Universidade Federal de São João del-Rei
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Campus Santo Antônio

Sobre o Teorema que Resolve a Conjetura de Navarrete-Orellana, em uma Faixa de Números Primos

Gabriel Silva de Andrade

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei, Campus Santo Antônio.

Orientador
Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila

2020

xxx Andrade, Gabriel Silva de
Xyyyx Sobre o Teorema que Resolve a Conjetura de Navarrete-Orellana, em uma Faixa de Números Primos/ Gabriel Silva de Andrade - Campus Santo Antônio: [s.n.], 2020.
39 f.: fig., tab.

Orientador: Jorge Andrés Julca Avila

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de São João del-Rei, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

1. Padrões em números primos. 2. Números triangulares. 3. Pontos fixos. 4. Família de sequências. 5. Solução de conjetura. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da
UFSJ - Campus Santo Antônio

TERMO DE APROVAÇÃO

Gabriel Silva de Andrade

Sobre o Teorema que Resolve a Conjetura de Navarrete-Orellana, em uma Faixa de Números Primos

Dissertação APROVADA, em 30 de setembro de 2020, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de São João del-Rei (Campus Santo Antônio) pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jorge Andrés Julca Avila **(Orientador)**
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Juan Carlos Zavaleta Aguilar (*Avaliador Local*)
UFSJ - Universidade Federal de São João del-Rei

Prof. Dr. Juan Valentín Mendoza Mogollón (*Avaliador Externo*)
UNIFEI - Universidade Federal de Itajubá

São João del-Rei, 30 de setembro de 2020

Aos meus pais Izabel e Gilmar, pelo incentivo, paciência e confiança, e a Jesus, por me sustentar e guiar. Gratidão!

Agradecimentos

A Deus, por me sustentar e amparar em cada dificuldade.

A Jesus, por me guiar e acompanhar em todos os instantes.

À minha família, pelo incentivo, carinho e acolhimento.

Aos meus amigos, pela alegria, confiança e partilha.

A todos os meus professores do PROFMAT e ao meu orientador, Jorge, pela paciência, dedicação e compreensão.

O professor que caminha na sombra do templo, entre os seus discípulos, não dá a sua sabedoria mas antes a sua fé e o seu amor.

Khalil Gibran

Resumo

Dado um número primo p, uma sequência $A(p)$ está formada pelos menores divisores dos $p-$múltiplos dos números triangulares. A *Conjetura de Navarrete-Orellana* estabelece que quando p é grande, gera-se uma sequência $A(p)$, de tal maneira que todos os números primos ímpares p', exceto o primo p, são pontos fixos dessa sequência. Neste trabalho elaboramos um teorema que demostra parcialmente essa conjetura mas, especificamente, em uma faixa de primos $2p$.

Palavras-chave: Padrões em números primos, Números triangulares, Pontos fixos, Família de sequências, Solução de conjetura.

Abstract

Given a prime number p, a sequence $A(p)$ is formed by the smallest divisors of the $p-$multiples of the triangular numbers. The Navarrete-Orellana Conjecture establishes that when p is large, a sequence $A(p)$ is generated, in such a way that all the odd prime numbers p', except the prime p, are fixed points of that sequence. In this work, we elaborate a theorem that partially demonstrates this conjecture but, specifically, in a strip of primes $2p$.

Keywords: Prime number patterns, Triangular numbers, Fixed points, Sequence family, Conjecture solution.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Ao nos depararmos com um dos problemas mais intrigantes e antigos da matemática, qual seja, descobrir uma fórmula capaz de gerar todos os números primos, de maneira exata e sem exceção, encontramos algumas soluções, que no entanto, não são eficientemente computáveis [1].

Apesar de notáveis esforços, tais como uma fórmula baseada no teorema de Wilson [2], as fórmulas de Mills [3] e Wright [4], o trabalho de Jones, Sato, Wada e Wiens [5], assim como outras abordagens, como a de Rowland [6], há outras possibilidades a serem exploradas.

Navarrete e Orellana [7] trabalharam nessa direção, e elaboraram, então, uma forma de encontrar os primos ímpares como pontos fixos de uma determinada sequência.

Os autores verificaram que quanto maior for o primo utilizado para gerar a sequência, maior a quantidade de primos que são pontos fixos da mesma, chegando a 100% dos primos analisados, em determinados casos.

Tais resultados levaram os autores a conjeturar que para um valor muito grande do primo acima referido, teríamos que qualquer número primo ímpar, diferente daquele usado para gerar a sequência, é ponto fixo dessa sequência.

Neste trabalho, apresentamos uma prova parcial para a conjetura de Navarrete-Orellana. A demonstração de nosso teorema afirma a veracidade da conjetura para uma certa região infinita de números primos, grosso modo, todos os números primos que estão dentro de uma faixa são pontos fixos.

A prova parcial pode ser um passo para uma prova definitiva, sendo um possível caminho para uma fórmula eficientemente computável para os números primos, que é o objetivo final de nossas aspirações ao escrevermos este texto.

2 Resultados Preliminares

Neste capítulo definiremos alguns conjuntos, sequências, ponto fixo e o teorema de Bertrand-Chebyshev, para a compreensão de um tipo especial de família de sequências, que será estudada no próximo capítulo.

Definição 2.1 (Conjunto dos Números Naturais).

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Notação **2.1.** $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} - \{0\}$

Definição 2.2 (Conjunto dos Números Inteiros).

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

Definição 2.3 (Conjunto dos Divisores de n). Dado $n \in \mathbb{N}$. Definimos, o conjunto de divisores de n, por

$$D[n] \quad = \quad \{d : d|n\} \tag{2.1}$$

2.1 Números Primos

Os números primos possuem uma definição tão simples, porém sua distribuição, no conjunto dos números inteiros, é complicadíssima. Fato que motivou, motiva e motivará matemáticos a buscar cada vez uma compreensão melhor sobre estes números. A seguir apresentamos o conjunto dos números primos.

