

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

BRUNA MIRELLA CAETANO DE MIRANDA

FORMA CANÔNICA DE JORDAN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

CAMPO GRANDE - MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
EM REDE NACIONAL

BRUNA MIRELLA CAETANO DE MIRANDA

FORMA CANÔNICA DE JORDAN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

Orientadora: Dr<sup>a</sup>. Rubia Mara de Oliveira Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2020

# FORMA CANÔNICA DE JORDAN: CONCEITOS E APLICAÇÕES

**BRUNA MIRELLA CAETANO DE MIRANDA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Dr<sup>a</sup>. Rubia Mara de Oliveira Santos - UFMS

Dr. Claudemir Aniz - UFMS

Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira - UEMS

Campo Grande - MS

Julho de 2020

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por seu amor incondicional. Sem ele não teria forças para prosseguir minha jornada.

Ao meu marido, Tiago Alves Wially, por sempre estar ao meu lado, me apoiando, entendendo os momentos que precisei me ausentar, me ouvindo sempre que precisei.

Aos meus pais Fatima Caetano Monteiro e Valmir Pedro de Miranda que sempre me deram condições de estudar, nunca deixaram que me faltasse nada. Pelo seu amor por mim e orgulho de minhas escolhas. Ao meu pai por suas mensagens motivacionais em momentos que pensei em desistir. Também aos meus irmãos, Byanka e Vitor, por me fazerem ver as coisas que realmente importam na vida e deixar minha caminhada mais leve.

Agradeço aos meus sogros, Marta e Wandir, aos meu avós Alaíde e José, e ao meu tio Claudemir por tornarem possível a minha ida a Campo Grande para a realização do mestrado. Obrigado por seu auxílio e por sempre acreditarem no meu sucesso.

Aos meu colegas de turma e amigos Anderson, João e Lucas por sempre me auxiliarem quando eu precisava, pelas nossas conversas e tornarem o mestrado mais prazeroso.

Aos professores do PROFMAT por compartilhar seu conhecimento e me fazer evoluir intelectualmente e como pessoa, principalmente à minha orientadora Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup> Rúbia Mara de Oliveira Santos, por ser essa pessoa fantástica, companheira, paciente e por sempre ter acreditado em mim, as vezes, até mais do que eu mesma.

# Resumo

A Forma Canônica de Jordan (FCJ) é uma das formas de se representar uma matriz, ou um operador linear através de um tipo especial de matriz triangular superior. Esta, por sua vez, semelhante a matriz original deste operador. Este trabalho apresenta conceitos, resultados importantes e um método prático para encontrar as FCJ. Com o intuito de motivar estudantes da área de ciências exatas, serão apresentadas algumas aplicações desta teoria na resolução de problemas, alinhando a teoria com a prática.

**Palavras-chave:** Forma Canônica de Jordan, Diagonalização, Aplicações.

# Abstract

The Canonical Form of Jordan (FCJ) is one of the ways to represent a matrix, or a linear operator through a special type of upper triangular matrix. This, in turn, is similar to the original matrix of this operator. This work presents concepts, important results, and a practical method to find JCF. In order to motivate students in the field of exact sciences, some applications of this theory will be presented in solving problems, meeting theory and practice.

**Keywords:** Jordan Canonical Form, Diagonalization, Applications

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conceitos Preliminares</b>	<b>3</b>
2.1	Transformações lineares . . . . .	3
2.2	Matriz de uma transformação linear . . . . .	9
2.3	Operadores Diagonalizáveis . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Introdução às Formas Canônicas de Jordan</b>	<b>23</b>
3.1	Motivação . . . . .	23
3.2	Conceitos básicos . . . . .	24
3.3	Método para encontrar a forma canônica de Jordan . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>43</b>
4.1	Potências de uma matriz . . . . .	43
4.2	Exponencial de uma matriz . . . . .	48
4.3	Sistemas de equações lineares com coeficientes constantes . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Teorema: Forma Canônica de Jordan</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Historicamente, o estudo da álgebra linear teve início por volta de 300 a.C com os babilônicos e a resolução de sistemas lineares de ordem 2. Posteriormente, por volta de 200 a.C, com os chineses que mostravam capacidade em resolver sistemas com 3 incógnitas. Apesar disso, esses estudos somente foram impulsionados a partir do século XVII com Leibniz(1646 - 1716) e o estudo de determinantes. Durante o século XVIII, diversos matemáticos desenvolveram estudos relacionados aos métodos matriciais e determinantes e no século XIX Cauchy(1789 - 1857) introduziu a ideia de matrizes semelhantes e mostrou que elas possuem o mesmo polinômio característico. A partir daí, outros matemáticos como Jacobi(1804 - 1851), Arthur Cayley(1821 - 1895) e Sylvester(1814 - 1897) desenvolveram e sistematizaram definições e propriedades que são utilizadas atualmente. Neste mesmo período, no ano de 1870 Marie Ennemond Camille Jordan(1838 - 1922) publicou o livro “Traité des substitutions et des équations algébriques”, onde, dentre outros assuntos, apresenta a Forma Canônica de Jordan, objeto de estudo desta dissertação.

Existem operadores lineares que podem ser representados por matrizes diagonais, são os operadores diagonalizáveis. Esse tipo de matriz tem muita aplicabilidade, uma vez que facilita alguns cálculos, como na potência de matrizes. No entanto, nem todo operador é diagonalizável. Nesse caso, há uma alternativa para se representar esse tipo de operador da forma mais simples possível, é a chamada forma canônica de Jordan, que poder ser escrita como a soma de uma matriz diagonal e uma matriz nilpotente. A forma canônica de Jordan tem aplicações em diversas áreas tais como física, matemática, engenharias e ciência da computação.



Este trabalho tem por objetivo apresentar conceitos e resultados importantes referentes à forma canônica de Jordan, bem como um método prático para encontrá-la. Com o propósito de unir a teoria à prática serão exibidas algumas aplicações desta teoria na resolução de problemas. Diversos exemplos foram resolvidos ao longo da dissertação a fim de facilitar a compreensão da forma canônica de Jordan. Sendo assim, o trabalho está dividido da seguinte maneira:

O capítulo 2 aborda uma breve revisão de conceitos e resultados clássicos oriundos da álgebra linear como transformações lineares, matriz de uma transformação linear e operadores diagonalizáveis.

O capítulo 3 inicia com uma motivação para o estudo das formas canônicas de Jordan, mostrando que, mesmo considerando o espaço vetorial sobre o conjunto dos números complexos, ainda assim, alguns operadores não podem ser diagonalizados. Resultados importantes serão enunciados e, na sequência, é apresentado um algoritmo para se encontrar a forma canônica de Jordan de um operador linear e uma base de autovetores genuínos e generalizados.

No capítulo 4 serão apresentadas algumas aplicações das formas canônicas de Jordan na resolução de problemas matemáticos.

Por fim, no capítulo 5 serão apresentadas conclusões e ideias de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Conceitos Preliminares

Neste capítulo serão apresentadas definições, propriedades e resultados oriundos da álgebra linear, mais especificamente, transformações lineares, matriz de uma transformação linear e operadores diagonalizáveis. Esses conceitos são essenciais para compreender a forma canônica de Jordan. No decorrer do trabalho será considerado o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  sendo especificados, quando necessário, os casos particulares. Os conteúdos aqui abordados foram obtidos em [3, 5, 8, 9, 10, 12, 16].

### 2.1 Transformações lineares

**Definição 1** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$ . Uma aplicação  $T : U \rightarrow V$  é uma **transformação linear** de  $U$  em  $V$  se, e somente se,*

$$(i) \quad T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

$$(ii) \quad T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u), \quad \forall u \in U \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

No caso em que  $U = V$ , uma transformação linear  $T : V \rightarrow V$  é chamada **operador linear**. Ainda, o conjunto das transformações lineares  $T : U \rightarrow V$  é denotado por  $L(U, V)$ .

**Exemplo 1** *Seja  $T : U \rightarrow V$ , dada por  $T(u) = 0, \forall u \in U$  (Transformação Linear Nula).*

**Solução:** Sejam  $u_1, u_2 \in U$  e  $\alpha$  um número real, tem-se

$$(i) \quad T(u_1 + u_2) = 0 = 0 + 0 = T(u_1) + T(u_2).$$

$$(ii) \quad T(\alpha \cdot u_1) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot T(u_1).$$

Logo  $T$  é uma transformação linear.

**Exemplo 2** Seja  $I : V \rightarrow V$ , dado por  $I(v) = v, \forall v \in V$  (Operador Idêntico).

**Solução** Sejam  $u_1, u_2 \in U$  e  $\alpha$  um número real, tem-se

$$(i) \quad I(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = I(u_1) + I(u_2).$$

$$(ii) \quad I(\alpha \cdot u_1) = \alpha \cdot u_1 = \alpha \cdot I(u_1).$$

Logo  $I$  é uma transformação linear.

**Propriedades 1** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  e uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$ .

$$(i) \quad T(0) = 0 \quad (T \text{ transforma o vetor nulo de } U \text{ no vetor nulo de } V).$$

$$(ii) \quad T(-u) = -T(u), \quad \forall u \in U.$$

$$(iii) \quad T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2), \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

$$(iv) \quad \text{Sendo } T : U \rightarrow V \text{ uma transformação linear então } T \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i), \quad u_i \in U \\ \text{e } \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

**Definição 2** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear. Indica-se por  $Nuc(T)$  e denomina-se **núcleo** de  $T$  o seguinte subconjunto de  $U$ :

$$Nuc(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

**Lema 1** Seja  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear, então  $Nuc(T)$  é um subespaço vetorial de  $U$ .

**Demonstração:** Sejam  $u_1$  e  $u_2 \in Nuc(T)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  então,  $T(u_1) = 0$  e  $T(u_2) = 0$ . Segue daí,

$$(a) \quad T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = 0 + 0 = 0 \text{ e } u_1 + u_2 \in Nuc(T).$$

$$(b) \quad T(\alpha \cdot u_1) = \alpha \cdot T(u_1) = \alpha \cdot 0 = 0 \text{ e } \alpha \cdot u_1 \in Nuc(T).$$

■

**Definição 3** Seja  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear, o conjunto  $\{T(u) \in V \mid u \in U\}$  é chamado de **imagem** da transformação  $T$ , denotado por  $Im(T)$ .

**Lema 2** *Seja  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear, então  $Im(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ .*

**Demonstração:** Sejam  $v_1$  e  $v_2$  vetores pertencentes a  $Im(T)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Deve-se mostrar que  $v_1 + v_2 \in Im(T)$  e  $\alpha \cdot v_1 \in Im(T)$ , isto é, existem vetores  $u, u^* \in U$  tal que  $T(u) = v_1 + v_2$  e  $T(u^*) = \alpha \cdot v_1$ . Como  $v_1, v_2 \in Im(T)$ , existem vetores  $u_1, u_2 \in U$  tal que  $T(u_1) = v_1$  e  $T(u_2) = v_2$ . Fazendo  $u = u_1 + u_2$  e  $u^* = \alpha u_1$  tem-se

$$T(u) = T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) = v_1 + v_2$$

e

$$T(u^*) = T(\alpha \cdot u_1) = \alpha \cdot T(u_1) = \alpha \cdot v_1.$$

Portanto,  $Im(T)$  é um subespaço vetorial de  $V$ . ■

**Lema 3** *Uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$  é injetora se, e somente se,  $Nuc(T) = \{0\}$ .*

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Suponha  $T$  injetora. Seja  $u \in Nuc(T)$ , então  $T(u) = 0$ , mas  $T(0) = 0$  para qualquer transformação linear, logo  $T(u) = T(0)$ . Como, por hipótese,  $T$  é injetora, então  $u = 0$  e conclui-se que o núcleo de  $T$  possui apenas o vetor nulo.

$\Leftarrow$ ) Suponha  $Nuc(T) = \{0\}$ . Sejam  $u_1, u_2 \in U$  então,

$$\begin{aligned} T(u_1) = T(u_2) &\Rightarrow T(u_1) - T(u_2) = 0 \Rightarrow T(u_1 - u_2) = 0 \Rightarrow u_1 - u_2 \in Nuc(T) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Portanto  $T$  é injetora. ■

**Lema 4** *Uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$  é sobrejetora se, e somente se,  $V = [T(u_1), \dots, T(u_n)]$  sempre que  $U = [u_1, \dots, u_n]$ .<sup>1</sup>*

---

<sup>1</sup>Seja  $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset U$ . O subespaço  $[S] = \{\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$  é chamado **subespaço gerado por  $S$** . Denota-se, também esse subespaço como  $[u_1, \dots, u_n]$  (que representa a notação utilizada neste trabalho).

