

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ALINE MOTA OLIVEIRA AMARAL

GEOMETRIA DO TÁXI: PROPOSTAS DE ATIVIDADES
PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

CAMPO GRANDE - MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ALINE MOTA OLIVEIRA AMARAL

GEOMETRIA DO TÁXI: PROPOSTAS DE ATIVIDADES
PARA EDUCAÇÃO BÁSICA

Orientador: Prof^a. Dr^a. RÚBIA MARA DE OLIVEIRA SANTOS

Coorientador: Prof. Me. CELSO CARDOSO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE –MS

2020

**GEOMETRIA DO TÁXI: PROPOSTAS DE ATIVIDADES
PARA EDUCAÇÃO BÁSICA**

ALINE MOTA OLIVEIRA AMARAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul-INMA/UFMS como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Prof^ª. Dr^ª. RÚBIA MARA DE OLIVEIRA SANTOS -UFMS

Prof. Me. CELSO CARDOSO - UFMS

Prof^ª. Dr^ª. LILIAN MILENA RAMOS CARVALHO - UFMS

Prof^ª. Dr^ª. IRENE MAGALHÃES CRAVEIRO - UFGD

CAMPO GRANDE – MS

2020

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, a Deus por sua misericórdia sobre minha vida, pelo seu Amor incondicional por mim, pelo prazer de poder acordar a cada manhã e ter certeza que existe um PAI CELESTE que se preocupa com cada detalhe da minha vida, até mesmo com aqueles mais simples como os meus estudos.

Agradecer a minha mãe Maria Auxiliadora e ao meu pai Antônio, por sempre me incentivarem a estudar e por acreditarem nos meus sonhos. Meu irmão Fernando, minha cunhada Marcilene e meu irmão de coração Danilo Pedro que estiveram do meu lado no momento mais difícil da minha vida, me encorajando e amando.

Agradecer ao meu marido Geovane, e aos meus filhos Miguel, Samuel e Geovana, que são a razão de eu acordar todos os dias e buscar ser uma pessoa melhor, que me amam de uma forma muito especial e que me ajudaram muito em todo o mestrado. Minha sogra Sueli, meu sogro Mares e minhas cunhadas que sempre quando possível estavam com as crianças para que eu pudesse estudar.

Tenho muitos amigos a agradecer, mais quero citar em especial meus pastores Érico e Veruska que me ajudaram em oração, Joyce, Dailton e Eduardo que foram meus parceiros de estudos durante todo mestrado, e todos que de alguma forma me ajudaram com palavras, orações, materiais, abraços e muito amor.

Não podia deixar de agradecer a Professora Rúbia que foi uma mãe durante todo esse tempo e o Professor Celso Cardoso que vem me acompanhando desde a graduação. Nem tenho palavras para descrever como vocês foram importantes nesse processo, muito obrigada por acreditarem em mim, que eu era capaz de cumprir essa missão, por aguentarem minhas crises. Eu nem consigo acreditar que consegui vencer essa etapa. Vocês são os melhores professores que eu já tive.

*“Não se amoldem ao padrão deste mundo,
mas transformem-se pela renovação da sua mente,
para que sejam capazes de experimentar e comprovar
a boa, agradável e perfeita vontade de Deus.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12:2, NVI)*

Resumo

Nesta dissertação, apresentamos uma breve introdução sobre o desenvolvimento do pensamento matemático ao longo da história com um olhar particular na geometria euclidiana e os questionamentos a respeito da validade do Quinto Postulado, que possibilitou o desenvolvimento de novas geometrias. Uma revisão bibliográfica da base axiomática da Geometria Euclidiana e a construção da Geometria do Táxi, por meio de uma nova métrica para o cálculo de distância entre dois pontos, verificando a validade dos axiomas euclidianos e a não validade do axioma de congruência de triângulo. Apresentamos ainda, uma proposta de atividades pedagógicas para os professores de matemática da Educação Básica, com material concreto para o desenvolvimento do pensamento geométrico, como possibilidade de orientação no espaço mediante o estudo da geometria do táxi que se encaixa de forma mais precisa no cotidiano do aluno. E por fim as considerações finais em relação ao trabalho.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana, Geometria do Táxi, Atividades Pedagógicas.

Abstract

In this master's dissertation we will be presenting a brief introduction of the mathematical thinking throughout the history with a special glance at Euclidian Geometry and the questionings about the Fifth Postulate validity which has enabled new geometrical developments. We will be bringing a bibliographic review of the Euclidean Geometry axiomatic basis throughout a new metric for the distance between two points calculation, also verifying the Euclidean axioms validity and the invalidity of the Triangle Congruence axiom. We also present a proposal for pedagogical activities destined to Basic Education mathematic teachers, bringing here a consolidated material for the development of geometric thinking as a possibility of space orientation.

Keywords: Euclidian Geometry, Taxi-Geometry, Pedagogical Activities.

Lista de Tabelas

5.1	Matemática no Ensino Fundamental Séries Iniciais- BNCC	49
5.2	Matemática no Ensino Fundamental Séries Finais- BNCC	50
5.3	Matemática no Ensino Médio - BNCC [5]	51

Sumário

1	Introdução	1
2	Um Pouco de História	4
2.1	Da Pré-História à Idade Contemporânea	4
2.2	Euclides de Alexandria	7
2.3	História da Geometria do Táxi	10
3	Geometria Euclidiana Plana	11
3.1	Axiomas	11
3.1.1	Axiomas de Incidência	11
3.1.2	Axiomas de Ordem	12
3.1.3	Axiomas sobre Medição de Segmentos	13
3.1.4	Axiomas sobre Medição de Ângulos	15
3.1.5	Axiomas sobre Congruências	18
3.1.6	Axiomas das Paralelas	22
3.2	Plano Cartesiano	23
3.2.1	Função Distância Euclidiana	24
3.2.2	Ponto Médio	26
3.2.3	Mediatriz	26
3.2.4	Circunferência	27
4	Geometria do Táxi	29
4.1	A Função Distância Táxi	29
4.1.1	Função Distância Táxi e Função Distância Euclidiana	31
4.1.2	Verificação dos Axiomas	33
4.1.3	Congruência de Triângulos na Geometria do Táxi	40

4.1.4	Não Validade do Axioma de Congruência LAL	43
4.2	Circunferência Táxi	44
4.3	Mediatriz Táxi	45
5	Atividades Pedagógicas	48
5.1	ATIVIDADE 1 - Conhecendo a Geometria do Táxi	52
5.2	ATIVIDADE 2 - Geometria do Táxi no cotidiano	54
5.3	ATIVIDADE 3 - Deduzindo a fórmula da Distância na Geometria do Táxi	56
5.4	ATIVIDADE 4 - Comparando Distância Euclidiana e Distância Táxi	59
5.5	ATIVIDADE 5 - Geometria do Táxi e Combinatória	62
6	Conclusão	65

Lista de Figuras

2.1	Retas cortadas por uma transversal	8
3.1	Conceitos Primitivos	11
3.2	Os pontos A e C pertencem à reta r , os pontos B e D não pertencem à reta r .	12
3.3	Os pontos A e B definem a reta r	12
3.4	O ponto B está localizado entre os pontos A e C	12
3.5	O ponto C está entre A e B , B está entre A e D	12
3.6	Segmento AB	13
3.7	A reta r é a interseção dos semiplanos α e β	13
3.8	Uma forma de posicionar os pontos sobre a régua	13
3.9	Segmento AB	14
3.10	Segmento AB	14
3.11	Desigualdade Triangular	15
3.12	Semirreta AB	15
3.13	Ângulo de Vértice O	15
3.14	Ângulo $A\hat{O}B$	16
3.15	Ângulo Raso $A\hat{O}B$	16
3.16	Semirretas Coincidentes OA e OB	16
3.17	Correspondência entre Ângulos e os Números Reais	17
3.18	Semirreta S_{OC} divide o ângulo $A\hat{O}B$	17
3.19	Soma de ângulos	18
3.20	Reta r perpendicular à reta m	18
3.21	Segmentos e Ângulos Congruentes	19
3.22	Triângulo ABC	19
3.23	Triângulo MNO congruente ao triângulo PQR	20
3.24	Primeiro Caso de Congruência de Triângulos - LAL	20

3.25	Segundo Caso de Congruência de Triângulos - ALA	21
3.26	Terceiro Caso de Congruência de Triângulos - LLL	21
3.27	Triângulo Retângulo	21
3.28	Congruência de Triângulos Retângulos	22
3.29	Retas Paralelas	22
3.30	Plano Cartesiano	23
3.31	Triângulo ABC no Plano Cartesiano	24
3.32	Segmento AB paralelo ao eixo Ox	25
3.33	Segmento AB paralelo ao eixo Oy	25
3.34	O ponto M é o ponto médio do segmento AB	26
3.35	Ponto médio do segmento AB	26
3.36	Mediatriz do segmento AB	26
3.37	Mediatriz do segmento AB	27
3.38	Pontos P e Q equidistantes dos pontos A e B	27
3.39	Circunferência euclidiana	28
4.1	Distância Táxi entre os ponto A e B	30
4.2	Distância Táxi entre os pontos	30
4.3	Distância entre os pontos A e B	31
4.4	Reta determinada pelos pontos A e B	33
4.5	Estar Entre na Geometria do Táxi	34
4.6	Distância Euclidiana igual a Distância Táxi	35
4.7	Diferentes formas de irmos do ponto A ao ponto B	35
4.8	Reta Vertical	36
4.9	Reta Horizontal	37
4.10	Retas inclinadas no plano	37
4.11	Segmentos Congruentes na Geometria do Táxi	40
4.12	Triângulos ABC , PQR e UVW	41
4.13	Não valida do axioma LAL	44
4.14	Coordenadas inteiras	45
4.15	Coordenadas reais	45
5.1	Plano Cartesiano na cartela de ovo	53

5.2	Multiplano	54
5.3	Modelo de mapas para a atividade	55
5.4	Modelo de imagem para 1 ^a parte da atividade	57
5.5	Exemplo de imagem para a Atividade	59
5.6	Exemplo de pontos para a Atividade	60
5.7	Plano Cartesiano com os pontos marcados	60
5.8	Mapa simplificado da cidade	62
5.9	Distância entre os pontos A e B	63

Capítulo 1

Introdução

O primeiro contato que temos com a geometria no âmbito escolar é por meio das formas geométricas que são apresentadas de maneira lúdica mediante recursos como brincadeiras e jogos ainda na primeira infância. Porém, o estudo da geometria é um dos mais antigos já registrados, muito utilizado pelas antigas civilizações tanto na área de agrimensura quanto na construção de moradias e monumentos históricos, como as pirâmides no Egito.

A Grécia Antiga é considerada o berço de grandes matemáticos como Tales de Mileto que desenvolveu um estudo sobre a Geometria Demonstrativa, Pitágoras, seu sucessor e fundador da Irmandade conhecida como Escola Pitagórica, e Euclides que formalizou por meio de sua obra “Elementos” todo o conhecimento geométrico que seus antecessores haviam produzido e que hoje conhecemos como Geometria Euclidiana.

Por muitos séculos, a Geometria Euclidiana foi considerada como a melhor forma de caracterizar a realidade geométrica em que vivemos. Entretanto, após as profundas transformações científicas e acadêmicas a partir do século XVII e com o episódio marcante da história do Quinto Postulado de Euclides, temos o surgimento das novas geometrias e então o questionamento sobre a validade universal da geometria euclidiana.

Dentro dessas novas geometrias, temos a descoberta da Geometria do Táxi. Uma geometria de fácil entendimento e rica em aplicações relacionadas ao cotidiano, pois sua ideia principal é a movimentação de um táxi pelas ruas de uma cidade. Um evento rotineiro e que está repleto de conceitos geométricos abstratos, o que a torna um diferencial no ensino da Matemática.

Os diferentes aplicativos de mobilidade urbana, estão se tornando cada vez mais conhecidos e utilizados pela população de modo geral, e isso inclui os alunos da Educação Básica. A ideia principal desses aplicativos é mostrar diferentes rotas para que o usuário possa ir de um ponto a

outro, fornecendo informações como tempo e distância de acordo com o tipo de transporte. O visual desses aplicativos é muito parecido com uma malha quadriculada e utiliza a métrica do táxi, principalmente quando estamos em cidades e bairros em que as ruas foram planejadas.

Uma das maiores dificuldades encontradas pelos professores de matemática em sala de aula é o frequente questionamento dos alunos acerca da utilização dos conceitos estudados em suas vidas cotidianas. Sendo assim, a Geometria do Táxi consegue responder de uma maneira simples essa questão quando estudada em paralelo com o uso de aplicativos de mobilidade urbana, pois fornece ao aluno uma oportunidade de fazer conexões entre o conteúdo apresentado e o mundo em que ele vive, e conseqüentemente, motivar o estudo da Matemática.

Dentro desse contexto, este trabalho tem por objetivo apresentar para os docentes da Educação Básica uma proposta coerente de atividades pedagógicas bem fundamentadas, juntamente com materiais concretos de baixo custo voltados para o ensino e aprendizagem da Geometria, os quais adequam-se aos entraves concomitantes à realidade da escola pública brasileira. Além disso, será exposto um estudo da parte axiomática da Geometria Euclidiana e da Geometria do Táxi.

De modo geral, o trabalho foi estruturado da seguinte forma: no segundo capítulo, retratamos de forma objetiva o processo de desenvolvimento e organização da Geometria ao longo da história, iniciando pelas antigas civilizações até Euclides, que foi quem desenvolveu toda base axiomática da geometria que é ensinada nas escolas. Apresentamos ainda o Quinto Postulado, também conhecido como Axiomas das Paralelas, que foi o responsável pelo desenvolvimento das novas geometrias. E por fim, uma breve apresentação histórica da Geometria do Táxi.

O terceiro capítulo, apresenta uma revisão bibliográfica da base axiomática da Geometria Euclidiana, a definição de plano cartesiano e função distância euclidiana com sua representação algébrica e geométrica e as definições de ponto médio, mediatriz e circunferência. No quarto capítulo, é desenvolvida a métrica da Geometria do Táxi; a comparação entre a função distância táxi e a função distância euclidiana, e a verificação da relação entre essas as distâncias. Desse modo, é feita a verificação dos axiomas euclidianos para a função distância táxi e a não validação do axioma de congruência, assim como a definição de ponto médio, mediatriz e circunferência dentro da métrica do táxi.

O capítulo cinco mostra os objetivos específicos para o desenvolvimento das atividades pedagógicas, três tabelas que apresentam as habilidades exigidas para o ensino da Matemática no Ensino Fundamental para Séries Iniciais, para Séries Finais e para o Ensino Médio. Temos

ainda, a apresentação das atividades categorizadas por nível escolar, materiais utilizados, objetivos específicos da aula, metodologia e observação para o professor. Por fim, o capítulo seis apresenta as conclusões dos estudos realizados.

Capítulo 2

Um Pouco de História

A História Geral pode ser dividida em cinco fases: a Pré-história, a Idade Antiga ou Antiguidade, a Idade Média, a Idade Moderna e a Idade Contemporânea. Apresentaremos de uma forma sucinta o processo de evolução da construção do pensar a Matemática de acordo com a evolução cultural, social, política e econômica da sociedade. É certo que todo conhecimento que temos nos dias atuais já foi produzido e reorganizado inúmeras vezes. No entanto, compreender o contexto histórico em que esse conhecimento foi descoberto, pode despertar em nós um senso de apreciação.

Toda revisão histórica desse capítulo foi baseada em [3, 4, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 17].

2.1 Da Pré-História à Idade Contemporânea

A primeira fase da História Geral é conhecida como Pré-História, e nesse período os habitantes da terra viviam da caça e tinham uma vida nômade, movimentando-se de acordo com as estações do ano. Sendo assim, não houve muitos avanços científicos registrados nessa época, porém os pesquisadores afirmam que esses povos foram capazes de desenvolver uma linguagem falada, a religião, a música, a arte e de maneira bem rudimentar a matemática, uma vez que existia comércio entre as famílias. A necessidade de estar sempre se defendendo e fugindo das feras do campo e a busca por alimento não permitia que esses povos tivessem tempo para sentar e discutir questões filosóficas e científicas, tudo tinha que ser muito prático pra eles.

Por volta de 3000 a.C, temos o início da Idade Antiga ou Antiguidade, que foi um período marcado pelo surgimento das comunidades, sendo a parte oriental composta pelas civilizações chinesas à beira do rio Amarelo, indianas e a civilização egípcia à beira do rio Nilo, localizadas

um pouco mais ao oeste. Na parte ocidental, temos a civilização grego-romana, além das civilizações astecas, maias, incas e olmecas localizadas no continente americano. Com a criação de um sistema de alimentação, a partir da Revolução Agrícola, e o fim da vida nômade com a construção de moradias, essas comunidades foram capazes de desenvolver o pensamento científico e filosófico. Podemos assim dizer que a Matemática teve sua origem nesse momento da história, como uma ciência prática capaz de resolver as necessidades daquelas sociedades ligadas à agricultura e engenharia.

Assim, pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas a agricultura e a engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis.(EVES, pg 57,2011)

Os povos babilônicos foram os primeiros a explorar a geometria dentro da Matemática. Entre 2000 a.C e 1600 a.C eles já trabalhavam com problemas envolvendo área de retângulo, área de triângulo retângulo, triângulo isósceles e até volumes de prismas retos. O teorema de Pitágoras era conhecido deles, e tinham um tratar bastante algébrico para a geometria. É atribuída a eles a divisão da circunferência em 360 partes iguais e uma de suas construções mais elogiadas são os Jardins Suspensos da Babilônia.

Para os egípcios, a matemática era vista mais como uma fonte auxiliar para a agrimensura e a engenharia. Apesar de ser muito reconhecida pela construção das pirâmides, a matemática egípcia não chegou ao nível da matemática dos babilônios, pois ao passo que os egípcios se mantinham de certa forma isolados de outras sociedades, os babilônios estavam localizados em uma rota de grande caravanas tendo assim melhor acesso a outras culturas.

Falando um pouco mais sobre a Grécia Antiga, podemos dividir sua história em quatro períodos. O primeiro sendo o Período Homérico (sec. XII a.C ao sec. VIII a.C) que deu início ao desenvolvimento das cidades. Segundo sendo o Período Arcaico (sec. VIII a.C ao sec. VI a.C), estabelecendo-se como um momento em que o pensamento racional começou a se desenvolver e a filosofia passou à ser vista como uma atividade do pensamento humano estruturado, também conhecida como Época dos Pré Socráticos, quando surgiu Tales de Mileto (624 a.C - 546 a.C) conhecido como um dos sete sábios da Grécia antiga, que foi responsável pelo estudo da geometria demonstrativa, além do famoso poeta Homero (sec. VIII a.C). Ainda nesse período, podemos destacar o início dos Jogos Olímpicos.

O terceiro sendo o Período Clássico (sec. V a.C ao sec. IV a.C) dá início a um renascimento cultural, social e político bem como a estabilização das cidades e o fortalecimento de atividades como: ciência, teatro, arquitetura e filosofia. Nesse período, temos a presença de Pitágoras (570 a.C - 496 a.C) que deu continuidade à escola iniciada por Tales de Mileto ao fundar a irmandade conhecida como Escola Pitagórica, sendo os pitagóricos, criadores do termo “matemática” significando, então, “tema do esclarecimento”. Por fim, temos o quarto sendo o Período Helenístico (sec. IV a.C ao sec. I a.C), com o surgimento de Platão, um grande entusiasta do estudo da matemática e de Euclides.

