



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ARITMÉTICA INTERVALAR: UMA PROPOSTA  
METODOLÓGICA**

Joselândio Silva Dias

**Orientador:** Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana  
Setembro de 2020

---

---

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**ARITMÉTICA INTERVALAR: UMA PROPOSTA  
METODOLÓGICA**

Joselandio Silva Dias

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

**Orientador:** Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana  
Setembro de 2020

**Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS**

Dias, Joselandio Silva  
D532a Aritmética intervalar: uma proposta metodológica / Joselandio Silva  
Dias. - 2020.  
66f.

Orientador: Jean Fernandes Barros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana.  
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em  
Rede Nacional - PROFMAT, 2020.

1. Aritmética intervalar. 2. Extensão intervalar. 3. Intervalo  
(matemática). I. Barros, Jean Fernandes, orient. II. Universidade  
Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 511



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA  
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE JOSELANDIO SILVA DIAS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos vinte nove dias do mês de setembro de dois mil e vinte às 14:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: [meet.google.com/ajo-qrvv-euw](https://meet.google.com/ajo-qrvv-euw), da dissertação apresentada sob o título “**ARITMÉTICA INTERVALAR: UMA PROPOSTA METODOLÓGICA**”, do discente **Joselândio Silva Dias**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Joilson Oliveira Ribeiro (IME/UFBA) e Edward Landi Tonucci (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: A P R O V A D O.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 29 de setembro de 2020.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)

Orientador

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro (IME/UFBA)

Prof. Dr. Edward Landi Tonucci (UEFS)

Visto do Coordenador:

A Deus, que nos criou, onde sua presença foi imprescindível nesta empreitada. Sua Palavra de vida e paz serviu-me de âncora e sustento em todos os momentos.

Aos meus pais, Claudio Leonor e Celina (*in memorian*), por sempre acreditarem em mim e terem investido pesado em educação. Aos meus irmãos: Josy e Joseval (*in memorian*) pela preocupação, carinho e incentivo.

À minha amada esposa Nilda e ao meus filhos Claudio Neto e Enzo Filipe, por todo amor, incentivo, apoio e compreensão. Nada disso teria sentido se vocês não existissem na minha vida.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço, antes de tudo, a Deus por ter confirmado a minha inserção neste curso, bem como, ter dado a mim condições de concluí-lo. Não tem me deixado um só momento durante todo o percurso, cuidando de toda a minha família.

À minha família, a qual eu faço questão de relatar nomes: Nilda, esposa, Claudio Neto e Enzo Filipe, filhos, que me deram constante apoio e foram compreensivos nos momentos que não pude me fazer presentes nas suas vidas. Onde, oportunamente, estendo meus agradecimentos a irmã Josy e seu esposo, Márcio, pelas palavras de encorajamento e vibrações positivas na conclusão desta etapa. Ao meu pai Claudio Leonor, grande guerreiro, a quem eu bato continência por seus ensinamentos, onde, mesmo com a ausência precoce da minha mãe, ele acreditou na educação como a porta do nosso sucesso. Aos sobrinhos: Francinny, Bernardo e a Joseval Junior, e aos irmãos mais novos Ueliton, Uilma e Wallace pelo carinho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Fernandes Barros, pela paciência dispensada a todo tempo, bem como por acreditar no meu potencial e contribuir para galgar novos degraus do conhecimento. O que para mim, não tem sido apenas um orientador, mas sobretudo um irmão amigo. Por extensão agradeço aos membros da banca: Prof. Dr. Edward Tonucci - UEFS e o Prof. Dr. Joilson Ribeiro - UFBA.

Aos meus colegas, que, por um curto intervalo de tempo, caminhamos juntos rumo ao mesmo objetivo, onde o companheirismo e a solidariedade foram imprescindíveis na resolução dos problemas mais indecifráveis. O espírito de união prevaleceu e, por isso, estamos vislumbrando a conclusão deste curso. Pois

“Aqueles que passam por nós não vão sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós”.

*Saint-Exupéry*

Conforme a citação acima, posso afirmar o seguinte: O que deixei não sei, mas levarei

um pouco da habilidade de fazer manipulação algébrica de Carla. De Gilsânia, as sacadas das questões mais difíceis. De Felipe, a paciência de quem sabe o que está fazendo. E de Antonio, o que ficou em mim foi a valorosa atitude de pai, que, ao enviuvar, se afastou do curso, não como um perdedor que desiste, mas como um vitorioso que sabe a hora de recuar na batalha, mas nunca desiste de lutar. De meu amigo Sidney, levarei o companheirismo de quem abriu as portas da sua casa para que pudéssemos estudar e assim nos enriquecermos juntos. O que falar de Diego? Dele ficou a postura incisiva de estudar, ao acreditar que é possível aprender um conteúdo, por mais difícil que pareça. Evaldo foi a pessoa que, ao reconhecer alguns acertos meus, despertou em mim a crença que eu tinha capacidade para concluir esse curso. De Manoelito, ficou a paciência e tranquilidade frente às preocupações recorrentes do curso. E finalmente, Emerson, o homem dos cálculos, com quem tive a oportunidade de confabular sobre diversos campos de conhecimento matemático. Meu muito obrigado a todos.