Definição 2.4 (Conjunto de Números Primos). Dado $n \in \mathbb{N}$, n é primo se, e somente se, possui como únicos divisores 1 e o próprio n. O conjunto dos números primos, denotado por $\mathcal{P}$, é dado por

$$\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$$

Notação **2.2.** $\mathcal{P}^\star = \mathcal{P} - \{2\}$

Observação **2.1.**

(i) A Definição 2.4 é equivalente a:

$$\mathcal{P} = \{p_k : \; k \in \mathbb{N}^\star\}$$

onde, $p_1 = 2, \; p_2 = 3, \; p_3 = 5, \ldots$.

(ii) Do mesmo modo, $\mathcal{P}^\star = \{p_k : \; k \in \mathbb{N}^\star, \; k > 1\}$.

2.2 Números Triangulares

Ao olharmos a sequência $\{0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\}$ podemos dizer que esta descreve a recorrência de primeira ordem linear não homogênea: $a_n = a_{n-1}+(n-1)$, e cuja solução é dada por $a_n = \frac{n(n-1)}{2}, n > 0$. Agora, o nome deve-se ao fato que, originalmente, foi obtida através de pontos no triangulo equilátero. A seguir, definimos essa sequência.

Definição 2.5 (Sequência dos Números Triangulares).

$$T \;=\; \{t(n)\}_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left\{\frac{n(n-1)}{2} \,:\, n \in \mathbb{N}^\star\right\} \;=\; \{0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots\} \qquad (2.2)$$

Definição 2.6 (Sequência de $p-$múltiplos dos Números Triangulares). Dado $p \in \mathcal{P}$. Definimos,

$$T_p = \{t_p(n)\}_{n\in\mathbb{N}^\star} = \left\{\frac{n(n-1)p}{2} \,:\, n \in \mathbb{N}^\star\right\} = \{0, p, 3p, 6p, 10p, 15p, 21p, \ldots\} \qquad (2.3)$$

Exemplo 2.1. Para $p = 3$, temos $T_3 = \{t_3(n)\}_{n\in\mathbb{N}^\star} = \{0, 3, 9, 18, 30, 45, 63, \ldots\}$.

Definição 2.7 (Conjunto dos Divisores de $t_p(n)$).

$$D\left[t_p(n)\right] \;=\; \{d_p \,:\, d_p \in \mathbb{N}^\star;\; d_p \mid t_p(n)\} \qquad (2.4)$$

Exemplo 2.2. Para $p = 3$ temos, na última coluna da Tabela 2.2.1, os sete primeiros conjuntos dos divisores de $t_3(n)$.

Tabela 2.1: Os sete primeiros conjuntos $D\left[t_3(n)\right]$.

n	$t(n)$	$t_3(n)$	$D\left[t_3(n)\right]$
1	0	0	$\mathbb{N}^*$
2	1	3	$\{1, 3\}$
3	3	9	$\{1, 3, 9\}$
4	6	18	$\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
5	10	30	$\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
6	15	45	$\{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
7	21	63	$\{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$

Fonte: Autores (2020).

2.3 Ponto Fixo

Os pontos fixos de uma função tem muitas aplicações na ciência e nas engenharias. Uma aplicação muita conhecida consiste na obtenção de raízes de equações algébricas não-lineares. A seguir apresentamos a definição de ponto fixo.

Definição 2.8 (Ponto Fixo). Seja $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ uma função. Dizemos que $x \in \mathbb{Z}$ é um ponto fixo de f, se $f(x) = x$.

A seguir, enunciaremos o Teorema de Bertrand-Chebyshev; inicialmente esse teorema era conhecido como o Postulado de Bertrand, mas em 1852 foi provado por Chebyshev, e em 1919 pelo matemático Ramanujan.

O teorema será utilizado na demonstração de um corolário, no final do Capítulo 4.

Teorema 2.1 (Bertrand-Chebyshev). *Seja* $p_k \in \mathcal{P}$, $k \geqslant 1$. *Então,* $p_{k+1} < 2p_k$.

Prova. Informações da demostração desse teorema encontra-se em [8].

Exemplo 2.3. Considere o número primo $p_k = 101$. Então, pelo Teorema de Bertrand-Chebyshev, o seguinte número primo é menor que $2p_k = 202$. Nesse caso, o número primo é $p_{k+1} = 103$.

Com estas definições, temos os conceitos necessários para o estudo de uma particular família de sequências, que veremos no capítulo seguinte.

3 Uma Família de Sequências

Neste capítulo definiremos uma família especial de sequências, que denotaremos por $\mathcal{A} = \{A(p)\}_{p\in\mathcal{P}}$, e estudaremos suas características e padrões.

3.1 A Sequência $A(p)$

Essa sequência é composta pelos menores divisores $p-$múltiplos dos números triangulares.

Definição 3.1 (**Sequência** $A(p)$)**.** Seja $p \in \mathcal{P}$. A sequência $A(p)$ é formada pelos menores divisores dos $p-$múltiplos dos números triangulares; estes divisores são números positivos que ainda não apareceram na sequência.

Observação **3.1.**

(i) A sequência $A(p)$ pode, equivalentemente, definir-se por $A(p) = \{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$, onde $a : \mathbb{N}^\star \longrightarrow \mathbb{N}^\star$ é uma função, definida por

$$a(n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 1 \\ p & \text{se} \quad n = 2 \\ \min D\left[t_p(n)\right] & \text{se} \quad n \geqslant 3,\ a(n) \neq a(n'),\ \forall n' < n \end{cases} \tag{3.1}$$

(ii) Note que o $n-$ésimo termo da sequência $A(p)$, $a(n)$, possui a propriedade de $a(1) = 1$ e $a(2) = p$. Consequência de 1 ser o menor divisor de 0 e p ser o menor divisor de p, diferente de 1.

