UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ANDERSON EIJI YAMASAKI

GEOMETRIA EUCLIDIANA: POLIEDROS DE PLATÃO E INTRODUÇÃO À GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

CAMPO GRANDE - MS
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ANDERSON EIJI YAMASAKI

GEOMETRIA EUCLIDIANA: POLIEDROS DE PLATÃO E INTRODUÇÃO À GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

Orientadora: Profª. Drª. Rubia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS
2020

GEOMETRIA EUCLIDIANA: POLIEDROS DE PLATÃO E INTRODUÇÃO À GEOMETRIA NÃO EUCLIDIANA

ANDERSON EIJI YAMASAKI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Profª. Rubia Mara de Oliveira Santos -UFMS
Profª. Elen Viviani Pereira Spreafico - UFMS
Profº. Ailton Ribeiro de Oliveira - UEMS

Campo Grande – MS, Julho de 2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por sempre estender a sua mão, mostrando Seu amor e a misericórdia, proporcionando o que foi preciso no momento certo, em que sem Ele nada seria possível.

A minha mãe, Saeko Suzuki, ao meu pai, Nobuo Yamasaki, por proporcianarem uma educação de qualidade, motivando a continuação aos estudos. A minha irmã, Adriana, por ser o apoio necessário nos momentos díficeis. Aos três, agradeço por terem a paciência e compreensão desse momento da vida, não deixando desistir quando pensava não conseguir mais, sendo fundamentais para alcançar o sonho de ser mestre.

Agradeço aos meus amigos trazidos do mestrado, Bruna, João e Lucas, pelos momentos de convivência durante o útimo ano de curso, infinitas conversas sobre o futuro, o que motivava mais e mais a conquista do sonho, tornando a caminhada extremamente agradável ao lado de vocês.

Aos meus amigos que seguiram comigo toda a trajetória e frustrações, em especial a professora Maiara Marques, amiga de profissão, que me incentivou do começo ao fim dos estudos, auxiliando em muitos momentos da caminhada, aos meus amigos Daniel e Carlos que me apoiaram na caminhada, com as experiências próprias dessa etapa da vida, a minha amiga Milena Regina, que teve paciência em suportar as minhas reclamações, e a todos outros amigos que me ausentei durante esse período de crescimento, mas estiveram presentes através de mensagens e apoio, gratidão eterna.

Agradeço a todos os professores que compartilharam seus conhecimentos durante o mestrado, em especial à minha incrível orientadora, profª Drª Rubia Mara de Oliveira Santos, por desde o momento que nos conhecemos me incentivou, orientou e não mediu esforços para que a realização desse trabalho fosse a melhor possível, com palavras confortantes e conhecimento único.

Resumo

Essa dissertação apresenta a evolução histórica da Geometria Euclidiana, seus conceitos clássicos, os cinco postulados de Euclides, os sólidos de Platão na terceira dimensão e seus equivalentes em outras dimensões. Será realizada uma introdução às Geometrias Não Euclidianas, mostrando a necessidade de suas criações através da negação do quinto postulado e suas superfícies de estudo. Com o intuito de gerar um material didático para apoio a profissionais no ensino da Matemática para a educação básica, são propostas algumas atividades didáticas para desenvolvimento do conhecimento geométrico dos estudantes, alinhando a teoria com a prática.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria Não Euclidiana, Poliedros de Platão.

Abstract

This work approaches the historical evolution of Euclidean Geometry, classic concepts, Euclid's five postulates, Plato's solids in the third dimension and their equivalents in other dimensions. Will be presented an introduction to Non-Euclidean Geometries, showing the need for their creations through the negation of the fifth postulate and their study surfaces. In order to generate didactic material to support professionals in the teaching of Mathematics for basic education, some didactic activities are proposed to develop students' geometric knowledge, aligning theory with practice.

Keywords: Euclidean Geometry, Non-Euclidean Geometry, Platonic solids.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A matemática é vista como uma disciplina difícil e complexa, porém é essencial para a formação do aluno, para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a compreensão de situações ligadas ao cotidiano. É dividida em diferentes áreas, em que uma delas é a Geometria, que possui origem na necessidade de realizar medições, comparações e analisar as dimensões. Os conceitos da Geometria surgiram em antigas civilizações do Egito, com intuito de tornarem-se práticas algumas ações do cotidiano e datam de dois mil antes de Cristo, adquirindo forma científica e estreita relação com a filosofia na Grécia [26].

O precursor da Geometria foi Euclides de Alexandria, que criou os cinco postulados, peças fundamentais para o estudo da Geometria, definindo os elementos básicos de ponto, reta e plano, como conceitos iniciais para o entendimento da geometria conhecida como Geometria Euclidiana. Com o avanço do conhecimento, foi-se necessária a criação das Geometrias Não Euclidianas que surgiram com a negação do quinto postulado de Euclides, o postulado das paralelas, onde a evolução dos estudos sobre sua invalidez aconteceram de forma lenta ao decorrer do tempo, visto que não existia a aceitação de que pudesse, por um ponto fora de uma dada reta, passar infinitas retas paralelas, ou ainda não existiria retas paralelas a ela.

As leis da Geometria Euclidiana eram válidas somente para superfícies planas, e havia a necessidade de estudos em superfícies curvas para a evolução do conhecimento, com a necessidade da criação da nova Geometria, denominada Geometria Não Euclidiana, que leva em consideração a curvatura da superfície, contrariando as leis da Geometria Euclidiana, que antes eram absolutas, dividindo atenções com novas Geometrias com teoremas distintos, porém válidos. Se para o carpinteiro a geometria mais adequada é a ensinada durante o ensino básico, a Geometria Euclidiana, para um marinheiro a mais adequada é a Geometria Esférica, uma Geometria Não Euclidiana, que leva em consideração a superfície de uma esfera, como o formato aproximado do planeta Terra.

O termo "Não Euclidiano"se deu ao fato de serem contraditórios aos princípios estabelecidos por Euclides, levando a teoremas distintos da Geometria Euclidiana, até então os únicos conhecidos, porém válidos para suas superfícies de estudo. Uma diferença entre as Geometrias seria a soma dos ângulos internos de um triângulo, em que na Geometria Euclidiana, com curvatura igual a zero, é sempre constante e igual a 180°, e em um plano com curvatura positiva ou negativa, superfície das Geometrias Não Euclidianas, a soma difere de 180°, podendo ser maior ou menor que 180°, dependendo da superfície considerada [26].

A Geometria Não Euclidiana é um assunto que geralmente não é abordado no ensino básico, até mesmo no ensino superior e existe um interesse, neste trabalho, em apresentar seus conceitos aos professores e alunos com simpatia a Geometria, em que com constante progresso nas pesquisas relacionadas ao estudo voltados a esse tema, instiga-se mais curiosos a desenvolver projetos dentro do assunto.

1.1 Ensino da Geometria na Educação Básica

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9.394/96) a educação escolar brasileira é composta de dois níveis escolares, a educação básica e a educação superior, sendo a educação básica constituída pela Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio. Com a necessidade de organização dos conteúdos de Matemática a serem lecionados no Ensino Básico, criou-se os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dividindo os conteúdos matemáticos a serem trabalhados no ensino fundamental em cinco unidades temáticas, **Álgebra**, **Geometria**, **Números**, **Grandezas e Medidas** e por fim **Probabilidade e Estatística**. A Base Nacional Comum Curricular para a Educação Infantil e Ensino Fundamental, homologada em 20 de dezembro de 2017, define os conteúdos que os estudantes têm direito de aprender e é referência para a elaboração dos currículos em todas as redes de ensino do país. No Ensino Médio a divisão dos grupos é feitas em quatro grupos um pouco mais generalizados, sendo eles Linguagens e suas Tecnologias, **Matemática e suas Tecnologias**, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias, onde a Geometria compõe uma parte do estudos da Matemática e suas Tecnologias [6, 24].

Para o Ensino Fundamental, a unidade temática da **Geometria** consiste no estudo de conceitos e procedimentos para a solução de problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento, logo seus elementos de estudo são posições e deslocamento no espaço, formas de figuras planas e espaciais para desenvolvimento do pensamento geométrico, correlacionando principalmente com ideias de construção, representação e interdependência.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, 1º ao 5º anos, é esperado que os alunos identifiquem e estabeleçam pontos de referência para localização e o deslocamento de objetos, construam representações de espaços conhecidos e estimem distâncias, usando objetos auxiliares como mapas ou croquis. Em relação às formas, espera-se que os alunos indiquem características das formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, associem figuras espaciais a suas planificações e vice-versa. Nos anos finais do Ensino Fundamental, 6º a 9ºanos, são consolidados e ampliados o conhecimento da geometria, com ênfase nas tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança, possibilitando a aplicação desse conhecimento para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação de um tipo de raciocínio importante para a Matemática, o raciocínio hipotético-dedutivo, sendo importante destacar a aproximação da Álgebra com a Geometria.

A área de matemática, no Ensino Fundamental, centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando a resolução e formulação de problemas em contextos diversos. No Ensino Médio, em Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração.

No Ensino Médio, dentro de Matemática e suas Tecnologias, é trabalhada a ideia de geometria e medidas, proporcionando ao aluno interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pela mídia, que empregam unidades de medidas de diferentes grandezas, propor ou participar de ações adequadas às demandas da região envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa, empregar diferentes métodos para obtenção da medida da área de uma superfície, deduzir expressões de cálculos para aplicá-los em situações reais, resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo de áreas e de volumes de sólidos geométricos em situações reais, aplicar o conhecimento adquirido nos anos anteriores com relação as figuras planas e tridimensionais em situações reais, podendo apresentar os dados em gráficos ou tabelas e investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia, sendo possível em todos os casos o uso de suportes tecnológicos. Dessa forma não reduzindo a Geometria a mera aplicação de fórmulas nem aplicações imediatas de teoremas [6].

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo apresentar conceitos da Geometria Euclidiana e uma introdução as Geometrias Não Euclidianas com o intuito de incentivar seu estudo, com a produção de um material de apoio e aprofundamento aos profissionais da área, propondo atividades didáticas para estímulo do interesse sobre o tema. A motivação para o desenvolvimento desse trabalho se dá pelas possibilidades de estudar conceitos oriundos da Geometria, extremamente rica em exemplos e aplicações ligadas ao cotidiano, mostrando a existência de diferentes Geometrias, possibilitando a utilização de técnicas que o tema traz para a resolução de problemas apresentados em sala de aulas, que simulam situações reais e acrescentar um diferencial de conhecimento a alunos e profissionais da área. O trabalho foi organizado da seguinte forma.

O Capítulo 2 apresenta o contexto histórico da Geometria, com importantes estudiosos que auxiliaram na evolução do conhecimento, sendo um dos principais Euclides de Alexandria, que criou a obra mundialmente conhecida *Os Elementos*, tratando de definições e postulados que definem a Geometria Euclidiana.

No estudo em três ou mais dimensões, no Capítulo 3, é apresentado os Poliedros de Platão e Sólidos Regulares, na terceira e quarta dimensões e a razão de ter uma quantidade finita de sólidos em cada dimensão.

No Capítulo 4, apresenta-se um introdução das Geometrias Não Euclidianas, a evolução histórica com o principais estudiosos envolvidos, a razão da necessidade de criação de novas geometrias com afirmações válidas, porém distintas da Geometria Euclidiana. Estudos de casos particulares de Geometrias Não Euclidianas como a Geometria Hiperbólica e Esférica, com alguns conceitos relativos a elas.

Tem-se no Capítulo 5 a proposta de atividades didáticas que podem auxiliar os alunos na aprendizagem de geometria, como um guia aos profissionais.

Por fim o Capítulo 6 que apresenta as conclusões dos estudos realizados.

Capítulo 2

Geometria Euclidiana

Neste capítulo será abordado o contexto histórico da Geometria Euclidiana, uma breve linha do tempo de alguns estudiosos importantes dentro de sua evolução e por fim os postulados de Euclides, com a revisão baseada em [26, 14, 30, 18, 4, 20, 8, 2].

2.1 História da Geometria

A palavra Geometria vem do grego *Geometrein*, em que *Geo* significa terra e *Metrein* significa para medir. Originalmente a geometria foi considerada a ciência para medir terra que surgiu da necessidade do homem resolver problemas de construção de casas, delimitação de terrenos e plantações, entre outros. Seus conceitos surgiram nas civilizações do antigo Egito e datam de dois mil antes de Cristo, porém foi na Grécia onde adquiriram forma científica de um modo prático e alcançaram o seu máximo esplendor e estreita relação com a filosofia.

Com a Guerra do Peloponeso houve uma grande desunião entre os estados gregos, e o rei Filipe da Macedônia pôde gradualmente estender seu império ao sul, agregando a Grécia ao seu território. Dois anos após a queda dos estados gregos, rei Filipe foi sucedido por seu ambicioso filho Alexandre, o Grande, que anexou ao seu extenso território ainda mais áreas, criando um cordão de novas cidades estrategicamente escolhidas, fundando assim a cidade de Alexandria, no Egito, em 332 a.C. Alexandria demonstrou grande potencial de desenvolvimento devido a sua localização privilegiada, em entroncamento de importantes rotas comerciais, enriquecendo e tornando-se o centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo.

Com a morte de Alexandre, em 323 a.C., seu império se dividiu entre alguns de seus líderes militares, resultando na emergência de três impérios, com governos independentes. O Egito coube a Ptolomeu(90 - 168), que escolheu Alexandria como sua capital, criando a Universidade de Alexandria, com o intuito de atrair homens de saber a sua cidade.

Com uma ótima estrutura, bem provida de recursos, a Universidade de Alexandria contava com uma biblioteca que por anos foi o maior repositório de registros culturais de todo o mundo, em que dentro de quarenta anos após sua fundação ostentava mais de 600 mil rolos de papiro, e com a abertura de suas portas, por volta de 300 a.C., Alexandria se tornou a metrópole intelectual grega por quase um milênio.

Claudio Ptolomeu viveu entre o século I e II da era cristã, foi geógrafo, astrônomo e matemático que teve suas maiores contribuições no campo da astronomia. Ele convidou o ilustre Demétrio Faleiros para dirigir a grande biblioteca, com o objetivo de montar uma equipe única de intelectuais na universidade, onde Euclides, assim como Demétrio, foi escolhido para chefiar o departamento de matemática.

Euclides de Alexandria, escritor, mestre, matemático da escola platônica, e aclamado como pai da geometria, nasceu na Síria no século IV a.C. e morreu no século III a.C.. Teve seus estudos firmados principalmente em Atenas, e na história da matemática, é considerado um dos mais importantes estudiosos na antiga Grécia. A sua maior contribuição à matemática, bem como à ciência em geral, se teve na obra *Os Elementos*, na qual expôs em alguns dos capítulos, e sistematicamente, o conhecimento de geometria plana de seu tempo, sendo entitulada como Geometria Euclidiana.

