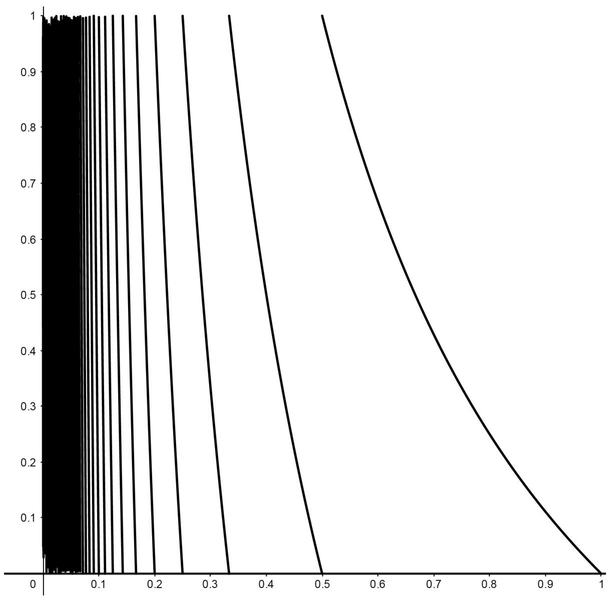
Nesta seção apresentaremos a transformação de Gauss, visto que será de suma importância para a construção das frações contínuas dos números irracionais apesar de também funcionar muito bem para os racionais, como veremos no início deste capítulo.

***Definição* 3.** *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $T : X \to X$ uma função contínua. Definimos a órbita positiva passando por x com relação a T como sendo $O_T^+ = \{x, T(x), T^2(x), \ldots\} = \{T^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$*

***Definição* 4.** *(DíAZ; JORGE, 2007) A Transformação de Gauss $T : [0,1) \to [0,1)$ é definida da seguinte maneira:*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor, se\ x \neq 0 \\ 0, se\ x = 0 \end{cases}$$

Figura 1 - Transformação de Gauss



Fonte: o autor

Vamos usar a notação:

$$\begin{array}{rcl} T^0(x) & = & x \\ T^1(x) & = & T(x) \\ T^2(x) & = & T(T(x)) \\ T^3(x) & = & T(T(T(x))) \\ & \vdots & \\ T^{i+1}(x) & = & T(T^i(x)) \end{array}$$

***Exemplo* 5.** *Vamos calcular a órbita positiva dos números racionais* $\dfrac{3}{11}$ *e* $\dfrac{73}{91}$*, com relação a transformação de Gauss T.*

a) $\dfrac{3}{11}$

$$\begin{array}{rcl} T\left(\dfrac{3}{11}\right) & = & \dfrac{11}{3} - 3 = \dfrac{2}{3}; \\ T^2\left(\dfrac{3}{11}\right) & = & T\left(T\left(\dfrac{3}{11}\right)\right) = T\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}; \\ T^3\left(\dfrac{3}{11}\right) & = & T\left(T\left(T\left(\dfrac{3}{11}\right)\right)\right) = T\left(T\left(\dfrac{2}{3}\right)\right) = T\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 - 2 = 0; \\ T^4\left(\dfrac{3}{11}\right) & = & T(0) = 0. \end{array}$$

$$O_T^+\left(\frac{3}{11}\right) = \left\{\frac{3}{11}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 0, 0, \ldots\right\}$$

b) $\dfrac{73}{91}$

$$\begin{array}{rcl} T\left(\dfrac{73}{91}\right) & = & \dfrac{91}{73} - 1 = \dfrac{18}{73} \\ T^2\left(\dfrac{73}{91}\right) & = & T\left(T\left(\dfrac{73}{91}\right)\right) = T\left(\dfrac{18}{73}\right) = \dfrac{73}{18} - 4 = \dfrac{1}{18} \\ T^3\left(\dfrac{73}{91}\right) & = & T\left(T\left(T\left(\dfrac{73}{91}\right)\right)\right) = T\left(T\left(\dfrac{18}{73}\right)\right) = T\left(\dfrac{1}{18}\right) = 18 - 18 = 0 \\ T^4\left(\dfrac{73}{91}\right) & = & T(0) = 0 \end{array}$$

$$O_T^+\left(\frac{73}{91}\right) = \left\{\frac{73}{91}, \frac{18}{73}, \frac{1}{18}, 0, 0, \ldots\right\}$$

Observe que o domínio e a imagem da transformação de Gauss são o intervalo

$[0, 1)$. Logo, podemos aplicar T quantas vezes for preciso a partir de um ponto sem sair do domínio, isto é, $T^n(x) \in [0, 1)$, $\forall x \in [0, 1)$.

Na próxima seção, utilizaremos a órbita da transformação de Gauss no Exemplo 6 para a construção de frações contínuas de um número racional, mas o principal objetivo é para a construção das frações contínuas dos números irracionais.

2.2 Transformação de Gauss na construção da expansão em frações contínuas de um número racional

Nesta seção combinaremos a transformação de Gauss e a expansão das frações contínuas por meio do algoritmo da divisão de Euclides com objetivo de construirmos relações importantes para o desenvolvimento das frações contínuas.

***Proposição* 2.** *(DíAZ; JORGE, 2007)*

Sendo $x = \dfrac{r_1}{r_0} \in (0, 1)$, *com* $x = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ *e* $r_n = a_{n+1}r_{n+1} + r_{n+2}$ *com* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^\star$ *e* $r_0, r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$ *temos que:*

$$T^k(x) = \frac{r_{k+1}}{r_k} \text{ e } a_k = \left\lfloor \frac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor, \forall k = 1, \ldots, n$$

Demonstração:

Sabemos, pelo algoritmo da divisão de Euclides e pelo Lema 1, que:

$$r_k = a_{k+1}r_{k+1} + r_{k+2} \text{ e } a_k = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor$$

Se $x = \dfrac{r_1}{r_0}$, então para $k = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
r_0 &= a_1r_1 + r_2 \\
\frac{r_0}{r_1} &= \frac{a_1r_1}{r_1} + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_0}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_0}{r_1} &= \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{1}{x} &- \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{r_2}{r_1} \\
T(x) &= \frac{r_2}{r_1}
\end{aligned}$$

Usando $a_k = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor$, para $k = 1$, temos:

$$a_1 = \left\lfloor \frac{1}{T^{1-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^0(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{r_1}{r_0}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$$

Assim,

$$a_1 = \left\lfloor \frac{r_0}{r_1} \right\rfloor$$

Logo, as afirmações são verdadeiras para $k = 1$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é, $T^k(x) = \dfrac{r_{k+1}}{r_k}$ e $a_k = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor$ e vamos mostrar que tal resultado vale para $k+1$, isto é, $T^{k+1}(x) = \dfrac{r_{k+2}}{r_{k+1}}$ e $a_{k+1} = \left\lfloor \dfrac{1}{T^k(x)} \right\rfloor$

De fato, pelo algoritmo da divisão de Euclides, temos:

$$\begin{gathered}
r_k = a_{k+1} r_{k+1} + r_{k+2} \\
r_k = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor r_{k+1} + r_{k+2} \\
\frac{r_k}{r_{k+1}} = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}} + \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}} \\
\frac{r_k}{r_{k+1}} = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor + \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}} \\
\frac{r_k}{r_{k+1}} - \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor = \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}} \\
T\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right) = \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}}
\end{gathered}$$

E usando a hipótese de indução, temos que:

$$\begin{aligned}
T(T^k(x)) &= \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}} \\
T^{k+1}(x) &= \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}}
\end{aligned}$$

Na segunda afirmação, temos que:

$$a_{k+1} = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{r_{k+1}}{r_k}} \right\rfloor$$

E usando a hipótese de indução, temos que:

$$a_{k+1} = \left\lfloor \frac{r_k}{r_{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{r_{k+1}}{r_k}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^k(x)} \right\rfloor$$

Assim, pelo princípio da indução, $T^k(x) = \dfrac{r_{k+1}}{r_k}$ e $a_k = \left\lfloor \dfrac{1}{T^{k-1}(x)} \right\rfloor$ são verdadeiros para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

***Exemplo* 6.** *Encontrar a expansão em frações contínuas usando as órbitas positivas da Transformação de Gauss:*

a) $\dfrac{3}{11}$

$$T^0(x) = \frac{3}{11};\ T^1(x) = \frac{2}{3};\ T^2(x) = \frac{1}{2};\ T^3(x) = 0\ ;\ T^k(x) = 0\ ,\ \forall k \geq 3$$

Com isso, usando

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

temos que

$$\begin{aligned}
a_1 &= \left\lfloor \frac{1}{T^{1-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^{0}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{3}{11}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor = 3 \\
a_2 &= \left\lfloor \frac{1}{T^{2-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{2}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 \\
a_3 &= \left\lfloor \frac{1}{T^{3-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^{2}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor = 2
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{3}{11} = [3, 1, 2]$

b) $\dfrac{73}{91}$

$$T^0(x) = \frac{73}{91};\ T^1(x) = \frac{18}{73};\ T^2(x) = \frac{1}{18};\ T^3(x) = 0\ ;\ T^k(x) = 0\ ,\ \forall k \geq 3$$

Com isso, usando

$$a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$$

temos que

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \left\lfloor \frac{1}{T^{1-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^{0}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{73}{91}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{91}{73} \right\rfloor = 1 \\
a_2 &= \left\lfloor \frac{1}{T^{2-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{18}{73}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{73}{18} \right\rfloor = 4 \\
a_3 &= \left\lfloor \frac{1}{T^{3-1}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T^{2}(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{18}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{18}{1} \right\rfloor = 18
\end{aligned}
$$

Logo, $\frac{73}{91} = [1, 4, 18]$

2.3 Transformação de Gauss na construção da expansão em frações contínuas de um número irracional

Nesta seção veremos como é a construção em frações contínuas de um número irracional. Sabemos que $\sqrt{3}$ é um número irracional, e com o auxílio de uma calculadora temos que:

$$\sqrt{3} = 1,7320508075688772935274463415058723669428052538103806280 55\ldots$$

não é possível representar o mesmo através de uma fração, mas podemos encontrar boas aproximações como $\frac{71}{41}$ e $\frac{265}{153}$ por exemplo. Veja:

$\frac{71}{41} = 1,7317073170731\ldots$, sendo $\left|\sqrt{3} - \frac{71}{41}\right| < 0,0004$

$\frac{265}{153} = 1,7320261437908\ldots$, sendo $\left|\sqrt{3} - \frac{265}{153}\right| < 0,00003$

Essas frações foram encontradas com o uso das frações contínuas como veremos no final desta seção.

Usando o mesmo raciocínio da construção das frações contínuas dos números racionais, usaremos um número irracional $x \in [0, 1)$. Como já vimos na seção anterior, usamos a relação, $a_n = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$, $\forall n \in \mathbb{N}^{\star}$, para números racionais.

Agora usaremos a seguinte notação:

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor, \forall n \in \mathbb{N}^{\star}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
a_1(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^0(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \\
a_2(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = a_1(T(x)) \\
a_3(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^2(x)} \right\rfloor = a_1(T^2(x)) \\
&\vdots \\
a_n(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor = a_1(T^{n-1}(x))
\end{aligned}$$

Como

$$a_1(x) + T(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \frac{1}{x},$$

podemos escrever qualquer número real $x \in (0,1)$, da seguinte forma

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)} \tag{1}$$

Daí,utilizando a equação (1) e substituindo x por $T(x)$, teremos

$$T(x) = \frac{1}{a_1(T(x)) + T(T(x))} = \frac{1}{a_2(x) + T^2(x)}$$

Assim, temos que

$$x = \frac{1}{a_1(x) + T(x)} = \frac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_1(T(x)) + T^2(x)}} = \frac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + T^2(x)}}$$

Continuando o processo, agora substituindo na equação (1) x por $T^2(x)$ tem-se

$$T^2(x) = \frac{1}{a_1(T^2(x)) + T(T^2(x))} = \frac{1}{a_3(x) + T^3(x)}$$

Assim, temos que

$$x = \cfrac{1}{a_{1(x)} + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + T^3(x)}}}$$

Logo, recursivamente, temos que

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{a_n(x) + T^n(x)}}}}}}$$

Assim, $x = [a_1(x), a_2(x), a_3(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x) + T^n(x)]$

Caso o número real $x \notin (0,1)$ aplicaremos o processo anterior em $x - \lfloor x \rfloor \in (0,1)$. Ficando

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{a_1(x - \lfloor x \rfloor) + \cfrac{1}{a_2(x - \lfloor x \rfloor) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}(x - \lfloor x \rfloor) + \cfrac{1}{a_n(x - \lfloor x \rfloor) + T^n(x - \lfloor x \rfloor)}}}}}$$

Assim,
$x = \lfloor x \rfloor + [a_1(x - \lfloor x \rfloor), a_2(x - \lfloor x \rfloor), a_3(x - \lfloor x \rfloor), \ldots, a_{n-1}(x - \lfloor x \rfloor), a_n(x - \lfloor x \rfloor) + T^n(x - \lfloor x \rfloor)]$
Notacionamos

$$a_0(x) = \lfloor x \rfloor \text{ e } a_i(x) = a_i(x - \lfloor x \rfloor),\ \forall i \in \mathbb{N}^\star$$

Então, temos que:

$$x = a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), a_3(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x) + T^n(x - \lfloor x \rfloor)]$$

Assim, dado um número x irracional temos uma sequência $(a_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ infinita de números naturais e uma sequência de números racionais

$$[(a_1(x), \ldots, a_k(x))]_{k \in \mathbb{N}}$$

Assim chegaremos a Definição 5 e em seguida no Teorema 3.

***Definição* 5.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Considere $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que:*

- *O número inteiro $a_n(x)$ é o n-ésimo quociente de x;*
- *O número racional $a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)] = \dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$ é o n-ésimo convergente de x*

***Teorema* 3.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Para todo número irracional x a sequência infinita de seus convergentes verifica que:*

$$\lim_{n \to +\infty} (a_0(x) + [a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)]) = \lim_{n \to +\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x$$

Faremos a demonstração do Teorema 3 na subseção 3.2.1.