Exemplo **3.1.** Para $p = 3$ mostramos, na Tabela 3.1, os sete primeiros elementos da sequência $A(3)$. Assim, $A(3) = \{1, p, 9, 2, 5, 15, 7, ...\}$.

Com a finalidade de simplificar o processo de contas, ao calcular os elementos de $A(p)$, definimos a seguinte sequência.

Definição 3.2 (**Sequência** $\tilde{A}(p)$)**.** Seja $p \in \mathcal{P}^\star$. Definimos a sequência $\tilde{A}(p) = \{\tilde{a}(n)\}_{n\in\mathbb{N}^\star}$, onde $\tilde{a} : \mathbb{N}^\star \longrightarrow \mathbb{N}^\star$ é uma função, definida por

$$\tilde{a}(n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{se} \quad n = 1 \\ p & \text{se} \quad n = 2 \\ \min D\left[t(n)\right] & \text{se} \quad n \geqslant 3,\ \tilde{a}(n) \neq \tilde{a}(n'),\ \forall n' < n \end{cases} \tag{3.2}$$

A seguir enunciaremos duas proposições que resultam das sequências $A(p)$ e $\tilde{A}(p)$.

Tabela 3.1: Elementos de $A(3)$.

n	$t(n)$	$t_3(n)$	$D[t_3(n)]$	$a(n)$
1	0	0	$\mathbb{N}^*$	1
2	1	3	$\{1,3\}$	p
3	3	9	$\{1,3,9\}$	9
4	6	18	$\{1,2,3,6,9,18\}$	2
5	10	30	$\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$	5
6	15	45	$\{1,3,5,9,15,45\}$	15
7	21	63	$\{1,3,7,9,21,63\}$	7

Fonte: Autores (2020).

Proposição 3.1. *Os elementos de $A(p)$ satisfazem uma relação biunívoca, ou seja, se $a(m) = n$ e $a(m') = n'$, com $m \neq m'$ então $n \neq n'$.*

Prova. Provaremos por absurdo. Suponhamos que existam m e m', $m \neq m'$, tais que $a(m) = a(m') = n$. Sem perda de generalidade, consideremos $m < m'$. Então como $a(m) = n$, segue que pela Definição 3.1, os números posteriores a ele tem como resultado na sequência um número diferente de n, logo, $a(m') \neq n$, o que é um absurdo. ■

Proposição 3.2. *Para todo $p \in \mathcal{P}$, $p \geqslant 5$, sejam as sequências $A(p)$ e $\tilde{A}(p)$. Se $p' \in \mathcal{P}^\star$, $p' < 2p$ e $p' \neq p$, então $a(p') = \tilde{a}(p')$.*

Prova. Seja $a(p') = m$ e $\tilde{a}(p') = m'$. Primeiro, vamos provar que m' não é múltiplo de p. Suponhamos que m' seja um múltiplo de p. Como $a(2) = p$, segue que $m' \geqslant 2p$. Temos que $p' \mid \left[\frac{p'(p'-1)}{2}\right]$ e $\tilde{a}(n) \neq p', n < p'$, visto que $p' \nmid \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]$, e como $p' < 2p \leqslant m'$ então $\tilde{a}(p') = p'$, o que é um absurdo. Logo m' não é múltiplo de p. De maneira análoga, temos que m não é múltiplo de p'.

Seja $m' < m$. Como $m' \mid \left[\frac{p'(p'-1)}{2}\right]$, e daí segue que $m' \mid \left[\frac{p'(p'-1)p}{2}\right]$, então $\exists q;\ a(q) = m',\ q < p'$. Então $m' \mid \left[\frac{q(q-1)p}{2}\right]$, e como m' não é múltiplo de p, segue que $m' \mid \left[\frac{q(q-1)}{2}\right]$, e como $q < p'$, segue que $\tilde{a}(q) = m'$, o que é um absurdo.

Seja $m < m'$. Como $m \mid \left[\frac{p'(p'-1)p}{2}\right]$, e daí segue que $m \mid \left[\frac{p'(p'-1)}{2}\right]$, em virtude de m não ser múltiplo de p, então $\exists q;\ \tilde{a}(q) = m,\ q < p'$. Então $m \mid \left[\frac{q(q-1)}{2}\right]$, e como $m \mid \left[\frac{q(q-1)p}{2}\right]$ e $q < p'$, segue que $a(q) = m$, o que é um absurdo.

Portanto $m = m'$, ou seja, $a(p') = \tilde{a}(p')$. ■

Exemplo 3.2. Para $p = 5$ mostramos, na Tabela 3.2, alguns valores de $\tilde{a}(n)$ e $a(n)$; note-se que "nsa" significa: não se aplica. Quando $p' < 2p = 10$, confirma-se a Proposição 3.2.

Exemplo 3.3. Para $p = 7$ mostramos, na Tabela 3.3, alguns valores de $\tilde{a}(n)$ e $a(n)$. Quando $p' < 2p = 14$, confirma-se a Proposição 3.2.

Tabela 3.2: Elementos de $\tilde{A}(5)$ e $A(5)$.

n	p'	$t(n)$	$t_5(n)$	$D[t(n)]$	$D[t_5(n)]$	$\tilde{a}(n)$	$a(n)$	$\tilde{a}(n) = a(n)$
1		0	0	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	1	1	✓
2		1	5	{1}	{1, p}	p	p	✓
3	3	3	15	{1, 3}	{1, 3, 5, 15}	3	3	✓
4		6	30	{1, 2, 3, 6}	{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}	2	2	nsa
5	5	10	50	{1, 2, 5, 10}	{1, 2, 5, 10, 25, 50}	10	10	nsa
6		15	75	{1, 3, 5, 15}	{1, 3, 5, 15, 25, 75}	15	15	nsa
7	7	21	105	{1, 3, 7, 21}	{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105}	7	7	✓
8		28	140	{1, 2, 4, 7, 14, 28}	{1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140}	4	4	nsa
9		36	180	{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180}	6	6	nsa

Fonte: Autores (2020).