Quase todos os trabalhos matemáticos importantes do século IV a.C. foram feitos por amigos ou discípulos de Platão, fazendo da Academia o elo da matemática dos pitagóricos mais antigos com a da posterior e duradoura escola de Alexandria. A importância de Platão na matemática não se deve a nenhuma das descobertas que fez mas, isto sim, a sua convicção entusiástica de que o estudo da matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e que, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal. Isso explica o famoso lema a entrada da Academia: “Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria”. A matemática parecia da mais alta importância a Platão devido ao seu componente lógico e a atitude espiritual abstrata gerada por seu estudo; por essa razão ela ocupava um lugar de destaque no currículo da Academia. Alguns veem nos diálogos de Platão o que poderia ser considerada a primeira tentativa séria de uma filosofia da matemática.(EVES, pg 132-33, 2011)

A Idade Média, que marca a transição da Idade Antiga para a Idade Moderna, foi uma fase muito difícil na história da humanidade, sendo nomeada como a Idade das Trevas pelos Renascentistas. Foi considerada um período em que a ciência e a filosofia não obtiveram progresso. O renascimento da ciência ocorreu por volta de mil anos após o início da Era das trevas. E por fim, temos a Idade Contemporânea iniciada no século *XIX* e ainda nos dias atuais.

Podemos dizer que a linguagem formal como a Matemática é conhecida hoje teve sua origem na Grécia Antiga, pois mesmo ela sendo usada por grandes civilizações, foram os gregos que trataram dela com maior destaque tornando-a uma ciência propriamente dita e não somente uma ferramenta para resolver problemas práticos. O chamado método axiomático-dedutivo, que consistia em aceitar determinadas proposições como verdadeiras e a partir delas, juntamente com um pensamento lógico desenvolver proposições mais gerais, teve um papel muito importante nesse processo.

Todo esse contexto social e cultural permitiu que a Matemática não fosse vista e estudada somente como um conhecimento prático e cotidiano, mas que ela transcorresse para um nível de abstração, por meio do estudo de problemas relativos a processos infinitos, desenvolvendo assim

a geometria, a partir da mensuração.

A despeito de um considerável abandono nos séculos XVII e XVIII, o método postulacional inspirado em Euclides penetrou quase todos os campos da matemática a ponto de alguns matemáticos defenderem a tese de que não só o raciocínio matemático é postulacional mas que também, no sentido inverso, raciocínio postulacional é raciocínio matemático. Uma consequência relativamente moderna foi a criação de um campo de estudo chamado axiomática, dedicado ao exame das propriedades gerais dos conjuntos de postulados e do raciocínio postulacional. (EVES, pg 179, 2011)

2.2 Euclides de Alexandria

O Imperador Alexandre, o Grande, por volta de 333 a.C fundou a famosa cidade de Alexandria, no Egito. Em um espaço de tempo relativamente pequeno, o imperador transformou a cidade no centro mais suntuoso e cosmopolita do mundo, com seus aproximados 500.000 habitantes e uma rota comercial privilegiada. A civilização helênica garantiu a união do império mesmo após a morte de seu Imperador, no ano de 323 a.C. Nessa época, assumiu o reinado o grego Ptolomeu I (366 a.C. - 283 a.C.), responsável pela criação da famosa Universidade de Alexandria, um projeto muito bem elaborado com jardins, laboratórios, salas de aula e uma biblioteca que chegou a ter em seus registros mais de 600.000 rolos de papiro. Por quase 1000 anos, a cidade de Alexandria foi considerada uma metrópole intelectual. Ptolomeu convidou muitos estudiosos de Atenas para comandar os variados departamentos; grandes nomes como Arquimedes e Hipátia foram selecionados para desenvolver estudos e pesquisa.

Apesar de muitos afirmarem que Euclides nasceu em Alexandria, existem poucas evidências disso, como relata [3] e [6]; sabe-se no entanto que ele foi educado em Atenas e frequentou a Academia de Platão por volta do início do Período Helenístico. Euclides era professor e escritor muito focado em seus estudos e foi convidado para ser professor de Matemática na Universidade de Alexandria. Euclides ficou conhecido com "Pai da Geometria" e atribui-se a ele uma obra que conseguiu reunir de forma coerente todo conhecimento matemático desenvolvido até a época baseado nas obras de Tales, Pitágoras, Platão e outros tantos gregos quanto egípcios, conhecida como "Elementos". Sua principal contribuição foi a ordenação dos métodos já conhecidos, permitindo assim o descobrimento de novas ideias, ou seja, partindo de definições simples, que eram chamadas de axiomas, fazia-se afirmações chamadas de teoremas que podiam ser provadas através da lógica dedutiva. Não se tem registros da obra original, apenas de um fragmento antigo encontrado entre os papiros gregos em Oxyrynque por volta do ano 100 d.C, às margens do rio Nilo.

A obra "Elementos" apresenta a Geometria de uma forma muito bem elaborada. Os axiomas ou postulados, como alguns preferem chamar, são cinco e podem ser assim interpretados na nossa linguagem:

1. Por dois pontos passa uma reta e somente uma.
2. A partir de qualquer ponto de uma dada reta é possível marcar um segmento de comprimento dado sobre a reta dada.
3. É possível descrever um círculo de centro e raio dados.
4. Todos os ângulos retos são congruentes.

O Quinto Postulado é mais discutido ao longo dos anos, pode assim ser traduzido:

Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos do mesmo lado, menores do que dois ângulos retos, estas outras, prolongando-se ao infinito, encontrar-se-ão no lado onde os ângulos sejam menores do que dois ângulos retos.

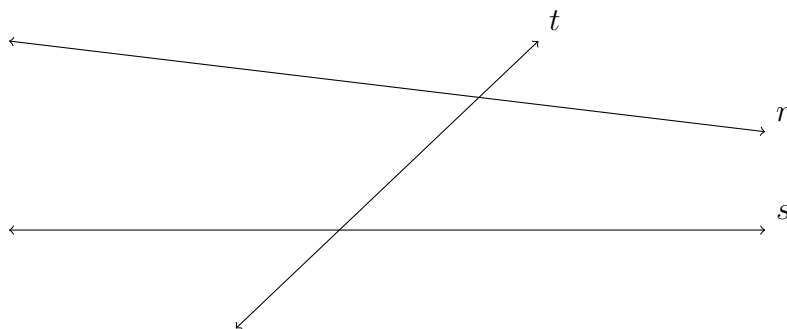


Figura 2.1: Retas cortadas por uma transversal

Podemos notar que a estrutura como o quinto postulado é escrito difere e muito da forma como os quatro primeiros foram organizados. Ele possui uma estrutura condicional, e essa foi uma das causas de grandes matemáticos levantarem o questionamento sobre sua validade. De acordo com [3] e [6] durante mais dois mil anos, matemáticos importantes como Gauss, Bolyai e Lobachevsky, fizeram inúmeras tentativas para demonstrar o quinto postulado; o matemático francês J. L. R. d'Alembert chegou até a chamá-lo de "o escândalo da geometria".

De contrapartida, foi graças às insistentes tentativas de provar a validade ou a não validade do quinto postulado que levou grandes estudiosos a formularem o que hoje chamamos de geometrias não-euclidianas, uma vez que essas são baseadas na negação de um ou mais axiomas euclidianos.

A tentativa de provar o Quinto Postulado de Euclides levou muitos matemáticos à exaustão. O matemático János, jovem ainda, recebeu orientações de seu pai, o também matemático o húngaro Farkas Bolyai, para não se arriscar na tentativa de provar o postulado, porém o jovem, que era um prodígio na matemática, encontrou uma nova geometria negando o postulado das paralelas. Seu trabalho nunca foi publicado.

Um outro grande prodígio da matemática, Carl Friedrich Gauss, trabalhou por mais de 30 anos com a hipótese de uma geometria não-euclidiana, por ser uma pessoa extremamente perfeccionista, e pelo conceito ser de difícil aceitação para meio acadêmico, ainda não tinha publicado nada a respeito.

Nesse mesmo interim, o matemático russo Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), foi o primeiro a publicar material sobre a geometria não-euclidiana, no ano de 1829, mas no momento ele a chamava de "geometria imaginária" e em seguida passou a chamar de "pangeometria". Gauss chegou a admitir que Lobachevsky havia realizado um feito verdadeiramente geométrico, em uma carta a Schumacher no ano de 1846, e recomendou Lobachevsky para a Sociedade Científica Gottingen.

Em 1855, após a morte de Gauss, considerado o maior matemático do século XIX, suas cartas foram publicadas e os matemáticos começaram a valorizar a ideia de uma geometria não-euclidiana, uma vez que ele ficou conhecido como "o príncipe dos matemáticos" por sua profundidade. Matemáticos como Beltrami, Klein e Riemann, além de esclarecerem o conceito ainda o aplicaram em outros ramos da matemática.

Foi em 1868 que finalmente a polêmica do Quinto Postulado foi derrubada pelo matemático Eugênio Beltrami (1835-1900). Beltrami conseguiu demonstrar a impossibilidade de se validar o quinto postulado, apresentando um modelo de geometria não-euclidiana.

Agora a comunidade científica estava diante de uma nova forma de estudar a geometria. É importante salientar que tanto Gauss quanto Lobachevski foram muito mais além dos aspectos matemáticos nessa descoberta totalmente inusitada. A ideia de uma nova geometria, logo trouxe a necessidade de relacioná-la ao nosso mundo físico e assim vários estudos se desenvolveram ao longo dos anos na busca de uma geometria capaz de representar da melhor forma a nossa realidade.

2.3 História da Geometria do Táxi

Mais de dois mil após a mais celebrada obra de Euclides, “*Elementos*”, precisamente no final do século XVIII, Lobachevsky e outros grandes matemáticos apresentaram seus estudos sobre as geometrias não euclidianas. Em seguida, no século XIX o matemático russo Hermann Minkowski (1864 - 1909), um dos professores de Einstein, desenvolveu o estudo de uma nova geometria que ficaria conhecida como Geometria do Táxi, Geometria Pombalina ou ainda Geometria de Manhathan. Apesar de não usar a negação do postulado das paralelas, foi ainda assim considerada uma geometria não-euclidiana, pois sua métrica para o cálculo de distância entre dois pontos é diferente métrica proposta por Euclides.

A Geometria do Táxi teve seu início baseado no estudo da topologia, diferente de outras geometrias é de fácil compreensão, simples de ser aplicada e muito utilizada pela sociedade no cotidiano. O termo Geometria do Táxi só foi utilizado no ano 1952, sendo associado à ideia de “trafegar pelas ruas”.

Em seu livro “Taxicab Geometry: An adventure in non-euclidean geometry”, do ano de 1975, o autor Eugene F. Krause faz uma bela apresentação da geometria do táxi, fazendo uma análise dessa geometria por dois pontos de vista. Primeiramente, ele a apresenta como um conteúdo dentro de uma perspectiva educacional capaz de despertar o interesse do aluno na área de geometria, em segundo lugar como um ramo da geometria repleto de aplicações práticas.

A geometria do táxi possui muitos apoiadores que enxergam nela uma integração da Matemática com a vida cotidiana dos alunos, principalmente se for feito um paralelo entre ela e os aplicativos de mobilidade urbana que apresentam um visual muito parecido com a malha quadriculada e tem seus trajetos muito próximos a métrica entre dois pontos definida pela geometria do táxi. Sendo assim, temos a possibilidade de despertar nesses alunos o interesse por esse e outros conteúdos da Matemática.

Capítulo 3

Geometria Euclidiana Plana

A Geometria Euclidiana Plana nos dará a base axiomática necessária para construirmos todas as definições referentes ao quarto capítulo. Toda revisão está baseada em [1, 2, 10].

3.1 Axiomas

Daremos início ao estudo da base axiomática da Geometria Euclidiana apresentando três conceitos primitivos: o ponto, a reta e o plano.

Temos que o *ponto* é um lugar no espaço que não possui dimensão, a *reta* é um comprimento sem largura e o *plano* é uma superfície que tem somente comprimento e largura. Representaremos os pontos por letras latinas maiúsculas (A, B, C, \dots) e as retas por letras latinas minúsculas (a, b, c, \dots).

É importante observarmos que a Geometria Euclidiana que apresentaremos está contida em um único plano, que denotaremos de *Plano Euclidiano*. Veja a Figura 3.1.

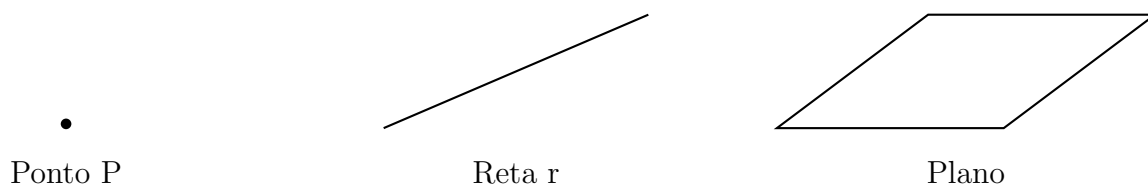


Figura 3.1: Conceitos Primitivos

3.1.1 Axiomas de Incidência

Axioma 1 *Qualquer que seja a reta tomada existem pontos que pertencem e pontos que não pertencem à essa reta.* Veja Figura 3.2.

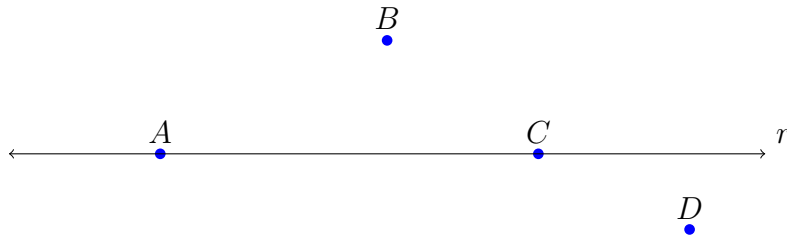


Figura 3.2: Os pontos A e C pertencem à reta r , os pontos B e D não pertencem à reta r

Axioma 2 *Dados dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.* Veja Figura 3.3.



Figura 3.3: Os pontos A e B definem a reta r

3.1.2 Axiomas de Ordem

Axioma 3 *Dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles está localizado entre os outros dois.* Veja Figura 3.4.

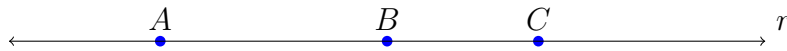


Figura 3.4: O ponto B está localizado entre os pontos A e C

Axioma 4 *Dados dois pontos distintos A e B sempre existem: um ponto C entre A e B e um ponto D tal que B está entre A e D .* Veja Figura 3.5.

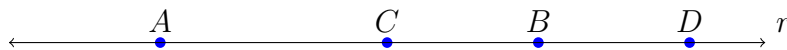


Figura 3.5: O ponto C está entre A e B , B está entre A e D

Antes dos próximos axiomas, iremos apresentar duas definições:

Definição 1 O conjunto constituído por dois pontos A e B e por todos os pontos que se encontram entre A e B é chamado de Segmento AB . Os pontos A e B são denominados extremos ou extremidades do segmento. Veja Figura 3.6.

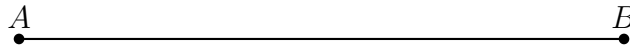


Figura 3.6: Segmento AB

Axioma 5 Uma reta r determina exatamente dois semiplanos distintos, sendo a interseção desses dois semiplanos a própria reta r . Veja Figura 3.8.

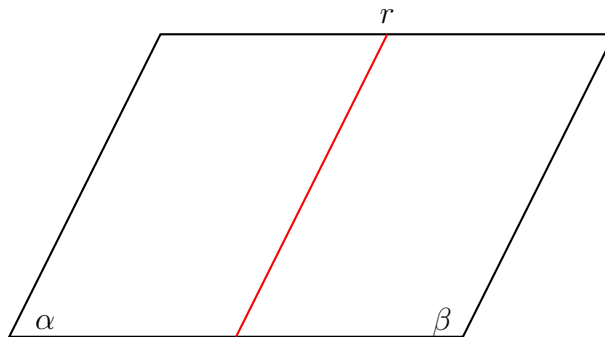


Figura 3.7: A reta r é a interseção dos semiplanos α e β

3.1.3 Axiomas sobre Medição de Segmentos

Axioma 6 A todo par de pontos do plano corresponde um número maior ou igual a zero. Este número é zero se e só se os pontos são coincidentes.

Axioma 7 (Axioma da Régua Infinita) Os pontos de uma reta sempre podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre dois quaisquer destes números meça a distância entre esses dois pontos. Veja Figura 3.9.



Figura 3.8: Uma forma de posicionar os pontos sobre a régua

O número a que se refere esse axioma é chamado de distância entre os pontos ou é referido como comprimento do segmento determinado pelos dois pontos. Indicaremos o comprimento do segmento AB pelo símbolo \overline{AB} . Veja Figura 3.10.

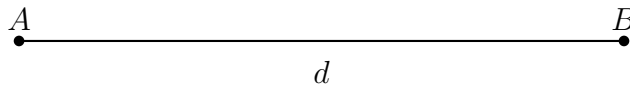


Figura 3.9: Segmento AB

Exemplo 1 Observe a régua da Figura 3.9. Calculando a distância entre os pontos dados abaixo, temos:

a. $\overline{AB} = |3 - 0| = 3$

b. $\overline{AD} = |7 - 0| = 7$

d. $\overline{CE} = |10 - 6| = 4$

Axioma 8 Se o ponto B encontra-se entre os pontos A e C , então: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Veja Figura 3.11.

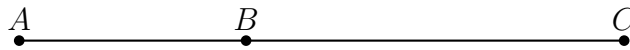


Figura 3.10: Segmento AB

Pelas noções básicas de comprimento de segmento, podemos concluir que:

1. $A = B$ se, e somente se, $\overline{AB} = 0$.
2. \overline{AB} é sempre maior ou igual a zero.
3. Para quaisquer dois pontos A e B , temos que $\overline{AB} = \overline{BA}$.
4. (Desigualdade Triangular) Para quaisquer três pontos distintos A , B e C do plano tem-se

$$\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, B pertence ao segmento AC . Veja Figura 3.12.



Figura 3.11: Desigualdade Triangular

3.1.4 Axiomas sobre Medição de Ângulos

Definição 2 Se A e B são pontos distintos, o conjunto constituído pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B encontra-se entre A e C é chamado de *Semirreta de origem A contendo o ponto B* , e é representado por S_{AB} . O ponto A é então denominado *origem da semirreta S_{AB}* . Veja Figura 3.13.

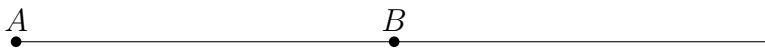


Figura 3.12: Semirreta AB

Definição 3 Chamamos de *Ângulo* a figura formada por duas semirretas com a mesma origem, sendo a origem chamada de *vértice do ângulo*. Veja Figura 3.14.

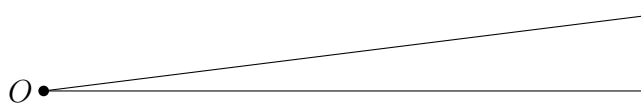


Figura 3.13: Ângulo de Vértice O

Exemplo 2 Sejam S_{OA} e S_{OB} duas semirretas de origem no ponto O .

As semirretas S_{OA} e S_{OB} são os *lados* do ângulo, e a origem comum o ponto O é o *vértice* do ângulo. Representaremos o ângulo formado por essas semirretas pelo símbolo $A\hat{O}B$ ou ainda por \hat{O} . Veja Figura 3.15.