Em *Os Elementos*, Euclides registra um sistema de axiomas, teoremas e demonstrações (muitas delas contrutivas com régua e compasso) que se tornaram base de grande parte da matemática moderna, sendo a primeira obra em que se considera um elemento matemático como parte de um sistema lógico dedutivo bem definido. O exemplar é um dos mais bem sucedidos livros didáticos de matemática, em que se encontra a melhor maneira de apresentar os elementos da geometria plana, compreendendo que várias proposições da geometria podiam ser organizadas em uma única estrutura e que o princípio da organização que relaciona as proposições deve ser lógica.

Geometria Euclidiana é o estudo das formas no plano e espaço tridimensional e Euclides realiza, em sua obra *Os Elementos*, demonstrações que são compreendidas por um indivíduo que tenha um conhecimento básico em matemática, sendo a Geometria apresentada nos Ensinos Fundamental e Médio, dividida em três partes, a geometria plana, a geometria espacial e a geometria analítica. Essa última geometria é responsável pelo estudos das geometrias plana e espacial através do uso de processos algébricos.

Escrita em grego, a obra abrange toda a aritmética, a álgebra e a geometria conhecidas na época no mundo grego, sistematizava todo o conhecimento geométrico dos antigos e intercalava os teoremas já conhecidos com a demonstração de muitos outros, completando lacunas e dando coerência e encadeamento lógico ao sistema criado por Euclides. Após sua primeira edição foi copiado e recopilado inúmeras vezes, tornando-se o mais influente texto científico e um dos com maior número de publicações ao longo da história.

Euclides escreveu vários outros tratados, além de *Os Elementos*, alguns dos quais sobreviveram até nossos dias. Um dos últimos, chamado *Os Dados*, diz respeito ao material dos seis primeiros livros de *Os Elementos*. Outro trabalho de Euclides, no campo da geometria, é o livro *Divisão de figuras*, que apresenta problemas de construção em que se pede a divisão de uma figura por meio de uma reta, impondo-se que as áreas das partes estejam numa razão dada.

Algumas obras de Euclides referem-se a matemática aplicada, sendo que dois deles ainda existem: *Os Fenômenos*, obra que possui estudo da geometria esférica necessária para astronomia e a *Óptica*, um tratado elementar de perspectiva. Supõe-se ainda que Euclides tenha escrito um trabalho com o título Elementos da Música. E outros registros que se perderam com o tempo, conhecidos apenas por comentários posteriores.

Como o livro *Os Elementos* é uma das importantes obras de Euclides a da Matemática, e é fundamental para o entendimento de outros conceitos mais adiante discutidos, na seção a seguir há uma breve apresentação desse trabalho.

2.2 *Os Elementos*

A obra mais famosa de Euclides, *Os Elementos*, é dividida em treze livros dos quais nove são sobre geometria plana e sólida e quatro são da teoria dos números, composta de 465 proposições distribuídas nos livros, os textos de geometria plana e espacial da escola secundária americana trazem basicamente o material que se encontra nos livro I, III, IV, VI,XI e XII de *Os Elementos*.

O Livro I começa com definições, postulados e axiomas preliminares necessários, contando com quarenta e oito proposições distribuídas em três grupos. As primeiras vinte e seis tratam principalmente das propriedades do triângulo e incluem teoremas de congruência. Algumas proposições estabelecem a teoria das paralelas e provam que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos, outras proposições do livro trabalham sobre paralelogramos, triângulos e quadrados, com atenção especial a relações de áreas.

O livro II, relativamente pequeno com suas quatorze proposições, tem relação com transformações de áreas e com álgebra geométrica da escola pitagórica, muito presente em toda obra *Os Elementos.* É nele que se encontram os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas, e um dos enunciados elaborados por Euclides, encontrado neste livro, que é trabalhado no ensino básico é: *"Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes."*, conhecido como produto notável.

O Livro III consiste em trinta e nove proposições, contém teoremas sobre círculos, cordas, secantes, tangentes, e medidas de ângulos que hoje fazem parte dos textos de geometria elementar.

No livro IV, que tem apenas dezesseis proposições, discute-se a construção com régua e compasso de alguns polígonos regulares, bem como sua inscrição e circunscrição num dado círculo.

O Livro V trata da teoria das proporções de Eudoxo, cuja definição permitia a comparação de comprimentos através de igualdade entre duas razões, e foi por meio dessa teoria, cabível tanto a grandezas comensuráveis quanto a grandezas incomensuráveis, que se resolveu o problema da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos.

O livro VI aplica a teoria das proporções eudoxiana à geometria plana. Nele tem-se os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; resolução geométrica de equações quadráticas; a proposição que assegura que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados; e muitos outros teoremas.

Os livros VII, VIII e IX, que possuem, juntos, cento e duas proposições, trazem a teoria elementar dos números. O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros, e uma exposição da teoria das proporções numérica ou pitagórica. O livro VIII ocupa-se largamente das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas.

No livro IX encontram-se muitos teoremas em que uma das proposições é equivalente ao importante teorema fundamental da aritmética. Uma outra proposição desse livro fornece uma dedução geométrica da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e a última proposição estabelece uma notável fórmula para números perfeitos.

O livro X, o mais extenso de todos, destaca os irracionais, isto é, segmentos de reta incomensuráveis com um segmento de reta dado. Para muitos especialistas, esse livro é, talvez, o mais notável de *Os Elementos*. E ainda pode-se encontrar nesse livro fórmulas que fornecem ternos de números pitagóricos.

Os três livros restantes, XI, XII e XIII, abordam sobre geometria sólida e abragem grande parte do material, com exceção do que diz respeito à esfera, comumente encontrados nos textos para a escola secundária. As definições, os teoremas sobre retas e planos no espaço e os teoremas sobre paralelepípedos se encontram no livro XI. O método de exaustão desempenha um papel importante na abordagem de volumes do livro XII. No livro XIII se desenvolvem construções visando a inscrição dos cinco poliedros regulares numa esfera.

De acordo com os gregos da época, *Os Elementos* se tratava de um estudo dedutivo com afirmações indiscutíveis e indubitáveis, de uso geral e amplo no assunto. A seleção de teoremas a serem tomados como elementos de estudo requer uma capacidade de julgamento considerável e é nesse sentido, entre outros, que a obra *Os Elementos* de Euclides é importante.

2.3 Evolução da geometria

Na antiguidade, egípcios, babilônicos, indianos e chineses utilizavam a matemática para resolver problemas práticos através da intuição e experimentalmente, de modo a encontrar a solução do problema, porém sem questionar o "porquê" do método escolhido ser eficiente.

Os gregos, a partir de Tales de Mileto, no século VI a.C., começaram a analisar a geometria por abstrações, a partir da construção de proposições sujeitas a provas consistentes, baseadas no raciocínio lógico dedutivo, buscando fatos para que os métodos pudessem ser generalizados para encontrar a solução em diferentes situações. Nesse contexto é natural se utilizar do método axiomático, voltado ao estabelecimento de axiomas ou postulados, e a partir destes, formularem proposições que devem seguir logicamente aos postulados. Como já citado, o livro *Os Elementos* traz definições e axiomas importantes para a matemática, com uma descrição a seguir. No livro I de *Os Elementos* de Euclides, são feitas definições dos conceitos primitivos da Geometria sobre ponto, reta e plano.

Conceito primitivo 1 *Ponto é um lugar único no espaço, e que não possui dimensão.*

Conceito primitivo 2 *Linha é um comprimento sem largura.*

Conceito primitivo 3 *As extremidades de uma linha são dois pontos distintos.*

Conceito primitivo 4 *Uma linha reta é uma linha que jaz igualmente com os pontos dela mesma.*

Conceito primitivo 5 *Uma superfície é o que tem somente comprimento e largura.*

Conceito primitivo 6 *Os extremos de uma superfície são linhas distintas.*

Conceito primitivo 7 *Uma superfície plana é uma superfície que repousa igualmente com suas linhas retas.*

Com os elementos básicos da geometria definidos, Euclides propõe cinco afirmações conhecidas, como os cinco axiomas.

Axioma 1 *Dois elementos iguais a um terceiro são também iguais entre si.*

Axioma 2 *Ao adicionar partes iguais a objetos iguais, os resultados se equivalem.*

Axioma 3 *O mesmo ocorre ao subtrair partes iguais de elementos iguais.*

Axioma 4 *Elementos que coincidem entre si são iguais.*

Axioma 5 *O todo é maior do que suas partes.*

Após mais de vinte séculos de evolução, a visão moderna da geometria teve sua estrutura de incidência estabelecida, a respeito de pontos, retas e planos, uma relação de pertinência e as seguintes definições:

Conceito primitivo 8 *Dois pontos definem uma reta e, se forem distintos, a reta é única.*

Conceito primitivo 9 *Se existe uma reta, então existem dois pontos distintos.*

Conceito primitivo 10 *Existe pelo menos um ponto que não pertence a uma reta definida por dois pontos distintos. Esses três pontos definem um plano único.*

O espaço geométrico é descrito como uma distribuição de pontos completamente homogênea em que funcionam noções comuns “de incidência”, “de estar entre”e “de congruência”, criando-se um conceito de função distância, um espaço métrico que se preserva se satisfeitas as três seguintes condições:

2. A distância entre dois pontos é sempre maior ou igual a zero. Se a distância for zero, os dois pontos não são distintos.

3. A distância entre dois pontos distintos, adicionada entre um deles e um terceiro, é sempre maior ou igual a distância entre o outro e o terceiro, denominando-se desigualdade triangular.

2.4 Os cinco postulados de Euclides

No livro *Os Elementos*, Euclides estabeleceu um conjunto de proposições iniciais sem a necessidade de demonstrações, que são os chamados postulados. Eles são evidentes, portanto são isentos de dúvidas e servem de ferramenta para dedução dos teoremas. Os cinco postulados de Euclides abordam especificamente fatos dentro do campo da geometria, sendo eles:

Postulado 1 *Para todo ponto P e para todo ponto Q, não idêntico a P, existe uma única reta que passa por P e Q, isto significa que uma reta é determinada, de maneira única por dois pontos, sendo denotada por $\overleftrightarrow{PQ}$. Os pontos P, Q e todos os que ficam entre eles determinam o segmento $\overline{PQ}$,* ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1: Segmento de reta com extremos nos pontos P e Q

Postulado 2 *Para todo segmento $\overline{AB}$ e para todo segmento $\overline{CD}$ existe um único ponto E na reta que passa pelos pontos A e B tal que B esteja entre A e E e o segmento $\overline{CD}$ possua medida congruente a medida do segmento $\overline{BE}$. Isto significa que se pode estender o segmento $\overline{AB}$, determinando o ponto E, de modo que a medida do segmento $\overline{BE}$ seja congruente a medida de um dado segmento $\overline{CD}$.* Veja Figura 2.2.

Figura 2.2: Segmento $\overline{AE}$ com B entre A e E e medida do segmento $\overline{CD}$ congruente a medida do segmento $\overline{BE}$

Os Postulados 1 e 2 são conhecidos como os postulados da régua, pois o Postulado 1 possibilita a construção de uma única reta a partir de dois pontos distintos e o Postulado 2 permite o seu prolongamento e envolvem noções “de incidência”, “de estar entre” e de “de congruência”.

Postulado 3 *Para todo ponto O e para todo ponto A, não idêntico a O, existe um círculo de centro O e raio de medida $\overline{OA}$.*

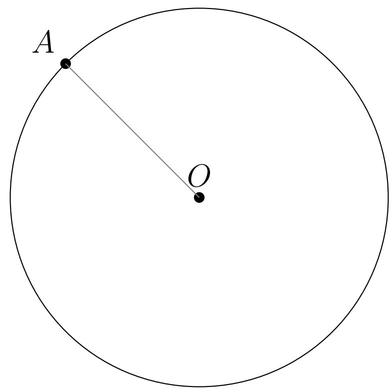


Figura 2.3: Círculo de centro O passando por A

O Postulado 3, conforme Figura 2.3, é considerado o postulado do compasso, pois possibilita gerar um único círculo a partir de seu centro, com determinado raio. Como a régua dos Postulados 1 e 2 não tem marcação, a noção de congruência é garantida pelo compasso, garantindo que esse espaço é unico e permitindo o transporte de segmentos.

Postulado 4 *Todos os ângulos retos são congruentes entre si.*

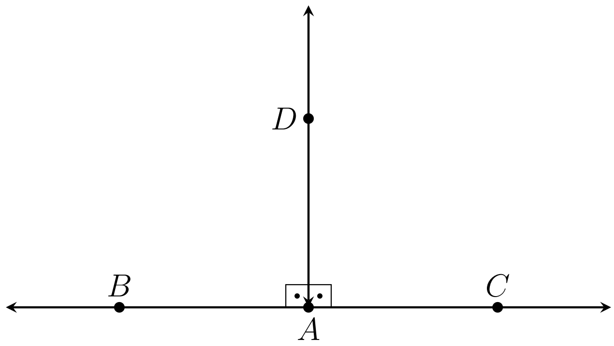


Figura 2.4: Ângulos retos

A Figura 2.4 mostra dois ângulos retos adjacentes, ambos com mesmo medida, 90°, conforme Postulado 4.

Postulado 5 *Se duas retas r e s, são intersectadas por uma outra reta transversal t a elas, de modo que a soma dos ângulos internos de um mesmo lado da transversal for menor do que dois retos, então as duas retas se intersectam em algum ponto neste mesmo lado da transversal,* conforme Figura 2.5.

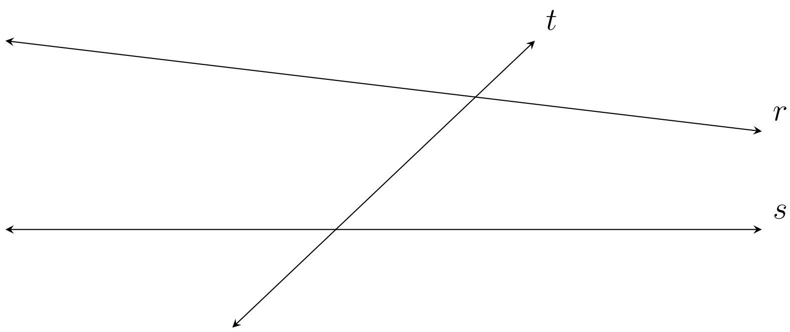


Figura 2.5: Retas cortadas por uma transversal

Para este último postulado um estudioso, John Playfair (1748 – 1819), publicou em um dos seus trabalhos em Geometria Euclidiana uma equivalência, dizendo que para toda reta m e para todo ponto P, não pertencente a m, existe uma única reta k que passa por P e que não intercepta m, considerando o mesmo plano. Dessa forma diz-se que as retas m e k são paralelas, em que, escrito dessa forma, o quinto postulado é conhecido por postulado de Playfair, como ilustrado na Figura 2.6.