Tabela 3.3: Elementos de $\tilde{A}(7)$ e $A(7)$.

n	p'	$t(n)$	$t_7(n)$	$D[t(n)]$	$D[t_7(n)]$	$\tilde{a}(n)$	$a(n)$	$\tilde{a}(n) = a(n)$
1		0	0	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^*$	1	1	✓
2		1	7	{1}	{1, p}	p	p	✓
3	3	3	21	{1, 3}	{1, 3, 7, 21}	3	3	✓
4		6	42	{1, 2, 3, 6}	{1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}	2	2	nsa
5	5	10	70	{1, 2, 5, 10}	{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}	5	5	✓
6		15	105	{1, 3, 5, 15}	{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105}	15	15	nsa
7	7	21	147	{1, 3, 7, 21}	{1, 3, 7, 21, 49, 147}	21	21	nsa
8		28	196	{1, 2, 4, 7, 14, 28}	{1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196}	4	4	nsa
9		36	252	{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}	{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12, 14, 18, 21, 28, 36, 42, 63, 84, 126, 252}	6	6	nsa
10		45	315	{1, 3, 5, 9, 15, 45}	{1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315}	9	9	nsa
11	11	55	385	{1, 5, 11, 55}	{1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385}	11	11	✓
12		66	462	{1, 2, 3, 6, 11, 22, 33, 66}	{1, 2, 3, 6, 7, 11, 14, 21, 22, 33, 42, 66, 77, 154, 231, 462}	22	14	nsa
13	13	78	546	{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78}	{1, 2, 3, 6, 7, 13, 14, 21, 26, 39, 42, 78, 91, 182, 273, 546}	13	13	✓

Fonte: Autores (2020).

3.2 Padrões na Sequência $A(p)$

Considere o número primo $p = 7$. Da oitava coluna da Tabela 3.3 observamos que:

$$A(7) \quad = \quad \{1, p, 3, 2, 5, 15, 21, 4, 6, 9, 11, 14, 13\} \tag{3.3}$$

Se continuarmos a calcular mais elementos de $A(7)$, teríamos

$$A(7) = \{1, p, 3, 2, 5, 15, 21, 4, 6, 9, 11, 14, 13, 49, 35, 8, 17, 51, 19, 10, 30, 33, 23, 12\} \tag{3.4}$$

De (3.4) podemos obter o gráfico de $a(n)$, isto é,

$$\begin{aligned} G(a) \quad = \quad & \{(1,1),(2,p),(3,3),(4,2),(5,5),(6,15),(7,21),(8,4),(9,6),(10,9), \\ & (11,11),(12,14),(13,13),(14,49),(15,35),(16,8),(17,17),(18,51), \\ & (19,19),(20,10),(21,30),(22,33),(23,23),(24,12)\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por outro lado, considere o gráfico da função identidade $i(n)$, dado por

$$\begin{aligned} G(i) \quad = \quad & \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10), \\ & (11,11),(12,12),(13,13),(14,14),(15,15),(16,16),(17,17),(18,18), \\ & (19,19),(20,20),(21,21),(22,22),(23,23),(24,24)\} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tabela 3.4: Elementos de $A(7)$.

n	p'	$a(n)$	n	p'	$a(n)$	n	p'	$a(n)$
1		1	17	17	17	33		22
2		p	18		51	34		77
3	3	3	19	19	19	35		85
4		2	20		10	36		42
5	5	5	21		30	37	37	37
6		15	22		33	38		133
7	7	21	23	23	23	39		39
8		4	24		12	40		26
9		6	25		20	41	41	28
10		9	26		25	42		41
11	11	11	27		27	43	43	43
12		14	28		18	44		86
13	13	13	29	29	29	45		45
14		49	30		87	46		63
15		35	31	31	31	47	47	47
16		8	32		16	48		24

Fonte: Autores (2020).

A interseção desses gráficos é mostrada na Figura 3.2. Note que, à exceção de $p = 7$, a interseção ocorre em todos os números primos ímpares: $\{3, 5, 11, 13, 17, 19, 23\}$, ou seja, $a(3) = 3$, $a(5) = 5$, $a(11) = 11$, $a(13) = 13$, $a(17) = 17$, $a(19) = 19$ e $a(23) = 23$. Isto também foi observado nas colunas 2 e 8 da Tabela 3.3. Então, de modo natural, surgem as seguintes perguntas:

1ª *Será que todos os números primos ímpares da sequência $A(7)$, com exceção do 7, são pontos fixos dessa sequência?*

ou, inversamente,

2ª *Será que todos os pontos fixos de $A(7)$, excetuando o próprio 7, são números primos ímpares?*

Gostaríamos de responder afirmativamente, mas veja a Tabela 3.4, ela apresenta os 48 primeiros elementos da sequência $A(7)$. Note que $a(27) = 27$ é um ponto fixo, sendo que 27 não é primo, assim responde negativamente a segunda pergunta, já $a(41) = 28$, não é ponto fixo, porém 41 é primo, respondendo negativamente a primeira peganta.

Na verdade, a primeira pergunta tem uma resposta afirmativa, dada pela **Conjetura de Navarrete-Orellana**, [7], que confirma sua veracidade para p grandes. Neste trabalho é demostrado parcialmente essa conjetura (ou seja, em uma faixa de primos), fato que veremos no próximo capítulo.