Para mencionar a contribuição dos professores, farei um breve resumo da minha postura em sala de aula, doravante. Ao entrar na sala de aula com muita pressa para ensinar e cumprir o conteúdo, vou me lembrar do prof. Maurício. Quando pensar em explicar eventos dependentes e independentes em probabilidade, a lembrança da prof<sup>a</sup> Ana Carla será mais forte. Como ensinar números Primos sem lembrar de Kissney? Impossível. E quando ouvirmos falar do Teorema de Menelaus, a voz do professor Jean, mesmo longe, vai ecoar nos nossos cérebros. A paciência da professora Márcia, ao passar para a turma os comandos do  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , foi providencial. Opa! Falta o professor Darlan com o Teorema Fundamental do Cálculo, ao calcular a área sob o gráfico de uma função.

A Palavra de Deus, *1 JO 5, 14*, fala sobre a eficácia da oração. E mediante isso, deixo aqui registrado o meu profundo agradecimento pelos amados irmãos que oraram a Deus pela finalização deste curso, sobretudo, meus conservos, os Diáconos.

Ao ilustríssimo amigo Carlos, ou Carlito, e ao irmão Evangelista, pelo companheirismo e incentivos nas viagens para a realização dos ENA's. Não posso deixar de agradecer aos colegas professores de Matemática que muito me incentivaram e acreditaram nesta realização, bem como a professora de Geografia, Maria Evanez, pelos incentivos para participar do curso preparatório na UESC, em Salobrinho, Ilhéus. Agradeço ainda à professora Dr<sup>a</sup>. Maridete Ferreira, do Departamento de Matemática da UNEB - Alagoinhas, pela ajuda na providência de documentos junto à UNEB, e manter-se a disposição no decorrer deste curso. Enfim, a todos que me recepcionaram com um sorriso ou com uma repreensão sincera, sintam-se abraçados e convidados a alegrarem-se comigo na conclusão desta etapa da minha carreira acadêmica.

Por fim, à CAPES pelo apoio financeiro.

*“ Porque o SENHOR dá a sabedoria, e da sua boca  
vem o conhecimento e o entendimento.”*

*Provérbios-2:6*



---

## Resumo

---

Este trabalho apresenta um estudo sobre *aritmética intervalar*, fazendo um contraponto com a *aritmética ordinária*. Iniciamos com um relato sucinto sobre *análise intervalar*. Na sequência, definimos *intervalo degenerado*, identificando-o com um número real, e estendemos suas operações ordinárias às operações com intervalos não degenerados. Depois, confrontamos algumas propriedades da aritmética intervalar com as propriedades de números reais. Ato contínuo, definimos algumas funções básicas, e descrevemos as suas respectivas extensões naturais. Neste ínterim, compreendemos melhor as propriedades de subdistributividade e de inclusão isotônica, e demonstramos o teorema fundamental da análise intervalar. Por fim, elencamos duas aplicações de conceitos da aritmética intervalar na Educação Básica.

Palavras-chave: intervalo, aritmética intervalar, extensão intervalar.

---

## Abstract

---

This work presents a study on interval arithmetic making a counterpoint with ordinary arithmetic. We started with a succinct historical approach, as well as application in the various areas of knowledge. Next, we define the degenerate interval as a real number, identifying it with a real number, and we extend its ordinary operations with non-degenerate intervals. Then, we compare some properties of interval arithmetic with the properties of real numbers. We continue to define some basic functions and apply their respective natural extensions. Besides, we better understand the properties of sub-distributivity and isotonic inclusion, and we demonstrate the fundamental theorem of interval analysis. Finally, we list two applications of interval arithmetic in Basic Education.

Keywords: interval, interval arithmetic, interval extension.