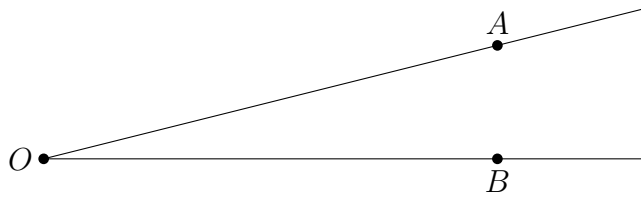


Figura 3.14: Ângulo $A\hat{O}B$

A maneira mais prática de introduzirmos o conceito de medição de ângulos na geometria é por meio dos axiomas. É importante observarmos a semelhança deles com os axiomas de medição de segmento.

Definição 4 Chamamos de *Ângulo Raso* o ângulo formado por duas semirretas distintas de uma mesma reta. Veja Figura 3.16.

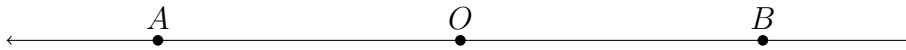


Figura 3.15: Ângulo Raso $A\hat{O}B$

Axioma 9 *Todo ângulo tem uma medida maior ou igual a zero. A medida de um ângulo é zero se, e somente se, ele é constituído por duas semirretas coincidentes.* Veja Figura 3.17.



Figura 3.16: Semirretas Coincidentes OA e OB

Definição 5 *Diremos que uma semirreta divide um semiplano se ela estiver contida no semiplano e sua origem for um ponto da reta que o determina.*

Axioma 10 *É possível colocar, em correspondência biunívoca, os números reais entre zero e 180 e as semirretas de mesma origem que dividem um dado semiplano, de modo que o módulo da diferença entre estes números seja a medida do ângulo formado pelas semirretas correspondentes. Cada número associado a uma semirreta é chamado de coordenada da semirreta.* Veja Figura 3.18.

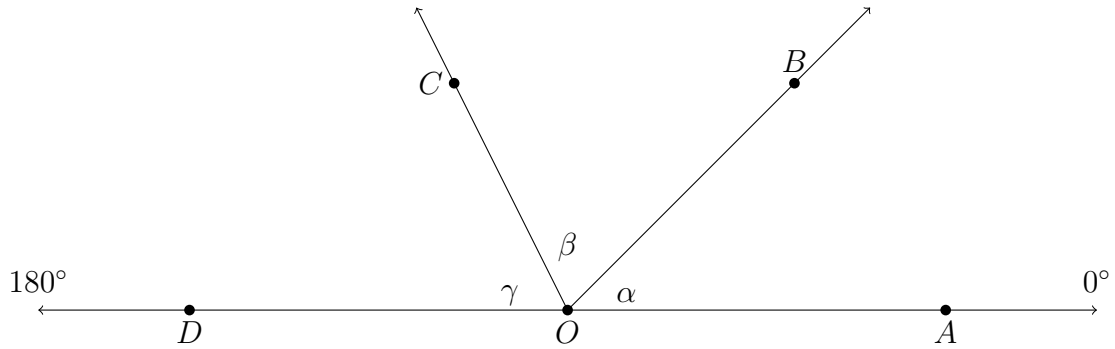


Figura 3.17: Correspondência entre Ângulos e os Números Reais

Se um ângulo $\hat{A}OB$ tem medida a , diremos que este ângulo mede a graus e representaremos por a° . É importante ressaltarmos que o ângulo é a figura geométrica e a medida do ângulo é um número real. Usaremos letras gregas minúsculas ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) para representar tanto o ângulo quanto a sua medida.

Dessa forma, se a e b forem as coordenadas dos lados do ângulo $\hat{A}OB$, então $|a - b|$ é a medida deste ângulo, que na Figura 3.18 representamos por α . Assim escreveremos de uma maneira geral $\hat{A}OB = |a - b| = \alpha$.

Definição 6 *Sejam S_{OA} , S_{OB} e S_{OC} semirretas de mesma origem. Se o segmento AB interceptar S_{OC} , diremos que S_{OC} divide o ângulo $\hat{A}OB$. Veja Figura 3.19.*

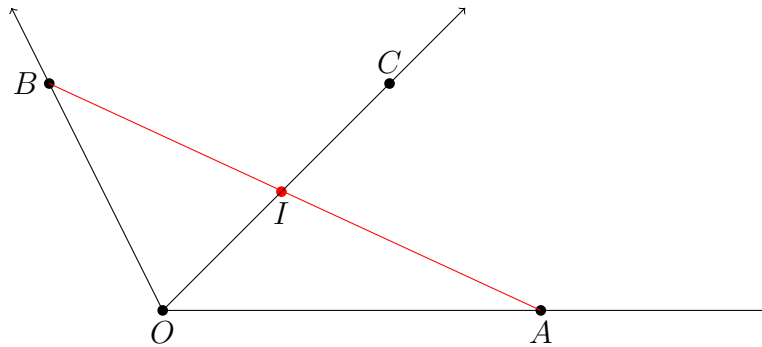


Figura 3.18: Semirreta S_{OC} divide o ângulo $\hat{A}OB$

Axioma 11 *Se uma semirreta S_{OC} divide um ângulo $\hat{A}OB$, então $\hat{A}OB = \hat{A}OC + \hat{C}OB$.*

Exemplo 3 *Sejam $\hat{A}OC = 41^\circ$, $\hat{C}OB = 96^\circ$, ângulos de mesma origem O .*

Temos que $\hat{A}OC + \hat{C}OB = \hat{A}OB$, ou seja, $41^\circ + 96^\circ = 137^\circ$, como mostra a Figura 3.20.

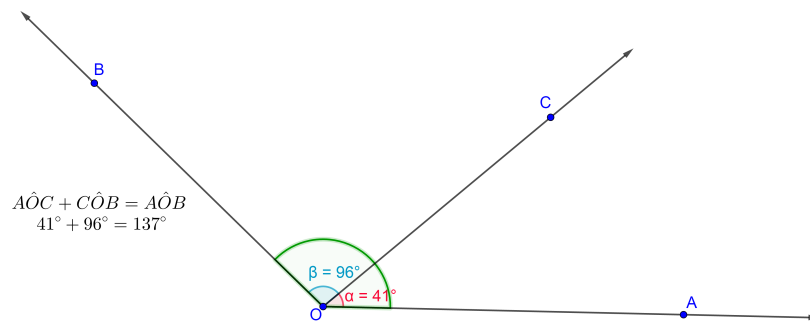


Figura 3.19: Soma de ângulos

Definição 7 Chamamos de *Ângulo Reto* o ângulo cuja medida é igual a 90° .

Quando duas retas se interceptam e um dos quatro ângulos formado por elas for reto, então todos os outros ângulos também serão retos e nesse caso diremos que as retas são *perpendiculares*. Veja Figura 3.21.

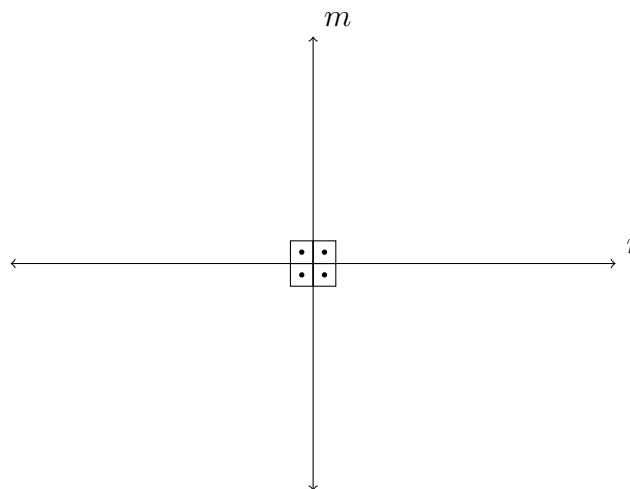


Figura 3.20: Reta r perpendicular à reta m

3.1.5 Axiomas sobre Congruências

Definição 8 Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\hat{A}OA'$ e $\hat{B}PB'$ são congruentes se eles têm a mesma medida. Veja Figura 3.22.

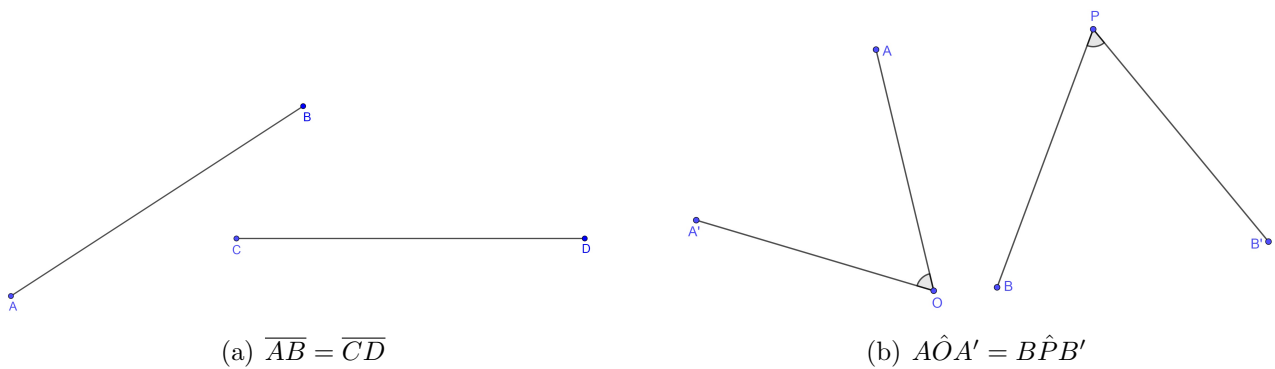


Figura 3.21: Segmentos e Ângulos Congruentes

Definição 9 *Triângulos são figuras geométricas planas e fechadas formadas por três segmentos de reta que se encontram dois a dois em uma de suas extremidades.*

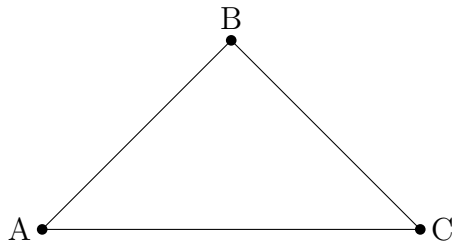


Figura 3.22: Triângulo ABC

O encontro das extremidades dos segmentos serão chamados de *vértice* do triângulo e os segmentos de *lados* do triângulo. Sendo assim, na Figura 3.23 temos que A , B e C são os vértices, AB , BC e AC são os lados do triângulo. Representaremos o triângulo pelo símbolo ΔABC .

Podemos classificar um triângulo de acordo com a medida de seus lados, como segue:

Escaleno: Possui três lados com medidas distintas.

Isósceles: Possui dois lados de mesma medida.

Equilátero: Possui três lados de mesma medida.

Definição 10 *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Sejam MNO e PQR dois triângulos congruentes, de acordo com a Figura 3.24. Se

$$M \leftrightarrow P$$

$$N \leftrightarrow Q$$

$$O \leftrightarrow R$$

é a relação que define a congruência, então também são válidas as seguintes relações:

$$MN = PQ$$

$$\hat{M} = \hat{P}$$

$$NO = QR$$

$$\hat{N} = \hat{Q}$$

$$MO = PR$$

$$\hat{O} = \hat{R}$$

Usaremos a notação $\Delta MNO \equiv \Delta PQR$ para indicar a congruência entre triângulos.

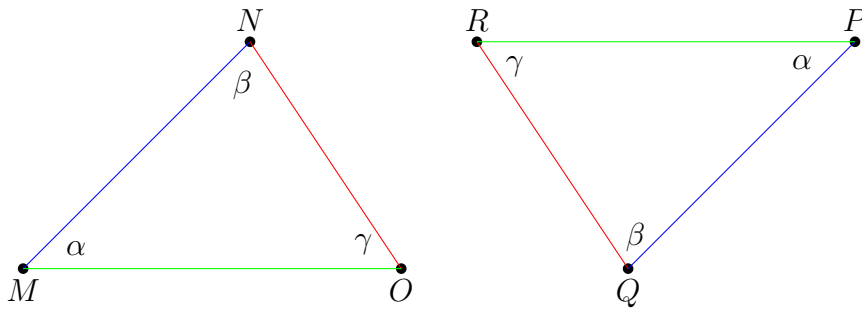


Figura 3.23: Triângulo MNO congruente ao triângulo PQR

Axioma 12 (*Primeiro Caso de Congruência de Triângulos - LAL*) Sejam dados dois triângulos ABC e EFG , se $AB=EF$, $AC=EG$ e $\hat{A}=\hat{E}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$. Veja Figura 3.25.

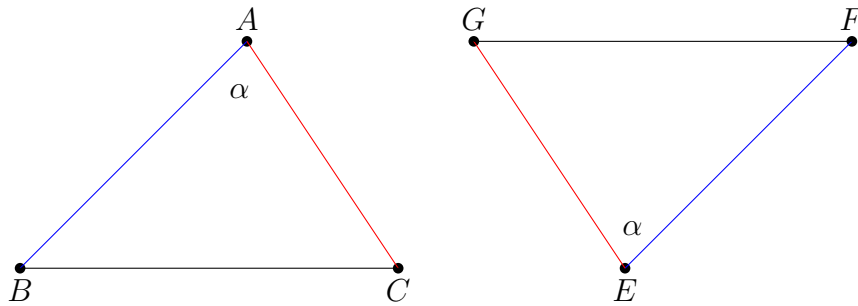


Figura 3.24: Primeiro Caso de Congruência de Triângulos - LAL

Teorema 1 (*Segundo Caso de Congruência de Triângulos - ALA*) Sejam dados dois triângulos ABC e EFG , se $\hat{A}=\hat{E}$, $AB=EF$ e $\hat{B}=\hat{F}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$. Veja Figura 3.26.

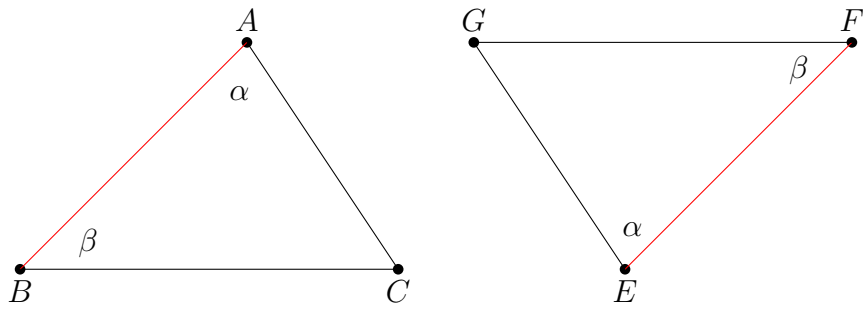


Figura 3.25: Segundo Caso de Congruência de Triângulos - ALA

Teorema 2 (*Terceiro Caso de Congruência de Triângulos - LLL*) Sejam dados dois triângulos ABC e EFG , se $AB=EF$, $AC=EG$ e $BC=FG$, então $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$. Veja Figura 3.27.

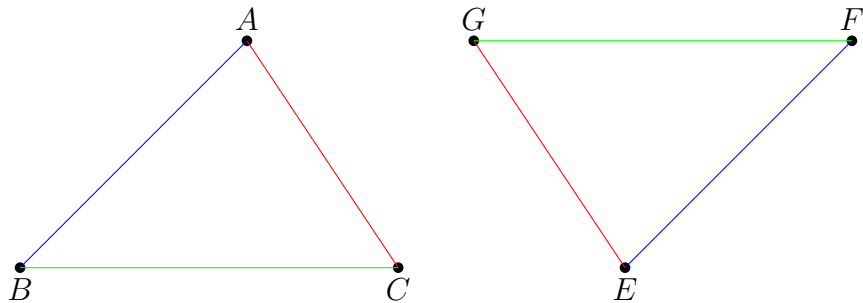


Figura 3.26: Terceiro Caso de Congruência de Triângulos - LLL

Definição 11 Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado de *Triângulo Retângulo*. O lado que se opõe ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* e os outros dois lados são chamados de *catetos*. Veja Figura 3.28.

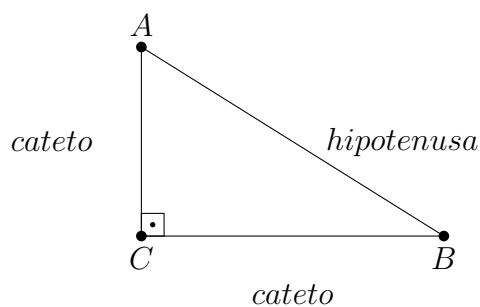


Figura 3.27: Triângulo Retângulo

Teorema 3 (*Congruência de Triângulos Retângulos*) Sejam ABC e EFG dois triângulos

retângulos cujos ângulos retos são \hat{C} e \hat{G} . Veja Figura 3.29. Se alguma das condições abaixo ocorrer, então os dois triângulos são congruentes:

1. $BC=FG$ e \hat{A} e \hat{E} (cateto - ângulo oposto)
2. $AB=EF$ e $BC=FG$ (hipotenusa - cateto)
3. $AB=EF$ e \hat{A} e \hat{E} (hipotenusa - ângulo agudo)

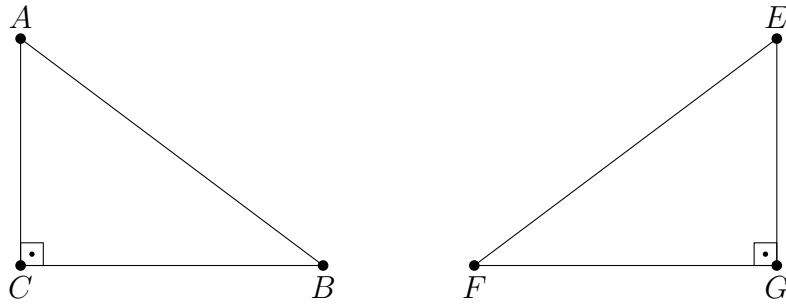


Figura 3.28: Congruência de Triângulos Retângulos

3.1.6 Axiomas das Paralelas

Definição 12 *Duas retas pertencentes ao plano e que não se interceptam são chamadas de retas paralelas.*

Notação: $r // s$ (Lê-se: A reta r é paralela à reta s)

Axioma 13 (*Postulado de Playfair*) *Para toda reta r e para todo ponto P , P não pertencente a r , existe uma única reta s que passa por P e não intercepta r . Veja Figura 3.30.*

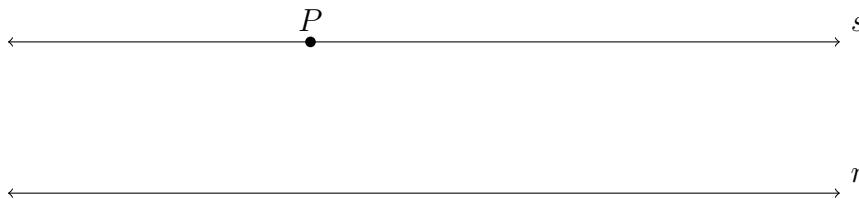


Figura 3.29: Retas Paralelas

3.2 Plano Cartesiano

Consideremos duas retas x e y perpendiculares em O no plano.

Dado um ponto P qualquer, conduzamos por ele duas retas:

$$x' // x \quad \text{e} \quad y' // y$$

Denominamos P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x'

Nessas condições definimos:

- (a) O plano cartesiano;
- (b) O sistema de eixos cartesiano ortogonal é o sistema xOy ;
- (c) A origem do sistema é o ponto O ;
- (d) A reta x é chamada de Eixo das Abscissas ou ainda de eixo Ox ;
- (e) A reta y é chamada de Eixo das Ordenadas ou ainda de eixo Oy ;
- (f) A abscissa do ponto P é o número real $x_P = \overline{OP_1}$;
- (g) A ordenada do ponto P é o número real $y_P = \overline{OP_2}$;
- (h) As coordenadas do ponto P são os números reais x_P e y_P , geralmente indicados na forma de um par ordenado (x_P, y_P) onde a abscissa representa a primeira coordenada e a ordenada a segunda coordenada. Veja Figura 3.31.