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Suponha  $T$  sobrejetora e seja  $U = [u_1, \dots, u_n]$ . Tomando  $v \in V$  arbitrário então, pela sobrejetividade, existe  $u \in U$  tal que  $T(u) = v$ , daí

$$v = T(u) = T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot T(u_i) \in [T(u_1), \dots, T(u_n)], \text{ onde } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}.$$

$\Leftarrow$ ) Agora, suponha que  $T$  leva conjunto de geradores em conjunto de geradores e, tomando  $v \in V$  arbitrário, onde  $U = [u_1, \dots, u_n]$ ,  $V = [T(u_1), \dots, T(u_n)]$ , segue daí

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot T(u_i) = T\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \cdot u_i\right) \in U, \text{ onde } \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}.$$

■

**Teorema 1 (Teorema do Núcleo e da Imagem)** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$ . Dada uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$ , então*

$$\dim U = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T).$$

**Demonstração:** Seja  $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$  uma base de  $\text{Nuc}(T)$ , ou seja,  $\dim \text{Nuc}(T) = r$ . Pelo lema 1, o núcleo de  $T$  é um subespaço de  $U$ . Pelo Teorema do completamento, a base  $\mathcal{B}'$  pode ser completada até obter-se uma base  $\mathcal{B}''$  para  $U$ . Seja ela  $\mathcal{B}'' = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$ . Deve-se mostrar que  $\mathcal{B} = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_s)\}$  é uma base para a imagem de  $T$ .

Dado  $v \in \text{Im}(T)$ , então existe  $u \in U$  tal que  $T(u) = v$ , mas o vetor  $u$  pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base  $\mathcal{B}''$  de  $U$ , ou seja

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_r \cdot u_r + \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_s \cdot v_s.$$

Como  $T$  é uma transformação linear e  $v = T(u)$ , tem-se

$$\begin{aligned} T(u) &= T(\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_r \cdot u_r + \beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_s \cdot v_s). \\ &= \alpha_1 \cdot T(u_1) + \dots + \alpha_r \cdot T(u_r) + \beta_1 \cdot T(v_1) + \dots + \beta_s \cdot T(v_s). \\ &= \beta_1 \cdot T(v_1) + \dots + \beta_s \cdot T(v_s). \end{aligned}$$

Assim, dado um  $v \in \text{Im}(T)$ , mostrou-se que ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto  $\mathcal{B}$ , logo,  $\text{Im}(T) = [T(v_1), \dots, T(v_s)]$ . Portanto a imagem de  $T$  é gerada pelo conjunto  $\mathcal{B}$ . Também,  $\mathcal{B}$  é linearmente independente, pois

$$\beta_1 \cdot T(v_1) + \dots + \beta_s \cdot T(v_s) = 0 \Rightarrow T(\beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_s \cdot v_s) = 0.$$

Dessa forma,  $\beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_s \cdot v_s \in \text{Nuc}(T)$ . Logo esse elemento pode ser escrito como combinação linear dos elementos da base  $\mathcal{B}'$  do núcleo:

$$\beta_1 \cdot v_1 + \dots + \beta_s \cdot v_s = \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_r \cdot u_r \Rightarrow \alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_r \cdot u_r + (-\beta_1) \cdot v_1 + \dots + (-\beta_s) \cdot v_s = 0$$

Como  $\mathcal{B}'' = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$  é base de  $U$ , então é linearmente independente e todos os escalares da última igualdade são nulos. Em particular,  $\beta_1 = \dots = \beta_s = 0$ . Portanto  $\mathcal{B}$  é linearmente independente e gera a imagem de  $T$ , logo é uma base para  $\text{Im}(T)$ . Desta forma  $\dim \text{Im}(T) = s$ . Como  $\dim U = r + s$ , então:

$$\dim U = r + s = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T).$$

■

**Corolário 1** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  com mesma dimensão finita  $n$  e  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $T$  é sobrejetora

(ii)  $T$  é bijetora

(iii)  $T$  é injetora

(iv)  $T$  transforma uma base de  $U$  em uma base de  $V$ , isto é, se  $B$  é uma base de  $U$ , então  $T(B)$  é uma base de  $V$ .

**Demonstração:**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Por hipótese  $T$  é sobrejetora e  $\text{Im}(T) = V$ . Sendo  $\dim U = \dim V$ , pelo teorema do núcleo e imagem  $\dim U = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{Im}(T)$ , daí  $\dim \text{Nuc}(T) = 0$ . Logo,  $\text{Nuc}(T) = \{0\}$  e, pelo lema 3,  $T$  é injetora. Sendo assim,  $T$  é bijetora.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Se  $T$  é bijetora, então  $T$  é injetora.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Seja  $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $U$ , deve-se mostrar que  $B_2 = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  é uma base de  $V$ . Como  $U$  e  $V$  têm mesma dimensão e  $B_1$  e  $B_2$  têm o mesmo número de elementos, basta mostrar que  $B_2$  é linearmente independente. Suponha  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_1 \cdot T(u_1) + \dots + \alpha_n \cdot T(u_n) = 0$ . Pela linearidade de  $T$

$$T(\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n) = 0.$$

Sendo  $T$  injetora segue que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n = 0.$$

Como  $B_1$  é linearmente independente, conclui-se que  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , portanto  $B_2$  é linearmente independente.

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Seja  $v \in V$  e  $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$  uma base de  $U$ . Por hipótese,  $B_2 = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$  é uma base de  $V$ , logo  $v$  é escrito como

$$\alpha_1 \cdot T(u_1) + \dots + \alpha_n \cdot T(u_n) \text{ com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Pela linearidade de  $T$

$$T(\alpha_1 \cdot u_1 + \dots + \alpha_n \cdot u_n).$$

Estando em  $U$  a combinação linear  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ , então todo elemento de  $V$  é imagem, por  $T$ , de um elemento de  $U$ , isto é,  $T$  é sobrejetora. ■

**Definição 4** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Entende-se por **isomorfismo** de  $U$  em  $V$  uma transformação linear  $T : U \rightarrow V$  que seja bijetora. Um isomorfismo em um operador  $T : U \rightarrow U$  é um **automorfismo** de  $U$ .*

**Definição 5** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ . Um operador  $T : V \rightarrow V$  associa a cada vetor  $v \in V$  um vetor  $T(v) \in V$ . Se por meio de outro operador  $S$  for possível inverter essa correspondência, de tal modo que, a cada vetor transformado  $T(v)$  se associe o vetor de partida  $v$ , diz-se que  $S$  é o **operador inverso** de  $T$ , e se indica  $T^{-1}$ . Nesse caso, quando  $T$  admite a inversa  $T^{-1}$ , diz-se que  $T$  é **invertível**.*

**Proposição 1** *Se  $T$  é um isomorfismo de  $U$  em  $V$ , então  $T^{-1} : V \rightarrow U$  também é um isomorfismo, de  $V$  em  $U$  (**isomorfismo inverso**).*

**Lema 5** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Se  $\dim U = n$  e  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  é uma base de  $U$ , então, para toda sequência  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de vetores de  $V$ , a aplicação  $T : U \rightarrow V$  definida por  $T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$  é linear e  $T(u_i) = v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Ademais, se  $T_1 : U \rightarrow V$  é linear e  $T_1(u_i) = v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), então  $T_1 = T$ .*

**Teorema 2** *Dois espaços vetoriais  $U$  e  $V$  de dimensão finita são isomorfos se, e somente se,  $\dim U = \dim V$ .*

### Demonstração:

$\Rightarrow$ ) Seja  $T : U \rightarrow V$  um isomorfismo, então  $Nuc(T) = \{0\}$  e  $Im(T) = V$ . Pelo teorema do Núcleo e da Imagem,  $dimU = dimNuc(T) + dimIm(T)$ , logo  $dimU = dimV$ .

$\Leftarrow$ ) Sejam  $B_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$  base de  $U$  e  $B_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$  base de  $V$ . Considerando a transformação linear  $T : U \rightarrow V$  dada por  $T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$ . Supondo  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i = 0$ , como  $B_2$  é linearmente independente, então  $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$ , assim  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i = 0$ . Logo  $T$  é injetora e, pelo corolário 1,  $T$  é sobrejetora. Portanto  $T$  é isomorfismo.

## 2.2 Matriz de uma transformação linear

Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  de dimensões finitas  $n$  e  $m$ , respectivamente. Seja,  $T : U \rightarrow V$  uma transformação linear,  $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  uma base de  $U$  e  $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  uma base de  $V$ .

Então cada um dos vetores  $T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)$ , está em  $V$  e, conseqüentemente, é combinação linear da base  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{aligned} T(u_1) &= a_{11} \cdot v_1 + a_{21} \cdot v_2 + \dots + a_{m1} \cdot v_m \\ T(u_2) &= a_{12} \cdot v_1 + a_{22} \cdot v_2 + \dots + a_{m2} \cdot v_m \\ &\vdots \\ T(u_n) &= a_{1n} \cdot v_1 + a_{2n} \cdot v_2 + \dots + a_{mn} \cdot v_m \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$T(u_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot v_i, \text{ onde } j = 1, 2, \dots, n,$$

onde os escalares  $a_{ij}$  estão univocamente determinados.

**Definição 6** A matriz  $m \times n$

$$(T)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

que se obtém das considerações anteriores é chamada **matriz de  $T$**  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ . Denota-se essa matriz por  $(T)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ .



### Notações:

$(T)_{\mathcal{BC}}$ : matriz de  $T$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ .

$(T)_{\mathcal{B}}$ : a matriz de  $T$  em relação a base  $\mathcal{B}$  (quando  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ ).

**Lema 6** *Sejam  $U$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e  $I$  o operador idêntico de  $U$ . Dadas as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  de  $U$ , então  $(I)_{\mathcal{BC}}$  é a matriz mudança da base  $\mathcal{C}$  para a base  $\mathcal{B}$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$  e  $\mathcal{C} = \{v_1, \dots, v_n\}$  bases de  $U$ , então

$$\begin{aligned} I(u_1) &= u_1 = a_{11} \cdot v_1 + \dots + a_{n1} \cdot v_n \\ I(u_2) &= u_2 = a_{12} \cdot v_1 + \dots + a_{n2} \cdot v_n \\ &\vdots \\ I(u_n) &= u_n = a_{1n} \cdot v_1 + \dots + a_{nn} \cdot v_n \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$ , com  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, n$  são os elementos da matriz  $(I)_{\mathcal{BC}}$ . Portanto essa é a matriz mudança de base de  $\mathcal{C}$  para a base  $\mathcal{B}$ . ■

**Proposição 2** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  de dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente. Então, fixadas as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  de  $U$  e  $V$ , respectivamente, a aplicação  $\mathcal{T}: L(U, V) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{K})$  que cada  $T \in L(U, V)$  associa a matriz  $(T)_{\mathcal{BC}}$  em relação às bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  é bijetora.*

**Definição 7** *Um operador linear  $T: V \rightarrow V$  é **nilpotente** quando se tem  $T^n = 0$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .*

O índice de um operador nilpotente é o menor número  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $T^n = 0$ . Isto significa que  $T^{n-1} \neq 0$  e  $T^n = 0$ . Analogamente, uma matriz quadrada  $A$  chama-se nilpotente quando se tem  $A^n = 0$  para algum  $n$  natural. Se  $A^{n-1} \neq 0$  e  $A^n = 0$  diz-se que a matriz nilpotente  $A$  tem índice de nilpotência  $n$ .

**Lema 7** *Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{K}$  de dimensões  $n$  e  $m$ , respectivamente. Considere  $\mathcal{B}$  base de  $U$ ,  $\mathcal{C}$  base de  $V$  e  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dadas  $T_1$  e  $T_2 \in L(U, V)$ , tem-se as seguintes igualdades:*

(i) *A matriz da soma de duas transformações lineares é a soma das matrizes de cada uma, em relação ao mesmo par de bases, ou seja:*

$$(T_1 + T_2)_{\mathcal{BC}} = (T_1)_{\mathcal{BC}} + (T_2)_{\mathcal{BC}}.$$

(ii) A matriz do produto de uma transformação linear por um número real  $\lambda$  é igual a esse número multiplicado pela matriz da transformação linear dada, ou seja:

$$(\lambda \cdot T_1)_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \lambda \cdot (T_1)_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.$$

Logo, dados os espaços vetoriais  $U$  e  $V$  sobre  $\mathbb{K}$ , ambos de dimensão finita, e fixando uma base em  $U$  e uma base em  $V$ , a aplicação  $\mathcal{T}:L(U, V) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{K})$  é um isomorfismo do espaço vetorial  $L(U, V)$  no espaço vetorial  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ , desde que  $\dim U = n$  e  $\dim V = m$ . Desse modo, conclui-se que  $\dim L(U, V) = \dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$ .