<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Os conceitos básicos e as operações intervalares</b>	<b>13</b>
1.1 Interseção, união e fecho intervalar . . . . .	13
1.2 Comprimento, valor absoluto e ponto médio . . . . .	15
1.3 Relações de ordem para intervalos . . . . .	16
1.4 Operações da aritmética intervalar . . . . .	17
1.4.1 Operações intervalares . . . . .	17
1.5 Vetores . . . . .	21
<b>2 Outras propriedades da aritmética intervalar</b>	<b>24</b>
2.1 Propriedades algébricas . . . . .	24
2.1.1 Comutatividade . . . . .	24
2.1.2 Associatividade . . . . .	25
2.1.3 Elemento identidade na aritmética intervalar . . . . .	27
2.1.4 Os elementos inversos aditivos e multiplicativos . . . . .	27
2.1.5 Subdistributividade . . . . .	28
2.1.6 Cancelamento . . . . .	31
2.2 Inclusão isotônica da aritmética intervalar . . . . .	32
<b>3 As funções intervalares</b>	<b>33</b>
3.1 Introdução . . . . .	33
3.2 O conjunto imagem e a extensão unida . . . . .	33
3.3 Outras funções intervalares simples . . . . .	35

3.3.1	Comportamento intervalar para funções monótonas . . . . .	36
3.4	Extensões intervalares de funções reais . . . . .	40
3.4.1	Fórmulas e extensões intervalares . . . . .	41
3.4.2	Extensões intervalares de funções multivariáveis . . . . .	44
3.4.3	A propriedade de subconjunto da extensão unida . . . . .	45
3.4.4	Inclusão isotônica . . . . .	45
3.5	Funções intervalares racionais . . . . .	45
3.6	O Teorema Fundamental da Análise Intervalar . . . . .	46
<b>4</b>	<b>A Aritmética intervalar na sala de aula</b>	<b>53</b>
4.1	A BNCC e o estudo do intervalo . . . . .	53
4.2	Da teoria à prática . . . . .	55
4.2.1	Números . . . . .	56
4.2.2	Álgebra . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>65</b>
	<b>Referências</b>	<b>66</b>

---

## Lista de Figuras

---

3.1	A imagem de um intervalo $X$ sob a função crescente $f(x)$ . . . . .	36
3.2	A imagem de um intervalo $X$ sob a Função Exponencial $f(x)$ . . . . .	37
3.3	A imagem de um intervalo $X$ sob a Função Logarítmica $f(x)$ . . . . .	37
3.4	A imagem de um intervalo $X$ sob a Função Raiz Quadrada $f(x)$ . . . . .	38
3.5	A imagem da Função Seno $f(x)$ sob um intervalo $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq X$ . . . . .	40
3.6	A imagem de um intervalo $X$ sob a Função Exponencial decrescente $f(x)$ . . . . .	41
3.7	O gráfico mostra os pontos de inflexão da $p(x)$ . . . . .	49
3.8	A imagem da Função polinomial $p(x)$ sob um intervalo $A = [2, 3]$ . . . . .	49
4.1	Medindo um segmento de reta . . . . .	55
4.2	Interseção de Intervalos na reta real . . . . .	57
4.3	Soma de Intervalos na reta real . . . . .	58
4.4	Subtração de Intervalos na reta real . . . . .	59
4.5	Multiplicação de Intervalos na reta real . . . . .	59
4.6	Divisão de Intervalos na reta real . . . . .	60
4.7	Segmento como resultado na comutatividade da soma intervalar . . . . .	61
4.8	Imagem da $f$ na reta . . . . .	63
4.9	Imagem da $f$ na ordenada $y$ . . . . .	64

O estudo da *análise intervalar* surgiu para, dentre outras situações, resolver problemas envolvendo números irracionais. Pois, nenhum número irracional pode ser representado exatamente por um número finito de dígitos, na forma decimal. De fato, a noção de número irracional envolve aproximações por falta ou por excesso.

A Análise Intervalar é um ramo importante da Matemática Aplicada, cuja finalidade é desenvolver métodos e técnicas de controle rigoroso de erros em máquinas computacionais usando intervalos da reta real, ora como um tipo de número ora como um conjunto de números reais. E também, a Análise Intervalar tem sido usada para fornecer provas rigorosas de teoremas com a assistência de um computador, por exemplo, ver [4]. Exposições mais detalhadas sobre a Análise Intervalar podem ser vistas em [1, 3, 5, 6, 7, 9].

Com o passar do tempo, torna-se visível a necessidade de se utilizar análise intervalar nas Ciências Físicas, envolvendo medidas com precisão limitada, a partir de dados iniciais inexatos.

Outro campo que se utilizou da análise intervalar foi a Ciência da Computação, na implementação de sistemas computacionais algébricos, que permitem cálculos com aproximações cada vez melhores.

Mediante a realização de cálculos, onde os resultados são valores aproximados, notou-se que há uma preferência por um intervalo que contenha aquele resultado procurado, por se saber o limite do erro. Em que, oportunamente, utiliza-se um logaritmo que nos permite conhecer uma solução aproximada, bem como o limite do erro.