Por outro lado, a segunda pergunta, constitui um problema da matemática em aberto. Não existe nenhuma formulação ou conjetura a respeito disso.

Para entender melhor a explicação dada acima, precisaremos definir o que é uma faixa de primos.

Definição 3.3 (**Faixa de primos** $2p$)**.** Dado $p \in \mathcal{P}^\star$. Uma faixa de primos $2p$, denotada por $\mathcal{F}_{2p}$, é definida por

$$\mathcal{F}_{2p} \quad = \quad \{(p, p') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \ p, p' \in \mathcal{P}^\star, \, p' < 2p\} \tag{3.7}$$

Notação 3.1. Quando não houver perigo de confusão, a faixa de primos $2p$ pode considerar-se como

$$\mathcal{F}_{2p} \quad = \quad \{p' \in \mathcal{P}^\star : \, p' < 2p\} \tag{3.8}$$

Definição 3.4 (**Faixa de primos** $2p$**–estrela**)**.**

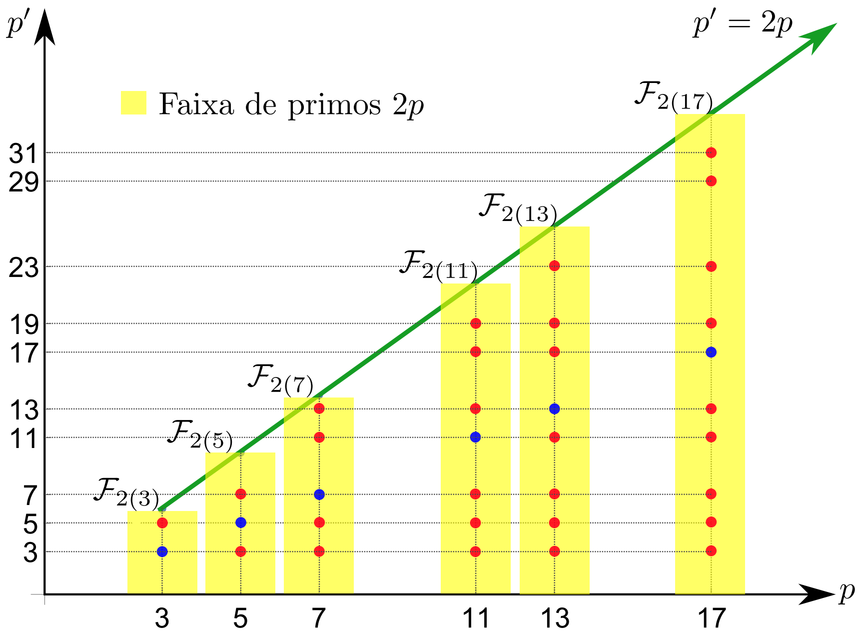
$$\mathcal{F}^\star_{2p} \quad = \quad \mathcal{F}_{2p} - \{(p,p) : \, p \in \mathcal{P}^\star\} \tag{3.9}$$

Exemplo 3.4. Na Figura 3.1 mostramos seis faixas de primos $2p$, quando $p = 3, 5, 7, 11, 13$ e 17. Em particular, a faixa de primos $\mathcal{F}_{2p}$, $p = 17$, é dada por

(i) $\mathcal{F}_{2(17)} = \{3, 5, 7, 11, 13, \mathbf{17}, 19, 23, 29, 31\}$

(ii) $\mathcal{F}^\star_{2(17)} = \{3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31\}$

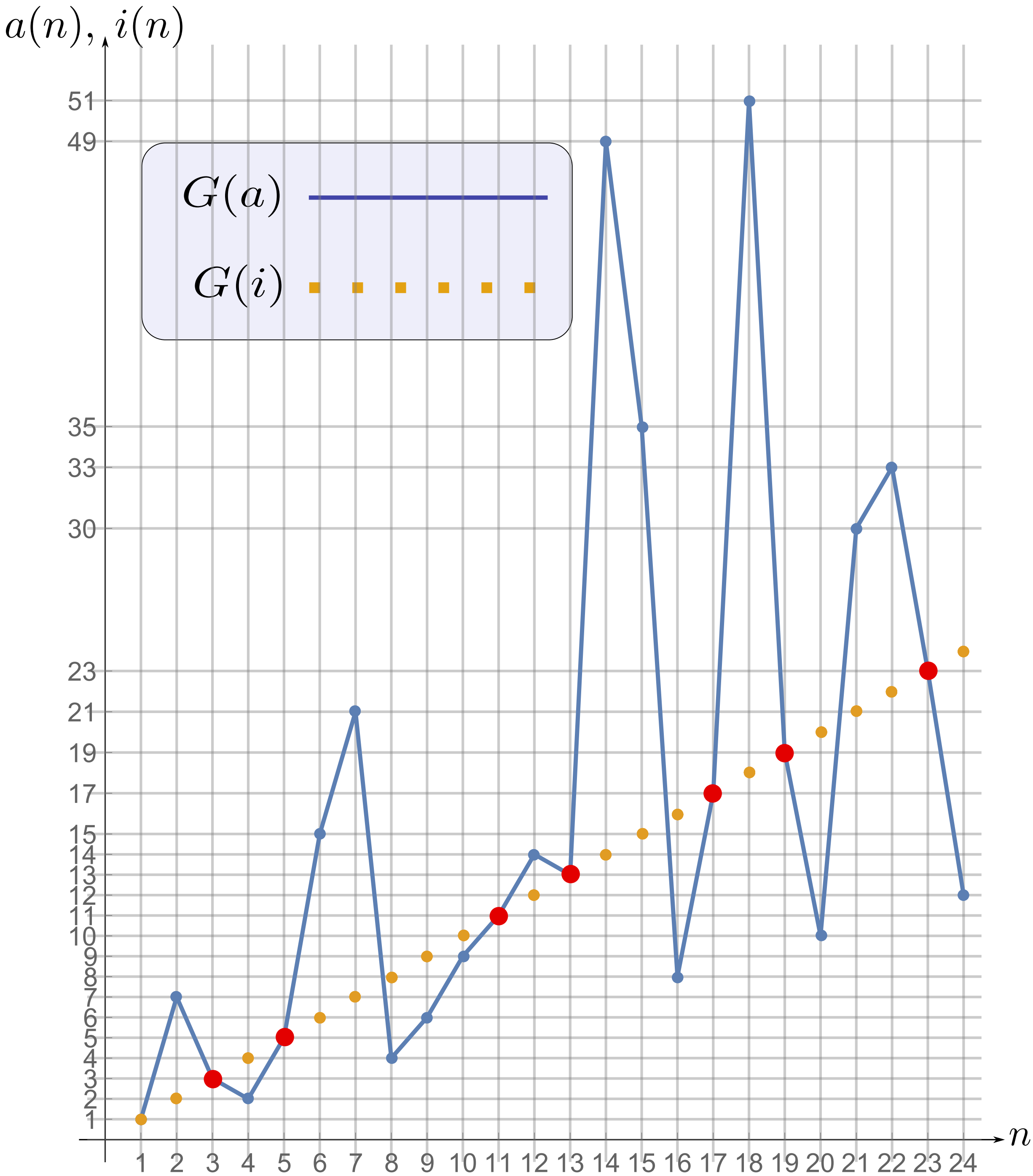
Figura 3.1: Faixas de primos $2p$, $p = 3, 5, 7, 11, 13$ e 17.