## 2.3 Operadores Diagonalizáveis

**Definição 8** Dadas as matrizes  $A$  e  $B \in M_n(\mathbb{K})$ , diz-se que  $A$  é **semelhante** a  $B$  se, e somente se, existir uma matriz invertível  $M \in M_n(\mathbb{K})$ , tal que  $A = M^{-1} \cdot B \cdot M$ .

**Proposição 3** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão finita  $n$ . Dadas as bases  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$  de  $V$  e dado  $T(V, V)$ . Se  $M$  é a matriz de mudança da base  $\mathcal{B}$  para a base  $\mathcal{C}$ , então

$$(T)_{\mathcal{C}} = M^{-1} \cdot (T)_{\mathcal{B}} \cdot M.$$

**Definição 9** Chama-se **determinante** de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  o determinante da matriz de  $T$  em relação a uma base qualquer de  $V$ . Denota-se por  $\det(T)$ .

**Lema 8** Um operador linear  $T : V \rightarrow V$  é um isomorfismo se, e somente se  $\det(T) \neq 0$ .

A semelhança de matrizes está intimamente ligada à mudança de base e representação matricial de operadores lineares. Sendo assim, duas matrizes do mesmo operador são semelhantes. A recíproca desse fato também é válida, isto é, se  $A = M^{-1} \cdot B \cdot M$ , então  $A$  e  $B$  representam um mesmo operador linear em bases diferentes.

**Definição 10** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  e seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Um vetor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , é um **autovetor** de  $T$  se existir um escalar  $\lambda$  tal que  $T(v) = \lambda \cdot v$ . Neste caso  $\lambda$  é um **autovalor** de  $T$  associado a  $v$ .

**Lema 9** O escalar  $\lambda$  é univocamente determinado por  $T$ .

**Demonstração:** Seja  $v \neq 0$ , suponha que existam  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$ , tais que  $T(v) = \lambda \cdot v = \lambda' \cdot v$ , daí segue que

$$(\lambda - \lambda') \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda'.$$

■

**Definição 11** Dada uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{K})$  e um autovalor  $\lambda$ , uma matriz coluna não nula  $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$  é um **autovetor generalizado** de ordem  $k$  associado a  $\lambda$  quando  $(A - \lambda \cdot I)^k x = 0$  e  $(A - \lambda \cdot I)^{k-1} x \neq 0$ . Um autovetor genuíno é um autovetor generalizado de ordem 1.

**Definição 12** Seja  $v$  um autovetor generalizado de ordem  $k$  para o autovalor  $\lambda$  do operador  $T$ , então a sequência de vetores

$$\{v, (T - \lambda \cdot I)(v), \dots, (T - \lambda \cdot I)^{k-1}(v)\}$$

é uma **cadeia de autovetores generalizados ou (cadeia de Jordan)**, pertencente ao autovalor  $\lambda$ .

**Lema 10** Fixado  $\lambda$ , o conjunto  $V(\lambda) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda \cdot v\}$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Definição 13** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear, e  $\lambda$  um autovalor de  $T$ . O subespaço vetorial  $V(\lambda) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda \cdot v\} = \text{Nuc}(T - \lambda \cdot I)$  é chamado de **autoespaço (ou subespaço próprio)** do autovalor  $\lambda$ .

**Definição 14** Seja  $A \in M_n(\mathbb{K})$  uma matriz, chama-se **polinômio característico** de  $A$  o seguinte polinômio de grau  $n$ .

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \det(A - \lambda \cdot I_n).$$

**Lema 11** Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.

**Definição 15** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Chama-se **polinômio característico de  $T$**  o polinômio característico da matriz  $(T)$  em relação a qualquer base de  $V$ . Denota-se este polinômio por  $p_T(\lambda)$ .

**Lema 12** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$ . Então os autovalores de  $T$  são as raízes de  $p_T(\lambda)$  em  $\mathbb{K}$ .*

**Demonstração:** Sendo  $T(v) = \lambda \cdot v \Leftrightarrow (T - \lambda \cdot I)(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \text{Nuc}(T - \lambda \cdot I)$ .

Segue que  $\lambda$  é um autovalor de  $T$  se, e somente se,  $\text{Nuc}(T - \lambda \cdot I) \neq \{0\}$ . Isto equivale a  $(T - \lambda \cdot I)$  não ser invertível e, ainda, que  $\det(T - \lambda \cdot I) = 0$ . Mas, por definição,  $\det(T - \lambda \cdot I) = p_T(\lambda)$ .

■

**Definição 16** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , chama-se **autovetor (vetor próprio)** de  $A$  toda matriz  $X \neq 0$ , do tipo  $n \times 1$  tal que  $A \cdot X = \lambda \cdot X$ . O escalar  $\lambda$  é a raiz do polinômio característico de  $A$ .*

**Definição 17** *Entende-se por **multiplicidade algébrica** do autovalor  $\lambda$  o número de vezes que  $\lambda$  aparece como raiz do polinômio característico  $p(\lambda)$ . E a **multiplicidade geométrica** de  $\lambda$  como sendo a dimensão do autoespaço  $V(\lambda)$ . Denota-se a multiplicidade algébrica como  $m_a$  e a multiplicidade geométrica como  $m_g$ .*

**Lema 13** *Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Se  $\lambda_0$  é um autovalor de  $T$  então  $m_a \geq m_g$ .*

**Demonstração:**

Verificar a demonstração em [20].

**Definição 18** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$ . Um operador linear  $T : V \rightarrow V$  se diz **diagonalizável** se existe uma base de  $V$  formada por autovetores de  $T$ .*

Se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  for uma base formada de autovetores de  $T$  associados, respectivamente, aos autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ , então a matriz de  $T$  com relação a esta base é uma matriz diagonal.

$$(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Daí, segue que

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda).$$

Assim  $p_T(\lambda)$  se decompõe em fatores lineares. Os escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  não são necessariamente distintos dois a dois.

Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $(T)$  a matriz que representa esse operador. Considerando autovalores reais e complexos, o polinômio característico  $p_T(\lambda)$  se fatora como

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} ((\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2)^{p_1} \dots ((\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^{p_k}$$

onde  $\lambda_r \neq \lambda_s \in \mathbb{R}$  e  $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ , se  $r \neq s$  e  $\alpha_r + i\beta_r$  é uma raiz complexa de  $p_T(\lambda)$ .

**Teorema 3** *Seja  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , se  $v_1, \dots, v_n$  são autovetores da matriz  $A$  associados a autovalores distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  então  $\{v_1, \dots, v_n\}$  são vetores linearmente independentes.*

**Demonstração:** Suponha  $\{v_1, \dots, v_n\}$  linearmente dependente, então, sem perda de generalidade, existe um menor índice  $p$  tal que  $v_{p+1}$  é uma combinação linear dos vetores linearmente independentes que o precedem, e assim existem escalares  $a_1, \dots, a_p$ , tais que

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_p \cdot v_p = v_{p+1}. \quad (2.1)$$

Multiplicando os dois lados da equação (2.1) por  $A$  e usando o fato de que  $A \cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$ , para cada  $i$ , obtém-se

$$\begin{aligned} a_1 \cdot A \cdot v_1 + \dots + a_p \cdot A \cdot v_p &= A \cdot v_{p+1} \\ a_1 \cdot \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + a_p \cdot \lambda_p \cdot v_p &= \lambda_{p+1} \cdot v_{p+1}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Multiplicando os dois lados da equação (2.1) por  $\lambda_{p+1}$  e subtraindo o resultado da equação (2.2), tem-se

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) \cdot v_1 + \dots + a_p \cdot (\lambda_p - \lambda_{p+1}) \cdot v_p = 0$$

Como  $\{v_1, \dots, v_p\}$  é linearmente independente,  $a_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = \dots = a_p \cdot (\lambda_p - \lambda_{p+1}) = 0$ . Mas,  $(\lambda_i - \lambda_{p+1}) \neq 0$ , com  $i = 1, \dots, p$ , pois os autovalores são distintos. Logo,  $a_1 = \dots = a_p = 0$ . Porém, pela equação 2.1,  $v_{p+1} = 0$ , o que é impossível. Assim,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  não pode ser linearmente dependente, portanto, é linearmente independente. ■

**Corolário 2** *Se  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão  $n$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear que possui  $n$  autovalores distintos, então  $V$  possui uma base cujos vetores são todos autovetores de  $T$ .*

**Lema 14** *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita  $n$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Se*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

onde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  são dois a dois distintos, então  $T$  é diagonalizável.

**Definição 19** *Uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{K})$  é diagonalizável se existir uma matriz  $M$  de ordem  $n$  invertível tal que  $M^{-1} \cdot A \cdot M$  seja uma matriz diagonal.*

**Teorema 4** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$ . Um operador linear  $T : V \rightarrow V$  é diagonalizável se, e somente, as condições forem verificadas*

(i) *Para cada autovalor de  $T$  as suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.*

(ii) *a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores de  $T$  coincide com a dimensão de  $V$ .*

**Lema 15** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $p_T = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_n - \lambda)^{m_n}$ , onde  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , se  $i \neq j$ . Se  $m_j$  também é multiplicidade geométrica de  $\lambda_j$  então  $T$  é diagonalizável.*

**Definição 20** *Seja  $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$  um polinômio e  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Então  $p(A)$  é a matriz*

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I.$$

Quando  $p(A) = 0$ , diz-se que o polinômio anula a matriz  $A$ .

**Definição 21** *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . O **polinômio minimal** de  $A$  é um polinômio*

$$m_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_0$$

*tal que*

(i)  $m_A(A) = 0$ , isto é,  $m_A(\lambda)$  anula a matriz  $A$ .

(ii)  $m_A(\lambda)$  é o polinômio de menor grau entre aqueles que anulam  $A$ .

**Teorema 5 (Cayley-Hamilton)** *Seja  $M$  uma matriz de ordem  $n$  e seja  $p_A(\lambda)$  o polinômio característico de  $A$ . Então,  $p_A(A) = 0$ .*

**Demonstração:** Como  $p_A(\lambda)$  é um polinômio mônico de grau  $n$  em  $\lambda$ , pode-se escrever

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda + b_0, \quad (2.3)$$

onde  $b_0, \dots, b_{n-1}$  reais. Seja  $C(\lambda)$  a matriz adjunta da matriz  $(A - \lambda I_n)$ . Como  $C(\lambda)$  é, por definição, a transposta da matriz cujas entradas são os cofatores de  $\lambda \cdot I_n - A$ , logo são polinômios em  $\lambda$  de grau menor ou igual que  $n - 1$ . Assim, pode-se escrever

$$C(\lambda) = C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \cdot \lambda + C_0, \quad (2.4)$$

onde  $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$  são matrizes quadradas de ordem  $n$  que não dependem de  $\lambda$ . Como  $C(\lambda)$  é a matriz adjunta de  $(A - \lambda \cdot I_n)$ , tem-se

$$(A - \lambda \cdot I_n) \cdot C(\lambda) = p_A(\lambda) \cdot I_n.$$

Por (2.3) e (2.4)

$$(\lambda \cdot I_n - A)(C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \cdot \lambda + C_0) = (\lambda^n + b_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + b_1 \cdot \lambda + b_0) \cdot I_n. \quad (2.5)$$

Da igualdade (2.5), obtém-se

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{n-1} = I_n \\ C_{n-2} - A \cdot C_{n-1} = b_{n-1} \cdot I_n \\ \vdots \\ C_0 - A \cdot C_1 = b_1 \cdot I_n \\ -A \cdot C_0 = b_0 \cdot I_n \end{array} \right.$$

Multiplicando cada uma das equações acima por  $A^n, A^{n-1}, \dots, A, I_n$ , respectivamente, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A^n \cdot C_{n-1} & = & A^n \\ A^{n-1} \cdot C_{n-2} - A^n \cdot C_{n-1} & = & b_{n-1} \cdot A^{n-1} \\ & \vdots & \\ A \cdot C_0 - A^2 \cdot C_1 & = & b_1 \cdot A \\ -A \cdot C_0 & = & b_0 \cdot I_n \end{array} \right.$$

Somando membro a membro das equações acima, resulta

$$p_A(A) = A^n + b_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots + b_1 \cdot A + b_0 \cdot I_n = 0.$$

■

Uma aplicação imediata do Teorema de Cayley-Hamilton é para encontrar a potência de uma matriz.