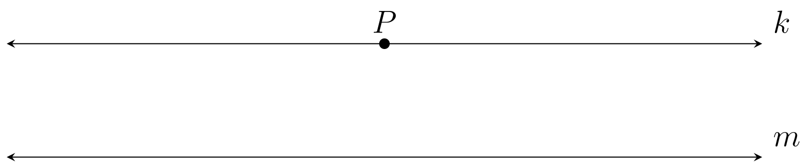


Figura 2.6: Reta k passando por P e paralela a reta m.

Sobre o quinto postulado, conhecido como **postulado das paralelas**, havia-se dúvidas se de fato era um postulado, e por isso foram realizadas inúmeras tentativas para prová-lo a partir dos quatro postulados anteriores, e todas falharam. Porém estes estudos e tentativas foram de grande contribuição a matemática, propiciando avanços no conhecimento científico no geral, surgindo os estudos de uma nova geometria, que contrariasse a Geometria Euclidiana, a ser tratada no Capítulo 4.

Muitos estudiosos se interessaram pela Geometria Euclidiana, um deles foi Platão, filósofo e matemático da Grécia Antiga, que fez estudos no espaço tridimensional dos sólidos geométricos, sendo apresentado no Capítulo a seguir.

Capítulo 3

Poliedros de Platão

Este capítulo aborda os polígonos regulares no espaço bidimensional, o estudo dos poliedros de Platão, suas características na terceira dimensão e a evolução para as próximas dimensões, com a revisão baseada em [13, 28, 23, 9, 17, 27, 3, 25, 15, 11, 12].

3.1 Plano bidimensional

Em duas dimensões, comprimento e largura, possibillita-se a criação de figuras planas, algumas delas são denominadas polígonos, definindo-os a seguir

Definição 1 *Dada uma sequência de pontos distintos* A_1*,* A_2*,* A_3*, ... ,* A_{n-1}*,* A_n *de um plano, com* $n \geq 3$*, com três pontos consecutivos não sendo colineares, considerando consecutivos como* A_{n-1}*,* A_n*,* A_n*, assim como* A_n*,* A_1*,* A_2*, chama-se polígono a reunião dos segmentos de reta* $\overline{A_1A_2}$*,* $\overline{A_2A_3}$*,* $\overline{A_3A_4}$*, ... ,* $\overline{A_{n-1}A_n}$*,* $\overline{A_nA_1}$*.*

Alguns polígonos são considerados regulares, necessitando atender a dois critérios, todos os lados possuírem a mesma medida, ou seja, serem congruentes e todos os ângulos internos devem apresentar a mesma abertura. Dessa forma, em duas dimensões tem-se a possibilidade de traçar infinitas figuras regulares, partindo do triângulo equilátero, o polígono de três lados, o quadrado, polígono de quatro lados, pentágono regular, de cinco lados e assim por diante, conforme Figura 3.1, em que n indica o número de lados de cada figura.

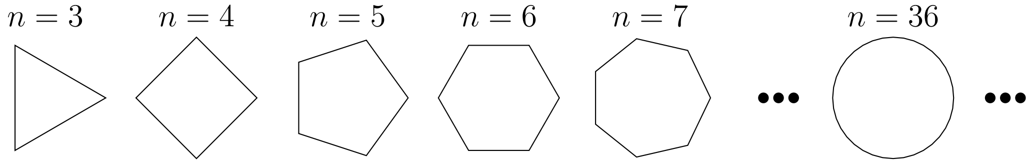


Figura 3.1: Polígonos regulares de n lados.

Na segunda dimensão, conforme o aumento do número de lados do polígono, a figura se assemelha a uma circunferência, possibilitando a geração de infinitos polígonos regulares. Considerando mais uma dimensão, além de comprimento e largura, considerar a profundidade, é possível traçar infinitas figuras regulares? Continue a leitura.

3.2 Sólidos regulares na terceira dimensão

No espaço tridimensional, a partir de quatro pontos não coplanares, pode-se criar sólidos geométricos com faces planas, em particular os Poliedros de Platão, que satisfazem a três condições, que são:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas.
- De todos os vértices partem o mesmo número de arestas.
- É válida a relação de Euler, que diz que o número de vértices somado com o número de faces é igual a soma do número de arestas e dois.

Os Poliedros de Platão são divididos em cinco classes, os tetraedros, os hexaedros, os octaedros, os dodecaedros e os icosaedros, e no ponto de vista filosófico estão relacionados aos elementos da natureza, em que cada classe representa um elemento diferente. Em Timeu, uma obra escrita por Platão, o tetraedro se relaciona com elemento fogo, o hexaedro representa a terra, o icosaedro é a água, o octaedro é o ar e por último o dodecaedro, que diz que é a construção que Deus utilizou para organizar todas as constelações do céu, é a representação do universo.

Cada classe dos Poliedros de Platão possui seus poliedros regulares, ou seja, poliedros formados por faces poligonais regulares e congruentes e em cada vértice a mesma soma de ângulos das faces. Dessa forma diz-se que todo poliedro regular é um Poliedro de Platão, mas nem todo

Poliedro de Platão é um poliedro regular, sendo apresentado a seguir os Poliedros Regulares de Platão.

Iniciando com o **tetraedro regular**, composto por quatro triângulos equiláteros, com três deles encontrando-se em cada vértice, conforme Figura 3.2. Tomando quatro esferas idênticas que se tangenciam três a três, o tetraedro é formado unindo-se os centros das esferas. Platão associava essa forma com o elemento fogo, pela agudeza penetrante de suas arestas e vértices, e porque o tetraedro é o mais simples e fundamental dos sólidos regulares.

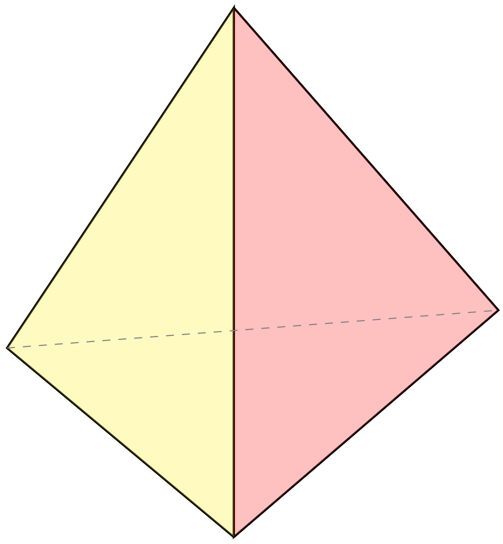


Figura 3.2: Tetraedro regular.

O **octaedro regular** é composto por oito triângulos equiláteros, com quatro deles encontrando-se em cada vértice, conforme Figura 3.3. Platão considerava o octaedro em intermediário entre o tetraedro, ou fogo, e o icosaedro, ou água, atribuindo a esse sólido, portanto, ao elemento ar, pois suas faces lisas o faziam parecer não estar ali, como o vento de passagem.

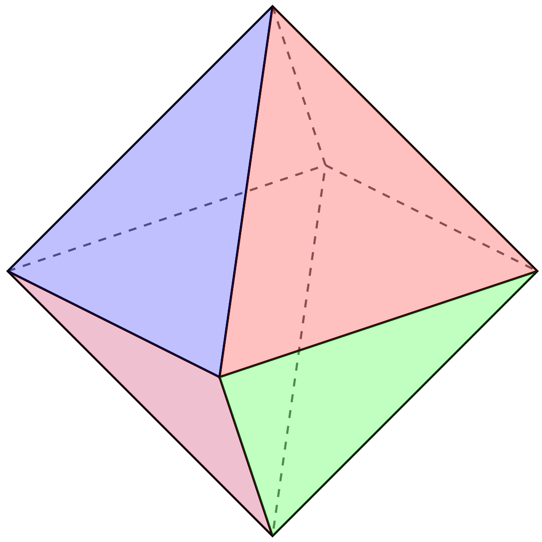


Figura 3.3: Octaedro regular.

O **icosaedro regular** é composto de vinte triângulos equiláteros, com cinco deles encontrando-se em cada vértice, vide Figura 3.4. Uma vez que o tetraedro, o octaedro e o icosaedro são feitos de triângulos idênticos, o icosaedro é o maior, levando Platão a associar esse sólido com a água, o mais denso e menos penetrante dos três elementos fluidos (fogo, ar e água), como se sua forma pudesse escorrer pelas mãos como água.

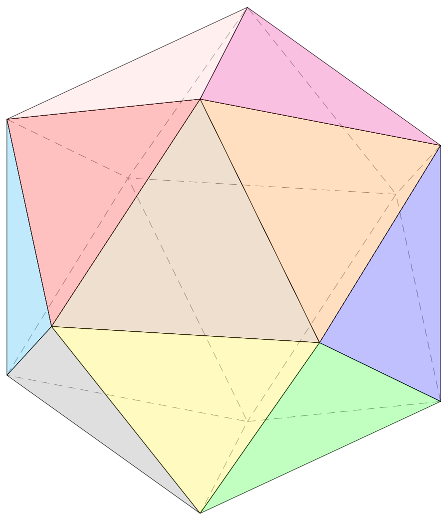


Figura 3.4: Icosaedro regular.

O **hexaedro regular**, também chamado de cubo, é composto pos seis faces quadradas, em que três deles se encontram em cada vértice, num total de oito vértices, conforme Figura 3.5 está relacionado com o elemento terra devido a estabilidade de suas bases quadradas, observando como a sujeira se desfazia e era levada, do ponto de vista filosófico.

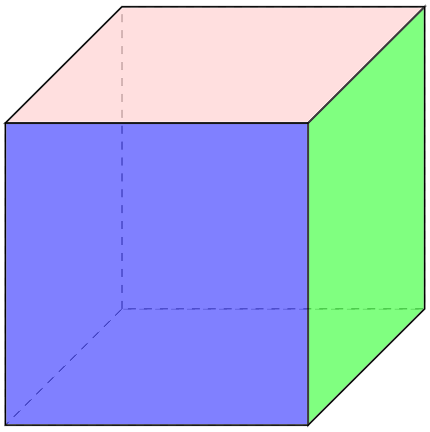


Figura 3.5: Hexaedro regular.

O **dodecaedro regular** tem doze faces pentagonais regulares, três da quais se encontram em cada vértice, conforme Figura 3.6. Tal como o tetraedro e o cubo, o dodecaedro era conhecido pelos primeiros pitagóricos e chamado a esfera de doze pentágonos, relacionado, do ponto de vista filosófico, ao universo, organizando as estrelas no céu.

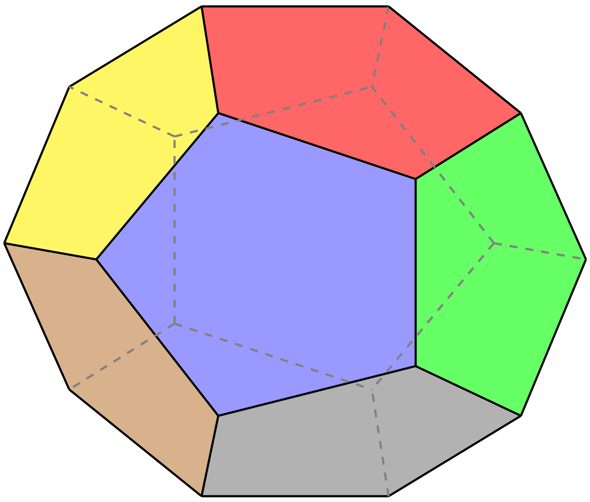


Figura 3.6: Dodecaedro regular.

Na Tabela 3.1 observa-se um comparativo dos sólidos quantos as faces, vértices, arestas e soma dos ângulos das faces em cada vértice.

Sólidos platônicos (regulares)	Faces (polígonos regulares)	Número de faces	Vértices	Arestas	Soma dos ângulos em cada vértice
Tetraedro	Triangulares	4	4	6	180°
Octaedro	Triangulares	8	6	12	240°
Icosaedro	Triangulares	20	12	30	300°
Hexaedro	Quadradas	6	8	12	270°
Dodecaedro	Pentagonais	12	20	30	324°

Tabela 3.1: Comparações entre os sólidos de Platão.

Observando a Tabela 3.1, percebe-se os ângulos formados pelas faces em cada vértice, logo pode-se concluir que realmente existem somente cinco de Poliedros regulares de Platão. Encontrando três triângulos equiláteros em um vértice, tem-se a soma 180°, gerando o tetraedro regular, com quatro triângulos equiláteros se encontrando em um vértice, tem-se o octaedro regular com ângulo de 240°, com cinco triângulos equiláteros, tem-se o icosaedro regular com soma 300°, aumentando mais um triângulo a contagem seriam seis triângulos que formaria-se um ângulo de 360°, não sendo possível criar um poliedro, pois cria-se uma figura plana. No caso de faces quadradas, encontrando três delas em um vértice, tem-se o hexaedro regular com ângulo de 270°, encontrando quatro forma-se um ângulo de 360°, não sendo possível traçar um poliedro. Em faces pentagonais regulares, a partir de um vértice traça-se três faces, gerando um ângulo de 324°, com quatro faces ultrapassa os 360°, não possibilitando a criação de um poliedro. Com outros polígonos regulares não se pode traçar poliedro regulares, visto que com três hexágonos regulares encontra-se o valor de 360°, não possibilitando a geração de um poliedro, e com heptágonos regulares, três faces já ultrapassa-se os 360°, e portanto percebe-se que com outros polígonos regulares não há possibilidade de gerar poliedros regulares.

Os sólidos citados são todos na terceira dimensão, nota-se que são somente cinco, conforme dito. Continuando o raciocínio de aumentar uma dimensão, quantos seriam os sólidos gerados a partir dos sólidos de Platão? Acompanhe o texto.