Um dos precursores no estudo da análise intervalar é R. E. Moore, com a publicação da sua tese *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*, 1962, incorporada ao seu livro *Interval Analysis*, de 1966, além de diversas outras publicações. Depois de R.E. Moore, vieram outros pesquisadores que contribuíram muito para o enriquecimento do tema.

A seguir, descrevemos como organizamos este trabalho. No Capítulo I, apresentamos os conceitos básicos da aritmética intervalar, incluindo as definições das operações intervalares e suas implicações iniciais.

Em seguida, no Capítulo II, nos debruçamos na tarefa de conhecer as propriedades que a aritmética intervalar goza, sempre observando as propriedades que são herdadas da aritmética ordinária. E também, as propriedades que, em geral, não são herdadas naturalmente, como por exemplo, a propriedade de subdistributividade. Uma propriedade responsável por dá uma característica muito peculiar à temática ora abordada.

Para o Capítulo III, verificamos o comportamento de uma função real de uma ou mais variáveis reais, quando age sobre intervalos, observando suas imagens diretas. E então, definimos as funções intervalares de uma ou mais variáveis intervalares. E passamos a utilizar as propriedades das funções reais, como a monotonicidade, e as fórmulas que as definem, para estender as funções reais às funções intervalares, do modo mais natural possível, levando em consideração fenômenos da análise intervalar, tais como a *dependência intervalar*, e a definição de *inclusão isotônica*.

No penúltimo capítulo, elaboramos duas propostas de inserção desta temática na sala de aula, fazendo articulação com os objetos de conhecimento elencados para o 9º ano do Ensino Fundamental - Séries Finais, sendo que uma está pautada em Números, e outra em Álgebra. Ambas propostas, levam em consideração os pressupostos teóricos e metodológicos da Base Nacional Comum Curricular - BNCC.

E finalmente, no último capítulo, são feitas as considerações finais, onde será elucidada a contribuição dessa temática para o Ensino Básico de Matemática.

---

Os conceitos básicos e as operações intervalares

---

Neste capítulo, introduzimos os termos e os conceitos básicos da aritmética intervalar de uma ou mais variáveis intervalares. Em seguida, definimos as operações intervalares.

### 1.1 Interseção, união e fecho intervalar

Na Aritmética Intervalar, parte-se da concepção de *intervalo fechado*, indicado por  $[a, b]$ , e definido por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Neste trabalho, entendemos o termo *intervalo* como intervalo fechado.

Dado um intervalo  $X$ , podemos representá-lo por  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ , onde  $\underline{X}$  e  $\overline{X}$  são denominados de *extremo inferior de  $X$*  e de *extremo superior de  $X$* , respectivamente. Além disso, caso em que  $\underline{X} = \overline{X}$ , dizemos que o intervalo  $X$  é *degenerado*. E então, podemos identificá-lo com o número real  $x$ , isto é, podemos escrever  $X = [x, x] = x$ .

Dizemos que os intervalos  $X$  e  $Y$ , são *iguais*, se, e somente se, os seus extremos correspondentes são iguais, isto é,  $\underline{X} = \underline{Y}$  e  $\overline{X} = \overline{Y}$ .

Dados os intervalos  $X$  e  $Y$ , dizemos que os mesmos são *disjuntos* se, a interseção de  $X$  e  $Y$  é o conjunto vazio, e escrevemos  $X \cap Y = \emptyset$ . Isto significa que ou  $\overline{Y} < \underline{X}$  ou  $\overline{X} < \underline{Y}$ . No caso de termos elementos em comum em ambos conjuntos, então dizemos que a *interseção de  $X$  e  $Y$*  é não-vazia, e representamos a mesma por

$$\begin{aligned} X \cap Y &= \{z : z \in X \text{ e } z \in Y\} \\ &= [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}]. \end{aligned} \tag{1.1}$$



Da teoria de conjuntos, sabemos que a *união de  $X$  e  $Y$*  é dada por

$$X \cup Y = \{z : z \in X \text{ ou } z \in Y\},$$

que, como mostra-nos o exemplo a seguir, não é igual a

$$[\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}].$$

**Exemplo 1.1.** Sejam  $X = [-2, 0]$  e  $Y = [1, 3]$ . Observemos que  $X$  e  $Y$  são disjuntos. Então,

$$X \cup Y = [-2, 0] \cup [1, 3],$$

que é diferente de

$$[\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}] = [\min\{-2, 1\}, \max\{0, 3\}] = [-2, 3].$$

Segue-se que  $X \cup Y \subset [-2, 3]$ .