**Exemplo 3** *Seja a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Calcule o valor de  $A^{100}$ .*

**Solução.** Calculando o polinômio característico  $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2)$ , tem-se

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1 + \lambda) = \lambda^2 + \lambda.$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton,

$$p_A(A) = A^2 + A = 0 \Leftrightarrow A^2 = -A$$

Então,

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (-A) \cdot (-A) = A^2 = -A$$

$$A^6 = A^4 \cdot A^2 = (-A) \cdot (-A) = A^2 = -A$$



Continuando esse processo pode-se concluir que  $A^{100} = -A$  e assim,

$$A^{100} = -A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 4** Seja  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  o operador linear representado pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encontre

- (I) Os autovalores e autovetores de  $A$ .
- (II) Encontre a multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de cada autovalor de  $A$ .
- (III) Verifique se  $A$  é diagonalizável. Em caso afirmativo, descreva a matriz diagonal semelhante a  $A$ .

**Solução:**

- (I) O polinômio característico de  $A$  é

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 - \lambda & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 - 18\lambda^2 + 81.$$

$$p_A(\lambda) = (-3 - \lambda)^2 \cdot (3 - \lambda)^2.$$

Daí, segue que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -3$ .

Para encontrar seus autovetores

- autovetor associado a  $\lambda_1 = -3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \\ -3w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4y - 2z - 2w = -3x \\ -4x - y - 2z - 2w = -3y \\ 2x + 2y + z + 4w = -3z \\ 2x + 2y + 4z + w = -3w \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear tem-se  $x = -y - w$  e  $z = w$ , daí

$$\begin{aligned} V(-3) &= \{(-y - w, y, w, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0, 0) + w(-1, 0, 1, 1) \mid y, w \in \mathbb{R}\} \\ &= [(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)] \end{aligned}$$

Como o conjunto  $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$  é linearmente independente, logo, é uma base de  $V(-3)$ .

- autovetor associado a  $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \\ 3w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 4y - 2z - 2w = 3x \\ -4x - y - 2z - 2w = 3y \\ 2x + 2y + z + 4w = 3z \\ 2x + 2y + 4z + w = 3w \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear tem-se  $x = -z - w$ ,  $y = -z - w$

$$\begin{aligned} V(3) &= \{(-z - w, -z - w, z, w) \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(-1, -1, 1, 0) + w(-1, -1, 0, 1) \mid z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= [(-1, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)] \end{aligned}$$

Como o conjunto  $\{(-1, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$  é linearmente independente, logo é uma base de  $V(3)$ .

- (II) As multiplicidades algébrica e geométrica de  $\lambda_1 = -3$  são, respectivamente 2 e 2. As multiplicidades algébrica e geométrica de  $\lambda_2$  são, respectivamente, 2 e 2. Então,

Resumo	$m_a$	$m_g$	Base $V(\lambda_i)$
$\lambda_1 = -3$	2	2	$\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$
$\lambda_2 = 3$	2	2	$\{(-1, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$

(III) Pelo teorema 4,  $T$  é diagonalizável, pois em ambos autovalores  $m_a = m_g = 2$ . Logo, a matriz diagonal  $D$  terá a seguinte forma

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A matriz  $M$  que realiza a diagonalização tem as colunas formadas pelas coordenadas dos autovetores de  $T$  então,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Portanto,  $D = M^{-1} \cdot A \cdot M$ .

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exemplo 5** Seja  $T : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$  o operador linear definido por

$$T(a + bx + cx^2) = a + (a + b)x + (b + 2c)x^2.$$

Encontre:

- (I) Os autovalores e autovetores de  $T$ .
- (II) Encontre a multiplicidade algébrica e multiplicidade geométrica de cada autovalor de  $T$ .
- (III) Verifique se  $T$  é diagonalizável.

**Solução:**

(I) Os autovalores de  $T$  são as raízes do polinômio característico de  $T$ . Considerando a base canônica  $\mathcal{C}=\{1, x, x^2\}$  de  $p_2(\mathbb{R})$ , a matriz de  $T$  nessa base é

$$(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E assim, calcula-se o polinômio característico

$$p_T(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda).$$

Logo,  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$  são os autovalores de  $T$ . Segue daí,

- autovetor associado a  $\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = a \\ a + b = b \\ b + 2c = c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se  $c = -b$  e  $a = 0$

$V(1) = \{bx - bx^2 \mid b \in \mathbb{R}\}$  é gerado por  $\{x - x^2\}$ . Logo, uma base para  $V(1)$  é  $\mathcal{B}=\{x - x^2\}$ .

- autovetor associado a  $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a \\ a + b = 2b \\ b + 2c = 2c \end{cases}$$

Resolvendo o sistema tem-se  $a = 0$ ,  $b = 0$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Segue que

$V(2) = \{cx^2 \mid c \in \mathbb{R}\}$  é gerado por  $\{x^2\}$ . Logo, uma base para  $V(2)$  é  $\mathcal{B}=\{x^2\}$ .

(II) As multiplicidades algébrica e geométrica de  $\lambda_1 = 1$  são respectivamente 2 e 1. E de  $\lambda_2 = 2$  são, respectivamente, 1 e 1. Daí,

Resumo	$m_a$	$m_g$	Base $V(\lambda_i)$
$\lambda_1 = 1$	2	1	$\{x - x^2\}$
$\lambda_2 = 2$	1	1	$\{x^2\}$

(III) Pelo item (i) do teorema 4, o operador linear  $T$  não é diagonalizável, pois em (I) a multiplicidade algébrica é maior que a multiplicidade geométrica.

Existem alguns operadores que não podem ser diagonalizados, dessa forma se faz necessário uma técnica para tentar “diagonalizar em blocos” esses operadores.

# Capítulo 3

## Introdução às Formas Canônicas de Jordan

Neste capítulo serão apresentados importantes resultados acerca das formas canônicas de Jordan, um algoritmo para encontrá-la e uma coleção de exemplos. Os conteúdos presentes neste capítulo foram baseados em [1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 15, 23].

### 3.1 Motivação

Considere o operador linear  $T : V \rightarrow V$ , onde  $V$  é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensão 2, cuja matriz em relação a base canônica  $\mathcal{C}$  é

$$(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a qual não é diagonalizável, pois  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ , que não possui raízes reais. Assim este operador não possui autovalores e, conseqüentemente, não possui autovetores. Entretanto se o espaço vetorial  $V$  for complexo e considerar-se a mesma matriz, o polinômio característico passará a ter duas raízes distintas,  $i$  e  $-i$ , logo a matriz diagonal  $D$  semelhante a  $(T)_{\mathcal{C}}$  é

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Mesmo considerando o espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{C}$ , nem todo operador é diagonalizável. Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão 4 e  $T : V \rightarrow V$

$$(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sendo  $\mathcal{C}$  a base canônica de  $V$ . Então  $p_T(\lambda) = (i - \lambda)(-i - \lambda)(1 - \lambda)^2$  e seus autovalores são  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  e  $\lambda_3 = 1$  (com  $m_a = 2$ ). Não é possível, encontrar dois autovetores linearmente independentes para  $\lambda_3 = 1$ , e assim  $T$  não é diagonalizável. No entanto, sendo  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear não diagonalizável, sempre existe uma base  $\mathcal{B}$  de  $V$ , tal que  $(T)_{\mathcal{B}}$  esteja na **forma canônica de Jordan**.

## 3.2 Conceitos básicos

Uma matriz de ordem  $n$  que esteja na forma canônica de Jordan é formada por blocos de matrizes de ordem  $\leq n$ . Se faz necessário, então, definir esses blocos.

**Definição 22** *Uma matriz quadrada de ordem  $r$  da forma*

$$J(\lambda; r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

*é denominada **bloco de Jordan** de ordem  $r$  associado a  $\lambda$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .*

Note que cada bloco de Jordan é escrito como a soma de uma matriz diagonal e uma matriz nilpotente:

$$J(\lambda; r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + N.$$

A matriz diagonal se escreve como  $\lambda I$ , onde  $I$  é a matriz identidade de ordem  $r$  e

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{r \times r} .$$

Se  $\alpha + \beta i$  é uma raiz complexa de  $p_T(\lambda)$  e  $r$  é um número par, define-se

$$R(\alpha, \beta; r) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha \end{pmatrix} .$$

**Definição 23** *Sejam  $B_1, \dots, B_k$  matrizes quadradas, não necessariamente de ordens iguais. Defina-se  $\text{diag}(B_1, \dots, B_k)$  como sendo a matriz quadrada de ordem igual à soma das ordens de  $B_1, \dots, B_k$  dada por*

$$\text{diag}(B_1, \dots, B_k) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix} .$$

Para construir uma matriz que esteja na forma canônica de Jordan, escolhe-se, convenientemente,  $B_1, \dots, B_k$  que sejam blocos de Jordan.

**Exemplo 6** *Sejam  $B_1, B_2, B_3$  tais que*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$



Então, a matriz que tem  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  em sua diagonal será da forma

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & & & & & & \\ \hline & & & & -1 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & -1 & 1 & & & \\ & & & & 0 & 0 & -1 & & & \\ \hline & & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

E assim a matriz  $\text{diag}(B_1, B_2, B_3)$  está na forma canônica de Jordan.

**Teorema 6 (Forma Canônica de Jordan)** *Sejam  $T : X \rightarrow X$  um operador linear e  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$ , então existe uma base de  $V$  na qual  $T$  é representada por uma matriz na forma canônica de Jordan. Essa representação é única, a menos de ordenamento dos blocos de Jordan.*

**Demonstração:** Encontra-se no apêndice deste trabalho.

**Teorema 7** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$ . Para todo operador linear  $T : V \rightarrow V$ , existe uma única decomposição  $T = N + D$ , onde  $N : V \rightarrow V$  nilpotente,  $D : V \rightarrow V$  diagonalizável e  $N \cdot D = D \cdot N$ .*

**Demonstração:**

Verificar demonstração em [14].

**Lema 16** *Toda matriz quadrada  $A$  é semelhante a alguma matriz  $J$  na forma canônica de Jordan.*

**Lema 17** *Duas matrizes quadradas de mesma ordem  $A$  e  $B$  são semelhantes se, e somente se, possuem a mesma forma canônica de Jordan.*

**Demonstração:**

$\Rightarrow$ ) Por hipótese,  $A$  e  $B$  são semelhantes, logo

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P. \tag{3.1}$$

Se  $J$  a forma canônica de Jordan associada a  $B$ , então

$$B = M \cdot J \cdot M^{-1}. \quad (3.2)$$

Igualando as equações (3.1) e (3.2) tem-se

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = M \cdot J \cdot M^{-1}.$$

Multiplicando  $M^{-1}$  a esquerda em ambos os lados

$$(M^{-1} \cdot P^{-1}) \cdot A \cdot P = J \cdot M^{-1}.$$

Multiplicando, agora,  $M$  a direita obtém-se

$$(M^{-1} \cdot P^{-1}) \cdot A \cdot (P \cdot M) = J.$$

Como  $M^{-1} \cdot P^{-1} = (P \cdot M)^{-1}$ , logo

$$J = (P \cdot M)^{-1} \cdot A \cdot (P \cdot M) \text{ e,}$$

portanto,  $J$  também é a forma canônica de Jordan associada a  $A$ .