Fonte: Autores (2020).

No próximo capítulo apresentaremos a Conjetura de Navarrete e Orellana, e demonstraremos o Teorema Principal desse trabalho.

Figura 3.2: Interseção dos gráficos das funções $a(n)$ e $i(n)$.



Fonte: Autores (2020).

4 O Teorema Principal

Neste capítulo será enunciada a Conjetura de Navarrete-Orellana (CN-O), cujo estudo nos motivou a reformular e demonstrar, parcialmente, a mesma. Também será enunciado e demonstrado o Teorema Principal desse trabalho. Finalmente, estuda-se um importante corolário.

A CN-O nos fornece uma condição necessária, mas não suficiente, para que um número seja primo, grosso modo: *o fato de um número ser ponto fixo, de uma determinada sequência, é apenas condição necessária para que esse número seja primo.* A seguir, enunciaremos a CN-O ("Conjecture 6.1" em [7]), sofrendo uma leve modificação, com relação à notação.

Conjetura 4.1 (A Conjetura de Navarrete-Orellana). Sejam $p \in \mathcal{P}$ e $A(p) = \{a(n) : n \in \mathbb{N}^\star\}$. Então, p sendo um número grande, e para qualquer $p' \neq p$, se $p' \in \mathcal{P}^\star$, então $a(p') = p'$.

Informações adicionais sobre essa conjetura são encontradas em [7].

O seguinte lema é útil para a demonstração do Teorema Principal.

Lema 4.1. *Sejam $p \in \mathcal{P}$, $m \in \mathbb{N}^\star$ e $A(p) = \{a(n) : n \in \mathbb{N}^\star\}$. Se $a(n) = m$ então $n \leqslant 2m$.*

Prova.
Demonstraremos pelo absurdo. Suponha que exista $n \in \mathbb{N}^\star$, tal que $n > 2m$. Seja n' o menor dentre esses elementos, e seja $a(n') = m'$. Seja $a(2m') = q$. Como $2m' < n'$, segue que $2m' \leqslant 2q$, ou seja, $m' \leqslant q$, visto que n' é o menor elemento tal que para $a(n) = m$, então $n > 2m$, e pela proposição 3.1, temos que $m' \neq q$, de maneira que $m' < q$. Como $m' \mid \left[\frac{2m'(2m'-1)p}{2}\right]$ e $m' < q$, então $a(2m') = m'$, visto que $n' > 2m'$, o que é um absurdo, de maneira que não existe $n \in \mathbb{N}^\star$, tal que $n > 2m$.

Exemplo **4.1.** Aplicaremos o Lema 4.1 para o caso particular : $p = 3$, $n < 6$ e $m < 6$. Estes resultados são mostrados na Tabela 4.1.

O seguinte teorema é o Teorema Principal desse trabalho; ele afirma que se cumpre a CN-O, ou seja, garante que todos os números primos da faixa de primos $2p-$estrela, $\mathcal{F}^\star_{2p}$, são pontos fixos de $a(n)$. Portanto, o termo "parcialmente" significa que somente é válido para uma faixa de primos, e não para todos os números primos.

Teorema 4.1 (Teorema Principal). *Sejam $p \in \mathcal{P}^\star$ e $A(p) = \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}^\star}$. Se $p' \in \mathcal{P}^\star$, $p' \neq p$ e $p' < 2p$, então $a(p') = p'$.*

Tabela 4.1: Aplicação do Lema 4.1, quando $p = 3$.

n	$m = a(n)$	$n \leqslant 2m$
1	1	✓
2	3	✓
3	9	✓
4	2	✓
5	5	✓
6	15	✓
7	7	✓

Fonte: Autores (2020).