3.3 Sólidos regulares em dimensões maiores

A **quarta dimensão** na Geometria é um espaço representado com a inserção de mais um eixo ao espaço tridimensional, de forma que esses quatro eixos sejam ortogonais. Não é possível projetar a quarta dimensão, porém é possível medir seus efeitos e demonstrá-lo matematicamente através da hipergeometria. Na quarta ou dimensões maiores os sólidos gerados são chamados polítopos, que são generalizações naturais dos conceitos de polígono no plano e de poliedro no espaço, e definem-se como regiões convexas e compactas definidas pela intersecção de semi-espaços [15]. Na física, Albert Einstein (1879 - 1955), físico alemão, definiu a quarta dimensão como o tempo, sendo este inseparado do espaço, e possui forte ligação com a arte e o esoterismo.

Na quarta dimensão tem-se **seis** polítopos regulares, o primeiro é o *hipertetraedro*, conforme Figura 3.7, podendo ser chamado de *pentacoro* ou *5-cell* ou *4-simplex*, possui cinco sólidos tetraédricos externos, cinco vértices, dez arestas e dez faces.

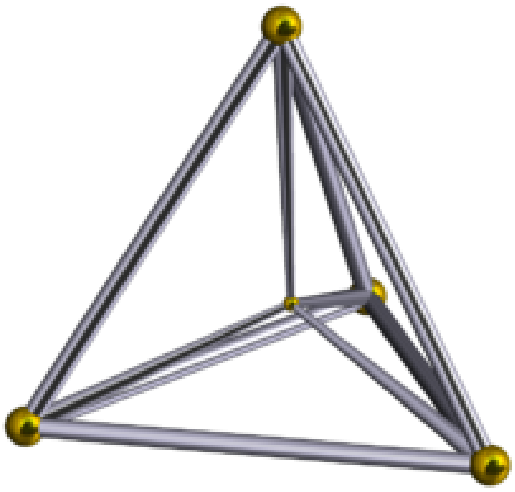


Figura 3.7: Hipertetraedro. [31]

O segundo hipersólido é o o *hipercubo*, também comumente chamado de *tesseract*, possui oito cubos externos da qual de cada vértice do cubo no espaço tridimensional, parte uma aresta em direção ao quarto eixo da quarta dimensão, possuindo 24 faces, 32 arestas e 16 vértices, como mostra a Figura 3.8. Tem-se o *hiperoctaedro*, chamado de *16-cell*, formado por 16 tetraedros regulares, possui 32 faces triangulares, 24 arestas e 8 vértices, conforme Figura 3.9. O *hiperdodecaedro* é uma generalização do dodecaedro na quarta dimensão e é formado por 120 dodecaedros regulares, 720 faces pentagonais, 1200 arestas e 600 vértices, como é mostrado na Figura 3.10.

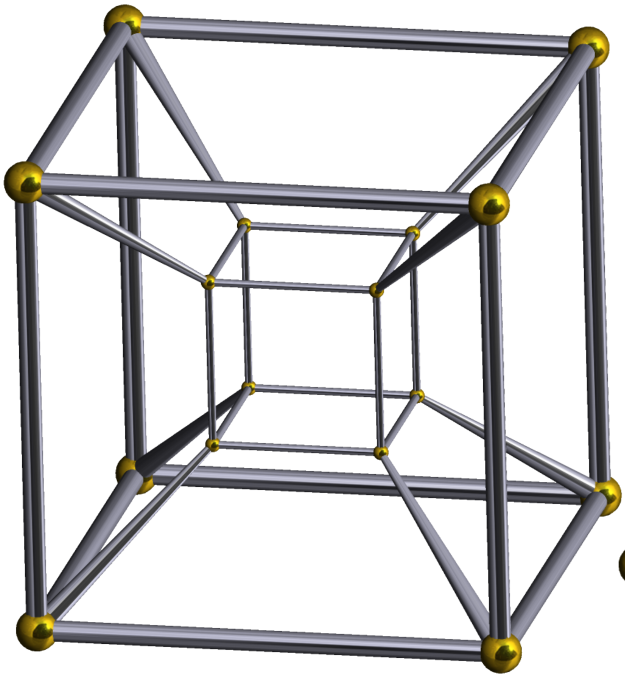


Figura 3.8: Hipercubo.[31]

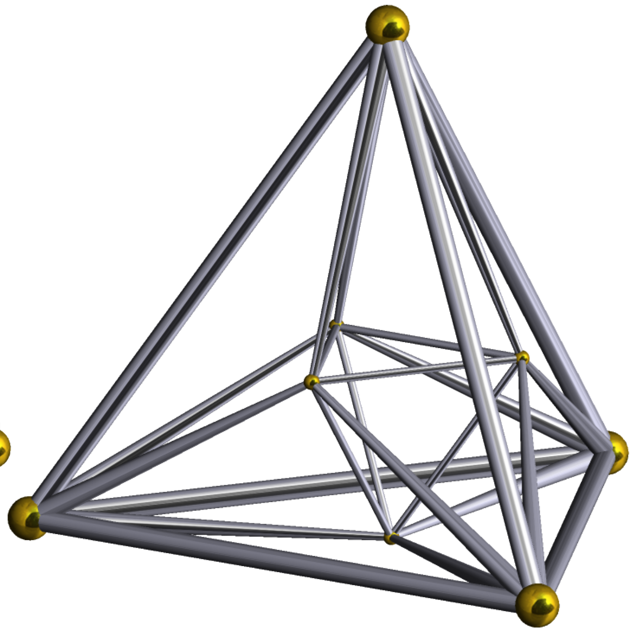


Figura 3.9: Hiperoctaedro. [31]

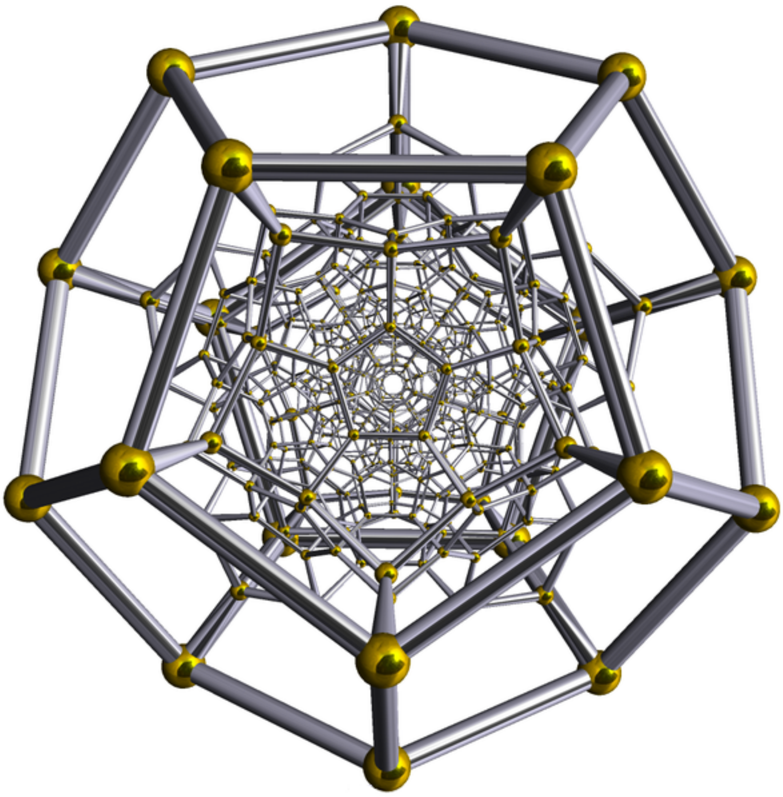


Figura 3.10: Hiperdodecaedro. [31]

O hipericosaedro é o hipersólido na quarta dimensão genérico ao icosaedro, composto por 600 tetraedros regulares com 20 encontrando-se em cada vértice, possuindo 1200 faces triangulares, 720 arestas e 120 vértices, mostrado na Figura 3.11. E por último, tem-se o *hiperdiamante*, chamado de *24-cell*, composto por 24 octaedros regulares com o encontro de seis deles em cada vértice, possuindo 96 faces, 96 arestas e 24 vértices, conforme Figura 3.12.

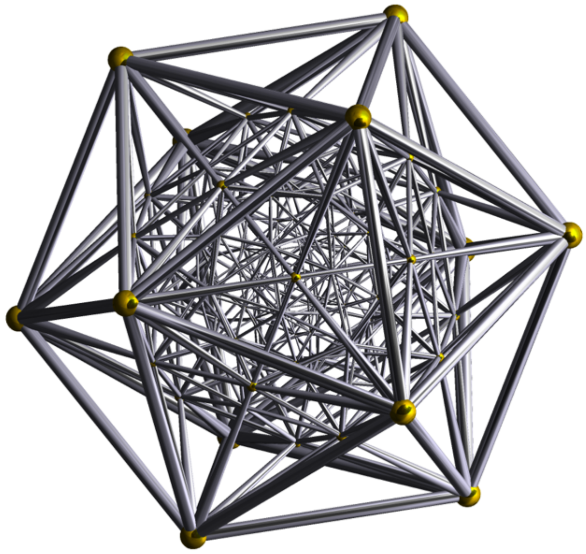


Figura 3.11: Hipericosaedro. [31]

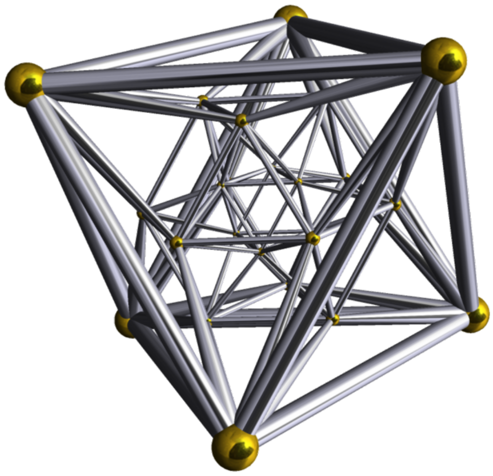


Figura 3.12: *24-cell*. [31]

Existem somente **seis politopos na quarta dimensão** devido as seus ângulos diedros, onde não há sobreposição das regiões internas dos poliedros de Platão, em casa caso particular, em que nos casos de não se fechar o ângulo de 360°, a quarta dimensão permite uma "dobra" do espaço para a formação dos politopos.

A **quinta dimensão** ou dimensões maiores são geradas a partir da adição de eixos ortogonais aos anteriores já existentes, que devem ser ortogonais entre si, ou seja, para a criação de um hiperespaço de $n + 1$ dimensões, deve-se adicionar aos eixos ortogonais da dimensão n um eixo que seja ortogonal aos já existentes. Há de se pensar que as formas vão se tornando mais complexas, porém o contrário acontece, são apenas três polítopos que ocorrem, sendo somente na quarta dimensão que surgem os polítopos mais complexos. Há um polítopo generalização do hipertetredro chamado de *hiper-n-tetraedro*, outro polítopo generalização do hipercubo, chamado *hiper-n-cubo* e por fim o terceiro polítopo generalização do hiperoctaedro, chamado *hiper-n-octaedro*. Analisando os ângulos diedros como na quarta dimensão, é possível observar apenas três polítopos por conta de seus ângulos diedros, em que toma-se como base os polítopos da quarta dimensão.

Apresentado o comportamento dos poliedros de Platão na terceira dimensão e dos sólidos equivalentes na quarta dimensão, sugere-se para trabalhos futuros um estudo aprofundado da quinta dimensão e dos hipersólidos gerados. Continuando os estudos, no capítulo que segue serão introduzidas as Geometrias Não Euclidianas.

Capítulo 4

Introdução às Geometrias Não Euclidianas

O capítulo introduzirá o contexto histórico da Geometria Não Euclidiana, superfícies de estudo, alguns conceitos importantes com apresentação das Geometrias Hiperbólica e Esférica e um comparativo entre as Geometrias, com a revisão baseada em [10, 20, 29, 7, 21, 16, 19, 26].

4.1 Evolução Histórica

A geometria euclidiana possui como pilar os cinco famosos postulados de Euclides e discutindo-se acerca do quinto postulado, o postulado das paralelas, Giovanni Saccheri (1667 - 1733), matemático italiano, se empenhou em encontrar contradições em geometrias onde tal postulado não fosse válido, levando alguns matemáticos como Lobachevski, Bolyai Gauss e Reimann ao aprofundamento desse estudo e trazendo importantes resultados para Matemática e Física. Ao invalidar o quinto postulado de Euclides, dizendo que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma paralela, cria-se a Geometria Elíptica, em que a Geometria Esférica é um caso particular, em que a curvatura é positiva, o que implica em uma superfície finita, fechada em si mesma, como a superfície de uma esfera, ou de um elipsóide. Por outro lado, se por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas, tem-se a Geometria Hiperbólica, em que a curvatura é negativa, formando a superfície do que lembra um sela de montaria como uma de suas superfícies de estudo, possuindo outras superfícies possíveis.

Uma análise do quinto postulado de Euclides é o ponto de partida para o estudo das geometrias não euclidianas. Os matemáticos foram desafiados por mais de vinte séculos a demonstrar o quinto postulado de Euclides, sem sucesso, faltando-lhes avançar além de suas intuições para perceber que a geometria bidimensional de Euclides tem como cenário uma superfície sem curvatura. Com essa superfície totalmente plana em todos os sentidos o quinto postulado fica perfeitamente estabelecido, como proposto.

Saccheri foi responsável pela primeira análise científica acerca da negação do quinto postulado de Euclides, publicada em 1773. Após Saccheri, Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777), matemático suiço, desenvolveu um estudo semelhante ao de Saccheri, porém com resultados mais convincentes. Em seus estudos considerou um quadrilátero com três ângulos retos e o quarto ângulo podendo ser agudo, reto ou obtuso, em que descartou-se a hipótese do ângulo obtuso, com o ângulo reto, o quinto postulado é válido, e no caso do ângulo agudo obteve mais sucesso, concluindo alguns teoremas importantes para a geometria não euclidiana, em que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor que 180°. Outro importante estudioso foi Johann Carl Friefrich Gauss (1777-1855), matemático, físico e astrônomo, mostrou grande interesse em provar o quinto postulado, ou negá-lo, porém seus estudos provém de anotações, cartas e notas inéditas em suas pesquisas que não foram publicadas devido a dificuldade de aceitação de uma "nova geometria" diferente da euclidiana.

O matemático Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), dividiu a descoberta da nova geometria com Gauss, por ter sido o primeiro a publicar sobre o assunto, não tirando o mérito de Gauss. Seus estudos se basearam na negação do quinto postulado, em que admite que por um ponto fora da reta passam pelo menos duas retas paralelas a reta dada e que a soma dos ângulos internos de um triângulo seria menor que dois retos. Johann Bolyai (1802-1860), matemático e amigo de Gauss, foi encorajado pelo pai a estudar o postulado das paralelas, constatando que a existência de duas retas paralelas ocasionava na existência de infinitas retas paralelas a uma reta dada, sendo considerado, assim como Gauss e Lobachevsky, precursos dos estudos de geometrias não euclidianas. Todos os estudiosos citados adotaram a ideia de Saccheri de que a reta é ilimitada e infinita, porém Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) se atentou a essa ideia e considerou uma reta limitada, o que condizia com a hipótese do ângulo obtuso descartado por Saccheri, originando outra geometria em que por um fonto fora de uma reta não existe nenhuma reta paralela a reta dada, ou ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que 180°.