$\Leftarrow$ ) Se  $A$  e  $B$  têm a mesma forma canônica de Jordan então

$$A = M \cdot J \cdot M^{-1} \quad (3.3)$$

e

$$J = P^{-1} \cdot B \cdot P. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3)

$$A = (M \cdot P^{-1}) \cdot B \cdot (P \cdot M^{-1}). \quad (3.5)$$

Sendo  $M = (M^{-1})^{-1}$  e substituindo em (3.5)

$$\begin{aligned} A &= ((M^{-1})^{-1} \cdot P^{-1}) \cdot B \cdot (P \cdot M^{-1}) \\ &= ((P \cdot M^{-1})^{-1}) \cdot B \cdot (P \cdot M^{-1}), \end{aligned}$$

portanto  $A$  e  $B$  são semelhantes. ■

**Lema 18** *Seja  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Se  $\lambda$  é um autovalor de  $T$  então a soma das ordens dos blocos  $J(\lambda; s)$  é igual à multiplicidade algébrica de  $\lambda$ .*

**Lema 19** *Se  $\alpha + \beta i$  é uma raiz complexa de  $p_T(\lambda)$ , então a soma das ordens dos blocos  $R_s(\alpha, \beta)$  é igual ao dobro da multiplicidade da raiz  $\alpha + \beta i$ .*

### 3.3 Método para encontrar a forma canônica de Jordan

Entende-se por algoritmo, do ponto de vista matemático, uma sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas. Esta seção tem por objetivo apresentar um algoritmo para encontrar a forma canônica de Jordan, desde que se tenha os polinômios característico e minimal da matriz do operador. É importante lembrar que os coeficientes desses polinômios são reais.

Para auxiliar os cálculos necessários nos exemplos foram utilizados os softwares *MatrixCalc* e *Symbolab*. Primeiramente será considerado o espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$ , posteriormente serão mostradas as adaptações para o espaço vetorial  $V$  sobre  $\mathbb{C}$ .

**Caso 1** Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $A$  a matriz de  $T$ .

**1º passo:** Calcula-se a forma fatorada do polinômio característico de  $A$

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \dots (\lambda_n - \lambda)^{m_n},$$

onde os  $\lambda_i$  são os autovalores distintos de  $A$  e os  $m_i$  são suas respectivas multiplicidades, e seu polinômio minimal

$$m_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_1} \dots (\lambda_n - \lambda)^{p_n}.$$

Para todo  $i = 1, \dots, n$ , deve-se ter  $1 \leq p_i \leq m_i$ .

**2º passo:** Para cada  $i = 1, \dots, n$  e para cada  $k = 1, \dots, p_i$ , calcula-se a nulidade da matriz  $(A - \lambda \cdot I)^k$ . Denota-se cada uma dessas nulidades por  $t_{i,k}$ . A nulidade de uma matriz é a quantidade total de linhas nulas que aparecem após o escalonamento da matriz.

**3º passo:** Denotando por  $n(J_{i,k})$  a quantidade de blocos de Jordan de ordem  $k$  associados ao autovalor  $\lambda_i$ , isto é, a quantidade de blocos da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}_{k \times k}$$

tem-se que

$$n(J_{i,p_i}) = t_{i,p_i} - t_{i,p_i-1}$$

e que

$$n(J_{i,k}) = 2t_{i,k} - t_{i,k+1} - t_{i,k-1}, \forall k \in \{1, \dots, p_i-1\} \text{ e } t_{i,0} = 0, \forall i.$$

**4º passo:** A forma canônica de Jordan de  $A$  é dada pela matriz diagonal de blocos formada por  $n(J_{i,k})$  blocos de Jordan de ordem  $k$  associados ao autovalor  $\lambda_i$ , para todo  $k = 1, \dots, p_i$  e para todo  $i = 1, \dots, n$ .

**5º passo:** Já encontrada a matriz de Jordan, o próximo passo é encontrar a base associada à forma canônica de Jordan. Para isso,

(a) Uma vez calculado o polinômio minimal de  $A$

$$m_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{p_1} \dots (\lambda_n - \lambda)^{p_n},$$

para cada  $i = 1, \dots, n$  e cada  $k = 1, \dots, p_i$ , calcula-se os vetores  $v$  que são soluções do sistema linear  $(A - \lambda_i \cdot I)^k(v) = 0$  e que satisfaçam à condição  $(A - \lambda_i \cdot I)^{k-1}(v) \neq 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade de mesma ordem que  $A$ .

(b) Para cada  $v$  obtido no item (a), os  $k$  vetores,

$$v, (A - \lambda \cdot I)(v), \dots, (A - \lambda \cdot I)^{k-2}(v), (A - \lambda \cdot I)^{k-1}(v)$$

são parte da base procurada, desde que eles, juntamente com os outros vetores já encontrados formem um conjunto de vetores linearmente independentes.

(c) Para cada  $k$  e cada  $i$  com  $n(J_{i,k}) > 0$ , procuram-se  $k$  vetores como no item (b). Os conjuntos linearmente independentes assim encontrados são bases associadas à forma canônica de Jordan de  $A$ .

(d) Sendo  $M$  a matriz cujas colunas são os vetores formados pela base encontrada no item (c), tem-se que

$$J = M^{-1} \cdot A \cdot M.$$

**Exemplo 7** Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Seguindo os passos do algoritmo, encontre a forma de Jordan associada a  $A$  e a matriz  $M$  de autovetores. Mostre que  $M \cdot J \cdot M^{-1} = A$ .

**Solução:**

**1º passo:** Encontrar os polinômios característico e minimal de  $A$ . Esses polinômios são dados, respectivamente por

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = \lambda^4 - 7\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda - 54 = (3 - \lambda)^3 \cdot (-2 - \lambda)$$

e

$$m_A(\lambda) = (3 - \lambda)^2 \cdot (-2 - \lambda).$$

**2º passo:** Daí, tem-se que  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -2$ . Ainda,  $p_1 = 2$  e  $p_2 = 1$ . Para cada  $\lambda$  e cada  $p$ , calcula-se as nulidades. Assim, para  $\lambda_1 = 3$

$$t_{1,0} = 0$$

$$t_{1,1} = \text{Nulidade}(A - 3 \cdot I) = 2$$

$$t_{1,2} = \text{Nulidade}(A - 3 \cdot I)^2 = 3.$$

Para  $\lambda_2 = -2$

$$t_{2,0} = 0$$

$$t_{2,1} = \text{Nulidade}(A + 2I) = 1.$$

**3º passo:** Calcula-se os  $n(J_{i,k})$  para cada  $\lambda$ .

Para  $\lambda_1 = 3$

$$n(J_{1,2}) = t_{1,2} - t_{1,1} = 3 - 2 = 1$$

$$n(J_{1,1}) = 2 \cdot t_{1,1} - t_{1,2} - t_{1,0} = 2 \cdot 2 - 3 - 0 = 1.$$

Portanto, será 1 bloco de ordem 2 e 1 bloco de ordem 1.

Para  $\lambda_2 = -2$

$$n(J_{2,1}) = m_{2,1} - m_{2,0} = 1 - 0 = 1.$$

Portanto será 1 bloco de ordem 1.

**4º passo:** Logo, a matriz de Jordan  $J$  associada a  $A$  é formada por 1 bloco de ordem 2 e 1 bloco de ordem 1 referentes ao autovalor  $\lambda_1 = 3$ , 1 bloco de ordem 1 referente ao autovalor  $\lambda_2 = -2$ .

$$J = \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

**5º passo:**

- (a) Para cada autovalor calcula-se os vetores  $v$  tal que  $(A - \lambda_i \cdot I)^k(v) = 0$ , mas  $(A - \lambda_i \cdot I)^{k-1}(v) \neq 0$ .

Para  $\lambda_1 = 3$ , deve-se ter vetores  $v$  tal que  $(A - 3 \cdot I)^2(v) = 0$ , mas  $(A - 3 \cdot I)(v) \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear, e obedecendo a condição, obtém-se os seguintes vetores possíveis

$$v_1 = (0, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = (0, 0, 0, 1)$$

$$v_3 = (1, 0, 1, 0)$$

Procura-se agora um vetor  $u$  tal que  $(A - 3 \cdot I)(u) = 0$ , mas  $u \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear e obedecendo a restrição, obtém-se os seguintes vetores possíveis

$$u_1 = (1, -2, 1, 0)$$

$$u_2 = (0, -1, 0, -1)$$

Para  $\lambda_2 = -2$ , deve-se ter vetores  $w$  tal que  $(A + 2 \cdot I)(w) = 0$ , mas  $w \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear e obedecendo à condição tem-se  $w = (0, 0, -1, 1)$ .

- (b) Escolhendo  $v_1$ , então  $(A - 3 \cdot I)(v_1) = (1, -1, 1, -1)$  também faz parte da base procurada. Além deles, os vetores  $u_1 = (1, -2, 1, 0)$  (ou  $u_2 = (0, -1, 0, -1)$ ) e  $w = (0, 0, -1, 1)$ .

- (c) Um conjunto linearmente independente de vetores dados em (b) é  $\{(1, -1, 1, -1), (0, 1, 0, 0), (1, -2, 1, 0), (0, 0, -1, 1)\}$  que formam uma base associada à forma canônica de Jordan de  $A$ .

(d) Sendo  $M$  a matriz cujas colunas são os vetores dessa base, então

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $A$  se escreve como

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 8** *Seja a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

*Encontre a forma canônica de Jordan de  $A$  e os vetores da base associada.*

**Solução:**

**1º passo:** O polinômio característico de  $A$  é

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^5.$$

O polinômio minimal de  $A$  é

$$m_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3.$$

**2º passo:** Tem-se que  $\lambda_1 = 2$  e  $p_1 = 3$ . Para cada  $k = 1, 2, 3$ , calcula-se as nulidades de  $(A - 2 \cdot I)^k$  descritas a seguir:

$$\begin{aligned} t_{1,0} &= 0 \\ t_{1,1} &= \text{Nulidade}(A - 2I) = 2 \\ t_{1,2} &= \text{Nulidade}(A - 2I)^2 = 4 \\ t_{1,3} &= \text{Nulidade}(A - 2I)^3 = 5 \end{aligned}$$

**3º passo:** Daí, pode-se calcular os  $n(J_{i,k})$ :

$$\begin{aligned} n(J_{1,1}) &= 2t_{1,1} - t_{1,2} - t_{1,0} = 4 - 4 - 0 = 0 \\ n(J_{1,2}) &= 2t_{1,2} - t_{1,3} - t_{1,1} = 8 - 5 - 2 = 1 \\ n(J_{1,3}) &= t_{1,3} - t_{1,2} = 5 - 4 = 1 \end{aligned}$$

Portanto existem 0 blocos de ordem 1, 1 bloco de ordem 2 e 1 bloco de ordem 3.

**4º passo:** Logo, a forma canônica de Jordan de  $A$  é formada por 1 bloco de ordem 3 e 1 bloco de ordem 2 associados ao autovalor  $\lambda_1 = 2$ , ou seja,

$$J = \left( \begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

**5º passo:**

(a) Precisa-se determinar os vetores que satisfaçam a equação

$(A - 2 \cdot I)^3(u) = 0$ , mas que  $(A - 2 \cdot I)^2(u) \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear assim obtido e obedecendo a restrição, tem-se as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, 0, 0) \\ u_2 &= (0, 0, 1, 0, 0) \\ u_3 &= (0, 0, 0, 1, 0). \end{aligned}$$

Pode-se tomar, também, uma combinação linear destes vetores. Assim, seja  $u = u_1 + u_2$ , então pode-se utilizar o vetor  $u$ .



Procurando, agora, vetores  $v$  tais que  $(A - 2 \cdot I)^2(v) = 0$ , mas que  $(A - 2 \cdot I)(v) \neq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned}v_1 &= (0, 1, 0, 0, 0) \\v_2 &= (0, 0, 0, 0, 1) \\v_3 &= (-1, 0, 1, 0, 0) \\v_4 &= (1, 0, 0, 1, 0).\end{aligned}$$

Por fim, procura-se vetores  $w$  tais que  $(A - 2 \cdot I)(w) = 0$ , mas  $w \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear, respeitando-se a restrição, obtém-se

$$\begin{aligned}w_1 &= (0, -1, 1, 1, 0) \\w_2 &= (0, 1, 0, 0, 1).\end{aligned}$$

(b) Escolhendo o vetores  $u$ ,  $v_4$  e  $w_1$ , tem-se as respectivas cadeias de autovetores generalizados

$$\begin{aligned}\{(A - 2 \cdot I)^2(u), (A - 2 \cdot I)(u), u\} &= \{(0, 0, -2, -2, -2), (-2, -7, -4, -6, -15), (1, 0, 1, 0, 0)\} \\ \{(A - 2 \cdot I)(v_4), v_4\} &= \{(0, -2, -1, -1, -3), (1, 0, 0, 1, 0)\} \\ \{w_1\} &= \{(0, -1, 1, 1, 0)\}.\end{aligned}$$

(c) Escolhendo-se os vetores das cadeias de  $u$  e  $v_4$ , forma-se o conjunto linearmente independente  $\{(0, 0, -2, -2, -2), (-2, -7, -4, -6, -15), (1, 0, 1, 0, 0), (0, -2, -1, -1, -3), (1, 0, 0, 1, 0)\}$  que formam uma base de  $V$ .