Aqui cabe a seguinte definição, *o fecho intervalar de  $X$  e  $Y$*  é o intervalo

$$X \sqcup Y = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}],$$

que, como vimos no Exemplo 1.1, pode ser diferente de  $X \cup Y$ , no caso em que  $X$  e  $Y$  são disjuntos. É imediato que se  $X \cap Y \neq \emptyset$ , temos que  $X \cup Y = X \sqcup Y$ . O que é certo é que  $X \cup Y \subseteq X \sqcup Y$ .

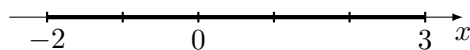
Analisemos mais de perto o Exemplo 1.1. Vejamos,

1. A seguir, temos o seguinte diagrama de  $X \cup Y$ .



Percebemos que entre o  $\overline{X}$  e o  $\underline{Y}$  existe uma descontinuidade, o que mostra que  $X \cup Y$  não é um intervalo.

2. No caso de  $X \sqcup Y$ , temos efetivamente um intervalo, conforme a definição de fecho intervalar.



Ao analisarmos os resultados aproximados, a interseção de intervalos possui uma grande importância numa medição qualquer, onde se respeita um limite de erro. Para tanto, vamos elucidar com uma aplicação.

**Exemplo 1.2.** Seja realizada duas medições da massa de um determinado objeto por pessoas distintas. A pessoa A obteve o peso  $p = 12.5$  kg, com margem de erro menor que 0.3kg. A pessoa B, ao pesar, constatou 12.1 kg, com um erro de pesagem menor que 0.3 kg.

Podemos representar essas massas utilizando a interseção de intervalos.<sup>1</sup>

Sejam

$$X = [12.2, 12.8] \quad \text{e} \quad Y = [11.8, 12.4].$$

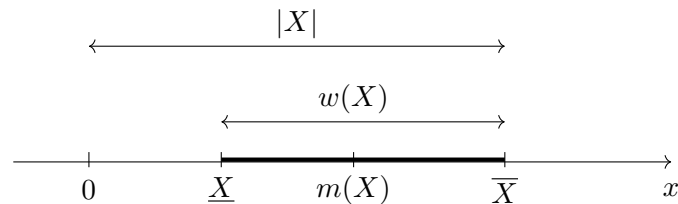
Sendo assim,

$$\begin{aligned} X \cap Y &= [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}] \\ &= [\max\{12.2, 11.8\}, \min\{12.4, 12.8\}] \\ &= [12.2, 12.4] \end{aligned}$$

Concluimos que se a interseção não é vazia, então as duas medições estão dentro do limite de erro tolerável, onde os resultados obtidos na interseção são os mais aceitáveis. Ao contrário, se a interseção é vazia, isto denunciaria que alguma medição estava fora do limite de erro.

## 1.2 Comprimento, valor absoluto e ponto médio

Dado um intervalo  $X$ , consideremos as seguintes definições:



1. O *Comprimento do intervalo*  $X$  é dado por

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X}.$$

2. O *valor absoluto de*  $X$ , representado por  $|X|$ , é o máximo dos valores absolutos de seus extremos, isto é,

$$|X| = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}.$$

Observemos que  $|x| \leq |X|$ , para cada  $x \in X$ .

---

<sup>1</sup>Na representação desses intervalos, doravante, a vírgula será usada para separar os extremos dos intervalos e o ponto, por sua vez, para separar as casas decimais da unidade.

3. O ponto médio de  $X$  é dado por

$$m(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}).$$

**Exemplo 1.3.** Seja  $X = [-3, 5]$ . Sendo assim, o comprimento de  $X$  é

$$\begin{aligned} w(X) &= \overline{X} - \underline{X} \\ &= 5 - (-3) \\ &= 8. \end{aligned}$$

O valor absoluto de  $X$  é

$$\begin{aligned} |X| &= \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\} \\ &= \max\{|-3|, |5|\} \\ &= \max\{3, 5\} \\ &= 5. \end{aligned}$$

E, por fim, o ponto médio de  $X$  é

$$\begin{aligned} m(X) &= \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}) \\ &= \frac{1}{2}(-3 + 5) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

### 1.3 Relações de ordem para intervalos

Torna-se oportuno discorrer sobre as relações de ordem existentes para intervalos, visto que para números reais usamos a notação  $<$  para indicar que um número é menor que outro e, dessa forma, poder ordená-los. Tomando  $a, b$  e  $c \in \mathbb{R}$ , se  $a < b$  e  $b < c$  então  $a < c$ , valendo a propriedade da transitividade.