Para o desenvolvimento de uma geometria de espaços curvos foi necessária a colaboração de pesquisadores que marcaram a história da matemática, sendo alguns deles Gauss, Bolyai, Lobachevsky e Riemann. Com isso Gauss iniciou um novo ramo da Geometria, a Geometria Diferencial, que estuda a geometria através de recursos de cálculo, negando a natureza absoluta da geometria euclidiana. Dessa forma estabeleceu que a curvatura é uma propriedade intrínseca da superfície. Na superfície euclidiana a curvatura é nula, ou seja, perfeitamente plana em todas as direções. No caso de a superfície apresentar curvatura a negação do quinto postulado de Euclides torna-se um axioma, que se junta aos quatros primeiros para estabelecer geometrias independentes e consistentes, chamadas de Geometrias Não Euclidianas.

De forma sucinta, negar o quinto postulado de Euclides, ao dizer que por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma paralela, criam-se as Geometrias Não Euclidianas, como casos particulares as Geometrias Hiperbólicas e Esféricas que serão apresentadas a seguir.

4.2 Geometria Hiperbólica

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias a dois pontos distintos fixos desse plano, é constante e menor que essa distância. Os ramos da hipérbole se aproximam mais e mais de retas, porém sem nunca as tocar, que são chamadas de assíntotas, conforme Figura 4.1. Dessa forma tem-se conceito inicial para discutirmos sobre a Geometria Hiperbólica, visto que na tradicional Geometria Euclidiana duas retas que são paralelas mantém sempre a mesma distância entre si.

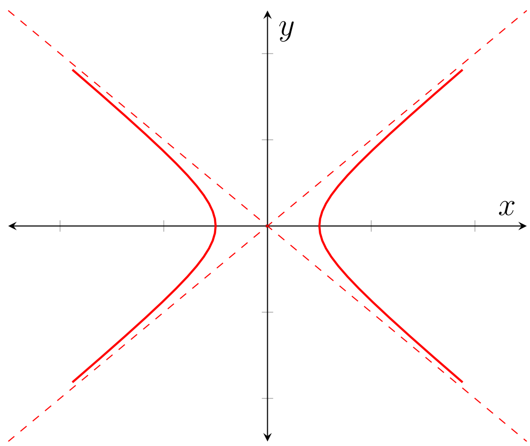


Figura 4.1: Hipérbole.

O modelo mais popular de plano para Geometria Hiperbólica é o disco de Poincaré, desenvolvido pelo matemático Henri Poincaré (1854 - 1912). Este plano é definido a partir da região limitada por uma circunferência, denominada *disco*, os pontos internos à circunferência são os pontos do plano hiperbólico, os pontos pertencentes à circunferência são pontos ideais.

Além disso, a circunferência é dita horizonte hiperbólico. Nesse plano é definido como reta os diâmetros da circunferência e os arcos de circunferência que são ortogonais ao horizonte hiperbólico e contidos no *disco*, conforme Figura 4.2.

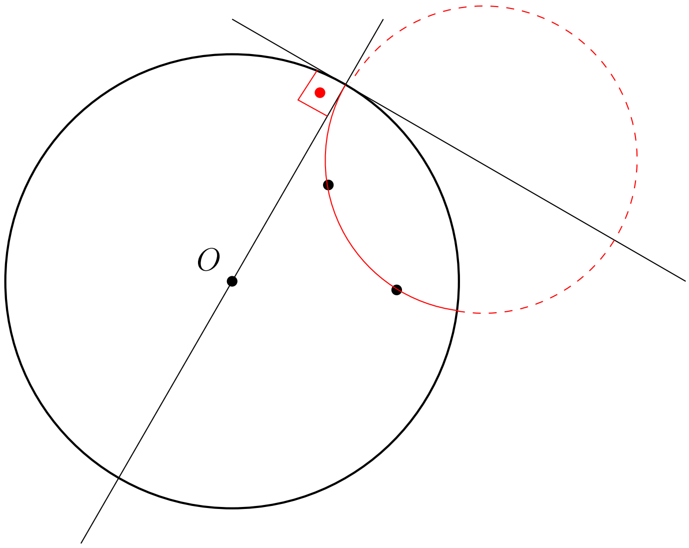


Figura 4.2: Reta hiperbólica no disco.

Com isso, pode-se obter infinitas retas sem ponto comum, ou seja, retas paralelas, porém tomada uma reta e um ponto fora dela, pode-se traçar não somente uma reta paralalela a reta tomada, mas várias retas, conforme Figura 4.3. Percebe-se que por dois pontos distintos internos ao *disco* tem-se um único círculo euclidiano que passa por esses pontos e intersecta o horizonte hiperbólico ortogonalmente, gerando uma única "reta"para a geometria hiperbólica, continuando válido o Postulado 1 da Geometria Euclidiana.

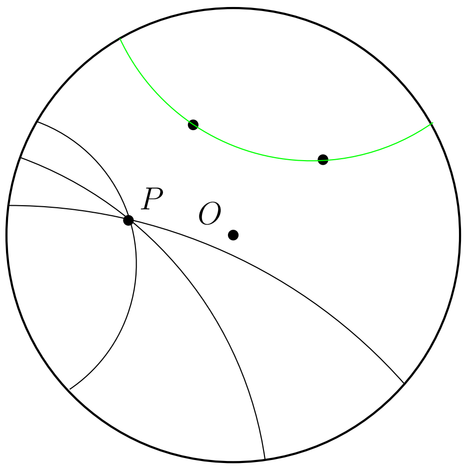


Figura 4.3: Infinitas retas paralelas passando por P, fora da reta em verde.

Outros modelos a serem considerados como superfície da Geometria Hiperbólica são os parabolóides, que podem ser parabolóides hiperbólicos, que lembram o formato de uma sela de montaria, conforme Figura 4.4. Essa superfície é formada pelos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço que satisfazem, de forma generalizada, a Equação 4.1, constituída por uma sucessão de elipses centradas no ponto (x_0, y_0).

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \tag{4.1}$$

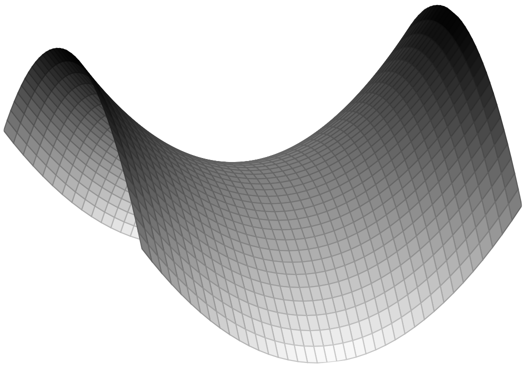


Figura 4.4: Parabolóide hiperbólico.

Existem os parabolóides elípticos, conforme Figura 4.5, que são formados pelos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço que satisfazem, de forma generalizada, a Equação 4.2, constituída por uma sucessão de hipérboles centradas no ponto (x_0, y_0).

$$c(z - z_0) = \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \tag{4.2}$$

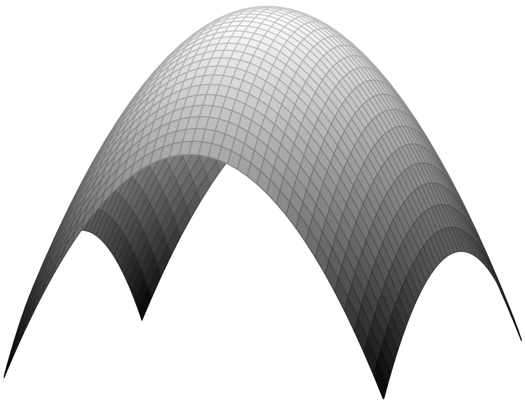


Figura 4.5: Parabolóide elíptico.

Há ainda várias outras superfícies possíveis na Geometria Hiperbólica, deve-se atentar ao critério de que a superfície que possui curvatura negativa é considerada uma superfície da Geometria Hiperbólica. Visto que uma reta na Geometria Hiperbólica é considerada de forma distinta da Geometria Euclidiana, alguns teoremas particulares são considerados, sendo eles os resultados a seguir.

Teorema 1 *Na Geometria Hiperbólica, a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é menor que 180°.*

Para ilustração do Teorema 1, veja a Figura 4.6.

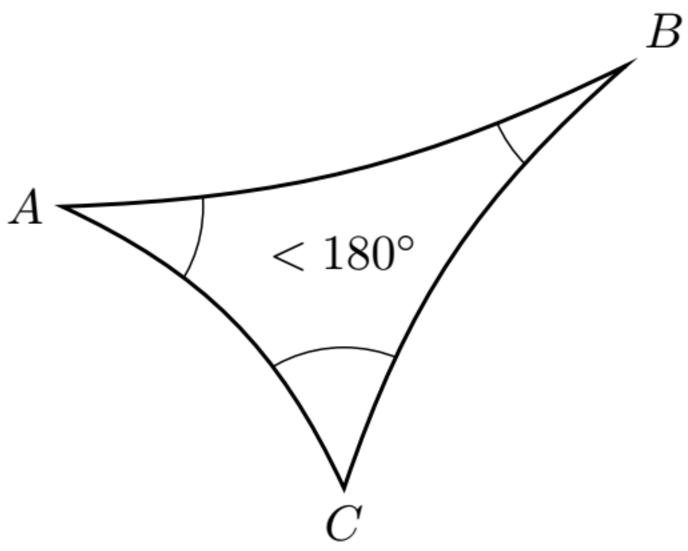


Figura 4.6: Triângulo hiperbólico.

Teorema 2 *Na geometria hiperbólica, onde não existem retângulos, para toda reta l e para todo ponto P, não pertencente a l, existem pelo menos duas paralelas distintas a l que passam por P. Além disso, existem infinitas paralelas a l passando por P.*

Teorema 3 *Se dois triângulos são semelhantes, então, são congruentes. Não se pode ampliar ou reduzir uma figura sem que sofra uma distorção.*

Existem superfícies de curvatura nula (Geometria Euclidiana), de curvatura negativa (Geometria Hiperbólica) e de curvatura positiva (Geometria Elíptica). Uma análise do terceiro caso está a seguir, direcionando para um caso particular a Geometria Esférica.

4.3 Geometria Elíptica

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma das distâncias de um ponto P a dois pontos fixos, chamados focos, é constante, gerando dois eixos AA' e BB', eixo maior e eixo menor respectivamente, conforme Figura 4.7. O elipsóide é gerado a partir da rotação da elipse em torno de um dos seus eixos, sendo a superfície de estudo da Geometria Elíptica.

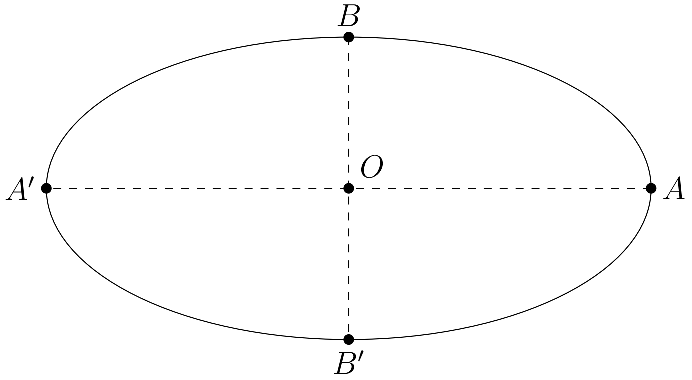


Figura 4.7: Elipse.

Na Geometria Elíptica a curvatura é positiva, sua superfície é conforme Figura 4.8 e respeita a Equação 4.3, centrada no ponto (x_0, y_0, z_0), e seus eixos paralelos aos eixos coordenados.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1 \tag{4.3}$$

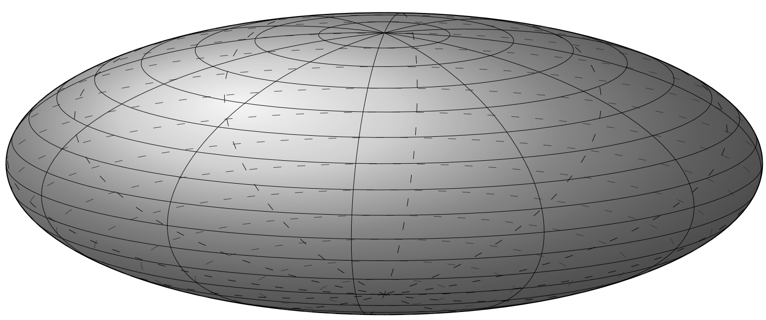


Figura 4.8: Elipsóide.

Em um caso particular quando, na Equação 4.3, quando se toma $a = b = c$, tem-se a superfície da Geometria Esférica, que será ponto central da análise da Geometria Elíptica. É necessário definir alguns elementos principais da geometria esférica para início de seu estudo.

A superfície esférica é o plano na Geometria Esférica, conforme Figura 4.9, em que são necessários somente dois pontos de sua superfície para sua determinação (latitude e longitude, por exemplo), sendo assim uma superfície bidimensional, como o plano comum da geometria euclidiana.

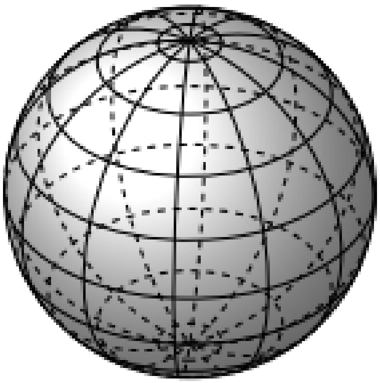


Figura 4.9: Superfície esférica.