***Exemplo* 7.** *Encontre a representação em frações contínuas dos seguintes números irracionais:*

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0,1)$, *logo não possui elemento* a_0

Para facilitar o desenvolvimento vamos calcular primeiro as órbitas positivas através da Transformação de Gauss.

$$T(x) = T\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{2}} \right\rfloor = \sqrt{2} - 1.$$

Daí, como $T^2(x) = T(T(x))$. *temos:*

$$\begin{aligned}
T^2(x) &= T(\sqrt{2}-1) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \sqrt{2}+1 - \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = \sqrt{2}-1 \\
T^3(x) &= T(T^2(x)) = T(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1 \\
T^4(x) &= T(T^3(x)) = T(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

Assim, $T^n(x) = \sqrt{2}-1$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$. *De fato, demonstraremos, por indução, que* $T^n(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$, *para todo* $n \in \mathbb{N}^\star$

Para $n = 1$, *temos:*

$$T^1(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$$

Logo, é verdadeiro para $n = 1$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para algum $n \in \mathbb{N}^\star$, *isto é,* $T^n(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ *e vamos mostrar que tal resultado vale para* $n+1$, *isto é,* $T^{n+1}(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$.

Temos que

$$T^{n+1}(\sqrt{2}-1) = T(T^n(\sqrt{2}-1))$$

Pela hipótese de indução, $T^n(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ *e daí,*

$$T^{n+1}(\sqrt{2}-1) = T(T^n(\sqrt{2}-1)) = T(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$$

Logo, pelo princípio da indução, $T^n(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ *é verdadeiro para qualquer* $n \in \mathbb{N}^\star$

Assim temos, $O_T^+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1, \ldots\right\}$

Logo, podemos calcular $a_i \in \mathbb{N}^\star$, $\forall i \in \mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned}
a_1(x) &= \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1 \\
a_2(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = 2 \\
a_3(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^2(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = 2 \\
a_4(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^3(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{2}+1 \rfloor = 2
\end{aligned}$$

Logo, como já provamos $T^n(\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}-1$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}^\star$*, assim podemos concluir que* $a_n(\sqrt{2}-1) = 2$ *para qualquer número natural* $n > 1$.

Assim, temos que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = [1,2,2,2,2,2,\ldots]$$

b) $\sqrt{3}$

Como $\sqrt{3} \notin [0,1)$ *devemos calcular* a_0*.Temos que* $a_0 = \lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$*. Seja* $x = \sqrt{3}-1 \in (0,1)$

Para facilitar o desenvolvimento vamos calcular primeiro as órbitas positivas de x *através da Transformação de Gauss.*

$T(x) = T(\sqrt{3}-1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} - \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - \left\lfloor \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$T^2(x) = T(T(x)) = T(T(\sqrt{3}-1)) = T\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} - \left\lfloor \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor =$

$\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - \left\lfloor \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \right\rfloor = \sqrt{3}+1-\lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = \sqrt{3}+1-2 = \sqrt{3}-1$

$T^3(x) = T(T^2(x)) = T(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$T^4(x) = T(T^3(x)) = T\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}-1$

Portanto, $T(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ *e* $T\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \sqrt{3}-1$*. Temos que*

$$T^i(\sqrt{3}-1) = \begin{cases} \sqrt{3}-1, \; se \; 2|i \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \; se \; 2 \nmid i \end{cases} \qquad com \; i \in \mathbb{N}^{\star}$$

De fato, demonstraremos isto, por indução, em dois casos distintos.

I) $T^{2n}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1, \forall n \in \mathbb{N}^{\star}$

II) $T^{2n+1}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$

Para o item I, usaremos $n = 1$, *temos:*

$$T^{2(1)}(\sqrt{3}-1) = T^2(\sqrt{3}-1) = T(T(\sqrt{3}-1)) = T\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \sqrt{3}-1$$

Logo, é verdadeiro para $n = 1$.

Vamos supor que $T^{2n}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1$ *é válido para algum* $n \in \mathbb{N}^{\star}$, *e vamos mostrar que tal resultado vale para* $n+1$, *isto é,* $T^{2(n+1)}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1$.

$$T^{2(n+1)}(\sqrt{3}-1) = T^{2n}(T^2(\sqrt{3}-1)) = T^{2n}(\sqrt{3}-1)$$

Pela hipótese de indução, $T^{2n}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1$. *Assim:*

$$T^{2(n+1)}(\sqrt{3}-1) = T^{2n}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1$$

Agora para o item II, usaremos n=0, temos:

$$T^{2(0)+1}(\sqrt{3}-1) = T(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Logo, é verdadeiro para $n = 0$.

Vamos supor que $T^{2n+1}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ *é válido para algum* $n \in \mathbb{N}$, *e vamos mostrar que tal resultado vale para* $n+1$, *isto é,* $T^{2(n+1)+1}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$T^{2(n+1)+1}(\sqrt{3}-1) = T^{2n+1+2}(\sqrt{3}-1) = T^{2n+1}(T^2(\sqrt{3}-1) = T^{2n+1}(\sqrt{3}-1)$$

Pela hipótese de indução, $T^{2n+1}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, *assim*

$$T^{2(n+1)+1}(\sqrt{3}-1) = T^{2n+1}(\sqrt{3}-1) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

Logo, pelo princípio da indução, $T^{2n}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-1$ *e* $T^{2n+1}(\sqrt{3}-1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, *são verdadeiros para qualquer* $n \in \mathbb{N}$

Assim temos, $O_T^+(\sqrt{3}-1) = \left\{\sqrt{3}-1, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \sqrt{3}-1, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dots\right\}$

Logo, podemos calcular $a_i \in \mathbb{N}^\star$, $\forall i \in \mathbb{N}^\star$

$$\begin{aligned}
a_1(x) &= \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1 \\
a_2(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T(\sqrt{3}-1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2 \\
a_3(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^2(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{3}+1}{2} \right\rfloor = 1 \\
a_4(x) &= \left\lfloor \frac{1}{T^3(x)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{T(\sqrt{3}-1)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{\sqrt{3}-1} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{3}+1 \rfloor = 2
\end{aligned}$$

Como já demonstramos que

$$T^n(\sqrt{3}-1) = \begin{cases} \sqrt{3}-1, \ se\ 2|n \\ \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \ se\ 2 \nmid n \end{cases}$$

temos que

$$a_n(\sqrt{3}-1) = \begin{cases} 2, \ se\ 2|n \\ 1, \ se\ 2 \nmid n \end{cases} \quad , \ com\ n \in \mathbb{N}^\star$$

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} \Rightarrow \sqrt{3} = 1 + [1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$$

Para encontrarmos as aproximações do início da seção usaremos:

- $\sqrt{3} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}} = \dfrac{71}{41}$, onde temos, $p_6 = 71$ e $q_6 = 41$.

- $\sqrt{3} \simeq 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}}}} = \dfrac{265}{153}$, onde temos, $p_7 = 265$ e $q_7 = 153$.

Temos que,

$$\frac{71}{41} = 1,731707\ldots \qquad \frac{256}{153} = 1,732026\ldots$$

e podemos comparar com

$$\sqrt{3} = 1,732050\ldots$$

Note que quanto mais quocientes a_i, com $i \in \mathbb{N}$, usarmos em tal construção melhor vai ser a aproximação do número irracional, por um número racional. Ou seja, sempre podemos melhorar esta aproximação.

3 CONVERGÊNCIA DE UMA FRAÇÃO CONTÍNUA

Neste capítulo veremos uma série de proposições com suas respectivas demonstrações, para a construção das frações contínuas, para encontrarmos boas aproximações dos irracionais dentro do conjunto dos racionais, e até mesmo encontrar um erro absoluto da aproximações. Em seguida apresentaremos a demonstração do Teorema 3. E para finalizar o capítulo demostraremos a unicidade da representação em frações contínuas de um número irracional.

3.1 Propriedades dos convergentes

Nesta seção apresentaremos propriedades que irão nos auxiliar na busca de boas aproximações dos irracionais no conjunto dos racionais usando os valores de $p_n(x)$ e $q_n(x)$ dos n-ésimos convergentes de x.

***Proposição* 3.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Seja $x \in \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}^\star$, sejam $p_n = p_n(x)$ e $q_n = q_n(x)$ os elementos do n-ésimo convergente de x. E ainda defina $p_0(x) = a_0$, $p_1(x) = 1$, $p_{-1} = q_0(x) = 1$, $q_{-1}(x) = 0$. Temos as seguintes propriedades:*

(a) $p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}$ *e* $q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^\star$.

(b) $p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(c) $x = \dfrac{p_n + (T^n(x)) \cdot p_{n-1}}{q_n + (T^n(x)) \cdot q_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Demonstração:

a) Vamos mostrar primeiramente a propriedade (a).

Da definição dos n-ésimos convergentes temos que

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + [a_1, \ldots, a_n]$$

Agora para $n = 1$ temos que:

$$\frac{p_1}{q_1} = a_0 + [a_1] = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

e daí usando que $a_0 = p_0$, $p_{-1} = q_0 = 1$ e $q_{-1} = 0$ temos que:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1 \cdot 1 + 0} = \frac{p_0 a_1 + p_{-1}}{a_1 q_0 + q_{-1}}$$

e assim temos que a propriedade (a) vale para $n = 1$.

$$p_1 = a_1 p_0 + p_{-1} \text{ e } q_1 = a_1 q_0 + q_{-1}$$

Agora vamos supor que exista um $n \in \mathbb{N}^\star$ tal que a propriedade (a) é válida para todo $k \leq n$ e iremos provar que esta mesma propriedade será válida para $n+1$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + [a_1, \ldots, a_{n+1}] = a_0 + \left[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_n + 1}\right]$$

Vamos aplicar a hipótese em $b_0 + [b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n]$, onde $b_i = a_i$ para todo $0 \leq i \leq n-1$ e $b_n = a_n + \dfrac{1}{a_n + 1}$. E ainda se os n-ésimos convergentes deste número são $\dfrac{p'_k}{q'_k}$ então temos pela hipótese de indução que :

$$b_0 + [b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n] = \frac{p'_n}{q'_n} = \frac{b_n p'_{n-1} + p'_{n-2}}{b_n q'_{n-1} + q'_{n-2}}$$

Agora, note que $\dfrac{p'_k}{q'_k} = b_0 + [b_1, \ldots, b_k] = a_0 + [a_1, \ldots, a_k] = \dfrac{p_k}{q_k}$, $\forall k < n$ e portanto termos que $p'_k = p_k$ e $q'_k = q_k$, $\forall k < n$. Daí,

$$\frac{p'_n}{q'_n} = \frac{b_n p'_{n-1} + p'_{n-2}}{b_n q'_{n-1} + q'_{n-2}} = \frac{b_n p_{n-1} + p_{n-2}}{b_n q_{n-1} + q_{n-2}} =$$

$$\frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_{n-1} \cdot a_{n+1} \cdot a_n + p_{n-1} + a_{n+1} \cdot p_{n-2}}{q_{n-1} \cdot a_{n+1} \cdot a_n + q_{n-1} + a_{n+1} \cdot q_{n-2}} =$$

$$\frac{a_{n+1}(a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}$$

Resumindo:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = a_0 + [a_1, \ldots, a_{n+1}] = a_0 + [b_1, \ldots, b_n] = \frac{a_{n+1}(a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}$$

e portanto da igualdade acima e da hipótese de indução temos que:

$$p_{n+1} = a_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1} \text{ e } q_{n+1} = a_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}$$

Assim, concluímos, por indução, que a propriedade (a) é verdadeira.

b) Vamos provar agora a propriedade (b).

Para $n = 0$, temos que:

$$p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} = (1) \cdot (1) - a_0(0) = 1 = (-1)^0$$

Assim, para $n = 0$ a propriedade (b) é verdadeira.

Agora vamos supor que existe um $n \in \mathbb{N}^\star$ tal que a propriedade é verdadeira para todo $k \leq n$. Vamos provar que também será válida então para $n+1$. Como

$$p_{(n+1)-1} \cdot q_{n+1} - p_{n+1} \cdot q_{(n+1)-1} = p_n \cdot q_{n+1} - p_{n+1} \cdot q_n$$

usando o item (a) desta proposição temos que,

$$\begin{aligned} p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n &= p_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1}) - (a_{n+1}p_n + p_{n-1})q_n \\ &= a_{n+1}p_nq_n + p_nq_{n-1} - a_{n+1}p_nq_n - q_np_{n-1} \\ &= p_nq_{n-1} - q_np_{n-1} \\ &= -(q_np_{n-1} - p_nq_{n-1}) = -(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}) \end{aligned}$$

Usando a hipótese de indução, $p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = (-1)^n$, temos que:

$$-(p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}) = -(-1)^n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Portanto, por indução, concluímos que a propriedade (b) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Vamos provar agora a propriedade (c).