Na Aritmética Intervalar, não é diferente, também vamos usar essa mesma notação, bem como, a propriedade da transitividade. Por definição, dizemos que  $X < Y$  se,  $\overline{X} < \underline{Y}$ .

**Exemplo 1.4.** Sejam  $X = [-2, 1]$ ,  $Y = [2, 3]$  e  $Z = [6, 10]$ . Como  $[-2, 1] < [2, 3]$  e  $[2, 3] < [6, 10]$ , temos que  $[-2, 1] < [6, 10]$ .

Se  $\underline{X} > 0$ , dizemos que  $X$  é positivo, e denotamos por  $X > 0$ . Se  $\overline{X} < 0$ , dizemos que  $X$  é negativo, e denotamos por  $X < 0$ . Um intervalo positivo é caracterizado pelo fato de que todos os seus valores reais são positivos, já que os seus extremos são positivos.

Outra relação de ordem transitiva para intervalos é a inclusão de conjuntos. Observe-mos que

$$X \subseteq Y \text{ equivale a } \underline{Y} \leq \underline{X} \text{ e } \overline{X} \leq \overline{Y}.$$

**Exemplo 1.5.** Sejam  $X = [-2, 1]$  e  $Y = [-3, 2]$ . Sendo assim,  $X \subseteq Y$ , pois  $-3 \leq -2$  e  $1 \leq 2$ . Porém, a relação de inclusão, a exemplo do que acontece com conjuntos quaisquer, não é de ordem total, já que, por exemplo, considerando os intervalos  $X = [-4, 0]$  e  $Y = [-1, 3]$ , vemos que nenhum está contido no outro. Aqui, registramos o resultado de que  $X \cap Y = [-1, 0]$ .

## 1.4 Operações da aritmética intervalar

A noção de intervalo degenerado permite considerar o sistema de intervalos fechados como uma extensão do sistema de números reais, através da identificação

$$[x, x] \leftrightarrow x. \tag{1.2}$$

Esta identificação exprime uma relação entre aritmética intervalar e o conjunto dos números reais, que denominamos de *aritmética ordinária*.

Vamos mostrar aqui como se processa a aritmética intervalar, e sua estreita relação com a aritmética ordinária. Nós observaremos que nem todas as propriedades usuais serão herdadas pela aritmética intervalar.

Em geral, da teoria dos conjuntos, nós já sabemos operar com conjuntos. De fato, dados os conjuntos  $X$  e  $Y$ , temos que:

1.  $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ ;
2.  $X - Y = \{x - y : x \in X, y \in Y\}$ ;
3.  $X \cdot Y = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ ;
4.  $\frac{X}{Y} = \left\{ \frac{x}{y} : x \in X, y \in Y \right\}$ , no caso em que  $0 \notin Y$ .

Mediante o exposto, podemos reunir todas essas operações na seguinte notação:

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X \text{ e } y \in Y\}, \tag{1.3}$$

onde  $\odot$  representa qualquer uma das operações básicas apresentadas acima.

### 1.4.1 Operações intervalares

*Como ficam as operações vistas na seção anterior em termos intervalares? Vejamos,*

### Adição

Sejam  $X$  e  $Y$  intervalos, digamos,  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$  e  $Y = [\underline{Y}, \overline{Y}]$ , isto é,

$$x \in X \quad \text{significa que} \quad \underline{X} \leq x \leq \overline{X}$$

e

$$y \in Y \quad \text{significa que} \quad \underline{Y} \leq y \leq \overline{Y}.$$

Usando a compatibilidade da adição com a relação de ordem da aritmética ordinária, temos que

$$\underline{X} + \underline{Y} \leq x + y \leq \overline{X} + \overline{Y}.$$

Isto mostra-nos que

$$X + Y = [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}]. \quad (1.4)$$

Vamos exemplificar a soma e a união de intervalos, e compararmos os seus resultados.

**Exemplo 1.6.** Sejam os intervalos  $X = [5, 7]$  e  $Y = [-2, 6]$ . Determinemos  $X + Y$  e  $X \cup Y$ . Observemos que

$$\begin{aligned} X + Y &= [5 + (-2), 7 + 6] \\ &= [3, 13] \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned} X \cup Y &= [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}] \\ &= [-2, 7]. \end{aligned}$$

O exemplo nos mostra que, na aritmética intervalar, a união de dois intervalos não é igual a soma dos mesmos, para quaisquer intervalos reais.

### Multiplicação

Considerando os intervalos  $X$  e  $Y$ , o produto  $X \cdot Y$  é dado por

$$X \cdot Y = [\min S, \max S],$$

onde  $S = \{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}\}$ .