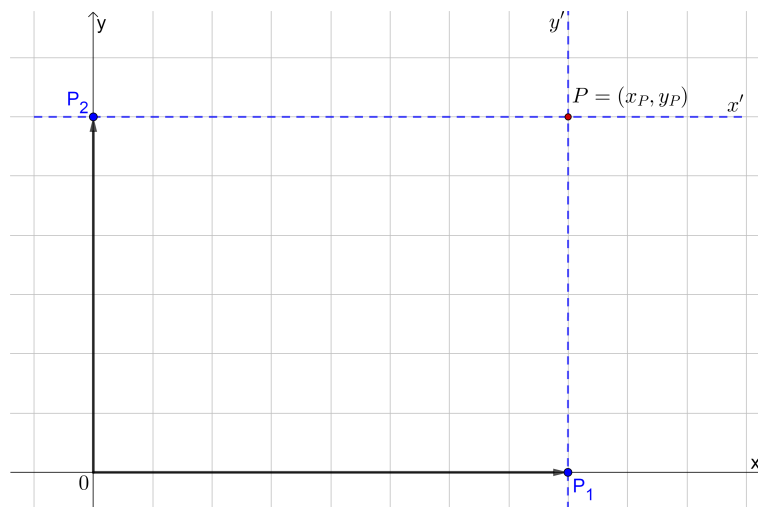


Figura 3.30: Plano Cartesiano

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Consideremos o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ de todos os pares ordenados, isto é:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

Podemos associar a cada ponto do plano o par ordenado (x, y) sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e ainda, as retas são o conjunto solução das equações da forma $ax + by + c = 0$, sendo $a^2 + b^2 \neq 0$.

3.2.1 Função Distância Euclidiana

Dados dois pontos $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pertencentes ao plano, consideremos um terceiro ponto $C = (x_B, y_A)$ de modo que seja possível formar com esses três pontos um triângulo ABC que seja retângulo em C . Veja Figura 3.32.

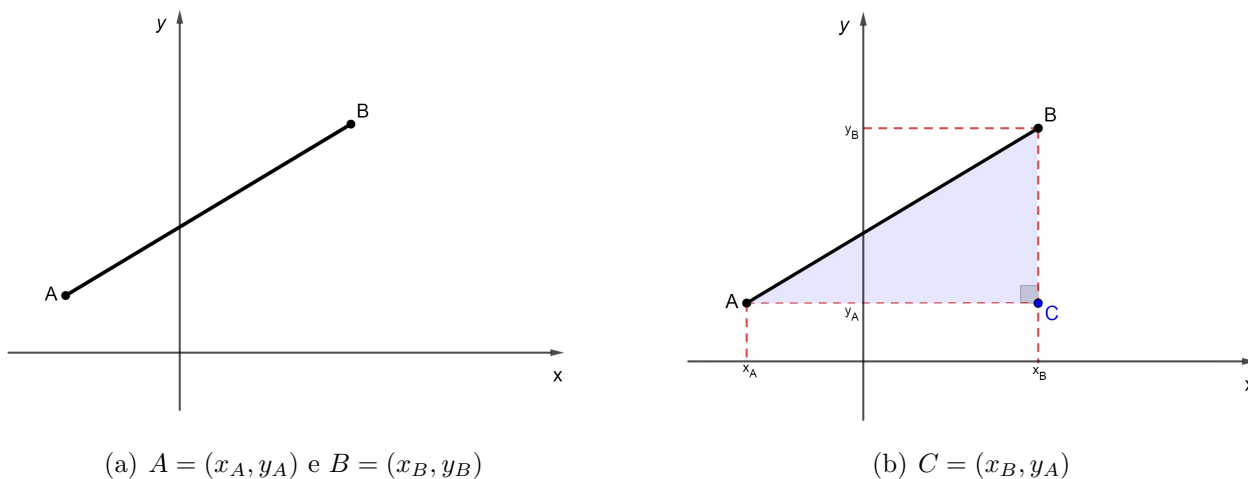


Figura 3.31: Triângulo ABC no Plano Cartesiano

Temos que $\overline{AC} = |x_B - x_A|$ e $\overline{BC} = |y_B - y_A|$.

Como ABC é triângulo retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras.

Dessa forma:

$$\begin{aligned} (\overline{AB})^2 &= (\overline{AC})^2 + (\overline{BC})^2 \\ (\overline{AB})^2 &= |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 \\ \overline{AB} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \end{aligned}$$

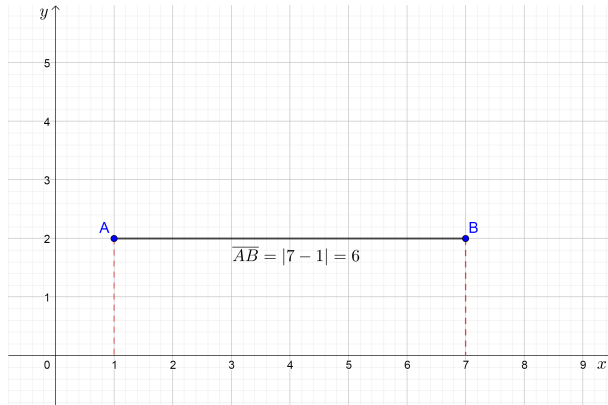
Assim, definimos a Função Distância Euclidiana como:

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

É importante observarmos que:

- Se o segmento AB for paralelo ao eixo Ox , então $d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|$.

Exemplo 4 Sejam $A = (1, 2)$ e $B = (7, 2)$, como na Figura 3.33. Temos que:

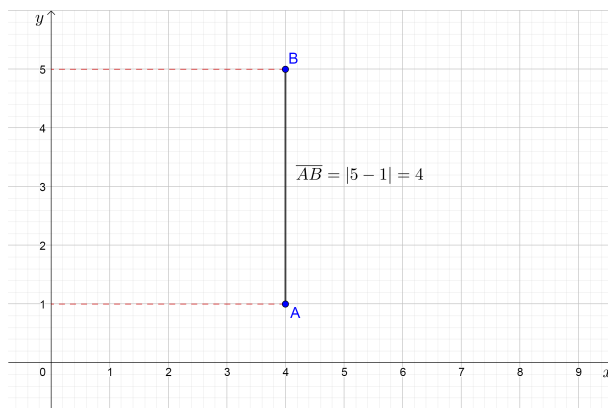


$$\begin{aligned} d_E(A, B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ d_E(A, B) &= \sqrt{(7 - 1)^2 + (2 - 2)^2} \\ d_E(A, B) &= \sqrt{(6)^2 + (0)^2} \\ d_E(A, B) &= \sqrt{(6)^2} \\ d_E(A, B) &= 6 \end{aligned}$$

Figura 3.32: Segmento AB paralelo ao eixo Ox

- Se o segmento AB for paralelo ao eixo Oy , então $d_E(A, B) = \sqrt{(y_B - y_A)^2} = |y_B - y_A|$.

Exemplo 5 Sejam $A = (4, 1)$ e $B = (4, 5)$, como na Figura 3.34. Temos que:



$$\begin{aligned} d_E(A, B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ d_E(A, B) &= \sqrt{(4 - 4)^2 + (5 - 1)^2} \\ d_E(A, B) &= \sqrt{(0)^2 + (4)^2} \\ d_E(A, B) &= \sqrt{(4)^2} \\ d_E(A, B) &= 4 \end{aligned}$$

Figura 3.33: Segmento AB paralelo ao eixo Oy

Dessa forma, temos que dados dois pontos quaisquer $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pertencentes ao plano, podemos definir a Função Distância Euclidiana como:

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

3.2.2 Ponto Médio

Definição 13 Chamamos de ponto médio do segmento AB um ponto M tal que, M pertence ao segmento AB e $\overline{AM} = \overline{BM}$. Veja Figura 3.35.

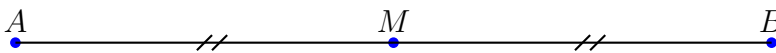
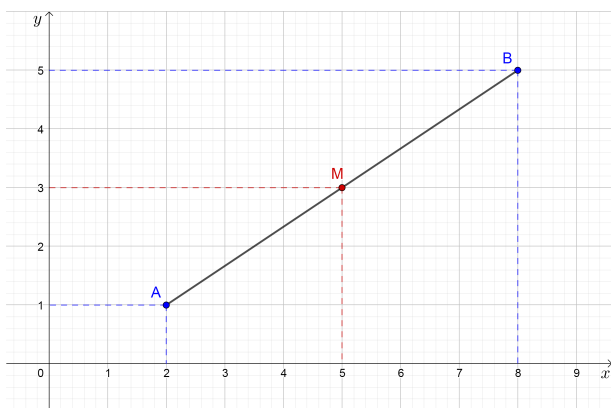


Figura 3.34: O ponto M é o ponto médio do segmento AB

Dados os pontos $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $M = (x_M, y_M)$, onde M é o ponto médio do segmento AB , temos que:

$$M = (x_M, y_M) = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

Exemplo 6 Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (8, 5)$, como na Figura 3.36. Temos que as coordenadas do ponto médio do segmento AB são dadas por :



$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{2 + 8}{2}, \frac{1 + 5}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{10}{2}, \frac{6}{2} \right)$$

$$M = (5, 3).$$

Figura 3.35: Ponto médio do segmento AB

3.2.3 Mediatriz

Definição 14 Chamamos de Mediatriz de um segmento a reta perpendicular a esse segmento e que passa por seu ponto médio. Veja Figura 3.37.

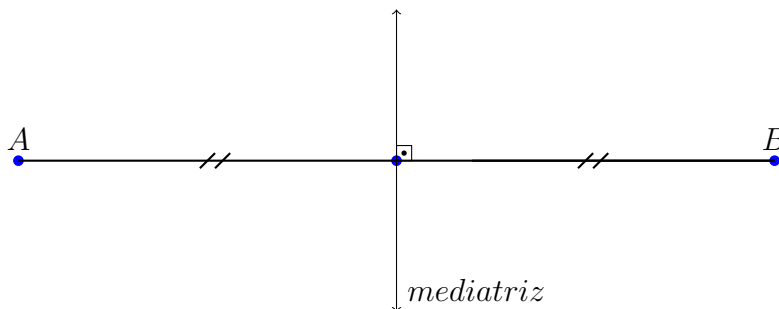


Figura 3.36: Mediatriz do segmento AB

Exemplo 7 Sejam $A = (2, 1)$ e $B = (8, 5)$ pontos do plano, temos que:

A reta que passa pelo ponto $M = (5, 3)$ e que é perpendicular ao segmento AB é a mediatriz do segmento AB . Veja Figura 3.38.

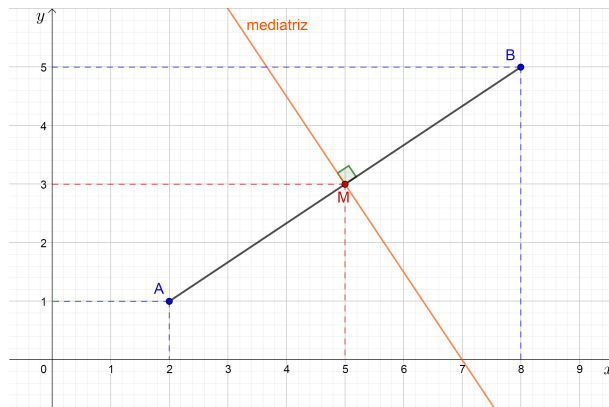


Figura 3.37: Mediatriz do segmento AB

Todos os pontos que pertencem à mediatriz de um segmento AB são equidistantes das extremidades desse segmento, ou seja, todos os pontos da mediatriz estão a uma mesma distância das extremidades A e B do segmento. Veja Figura 3.39.

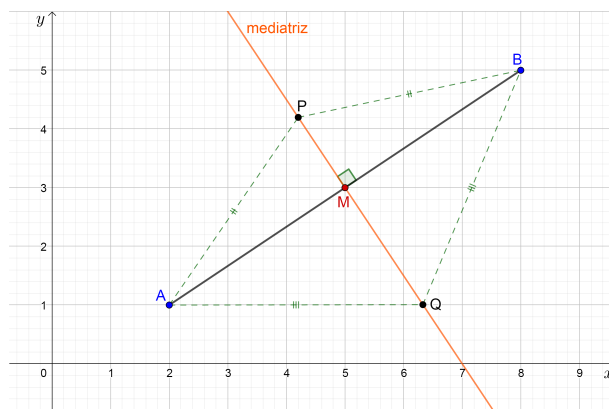


Figura 3.38: Pontos P e Q equidistantes dos pontos A e B

3.2.4 Circunferência

Definição 15 Chamamos de *Circunferência* a uma figura geométrica pertencente ao plano que é constituída pelo conjunto de pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano. Denominamos o ponto fixo de *centro* e a distância, do centro ao conjunto de pontos, de *raio*.

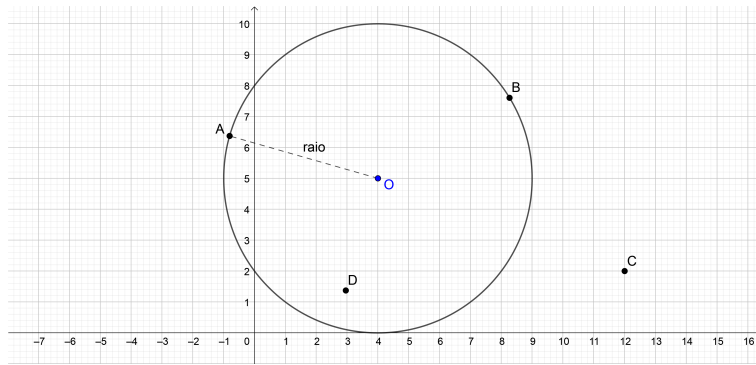


Figura 3.39: Circunferência euclidiana

Na Figura 3.40 representamos uma circunferência de centro no ponto $O = (4, 5)$ e raio $\overline{AO} = 5$, os pontos A e B pertencem a circunferência, e os pontos C e D não pertencem a circunferência.

A Geometria Euclidiana Plana não se limita ao que foi exposto neste capítulo, mas toda revisão bibliográfica feita até aqui é suficiente para nos dar base para desenvolvermos uma introdução à geometria do táxi.

Capítulo 4

Geometria do Táxi

A Geometria Euclidiana deu base para o desenvolvimento de outras formas de geometria, algumas muito próximas da euclidiana, outras bem mais complexas. Entre os diversos modelos de geometrias desenvolvidos, a Geometria do Táxi é a que se apresenta mais acessível para se trabalhar com alunos de nível fundamental e médio, pois se considerarmos as ruas de uma cidade sobre a malha quadriculada poderíamos defini-la, de uma forma simples, como sendo a geometria de um pedestre caminhando por essas ruas, ou ainda, como a geometria de um taxista dirigindo por essas ruas, respeitando os limites que as construções impõem sobre essa movimentação.

Toda construção deste capítulo está baseada em [3, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18].

4.1 A Função Distância Táxi

Para darmos início ao estudo da base axiomática da Geometria do Táxi, vamos definir a Função Distância Táxi entre dois pontos no plano.

Definição 16 *Considere o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$. A distância táxi $d_T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por:*

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|, \quad \text{onde } A = (x_A, y_A) \text{ e } B = (x_B, y_B).$$

Assim como na Geometria Euclidiana, na Geometria do Táxi os pontos são os pares ordenados (x, y) sendo $x, y \in \mathbb{R}$ e as retas são o conjunto solução das equações da forma $ax + by + c = 0$, sendo $a^2 + b^2 \neq 0$. Para melhor entendimento trabalharemos com pares de números inteiros sobre a malha quadriculada.

Exemplo 8 Sejam $A = (1, 2)$, $B = (7, 6)$. Veja Figura 4.1. Temos que $d_T(A, B)$ é dada por:
 Veja Figura 4.1.

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

$$d_T(A, B) = |7 - 1| + |6 - 2|$$

$$d_T(A, B) = 10$$

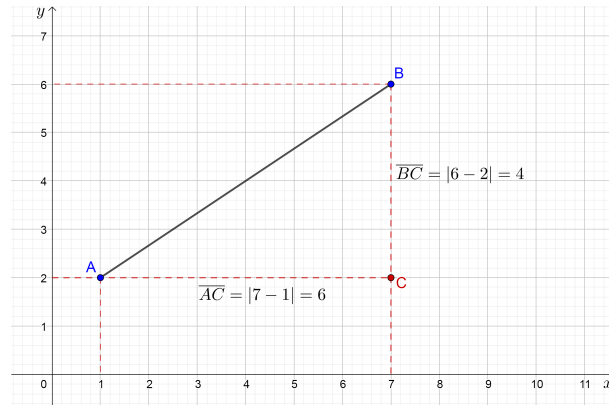


Figura 4.1: Distância Táxi entre os ponto A e B

Exemplo 9 Dados os pontos A, B, C, D, E, F, G e H , vamos calcular as distâncias abaixo utilizando a métrica do táxi. Veja Figura 4.2..

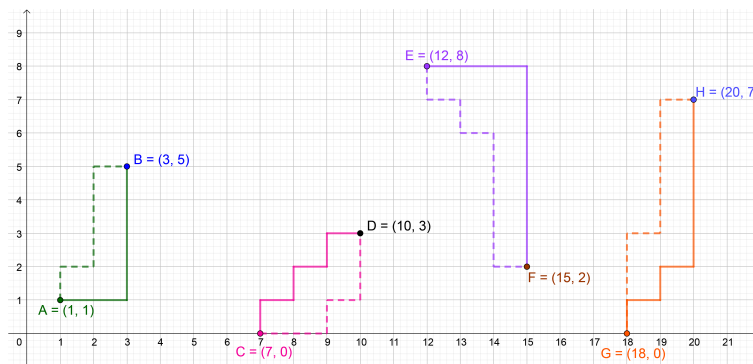


Figura 4.2: Distância Táxi entre os pontos

- $d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = |3 - 1| + |5 - 1| = 4 + 4 = 8$
- $d_T(C, D) = |x_D - x_C| + |y_D - y_C| = |10 - 7| + |3 - 0| = 3 + 3 = 6$
- $d_T(E, F) = |x_F - x_E| + |y_F - y_E| = |15 - 12| + |8 - 2| = 3 + 6 = 9$
- $d_T(G, H) = |x_H - x_G| + |y_H - y_G| = |20 - 18| + |7 - 0| = 2 + 7 = 9$

Para irmos de um ponto A a um ponto B , em geral, há mais de um caminho possível com a medida a $d_T(A, B)$. Se A e B estão contidos numa reta vertical (ou horizontal), o caminho é único.

4.1.1 Função Distância Táxi e Função Distância Euclidiana

Nessa seção, iremos comparar a distância táxi com a distância euclidiana. Como a Geometria do Táxi tem sua base na Geometria Euclidiana é importante fazermos essa comparação. Para melhor compreensão, iniciaremos com um exemplo simples que deixará claro as diferenças entre essas duas métricas.

Exemplo 10 *Sejam $A = (-1, -2)$ e $B = (3, 3)$. Vamos calcular a $d_T(A, B)$ e $d_E(A, B)$.*

Tomemos o ponto $C = (3, -2)$ tal que, o triângulo ABC seja retângulo em C . Veja Figura 4.3.