Podemos escrever x da seguinte maneira.

$$x = a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + T^n(x)], \; \forall n \in \mathbb{N}$$

e se chamarmos $b_i = a_i$ para $0 \leqslant i \leqslant n-1$ e $b_n = a_n + T^n(x)$, teremos que os k-ésimos convergentes de $a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + T^n(x)]$ e os de $b_0 + [b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n]$ coincidem para todo $0 \leqslant k \leqslant n-1$, isto é, se $\dfrac{p_k}{q_k}$ são os k-ésimos convergentes de $a_0 + [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + T^n(x)]$ e $\dfrac{p'_k}{q'_k}$ são os k-ésimos convergentes de $b_0 + [b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n]$, então $p_k = p'_k$ e $q_k = q'_k$ se $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Logo,

$$x = a_0 + [a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + T^n(x)] = b_0 + [b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n]$$

Usando o item (a) da proposição, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{p'_n}{q'_n} = \frac{b_np'_{n-1} + p'_{n-2}}{b_nq'_{n-1} + q'_{n-2}} &= \frac{b_np_{n-1} + p_{n-2}}{b_nq_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{(a_n + T^n(x))p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + T^n(x))q_{n-1} + q_{n-2}} = \\ \frac{a_np_{n-1} + T^n(x)p_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + T^n(x)q_{n-1} + q_{n-2}} &= \frac{[a_np_{n-1} + p_{n-2}] + T^n(x)p_{n-1}}{[a_nq_{n-1} + q_{n-2}] + T^n(x)q_{n-1}} = \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}} \end{aligned}$$

Assim temos que $x = \dfrac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}}$. ■

***Observação* 3.** *Note que na Propriedade 3 item (b), mdc$(p_n, q_n) = \pm 1$, assim $\dfrac{p_n}{q_n}$ é uma fração irredutível.*

***Exemplo* 8.** *Usando a Proposição 3 encontre os convergentes de $\sqrt{3}$. Por exemplos anteriores sabemos que $\sqrt{3} = 1 + [1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$, temos que:*

- $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_1 \cdot p_0 + p_{-1}}{a_1 \cdot q_0 + q_{-1}} = \dfrac{1 \cdot 1 + 1}{1 \cdot 1 + 0} = 2$. *Assim, $p_1 = 2$ e $q_1 = 1$*

- $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = \dfrac{5}{3}$. *Assim,* $p_2 = 5$ *e* $q_1 = 3$

- $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \dfrac{1 \cdot 5 + 2}{1 \cdot 3 + 1} = \dfrac{7}{4}$. *Assim,* $p_3 = 7$ *e* $q_3 = 4$

- $\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \dfrac{2 \cdot 7 + 5}{2 \cdot 4 + 3} = \dfrac{19}{11}$. *Assim,* $p_4 = 19$ *e* $q_4 = 11$

- $\dfrac{p_5}{q_5} = \dfrac{a_5 \cdot p_4 + p_3}{a_5 \cdot q_4 + q_3} = \dfrac{1 \cdot 19 + 7}{1 \cdot 11 + 4} = \dfrac{26}{15}$. *Assim,* $p_4 = 26$ *e* $q_4 = 15$

Como podemos observar os valores:

- $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{2}{1} = 2$
- $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{5}{3} = 1,666\ldots.$
- $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{7}{4} = 1,75.$
- $\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{19}{11} = 1,727272\ldots.$
- $\dfrac{p_5}{q_5} = \dfrac{26}{15} = 1,7333\ldots$

estão cada vez mais próximos da representação da $\sqrt{3} \approx 1,732050807568877293527$. Logo, podemos concluir, pelo Teorema 3, (que provaremos na próxima seção) que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{3}$$

.

3.2 Convergência dos convergentes

Nesta seção faremos a demostração do Teorema 3, além de apresentarmos um modelo que nos permitirá calcular o erro absoluto da aproximação de um número real qualquer pelo n-ésimo convergente obtido pela sua representação em frações contínuas .

3.2.1 Prova do Teorema 3

Nesta subseção, com base (DíAZ; JORGE, 2007) faremos a demonstração do Teorema 3, que diz o seguinte: Para todo número irracional x a sequência infinita de seus convergentes verifica que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_0(x)+[a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)])=\lim_{n\to+\infty}\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=x$$

Para realizar essa demonstração usaremos as propriedades da Proposição 3. Vamos demonstrar para $x\in(0,1)$, e como já vimos no decorrer do trabalho caso $x\notin(0,1)$ basta fazer $x-\lfloor x\rfloor$.

Demonstração:

Pela Proposição 3 item (c), temos:

$$x=\frac{p_n+T^n(x)\cdot p_{n-1}}{q_n+T^n(x)\cdot q_{n-1}}$$

Assim temos,

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{p_n+T^n(x)\cdot p_{n-1}}{q_n+T^n(x)\cdot q_{n-1}}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{q_n\cdot p_n+q_n\cdot T^n(x)\cdot p_{n-1}-q_n\cdot p_n-p_n\cdot T^n(x)\cdot q_{n-1}}{q_n(q_n+T^n(x)\cdot q_{n-1})}\right|$$

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{T^n(x)(p_{n-1}\cdot q_n-p_n\cdot q_{n-1})}{q_n(q_n+T^n(x)\cdot q_{n-1})}\right|.$$

Pela Proposição 3 item (b), $p_{n-1}\cdot q_n-p_n\cdot q_{n-1}=(-1)^n$, obtemos:

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{T^n(x)\cdot(-1)^n}{q_n(q_n+T^n(x)\cdot q_{n-1})}\right|$$

Vamos retirar o $(-1)^n$, logo não precisamos mais usar os módulos, visto que todos os valores são positivos.

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{T^n(x)}{q_n(q_n+T^n(x)\cdot q_{n-1})}=\frac{T^n(x)}{q_n^2+q_n\cdot T^n(x)\cdot q_{n-1}}$$

Como $T^n(x)\in(0,1)$ e q_n,$q_{n-1}\in\mathbb{N}^\star$, podemos afirmar que:

$$\frac{T^n(x)}{q_n^2+q_n\cdot T^n(x)\cdot q_{n-1}}<\frac{1}{q_n^2}\text{ , pois } q_n\cdot T^n(x)\cdot q_{n-1}>0$$

Como a sequência q_n é monótona [2] crescente e $q_n>1$ para todo $n\geq 2$, fazendo $n\to+\infty$, temos que:

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}\to 0 \tag{2}$$

logo,

[2] Se uma sequência é sempre crescente ou sempre decrescente, ela é chamada de monótona.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = x$$

■

Com base na equação (2) podemos concluir a seguinte proposição.

***Proposição* 4.** *(BESKIN, 1987) O erro absoluto que se comete ao utilizar uma aproximação da forma* $\frac{p_n}{q_n}$*, onde* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $n \geq -1$*, para um número real qualquer é menor que* $\frac{1}{q_n^2}$*, isto é:*

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Demonstração: Temos que $x \in \left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n}\right]$ ou $x \in \left[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right]$, logo:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \left| \frac{p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n}{q_n \cdot q_{n+1}} \right| = \left| \frac{-(p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1})}{q_n \cdot q_{n+1}} \right|$$

Pela Proposição 3 item (b), $p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} = (-1)^n$, obtemos:

$$\left| \frac{-(p_{n-1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1})}{q_n \cdot q_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{q_n \cdot q_{n+1}} \right|$$

Os módulos garante que o resultado sempre será positivo. Assim temos que:

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{q_n \cdot q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}}$$

Como $q_{n+1} > q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\frac{1}{q_n \cdot q_{n+1}} < \frac{1}{q^{2_n}}, \text{ com isso } \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

■

3.3 Unicidade da representação em frações contínuas nos irracionais

Nesta seção iremos apresentar um argumento para demonstrarmos a unicidade na representação das frações contínuas dos números irraconais.

Na seção 2.3 concluímos, pela transformação de Gauss, que os números irracionais possuem representação infinita por meio de sua expansão em frações contínuas. E pelo Teorema 3 temos que os convergentes, da forma $\frac{p_n}{q_n}$, convergem para o próprio número irracional. Com essa informações iremos verificar, que diferente dos números racionais, existe unicidade das frações contínuas dos números irracionais.

***Proposição* 5.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Considere sequências infinitas* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números naturais tais que*

$$\lim_{n\to+\infty}[a_1,\ldots,a_n] = \lim_{n\to+\infty}[b_1,\ldots,b_n]$$

Então $a_i = b_i$ *para todo* $i \in \mathbb{N}^\star$.

Demonstração:

De fato, primeiramente note que:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}[a_1,a_2,\cdots,a_n] = \dfrac{1}{a_1+\lim\limits_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n]} \\ \lim\limits_{n\to+\infty}[b_1,b_2,\cdots,b_n] = \dfrac{1}{b_1+\lim\limits_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n]} \end{cases}$$

Faremos a prova por indução em n. Temos que para $n=1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1+\lim\limits_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n]} &= \frac{1}{b_1+\lim\limits_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n]} \\ b_1+\lim_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n] &= a_1+\lim_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n] \\ a_1-b_1 &= \lim_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n]-\lim_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n] \end{aligned}$$

Com isso, $a_1 = b_1$ ou $a_1 \neq b_1$. Suponha por absurdo que $a_1 \neq b_1$. Como b_1 e a_1 são naturais, $|b_1 - a_1| \geq 1$. Portanto:

$$\left|\lim_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n]-\lim_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n]\right| \geq 1$$

Isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n] \geq 1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n] \geq 1$, pois são sequências de números positivos.

Se $\lim\limits_{n\to+\infty}[a_2,\cdots,a_n] \geq 1$, então:

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty}[a_2,a_3,\cdots,a_n] = \frac{1}{a_2+\lim\limits_{n\to+\infty}[a_3,\cdots,a_n]}$$

Como $a_2+\lim\limits_{n\to+\infty}[a_3,\cdots,a_n]$ é o inverso multiplicativo de $\lim\limits_{n\to+\infty}[a_2,a_3,\cdots,a_n]$, temos que $0 < a_2 < a_2 + \lim\limits_{n\to+\infty}[a_3,\cdots,a_n] \leq 1$, ou seja, $0 < a_2 < 1$.

Analogamente, se $\lim\limits_{n\to+\infty}[b_2,\cdots,b_n] \geq 1$, então $0 < b_2 < 1$. Com isso, concluímos que $0 < a_2 < 1$ ou $0 < b_2 < 1$. Absurdo, pois $a_2, b_2 \in \mathbb{N}^*$. Logo, $a_1 = b_1$.

Agora, suponha que $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k < n$. Vamos escrever os seguintes limites,

$$\lim_{n\to+\infty}[a_1,a_2,\cdots,a_n] = \left[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\frac{1}{a_n+\lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+1},a_{n+2},\ldots]}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}[b_1, b_2, \cdots, b_n] = \left[b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \frac{1}{b_n + \lim\limits_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]}\right]$$

e pela hipótese teremos que

$$\left[a_1, \cdots, a_{n-1}, \frac{1}{a_n + \lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]}\right] = \left[b_1, \cdots, b_{n-1}, \frac{1}{b_n + \lim\limits_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]}\right]$$

Agora, usando a hipótese de indução ($a_k = b_k, \forall k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k < n$) teremos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n + \lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]} &= \frac{1}{b_n + \lim\limits_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]}\\ b_n + \lim_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots] &= a_n + \lim_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]\\ a_n - b_n &= \lim_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots] - \lim_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]\end{aligned}$$

Com isso, $a_n = b_n$ ou $a_n \neq b_n$. Suponha por absurdo que $a_n \neq b_n$. Como b_n e a_n são naturais, $|b_n - a_n| \geq 1$. Portanto:

$$\left|\lim_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots] - \lim_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]\right| \geq 1$$

Isto é, $\lim\limits_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots] \geq 1$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] \geq 1$, pois são sequências de números positivos.

Se $\lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] \geq 1$, então:

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] = \frac{1}{a_{n+1} + \lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots]}$$

Como $a_{n+1} + \lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots]$ é o inverso multiplicativo de $\lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$, temos que $0 < a_{n+1} < a_{n+1} + \lim\limits_{n\to+\infty}[a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots] \leq 1$, ou seja, $0 < a_{n+1} < 1$.

Analogamente, se $\lim\limits_{n\to+\infty}[b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots] \geq 1$, então $0 < b_{n+1} < 1$. Com isso, concluímos que $0 < a_{n+1} < 1$ ou $0 < b_{n+1} < 1$. Absurdo, pois $a_{n+1}, b_{n+1} \in \mathbb{N}^*$. Logo, $a_n = b_n$.

Assim, $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$, como queríamos demonstrar.

$\blacksquare$

Agora, com a conclusão deste capítulo temos o conhecimento sobre frações contínuas necessário para o desenvolvimentos dos capítulos a seguir. Se você já chegou até aqui pode escolher qual vai ler primeiro pois um não depende do outro. Mas lhe garanto que ambos possuem construções apaixonantes.

4 NÚMERO DE OURO

Neste capítulo iremos apresentar a definição e um pouco do contexto histórico do número de Ouro, que também é conhecida como razão áurea, proporção áurea ou ainda divina proporção. Também apresentaremos a sequência de Fibonacci e a representação do número de ouro por meio de frações contínuas para podermos concluir que o quociente entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci tendem ao número de ouro.

4.1 Razão Áurea: o número de Ouro

***Definição* 6.** *(ZAHN, 2011) Dizemos que um ponto C divide um seguimento $\overline{AB}$ na razão Áurea se:*

Figura 2 - Razão Áurea

Fonte: o autor

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

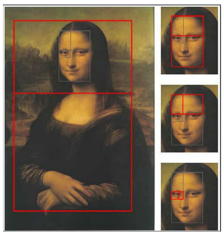
Assim, $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ e $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ representam a razão áurea ou número de Ouro que é simbolizado pela letra grega ϕ (phi).

O número de ouro é irracional cujo valor é aproximadamente $1,61803399...$. A razão áurea foi muito usada em obras de artes além de ser observada na natureza.

Segundo, Maurício Zahn, em (ZAHN, 2011), o número de ouro levou a letra ϕ de símbolo em homenagem a Fídias (490-431 a.C.), que foi o escultor grego das estátuas de Atena e Zeus, além de ter sido arquiteto do Partenon. Ele usava esse número em suas obras. Um dos primeiros relatos sobre a razão áurea data de aproximadamente 1650 a.c., é no papiro de Rhind, um documento na qual constam 85 problemas copiados por um escriba chamado Ahmes, de um trabalho mais antigo ainda. Neste texto, cita-se uma "razão sagrada"que acredita tratar-se da razão áurea.

A razão áurea foi e é usada para dar harmonia e perfeição às obras. Exemplos disso são a Monalisa, de Leonardo da Vinci, e as pirâmides de Gizé (no Egito). Além de existir medidas do corpo humano cuja razão é áurea. Leonardo da Vinci desenhou o homem vitruviano, que mostra as proporções das medidas do corpo humano.