(d) Seja  $M$  a matriz cujas colunas são os vetores da base encontrada:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -15 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto  $J = M^{-1} \cdot A \cdot M$ , ou equivalentemente,  $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$ .

**Exemplo 9** Encontre a forma de Jordan  $J$  de

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 2 & -12 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & -1 & 0 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Verifique se a matriz  $M$  é uma matriz de autovetores de  $J$ , onde

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Solução:** Para encontrar a forma de Jordan de  $A$  precisa-se, primeiramente, encontrar seus polinômios característico e mínimo que são dados, respectivamente por

$$p_A(\lambda) = (2 - \lambda)^4 \cdot (-1 - \lambda)^2$$

e

$$m_A(\lambda) = (2 - \lambda)^3 \cdot (-1 - \lambda).$$

Calcula-se, agora as nulidades para cada autovetor. Assim

Para  $\lambda_1 = 2$

$$t_{1,0} = 0$$

$$t_{1,1} = \text{Nulidade}(A - 2 \cdot I) = 2$$

$$t_{1,2} = \text{Nulidade}(A - 2 \cdot I)^2 = 3$$

$$t_{1,3} = \text{Nulidade}(A - 2 \cdot I)^3 = 4.$$

Para  $\lambda_2 = -1$

$$t_{2,0} = 0$$

$$t_{2,1} = \text{Nulidade}(A + I) = 2.$$

Com isso, pode-se calcular os  $n(J_{i,k})$  para cada autovalor.

Para  $\lambda_1 = 2$

$$\begin{aligned} n(J_{1,3}) &= t_{1,3} - t_{1,2} = 4 - 3 = 1 \\ n(J_{1,2}) &= 2 \cdot t_{1,2} - t_{1,3} - t_{1,1} = 2 \cdot 3 - 4 - 2 = 0 \\ n(J_{1,1}) &= 2 \cdot t_{1,1} - t_{1,2} - t_{1,0} = 2 \cdot 2 - 3 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, há 1 bloco de ordem 1 e 1 bloco de ordem 3.

Para  $\lambda_2 = -1$

$$n(J_{2,1}) = t_{2,1} - t_{2,0} = 2 - 0 = 2.$$

Portanto há 2 blocos de ordem 1.

Logo,

$$J = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

A matriz  $M$  possui inversa que é dada por

$$M^{-1} = \left( \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Fazendo  $M \cdot J \cdot M^{-1}$ , tem-se

$$\left( \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = A$$

Logo,  $M$  é uma matriz que representa os autovetores de  $J$ .

**Exemplo 10** Encontre a forma de Jordan  $J$  da matriz  $A$ , e uma matriz  $M$  tal que  $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$ .

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & -3 & 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & 7 & 3 & -1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ -8 & -14 & -5 & 1 & -6 & 0 & 1 & -4 \\ 4 & 7 & 4 & -3 & 3 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 5 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ 6 & 7 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Solução:** Seguindo o algoritmo, para encontrar a matriz  $J$  precisa-se, primeiramente, encontrar o polinômio característico e o polinômio mínimo de  $A$ , logo

$$p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)^3 \cdot (\lambda)^3 \cdot (1 - \lambda)^2$$

e

$$m_A(\lambda) = (-1 - \lambda)^2 \cdot (\lambda)^3 \cdot (1 - \lambda).$$

Como há 3 autovalores distintos, serão calculadas as nulidades  $(A - \lambda \cdot I)^k$  para cada um deles, logo

Para  $\lambda_1 = -1$ , tem-se

$$t_{1,0} = 0$$

$$t_{1,1} = \text{Nulidade}(A + I) = 2$$

$$t_{1,2} = \text{Nulidade}(A + I)^2 = 3.$$

Para  $\lambda_2 = 0$ , tem-se

$$t_{2,0} = 0$$

$$t_{2,1} = \text{Nulidade}(A) = 1$$

$$t_{2,2} = \text{Nulidade}(A)^2 = 2$$

$$t_{2,3} = \text{Nulidade}(A)^3 = 3.$$

Para  $\lambda_3 = 1$ , tem-se

$$t_{3,0} = 0$$

$$t_{3,1} = \text{Nulidade}(A - I) = 2.$$

O próximo passo é calcular os  $n(J_{i,k})$  para cada um dos autovalores. Assim:

Para  $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} n(J_{1,2}) &= t_{1,2} - t_{1,1} = 3 - 2 = 1 \\ n(J_{1,1}) &= 2 \cdot t_{1,1} - t_{1,2} - t_{1,0} = 2 \cdot 2 - 3 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, serão 1 bloco de ordem 2 e 1 bloco de ordem 1.

Para  $\lambda_2 = 0$

$$\begin{aligned} n(J_{2,3}) &= t_{2,3} - t_{2,2} = 3 - 2 = 1 \\ n(J_{2,2}) &= 2 \cdot t_{2,2} - t_{2,3} - t_{2,1} = 2 \cdot 2 - 3 - 1 = 0 \\ n(J_{2,1}) &= 2 \cdot t_{2,1} - t_{2,2} - t_{2,0} = 2 \cdot 1 - 2 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, será 1 bloco de ordem 3.

Para  $\lambda_3 = 1$

$$n(J_{3,1}) = t_{3,1} - t_{3,0} = 2 - 0 = 2.$$

Portanto serão 2 blocos de ordem 1.

Desse modo, a matriz  $J$  será

$$J = \left( \begin{array}{cc|ccc|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Agora, para encontrar a matriz  $M$  procurada, é necessário encontrar uma base de autovetores (genuínos e generalizados) de  $A$ . Para isso, precisa-se encontrar uma cadeia de autovetores para cada autovalor. Assim

Para  $\lambda_1 = -1$ , determina-se os vetores  $v$  que satisfaçam a equação  $(A + I)^2(v) = 0$  mas  $(A + I)(v) \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear  $(A + I)^2(v) = 0$  chega-se as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned}v_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\v_2 &= (0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0) \\v_3 &= (-1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

mas,

$$\begin{aligned}(A + I)(v_1) &= 0 \\(A + I)(v_2) &= 0 \\(A + I)(v_3) &\neq 0\end{aligned}$$

Logo, um dos vetores procurados é  $v_3 = (-1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1)$ , também  $(A + I)(v_3) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0)$ .

Agora, procura-se os vetores  $u$  que satisfaçam a equação  $(A + I)(u) = 0$ , mas  $u \neq 0$ . Daí, segue as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned}u_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \\u_2 &= (0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0)\end{aligned}$$

como  $u_2$  e  $(A + I)(v_3) = (0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0)$  são linearmente dependentes então, uma cadeia de vetores linearmente independentes para  $\lambda_1 = -1$  é

$$\{v_3, (A + I)(v_3), u_1\} = \{(-1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)\}$$

Para  $\lambda_2 = 0$ , determina-se os vetores  $v$  que satisfaçam a equação  $A^3(v) = 0$ , mas  $A^2(v) \neq 0$ . Resolvendo o sistema linear  $A^3(v) = 0$  chega-se as seguintes possibilidades

$$\begin{aligned}v_1 &= (-1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0) \\v_2 &= (0, -1, 2, 0, 1, -1, 1, 0) \\v_3 &= (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0)\end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned}(A + I)(v_1) &\neq 0 \\(A + I)(v_2) &\neq 0 \\(A + I)(v_3) &\neq 0\end{aligned}$$

Escolhendo  $v_1$ , uma cadeia de autovetores para  $\lambda_2 = 0$  é dada por

$$\{A^2(v_1), A(v_1), v_1\} = \{(1, 0, -1, -1, 0, -1, 0, -1), (-1, 1, 0, 1, -1, 1, -1, 0), (-1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)\}$$

Para  $\lambda_3 = 1$ , define-se os vetores  $v$  tal que  $(A - I)(v) = 0$  e  $v \neq 0$ . Uma vez que a multiplicidade algébrica de  $\lambda_3$  é igual a sua multiplicidade geométrica, tem-se um conjunto de autovetores genuínos. Resolvendo o sistema  $(A - I)(v) = 0$ , tem-se

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \left( \frac{1}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{5}{11}, -\frac{7}{11}, 1, 0 \right), \left( -\frac{3}{11}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{11}, \frac{1}{11}, -\frac{4}{11}, \frac{10}{11}, 0, 1 \right) \right\}.$$

Portanto,  $M$  é dada por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -\frac{4}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{7}{11} & \frac{10}{11} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Caso 2** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ ,  $T : V \rightarrow V$  um operador linear e  $A$  a matriz de  $T$ .

Se  $A$  for uma matriz formada por elementos reais e se  $\alpha + \beta i$  for um autovalor de  $A$ , então  $\alpha - \beta i$  também será um autovalor. Uma consequência disto é que pode-se associar aos blocos de Jordan

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

onde

$$J_1 = \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha + \beta i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha + \beta i \end{pmatrix}_{k \times k}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} \alpha - \beta i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha - \beta i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha - \beta i \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

E, a matriz dos blocos reais

$$R = \begin{pmatrix} J & I & O & \dots & O \\ O & J & I & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \dots & I \\ O & O & O & \dots & J \end{pmatrix}_{k \times k}$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como cada bloco que forma a matriz  $R$  é de ordem 2, tem-se que  $R$  é uma matriz de elementos reais de ordem  $2k$ .

A base associada à forma canônica de Jordan real da matriz  $A$  pode ser construída a partir da base da forma de Jordan complexa. Para isso, escolhe-se, convenientemente, vetores  $v$  associados a  $\alpha + \beta i$  e  $u$  associados a  $\alpha - \beta i$  e substituí-los por  $\frac{v+u}{2}$  e  $\frac{v-u}{2i}$ .

**Exemplo 11** Considere uma matriz real  $A$  cujo polinômio característico é

$$p_A(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (i - \lambda)^2 \cdot (-i - \lambda)^2$$

e o polinômio minimal é dado por

$$m_A(\lambda) = (i - \lambda)^2 \cdot (-i - \lambda)^2.$$



A forma canônica de Jordan representada pela matriz complexa é

$$C = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}_{4 \times 4}$$

e a forma canônica de Jordan representada pela matriz real é

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  for a base associada a  $C$ , então a base associada a  $R$  será

$$\left\{ \frac{(v_1 + v_3)}{2}, \frac{(v_1 - v_3)}{2i}, \frac{(v_2 + v_4)}{2}, \frac{(v_2 - v_4)}{2i} \right\}.$$

Observa-se que é possível encontrar a forma canônica de Jordan tanto para matrizes reais quanto para matrizes complexas. Além disso, quando  $V$  está sobre o corpo dos complexos, pode-se associar a uma matriz real ou complexa e encontrar autovetores tanto em  $\mathbb{R}$  como em  $\mathbb{C}$ , dependendo sempre da representação escolhida.

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo serão apresentadas algumas aplicações da forma canônica de Jordan na resolução de problemas matemáticos. Para cada aplicação será resolvido um exemplo contemplando os seguintes casos: primeiro em matrizes diagonalizáveis, em seguida em matrizes na forma canônica de Jordan e por fim, matrizes semelhantes a forma canônica de Jordan. Foram consultados os trabalhos [10, 18, 21].

### 4.1 Potências de uma matriz

O cálculo de potências de matrizes é bastante trabalhoso pois é necessário calcular  $n - 1$  produtos de matrizes para se encontrar o resultado de  $A^n$ , para  $n \in \mathbb{N}$ . Entretanto sendo  $A$  é semelhante a uma matriz na forma canônica de Jordan, diagonalizável ou não, o cálculo de  $A^n$  torna-se bastante simplificado.