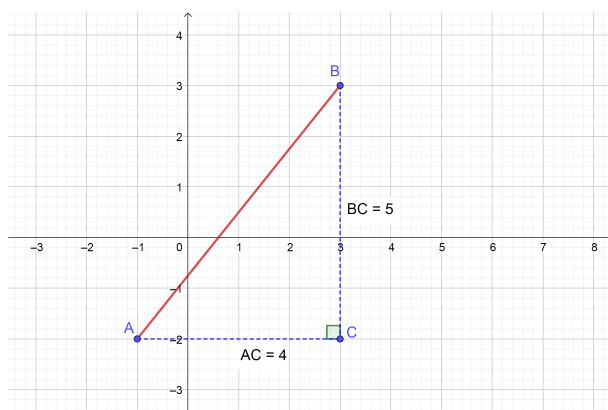


Figura 4.3: Distância entre os pontos A e B

Utilizando a Função Distância Táxi temos:

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

$$d_T(A, B) = |3 - (-1)| + |3 - (-2)| = 4 + 5 = 9$$

$$d_T(A, B) = 4 + 5$$

$$d_T(A, B) = 9$$

Por outro lado, utilizando a Função Distância Euclidiana temos:

$$d_E(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_E(A, B) = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (3 - (-2))^2}$$

$$d_E(A, B) = \sqrt{(4)^2 + (5)^2}$$

$$d_E(A, B) = \sqrt{16 + 25}$$

$$d_E(A, B) = \sqrt{41}$$

Para os dois pontos escolhidos no Exemplo 10, observamos que a Distância Táxi é maior que a Distância Euclidiana então, nos deparamos com a seguinte questão: Para todos os pontos do plano, é verdade que a Distância Euclidiana será sempre menor ou igual a Distância Táxi? Geometricamente comprovamos que sim, mas verificaremos de uma forma algébrica a veracidade desse fato.

Lema 1 *Se A e B são pontos distintos do plano, então $d_T(A, B) \geq d_E(A, B)$.*

Demonstração:

Sejam $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$ pontos distintos do plano.

Temos que, $|x_A - x_B| \geq 0$ e $|y_A - y_B| \geq 0$.

Logo, $|x_A - x_B||y_A - y_B| \geq 0$.

Considere a seguinte desigualdade,

$$2|x_A - x_B||y_A - y_B| \geq 0. \quad (4.1)$$

Some $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$ a ambos os lados da desigualdade (4.1).

Temos, $2|x_A - x_B||y_A - y_B| + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 \geq 0 + (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$.

Donde,

$$(|x_A - x_B| + |y_A - y_B|)^2 \geq (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2. \quad (4.2)$$

Note que os dois membros da desigualdade (4.2) são maiores ou iguais a zero.

Dessa forma, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros.

Segue que, $|x_A - x_B| + |y_A - y_B| \geq \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Sendo,

$$d_T(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \quad \text{e} \quad d_E(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Portanto, $d_T(A, B) \geq d_E(A, B)$.

■

Concluimos assim que, dados dois pontos quaisquer do plano a distância táxi entre eles será sempre maior ou igual a distância euclidiana. Mesmo a distância táxi sendo maior que a distância euclidiana veremos ao longo do capítulo que a métrica do táxi se aproxima mais da realidade em que vivemos quando estudamos deslocamento entre dois pontos dentro do contexto de cidade.

4.1.2 Verificação dos Axiomas

Definimos a Função Distância Táxi e fizemos a comparação dela com a Função Distância Euclidiana. Agora verificaremos que a base axiomática da Geometria do Táxi é a mesma da Geometria Euclidiana, diferindo em sua métrica e sendo o axioma de congruência de triângulo não válido para essa nova geometria.

Axiomas de Incidência

Em relação aos Axiomas de Incidência 1 e 2, vistos na seção 3.1.1, temos que como os pontos e as retas da Geometria do Táxi são definidos da mesma forma que na Geometria Euclidiana sempre existirão pontos que pertencem e pontos que não pertencem a uma determinada reta e ainda que dois pontos determinam uma única reta.

Exemplo 11 *Sejam $A = (-1, -3)$ e $B = (6, 5)$ pontos do plano. Veja Figura 4.4.*

A reta que contém os pontos A e B é definida por $r : ax + by + c = 0$, onde:

$$a = y_B - y_A = 5 - (-3) = 5 + 3 = 8, \quad b = x_A - x_B = -1 - 6 = -7,$$

$$c = (x_B - x_A)y_A + (y_A - y_B)x_A = (6 - (-1))(-3) + (-3 - 5)(-1) = -13$$

Logo, $r : 8x - 7y - 13 = 0$ é a reta definida pelos pontos A e B .

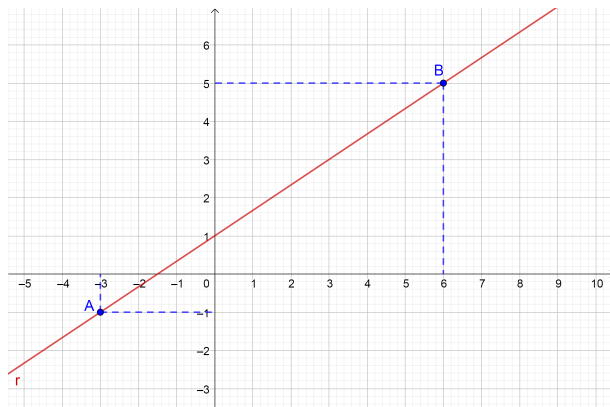


Figura 4.4: Reta determinada pelos pontos A e B

Axiomas de Ordem

Definição 17 Na Geometria do Táxi, C está entre A e B se, e somente se:

1. $d_T(A, C) + d_T(C, B) = d_T(A, B)$
2. A, B e C são pontos distintos e colineares.

Definição 18 Dizemos que um ponto C é um ponto intermediário dos pontos A e B se a condição 1 da Definição 17 é válida, isto é, $d_T(A, C) + d_T(C, B) = d_T(A, B)$.

Exemplo 12 Sejam $A = (2, 2)$ e $C = (5, 6)$ pontos do plano. Veja Figura 4.5.

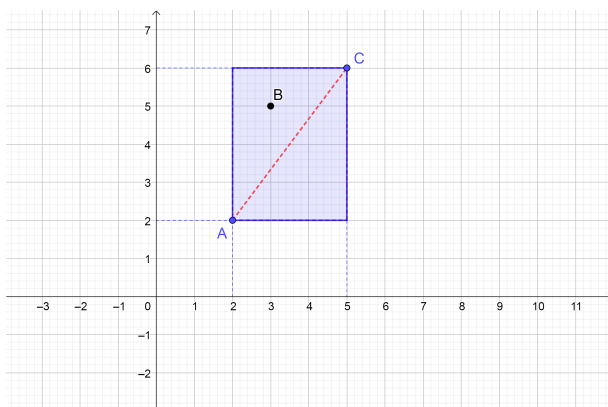


Figura 4.5: Estar Entre na Geometria do Táxi

De acordo com Figura 4.5 todos os pontos que satisfazem a condição número 1, da definição 17, estão contidos no retângulo azul porém, quando aplicamos a condição número 2, apenas os pontos que estão sobre a linha pontilhada em vermelho é que a satisfazem, excluindo suas extremidades os pontos A e C . Dessa forma, podemos afirmar que o conjunto de pontos que se encontram entre A e C na Geometria do Táxi é o mesmo conjunto da Geometria Euclidiana.

Com a definição 18, vemos que o conjunto dos pontos intermediários dos pontos A e C é, em geral, um retângulo (Veja Figura 4.5). Caso os pontos estejam em uma mesma reta horizontal (ou vertical), o conjunto dos pontos intermediários de A e B será o segmento AB .

Em relação aos Axiomas de Ordem 3 e 4 temos que, dizer que o ponto B localiza-se entre os pontos A e C é equivalente a dizer que, os pontos A e C estão separados pelo ponto B visto que estamos com pontos sobre uma mesma reta, uma vez que a relação de “estar entre” na geometria do táxi é a mesma da geometria euclidiana. E por fim podemos afirmar que uma reta m determina exatamente dois semi-planos distintos cuja interseção é a própria reta m , pois trabalhamos com o plano euclidiano e as retas definidas são as mesmas da geometria euclidiana.

Axiomas de Medição de Segmento

Na Geometria do Táxi, valem os mesmos axiomas de Medição de Segmento da Geometria Euclidiana.

Dados dois pontos A e B , temos a distância táxi e a distância euclidiana entre A e B . Na Geometria do Táxi existem várias possibilidades de trajetos do ponto A ao ponto B quando calculada a distância táxi entre esses pontos. Quando esses pontos estiverem sobre uma mesma reta paralela ao eixo Ox ou ao eixo Oy , como na Figura 4.6, a distância táxi será igual a distância euclidiana, ou seja, será o comprimento euclidiano do segmento determinado por esses pontos.

Exemplo 13 Dado um segmento AB paralelo aos eixos coordenados, temos que a distância táxi é igual a distância euclidiana. Veja a Figura 4.6.

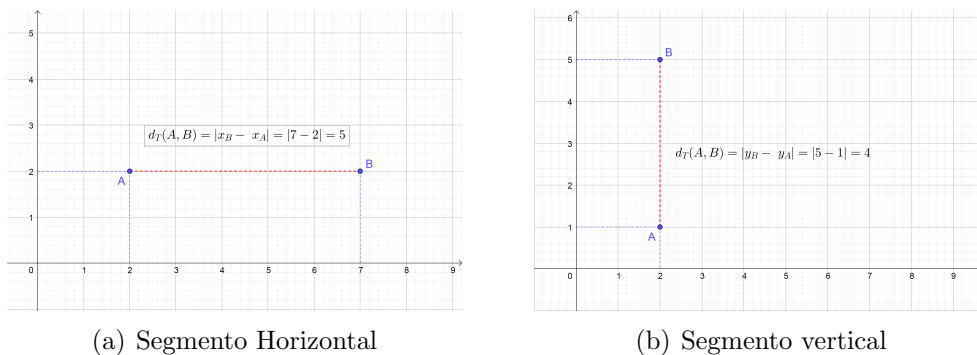


Figura 4.6: Distância Euclidiana igual a Distância Táxi

Caso esses pontos estejam em uma reta inclinada, em relação aos eixos coordenados, usaremos a distância táxi para determinarmos a distância entre eles.

Exemplo 14 Diferentes formas de irmos do ponto A ao ponto B , sendo todas elas a menor distância possível. Veja Figura 4.7.

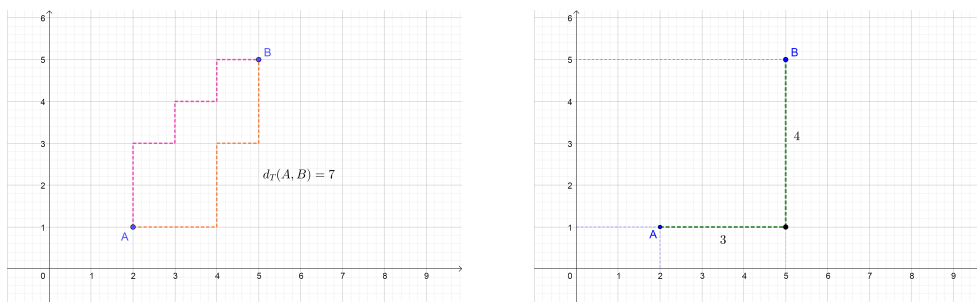


Figura 4.7: Diferentes formas de irmos do ponto A ao ponto B

Para mostrarmos a validade do Axioma 7 (página 13), dada uma reta, apresentaremos uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais, de modo que o módulo da diferença entre quaisquer dois deles meça a distância entre os pontos correspondentes.

Teorema 4 *Os pontos de uma reta sempre podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais, de modo que o módulo da diferença entre dois quaisquer destes números meça a distância entre os pontos correspondentes.*

Demonstração: Seja r uma reta do plano.

1º Caso. Seja a reta r vertical com equação $x = x_0$. Veja Figura 4.8.

Definimos a função $f : r \rightarrow \mathbb{R}$, por $f(x_0, y) = y$, $\forall (x_0, y) \in r$.

Esta função é bijetora e dados $A = (x_0, y_A)$ e $B = (x_0, y_B)$ em r , temos que:

$$|f(A) - f(B)| = |f(x_0, y_A) - f(x_0, y_B)| = |y_A - y_B| = d_T(A, B).$$

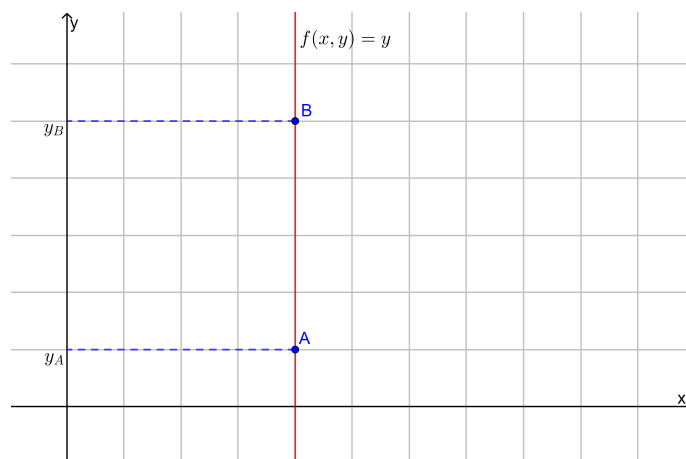


Figura 4.8: Reta Vertical

2º Caso. Seja a reta r horizontal com equação $y = y_0$. Veja Figura 4.9.

Definimos a função $f : r \rightarrow \mathbb{R}$, por $f(x, y_0) = x$, $\forall (x, y_0) \in r$.

Esta função é bijetora e dados $A = (x_A, y_0)$ e $B = (x_B, y_0)$ em r , temos que:

$$|f(A) - f(B)| = |f(x_A, y_0) - f(x_B, y_0)| = |x_A - x_B| = d_T(A, B).$$

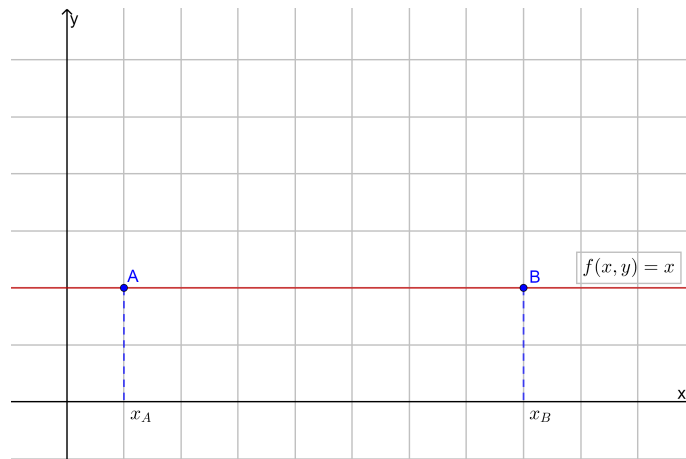


Figura 4.9: Retas Horizontal

3º Caso. A reta r não é vertical, nem horizontal e tem uma equação da forma $y = mx + b$.
Veja Figura 4.10.

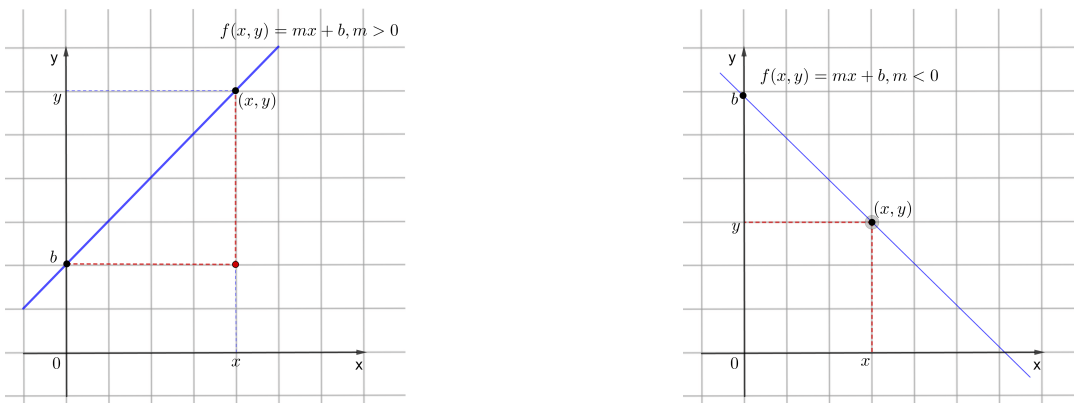


Figura 4.10: Retas inclinadas no plano

Nesse caso, definimos a função $f : r \rightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$f(x, y) = f(x, mx + b) = (1 + |m|)x, \quad \forall (x, y) \in r.$$

i. A função f é injetora. De fato,

se $(x_1, mx_1 + b)$ e $(x_2, mx_2 + b)$ pertencem a r e $f(x_1, mx_1 + b) = f(x_2, mx_2 + b)$,

então $(1 + |m|)x_1 = (1 + |m|)x_2$.

Como $1 + |m| \neq 0$, segue que $x_1 = x_2$.

Portanto $(x_1, mx_1 + b) = (x_2, mx_2 + b)$.

ii. A função f é sobrejetora. De fato,

$$\text{dado } y \in \mathbb{R}, \text{ seja } A = \left(\frac{y}{1 + |m|}, \frac{my + b(1 + |m|)}{1 + |m|} \right).$$

Temos que $A \in r$, pois

$$m \left(\frac{y}{1 + |m|} \right) + b = \frac{my}{1 + |m|} + \frac{b(1 + |m|)}{1 + |m|} = \frac{my + b(1 + |m|)}{1 + |m|}.$$

$$\text{Além disso, } f(A) = (1 + |m|) \frac{y}{1 + |m|} = y.$$

Segue de (i) e (ii) que f é bijetora.

Temos também que, sendo $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$, tais que $A, B \in r$

Como A e B pertencem a reta r , temos que:

$$\begin{cases} y_A = m \cdot x_A + b \\ y_B = m \cdot x_B + b \end{cases} \Rightarrow y_A - y_B = m(x_A - x_B)$$

Como a reta r não é vertical, temos que $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, sendo $x_A \neq x_B$.

Segue que,

$$\begin{aligned} |f(A) - f(B)| &= (f(x_A, y_A) - f(x_B, y_B)) \\ |f(A) - f(B)| &= |(1 + |m|)x_A - (1 + |m|)x_B| \\ |f(A) - f(B)| &= |(1 + |m|)(x_A - x_B)| \\ |f(A) - f(B)| &= |1 + |m||x_A - x_B| \\ |f(A) - f(B)| &= (1 + |m|)|x_A - x_B| \\ |f(A) - f(B)| &= |x_A - x_B| + |m||x_A - x_B| \\ |f(A) - f(B)| &= |x_A - x_B| + \left| \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \right| |x_A - x_B| \\ |f(A) - f(B)| &= |x_A - x_B| + |y_A - y_B| \\ |f(A) - f(B)| &= d_T((x_A, y_A), (x_B, y_B)) \\ |f(A) - f(B)| &= d_T(A, B) \end{aligned}$$

Logo, $f : r \rightarrow \mathbb{R}$ representa uma correspondência biunívoca, sendo

$$|f(A) - f(B)| = d_T(A, B), \quad \forall A, B \in r.$$

■

Teorema 5 Se o ponto C encontra-se entre A e B então: $d_T(A, C) + d_T(C, B) = d_T(A, B)$

Demonstração: Sejam $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, pontos distintos do plano, tais que o ponto C se encontra entre os pontos A e B . Temos que,

$$d_T(A, C) + d_T(C, B) = (|x_A - x_C| + |y_A - y_C|) + (|x_C - x_B| + |y_C - y_B|)$$

$$d_T(A, C) + d_T(C, B) = (|x_A - x_C| + |x_C - x_B|) + (|y_A - y_C| + |y_C - y_B|)$$

$$d_T(A, C) + d_T(C, B) = |(x_A - x_C) + (x_C - x_B)| + |(y_A - y_C) + (y_C - y_B)|$$

$$d_T(A, C) + d_T(C, B) = |(x_A - x_C + x_C - x_B)| + |(y_A - y_C + y_C - y_B)|$$

$$d_T(A, C) + d_T(C, B) = |(x_A - x_B)| + |(y_A - y_B)|$$

$$d_T(A, C) + d_T(C, B) = d_T(A, B)$$

■

As conclusões sobre noções básicas de distância, são as mesma da Geometria Euclidiana:

1. $A = B$ se, e somente se, $d_T(A, B) = 0$.
2. $d_T(A, B)$ é sempre maior ou igual a zero.
3. Para quaisquer dois pontos A e B , temos que $d_T(A, B) = d_T(B, A)$.