**Exemplo 1.7.** Sejam  $X = [-2, -1]$  e  $Y = [-1, 1]$ . Sendo assim,  $X \cdot Y = [\min S, \max S]$ , onde  $S = \{-2, -1, 1, 2\}$ . Logo,  $[-2, -1] \cdot [-1, 1] = [-2, 2]$ .

Em particular, se o intervalo  $X$  é degenerado, digamos,  $X = [c, c]$ , temos que

$$X \cdot Y = \begin{cases} [c\underline{Y}, c\overline{Y}] & \text{se } c > 0 \\ [0, 0] = 0 & \text{se } c = 0 \\ [c\overline{Y}, c\underline{Y}], & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Por exemplo,  $-Y = [-1, -1] \cdot Y = [-\overline{Y}, -\underline{Y}]$ .

**Proposição 1.8.** Para todo intervalo  $X$ , tem-se que  $X \cdot [-1, 1] = |X| \cdot [-1, 1]$ .

*Demonstração.* Sejam  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$  e  $Y = [-1, 1]$ . Sendo assim,  $X \cdot Y = [\min S, \max S]$ , onde  $S = \{-\underline{X}, \underline{X}, -\overline{X}, \overline{X}\}$ . Como  $\min S = \min(-S)$  e  $\min(-S) = -\max S$ , temos que  $X \cdot [-1, 1] = [-\max S, \max S]$ . Desta forma, para concluirmos a demonstração, precisamos mostrar que  $\max S = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$ . Analisemos dois casos.

1. Para  $\underline{X} = \overline{X} = s$ , temos que  $\max S = \max\{-s, s\} = |s| = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$ .

2. Para  $\underline{X} < \overline{X}$ ,

(a)  $0 \leq \underline{X} < \overline{X}$ .

Sendo assim, multiplicando a desigualdade por  $(-1)$ , temos que  $-\overline{X} < -\underline{X} \leq 0$ .

E assim,  $\max S = \overline{X} = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$ .

(b)  $\underline{X} < \overline{X} \leq 0$ .

Sendo assim, multiplicando a desigualdade por  $(-1)$ , temos que  $0 \leq -\overline{X} < -\underline{X}$ .

E assim,  $\max S = -\underline{X} = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$ , pois  $|\underline{X}| = -\underline{X}$  e  $|\overline{X}| = -\overline{X}$ .

(c)  $\underline{X} \leq 0 < \overline{X}$ .

Sendo assim, multiplicando a desigualdade por  $(-1)$ , temos que  $-\overline{X} < 0 \leq -\underline{X}$ .

$\max S = \max\{-\underline{X}, \overline{X}\} = \max\{|\underline{X}|, |\overline{X}|\}$ .

Portanto,  $X \cdot [-1, 1] = \max(|\underline{X}|, |\overline{X}|) \cdot [-1, 1], \forall X$ . □

### Subtração

Sejam  $X$  e  $Y$  intervalos. Usando as operações de adição e multiplicação, a subtração de  $X$  por  $Y$  é definida por

$$X - Y = X + (-Y) = [\underline{X}, \overline{X}] + [-\overline{Y}, -\underline{Y}] = [\underline{X} - \overline{Y}, \overline{X} - \underline{Y}].$$

**Exemplo 1.9.** Sejam  $X = [5, 6]$  e  $Y = [-2, 4]$ . Como  $-Y = [-4, 2]$ , temos que

$$X - Y = X + (-Y) = [5, 6] + [-4, 2] = [5 - 4, 6 + 2] = [1, 8].$$

### Divisão

Sejam  $X$  e  $Y$  intervalos, com  $0 \notin Y$ . Como  $Y$  é um intervalo, o fato de que  $0 \notin Y$  significa que ou  $Y > 0$  ou  $Y < 0$ . A divisão de  $X$  por  $Y$  é definida por

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y},$$

onde

$$\frac{1}{Y} = \left\{ \frac{1}{y} : y \in Y \right\} = \left[ \frac{1}{\overline{Y}}, \frac{1}{\underline{Y}} \right].$$

Vale salientar que na aritmética intervalar não existe o inverso multiplicativo.

**Exemplo 1.10.** Sejam  $X = [1, 2]$  e  $Y = [-5, -3]$ . Como  $0 \notin Y$ , temos que

$$\frac{1}{Y} = \left[ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \right].$$

Sendo assim,

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} = [1, 2] \cdot \left[ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5} \right] = [\min S, \max S],$$

onde  $S = \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5} \right\}$ . E assim,  $X \cdot \frac{1}{Y} = \left[ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{5} \right]$ .