**Caso 1** Se  $A$  é uma matriz diagonalizável, então existe  $M$  matriz invertível  $M$  tal que  $D = M^{-1} \cdot A \cdot M$ , onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $A^n = M \cdot D^n \cdot M^{-1}$ , onde  $M$  é a matriz dos autovetores de  $A$

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 12** *Seja a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calcule  $A^n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solução:** Calculando o polinômio característico de  $A$ , tem-se

$$p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1-\lambda & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + \lambda^3 - 7\lambda^2 - \lambda + 6 = (2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda)(-3-\lambda).$$

Segue que os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = -1$  e  $\lambda_4 = -3$ , Logo

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Para  $\lambda_1 = 2$ , tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \\ 2w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 5z + 9w & = 2x \\ 2x + y + 6z + 8w & = 2y \\ 3w & = 2z \\ z - 2w & = 2w \end{cases}$$

Uma base de  $V(2)$  é  $\{(1, 2, 0, 0)\}$ .

Para  $\lambda_2 = 1$ , tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 5z + 9w & = x \\ 2x + y + 6z + 8w & = y \\ 3w & = z \\ z - 2w & = w \end{cases}$$

Uma base de  $V(1)$  é  $\{(-13, -37, 3, 1)\}$ .

Para  $\lambda_3 = -1$ , tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ -w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 5z + 9w & = -x \\ 2x + y + 6z + 8w & = -y \\ 3w & = -z \\ z - 2w & = -w \end{cases}$$

Uma base de  $V(-1)$  é  $\{(1, -1, 0, 0)\}$ .

Para  $\lambda_4 = -3$ , tem-se

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \\ -3w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 5z + 9w & = -3x \\ 2x + y + 6z + 8w & = -3y \\ 3w & = -3z \\ z - 2w & = -3w \end{cases}$$

Uma base de  $V(-3)$  é  $\{(-7, 1, -5, 5)\}$ .

Sendo assim as matrizes  $M$  e  $M^{-1}$  são da seguinte forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -13 & 1 & -7 \\ 2 & -37 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } M^{-1} = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 20 & 244 & 268 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 40 & -20 & -70 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Portanto

$$A^n = \frac{1}{60} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -13 & 1 & -7 \\ 2 & -37 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-3^n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 20 & 244 & 268 \\ 0 & 0 & 15 & 15 \\ 40 & -20 & -70 & -10 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

**Caso 2** Seja  $A$  uma matriz não diagonalizável, então existe uma matriz de Jordan e uma matriz invertível  $M$  tal que  $J = M^{-1} \cdot A \cdot M$  ou, equivalentemente,  $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$ . Além disso, a matriz  $J$  pode ser escrita como soma de uma matriz diagonal e uma matriz nilpotente, isto é,  $J = D + N$ . Seja  $N$  uma matriz nilpotente de índice  $m$ , como  $D \cdot N = N \cdot D$ , tem-se

$$J^n = (D + N)^n = D^n + \binom{n}{1} D^{n-1} N + \dots + \binom{n}{m-1} D^{n-(m-1)} N^{m-1}.$$

Assim, pode-se encontrar a potência de uma matriz que esteja na forma canônica de Jordan.

**Exemplo 13** *Seja*

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule  $J^n$ .

**Solução:** A matriz  $J$  pode ser escrito como  $J = D + N$ , onde

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como  $D \cdot N = N \cdot D$  e  $N$  é nilpotente de índice 2, isto é  $N^2 = 0$ , tem-se

$$J^n = (D + N)^n = D^n + n \cdot D^{n-1} \cdot N.$$

Daí, segue que

$$J^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

**Caso 3** Toda matriz quadrada é semelhante a uma matriz na forma canônica de Jordan.

Seja  $A$  uma matriz quadrada não diagonalizável, que pode ser escrita como  $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$ .

Logo  $A^n = M \cdot J^n \cdot M^{-1}$ .

**Exemplo 14** Seja a matriz  $A$  quadrada não diagonalizável,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule  $A^n$ .

**Solução:** Utilizando o algoritmo para encontrar a forma de Jordan  $J$  de  $A$ , tem-se

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

E, pelo exemplo 13,

$$J^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n \cdot (1 - n) & -n \cdot 3^{n+1} & 0 & 0 \\ n \cdot 3^{n-1} & 3^n \cdot (1 + n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Exponencial de uma matriz

A exponencial  $e^x$ , para  $x \in \mathbb{R}$ , é definida como

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

Igualmente, define-se a exponencial de uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{K})$  como

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^p}{p!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Agora, seja  $t \in \mathbb{R}$  e  $J$  a forma canônica de Jordan da matriz  $A$  (diagonal ou não). Quando  $A$  possui autovalores repetidos, então

$$e^{At} = M \cdot e^{Jt} \cdot M^{-1}.$$

**Caso 1** Se a matriz  $A$  for diagonalizável, então  $A = M \cdot D \cdot M^{-1}$ , onde

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Desse modo, o cálculo de  $e^A$  é feito da seguinte maneira

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{M \cdot D^i \cdot M^{-1}}{i!} = M \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i}{i!} \right) \cdot M^{-1} = M \cdot e^D \cdot M^{-1},$$

onde

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 15** Sendo  $A$  uma matriz diagonalizável

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

calcule  $e^A$ .

**Solução:**

A matriz  $D$  diagonal semelhante a  $A$  é dada por

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

então

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

A matriz dos autovetores  $M$  e sua inversa  $M^{-1}$  são

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Logo,



$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^{-1} - e & -4e^{-1} + 4e \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

**Caso 2** Seja  $A \in M_n(\mathbb{K})$  uma matriz não diagonalizável, então existe uma matriz de Jordan  $J$  e uma matriz inversível  $M$  tal que  $J = M \cdot A \cdot M^{-1}$ , sendo  $J = D + N$ , onde  $D$  é uma matriz diagonal e  $N$  uma matriz nilpotente.

A exponencial de uma matriz nilpotente  $N$  de índice  $m$  é dada por

$$e^N = \left( I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right).$$

Caso for a exponencial de  $Nt$ , tem-se

$$e^{Nt} = \left( I + t \cdot N + t^2 \cdot \frac{N^2}{2!} + \dots + t^{m-1} \cdot \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right).$$

Como  $D \cdot N = N \cdot D$  e  $N$  nilpotente de ordem  $k$ , isto é  $N^k = 0$ , tem-se

$$e^J = e^{D+N} = e^D \cdot e^N = e^D \cdot \left( I + N + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^{m-1}}{(m-1)!} \right).$$

**Exemplo 16** Calcule  $e^{Jt}$ , sendo

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Solução:** A matriz  $J$  pode ser escrita como  $J = D + N$ , ou seja

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como  $D \cdot N = N \cdot D$  e  $N^3 = 0$ , tem-se

$$e^{Nt} = I + t \cdot N + \frac{1}{2}t^2 \cdot N^2.$$

Daí, segue que

$$e^{Nt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$e^{Jt} = e^{Dt} \cdot e^{Nt} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Caso 3** Seja  $A$  uma matriz quadrada não diagonalizável, então

$$e^A = M \cdot e^J \cdot M^{-1}.$$

**Exemplo 17** Calcule  $e^{At}$ , sendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Solução:** Utilizando o algoritmo da seção 3.3, a matriz de Jordan  $J$  semelhante a  $A$  é dada por

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a matriz  $M$  e sua respectiva inversa  $M^{-1}$  são

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pelo exemplo 16, tem-se

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e, assim,}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = e^t \cdot \begin{pmatrix} \frac{t^2 - 4t + 4}{2} & \frac{t^2 - 2t + 2}{2} & \frac{t^2 - 2t + 4}{2} \\ -t^2 + 3t - 1 & -t^2 + t & -t^2 + t - 2 \\ \frac{t^2 - 2t}{2} & \frac{t^2}{2} & \frac{t^2 + 2}{2} \end{pmatrix}.$$

### 4.3 Sistemas de equações lineares com coeficientes constantes

Seja  $A$  uma matriz de orden  $n$ . Considere o sistema de equações diferenciais lineares:

$$X'(t) = A \cdot X(t), \quad (4.1)$$

onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad e \quad X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}.$$

A matriz  $A$  pode ser escrita como  $A = M \cdot J \cdot M^{-1}$ , sendo  $J$  a forma canônica de Jordan (diagonal ou não). Fazendo  $X = M \cdot Y$  e substituindo em (4.1), o sistema ficará equivalente a

$$Y'(t) = J \cdot Y(t).$$

**Caso 1** Quando  $A$  é uma matriz diagonalizável.

**Exemplo 18** *Resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x'_1(t) = x_2(t) + x_3(t) \\ x'_2(t) = x_1(t) + x_3(t) \\ x'_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

dado que,  $t = 0$ ,  $X(0) = (x_1, x_2, x_3)^t = (2, 3, 1)^t$ .

**Solução:** Dado o sistema, sua forma matricial é

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

então  $p_A(\lambda) = (-1 - \lambda)^2(2 - \lambda)$ , sendo  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = 2$ . Logo, a matriz  $D$  diagonal semelhante a  $A$  é

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

E os autovetores são  $(-1, 1, 0)$ ,  $(-1, 0, 1)$  associados a  $\lambda_1$  e  $(1, 1, 1)$  referente a  $\lambda_2$ . Assim,

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = -y_2(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-t} \\ c_2 \cdot e^{-t} \\ c_3 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Agora, a solução geral em  $X$  é

$$X = M \cdot Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-t} \\ c_2 \cdot e^{-t} \\ c_3 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 \cdot e^{-t} - c_2 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{2t} \\ c_1 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{2t} \\ c_2 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o problema de valor inicial, tem-se que  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -1$  e  $c_3 = 2$ . Logo,

$$X = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{2t} \\ e^{-t} + 2 \cdot e^{2t} \\ -e^{-t} + 2 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

**Caso 2**

Quando a matriz está na forma canônica de Jordan, fica simples resolver o sistema. Não há necessidade de fazer a substituição  $X = M \cdot Y$ .

**Exemplo 19** *Encontre a solução do seguinte sistema*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \\ x_3'(t) = 4x_3(t) + x_4(t) \\ x_4'(t) = 4x_4(t) \end{cases}$$

**Solução:** A matriz que representa esse sistema é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

E sua solução é

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ 0x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{2t} + t \cdot c_2 \cdot e^{2t} \\ c_2 \cdot e^{2t} \\ c_3 \cdot e^{4t} + t \cdot c_4 \cdot e^{4t} \\ c_4 \cdot e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c_1 + t \cdot c_2)e^{2t} \\ c_2 \cdot e^{2t} \\ (c_3 + t \cdot c_4)e^{4t} \\ c_4 \cdot e^{4t} \end{pmatrix}.$$

**Caso 3**

Seja  $A$  uma matriz quadrada não diagonalizável.

**Exemplo 20** *Utilizando a substituição, resolva o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

dado o problema de valor inicial,  $t = 0$ ,  $X(0) = (x_1, x_2, x_3)^t = (7, 0, -9)^t$ .

**Solução:** Colocando o sistema na forma matricial, tem-se

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

então  $p_A(\lambda) = (-2 - \lambda)^2(1 - \lambda)$ , sendo  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ . A matriz de Jordan que representa  $A$  é

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Uma base de autovetores de  $J$  é dada por  $\{(1, -3, 1), (1, 0, 1), (4, 1, 1)\}$ . Assim,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) + y_3(t) \\ y_3'(t) = 2y_3(t) \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-t} \\ (c_2 + t \cdot c_3) \cdot e^{2t} \\ c_3 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

A solução geral em  $X$  é

$$X = M \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-t} \\ (c_2 + t \cdot c_3) \cdot e^{2t} \\ c_3 \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{-t} + (c_2 + t \cdot c_3) \cdot e^{2t} + 4 \cdot c_3 \cdot e^{2t} \\ -3 \cdot c_1 \cdot e^{-t} + c_3 \cdot e^{2t} \\ c_2 \cdot e^{-t} + (c_2 + t \cdot c_3) \cdot e^{2t} + c_3 \cdot e^{2t} \end{pmatrix}$$

Resolvendo o problema de valor inicial, tem-se que  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -6$  e  $c_3 = 3$ . Logo,

$$X = \begin{pmatrix} e^{-t} + (3t + 6) \cdot e^{2t} \\ -3 \cdot e^{-t} + 3 \cdot e^{2t} \\ -6e^{-t} + (3t - 3) \cdot e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + 3 \cdot (t + 2) \cdot e^{2t} \\ 3 \cdot (e^{2t} - e^{-t}) \\ -6e^{-t} + 3 \cdot (t - 1) \cdot e^{2t} \end{pmatrix}.$$

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho apresentou-se de forma objetiva importantes resultados acerca da Forma Canônica de Jordan, um algoritmo para encontrá-la, aplicações na resolução de problemas matemáticos e uma coleção de exemplos.