Lema 2 (*Desigualdade Triangular*) Para quaisquer três pontos distintos A, B e C do plano tem-se

$$d_T(A, C) \leq d_T(A, B) + d_T(B, C)$$

A igualdade ocorre se e, somente se B pertence ao intervalo AC .

Demonstração:

Para demonstrarmos a validade da Desigualdade Triangular na Geometria do Táxi, utilizaremos um resultado da desigualdade para valor absoluto, ou seja,

$$|a| + |b| \geq |a + b|, \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (4.3)$$

Sejam $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, pontos distintos do plano.

Temos que,

$$d_T(A, B) + d_T(B, C) = (|x_A - x_B| + |y_A - y_B|) + (|x_B - x_C| + |y_B - y_C|)$$

$$d_T(A, B) + d_T(B, C) = (|x_A - x_B| + |x_B - x_C|) + (|y_A - y_B| + |y_B - y_C|)$$

Pela desigualdade de valor absoluto (3.3), temos que:

$$d_T(A, B) + d_T(B, C) \geq |(x_A - x_B) + (x_B - x_C)| + |(y_A - y_B) + (y_B - y_C)|$$

$$d_T(A, B) + d_T(B, C) \geq |(x_A - x_B + x_B - x_C)| + |(y_A - y_B + y_B - y_C)|$$

$$d_T(A, B) + d_T(B, C) \geq |(x_A - x_C)| + |(y_A - y_C)|$$

$$d_T(A, B) + d_T(B, C) \geq d_T(A, C)$$

■

Na Geometria do Táxi, tanto os axiomas sobre medição de ângulos quanto o axioma das paralelas são verificados.

4.1.3 Congruência de Triângulos na Geometria do Táxi

O Axioma de Congruência da geometria euclidiana afirma que, dois segmentos são ditos congruentes quando possuem a mesma medida, ou seja, quando a distância entre suas extremidades forem iguais. Na geometria do táxi, diremos que dois segmentos são congruentes quando a distância táxi entre suas extremidades possuírem a mesma medida.

Exemplo 15 Considere os segmentos AB e OP . Figura 4.11.

Calculando as distâncias táxi temos:

$$d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

$$d_T(O, P) = |x_P - x_O| + |y_P - y_O|$$

$$d_T(A, B) = |3 - 1| + |4 - 1|$$

$$d_T(O, P) = |9 - 5| + |2 - 1|$$

$$d_T(A, B) = 5$$

$$d_T(O, P) = 5$$

Portanto, o segmento AB é congruente ao segmento OP .

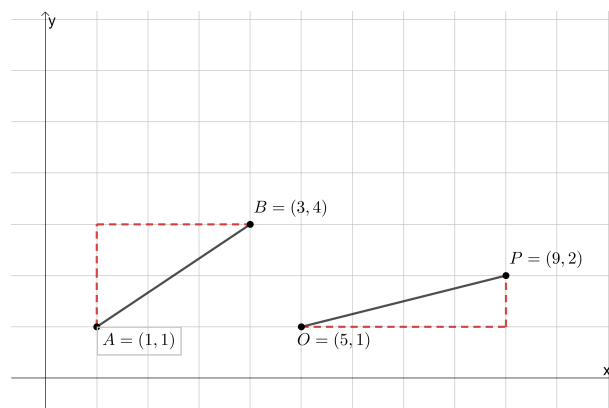


Figura 4.11: Segmentos Congruentes na Geometria do Táxi

É importante observarmos que, a representação geométrica de um segmento é a mesma tanto na geometria do táxi quanto na geometria euclidiana, porém quando falamos em distância entre seus extremos estamos trabalhando com duas métricas distintas. O trajeto em vermelho da Figura 4.11 representa uma possibilidade de se mover do ponto A ao ponto B , mas ele não representa o segmento AB , o mesmo ocorre com o segmento OP .

Triângulos na Geometria do Táxi

Na Geometria do Táxi tanto a figura do triângulo quanto a classificação de acordo com a medida de seus lados é a mesma da geometria euclidiana, porém quando falamos em “lados do triângulo” não estamos nos referindo ao segmento que une seus vértices e sim a distância táxi entre seus vértices. Temos então:

Triângulo Escaleno: Possui três “lados” com medidas distintas.

Triângulo Isósceles: Possui dois “lados” de mesma medida.

Triângulo Equilátero: Possui três “lados” de mesma medida.

Exemplo 16 *Os triângulos ABC , PQR e UVW podem ser classificados da seguinte maneira: Veja Figura 4.12.*

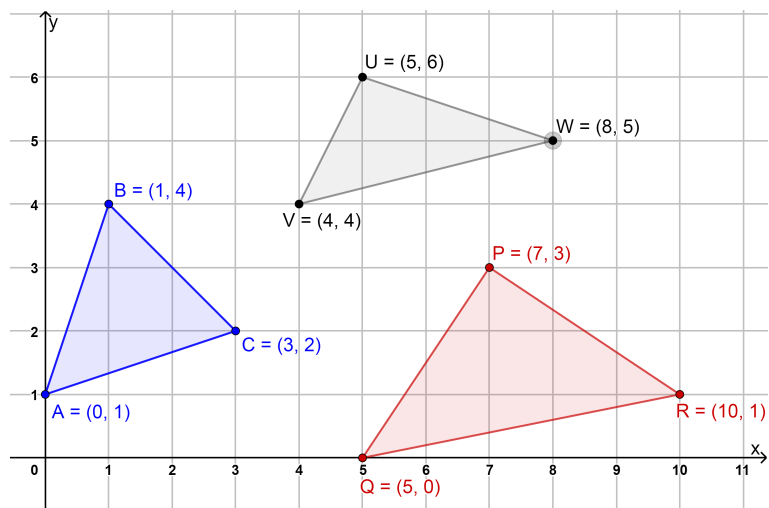


Figura 4.12: Triângulos ABC , PQR e UVW

Triângulo ABC , sendo $A = (0, 1)$, $B = (1, 4)$ e $C = (3, 2)$

$$\begin{aligned} d_T(A, B) &= |x_B - x_A| + |y_B - y_A| & d_E(A, B) &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ d_T(A, B) &= |1 - 0| + |4 - 1| & d_E(A, B) &= \sqrt{(1 - 0)^2 + (4 - 1)^2} \\ d_T(A, B) &= 4 & d_E(A, B) &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Triângulo ABC , sendo $A = (0, 1)$, $B = (1, 4)$ e $C = (3, 2)$

$$\begin{aligned} d_T(A, C) &= |x_C - x_A| + |y_C - y_A| & d_E(A, C) &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ d_T(A, C) &= |3 - 0| + |2 - 1| & d_E(A, C) &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 1)^2} \\ d_T(A, C) &= 4 & d_E(A, C) &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_T(B, C) &= |x_C - x_B| + |y_C - y_B| & d_E(B, C) &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ d_T(B, C) &= |3 - 1| + |2 - 4| & d_E(B, C) &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 4)^2} \\ d_T(B, C) &= 4 & d_E(B, C) &= \sqrt{8} \end{aligned}$$

$\triangle ABC$: Triângulo Equilátero

$\triangle ABC$: Triângulo Isósceles

O triângulo ABC é classificado como Equilátero na geometria do táxi, mesmo não tendo seus ângulos internos congruentes, e como Isósceles na geometria euclidiana. Assim, temos que a classificação quanto aos lados dos triângulos não está relacionada com os ângulos no contexto da geometria do táxi.

Triângulo PQR , sendo $P = (7, 3)$, $Q = (5, 0)$ e $R = (10, 1)$

$$\begin{aligned} d_T(P, Q) &= |x_Q - x_P| + |y_Q - y_P| & d_E(P, Q) &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ d_T(P, Q) &= |5 - 7| + |0 - 3| & d_E(P, Q) &= \sqrt{(5 - 7)^2 + (0 - 3)^2} \\ d_T(P, Q) &= 5 & d_E(P, Q) &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_T(P, R) &= |x_R - x_P| + |y_R - y_P| & d_E(P, R) &= \sqrt{(x_R - x_P)^2 + (y_R - y_P)^2} \\ d_T(P, R) &= |10 - 7| + |1 - 3| & d_E(P, R) &= \sqrt{(10 - 7)^2 + (1 - 3)^2} \\ d_T(P, R) &= 5 & d_E(P, R) &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_T(Q, R) &= |x_R - x_Q| + |y_R - y_Q| & d_E(Q, R) &= \sqrt{(x_R - x_Q)^2 + (y_R - y_Q)^2} \\ d_T(Q, R) &= |10 - 5| + |1 - 0| & d_E(Q, R) &= \sqrt{(10 - 5)^2 + (1 - 0)^2} \\ d_T(Q, R) &= 6 & d_E(Q, R) &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

$\triangle PQR$: Triângulo Isósceles

$\triangle PQR$: Triângulo Isósceles

O triângulo PQR é classificado como Isósceles tanto na geometria do táxi quanto na geometria euclidiana, ou seja, é possível termos a mesma classificação para o triângulo nas duas geometrias.

Triângulo UVW , sendo $U = (5, 6)$, $V = (4, 4)$ e $W = (8, 5)$

$$\begin{array}{ll}
 d_T(U, V) = |x_V - x_U| + |y_V - y_U| & d_E(U, V) = \sqrt{(x_V - x_U)^2 + (y_V - y_U)^2} \\
 d_T(U, V) = |4 - 5| + |4 - 6| & d_E(U, V) = \sqrt{(4 - 5)^2 + (4 - 6)^2} \\
 d_T(U, V) = 3 & d_E(U, V) = \sqrt{5} \\
 \\
 d_T(U, W) = |x_W - x_U| + |y_W - y_U| & d_E(U, W) = \sqrt{(x_W - x_U)^2 + (y_W - y_U)^2} \\
 d_T(U, W) = |8 - 5| + |5 - 6| & d_E(U, W) = \sqrt{(8 - 5)^2 + (5 - 6)^2} \\
 d_T(U, W) = 4 & d_E(U, W) = \sqrt{10} \\
 \\
 d_T(V, W) = |x_W - x_V| + |y_W - y_V| & d_E(V, W) = \sqrt{(x_W - x_V)^2 + (y_W - y_V)^2} \\
 d_T(V, W) = |8 - 4| + |5 - 4| & d_E(V, W) = \sqrt{(8 - 4)^2 + (5 - 4)^2} \\
 d_T(V, W) = 5 & d_E(V, W) = \sqrt{17}
 \end{array}$$

ΔUVW : Triângulo Escaleno

ΔUVW : Triângulo Escaleno

O triângulo UVW é classificado como Escaleno tanto na geometria do táxi quanto na geometria euclidiana, ou seja, é possível termos a mesma classificação para o triângulo nas duas geometrias.

4.1.4 Não Validade do Axioma de Congruência LAL

Na geometria Euclidiana dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Pelo Primeiro Caso de Congruência de Triângulo (LAL), na geometria euclidiana temos que, dados dois triângulos ABC e EFG , se $AB=EF$, $AC=EG$ e $\hat{A}=\hat{E}$, então $\Delta ABC \equiv \Delta EFG$. Esse axioma de congruência **NÃO É VÁLIDO** na geometria do táxi, como mostraremos.

Exemplo 17 Sejam ABC e PQR triângulos do plano. Veja Figura 4.13.

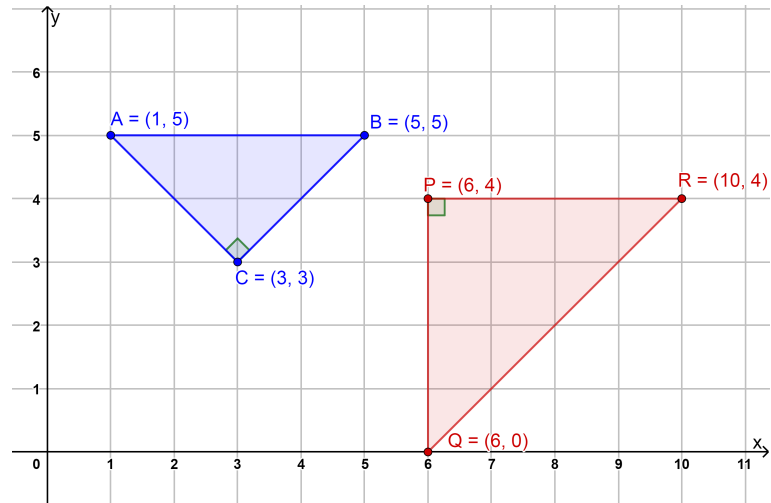


Figura 4.13: Não válida do axioma LAL

Temos que:

$$d_T(C, A) = d_T(P, Q) = 4$$

$$d_T(C, B) = d_T(P, R) = 4$$

$$\hat{C} = \hat{P} = 90^\circ$$

Mas, $d_T(A, B) = 4$ e $d_T(Q, R) = 8$.

Portanto, os triângulos ABC e PQR não são congruentes.

Verificamos assim, a não validade do axioma de congruência de triângulos na geometria do táxi e como consequência a não validade dos casos de congruência de triângulos.

4.2 Circunferência Táxi

Na Geometria do Táxi definiremos Circunferência Táxi como sendo o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância táxi fixa de um ponto dado. Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 18 Dado o ponto $A = (4, 3)$, vamos determinar todos os pontos que estão distantes 3 unidades de A na métrica do táxi.

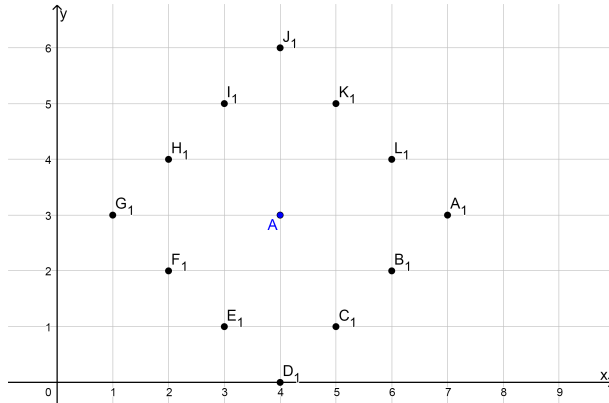


Figura 4.14: Coordenadas inteiras

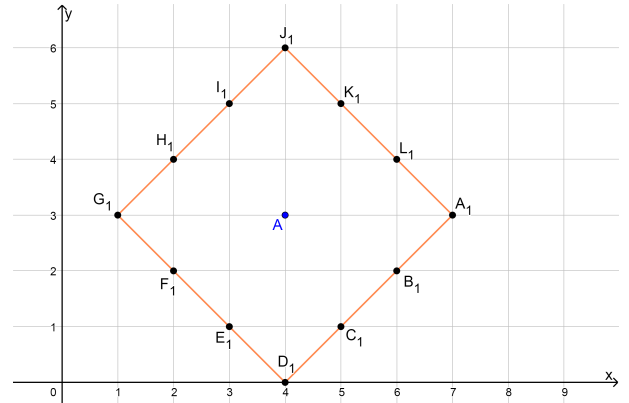


Figura 4.15: Coordenadas reais

Na Figura 4.14 podemos observar que os pontos A_1 até o ponto L_1 estão localizados a uma distância de 3 unidade do ponto A , é importante ressaltar que destacamos os pontos com coordenadas inteiras, mas há pontos que não possuem coordenadas inteiras (veja Figura 4.15) e que pertencem a esse conjunto de pontos que distam 3 unidades de A na métrica do táxi.

Ao unirmos todos esses pontos formamos o conjunto C , ou seja, o conjunto de todos os pontos P que distam 3 unidades de A na métrica do táxi. A definição de circunferência na geometria do táxi é a mesma da geometria euclidiana diferindo apenas na representação de seus pontos no plano, uma vez que a métrica utilizada não é a mesma.

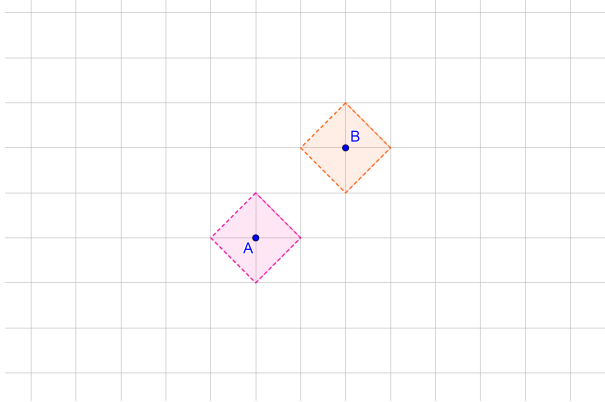
4.3 Mediatriz Táxi

Na Geometria Euclidiana a mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio de AB , também é o conjunto dos pontos equidistantes de A e B . Na Geometria do Táxi isso não vale, isto é, o conjunto dos pontos equidistantes de dois pontos A e B não é, em geral, a reta perpendicular que passa pelo ponto médio de AB . Tal conjunto pode não ser uma reta.

Vejamos os exemplos a seguir.

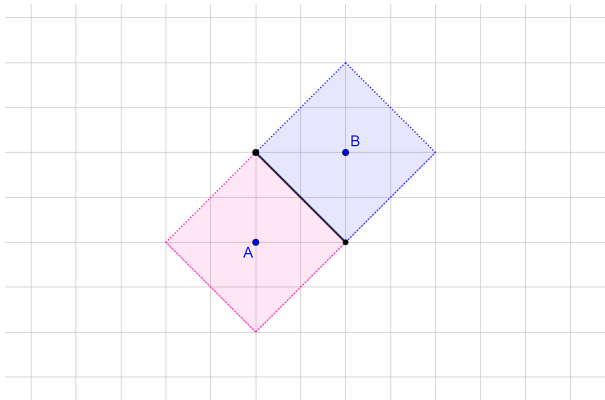
Exemplo 19 Dados os pontos A e B no plano, vamos determinar o conjunto dos pontos M que estão:

a. A uma distância táxi 1, de A e B .



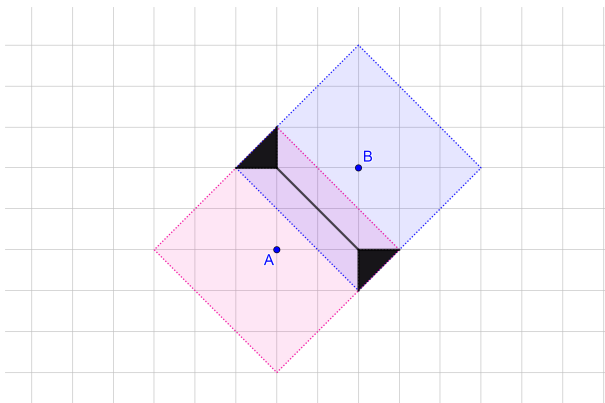
O conjunto dos pontos P que estão a mesma distância táxi 1 de A e B é vazio, pois o ponto médio euclidiano do segmento AB está a uma distância táxi 2 de A e B .

b. A uma distância táxi 2, de A e B .