Uma reta da superfície esférica é o círculo formado pela intersecção do plano que contém dois pontos dados e o centro da esfera com a superfície esférica considerada, ou seja, é a maior circunferência que pode ser traçada passando por dois pontos dados, conforme Figura 4.10, não havendo retas distintas que sejam paralelas, em que se intersectam em apenas dois pontos, chamados de antípodas, que são diametralmente opostas. Traçando, por exemplo, por dois pontos A e B a maior circunferência possível, tem-se uma reta dessa superfície, e o arco AB formado é o segmento de reta, cujo comprimento é a menor distância entre A e B. Dados os pontos A, B e C na superfície esférica, o ângulo $B\widehat{A}C$ é , por definição, o ângulo entre as retas euclidianas tangentes aos círculos máximos no ponto A, conforme Figura 4.11. Como as retas da geometria esférica são círculos máximos da esfera, fica claro que não existem retas paralelas nessa geometria. De fato, dois círculos máximos possuem sempre dois pontos em comum. Logo duas retas distintas possuem sempre dois pontos de intersecção, ocorrendo a negação do quinto postulado de Euclides. A reta é um círculo máximo e o segmento que une os pontos A e B é um arco do círculo máximo, daí a distância na superfície esférica dos pontos A e B é a menor porção do círculo máximo que contém esses dois pontos.

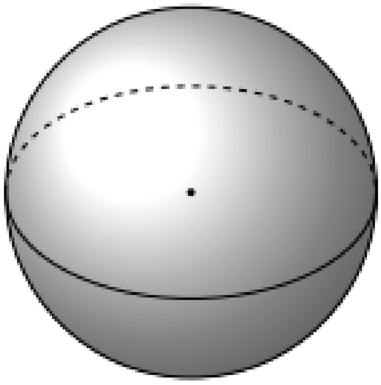


Figura 4.10: Maior circunferência traçada na superfície esférica.

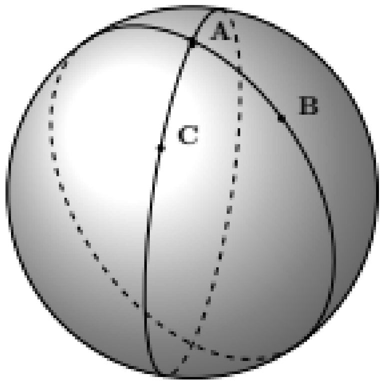


Figura 4.11: Ângulo $B\widehat{A}C$ formado na geometria esférica.

Na Geometria Esférica, assim como na Geometria Euclidiana, tem-se triângulos, chamados triângulos esféricos. Considerando três pontos distintos, não pertencentes a uma mesma circunferência máxima e não sendo pontos e unindo esses pontos por arcos de circunferências máximas, considerando os menores arcos traçados, gera-se o triângulo esférico, conforme Figura 4.12, com lados AB, AC e BC, medidos pelos ângulos subentendidos por eles no centro da esfera, podendo ser em graus ou em radianos.

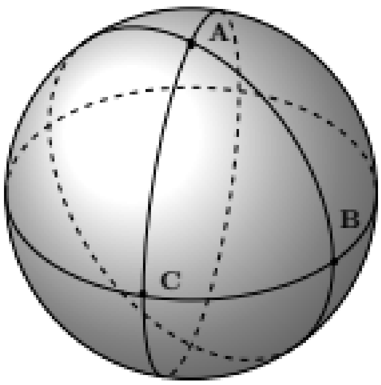


Figura 4.12: Triângulo esférico com vértices nos pontos ABC.

Em um triângulo esférico, pode-se observar que a soma de seus ângulos é sempre maior que 180°e menor do que 540°e não constante, dependendo do triângulo, a soma dos três lados (arcos esféricos) de um triângulo esférico é maior que 0 e menor que 360°, dois lados de um triângulo esférico são iguais se, e somente, se, os ângulos opostos também são iguais, em que ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa, com isso, a soma de dois ângulos é menor que o terceiro acrescido de 180°e a diferença menor que o suplemento do terceiro. Os triângulos esféricos possuem suas classificações, sendo parecido com a classificação dos triângulos na Geometria Euclidiana, com relação ao número de ângulos retos: retângulo, quando possui um ângulo reto; birretângulo, quando possui dois ângulos retos e trirretângulo, quando possui três ângulos retos. Com relação aos lados: retilátero, quando um lado possui medida 90°; birretilátero, quando dois lados medem 90°e trirretilátero: cada um dos lados medem 90°.

Citadas algumas características de cada geometria, pode-se compará-las de acordo com a Tabela 4.1.

Geometria	Euclidiana	Esférica	Hiperbólica
Elementos Básicos	Pontos, retas e planos	Pontos, retas e planos	Pontos, retas e planos
Curvatura do plano	Zero	Positiva	Negativa
Teorema das paralelas	Por um ponto fora da reta, há apenas uma única reta paralela a reta dada	Por um ponto fora da reta, não há reta paralela a reta dada	Por um ponto fora da reta, há infinitas retas paralelas a reta dada
Soma dos ângulos de um triângulo	180°	Maior que 180°	Menor que 180°
Congruência de triângulos	Ângulos iguais não implica na congruência de dois triângulos	Triângulos com todos os ângulos iguais determinam suas congruências	Triângulos com todos os ângulos iguais determinam suas congruências

Tabela 4.1: Tabela de comparação das geometrias.

Com isso, a introdução a Geometrias Não Euclidianas, apresentando características importantes, é o início de um estudo em que pode-se apronfundar em relação às propriedades de cada uma delas, podendo ser realizado em projetos futuros, entendidas as diferenças básicas de conceitos entre elas.

Capítulo 5

Aplicações didáticas da Geometria em sala de aula

As atividades desenvolvidas com a manipulação de objetos possui grande importância para um apredizado significativo, desde que os objetivos estejam definidos e com a orientação correta. A orientação é feita pelo professor, que é responsável por planejar e mediar as ações dos alunos, devendo estimular o desenvolvimento do conhecimento, seja a atividade realizada invidualmente ou em grupo, consciente de que nem sempre o sucesso é alcançado, mas que algo possa ser ensinado e aproveitado.

No caso da Geometria, seu estudo pode ser cansativo, porém trabalhando a criatividade dos alunos é possível torná-lo mais agradável. Esse é o objetivo deste capítulo, em que são propostas atividades didáticas aos professores de Matemática para serem aplicadas aos alunos, com o intuito de alinhar o conhecimento da Geometria aprendida em sala de aula com o mundo real, facilitando o poder de abstração por meio de objetos concretos.

As atividades foram organizadas de forma a abranger a Geometria Euclidiana, apresentando a primeira atividade de geometria plana e a segunda de geometria espacial, e a Geometria Não Euclidiana, expondo uma atividade de geometria esférica.

5.1 Trabalhando escalas

Sinopse

A primeira atividade proposta busca apresentar aos alunos um problema de aumento ou redução de figuras planas, com um exemplo dado da planta baixa de uma construção, podendo ser utilizada a própria residência de cada aluno, abordando conceitos da Álgebra, de razão e proporção, aplicados a Geometria, possibilitando uma discussão entre os alunos dos diferentes arranjos de uma residência, como por exemplo, número e posição dos cômodos, semelhança entre uma casa e outra, entres outros.

Este experimento é uma proposta aos alunos de explorar a ideia de transcrever objetos do tamanho real de forma reduzida em um papel, possuindo como alvo os alunos do Ensino Fundamental, estimulando o aprendizado abordando os conceitos de razão e proporção, dentro do assunto de escala, e aplicá-los ao cotidiano, mostrando a importância da matemática para possibilitar a visualização de plantas baixas de construções.

Conteúdos

Geometria plana: escalas e redução.

Objetivos da atividade

- Trabalhar medições com a fita métrica.
- Desenvolver a planta baixa de uma construção utilizando escalas de redução de forma correta.

Materiais utilizados

- Fita métrica.
- Caderno.
- Régua.
- Lápis.

Desenvolvimento

Medir os cômodos, portas e janelas com a fita métrica e anotar na imagem do item anterior, como ilustrado na Figura 5.1, e demonstrar que uma escala é feita através da razão entre a medida que se gostaria de ilustrar e a medida real feita com a fita métrica, sendo essa escala definida e constante a todas as outras medições realizadas.

Imagine estar observando a sua casa de cima, sem móveis, somente com as divisões internas e externas das paredes existentes, reproduza essa imagem em um papel, com o auxílio da régua, levando em consideração as transformações realizadas nas medições anteriores e as aberturas das portas. Então a planta baixa da construção está pronta.

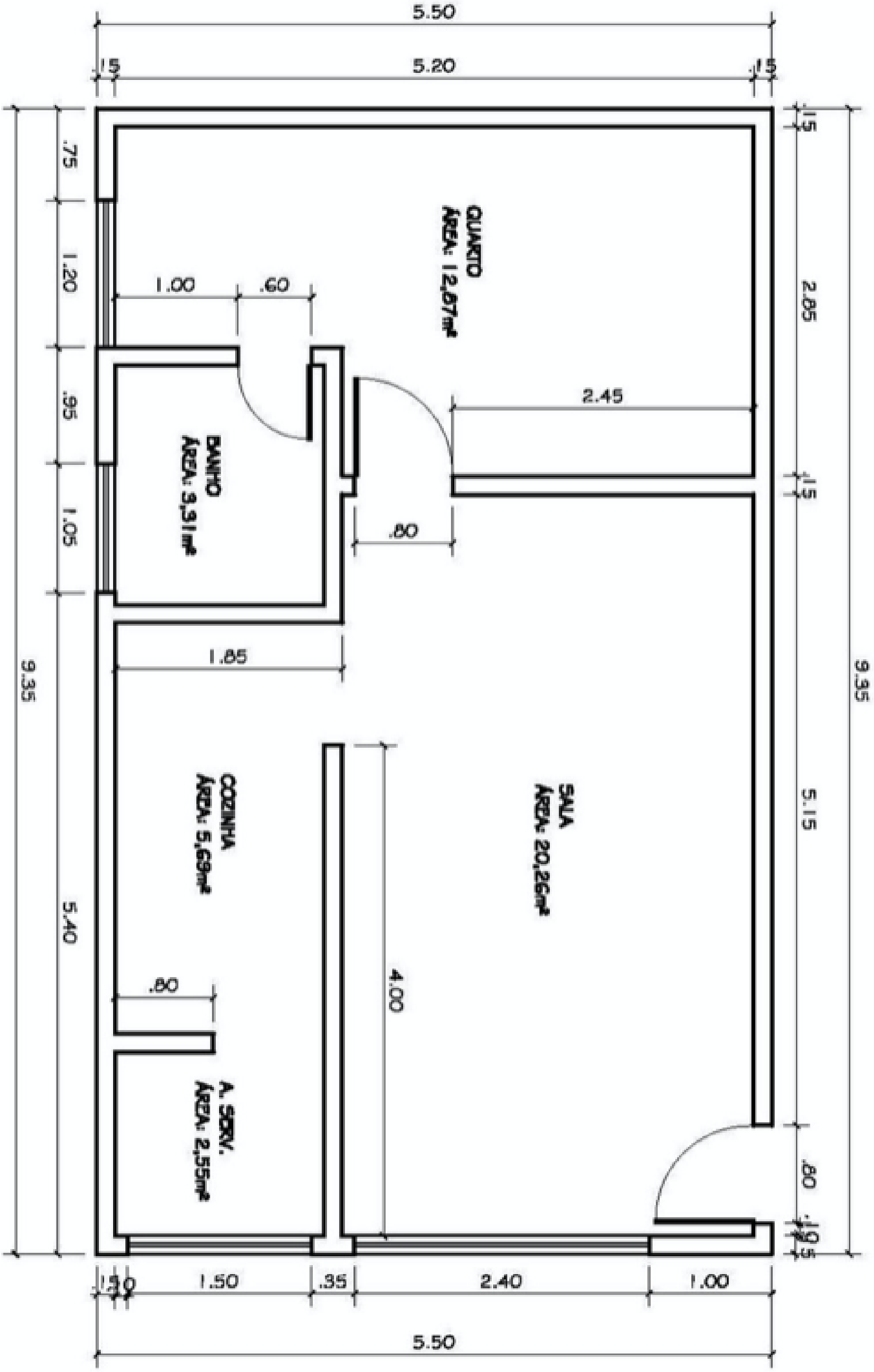


Figura 5.1: Planta baixa de uma casa com as respectivas medidas.

Resultados esperados

Que o alunos consigam entender o conceito de escala e sua importância a problemas cotidianos, tanto em problemas de redução, como por exemplo em geografia para a representação de mapas, como em problemas de ampliação, por exemplo em ciências para representar uma célula do orgasnimo humano, interligando as disciplinas tornando-as mais interessantes.

5.2 Origamis, Geometria e Habilidades

Sinopse

A segunda atividade proposta é um toque particular e especial, visto que remete a lembranças de minha infância e meus momentos em família, que com o passar dos anos se perderam devido a agitada rotina. Nela é apresentada uma representação de alguns Poliedros Regulares de Platão através de origamis, relacionando ao conteúdo de Geometria Espacial, possibilitando a concretização dos sólidos, com o intuito de facilitar a abstração de aplicações em exercícios.

A palavra *origami* origina-se da junção das palavras japonesas *"oru"*, que significa dobrar, com *"kami"*, que significa papel, em que quando unidas mudam os fonemas. Uma relação entre a arte e a matemática é estabelecida devido a possibilidade de realizar infinitas montagens com papéis e dobras, desde representações com apenas uma folha a montagens que são necessários vários módulos e encaixes, sem utilização de cola.

A atividade aborda conceitos geométricos de figuras planas, simetria e congruência, no intuito de realizar montagem de alguns dos poliedros de Platão, conhecidos na Geometria por serem formados por faces poligonais congruentes, com o encontro do mesmo número de faces em todos os vértices, e utilizando papéis de diferentes cores, cria-se sólidos "alegres"ao olho, tornando a experiência mais atrativa em sua realização.

Ao decorrer da atividade é possível ao professor trabalhar outros conceitos que surgem conforme cada dobra é feita, como definição de retas concorrentes, perpendiculares, ângulos formados pelas marcações de cada dobra, e com os sólidos já efetuados, pode-se identificar as diagonais das faces, diagonais dos sólidos, número de vértices, faces e arestas, em outras palavras permite ao professor que se realize os estudos dos elementos da geometria de forma lúdica conforme os elementos surgem na atividade [1].

Conteúdos

Geometria plana: simetria e congruência.

Geometria Espacial: Poliedros de Platão.

Objetivos da atividade

– Desenvolver o pensamento geométrico.

– Fixar conceitos de simetria e congruência.

– Facilitar a abstração do espaço tridimensional, desenvolvendo conceitos de espaço e forma.

– Exercitar paciência e memorização.

Materiais utilizados

– Papéis cortados em formatos quadrados e de tamanhos iguais.

Montagem - Tetraedro, Octaedro e Icosaedro Regulares

Seguir os passos, conforme Tabela 5.1, para montagem de módulos a serem conectados para a formação de alguns dos sólidos de Platão.