No capítulo 2 foi apresentada uma breve revisão dos principais tópicos da álgebra linear com a finalidade de dar suporte teórico para iniciar a pesquisa.

No intuito de despertar o interesse pelo assunto, no capítulo 3 mostrou-se um contexto motivacional para os estudos das formas canônicas de Jordan e desenvolveu a teoria de forma simples. Foi detalhado um algoritmo para encontrar a forma canônica de Jordan juntamente com uma base de autovetores genuínos e generalizados. Para compreender melhor o funcionamento do algoritmo foram resolvidos diversos exemplos numéricos. Com o propósito de motivar estudantes da área de ciências exatas foram apresentadas algumas aplicações.

Como trabalhos futuros, pretende-se fazer um estudo aprofundado sobre as formas canônicas de Jordan em matrizes de operadores no espaço dos números complexos. Também mostrar como se comporta a exponencial de uma matriz quando existem autovalores distintos. Aprender aplicações da forma canônica de Jordan em outras áreas como na física, engenharias e ciências da computação.



# Referências Bibliográficas

- [1] *ALMEIDA, Arthur G.F.* A Forma Canônica de Jordan e Algumas Aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso. Campina Grande: Universidade estadual da Paraíba, 2011. 53p.
- [2] *ANDRADE, Lenimar N.* A forma canônica de Jordan. João Pessoa: Departamento de Matematica CCEN - UFPB.
- [3] *BATISTA, Fernando S.* Formas Canônicas de Jordan. Monografia. Aquidauana: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2010. 43p.
- [4] *BOAVA, Giuliano* Álgebra Linear. OBM.
- [5] *BOLDRINI, José L.; COSTA, Sueli I.R.; FIGUEIREDO, Vera L.; WETZLER, Henry G.* Álgebra Linear. 3. ed. São Paulo, SP: Harba ltda., 1980.
- [6] *CALLIOLI, Carlos A.; COSTA, Roberto C.F.; DOMINGUES, Hygino H.* Álgebra Linear e Aplicações. 6. ed. reform. São Paulo, SP: Atual, 1990.
- [7] *COELHO, Flávio U; LOURENÇO, Mary L.* Um curso de Álgebra Linear. Edusp.
- [8] *COLARES, Gilderléia B.* AUTOVALORES E AUTOVETORES E APLICAÇÕES. Monografia. Foz do Iguaçu: Universidade Federal de Santa Catarina. Universidade Aberta do Brasil, 2011. 40p.
- [9] *estuda na net estudananet.com* Video aula Matemática/Algebra Linear - Teorema de Cayley-Hamilton - estuda na net. 30 jun 2016. 7min55s. Disponível em <[https://www.youtube.com/watch?v=Z5kaQz\\_-t8k&t=386s](https://www.youtube.com/watch?v=Z5kaQz_-t8k&t=386s)>. Acesso em: 15/05/2020.
- [10] *FERNANDEZ, Cecília S.; HEFEZ, Abramo* Introdução à Álgebra Linear. SBM, 2016 (Coleção PROFMAT).

- [11] *FONSECA, Josiel R. A.; LUZ, Núbia C. P.* NOÇÕES DE ÁLGEBRA LINEAR COM A FORMA CANÔNICA DE JORDAN: APLICAÇÕES. Macapá: Universidade Federal do Amapá, 2016. 52 p.
- [12] *HOFFMAN, Kenneth; KUNZE Ray* Álgebra linear. Tradução de Renate Watanabe. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.
- [13] *KOCHLOUKOV, Plamen E.* Polinômios Característicos e subespaços invariantes. IME-UNICAMP. Disponível em <<https://www.ime.unicamp.br/rigas/AlgLinPlamen/jordan.pdf>>. Acesso em: 20/06/2020.
- [14] *LIMA, Elon L.* Álgebra linear. 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [15] *MEYER, Carl D.* Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, 2000.
- [16] *PELÁ, Ronaldo R.* FORMA CANÔNICA DE JORDAN. Álgebra Linear (MAT-27), 2011. Disponível em <<http://www.ief.ita.br/rrpela/downloads/MAT27-2011-Aula-Jordan.pdf>>. Acesso em: 25/06/2020.
- [17] *PELLEGRINI, Jerônimo C.* álgebra linear. Versão 130. 3 de setembro de 2015.
- [18] *SANTANA, Cláudia R.; YARTEY, Joseph N. A.* ÁLGEBRA LINEAR - RESUMO DA TEORIA. 2008.
- [19] *SANTOS, Ildálio A.S.* O ENSINO E APLICAÇÕES DE MATRIZES. Dissertação. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2013. 84p.
- [20] *SILVA, Antônio de Andrade* Introdução à álgebra linear. Universidade Federal da Paraíba.
- [21] *VALLE, Marcos E.* Aula 14- Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem. IMECC-UNICAMP. Disponível em <<https://www.ime.unicamp.br/valle/Teaching/2016/MA311/Aula14.pdf>>. Acesso em: 20/06/2020.
- [22] *Wordpress - Fernando Batista.* Algebra e Matrizes - Hamilton. Disponível em [textlesshttps://fernandobatista89.files.wordpress.com/2013/06/algebra-e-matrizes-hamilton.pdf](https://fernandobatista89.files.wordpress.com/2013/06/algebra-e-matrizes-hamilton.pdf). Acesso em: 31/06/2020.
- [23] *ZANI, Sérgio L.* Álgebra Linear. São Paulo: Departamento de Matemática ICMC- USP.

# Apêndice A

## Teorema: Forma Canônica de Jordan

**Teorema 8** *Seja  $T : X \rightarrow X$  um operador linear e  $X$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  de dimensão finita  $n$  então existe uma base de  $V$  na qual  $T$  é representada por uma matriz na forma canônica de Jordan. Essa representação é única, a menos de ordenamento dos blocos de Jordan.*

**Demonstração:** Primeiramente será mostrada a existência de uma base na qual o operador  $T$  é representado por uma matriz na forma canônica de Jordan  $J$ . Essa demonstração será feita por indução finita em  $n = \dim X$ . Se  $\dim X = 1$  então  $J$  está na forma canônica de Jordan para qualquer base  $\mathcal{B}$  de  $X$  e essa representação é única. Suponha, agora, o resultado válido para qualquer operador definido no espaço  $Z$ , onde  $\dim Z \leq n - 1$ , incluindo também a unicidade (a menos de ordenamento dos blocos) dessa representação.

Fixando um autovalor  $\lambda$  de  $T$  e considerando o operador não invertível  $S = T - \lambda \cdot I$ . Como  $\text{Nuc}(S) \neq \{0\}$ , tem-se que  $\dim \text{Nuc}(S) \geq 1$ . Se  $\dim \text{Nuc}(S) = n$ , então, pelo teorema 1, a  $\dim \text{Im}(S) = 0$  e a imagem de  $S$  terá apenas o vetor nulo, assim  $T = \lambda \cdot I$  está na forma de Jordan. Caso contrário, definindo  $U = \text{Im}(S)$ , tem-se que  $1 \leq \dim U < n - 1$ . Como  $S(U) \subset U$ , pois  $U$  é subespaço  $T$ -invariante, pode-se aplicar a hipótese de indução ao operador  $S|_U : U \rightarrow U$ . Portanto existe uma base  $\mathcal{B}^*$  de  $U$  tal que, nessa base,  $S|_U$  está na forma canônica de Jordan.

Agora, completando a base  $\mathcal{B}^*$  até uma base de  $X$  e mantendo  $S$  na forma canônica de Jordan, considera-se, inicialmente,  $U \cap \text{Nuc}(S)$ . Se  $k = \dim(\text{Nuc}(S) \cap U)$  então  $k \geq 1$ . Cada vetor em  $(\text{Nuc}(S) \cap U) \subset \mathcal{B}^*$  é um autovetor correspondente ao autovalor 0, de modo que existem exatamente  $k$  cadeias de Jordan em  $U$  associadas ao autovalor 0. Considerando uma dessas cadeias e sua base  $\{u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i_{max}}\}$ , em que  $u_i$  é um autovetor associado ao autovalor 0 e  $u_{i_{max}}$  o último vetor dessa cadeia.

Como  $u_{i_{max}} \in U$ , existe  $v_i \in X$  tal que  $S(v_i) = u_{i_{max}} = 0v_i + u_{i_{max}}$  de modo que as cadeias relativas ao autovalor 0 em  $Nuc(S) \cap U$  estão aumentando seu comprimento quando acrescenta-se o vetor  $v_i$  à base  $\mathcal{B}^*$ .

O conjunto  $\mathcal{B}^{**} = \{v_1, \dots, v_k\}$  assim obtido é linearmente independente, pois suas imagens por  $S$  é o conjunto linearmente independente  $\{u_{1_{max}}, \dots, u_{k_{max}}\}$ . Como  $S(v_i) = 0v_i + u_{i_{max}}$ , as cadeias relativas ao autovalor 0 em  $Nuc(S) \cap U$  aumentaram seu comprimento, isto é, a inclusão dos vetores  $v_i$  na base  $\mathcal{B}^*$  após cada elemento  $u_{i_{max}}$  mantém a representação de  $S$  na forma de Jordan. Denotando  $V = [v_1, \dots, v_k]$ , afirma-se que  $W \cap V = \{0\}$ . De fato, se

$$\sum_{u_i \in \mathcal{B}^*} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^k \beta_i v_i = 0, \quad (\text{A.1})$$

aplicando  $S$  a igualdade A.1, obtém-se apenas vetores que estão na base  $\mathcal{B}^*$ , pois  $S(v_i) = u_{i_{max}}$ . Isso implica, em particular, que  $\beta_i = 0$ , com  $i = 1, \dots, k$ , provando a afirmação.

Se  $X = U \oplus V$ , tem-se uma base na qual  $S$  assume sua forma de Jordan, mas, pode ser que existam vetores em  $Nuc(S)$  que não estão em  $U$ . Se esse for o caso e  $\{u_1, \dots, u_k\}$  forem os vetores de  $\mathcal{B}^*$  que estão no  $Nuc(S)$ , pode-se completar esse conjunto com vetores  $w_1, \dots, w_j$  até obter uma base de  $Nuc(S)$ . Sejam  $W = [w_1, \dots, w_j]$  o subespaço gerado por tais vetores e  $\mathcal{B}^{***} = \{w_1, \dots, w_j\}$  uma base de  $W$ , se  $W \neq \{0\}$ . Ainda,  $(U \oplus V) \cap W = \{0\}$ . Uma vez que, pelo teorema (i), tem-se  $\dim U + \dim V + \dim W = n$ , pode-se concluir que  $X = U \oplus V \oplus W$ . A inclusão dos vetores  $v_i$  na base  $\mathcal{B}^*$  após cada elemento  $u_{i_{max}}$  e a inclusão dos vetores de  $\mathcal{B}^{***}$  após a inclusão dos vetores de  $\mathcal{B}^*$  e  $\mathcal{B}^{**}$  mantém a representação de  $S$  na forma de Jordan, pois os vetores de  $\mathcal{B}^{***}$  são representados por blocos de ordem 1 associados ao autovalor 0. Como  $S = T - \lambda \cdot I$ , onde  $S$  e  $T$  estão na base  $\mathcal{B}$ , também tem-se que  $T = S + \lambda \cdot I$  é uma matriz na forma de Jordan.

Considerando, agora, a unicidade (a menos de ordenamento dos blocos) da forma de Jordan de  $S$ . O espaço  $X$  já foi decomposto como  $X = U \oplus V \oplus W$ , em que  $\dim V \geq 1$ . Por indução, admite-se a unicidade da forma de Jordan em espaços de dimensão até  $n - 1$ . Em particular, tem-se a unicidade da forma de Jordan em  $U \oplus W$  e pode-se assumir que  $W = \{0\}$ . Como cadeias distintas de Jordan decompõe  $U \oplus V$  em subespaços distintos, aos quais a hipótese de indução aplica-se, pode-se assumir que  $U \cap V$  seja gerado por uma única cadeia de Jordan associada ao autovalor 0 de  $S$ . Mas então existe  $v \in V$  tal que  $S(v) = u_{max}$ , o elemento máximo da única cadeia de Jordan em  $U = Im(S)$  e, nesse caso, a forma de Jordan de  $S$ , e de  $T$ , é única. Daí decorre a unicidade da forma canônica de Jordan de  $T$ . ■