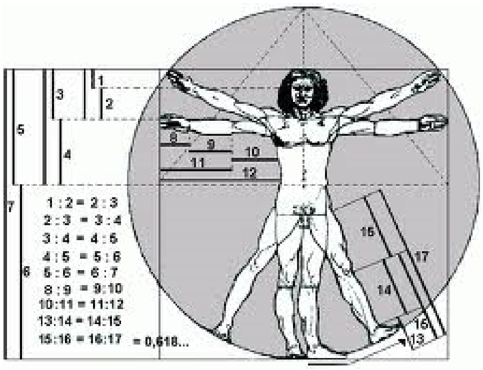
Figura 3 - Monalisa razão áurea



Fonte: Site do Chocola Design[a]

[a] https://medium.com/chocoladesign/geometria-sagrada-propor%C3%A7%C3%A3o-%C3%A1urea-50d644deb06d

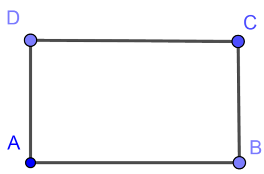
Figura 4 - Homem Vitruviano



Fonte: Site arte na Rede [a]

[a] http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/

Figura 5 - Retângulo de ouro



Fonte: o autor

***Definição* 7.** *(ZAHN, 2011) Chama-se retângulo áureo o retângulo no qual a razão de suas medidas obedece a razão áurea. Seja $ABCD$ um retângulo áureo temos que:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \phi$$

Segundo, Maurício Zahn em (ZAHN, 2011), os antigos babilônios sabiam como criar o retângulo áureo. Visto que, em uma escavação feita em Sippar, no sul do Iraque, o arqueólogo Assírio Hormuzd Rassam (1826-1910) encontrou uma tábua, com comprimento de $29,21cm$ e largura de $17,78cm$, conhecida como tábua de Shamash [3]. Podemos observar que as dimensões dessa tábua estão muito próximas da razão áurea.

$$\frac{29,21}{17,78} = 1,642857\ldots$$

Atualmente, a tábua de Shamash, encontra se em um museu britânico.

***Exemplo* 9.** *De acordo com a definição 6 calcule o valor do número de ouro.*

Com base na figura 2, vamos considerar $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = y$, logo $\overline{CB} = x - y$.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$$
$$x^2 - xy - y^2 = 0$$

Visto que $\overline{AB} = x$ e não pode ser negativo, tem-se que, $x = \dfrac{y(1+\sqrt{5})}{2}$.

$$\phi = \frac{x}{y} = \frac{\frac{y(1+\sqrt{5})}{2}}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$\phi = 1.6180339887498948482045868343656381177203091798057628621 35\ldots$$

***Exemplo* 10.** *Calcule o valor da razão áurea a partir da definição 7.*

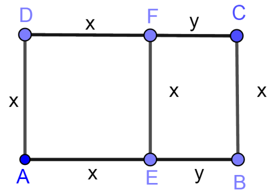
Considerando o retângulo de ouro $ABCD$ da figura 5, suprimindo um quadrado $AEFD$, conforme a figura 6, o retângulo $EBCF$ que é semelhante ao retângulo $ABCD$ assim, temos que $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$, dados que $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{DF} = x$ e $\overline{BE} = \overline{CF} = y$, temos que

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

e usando,

[3] Era o deus da justiça, da fertilidade e do Sol sumério e babilônico.

Figura 6 - Exemplo Retângulo de ouro



Fonte: o autor

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x} \tag{3}$$

Multiplicando a equação(3) por $\frac{x}{y}$, obtemos:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x}{y} + 1 \tag{4}$$

trocando na equação (4), $\frac{x}{y} = k$, obtemos:

$$k^2 = k + 1$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $\frac{x}{y}$ não pode ser negativo, temos que:

$$\frac{x}{y} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$

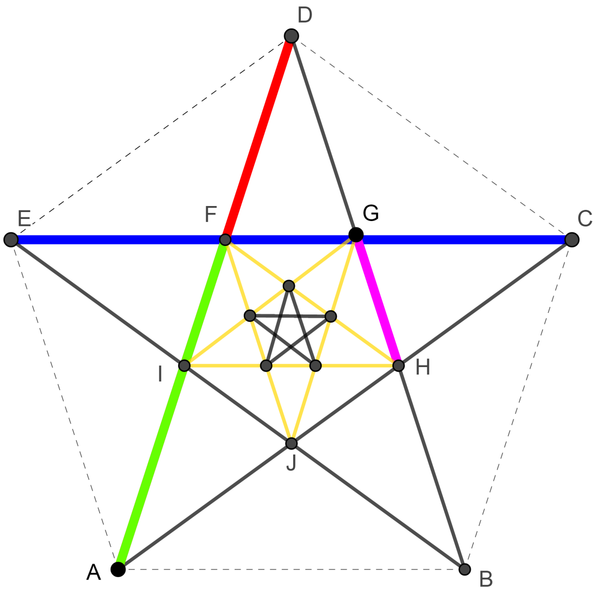
De acordo com (BOYER, 1974) os pitagóricos tinham como símbolo uma estrela de 5 pontas. O pentagrama ou pentágono estrelado tinha aparecido antes na Babilônia, e é possível que exista uma ligação matemática entre os pré-helênicos e os pitagóricos.

No pentagrama pitagórico podemos encontrar algumas vezes a razão áurea olhando apenas para um pentagrama. Sendo que podemos construir dentro do mesmo sempre um próximo pentagrama, tendo como base o pentágono no interior do pentagrama anterior, e sempre podemos encontrar as mesmas razões áureas. Observando a figura 7 podemos destacar que

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{GH}} = \phi$$

Para os gregos antigos esse tipo de subdivisão logo se tornou tão familiar que não se achava necessário ter um nome especial para ela, por isso a designação "divisão de um segmento em média e extrema razão" em geral é substituída simplesmente pela palavra **secção**.

Figura 7 - Pentagrama Pitagórico



Fonte: o autor

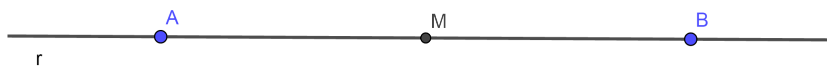
Kepler escreveu liricamente:

"A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras, o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro, o segundo podemos chamar de joia preciosa."

***Exemplo* 11.** *Desenhe o segmento áureo com régua e compasso.*

a) Seja r a reta suporte do segmento $\overline{AB}$. Marque o ponto médio M de $\overline{AB}$ (Figura 8).

Figura 8 - Primeiro passo



Fonte: o autor

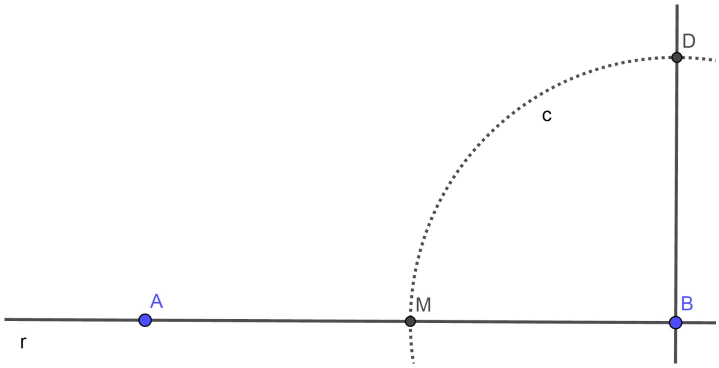
b) Trace uma reta s perpendicular a r, passando por B. Sobre s, marque o ponto D tal que $\overline{BD} = \overline{MB}$ (Figura 9).

c) Trace o segmento $\overline{AD}$. Marque o ponto E sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{BD} = \overline{DE}$ (Figura 10).

d) Marque C sobre r tal que $\overline{AC} = \overline{AE}$ (Figura 11).

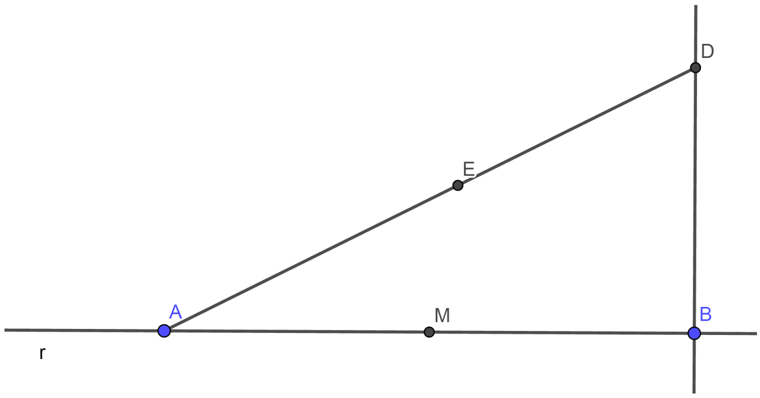
Por construção temos que:

Figura 9 - Segundo passo



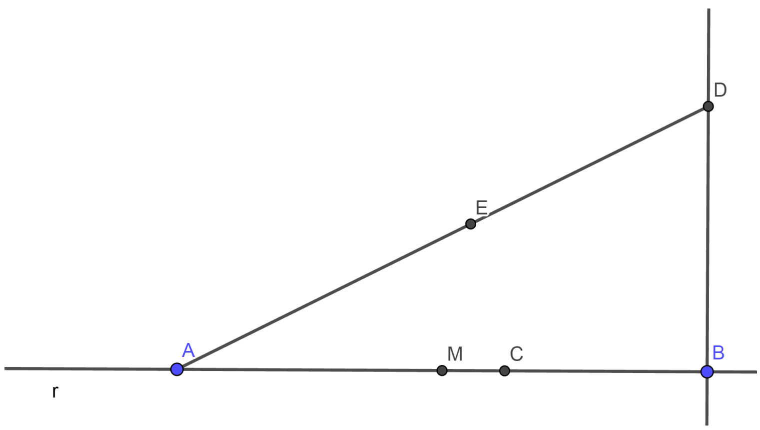
Fonte: o autor

Figura 10 - Terceiro passo



Fonte: o autor

Figura 11 - Quarto passo



Fonte: o autor

$$\overline{AB} = 2\overline{BD}, \overline{ED} = \overline{BD}.$$

Aplicando Teorema de Pitágoras no $\triangle ABD$, temos:

$$\begin{aligned}
\overline{AD}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 \\
\overline{AD}^2 &= (2\overline{BD})^2 + \overline{BD}^2 \\
\overline{AD}^2 &= 5\overline{BD}^2 \\
\overline{AD} &= \sqrt{5} \cdot \overline{BD}
\end{aligned}$$

Assim temos que:

$$\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{AD} - \overline{ED} = \sqrt{5} \cdot \overline{BD} - \overline{BD} = (\sqrt{5} - 1)\overline{BD}$$

assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{2\overline{BD}}{(\sqrt{5} - 1)\overline{BD}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$$

4.2 Sequência de Fibonacci

Segundo (ZAHN, 2011), Leonardo Fibonacci (1175-1250) também conhecido como Leonardo de Pisa, cidade onde nasceu, foi um grande matemático europeu na época da idade média. Seu pai, Guilhermino Bonnacci, era ligado aos negócios mercantis e foi convidado a trabalhar na África em uma função na alfândega, esse motivo fez Leonardo se interessar por aritmética.

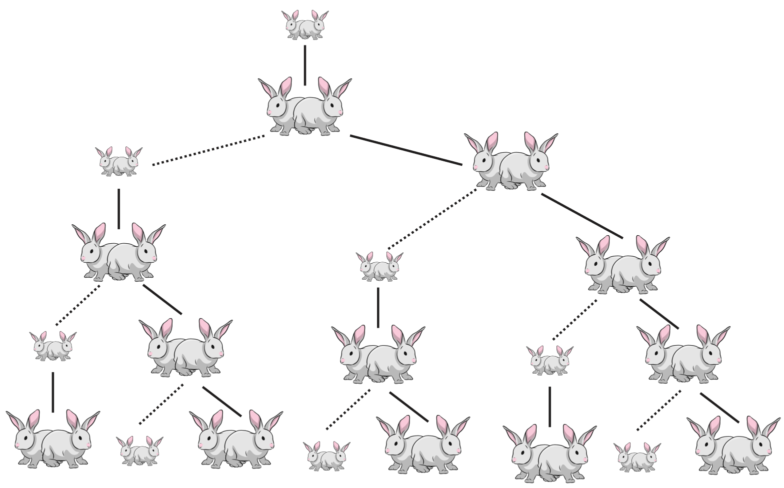
Fibonacci absorveu muito da cultura matemática dos povos do Egito, Síria, Grécia, Sicília e Provença, além de ter iniciado seus estudos com professores islâmicos. Com isso aprendeu o sistema hindu-arábico, que se mostrava superior ao romano. Ele escreveu alguns livros, entre eles, *O liber Abbaci* (O livro ábaco), neste ele mostrou aos europeus as importantes descobertas árabes. Também nesse livro encontramos um problema de reprodução de coelhos que origina a famosa sequência de Fibonacci. O problema diz o seguinte:

Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muros de todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em 12 períodos se, em todo período cada par de adultos gera um novo par de filhotes, que se tornam adultos e férteis a partir do segundo período da sua vida?

Assim temos $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144)$, como solução do problema.

***Definição* 8.** *(ZAHN, 2011) Chama-se sequência de Fibonacci a sequência definida por* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...)$ *onde os dois primeiros termos são iguais a 1 e a partir*

Figura 12 - Problema da reprodução dos coelhos



Fonte: o autor

X	Par de Filhotes	Adultos	Total
1º periodo	1	0	1
2º periodo	0	1	1
3º periodo	1	1	2
4º periodo	1	2	3
5º periodo	2	3	5
6º periodo	3	5	8
7º periodo	5	8	13
8º periodo	8	13	21
9º periodo	13	21	34
10º periodo	21	34	55
11º periodo	34	55	89
12º periodo	55	89	144

Tabela 3 - Reprodução dos coelhos

do terceiro, cada termo é obtido pela soma dos dois termos anteriores. Os termos da sequência são chamados números de Fibonacci, que podem ser definidos recursivamente da seguinte forma

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \ \textit{sendo } n \in \mathbb{N} \textit{ e } n \geq 2 \end{cases}$$

***Teorema* 4.** *(Fórmula Binet) (SANTOS, 2018)*

Sendo F_n um elemento da sequência de Fibonacci, com $n \in \mathbb{N}^{\star}$, temos que:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Demonstração:

Faremos a demostração por indução sobre n para $n = 1$ e $n = 2$, temos:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} = 1 = F_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = F_2$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$, isto é , é válida para o par (F_1, F_2).

Vamos supor que o nosso resultado é válido para $n, n+1 \in \mathbb{N}$, isto é, (F_n, F_{n+1}) é igual a

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\right)$$

e vamos mostrar que tal resultado vale para $n+2$, isto é,

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

Usando a definição 8, temos que:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

E usando a hipótese de indução, temos que:

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

Como $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Assim temos:

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]$$

$$F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

Assim, pelo princípio da indução, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}^\star$. ■

Com o auxílio do Teorema 4 podemos calcular o termo de Fibonacci sem a necessidade de saber os anteriores. Para entender como funciona esse procedimento iremos fazer o exemplo a seguir.