O conjunto dos pontos P que estão a mesma distância táxi 2 de A e B está representado pela interseção das circunferências táxi de raio 2 e centros nos pontos A e B .

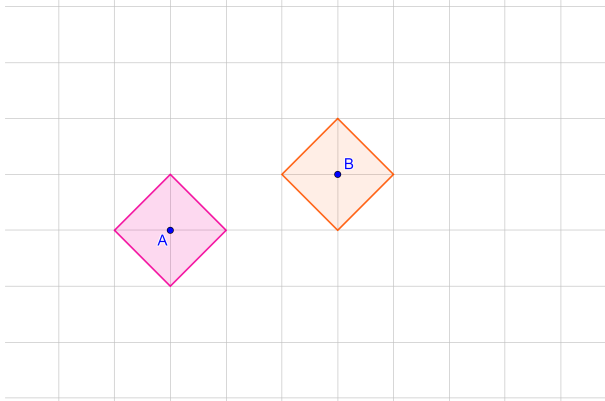
c. A uma distância táxi 3, de A e B .



O conjunto dos pontos P que estão a mesma distância táxi 3 de A e B está representado pela interseção das circunferências táxi de raio 3 e centros nos pontos A e B juntamente com a parte sombreada.

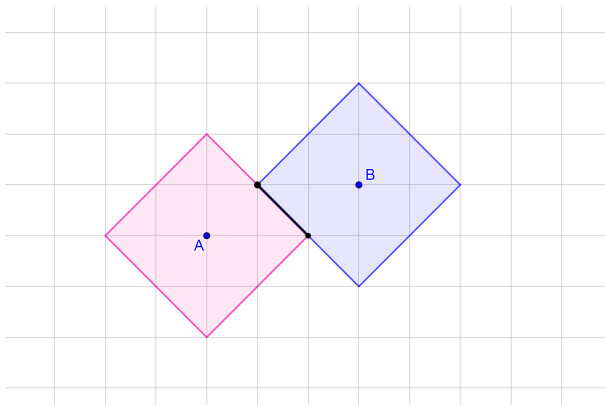
Exemplo 20 Dados os pontos A e B no plano, vamos determinar o conjunto dos pontos M que estão:

a. A uma distância táxi 1, de A e B .



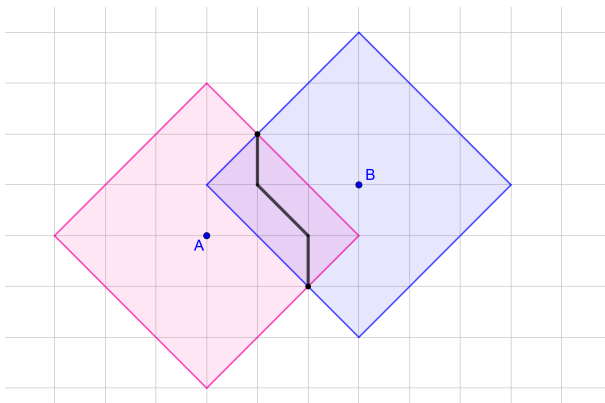
O conjunto dos pontos P que estão a mesma distância táxi 1 de A e B é vazio, pois o ponto médio euclidiano do segmento AB está a uma distância táxi 2 de A e B .

b. A uma distância táxi 2, de A e B .



O conjunto dos pontos P que estão a mesma distância táxi 2 de A e B está representado pela interseção das circunferências táxi de raio 2 e centros nos pontos A e B .

c. A uma distância táxi 3, de A e B .



O conjunto dos pontos P que estão a mesma distância táxi 3 de A e B está representado pela interseção das circunferências táxi de raio 3 e centros nos pontos A e B .

Capítulo 5

Atividades Pedagógicas

A geometria do táxi é um conteúdo ausente no currículo da educação básica e até mesmo do ensino superior, é sabido que a inclusão desse tipo de geometria no ensino tem muito a agregar para à compreensão do aluno em relação a matemática e seu cotidiano. A apresentação de uma geometria onde a métrica é diferente da usada por Euclides, mas muito utilizada no dia-a-dia, pode levar o aluno a mergulhar nos conceitos da matemática pura, a partir do momento que ele é atraído por algo que costuma fazer de forma rotineira. As atividades propostas foram desenvolvidas com base em [5, 6, 9, 11, 13, 14, 16, 17, 18].

Neste capítulo apresentamos atividades pedagógicas que irão auxiliar os professores da Educação Básica no ensino da Geometria, tendo a Geometria do Táxi como exemplo de uma Geometria diferente da Euclidiana, uma vez que a BNCC (Base Nacional Curricular Comum) [5] considera à matemática um "sistemas que contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos". Sendo assim, a Geometria do Táxi se mostra um conteúdo rico em aplicações do dia a dia, permitindo ao aluno relacionar o conhecimento matemático teórico com algo de sua vida prática, ainda que com algumas ressalvas.

Ainda de acordo com a BNCC (Base Nacional Curricular Comum) [5], na Educação Básica é esperado que o ensino da matemática garanta aos alunos a possibilidade de relacionar observações empíricas do mundo real a representações variadas como tabelas, gráficos, figuras entre outros e que possam associar essas representações a conceitos e propriedades, sendo assim possível fazer conjecturas e induções. Dessa forma, os alunos desenvolvem um mecanismo que os faz utilizar o conhecimento matemático para resolver situações problemas dentro de vários contextos.

Para melhor compreensão, os objetivos e procedimentos metodológicos serão descritos de

acordo com cada atividade. Antes de iniciarmos as atividades iremos apresentar as habilidades esperadas dos alunos do Ensino Fundamental nos Anos Iniciais (Tabela 5.1) e Finais (Tabela 5.2) e do Ensino Médio (Tabela 5.3), baseado na BNCC (Base Nacional Curricular Comum) [5], essa base é fundamental para que o professor tenha clareza das habilidades esperadas do aluno em cada ano escolar permitindo assim uma elaboração mais clara das atividades bem como de seus objetivos.

Tabela 5.1: Matemática no Ensino Fundamental Séries Iniciais- BNCC

<i>Ano</i>	<i>Unidade Temática</i>	<i>Objeto de Conhecimento</i>	<i>Habilidades</i>
1	Geometria	Localização de objetos e de pessoas no espaço	(EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, utilizando termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial
2		Esboço de roteiros e de plantas simples	(EF02MA13) Esboçar roteiros a ser seguidos ou plantas de ambientes familiares, assinalando entradas, saídas e alguns pontos de referência.
3		Localização e movimentação: representação de objetos e pontos de referência	(EF03MA12) Descrever e representar, por meio de esboços de trajetórias a movimentação de pessoas ou de objetos no espaço, incluindo mudanças de direção e sentido, com base em diferentes pontos de referência.
4		Paralelismo e perpendicularismo	(EF04MA16) Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos e mapas empregando termos como intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.
5		Plano cartesiano: coordenadas cartesianas (1ºQ), representação de deslocamentos no plano cartesiano	(EF05MA15) Interpretar, descrever e representar a localização ou movimentação de objetos no plano cartesiano (1ºQ), utilizando coordenadas cartesianas, indicando mudanças de direção e de sentido e giros.

Tabela 5.2: Matemática no Ensino Fundamental Séries Finais- BNCC

<i>Ano</i>	<i>Unidade Temática</i>	<i>Objeto de Conhecimento</i>	<i>Habilidades</i>
6	Geometria	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
7		A circunferência como lugar geométrico	(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
8		Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
9		Distância entre pontos no plano cartesiano. Relações métricas no triângulo retângulo. Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração	(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas. (EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.

Tabela 5.3: Matemática no Ensino Médio - BNCC [5]

<i>Habilidades</i>
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

É importante ressaltarmos que não foram expressas todas as habilidades contidas na BNCC, apenas aquelas relacionadas as atividades que serão apresentadas no decorrer desse trabalho. Essas diretrizes são de fundamental importância para a elaboração de um plano de trabalho conciso e dinâmico. Todas as atividades precisam estar de acordo com as habilidades esperadas dos alunos para que os mesmo possam experimentar e interiorizar o caráter do raciocínio hipotético-dedutivo da Matemática, contraposto ao raciocínio hipotético-indutivo que é uma das principais característica das demais ciências .

Tais habilidades têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância. Isso significa percebê-la como um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construído, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados (BNCC, 2017).

5.1 ATIVIDADE 1 - Conhecendo a Geometria do Táxi

Para iniciarmos o estudo da Geometria do Táxi é importante trabalharmos com atividades que não utilizem fórmulas e conceitos muito abstratos, nesse primeiro momento, para que o aluno não se sinta desmotivado e perca o interesse pelo conteúdo.

Nível Escolar: Fundamental - Séries Iniciais e Finais

Tema da Aula: Que caminho seguir?

Material utilizado

- **Séries Iniciais:** 4 Cartelas de ovos para formar o plano cartesiano no 1^o quadrante, tampa de garrafa pet (preferência duas cores distintas ou marcadas com um sinal que identifique o dono da tampa), brinde (algo que desperte o interesse do aluno).
- **Séries Finais:** 4 Cartelas de ovos para formar o plano cartesiano com os 4 quadrantes, tampa de garrafa pet (preferência duas cores distintas ou marcadas com um sinal que identifique o dono da tampa), brinde (algo que desperte o interesse do aluno).

Objetivos da Aula

- Identificar o conhecimento prévio dos alunos sobre movimentação no plano cartesiano nos sentidos horizontais e verticais.
- Levar o aluno a identificar percursos diferentes para se chegar ao mesmo objeto.

Metodologia

Os alunos irão se dividir em duplas. Cada dupla deverá ter uma cartela de ovos (veja Figura 5.1) e 20 tampinhas de garrafa pet, sendo duas cores diferentes ou marcadas de forma a identificar o dono da tampa.

Em cada cartela de ovo terá duas marcações de "PARTIDA" onde cada aluno irá colocar uma tampinha que indicará o local de onde eles irão dar início ao jogo. O professor entregara a cada dupla um brinde colado em cima da tampa e o colocara em um dos pontos da cartela de ovo (é importante que o professor sempre coloque o brinde em uma posição que esteja a mesma distância de ambos os pontos de partida).

Após o professor colocar o brinde os alunos deverão pegar suas tampinhas e fazer o caminho até ele, sempre andando na vertical ou horizontal. Ganha, o aluno que utilizar a menor quantidade de tampinhas para chegar até o brinde, respeitando as regras.

Observações

Caso não seja viável confeccionar uma cartela para cada dupla, o professor poderá fazer uma única cartela e chamar as duplas para vir a frente para realizar o jogo. Uma forma de motivar os alunos que forem perdendo é fazer uma nova rodada com eles.

Esse jogo também pode ser feito no Multiplano (veja Figura 5.2), material didático adquirido por algumas escolas públicas para o Laboratório de Matemática, no lugar das tampinhas de garrafa pet utilizamos os pinos, mantendo assim a ideia do jogo onde o aluno vai completando o caminho com os pinos até atingir o objeto desejado.

Tanto para as séries iniciais quanto para as séries finais é importante trabalhar com o conceito de ponto de partida, ponto de chegada, direita e esquerda, para frente e para trás sempre explicitando o referencial.

Construção do Material



Figura 5.1: Plano Cartesiano na cartela de ovo



Figura 5.2: Multiplano

5.2 ATIVIDADE 2 - Geometria do Táxi no cotidiano

Após a primeira atividade os alunos já possuirão noções de movimentação no plano de acordo com a geometria do táxi. Introduziremos uma atividade um pouco mais elaborada, porém não usaremos, neste momento, fórmulas e conceitos muito abstratos.

Nível Escolar: Fundamental - Séries Iniciais e Finais

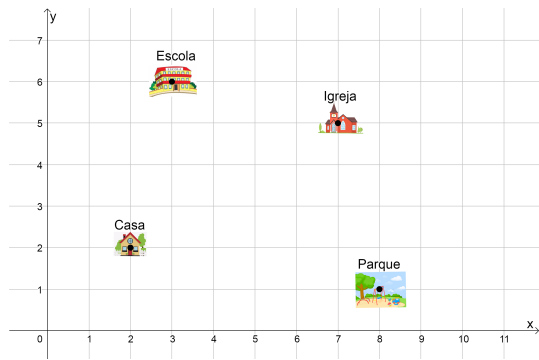
Tema da Aula: Passeando pelo bairro

Material utilizado

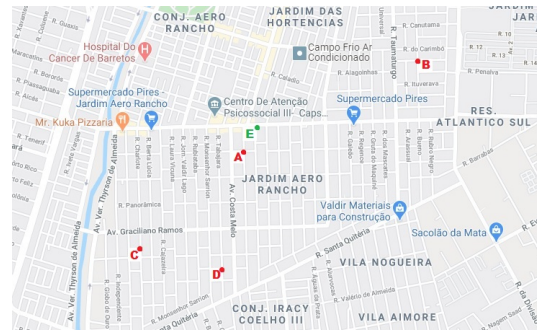
- **Séries Iniciais:** Mapa simplificado na malha quadriculada com poucos pontos de referência, lápis de cor.
- **Séries Finais:** Mapa do Google Maps da região onde a escola fica localizada, lápis de cor.

Objetivos da Aula

- Analisar o mapa e identificar pontos conhecidos nele;
- Levar o aluno a identificar o caminho percorrido por ele no mapa de um ponto específico a outro; .
- Levar o aluno a identificar percursos diferentes para se chegar ao mesmo lugar.



(a) Séries Inicias



(b) Séries Finais

Figura 5.3: Modelo de mapas para a atividade

Metodologia

Essa atividade pode ser realizada de forma individual ou em grupos.

O professor apresentará aos alunos o mapa da região selecionada, sendo de preferência a região onde a escola está localizada para as séries finais, mapa simplificado para as séries iniciais, essa apresentação pode ser feita com o auxílio de um data show, identificando comércios, a escola, e para os alunos que moram próximos a escola a rua onde sua casa está localizada.

Em seguida, o professor entregará aos alunos uma folha contendo o mapa com as seguintes questões (as questões abaixo são específicas para as séries finais):

- Suponha que você more na casa *A* e precise ir até o Supermercado Pires. Quantas quadras você terá que andar da sua casa até o supermercado? Pinte o caminho de vermelho.
- Suponha que você more na casa *C* e precise ir até a Padaria Paraíso localizada no ponto *D*. Quantas quadras você terá que andar da sua casa até a padaria? Pinte o caminho de azul.
- Suponha que você more na casa *D* e precise ir até a Escola do Futuro localizada no ponto *E*. Quantas quadras você terá que andar da sua casa até a Escola? Pinte o caminho de verde.
- Suponha que você more na casa *B* e precise ir até a Escola do Futuro localizada no ponto *E*. Quantas quadras você terá que andar da sua casa até a Escola? Pinte o caminho de verde.
- Suponha que você more na casa *D* e seu amigo more na casa *C* e vocês tenham marcado de ir comer uma pizza no Mr. Kuka Pizzaria. Seu amigo pediu que você passe na casa

dele para que vocês possam ir juntos. Dessa forma, quantas quadras você andará da sua casa no ponto D , passando pela casa do seu amigo no ponto C até chegar a Pizzaria? Pinte o caminho de amarelo.

Peça para os alunos compararem suas respostas, verificando se eles optaram pelo mesmo caminho ou por caminhos diferentes. Comente com eles a importância de se analisar vários caminhos antes de tomar uma decisão, para que se tenha certeza de que a escolha feita é a melhor. Questione os alunos por que o melhor percurso é aquele cuja distância é a menor e não aquela cuja distância é a maior.

Observações

É importante o professor observar com os alunos, das séries finais, que as quadras na horizontal apresentam um tamanho e na vertical apresentam outro, sendo assim deve-se padronizar as quadras sempre pelo tamanho da quadra menor, ou seja, uma quadra maior representa duas quadras menores.

Outro ponto importante, o professor deve sempre utilizar, nessa atividade, pontos que estejam dentro de uma região mais padronizada, sem ruas na diagonal, para que os alunos não tenham muita dificuldade para realizar a atividade. Nesse momento é importante o professor levantar o questionamento se em um local onde as quadras não são padronizadas é possível aplicar esse mesmo conceito. Assim abordar a importância de se ter um lugar padronizado para aplicar a Geometria do Táxi.

5.3 ATIVIDADE 3 - Deduzindo a fórmula da Distância na Geometria do Táxi

Agora que os alunos já estão familiarizados com o plano e com a forma de movimentação da Geometria do Táxi vamos introduzir uma atividade que irá levá-los a deduzir a fórmula para se calcular a Distância Táxi dados dois pontos quaisquer do Plano.

Nível Escolar: Fundamental - Séries Finais e Ensino Médio

Tema da Aula: Uma nova forma de calcular distâncias

Material utilizado

- Plano Cartesiano com mapa projetado na lousa e na folha para os alunos, lápis colorido.

Objetivos da Aula

- Fazer com que o aluno represente pontos da Geometria do Táxi no plano Cartesiano;
- Levar o aluno a associar uma fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos dentro da métrica do táxi;
- Levar o aluno a comparar a Distância do Táxi entre dois por caminhos diferentes.

Metodologia

Essa atividade pode ser realizada de forma individual ou em grupos.

O professor apresentará aos alunos um mapa com o plano cartesiano tendo 3 pontos de referência. Os alunos deverão calcular a distâncias entre os pontos na horizontal, na vertical, e entre os pontos A e B .

Em seguida o professor pode acrescentar atividades com segmentos na horizontal, na vertical e na diagonal para fixar a ideia, como nas figuras abaixo.

Para os alunos do 8º e 9º do Ensino Fundamental e do Ensino Médio é interessante apresentar o Teorema de Pitágoras para o cálculo da distância Euclidiana, podendo também trabalhar com os 4 quadrantes do plano cartesiano uma vez que nesse nível eles já estudaram os números Inteiros.

Nessa primeira parte da atividade os alunos irão marcar as coordenadas dos pontos A , B e C representados pelas imagens, de acordo com o plano cartesiano.

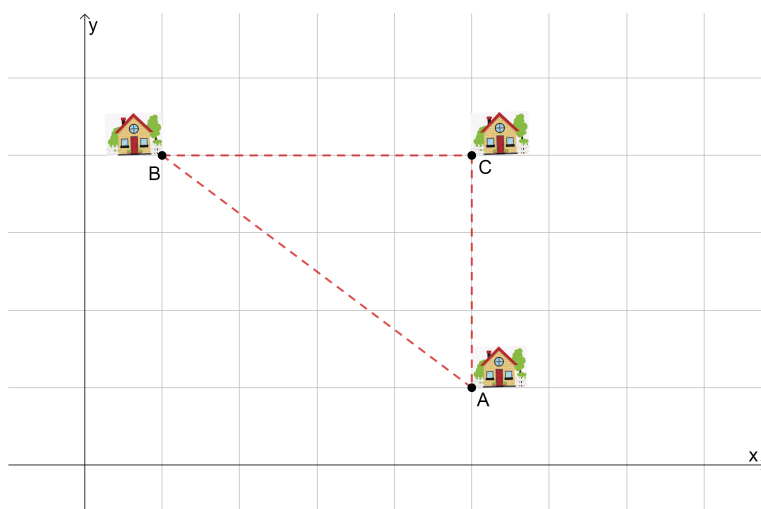


Figura 5.4: Modelo de imagem para 1ª parte da atividade

Na sequência o professor irá orientar sobre os cálculos a serem feitos.