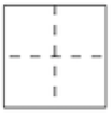
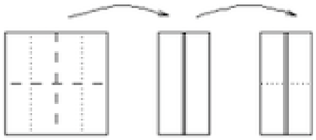
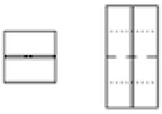
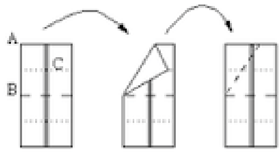
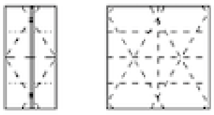
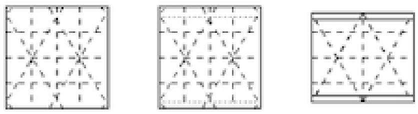
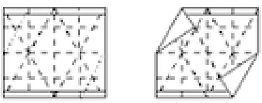
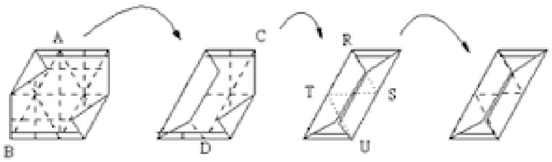
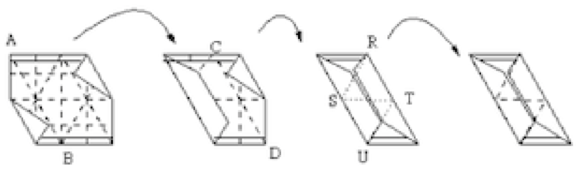
<table>
<tr>
<td>1. Comece com um quadrado, e dobre-o dividindo em quatro partes iguais.
</td>
<td>2. Depois dobre os dois lados opostos até a linha do meio.
</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Dobre novamente os dois lados opostos até a linha do meio e abra essa dobra.
</td>
<td>4. Dobre de acordo com a imagem para que o ponto A encontre a linha C, formando um vértice em B.

</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Faça o mesmo para os outros cantos, e abra todas as dobras.
</td>
<td>6. Dobre as faixas horizontais das partes superior e inferior do quadrado, de forma que a dobra passe pelos pontos de encontro das dobras anteriores, conforme imagem.
</td>
</tr>
<tr>
<td>7. Dobre nas linhas pontilhadas de acordo com a imagem, prestando atenção ao vértice formado na linha horizontal central.
</td>
<td>8. Dobre o papel nas linhas pontilhadas que passam no par A e B e no par C e D, terminando um módulo.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">São necessários módulos espelhados do passo 8, sendo da seguinte forma:

</td>
</tr>
</table>

Tabela 5.1: Diagrama de montagem do módulo.

Para o **tetraedro**, são necessários dois módulos um espelhado ao outro, fazendo as conexões de acordo com a Figura 5.2.

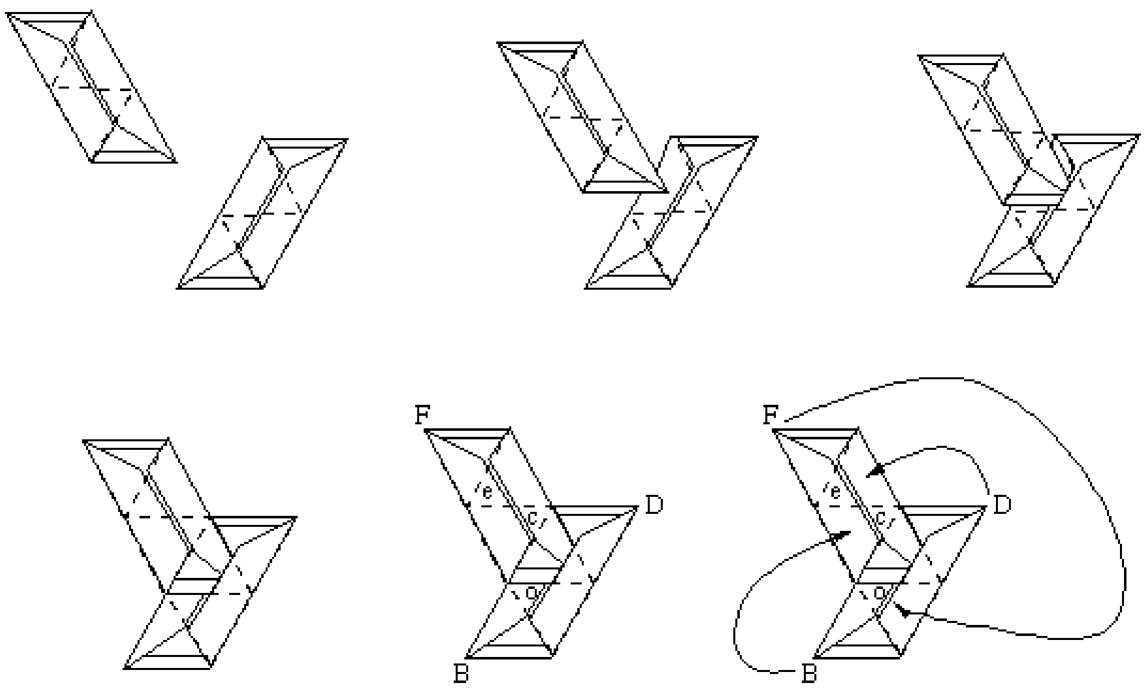


Figura 5.2: Esquema de conexão dos módulos.

Para o **octaedro** e **icosaedro**, os módulos são os mesmos, porém para o octaedro são necessários dois pares de cada tipo de módulo, e para o icosaedro são necessárias dez peças, cinco de um tipo de módulo e cinco espelhados, encaixá-los com o propósito de gerar os sólidos desejados.

Montagem - Cubo

Seguir os passos, conforme Tabela 5.2, para montagem de módulos a serem conectados para a formação do cubo, ou hexaedro regular.

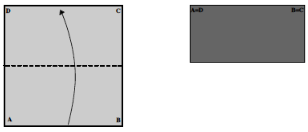
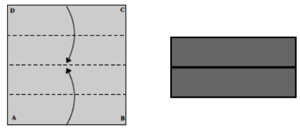
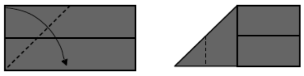
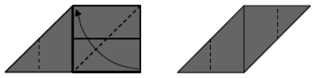
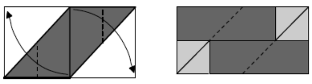
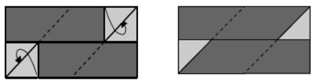
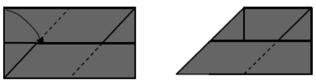
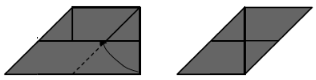
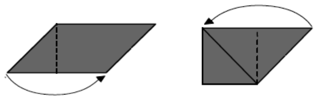
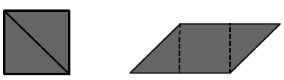
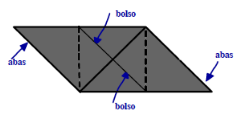
1. Comece com um quadrado, e dobre-o de modo a coincidir os lados AB e CD. 	2. Desfaça a dobra anterior. Faça uma dobra, levando os lados AB e CD até a dobra feita anteriormente. 
3. Mantendo um dos vértices fixo, dobre de modo a formar um triângulo retângulo. 	4. Proceda da mesma forma que o passo anterior com o vértice oposto, obtendo um paralelogramo. 
5. Desdobre. Criam-se vincos nas extremidades que formam triângulos retângulos. 	6. Dobre colocando estes triângulos para dentro. 
7. Proceda conforme o passo 3, colocando o vértice do triângulo no interior da peça . 	8. Proceda conforme passo 4, mas de forma a colocar o vértice do triângulo para o interior da peça. 
9. Vire o módulo. 	10. Faça uma dobra de modo que coincida os dois vértices da base do paralelogramo, conforme abaixo 
11. Tem-se um quadrado. Desfaça o último passo. 	12. Vire a peça e está pronto o módulo do cubo. Observe que serão formados bolsos e abas para a conexão dos módulos. 

Tabela 5.2: Diagrama de montagem do cubo.

Fazendo as conexões dos módulos, com cada aba encaixada em um bolso de cada módulo, realiza-se a construção do cubo.

Resultados esperados

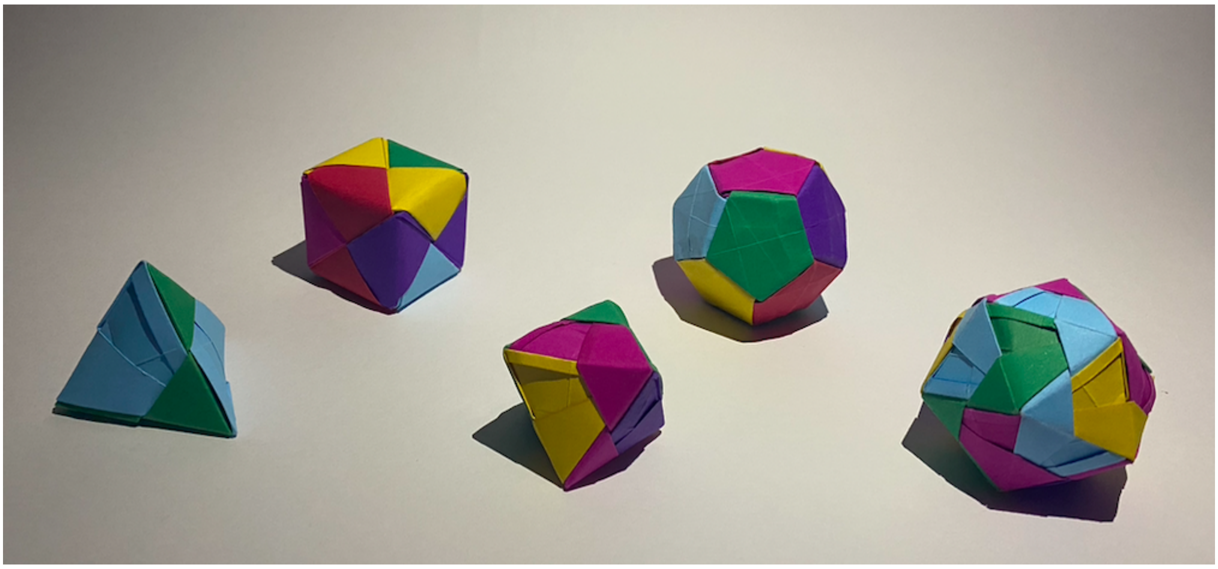


Figura 5.3: Origami dos sólidos de Platão.

Com a montagem de quatro dos Poliedros Regulares de Platão, facilita-se a observação de seus elementos, gerando material concreto, facilitando a abstração, sendo trabalhados a coordenação motora fina dos estudantes e o poder de concentração e paciência. Conforme Figura 5.3, há, além dos quatro sólidos apresentados na atividade, o quinto poliedro de Platão, o dodecaedro, em que não se foi ilustrado por ser um módulo diferente dos realizados.

5.3 Volume de uma pirâmide

Sinopse

A terceira atividade consiste em apresentar o volume de uma pirâmide através do desmembramento de um prisma, correlacionando a teoria com objetos manipuláveis, importante para relacionar conhecimento geométrico, percepção, construção e representação.

A fórmula do volume de uma pirâmide é, normalmente, memorizada como um terço da área da base multiplicada pela altura, mas qual o motivo de ser considerada dessa forma? Com o objetivo de apresentar uma forma mais acessível de um aluno entender essa questão, tem-se na atividade objetos manipuláveis para seu entendimento, em que a simples aceitação da fórmula não se faz perceber a necessidade de problematização que precisa ser estabelecida [5].

Com a apresentação de objetos manipuláveis, o entendimento do conteúdo se torna mais acessível ao estudante, não priorizando uma demonstração rigorosa da fórmula do volume de uma pirâmide, que pode ser trabalhado em outros momentos.

Conteúdos

Geometria espacial: volume da pirâmide.

Objetivos da atividade

- Desenvolver o pensamento geométrico.
- Fixar o entendimento de prismas e pirâmides.
- Definir o volume de uma pirâmide.

Materiais utilizados

- Folhas de papel.
- Tesoura.
- Cola.

Desenvolvimento

É apresentado o paralelepípedo reto-retângulo com arestas medindo a, b e c, distintas duas a duas, sendo realizada sua divisão em três pirâmides de base retangular coincidentes com as faces do paralelepípedo e altura coincidente com uma aresta do mesmo, em vermelho, conforme Figura 5.4, ou seja, a, b ou c são, de alguma forma, as dimensões da base e a altura da pirâmide.

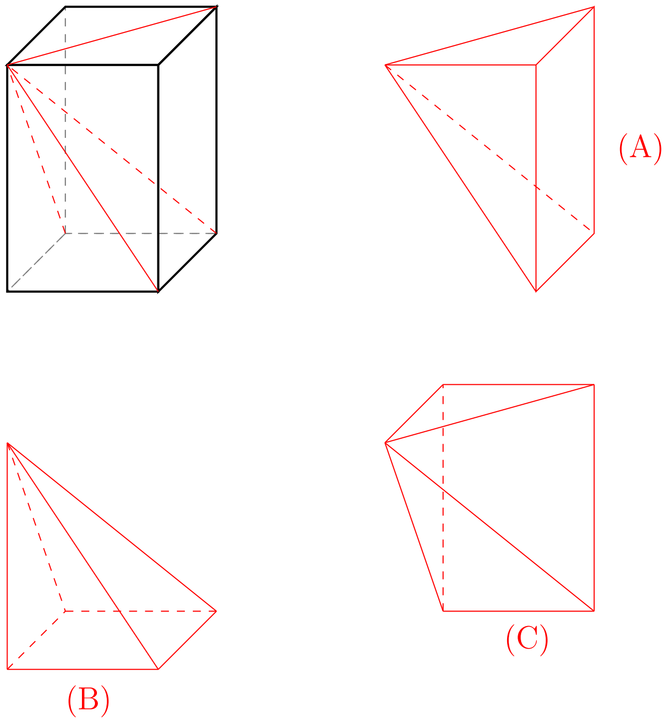


Figura 5.4: Paralelepípedo dividido em três pirâmides a partir de um vértice.

Sugere-se que os alunos façam planificações das pirâmides com papel e tesoura, e com o auxílio da cola produzam as pirâmides, para posterior comparações com o paralelepípedo.

Percebe-se que duas das pirâmides são iguais (A) e (C), pois têm face lateral do paralelepído como bases e altura iguais, já a terceira (B) é diferente, possuindo como base a base do paralelepípedo. Considerando já estudado o *Princípio de Cavalieri* [1], pode-se determinar que as pirâmides (A) e (B) possuem a o mesmo volume, logo o volume da pirâmide é de acordo com a Igualdade 5.1.

$$V = \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot c \tag{5.1}$$

Generalizando a Igualdade 5.1, tem-se a Identidade 5.2.