***Exemplo* 12.** *Usando o Teorema 4 calcule os seguintes termos de Fibonacci:*

a) $F_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{16+8\sqrt{5}}{8}\right) - \left(\frac{16-8\sqrt{5}}{8}\right)\right]$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{16\sqrt{5}}{8} = 2$

b) $F_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right] =$
$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{576+256\sqrt{5}}{64}\right) - \left(\frac{576-256\sqrt{5}}{64}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{512\sqrt{5}}{64} = 8$

Observando o exemplo podemos concluir que para o cálculo manual é mais fácil fazer pela forma recursiva. Construiremos a Tabela 4, pois será útil na sequência deste capítulo. Além de podermos visualizar seu crescimento.

$F_1 = 1$	$F_2 = 1$	$F_3 = 2$
$F_4 = 3$	$F_5 = 5$	$F_6 = 8$
$F_7 = 13$	$F_8 = 21$	$F_9 = 34$
$F_{10} = 55$	$F_{11} = 89$	$F_{12} = 144$
$F_{13} = 233$	$F_{14} = 377$	$F_{15} = 610$
$F_{16} = 987$	$F_{17} = 1597$	$F_{18} = 2584$
$F_{19} = 4181$	$F_{20} = 6765$	$F_{21} = 10946$
$F_{22} = 17711$	$F_{23} = 28657$	$F_{24} = 46368$
$F_{25} = 75025$	$F_{26} = 121393$	$F_{27} = 196418$
$F_{28} = 317811$	$F_{29} = 514229$	$F_{30} = 832040$
$F_{31} = 1346269$	$F_{32} = 2178309$	$F_{33} = 3524578$
$F_{34} = 5702887$	$F_{35} = 9227465$	$F_{36} = 14930352$
$F_{37} = 24157817$	$F_{38} = 39088169$	$F_{39} = 63245986$
$F_{40} = 102334155$	$F_{41} = 165580141$	$F_{42} = 267914296$
$F_{43} = 433494437$	$F_{44} = 701408733$	$F_{45} = 1134903170$
$F_{46} = 1836311903$	$F_{47} = 2971215073$	$F_{48} = 4807526976$
$F_{49} = 7778742049$	$F_{50} = 12586269025$	$F_{51} = 20365011074$
$F_{52} = 32951280099$	$F_{53} = 53316291173$	$F_{54} = 86267571272$
$F_{55} = 139583862445$	$F_{56} = 225851433717$	$F_{57} = 365435296162$
$F_{58} = 591286729879$	$F_{59} = 956722026041$	$F_{60} = 1548008755920$
$F_{61} = 2504730781961$	$F_{62} = 4052739537881$	$F_{63} = 6557470319842$
$F_{64} = 10610209857723$	$F_{65} = 17167680177565$	$F_{66} = 27777890035288$
$F_{67} = 44945570212853$	$F_{68} = 72723460248141$	$F_{69} = 117669030460994$
$F_{70} = 190392490709135$	$F_{71} = 308061521170129$	$F_{72} = 498454011879264$
$F_{73} = 806515533049393$	$F_{74} = 1304969544928657$	$F_{75} = 2111485077978050$
$F_{76} = 3416454622906707$	$F_{77} = 5527939700884757$	$F_{78} = 8944394323791464$
$F_{79} = 14472334024676221$	$F_{80} = 23416728348467685$	$F_{81} = 37889062373143906$

Tabela 4 - Os 81 primeiros números de Fibonacci

4.3 Relação entre a sequência de Fibonacci, o número de ouro e a expansão em frações contínuas

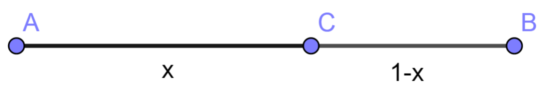
Nesta seção iremos construir a representação em frações contínuas do número de ouro, além de calcularmos boas aproximações com números racionais obtidas através das propriedades das frações contínuas. E no final verificaremos a estreita relação entre o número de ouro e a fabulosa sequência de Fibonacci.

Agora analisando a definição 6 da razão Áurea, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$$

Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $\overline{AB} = 1$, $\overline{AC} = x$, logo $\overline{BC} = 1 - x$.

Figura 13 - Razão Áurea-2



Fonte: o autor

Assim temos que:

$$\phi = \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \tag{5}$$

Podemos reescrever o $\frac{1}{x}$ da seguinte forma

$$\frac{1}{x} = 1 - 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1-x}{x} \tag{6}$$

Logo, usando as equações 5 e 6, podemos escrever

$$\frac{1}{x} = 1 + \frac{1-x}{x} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x}{1-x}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1-x}{x}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{x}{1-x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1-x}{x}}}$$

Continuando o processo recursivamente, podemos conjecturar que

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}} = 1 + [1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

Para demonstrar que todos os quocientes serão iguais a um, com base na proposição 2, basta provar que $T^n(\phi - 1) = \phi - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $(\phi - 1) \in (0, 1)$, logo podemos aplicar a Transformação de Gauss.

Demonstração: Provaremos esse fato usando indução sobre n. Para $n = 1$, temos:

$$T^1(\phi - 1) = \frac{1}{\phi - 1} - \left\lfloor \frac{1}{\phi - 1} \right\rfloor$$

Tendo como base a figura 13 temos que $\phi = \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x}$

$$T^1(\phi - 1) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} - \left\lfloor \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} \right\rfloor = \frac{1}{\frac{1-x}{x}} - \left\lfloor \frac{1}{\frac{1-x}{x}} \right\rfloor = \frac{x}{1-x} - \left\lfloor \frac{x}{1-x} \right\rfloor = \phi - 1$$

$$T^1(\phi - 1) = (\phi - 1)$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, $T^n(\phi - 1) = \phi - 1$ e vamos mostrar que tal resultado vale para $n + 1$, isto é, $T^{n+1}(\phi - 1) = \phi - 1$. De fato

$$T^{n+1}(\phi - 1) = T^n(T(\phi - 1)) = T^n(\phi - 1)$$

e pela hipótese de indução, $T^n(\phi - 1) = \phi - 1$, tem-se que

$$T^{n+1}(\phi - 1) = T^n(\phi - 1) = (\phi - 1).$$

Assim, pelo princípio da indução, $T^n(\phi - 1) = \phi - 1$ é verdadeiros para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

Utilizando a representação em frações contínuas do número ϕ podemos encontrar boas aproximações com números racionais na forma $\dfrac{p_n}{q_n}$ para o mesmo.

- $\dfrac{p_0}{q_0} = a_0 = \dfrac{1}{1} = 1$, assim $p_0 = 1$ e $q_0 = 1$.
- $\dfrac{p_1}{q_1} = a_0 + [a_1] = 1 + [1] = 1 + \dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{1} = 2$, assim $p_1 = 2$ e $q_1 = 1$.
- $\dfrac{p_2}{q_2} = a_0 + [a_1, a_2] = 1 + [1, 1] = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \dfrac{3}{2} = 1,5$, assim $p_2 = 3$ e $q_2 = 2$.
- $\dfrac{p_3}{q_3} = a_0 + [a_1, a_2, a_3] = 1 + [1, 1, 1] = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \dfrac{5}{3} = 1,666\ldots$, assim $p_3 = 5$ e $q_3 = 3$.
- $\dfrac{p_4}{q_4} = a_0 + [a_1, a_2, a_3, a_4] = 1 + [1, 1, 1, 1] = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \dfrac{8}{5} = 1,6$, assim $p_4 = 8$ e $q_4 = 5$.

Podemos observar que os valores de $p_n(1,2,3,5,8,\ldots)$, para $n \in \mathbb{N}$, aumenta igual a sequência de Fibonacci a partir de F_2. Já os valores de $q_n(1,1,2,3,5,\ldots)$, para $n \in \mathbb{N}$, é exatamente igual a sequência de Fibonacci. Por que isso ocorre? Temos que, pela proposição 3 item (a), $p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}$ e $q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}$, e como $a_n = 1$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que para o número de ouro são válidas as seguintes sentenças

$$\begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \quad com \quad p_{-1} = 1 \quad e \quad p_0 = 1 \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2}, \quad com \quad q_{-1} = 0 \quad e \quad q_0 = 1\ , \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}^\star \end{cases}$$

Logo, ambos se desenvolvem igual a sequência de Fibonacci. Como podemos observar na Tabela 5:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
q_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Tabela 5 - Primeiros p_n e q_n de ϕ

Observando a Tabela 5, podemos conjecturar a seguinte proposição.

***Proposição* 6.** *Para os convergentes* $\dfrac{p_n(\phi)}{q_n(\phi)}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $p_n = q_{n+1}$.

Demonstração: Demonstraremos por indução que $p_n(\phi) = q_{n+1}(\phi)$ é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$, temos

$$p_0(\phi) = q_1(\phi) = 1$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 0$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para todo $k \leq n$ com $n \in \mathbb{N}$, isto é, $p_n(\phi) = q_{n+1}(\phi)$ e vamos mostrar que tal resultado vale para $n+1$, isto é, $p_{n+1}(\phi) = q_{n+2}(\phi)$

Pela Proposição 3 item (a), temos:

$$p_{n+1} = a_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}$$

Usando a hipótese de indução e sabendo que $a_{n+1} = a_{n+2}$,

$$p_{n+1} = a_{n+2} \cdot q_{n+1} + q_n = q_{n+2}$$

Assim, pelo princípio da indução, $p_n(\phi) = q_{n+1}(\phi)$ é verdadeiros para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

***Exemplo* 13.** *Sabendo que* $p_{16}(\phi) = 2484$ *e* $p_{17}(\phi) = 4181$ *escreva* $\dfrac{P_{17}(\phi)}{q_{17}(\phi)}$.

Usando a Proposição 6, temos que:

$$\frac{p_n(\phi)}{q_n(\phi)} = \frac{p_n(\phi)}{p_{n-1}(\phi)} = \frac{p_{17}(\phi)}{p_{16}(\phi)} = \frac{4181}{2584} \simeq 1.6180340557275541795665634674922600 61\ldots$$

Agora, construiremos a tabela 6 para verificarmos a relação entre os convergentes e o número da sequência Fibonacci que podemos conferir na Definição 8.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
q_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
F_n		1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Tabela 6 - Comparando F_n com p_n e q_n de ϕ

Observando a Tabela 6 podemos conjecturar a Proposição 7, que vai nos permitir encontrar uma aproximação racional para ϕ usando dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci.

***Proposição* 7.** *Temos que* $\dfrac{p_n(\phi)}{q_n(\phi)} = \dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Primeiramente demonstraremos por indução que $p_n(\phi) = F_{n+2}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$, temos:

$$p_0 = F_2 = 1$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 0$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para todo $k \leq n$ com $n \in \mathbb{N}$, isto é, $p_n(\phi) = F_{n+2}$ e vamos mostrar que tal resultado vale para $n+1$, isto é, $p_{n+1}(\phi) = F_{n+3}$

Pela Proposição 3 item (a), temos

$$p_{n+1} = a_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}$$

Usando a hipótese de indução e sabendo que $a_{n+1} = 1$, chegamos que

$$p_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1}$$

Pela Definição 8, $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$, logo,

$$p_{n+1} = F_{n+3}$$

Assim, pelo princípio da indução, $p_n = F_{n+2}$ é verdadeiros para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora iremos demonstrar que $q_n(\phi) = F_{n+1}$.

Pela Proposição 6, temos que $p_n(\phi) = q_{n+1}(\phi)$, e usando $p_n(\phi) = F_{n+2}$, concluímos que $q_n(\phi) = F_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

$\frac{p_n}{q_n}$	$\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$	Aproximação	Erro= $\left\|\phi - \frac{p_n}{q_n}\right\|$
$\frac{p_4}{q_4}$	$\frac{F_6}{F_5}$	$\frac{8}{5} = 1,6$	$< 0,04$
$\frac{p_9}{q_9}$	$\frac{F_{11}}{F_{10}}$	$\frac{89}{55} = 1,6181818\ldots$	$< 0,0004$
$\frac{p_{18}}{q_{18}}$	$\frac{F_{20}}{F_{19}}$	$\frac{6765}{4181} = 1,6180339631667065\ldots$	$< 3 \cdot 10^{-8}$
$\frac{p_{48}}{q_{48}}$	$\frac{F_{50}}{F_{49}}$	$\frac{12586269025}{7778742049} = 1,618033988749894\ldots$	$< 8 \cdot 10^{-21}$

Tabela 7 - Quociente entre os termos de Fibonacci

Usando os números de Fibonacci da Tabela 4 e a Proposição 4, para encontrarmos a margem de erro das aproximações, iremos construir a tabela 7.

Observando a Tabela 7 podemos perceber que a medida que o valor de n aumenta mais precisa é a aproximação. Quando n tende a infinito o erro tende a zero.

***Teorema* 5.** *(Observação de Kepler) (SANTOS, 2018) A razão entre termos sucessivos da sequência de Fibonacci converge para ϕ, isto é,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Demonstração:

Pela Proposição 7 e pelo Teorema 3 temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{p_n(\phi)}{q_n(\phi)} = \phi$$

■

Outra maneira para encontrarmos os convergentes de ϕ sem precisar recorrer aos números de Fibonacci é observando que para encontrar o próximo convergente basta somar uma unidade ao convergente atual elevado a -1, como pode ser visto abaixo.

***Proposição* 8.** *Para o número ϕ temos como verdadeiro que*

$$1 + \frac{q_n(\phi)}{p_n(\phi)} = \frac{p_{n+1}(\phi)}{q_{n+1}(\phi)}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Demonstraremos por indução que $1+\dfrac{q_n(\phi)}{p_n(\phi)}=\dfrac{p_{n+1}(\phi)}{q_{n+1}(\phi)}$ é verdadeiro para qualquer $n\in\mathbb{N}$.