- a. Considerando que cada quadra tenha 1 unidade de medida de comprimento determine a distância percorrida da casa A até a casa C .
- É possível estabelecer alguma relação entre a distância da casa A e da casa C e suas coordenadas? (é importante o professor fazer com que os alunos percebam que o segmento AC é paralelo ao eixo Y e dessa forma a coordenada x tem o mesmo valor).
- b. Considerando que cada quadra tenha 1 unidade de medida de comprimento determine a distância percorrida da casa B até a casa C .
- É possível estabelecer alguma relação entre a distância da casa B e da casa C e suas coordenadas? (é importante o professor fazer com que os alunos percebam que o segmento BC é paralelo ao eixo X e dessa forma a coordenada y tem o mesmo valor).
- c. Considerando que cada quadra tenha 1 unidade de medida de comprimento determine a distância percorrida da casa A até a casa B . Lembre-se que só podemos andar pelas ruas.
- É possível estabelecer alguma relação entre a distância da casa A e da casa B e suas coordenadas?

É esperado que o aluno chegue a seguinte conclusão:

- A distância entre a casa A e a casa C é 3 unidades de comprimento, as coordenadas dos pontos são $A = (5, 1)$ e $C = (5, 4)$, sendo o segmento AC paralelo ao eixo Y .
Logo $d_T(A, C) = |x_C - x_A| + |y_C - y_A| = |5 - 5| + |4 - 1| = 0 + 3 = 3$
- A distância entre a casa B e a casa C é 4 unidades de comprimento, as coordenadas dos pontos são $B = (1, 4)$ e $C = (5, 4)$, sendo o segmento BC paralelo ao eixo X .
Logo $d_T(B, C) = |x_C - x_B| + |y_C - y_B| = |5 - 1| + |4 - 4| = 4 + 0 = 4$
- A distância entre a casa A e a casa B é 5 unidades de comprimento, as coordenadas dos pontos são $A = (5, 1)$ e $B = (1, 4)$, sendo o segmento AB a hipotenusa do triângulo ABC .
Logo $d_T(A, B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| = |1 - 5| + |4 - 1| = |-4| + 3 = 4 + 3 = 7$

Observações

Ao chegar ao item (c) o professor pode levar os alunos a observar que o triângulo ABC é retângulo em C e dessa forma, como conhecemos as medidas dos segmentos AC e BC é possível determinar a medida do segmento AB de acordo com a Geometria Euclidiana e compará-la com a distância encontrada na métrica do Táxi.

Abaixo segue outras atividades que podem ser aplicadas antes de fechar o conceito da Distância Táxi para a melhor compreensão dos alunos.

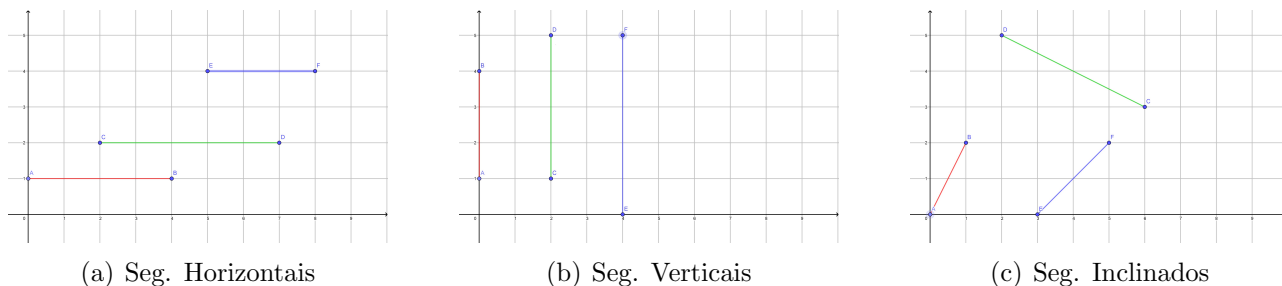


Figura 5.5: Exemplo de imagem para a Atividade

A finalização dessa atividade dará base para a atividade seguinte onde iremos comparar a distância Euclidiana com a distância Táxi. Por isso é muito importante que o aluno compreenda com clareza a ideia da movimentação do Táxi e do cálculo da distância entre dois pontos através das coordenadas do plano cartesiano bem como a fórmula utilizada para o cálculo da mesma.

5.4 ATIVIDADE 4 - Comparando Distância Euclidiana e Distância Táxi

A intenção é que as atividades fiquem mais complexas de uma forma gradual para que os alunos possam abstrair os conceitos e compreender a importância do estudo da Geometria.

Nível Escolar: Fundamental - Séries Finais e Ensino Médio

Tema da Aula: E se eu pudesse voar?

Material utilizado

- Plano cartesiano feito em material de PVC (uma alternativa é projetar o plano cartesiano na lousa com o auxílio do data show), canetão colorido de quadro branco ou fita adesiva colorida.

Objetivos da Aula

- Apresentar aos alunos o Plano Cartesiano quadriculado;
- Levar o aluno a representar pontos no Plano Cartesiano através de suas coordenadas; .

- Levar o aluno a comparar a Distância Euclidiana com a Distância do Táxi geometricamente e através de cálculos de distância.

Metodologia

Essa atividade pode ser realizada de forma individual ou em grupos. O professor apresentará aos alunos o Plano Cartesiano quadriculado. Entregará a cada aluno uma folha contendo o Plano Cartesiano, anotará os 8 pontos na lousa e explicará o procedimento para localizar e marcar esses pontos no plano.

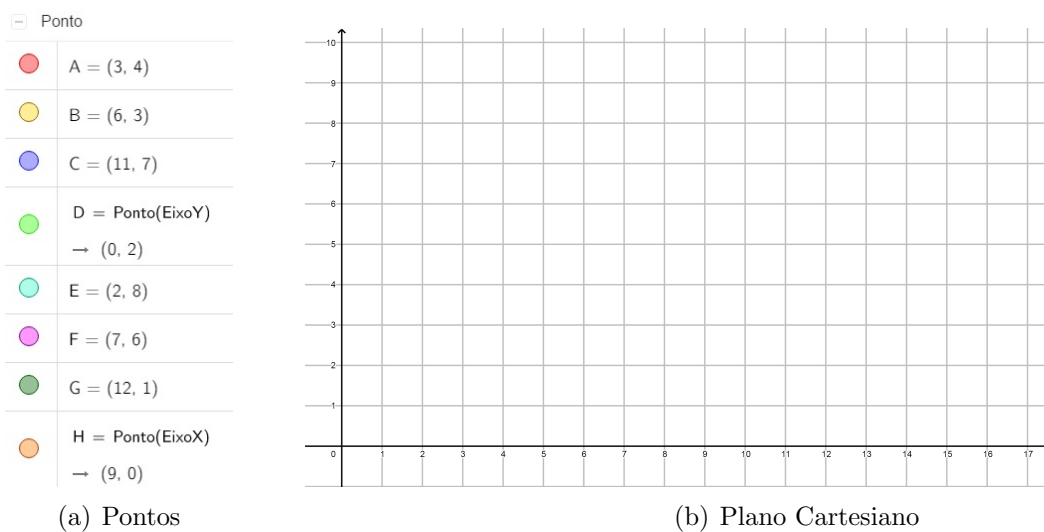


Figura 5.6: Exemplo de pontos para a Atividade

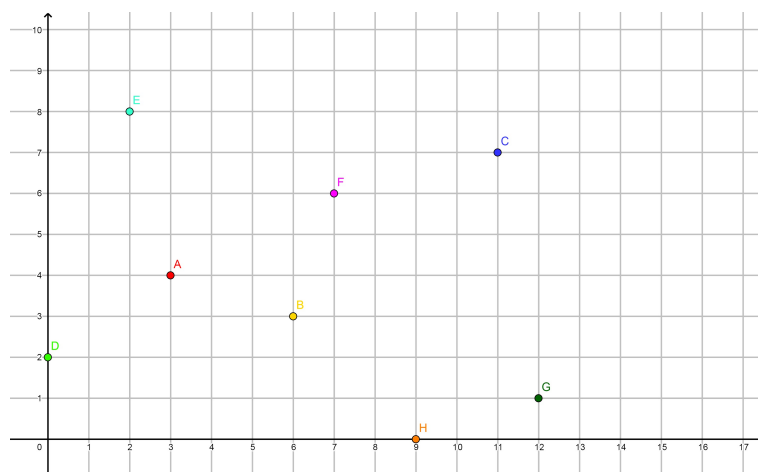


Figura 5.7: Plano Cartesiano com os pontos marcados

Após todos os alunos marcarem os pontos no plano, o professor fará os seguintes questionamentos:

- a. Suponha que as linhas horizontais e verticais representem as ruas de uma cidade. Qual a distância percorrida para ir do ponto A ao ponto B se você estiver de carro?
- Se você fosse um pássaro e pudesse voar, seguiria pelo mesmo caminho? Porque?
 - Qual a menor distância percorrida, a distância feito pelo carro ou a distância feita pelo pássaro?

Observações

Nesse momento o professor deverá questionar os alunos sobre os lugares em que são permitidos que os carros circulem. Questione se os pássaros seguem a mesma limitação de circulação de um carro.

Agora o professor apresenta o conceito de Distância Euclidiana e Distância Táxi (apresentados nos capítulos 2 e 3), nessa atividade pode ser apresentada a fórmula para o cálculo de distância ou apenas a comparação geométrica das distâncias.

Segue a atividade com os outros pontos:

- b. Suponha que as linhas horizontais e verticais representem as ruas de uma cidade. Qual a distância percorrida para ir do ponto E ao ponto F se você estiver de carro? Se você fosse um pássaro e pudesse voar, seguiria pelo mesmo caminho?
- Qual a menor distância percorrida, a distância feito pelo carro ou a distância feita pelo pássaro?
- c. Suponha que as linhas horizontais e verticais representem as ruas de uma cidade. Qual a distância percorrida para ir do ponto C ao ponto G se você estiver de carro? Se você fosse um pássaro e pudesse voar, seguiria pelo mesmo caminho?
- Qual a menor distância percorrida, a distância feito pelo carro ou a distância feita pelo pássaro?
- d. Suponha que as linhas horizontais e verticais representem as ruas de uma cidade. Qual a distância percorrida para ir do ponto D ao ponto H se você estiver de carro? Se você fosse um pássaro e pudesse voar, seguiria pelo mesmo caminho?
- Qual a menor distância percorrida, a distância feito pelo carro ou a distância feita pelo pássaro?

5.5 ATIVIDADE 5 - Geometria do Táxi e Combinatória

Agora que os alunos já estão familiarizados com o plano e com a forma de movimentação da Geometria do Táxi vamos introduzir uma atividade que irá levá-los a deduzir a fórmula para se calcular a Distância Táxi dados dois pontos quaisquer do Plano.

Nível Escolar: Fundamental - Séries Finais e Ensino Médio

Tema da Aula: Há mais de um caminho à trilhar

Material utilizado

- Mapa simplificado projetado na lousa e na folha para os alunos, lápis colorido ou canetinha.

Objetivos da Aula

- Levar o aluno a localizar pontos em um mapa simplificado;
- Levar o aluno a identificar caminhos variados de um ponto a outro, de forma a percorrer a menor distância táxi;
- **Ensino Médio:** Levar o aluno a associar uma fórmula para o cálculo da quantidade de caminhos possíveis entre dois pontos, considerando a menor distância táxi entre eles;

Metodologia

Essa atividade pode ser realizada de forma individual ou em grupos.

O professor apresentará aos alunos o mapa simplificado com os 2 pontos de referência A e B . Os alunos deverão observar esses pontos e marcar todos os caminhos possíveis de um ponto ao outro, de forma a percorrer a menor distância táxi.

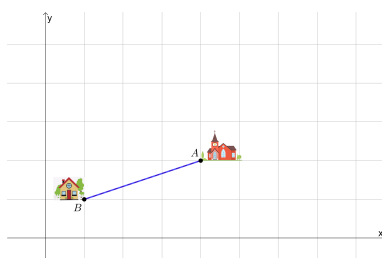


Figura 5.8: Mapa simplificado da cidade

Na sequência o professor pode ir acrescentando outros pontos e pedir para os alunos marcar os caminhos possíveis, sempre o caminho cuja distância táxi de um ponto ao outro seja a menor.

Para os alunos do **Ensino Fundamental** não há a necessidade de apresentar uma fórmula e sim de fazer com que eles percebam que é possível andar por vários caminhos diferentes e ainda assim percorrer a mesma distância, sendo que essa distância sempre será maior que a distância Euclidiana.

Para os alunos do **Ensino Médio** é interessante apresentar a fórmula para o cálculo da quantidade de caminhos possíveis entre dois pontos, considerando a menor distância táxi entre eles. Como essa fórmula não é fácil de ser deduzida o professor pode apresentá-la e pedir para os alunos verificarem a sua validade. Como a fórmula envolve o conceito de fatorial é uma boa opção para ser apresentado como uma aplicação desse conceito.

Abaixo segue a explicação do cálculo do número de caminhos possíveis entre dois pontos, considerando a distância táxi.

- Dados os dois pontos A e B , calcule a distância horizontal $d(h)$ e a distância vertical $d(v)$ entre eles.

No exemplo abaixo temos, $d(h) = 3$ e $d(v) = 2$.

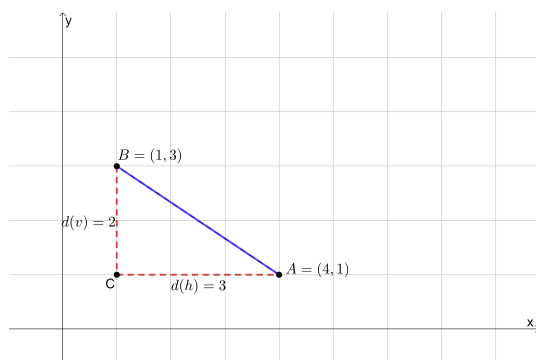


Figura 5.9: Distância entre os pontos A e B

- A fórmula para o cálculo da quantidade de caminhos QC é dada por:

$$QC = \frac{(d(h) + d(v))!}{d(h)!d(v)!}$$

Para o exemplo acima temos:

$$QC = \frac{(d(h) + d(v))!}{d(h)!d(v)!} = \frac{(3 + 2)!}{3!2!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2 \cdot 1} = 10$$

Existem 10 caminhos diferentes que podemos fazer para ir do ponto A até o ponto B , sendo que todos eles apresentam 5 unidades de comprimento que é a menor distância táxi entre esses dois pontos.

Observações

É importante ressaltar para os alunos que na Geometria Euclidiana existe apenas uma única possibilidade de caminho de um ponto A para um ponto B , sendo esse caminho o menor possível, que é o segmento que liga os pontos A e B .

Capítulo 6

Conclusão

A partir de toda revisão bibliográfica feita para a elaboração desse trabalho, foi possível compreender que tudo o que conhecemos sobre a geometria já foi produzido e é reorganizado ano após ano. As tentativas de tornar a matemática uma ciência atrativa muitas vezes leva os professores a formular atividades com materiais “concretos” para que os alunos possam, de alguma forma, concretizar conceitos abstratos, porém não podemos nos esquecer que a Matemática possui uma natureza abstrata muito rica.

O grande desafio que os professores de matemática encontram é o de contextualizar o conteúdo que precisa ser ensinado de uma forma que o aluno se sinta parte desse saber, e essa não é uma tarefa fácil. Alguns conteúdos trazem muitas formas de aplicação no cotidiano, outros já não encontram tanto lugar assim por tratarem de conceitos muito abstratos e de aplicações complexas demais até mesmo para alunos do ensino médio.

A Geometria do Táxi é um conteúdo que consegue trazer em si uma simplicidade em sua aplicação e ao mesmo tempo a abstração de conceitos fundamentais da geometria. Dessa forma, se apresenta como uma ótima ferramenta para despertar o interesse do aluno, pois os conceitos podem ser interpretados de uma forma “concreta”, porém sem perder a riqueza de sua abstração, uma vez que não podemos representar conceitos bidimensionais no mundo tridimensional em que vivemos.

Como trabalhos futuros, pretende-se fazer um estudo mais aprofundado sobre a Geometria do Táxi dentro da Geometria Analítica, e assim a criação de um material didático que possa auxiliar os professores do ensino médio e do ensino superior a trabalhar com essa nova geometria dentro de outros contextos.

Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, G. Euclides. *Geometria e Fundamentos*. Revista do Professor de Matemática, v. 45, 2001.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, ed. 7, 2004.
- [3] BONGIOVANNI, V.; JAHN, A. P. *De Euclides às Geometrias Não Euclidianas*. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. São Paulo, v. 1, n. 22, 2010.
- [4] BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Base Comum Curricular*. Brasília, DF, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/fundamental/a-area-de-matematica/> >. Acesso em 12/01/2020.
- [6] CÉSAR, Sulamita Maria Comini. *Minicurso de Geometria do Táxi*. PUC-MG, .
- [7] EVES, Howard Whitley. *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, Campinas, 2011.
- [8] FUNARI, Pedro Paulo. *Grécia e Roma*. Contexto, Repensando História, 2.ed, São Paulo, 2002.
- [9] FUZZO, Regis Alessandro; EZENDE, Veridiana; SANTOS, Talita Secorum dos. *Geometria do Táxi: A Menor Distância Entre Dois Pontos Nem Sempre É Como Pensamos*. V EPCT, out, 2010.
- [10] IEZZI, Gelson. *Fundamentos de Matemática Elementar-Geometria Analítica*. Editora Atual, São Paulo, 1977-78.

- [11] KALEFF, Ana Maria; NASCIMENTO, Rogério Santos do. *Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o Exemplo da Geometria do Táxi*. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n.44, p. 11-42, dez, 2004. Editora da Unicamp, 2011.
- [12] KALLEF, Ana Maria. et. al. *Desenvolvimento de Atividades Introdutórias ao Estudo das Geometrias Não-Euclidianas: Atividades Interdisciplinares para Sala de Aula e Museus Interativos*. In. CONGRESSO BRASILEIRO DE EXTENSÃO UNIVERSITÁRIA, Anais, Belo Horizonte: UFMG, 2004.
- [13] LEIVAS, José Carlos Pinto. *Geometria do Táxi: Resolvendo Problemas de Rotina*. ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.9, n.2, p. 177-202, nov, 2016.
- [14] MIRANDA, Dimas Felipe de; Barroso, Leônidas Conceição; Abreu, João Francisco de. *Geometria Taxi: Uma Geometria Não Euclidiana Descomplicada*. In. ENCONTRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA DE OURO PRETO, 3., 2005. Ouro Preto. Anais.Ouro Preto: UFOP, 2005
- [15] RIBEIRO, R. D. G. L. *O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica*. Tese (Doutorado). Universidade de São Paulo, 2012.
- [16] SANTOS, T. d. *A Inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica*. Tese (Doutorado). Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.
- [17] TOLEDO, Maíra Lopes. *Uma Abordagem para a Geometria Não-Euclidianas para o Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita, Bauru, 2018.
- [18] WANDERLEY, A. J. M. et al. *Como melhorar a vida de um casal usando uma geometria não-euclidiana*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 50. p. 23-30, 2002.
- [19] Imagem Cartela de Ovo. Disponível em: <<http://www.aartedeaprenderbrincando.com>>. Acesso em 12/01/2020.

[20] Imagem do Multiplano. Disponível em: <<http://www.petcsmatematica.cppp.ufms.br> >.
Acesso em 12/01/2020.