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h \tag{5.2}$$

Dessa forma, através de objetos manipuláveis, pode-se entender a origem da fórmula do volume de uma pirâmide.

[1] *Princípio de Cavalieri*: Considerando dois sólidos, se todos os planos paralelos a um plano fixo, ao interceptarem os sólidos, determinam regiões de mesma área, então os sólidos possuem o mesmo volume

Resultados esperados

Através de objetos concretos, entende-se o fato de uma pirâmide ocupar um terço do volume de um prisma, mas atentando-se ao fato de se ter como base da pirâmide uma face do prisma e possuir a mesma altura do prisma, unindo o conhecimento teórico com a prática para o entendimento do conteúdo, facilitando a percepção dos alunos, podendo gerar outras discussões como considerar diferentes bases de uma pirâmide, ou seja, bases triangulares, pentagonais ou qualquer outro polígono.

5.4 Geometria Esférica

Sinopse

A quarta atividade há relação com uma Geometria Não Euclidiana, a Geometria Esférica, identificando alguns elementos dessa Geometria.

Com a negação do quinto postulado de Euclides, o **postulado das paralelas**, observou-se a possibilidade de uma superfície não possuir retas que sejam paralelas, criando-se a Geometria Esférica. Nessa Geometria, o conceito de reta é idêntico ao da Geometria Euclidiana, dois pontos distintos definem uma única reta, porém são círculos máximos da superfície. Com isso pode-se desenvolver a interdisciplinaridade com a Matemática e a Geografia, atentando os estudantes da necessidade de uma Geometria Não Euclidiana, em que a Geometria Euclidiana não é o suficiente, simulando uma bola de isopor com o formato do planeta Terra, apresentando conceitos dessa geometria.

Conteúdos

Geometria esférica: reta, intersecção de retas, triângulos esféricos.

Objetivos da atividade

- Desenvolver o pensamento geométrico.
- Entender a necessidade das Geometrias Não Euclidianas.
- Definir conceitos de círculos máximos na Geometria Esférica, que são as retas nessa superfície.

Materiais utilizados

– Bolas de isopor com, pelo menos, 12 centímetros de diâmetro.

– Tiras elásticas coloridas.

Desenvolvimento

Com os elásticos ao redor da bola de isopor, colocar dois deles, de forma que não sejam coincidentes, ambos elásticos passando no plano que contém o centro da esfera, com isso observar o que se forma, e seus pontos de cruzamento. Esses pontos de cruzamento são chamados de antípodas e são diametralmente opostos, conforme Figura 5.5.

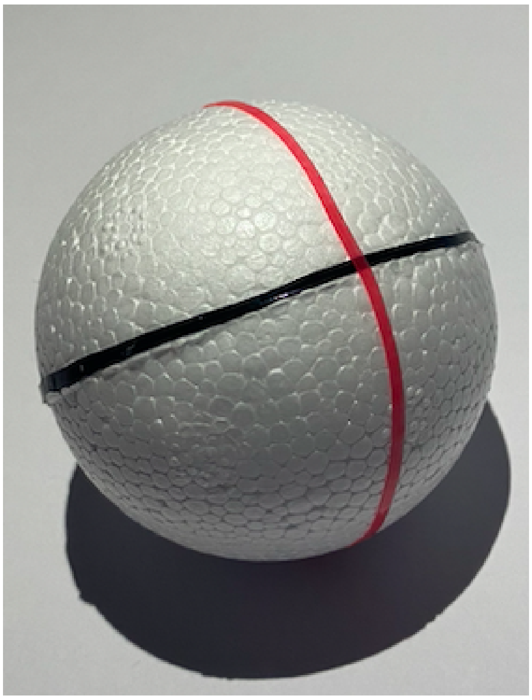


Figura 5.5: Representação de retas na geometria esférica.

Adicionar mais um elástico, cruzando os outros dois em um ponto diferente da intersecção dos anteriores, em um plano que contenha o centro da esfera, novamente observe a forma obtida, ilustrado na Figura 5.6.

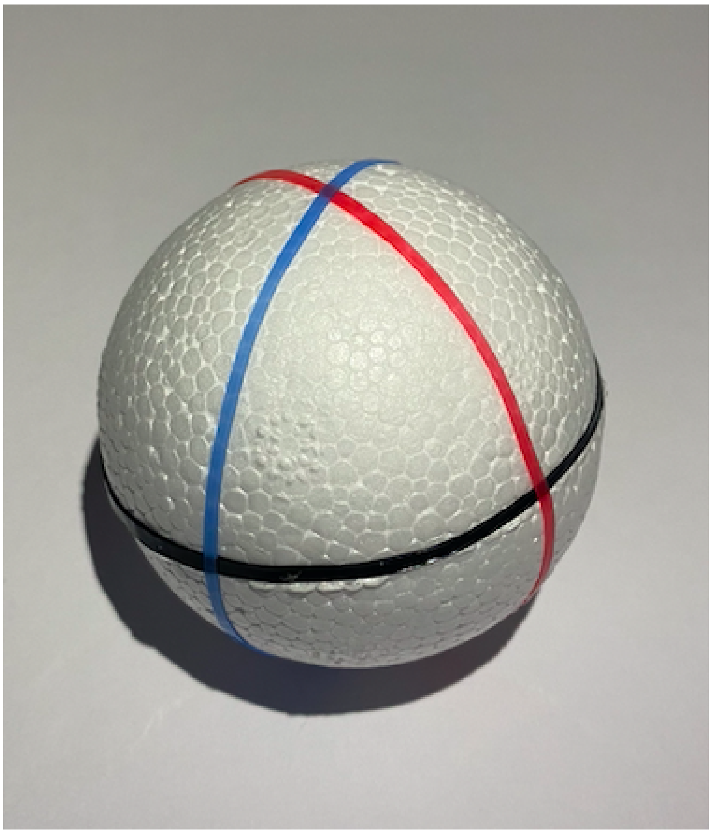


Figura 5.6: Triângulo Esférico na bolinha de isopor.

É possível observar a formação de um triângulo esférico, que possui propriedades distintas do triângulo da Geometria Euclidiana, sendo sugerido o estudo dessas propriedades em trabalhos futuros.

Resultados esperados

Concluir a razão de não haver retas paralelas nessa Geometria, definindo alguns de seus elementos fundamentais, e com a inserção de mais uma reta, gera-se um triângulo esférico, que possui propriedades distintas da Geometria Euclidiana, em que, com análise mais crítica pode-se comparar essa superfície com o globo terrestre, relacionando o conteúdo com a Geografia e os pontos no globo, podendo em atividades futuras definir conceitos de paralelos, meridianos, posições de latitude e longitude, entres outros.

Capítulo 6

Conclusão

Nessa dissertação foram apresentados de forma objetiva uma abordagem histórica do conceito de Geometria, os documentos norteadores da educação brasileira, a evolução da Geometria Euclidiana e a necessidade da criação de outras Geometrias, com a negação do quinto postulado de Euclides, os sólidos de Platão, com algumas curiosidades, encerrando o trabalho com algumas atividades a serem aplicadas aos estudantes, no intuito de acrescentar conhecimento.

No Capítulo 2 apresentou-se a evolução da Geometria, com alguns estudiosos importantes, uma importante obra de Euclides chamada *Os Elementos*, base da Geometria, com definições e axiomas fundamentais, citou-se os cinco postulados de Euclides, com intuito de elevar o conhecimento da história da Geometria para os profissinais da área e estudantes interessados no tema.

A fim de aprofundar o conhecimento, no Capítulo 3 foram apresentados os Poliedros de Platão, a justificativa de, em três dimensões, serem somente cinco poliedros regulares, uma breve análise dos sólidos regulares na quarta dimensão, que passam a ser chamados de politopos, ou hipersólidos, seus elementos e comportamento em dimensões mais avançadas, justificando a existência de somente três hipersólidos regulares nessas dimensões.

O Capítulo 4 trata das Geometrias Não Euclidianas, com ênfase nas Geometrias Hiperbólica e Esférica, apresentando a necesidade de suas criações, negando o quinto postulado de Euclides. No caso da Geometria Hiperbólica, apresentou-se a definição de hipérbole, diferentes superfícies de estudo, na Geometria Esférica, definiu-se a sua superfície e alguns elementos fundamentais, e uma tabela com as diferenças de cada Geometria apresentada.

Atividades pedagógicas foram apresentadas no Capítulo 5, para desenvolver o conhecimento e habilidades dos estudantes e professores, com a importância da interdisciplinaridade dos conteúdos. A primeira atividade apresenta os conceitos de razão e proporção, trabalhados em escala dentro da Geometria plana, as segunda e terceira atividades trabalham a Geometria Espacial, apresentando os sólidos de Platão, um dos temas centrais do estudo, como objetos manipuláveis e o volume de uma pirâmide a partir de um prisma, finalizando com a quarta atividade, dentro de uma Geometria Não Euclidiana, especificamente a Geometria Esférica.

Como trabalhos futuros pode-se explorar o comportamento mais aprofundado das quarta e quinta dimensões, relacionando aos sólidos regulares para um melhor entendimento de suas dinâmicas, e um estudo das Geometrias Não Euclidianas, analisando as características de cada uma e suas propriedades, mostrando a diferença em conceitos e aplicações nos estudos científicos que encontram-se em constante evolução a partir de sua utilização.

Referências Bibliográficas

[1] *ALBUQUERQUE, Erenilda S. da C.*. Geometria e arte: Uma proposta metodológica para o ensino de geometria no sexto ano. Dissertação de mestrado. PROFMAT - Universidade Federal de Alagoas, Alagoas, 2017.

[2] *ARCARI, Inedio.* Um texto de geometria hiperbólica. Dissertação de mestrado. UNICAMP, São Paulo, 2008.

[3] *BAEZ, John.* Platonic solids in all dimensions. Disponível em:
<http://math.ucr.edu/home/baez/platonic.html>. Acessado: 10 de abril de 2020.

[4] *BERLINSKI, David.* Os elementos de Euclides.;Tradução: Claudio Carina, Editora Zahar, Rio de Janeiro, 2018.

[5] *BONOMI, Maria C.; MONTEIRO, Martha S.*. Um problema: o volume da pirâmide. Artigo. IME-USP, São Paulo, 2008.

[6] *BRASIL.* Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Base Nacional Comum Curricular. Disponível em
<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase> Acessado em: 15 de maio. 2020.

[7] *CARVALHO, Gracielle S.*. Geometrias Nao Euclidianas: uma proposta de inserção d geometria esférica no ensino básico, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais, 2017.

[8] *CRUZ, Donizete G.; SANTOS, Carlos H.*. Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas – Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio. Artigo. Universidade Federal do Paraná. Disponível em:
<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1734-8.pdf >. Acessado em: 10 janeiro de 2020.

[9] *DEHOVITZ, Deborah C..* The Platonic Solids. An Exploration of the Five Regular Polyhedra and the Symmetries of Three-Dimensional Space, Whitman College, Walla Walla, Washington, 2016.

[10] *DEVITO, André; FREITAS, Araone K. de; PEREIRA, Kênia C..* Geometrias Não Euclidianas. Artigo. UNICAMP, São Paulo, 2006.

[11] *DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N..* Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. São Paulo, 1993.

[12] *DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N..* Fundamentos de matemática elementar, 10: geometria espacial. São Paulo, 1993.

[13] *EUCLIDES.* Os Elementos, Tradução: Irineu Bicudo, Editora UNESP, São Paulo, 2009.

[14] *EVES, Howard.* Introdução a história da matemática, Editora UNICAMP, São Paulo, 2004.

[15] *GAMBARATO, Renira R..* DESIGN inFORMAÇÃO, Morfologias da linguagem. Tese de doutorado. PUC-SP, São Paulo, 2005.

[16] *GÓMEZ, Jorge J. D.; FRENSEL, Kátia R.; SANTO, Nedir do E..* Geometria analítica II. Fundação CECIERJ, Rio de Janeiro. 2009.

[17] *GOUCHA, António P. N..* Características de politopos. Dissertação de mestrado. Universidade de Coimbra, Portugal, 2016.

[18] *NETO, Antonio C. M..* Geometria, coleção PROFMAT, Rio de Janeiro, 2013.

[19] *PERES, Eduardo dos S..* Classificação de cônicas e quádricas em função da equação algébrica. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

[20] *PEREZ, Carlos M..* Fundamentos de geometria hiperbólica. Dissertação de mestrado. PROFMAT - UNESP, São Paulo, 2015.

[21] *RIBEIRO, Ricardo S.; GRAVINA, Maria A..* Disco de Poincaré: Uma proposta para explorar a geometria hiperbólica no GeoGebra. Artigo. UFRGS, Rio Grande do Sul, 2013.

[22] *RUFINO, Elzimar de O.*. Curvaturas médias e Gaussiana de superfícies quádricas. Trabalho de conclusão de curso. UFRR. 2006.

[23] *SANTOS, Kamila S.; ARAÚJO, Lucas dos S.*. Uma breve abordagem histórica: Platão e os poliedros platônicos. Artigo. Universidade do Estado do Pará, Pará, 2016.

[24] *Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul.* Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul. Disponível em: <http://www.sed.ms.gov.br/wp-content/uploads/2019/07/Curr%C3%ADculo-MS-V26.pdf> Acessado em: 15 de maio de 2020.

[25] *SEQUIN, Carlo.* Perfect Shapes in Higher Dimensions - Numberphile. 2016. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2s4TqVAbfz4&t=1086s>. Acessado em: 24 de março de 2020.

[26] *SILVA, Jose P. A.*. As geometrias euclidianas e não-euclidianas. Dissertação de mestrado. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.

[27] *SOUZA, Samuel de.* Geometria das dimensões e quadridimensionalidade. Tese de doutorado. PUC-SP, São Paulo, 2019.

[28] *SUTTO, Daud.* Os sólidos platônicos e arquimedianos, Editora É Realizações, São Paulo, 2015

[29] *THOMAZ, Mara L.; FRANCO, Valdeni S.* Geometria não euclidiana / Geometria esférica. Artigo. Paraná, 2008.

[30] *TOLEDO, Maíra L.* Uma abordagem sobre a geometria não euclidiana para o ensino fundamental. Dissertação de mestrado. UNESP, São Paulo, 2018.

[31] *WEBB, Robert.* Robert Webb's Stella software. Disponível em: <https://www.software3d.com/ScreenShots.php#fourD>. Acessado: 04 de junho de 2020.