Para $n=0$, temos:

$$1+\frac{q_0(\phi)}{p_0(\phi)}=1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}=\frac{p_1(\phi)}{q_1(\phi)}$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n=0$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para algum $n\in\mathbb{N}$, isto é, $1+\dfrac{q_n(\phi)}{p_n(\phi)}=\dfrac{p_{n+1}(\phi)}{q_{n+1}(\phi)}$ e vamos mostrar que tal resultado vale para $n+1$, isto é, $1+\dfrac{q_{n+1}(\phi)}{p_{n+1}(\phi)}=\dfrac{p_{n+2}(\phi)}{q_{n+2}(\phi)}$

$$1+\frac{q_{n+1}(\phi)}{p_{n+1}(\phi)}=\frac{p_{n+1}(\phi)+q_{n+1}(\phi)}{p_{n+1}(\phi)}$$

Pela Proposição 6 temos $p_n=q_{n+1}$, logo:

$$1+\frac{q_{n+1}(\phi)}{p_{n+1}(\phi)}=\frac{p_{n+1}(\phi)+p_n(\phi)}{q_{n+2}(\phi)}$$

E pela Proposição 3 item (a), temos:

$$1+\frac{q_{n+1}(\phi)}{p_{n+1}(\phi)}=\frac{p_{n+2}(\phi)}{q_{n+2}(\phi)}$$

Assim, pelo princípio da indução, $1+\dfrac{q_n(\phi)}{p_n(\phi)}=\dfrac{p_{n+1}(\phi)}{q_{n+1}(\phi)}$ são verdadeiros para todo $n\in\mathbb{N}$. ■

***Exemplo* 14.** *Sendo* $\dfrac{p_9(\phi)}{q_9(\phi)}=\dfrac{89}{55}$ *encontre* $\dfrac{p_{10}(\phi)}{q_{10}(\phi)}$:

Usando a Proposição 8, basta fazer:

$$\frac{p_{10}(\phi)}{q_{10}(\phi)}=1+\frac{55}{89}=\frac{144}{89}$$

Poderíamos concluir o capítulo por aqui, visto que já exploramos as propriedades do número de ouro(ϕ), além de fecharmos sua relação com a sequência Fibonacci. Mas só por curiosidade iremos fazer mais um exemplo para verificarmos até onde vai tanta beleza.

***Exemplo* 15.** *Usando a Definição 8, construa a representação em frações contínuas de* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$.

Pela definição, temos que a sequência de Fibonacci cada termo a partir do terceiro é a soma dos dois anteriores. Faremos o processo do início da dissertação separando a parte inteira do número e a parte que sobra iremos reescrever com numerador igual a 1.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{F_n+F_{n-1}}{F_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{F_{n-1}}{F_n}\right)=1+\cfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_n}{F_{n-1}}\right)}$$

$$=1+\cfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_{n-1}}\right)}=1+\cfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-2}}{F_{n-1}}\right)}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-2}+F_{n-3}}{F_{n-2}}\right)}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-3}}{F_{n-2}}\right)}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-2}}{F_{n-3}}\right)}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-3}+F_{n-4}}{F_{n-3}}\right)}}}$$

Podemos observar que o processo será infinito, e os quocientes sempre serão iguais a 1.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cfrac{F_{n-4}}{F_{n-3}}\right)}}}=1+[1,1,1,1,\ldots]$$

Podemos garantir que essa é a representação da expansão em frações contínuas de $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}$, pois usamos a Proposição 5, que garante a unicidade da representação dos irracionais por meio das frações contínuas, e o Teorema 5, que diz $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\phi$.

5 NÚMERO DE EULER

Neste capítulo iremos apresentar um pouco do contexto histórico do número de Euler, além de apresentarmos suas definições, e algumas de suas características. Faremos a construção da representação por meio de frações contínuas do número de Euler (e) e assim podemos verificar o quanto ela é interessante em sua aparência e excelente para obtermos aproximações.

5.1 Surgimento e definição do número de Euler

Nesta seção apresentaremos um problema sobre juros compostos, e a partir dele encontraremos o número de Euler. Faremos a apresentação do número de Euler como limite, como somatório além de comentarmos sobre as séries de Taylor e Maclaurin.

Segundo (MAOR, 2008), o primeiro reconhecimento da importância do número e na matemática foi em 1618 por John Naiper[4] por meio do logaritmo de base e. O fator que levou a descoberta do número de Euler foi principalmente o crescimento do comércio internacional na idade moderna. Por meio de uma situação problema de juros compostos, que é parecida com a que descreveremos em sequência.

Faremos um investimento familiar x para pegar tudo daqui a 100 anos, com um rendimento nominal de 100% pelo período. Assim temos

$$M = x(1+1) = 2x$$

Mas de repente mudamos de ideia, vamos pegar todo o montante quando completar 50 anos e em seguida reinvestir todo montante por mais 50 anos. Com isso teremos dois períodos de tempo e a taxa de juros será a metade em cada período, assim temos

$$M = x\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25x$$

Observamos que o rendimento com dois períodos foi maior do que com apenas um período independente do valor do investimento. Então vamos testar para outros períodos de tempo na Tabela 8.

Como podemos observar, na Tabela 8, quanto maior a quantidade de períodos de tempo menor é a variação da taxa de rendimento. Pensando assim podemos imaginar que quando forem infinitos períodos de tempo a taxa de rendimentos vai chegar a seu limite.

[4] John Napier foi um matemático, físico, astrônomo e teólogo escocês. Também era conhecido pelo nome, em latim, de Ioannes Neper. É mais conhecido como o decodificador do logaritmo natural e por ter popularizado o ponto decimal.

Período de Tempo	Taxa de rendimento
3	$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3} = 2,370370370\ldots$
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^{4} = 2,44140625$
5	$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{5} = 2,48832$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2,5937424601$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = 2,704813829\ldots$
1000	$\left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,716923932\ldots$
10^6	$\left(1+\frac{1}{10^6}\right)^{10^6} = 2,718280469\ldots$
10^9	$\left(1+\frac{1}{10^9}\right)^{10^9} = 2,718281837\ldots$
10^{12}	$\left(1+\frac{1}{10^{12}}\right)^{10^{12}} = 2,718281828\ldots$

Tabela 8 - Taxas de rendimentos

Com base em (GUIDORIZZI, 2008), iremos analisar a sequência definida pelo termo geral

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \text{ para } n \geq 1$$

com o objetivo de verificarmos sua convergência, para isso basta provarmos que a sequência é crescente e que existe $M > 0$ tal que $a_n < M$ para todo $n \geq 1$. Primeiramente, vamos provar que $\left(1+\frac{1}{n}\right) < 3$ para todo $n \geq 1$. Para isso faremos o desenvolvimento do binômio de Newton.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

$$+ \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 1^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} \ldots + \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(n)(n-1)(n-2)!}{n^2(n-2)!} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)!}{n^3(n-3)!} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot \frac{(n-3)}{n} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1}{n^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \ldots \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

Como todos os valores dentro do parênteses pertencem ao intervalo (0,1), pode-se concluir que

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \tag{7}$$

Demostraremos por indução que $2^n \leq (n+1)!$ para todo $n \geq 1$.

Para $n = 1$, temos

$$2 \leq 2! = 2$$

Logo, a afirmação é verdadeira para $n = 1$.

Vamos supor que o nosso resultado é válido para algum $n \in \mathbb{N}$, isto é, $2^n \leq (n+1)!$ e vamos mostrar que tal resultado vale para $n+1$, isto é, $2^{n+1} \leq (n+2)!$.

Pela hipótese de indução, temos que:

$$2^n \leq (n+1)!$$

multiplicaremos a inequação por 2, assim temos que

$$2^{n+1} \leq 2(n+1)! \leq (n+2)(n+1)! = (n+2)!$$

Assim, pelo princípio da indução, $2^{n+1} \leq (n+2)!$ é verdadeiros para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo podemos escrever que

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}, \text{ para todo } n \geq 1$$

assim,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} \tag{8}$$

e como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

é a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{2}$, logo esse somatório é igual a 2. E como a inequação (8) para em $\frac{1}{2^{n-1}}$ podemos escrever que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \text{ para todo n} \geq 1$$

Agora, verificaremos que $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, para $n \geq 1$ é crescente. Sejam $n, m \in \mathbb{N}^\star$, com $n < m$. Queremos provar que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

primeiramente vamos desenvolver os dois binômios, ficando assim

- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n}$
- $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{m}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\cdot\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\frac{2}{m}\cdot\frac{1}{m}$

como $n < m$, temos que

$$\begin{aligned}
1-\frac{1}{n} &< 1-\frac{1}{m}\\
1-\frac{2}{n} &< 1-\frac{2}{m}\\
1-\frac{3}{n} &< 1-\frac{3}{m}\\
&\vdots\\
1-\frac{n-1}{n} &< 1-\frac{n-1}{m}
\end{aligned}$$

assim podemos garantir que

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 0$$

Logo concluímos que a sequência é crescente. Assim temos que a sequência (a_n), com $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)$, para $n \geq 1$ é convergente. A seguir definiremos que ela converge para o número de Euler.

***Definição* 9.** *(MAOR, 2008) O número de Euler é o limite da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, isto é,*

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = 2,718281828459\ldots$$

Uma outra forma de representarmos o número de Euler é através de um somatório como veremos na próxima proposição.

***Proposição* 9.** *(MAOR, 2008) O número e é o limite da sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cujo termo geral é dado por*

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

isto é,

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Demonstração: Usaremos a inequação (7),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = S_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim concluímos que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = e$$

■

***Exemplo* 16.** *Usando a Proposição 9, calcule a aproximação do número de Euler quando:*

a) n=3

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} = \frac{8}{3} = 2,666\ldots$$

b) n=4

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{65}{24} = 2,708333\ldots$$

Com base no Exemplo 16 atribuindo outros valores para n, vamos construir a Tabela 9.

5.1.1 Série de Taylor

Nesta seção faremos uma um breve apresentação da serie de Taylor e de Maclaurin, com um único objetivo de termos uma representação para e^x, pois esta representação será útil para a construção da representação em frações contínuas do número de Euler.

k	$e = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$
3	$2,666\ldots$
4	$2,708333\ldots$
5	$2,71666\ldots$
6	$2,7180555\ldots$
7	$2,718253968\ldots$
8	$2,718227876\ldots$
9	$2,718281152\ldots$
10	$2,718281801\ldots$
11	$2,718281826\ldots$

Tabela 9 - Aproximação do número de Euler por Somatório

Se f é diferenciável e f' é contínua, dizemos que f é de classe C^1. Daí se f' é diferenciável, então podemos obter a segunda derivada f''. Se f'' é contínua, dizemos que f é de classe C^2 e assim por diante. A partir da quarta derivada, usa-se a notação $f^{(n)}$ para representar a n-ésima derivada de f. Assim estamos prontos para definir o que foi argumentado acima.

***Definição* 10.** *(LIMA, 2011) Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ (I é um intervalo) é uma função de classe C^n quando f é n vezes derivável e $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ é contínua.*

Quando f é de classe C^n dizemos que $f \in C^n$. Quando $f \in C^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ dizemos que f é de classe C^∞ e escrevemos $f \in C^\infty$. Também dizemos que f é infinitamente diferenciável se $f \in C^\infty$.

***Definição* 11.** *(LIMA, 2011) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida no intervalo I e n vezes derivável no ponto a. Chama-se polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a o polinômio de grau menor ou igual a n cujas derivadas de ordem menor ou igual a n no ponto 0 coincidem com as de mesma ordem de f no ponto a.*

***Lema* 2.** *Seja $f(x) = ax^n$. Então $f^{(n)}(x) = n!a$, com $n \in \mathbb{N}^\star$.*

Demonstração: Nós vamos proceder por indução. Como $f(x) = ax$ implica $f'(x) = a$, a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Assuma que $g(x) = ax^k$ implica $g^{(k)}(x) = k!a$ para algum k natural diferente de zero. Queremos provar que $h(x) = ax^{k+1}$ implica $h^{(k+1)}(x) = (k+1)!a$. Observe que $h'(x) = (k+1) \cdot g(x)$. Daí, tome $h_1(x) = (k+1) \cdot g(x)$. Portanto, $h^{(k+1)}(x) = h_1^{(k)}(x)$. Pela propriedades de derivada e pela hipótese de indução, $h^{(k+1)}(x) = (k+1)!a$. Pelo princípio de indução, se $f(x) = ax^n$, então $f^{(n)}(x) = n!a$ para todo $n \in \mathbb{N}^\star$.

$\blacksquare$

Seja $p(h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ um polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a. Então $p^{(i)}(0) = f^{(i)}(a)$ para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Pelo Lema acima $f^{(i)}(0) = i!a_i$, isto é,

$$a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!}$$

para todo $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Como as derivadas $p^{(0)}(0), p'(0), ..., p^{(n)}(0)$ determinam de modo único $p(h)$, segue que o polinômio de Taylor de ordem n da função f no ponto a é

$$p(h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n.$$

***Teorema* 6.** *(Fórmula de Taylor infinitesimal)(LIMA, 2011) Seja $f : I \to \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função $r : J \to \mathbb{R}$, definida no intervalo $J = \{h \in \mathbb{R} | a+h \in I\}$, pela igualdade*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{n-1} h^{(n-1)!} + r_n(h)$$

cumpre $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = 0$. Reciprocamente, se $p(h)$ é um polinômio de grau maior ou igual a n tal que $r(h) = p(a + h) - p(h)$ cumpre $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r_n(h)}{h^n} = 0$, então $p(h)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto a. Isto é,

$$p(h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a) h^k}{k!}.$$

A demostração se encontra em (LIMA, 2011).

***Definição* 12.** *(NETO, 2015) Seja $f : (c - r, c + r) \to \mathbb{R}$ uma função infinitamente diferenciável, onde $r > 0$ é um número real. Então chamamos a série de potência abaixo de série de Taylor da função f em torno do ponto c:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)(x - c)^k}{k!}$$

Esta denominação se deve ao fato de que a soma dos $n + 1$ termos desta série constitui o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto c. Quando $c = 0$, chamamos de série de Maclaurin, ficando da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0) x^k}{k!}$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função exponencial $f(x) = e^x$. É conhecido que $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo $k > 1$. Logo a série de Taylor da função $f(x) = e^x$ em torno do ponto zero é igual

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^0 x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

5.2 Expansão em frações contínuas do número de Euler

Nesta seção iremos construir a representação do número de Euler por meio de frações contínuas. Inicialmente vamos observar com o auxílio de uma calculadora, para facilitar os cálculos, o desenvolvimento do número de Euler em frações contínuas.