Prova.
Seja $p' = 2q + 1$, para algum $q \in \mathbb{N}^*$. Considere $a(n) = q$. Pelo Lema 4.1, temos que $n \leqslant 2q$. Assim, $n < 2q + 1 = p'$, ou seja, $a(p') \neq q$. Note que $2q < 2q + 1 < 3q < ...$, porém, $2q \nmid p'qp$, pois p' e p **são ímpares**. Além disso, $2q + 1 < 2p < 3p < ...$ e $(2q + 1) \mid p'qp$. Logo, $a(p') = 2q + 1 = p'$. Portanto, p' é ponto fixo da sequência $A(p)$. ■

Exemplo **4.2.** Aplicaremos o Teorema Principal para o caso particular: $p = 3$. Esses resultados são mostrados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Aplicação do Teorema Principal, quando $p = 3$.

n	p'	$a(n)$	$p' < 2p = 6$	$a(p') = p',\ p' \neq p$
1		1	nsa	nsa
2		p	nsa	nsa
3	3	9	✓	nsa
4		2	nsa	nsa
5	5	5	✓	✓

Fonte: Autores (2020).

Exemplo **4.3.** Aplicaremos o Teorema Principal para o caso particular: $p = 5$. Esses resultados são mostrados na Tabela 4.3.

Exemplo **4.4.** Aplicaremos o Teorema Principal para o caso particular: $p = 7$. Esses resultados são mostrados na Tabela 4.4.

Exemplo **4.5.** Aplicaremos o Teorema Principal para o caso particular: $p = 11$. Esses resultados são mostrados na Tabela 4.5, onde "nsa" significa: não se aplica.

Corolário 4.1. *Seja $p_k \in \mathcal{P}$, $k \geqslant 3$. Então, $a(p_k) = p_k$, onde $a(n) \in A(p_{k-1})$.*

Prova. Seja a sequência $A(p_{k-1}) = \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}^\star}$. Pelo Teorema 2.1, temos que $p_k < 2p_{k-1}$. Como $p_k \neq p_{k-1}$, temos, pelo Teorema Principal, que $a(p_k) = p_k$. ■

Exemplo **4.6.** Considere o número primo $p_3 = 5$ e a sequência $A(p_2) = A(3) = \{1, 3, 9, 2, 5, 15, 7, \ldots\}$. Logo, pelo Corolário 4.1, $a(p_3) = a(5) = 5 = p_3$.

Tabela 4.3: Aplicação do Teorema Principal, quando $p = 5$.

n	p'	$\tilde{a}(n)$	$a(n)$	$p' < 2p = 10$	$a(p') = p',\ p' \neq p$
1		1	1	nsa	nsa
2		p	p	nsa	nsa
3	3	3	3	✓	✓
4		2	2	nsa	nsa
5	5	10	10	✓	nsa
6		15	15	nsa	nsa
7	7	7	7	✓	✓
8		4	4	nsa	nsa
9		6	6	nsa	nsa

Fonte: Autores (2020).

Tabela 4.4: Aplicação do Teorema Principal, quando $p = 7$.

n	p'	$\tilde{a}(n)$	$a(n)$	$p' < 2p = 14$	$a(p') = p',\ p' \neq p$
1		1	1	nsa	nsa
2		p	p	nsa	nsa
3	3	3	3	✓	✓
4		2	2	nsa	nsa
5	5	5	5	✓	✓
6		15	15	nsa	nsa
7	7	21	21	✓	nsa
8		4	4	nsa	nsa
9		6	6	nsa	nsa
10		9	9	nsa	nsa
11	11	11	11	✓	✓
12		**22**	**14**	nsa	nsa
13	13	13	13	✓	✓

Fonte: Autores (2020).

Exemplo 4.7. Considere o número primo $p_4 = 7$ e a sequência $A(p_3) = A(5) = \{1, 5, 3, 2, 10, 15, 7, 4, 6, 9, 11, 22, 13, \ldots\}$. Logo, pelo Corolário 4.1, $a(p_4) = a(7) = 7 = p_4$.

Observação 4.1.

O Corolário 4.1 pode, equivalentemente, ser enunciado da seguinte forma:

> Todo número primo maior que 3 é ponto fixo em pelo menos uma sequência da família $\mathcal{A}$.

No próximo capítulo apresentaremos alguns testes numéricos no Teorema Principal.

Tabela 4.5: Aplicação do Teorema Principal, quando $p = 11$.

n	p'	$\tilde{a}(n)$	$a(n)$	$p' < 2p = 22$	$a(p') = p',\ p' \neq p$
1		1	1	nsa	nsa
2		p	p	nsa	nsa
3	3	3	3	✓	✓
4		2	2	nsa	nsa
5	5	5	5	✓	✓
6		15	15	nsa	nsa
7	7	7	7	✓	✓
8		4	4	nsa	nsa
9		6	6	nsa	nsa
10		9	9	nsa	nsa
11	11	55	55	✓	nsa
12		22	22	nsa	nsa
13	13	13	13	✓	✓
14		**91**	**77**	nsa	nsa
15		21	21	nsa	nsa
16		8	8	nsa	nsa
17	17	17	17	✓	✓
18		**51**	**33**	nsa	nsa
19	19	19	19	✓	✓
20		10	10	nsa	nsa
21		14	14	nsa	nsa

Fonte: Autores (2020).

5 Testes Numéricos do Teorema Principal

Neste capítulo serão realizados alguns testes numéricos do Teorema Principal (Teorema 4.1), para números primos grandes. Dessa forma, reafirmamos sua veracidade. Com um código computacional e o uso do computador obteremos a quantidade de pontos fixos na família especial de sequências $\mathcal{A}$.

Para entender a explicação dos testes, precisamos definir alguns conceitos de quantidade de números primos.

No que segue, o símbolo # denota a quantidade de elementos de um conjunto.