Usando, a definição 9, temos que $e = 2,718281828459\ldots$. Faremos o processo similar ao inicio do trabalho. Separando a parte inteira do número, e a parte decimal escreveremos como uma fração de numerador igual a um. Assim temos que:

$$e = 2 + 0,718281828459\ldots$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1,392211191\ldots}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2,549646778\ldots}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1,819350243\ldots}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1,220479285\ldots}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4,535573476\ldots}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1,867157438\ldots}}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1,153193128\ldots}}}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6,527707953\ldots}}}}}}}}$$

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1,894987547\ldots}}}}}}}}}$$

Com base neste desenvolvimento que fizemos, temos que:

$$e = 2 + \left[1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6 + \frac{1}{1,894987547\ldots}\right]$$

5.2.1 Demonstração da expansão em Frações contínuas do número de Euler

Nesta seção iremos construir a representação em frações contínuas do número de Euler. A base para essa construção retiramos de nossa principal referência bibliográfica (DíAZ; JORGE, 2007), sendo que fizemos diversas modificações para tornar a mesma mais didática.

Observando os quocientes que encontramos podemos conjecturar que existe uma sequência lógica na expansão em frações contínuas do número de Euler. Verificaremos isso a partir da Definição 13.

***Definição* 13.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Chamamos de* Θ *a expansão em frações contínua da forma* $2 + [a_1, a_2, \cdots]$ *onde,* $a_1 = 1$*,* $a_{3k-1} = 2k$ *e* $a_{3k} = a_{3k+1} = 1$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*.*

Nosso objetivo é concluir que $\Theta = e$, mas para isso vamos demonstrar alguns lemas, que veremos em sequência. Esse primeiro lema tem como função ser uma extensão do algoritmo da divisão de Euclides, a grande diferença é que trabalharemos com números reais, e não apenas com os inteiros.

***Lema* 3.** *Sejam $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais positivos e naturais, respectivamente, tal que $s_n = a'_n s_{n+1} + s_{n+2}$, como s_i e a'_i diferentes de zero, para todo $i \in \mathbb{N}$, então a expansão em frações contínuas de $\dfrac{s_n}{s_{n+1}}$ é $a'_n + [a'_{n+1}, a'_{n+2}, \ldots]$.*

Demonstração: Primeiramente, note que $s_n > s_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, temos que

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \frac{a'_n s_{n+1} + s_{n+2}}{s_{n+1}} = a'_n + \frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}$$

E assim

$$T\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) = \frac{s_n}{s_{n+1}} - \left\lfloor \frac{s_n}{s_{n+1}} \right\rfloor = \frac{s_{n+2}}{s_{n+1}} \tag{9}$$

Vamos provar por indução que para todo $k \in \mathbb{N}^*$

$$T^k\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) = \frac{s_{(n+1)+k}}{s_{n+k}} \tag{10}$$

O caso $k = 1$, segue direto da equação (9).

Suponha que $T^{(j)}\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right) = \dfrac{s_{(n+1)+j}}{s_{n+j}}$ seja verdadeiro para algum $j \in \mathbb{N}^*$, assim temos que:

$$T^{(j+1)}\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) = T\left(T^{(j)}\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right)\right) = T\left(\frac{s_{(n+1)+j}}{s_{n+j}}\right)$$

Assim, da equação (10) temos:

$$T^{(j+1)}\left(\frac{s_{n+1}}{s_n}\right) = \frac{s_{(n+1)+(j+1)}}{s_{n+(j+1)}}$$

Para terminar a prova, vamos calcular $a_k\left(\dfrac{s_n}{s_{n+1}}\right)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Com isso, $a_0\left(\dfrac{s_n}{s_{n+1}}\right) = \left\lfloor \dfrac{s_n}{s_{n+1}} \right\rfloor = a'_n$. Para $k > 0$, devemos calcular os cocientes (a'_n) de $\dfrac{s_n}{s_{n+1}} - \left\lfloor \dfrac{s_n}{s_{n+1}} \right\rfloor = \dfrac{s_{n+2}}{s_{n+1}}$. Assim, vamos calcular $a_k\left(\dfrac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right)$, com $k \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a_k\left(\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right) = \left\lfloor \frac{1}{T^{(k-1)}\left(\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right)} \right\rfloor$$

Daí pela equação (10), trocando k por $k-1$, temos que:

$$
\begin{aligned}
a_k\left(\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right) &= \left\lfloor \frac{1}{\frac{s_{n+2+k-1}}{s_{n+1+k-1}}} \right\rfloor \\
a_k\left(\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right) &= \left\lfloor \frac{s_{n+k}}{s_{n+1+k}} \right\rfloor \\
a_k\left(\frac{s_{n+2}}{s_{n+1}}\right) &= a'_{(n+k)}
\end{aligned}
$$

■

***Lema* 4.** *(DíAZ; JORGE, 2007) Seja* $\xi_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^n (n+k)!}{k!(2n+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n}$ *onde* $k,n,m \in \mathbb{N}$, *então a igualdade* $\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \xi_{n+2}$ *é verdadeira.*

Demonstração: De fato, tome (usaremos Δ_n para facilitar a notação)

$$
\Delta_n = \frac{2^n (n+k)!}{k!(2n+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n+1} &= \frac{2^{n+1}(n+1+k)!}{k!(2(n+1)+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n+1} \\
\Delta_{n+1} &= \frac{2^{n+1}(n+1+k)!}{k!(2n+2+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\
\Delta_{n+1} &= \frac{2^n \cdot 2(n+1+k)(n+k)!}{m \cdot k! \cdot 2(n+1+k)(2n+1+2k)(2n+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\
\Delta_{n+1} &= \frac{2^n (n+k)!}{m \cdot k!(2n+1+2k)(2n+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \\
\Delta_{n+1} &= \frac{2^n (n+k)!}{k!(2n+2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n} \cdot \frac{1}{m(2n+1+2k)}
\end{aligned}
$$

Usando a equação 11, temos que

$$
\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n}{m(2n+1+2k)} \tag{12}
$$

Ainda usando a equação 11, agora substituindo na equação $\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \xi_{n+2}$:

$$
\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\Delta_n - m(2n+1))\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(\Delta_n - m(2n+1))\sum_{k=0}^{+\infty}\Delta_{n+1}
$$

Usando a equação 11, temos que

$$
\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\Delta_n - m(2n+1)\left(\frac{\Delta_n}{m(2n+1+2k)}\right)\right)
$$

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\Delta_n - \left(\frac{m(2n+1)\Delta_n}{m(2n+1+2k)}\right)\right)$$

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\Delta_n - \left(\frac{2n\Delta_n + \Delta_n}{2n+1+2k}\right)\right)$$

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{(2n+1+2k)\Delta_n - 2n\Delta_n - \Delta_n}{2n+1+2k}\right)$$

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\Delta_n(2n+1+2k-2n-1)}{2n+1+2k}\right)$$

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2k\Delta_n}{2n+1+2k}\right)$$

Note que,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2k\Delta_n}{2n+1+2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k\Delta_n}{2n+1+2k}\right)$$

pois,

$$\frac{2\cdot 0\cdot \Delta_n}{2n+1+2\cdot 0} = 0$$

Logo podemos dizer que,

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k\Delta_n}{2n+1+2k}\right) \tag{13}$$

Daí substituindo a equação (11) na equação (13), temos que:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k\Delta_n}{2n+1+2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k}{2n+1+2k}\cdot\frac{2^n(n+k)!}{k!(2n+2k)!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n}\right)$$

Multiplicaremos por $(2n+2+2k)$ para completarmos o fatorial. Logo, temos

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k(2n+2+2k}{(2n+1+2k)(2n+2+2k)}\cdot\frac{2^n(n+k)!}{k!(2n+2k)!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2k\cdot 2(n+1+k)}{(2n+1+2k)(2n+2+2k)}\cdot\frac{2^n(n+k)!}{k(k-1)!(2n+2k)!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2^{n+2}(n+1+k)!}{(k-1)!(2n+2+2k)!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+n}\right)$$

Faremos manipulações algébricas para encontrarmos o $(k-1)$.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2^{n+2}(n+2+k-1)!}{(k-1)!(2n+4+2k-2)!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2k-2+n+2}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{2^{n+2}(n+2+(k-1))!}{(k-1)!(2(n+2)+2(k-1))!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2(k-1)+n+2}\right)$$

Trocaremos o valor inicial do k no somatório

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2^{n+2}(n+2+k)!}{k!(2(n+2)+2k)!}\cdot\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+(n+2)}\right)=\xi_{n+2}$$

Logo, usando a equação (13), temos que

$$\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \xi_{n+2}.$$

■

Lema 5. *Sejam Ψ_m uma expansão em frações contínuas, onde $a_n = m(2n+1)$ para $m \geq 1$, e $\delta = \dfrac{\xi_0}{\xi_1}$, então Ψ_m é a expansão em frações contínuas de δ e $\delta = \dfrac{e^{2/m}+1}{e^{2/m}-1}$.*

Demonstração:

Primeiramente, vamos provar que

$$\delta = a_0 + [a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots],$$

onde $a_n = m(2n+1)$. De fato, a diferença $\xi_n - m(2n+1)\xi_{n+1} = \xi_{n+2}$ nos garante que $\xi_n > \xi_{n+1}$. Assim, como $\xi_n = \xi_{n+2} + m(2n+1)\xi_{n+1}$, segue que

$$\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}} = \frac{\xi_{n+2}+m(2n+1)\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}} = \frac{\xi_{n+2}}{\xi_{n+1}} + m(2n+1),$$

isto é,

$$\left\lfloor\frac{\xi_n}{\xi_{n+1}}\right\rfloor = m(2n+1), \text{ pois } 0 < \frac{\xi_{n+1}}{\xi_n} < 1, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}^*$$

Este fato segue direto do Lema 3. Agora, pela série de Maclaurin, temos que

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Em particular quando $x = \dfrac{1}{m}$, temos que

$$e^{1/m} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{m}\right)^k$$

Com isso, note que

$$\frac{1}{2}\left(e^{1/m}+e^{-1/m}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k} \text{ e } \frac{1}{2}\left(e^{1/m}-e^{-1/m}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+1},$$

pois os termos gerais das séries de Maclaurin de $e^{1/m}$ e $e^{-1/m}$ são iguais quando k é par e simétricos quando é ímpar. Por outro lado, é fácil ver que

$$\xi_0=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k} \text{ e } \xi_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2k+1}$$

isto é,

$$\delta=\frac{\xi_0}{\xi_1}=\frac{\frac{1}{2}\left(e^{1/m}+e^{-1/m}\right)}{\frac{1}{2}\left(e^{1/m}-e^{-1/m}\right)}=\frac{e^{1/m}+e^{-1/m}}{e^{1/m}-e^{-1/m}}$$

Logo,

$$\delta=\frac{e^{1/m}+e^{-1/m}}{e^{1/m}-e^{-1/m}}$$

Multiplicando δ por $\dfrac{e^{1/m}}{e^{1/m}}$ temos

$$\delta=\frac{e^{2/m}+1}{e^{2/m}-1}.$$

■

Como, pelo Lema 5, $\Psi_m=\delta$, temos que

$$\Psi_m=\frac{\xi_0}{\xi_1}=\frac{e^{2/m}+1}{e^{2/m}-1}$$

Assim, podemos escrever a expansão em frações contínuas de Ψ_m, que fica assim

$$\Psi_m=m+\cfrac{1}{3m+\cfrac{1}{5m+\cfrac{1}{7m+\cfrac{1}{9m+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{m(2n+1)+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$\Psi_m=m+[3m,5m,7m,9m,\ldots,m(2n+1),\ldots]$

Para entender melhor como funciona com o Ψ_m faremos o exemplo 17.

***Exemplo* 17.** *Com base na representação em frações contínuas de Ψ_m, escreva as representações abaixo:*

a) Ψ_1

$$\Psi_1 = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{(2n+1) + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$\Psi_1 = 1 + [3, 5, 7, 9, \ldots, (2n+1), \ldots]$$

b) Ψ_2

$$\Psi_2 = 2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2(2n+1) + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$\Psi_2 = 2 + [6, 10, 14, 18, \ldots, 2(2n+1), \ldots]$$

c) Ψ_4

$$\Psi_4 = 4 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{20 + \cfrac{1}{28 + \cfrac{1}{36 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{4(2n+1) + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

$$\Psi_4 = 4 + [12, 20, 28, 36, \ldots, 4(2n+1), \ldots]$$

Neste momento vamos dar uma atenção maior para o Ψ_2, pois o mesmo será útil para concluirmos a demonstração sobre a representação em frações contínuas do número e. Mas no final desta seção iremos abrir um espaço para comentarmos o Ψ_1 e o Ψ_4. Agora, analisando os convergentes de Ψ_2, temos

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{13}{6} \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{132}{61}$$

Como $a_n(\Psi_2) = 2(2n+1)$, temos que:

$$\frac{p_n(\Psi_2)}{q_n(\Psi_2)} = \frac{2(2n+1)p_{n-1} + p_{n-2}}{2(2n+1)q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Essas informações serão úteis para o próximo lema.

***Lema* 6.** *Sejam* $\dfrac{p_k}{q_k}$ *e* $\dfrac{P_k}{Q_k}$ *os k-ésimos convergentes de* Θ *e* Ψ_2 *, respectivamente. Segue que* $P_k + Q_k = p_{3k+1}$ *e* $P_k - Q_k = q_{3k+1}$*, para o natural* $k > 0$.