Definição 5.1 (**Quantidade de Números Primos**). Seja $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Definimos $\pi(x)$ como sendo a quantidade de números primos menores ou iguais a x. Isto é,

$$\pi(x) \;=\; \#\{p \in \mathcal{P} : p \leqslant x\} \tag{5.1}$$

Notação **5.1.**

(i) Seja $p \in \mathcal{P}$. Denotamos a **quantidade de primos que são pontos fixos de** $A(p)$, na Faixa de primos $2p$, por

$$\mathbb{P}_F(p) \;=\; \#\left\{p' \in \mathcal{P}^\star : \; \tilde{a}(p') = p',\, p' < 2p,\; p' \neq p,\, \tilde{a}(n) \in \tilde{A}(p)\right\}$$

(ii) Seja $p \in \mathcal{P}$. Denotamos a **quantidade de números primos na Faixa de primos** $2p$, por

$$\Pi(2p) \;=\; \#\{p' \in \mathcal{P}^\star : \; p' < 2p,\, p' \neq p\} \;=\; \pi(2p) - 2$$

5.1 Aplicação dos Testes

Com a finalidade de reafirmar a veracidade do Teorema Principal, para números primos p grandes, se realizaram alguns testes numéricos. Devido ao valor grande que consideramos para p, o qual, implica complexidade de cálculo, foi necessário implementar um código computacional. Se optou pela linguagem Python 3.8.

Para constatar a quantidade de números primos que são pontos fixos da sequência $a(n) \in A(p)$, na Faixa de primos $2p$, conforme o Teorema Principal aponta, se elaboraram 6 testes como descritos na Tabela 5.1. Não foram escolhidos mais testes por causa do tempo computacional que demandou para rodar o 6º teste. O 5º e o 6º teste demoraram, aproximadamente, 3 e 5 horas, respectivamente; mas sobretudo porque se usou um computador simples: notebook com processador Intel i5, sexta geração e 2.3 GHz de CPU.

Vamos, agora, descrever a tabela. Na segunda coluna, para cada teste, foram escolhidos alguns números primos; na verdade, os 4 primeiros testes são os números primos mais próximos a 10, 100, 1.000 e 10.000, respectivamente. Já o 5º e o 6º teste são números primos mais próximos a 20.000 e 30.000, respectivamente. Na terceira coluna encontra-se o dobro dos números primos. Na quarta coluna especificamos a quantidade de números primos que são pontos fixos da sequência $\tilde{a}(n) \in \tilde{A}(p)$, ou seja, o valor de $\mathbb{P}_F(p)$, obtido pela execução do código computacional. A quinta coluna corresponde à quantidade de números primos que há até $2p$, ou seja, $\Pi(2p)$. Esse valor foi obtido usando o software: "Wolfram Mathematica 12" pelo comando: "PrimePi[$2p$] - 2". E, finalmente, a última coluna é a constatação da veracidade do Teorema Principal desse trabalho.

Tabela 5.1: Testes numéricos no Teorema Principal para diferentes números primos p, sendo a sequência $A(p) = \{a(n)\}_{1 \leqslant n < 2p}$.

Teste	p	$2p$	$\mathbb{P}_F(p)$	$\Pi(2p)$	$\mathbb{P}_F(p) = \Pi(2p)$
1º	7	14	4	4	✓
2º	97	194	42	42	✓
3º	997	1.994	299	299	✓
4º	9.973	19.946	2.252	2.252	✓
5º	19.997	39.994	4.201	4.201	✓
6º	29.989	59.978	6.503	6.053	✓

Fonte: Autores (2020).

6 Considerações Finais

A prova parcial da conjetura de Navarrete e Orellana, nada obstante sua limitação, é um passo muito sólido na direção de uma prova definitiva, visto que todo primo que atende às condições é ponto fixo, conforme resultado dos testes numéricos.

Isto permite uma outra abordagem para a referida conjetura: ao invés de se buscar a sequência que a atende, é possível procurar uma forma de limitar a classe de sequências mencionada no corolário, que sabemos que contempla todos os primos ímpares.

Restam então duas circunstâncias a serem observadas: (a) a prova definitiva da conjetura, onde um caminho seria aumentar o grossor da faixa de primos, e (b) a recíproca da conjetura (problema da matemática em aberto).

Ainda, sobre este último tópico (b), os testes da Tabela 5.1 parecem mostrar que a recíproca da conjetura é verdadeira dentro da faixa estipulada, qual seja, a de números menores que $2p$, o que nos leva a crer que o presente trabalho pode igualmente ser um ponto de partida para a solução deste óbice.

Reiteramos, por fim, que o presente trabalho reflete nossa expectativa de contribuirmos para uma possível fórmula eficientemente computável para os números primos, pois com uma prova definitiva da conjetura de Navarrete e Orellana, e excluindo os falsos primos (**pontos fixos que não são primos**), poderemos solucionar um dos problemas mais antigos e intrigantes da matemática.

Referências

[1] WIKIPÉDIA. *PageRank*. 1. ed. https://en.wikipedia.org/wiki/Formula_for_primes: Wikipédia, 04 de setembro de 2020.

[2] MACKINNON, N. Prime number formulae. *The Mathematical Gazette*, Mathematical Association, v. 71, n. 456, p. 113–114, 1987. ISSN 00255572. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/3616496>.

[3] MILLS, W. H. A prime-representing function. *Bull. Amer. Math. Soc.*, American Mathematical Society, v. 53, n. 6, p. 604, 06 1947. Disponível em: <https://projecteuclid.org:443/euclid.bams/1183510803>.

[4] WRIGHT, E. M. A prime-representing function. *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 58, n. 9, p. 616–618, 1951. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2306356>.

[5] JONES, J. P. et al. Diophantine representation of the set of prime numbers. *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, v. 83, n. 6, p. 449–464, 1976. ISSN 00029890, 19300972. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2318339>.

[6] ROWLAND, E. S. *A natural prime-generating recurrence*. 2007.

[7] NAVARRETE, E.; ORELLANA, D. *Finding Prime Numbers as Fixed Points of Sequences*. [S.l.: s.n.], 2019.

[8] RIBENBOIM, P. *The Little Book of Bigger Primes*. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag New York, Inc, 2004.