Demonstração: Primeiramente, vamos escrever p_{3k+1} em função de $p_{3(k-1)+1}$ e $p_{3(k-2)+1}$. Como p_k é k-ésimo convergente de Θ, pela Definição 13, temos que $a_1 = 1$, $a_{3k-1} = 2k$ e $a_{3k} = a_{3k+1} = 1$ e usando a Proposição 3 item (a), temos que

- $p_{3k+1} = p_{3k} + p_{3k-1}$
- $p_{3k} = p_{3k-1} + p_{3k-2}$
- $p_{3k-1} = 2kp_{3k-2} + p_{3k-3}$

Com efeito, $p_{3k+1} = (2 \cdot 2k + 1)p_{3k-2} + 2p_{3k-3}$ e como $p_{3k-3} = p_{3k-4} + p_{3k-5}$, obtemos

$$p_{3k+1} = (2 \cdot 2k + 1)p_{3k-2} + p_{3k-4} + p_{3k-5} + p_{3k-3}$$

Daí, como $p_{3k-2} = p_{3k-3} + p_{3k-4}$, temos

$$p_{3k+1} = 2(2k + 1)p_{3k-2} + p_{3(k-5)}$$

e reescrevendo os índices em função de $k - 1$ e $k - 2$, concluímos que

$$p_{3k+1} = 2(2k + 1)p_{3(k-1)+1} + p_{3(k-2)+1}$$

Analogamente, $q_{3k+1} = 2(2k + 1)q_{3(k-1)+1} + q_{3(k-2)+1}$.

Para finalizar a prova do Lema, vamos fazer indução em k. Note, pela Proposição 3, que $q_{-1} = Q_{-1} = 0$, $p_0 = P_0 = a_0 = 2$ e $p_{-1} = q_0 = P_{-1} = Q_0 = 1$.

Para facilitar a demonstração iremos construir uma tabela auxiliar com alguns dos convergentes de Ψ_2 e Θ.

k	a_k	P_k	Q_k	p_k	q_k
0	2	2	1	2	1
1	1	13	6	3	1
2	2	132	61	8	3
3	1	1861	860	11	4
4	1	33630	15541	19	6

Tabela 10 - Tabela auxiliar

Daí, para $k = 0$ temos que

$$\begin{cases} P_0 + Q_0 = 3 = p_1 \\ P_0 - Q_0 = 1 = q_1 \end{cases}$$

Para $k = 1$,

$$\begin{cases} P_1 + Q_1 = 19 = p_4 \\ P_1 - Q_1 = 7 = q_4 \end{cases}$$

Suponha que

$$p_{3j+1} = P_j + Q_j \text{ e } q_{3j+1} = P_j - Q_j.$$

para todo $j \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq j < k$. Daí, concluímos que

$$P_k + Q_k = 2(2k+1)P_{k-1} + P_{K-2} + 2(2k+1)Q_{k-1} + Q_{K-2}$$

$$P_k + Q_k = 2(2k+1)(P_{k-1} + Q_{k-1}) + (P_{k-2} + Q_{k-2})$$

Da hipótese de indução em k, temos que

$$P_k + Q_k = 2(2k+1)(p_{3(k-1)+1}) + (p_{3(k-2)+1})$$

isto é, $P_k + Q_k = p_{3k+1}$. Analogamente, temos $P_k - Q_k = q_{3k+1}$.

■

Teorema 7. *A expansão em frações contínuas do número de Euler é* Θ*.*

Demonstração: Como, pelo Lema 5, temos que

$$\Psi_m = \frac{e^{m/2} + 1}{e^{m/2} - 1}$$

então, trabalhando com $m = 2$, encontramos

$$\Psi_2 = \frac{e + 1}{e - 1}$$

Agora, podemos escrever e em função de Ψ_2. Multiplicando ambos os membros por $e - 1$, temos

$$e + 1 = (e - 1)\Psi_2$$

isto é,

$$e + 1 = \Psi_2 e - \Psi_2$$

Somando $\Psi_2 - e$ em ambos os lados temos

$$\Psi_2 + 1 = \Psi_2 e - e$$

Portanto, é fácil ver que

$$e = \frac{\Psi_2 + 1}{\Psi_2 - 1}$$

Daí, tome $\dfrac{P_k}{Q_k}$ o k-ésimo convergente de Ψ_2. Usando o Teorema 3 temos que

$$e = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\dfrac{P_k}{Q_k} + 1}{\dfrac{P_k}{Q_k} - 1} \right)$$

Assim,

$$e = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(\frac{P_k + Q_k}{P_k - Q_k} \right)$$

Pelo Lema 6 temos,

$$\frac{P_k + Q_k}{P_k - Q_k} = \frac{p_{3k+1}}{q_{3k+1}}$$

Portanto,

$$e = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(\frac{p_{3k+1}}{q_{3k+1}} \right) = \Theta$$

Logo, Θ é a expansão em frações contínuas do e.

∎

Assim, finalmente podemos concluir que:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}}}$$

$e = 2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots, 1, 1, 2k, \ldots]$, com $a_1 = a_{3k} = a_{3k+1} = 1$ e $a_{3k-1} = 2k$, $k \in \mathbb{N}^\star$

Voltando em Ψ_1 e Ψ_4, que já escrevemos sua representação em frações contínuas no exemplo 17. Pelo Lema 5, temos que

$$\Psi_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}}+1}{e^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1} = 1 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{(2n+1)+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

Assim,

$$\frac{\sqrt{e}+1}{\sqrt{e}-1} = 1 + [3, 5, 7, 9, \ldots, (2n+1), \ldots]$$

Podemos observar que a sequência dos quocientes é exatamente a sequência dos números ímpares.

$$\Psi_4 = \frac{e^{\frac{4}{2}}+1}{e^{\frac{4}{2}}-1} = \frac{e^2+1}{e^2-1} = 4 + \cfrac{1}{12+\cfrac{1}{20+\cfrac{1}{28+\cfrac{1}{36+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{4(2n+1)+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}}$$

Assim,

$$\frac{e^2+1}{e^2-1} = 4 + [12, 20, 28, 36, \ldots, 4(2n+1), \ldots]$$

Podemos observar que a sequência dos quocientes é exatamente a sequência dos números ímpares multiplicado por 4.

5.2.2 Aproximações para o número de Euler

Nesta seção iremos apresentar algumas aproximações para o número de Euler obtidas por meio das frações contínuas.

Visto a propriedade dos convergentes 3 item (a) onde

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{e} \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

e sabendo que na expansão do número de Euler, pelo Teorema 7,

$$a_{3k-1} = 2k \quad \text{e} \quad a_1 = a_{3k} = a_{3k+1} = 1,\ k \in \mathbb{N}^{\star}.$$

Assim, temos que

$$p_1 = p_{3k} = p_{3k+1} = p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{e} \quad p_{3k-1} = 2kp_{n-1} + p_{n-2}$$

De forma análoga encontramos os valores para q_n:

$$q_1 = q_{3k} = q_{3k+1} = q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{e} \quad q_{3k-1} = 2kq_{n-1} + q_{n-2}$$

Logo, fica bem fácil escrever aproximações na forma $\dfrac{p_n(e)}{q_n(e)}$ e ainda podemos encontrar o erro absoluto da aproximação usando a Proposição 4. Assim, construirmos a Tabela 11.

p_n	q_n	$\dfrac{p_n}{q_n}$	$\left\lvert e - \dfrac{p_n}{q_n} \right\rvert$
$p_0 = 2$	$q_0 = 1$	$\dfrac{2}{1} = 2$	< 1
$p_1 = 3$	$q_1 = 1$	$\dfrac{3}{1} = 3$	< 1
$p_2 = 8$	$q_2 = 3$	$\dfrac{8}{3} = 2,666\ldots$	$< \dfrac{1}{9}$
$p_3 = 11$	$q_3 = 4$	$\dfrac{11}{4} = 2,75$	$< \dfrac{1}{16}$
$p_4 = 19$	$q_4 = 7$	$\dfrac{19}{7} = 2,714285714285714285\ldots$	$< \dfrac{1}{49}$
$p_5 = 87$	$q_5 = 32$	$\dfrac{87}{32} = 2,71875$	$< \dfrac{1}{1024}$
$p_6 = 106$	$q_6 = 39$	$\dfrac{106}{39} = 2,717948717948717948\ldots$	$< \dfrac{1}{1521}$
$p_7 = 193$	$q_7 = 71$	$\dfrac{193}{71} \simeq 2,718309859154929577464788 7$	$< \dfrac{1}{5041}$
$p_8 = 1264$	$q_8 = 465$	$\dfrac{1264}{465} \simeq 2,7182795698924731182795 69$	$< \dfrac{1}{216225}$
$p_9 = 1457$	$q_9 = 536$	$\dfrac{1457}{536} \simeq 2,7182835820895522388059 70$	$< \dfrac{1}{287296}$
$p_{10} = 2721$	$q_{10} = 1001$	$\dfrac{2721}{1001} \simeq 2,7182817182817182817182 81$	$< \dfrac{1}{1002001}$
$p_{11} = 23225$	$q_{11} = 8544$	$\dfrac{23225}{8544} \simeq 2,718281835205992509363 29$	$< \dfrac{1}{72999936}$
$p_{12} = 25946$	$q_{12} = 9545$	$\dfrac{25946}{9545} \simeq 2,718281822943949711891 04$	$< \dfrac{1}{91107025}$
$p_{13} = 49171$	$q_{13} = 18089$	$\dfrac{49171}{18089} \simeq 2,718281828735695726684 72$	$< \dfrac{1}{327211921}$
$p_{14} = 517656$	$q_{14} = 190435$	$\dfrac{517656}{190435} \simeq 2,71828182844540131803 50$	$< \dfrac{1}{36265489225}$

Tabela 11 - Aproximação do número de Euler por frações contínuas

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a dissertação verificamos a representação em frações contínuas dos números racionais e dos números irracionais, usando respectivamente, o algoritmo da divisão de Euclides e a Transformação de Gauss para a construção de tais representações.

Após essas construções e com o estudo de uma série de propriedades, principalmente dos quocientes e convergentes, conseguimos encontrar uma bela representação em frações contínuas do número de ouro

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}} = 1 + [1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$$

Também concluímos que para encontrarmos uma aproximação por meio de números racionais, igual a encontrada por frações contínuas, na forma $\frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{p_n}{q_n}$, basta escolhermos qualquer dois números consecutivos da sequência de Fibonacci.

De forma tão perfeita e bela quanto o número de ouro, porém totalmente independente do mesmo, fizemos a construção do número de Euler. Para isso, fizemos uma série de relações que inicialmente parecem não ter lógica, mas que no final se encaixam como um quebra cabeça. E assim encontramos a seguinte representação.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2k + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}}}}}$$

$e = 2 + [1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \ldots, 1, 1, 2k, \ldots]$, com $a_1 = a_{3k} = a_{3k+1} = 1$ e $a_{3k-1} = 2k$, $k \in \mathbb{N}^\star$

Apresentamos o trabalho de uma forma bem estruturada, com bastante exemplos para facilitar a compreensão de todos os tópicos mais relevantes da dissertação. A maior parte do trabalho pode ser lido por um bom aluno de ensino médio que goste de matemática, e as partes mais pesadas basta o leitor ter uma mínima noção de limites.

Nossa dissertação limitou-se a construção das frações contínuas, com toda a organização para representarmos o número de ouro e o número de Euler. Com o objetivo de verificar a lógica presente na representação e com isso conseguirmos suas aproximações por meio de números racionais.

A partir dos três primeiro capítulos podemos chegar a várias conjecturas que não foram expostas neste trabalho, como por exemplo trabalhar com os números de irracionalidade quadrática, ou ate mesmo buscar uma representação mais atraente para algum número transcendente, ficando assim para trabalhos futuros.

As frações contínuas possuem diversas situações de ensino aprendizagem, podendo ser uma ferramenta para fazer a transição dos números racionais para os reais, para encontrar aproximações de números irracionais ou até mesmo pelo simples lado lúdico. Observando o currículo mínimo do estado do Rio de Janeiro percebemos que os conteúdos relacionados aos números racionais e aos números irracionais aparecem diversas vezes, como podemos observar na Tabela 12.

Ano	Competências e Habilidades
7^o ano do EF	Ordenar e comparar números racionais; Reconhecer números racionais na forma decimal exata e de dízimas periódicas; Identificar a localização de números racionais representados na forma decimal na reta numérica; Realizar operações com números racionais nas formas de fração e decimal;
8^o ano do EF	Resolver problemas com números racionais envolvendo as operações; Reconhecer de forma intuitiva a existência dos números irracionais; Diferenciar números racionais e irracionais; Ordenar e comparar números reais
9^o ano do EF	Resolver problemas utilizando as operações fundamentais no conjunto dos números reais Reconhecer e diferenciar números decimais finitos ou infinitos, periódicos e não periódicos Ordenar e comparar números reais Identificar a localização de números reais na reta numérica; Resolver problemas que envolvam cálculos de estimativas utilizando radicais;
1^o ano do EM	Reconhecer e diferenciar os conjuntos numéricos, Identificar a localização de números reais na reta numérica; Utilizar a representação de números reais na reta para resolver problemas e representar subconjuntos dos números reais;

Tabela 12 - Habilidades e competências no currículo mínimo (SEEDUC-RJ, 2012)

Visto isso, as frações contínuas podem ser mais uma ferramenta para os professores deixando deixando a aprendizagem mais significativa para os alunos, pois poderão se deparar com formas diferentes de representar o número racional e encontrar aproximações espetaculares para os números irracionais. Assim com o conteúdo apresentado nesta dissertação até mesmo para os números de Ouro e Euler podem servir para o professor dinamizar o processo de ensino.

REFERÊNCIAS

BESKIN, N. *Iniciação à Matemática Fracções Contínuas.* 1. ed. U.R.S.S: Mir, 1987.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1974.

DíAZ, L. J.; JORGE, D. d. R. *Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos Via Frações contínuas.* 1. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo volume 1.* 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HEFEZ, A. *Aritmética.* 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

LIMA, E. L. *Análise Real Volume 1.* 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

MAOR, E. *e: A História de um Número.* 5. ed. Rio de janeiro: Record, 2008.

MOREIRA, C. G. T. d. A. M.; MARTINEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. *Tópicos de Teoria dos Números.* 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

NETO, A. C. M. *Fundamentos do Cálculo.* 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SANTOS, F. H. dos. *Funções de Fibonacci*: Um estudo sobre a razão áurea e a sequência de fibonacci. 2018. 51 f. Dissertação (Metrado Profissional em Matemática-PROFMAT) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018.

SEEDUC-RJ. *Curriculo Mínimo de Matemática.* 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Imprensa Oficial, 2012.

ZAHN, M. *Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.* 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.