Dentro do contexto de aritmética intervalar, e após compreendermos o que é ponto médio e comprimento de um intervalo, podemos expressar um intervalo  $X$  como

$$X = m(X) + \left[ -\frac{w(X)}{2}, \frac{w(X)}{2} \right] = m(X) + \frac{w(X)}{2} \cdot [-1, 1].$$

Isto segue-se do fato de que, dados  $a$  e  $b$ , com, por exemplo,  $a < b$ ,

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a) \\ b &= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a). \end{aligned}$$

Um intervalo  $X$  tal que  $\underline{X} = -\overline{X}$  é dito um *intervalo simétrico*. A expressão acima mostra que todo intervalo pode ser escrito como a soma de um intervalo degenerado com um intervalo simétrico.

**Exemplo 1.11.** Dado um intervalo  $X = [12, 30]$ , podemos expressá-lo por

$$\begin{aligned} X &= 21 + 9 \cdot [-1, 1] \\ &= 21 + [-9, 9] \\ &= [12, 30] \end{aligned}$$

Uma consequência imediata da definição de intervalo simétrico mostra-nos que

$$-X = -[\underline{X}, \overline{X}] = [-\overline{X}, -\underline{X}] = [\underline{X}, \overline{X}] = X,$$

para todo  $X$  intervalo simétrico.

Usando a Proposição 1.8, nós vemos que as regras da aritmética intervalar tornam-se mais simples. Ilustremos isto através de alguns exemplos. Para tanto, sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  intervalos simétricos. Sendo assim,

$$X \pm Y = |X|[-1, 1] \pm |Y|[-1, 1] = (|X| \pm |Y|)[-1, 1]$$

$$X \cdot Y = (|X|[-1, 1]) \cdot (|Y|[-1, 1]) = |X||Y|[-1, 1]$$

$$\begin{aligned} X \cdot (Y \pm Z) &= (|X|[-1, 1]) \cdot (|Y| \pm |Z|)[-1, 1] \\ &= |X|(|Y| \pm |Z|)[-1, 1] \\ &= X \cdot Y \pm X \cdot Z \end{aligned}$$

Um pouco mais geralmente, para todo intervalo  $X$  e para  $Y$  e  $Z$  intervalos simétricos,

$$X \cdot Y = (|X|[-1, 1]) \cdot Y = |X|([-1, 1] \cdot Y) = |X|Y$$

$$X \cdot (Y + Z) = |X|(Y + Z) = |X|Y + |X|Z = X \cdot Y + X \cdot Z$$

## 1.5 Vetores

Por um vetor intervalar  $X$  de  $n$  dimensões concebemos uma  $n$ -úpla ordenada de  $n$  intervalos  $X_1, X_2, \dots$ , e  $X_n$ , denotamos por  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Cada um dos intervalos que compõem o vetor intervalar é dito *uma componente* do mesmo. Por exemplo, um vetor intervalar tridimensional é da forma

$$X = (X_1, X_2, X_3) = ([\underline{X}_1, \overline{X}_1], [\underline{X}_2, \overline{X}_2], [\underline{X}_3, \overline{X}_3]).$$

O mesmo pode ser representado por um paralelepípedo no  $(x_1, x_2, x_3)$ -espaço. De fato, podemos escrever

$$X = [\underline{X}_1, \overline{X}_1] \times [\underline{X}_2, \overline{X}_2] \times [\underline{X}_3, \overline{X}_3],$$

onde  $\times$  indica o produto cartesiano, que é o conjunto de todas as triplas  $(x_1, x_2, x_3)$  de números reais tais que  $x_i \in [\underline{X}_i, \overline{X}_i]$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Mais geralmente, todo vetor intervalar  $n$ -dimensional  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , com  $X_i = [\underline{X}_i, \overline{X}_i]$ , pode ser representado por um  $n$ -retângulo no  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -espaço pela expressão

$$X = [\underline{X}_1, \overline{X}_1] \times [\underline{X}_2, \overline{X}_2] \times \dots \times [\underline{X}_n, \overline{X}_n].$$

Assim como já vimos, podemos estender a compreensão de intervalos ordinários a vetores intervalares. Temos, então as seguintes propriedades:



1. Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é um vetor real e  $X = (X_1, \dots, X_n)$  é um vetor intervalar  $n$ -dimensional, então

$$x \in X \text{ se, e somente se, } x_i \in X_i, \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

2. A interseção de dois vetores intervalares  $n$ -dimensionais é vazia se pelo menos uma das interseções das componentes correspondentes é vazia, isto é,

$$\text{se } X_i \cap Y_i = \emptyset, \text{ para algum } i, \text{ então } X \cap Y = \emptyset.$$

Caso contrário, considerando  $X = (X_1, \dots, X_n)$  e  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , temos que

$$X \cap Y = (X_1 \cap Y_1, \dots, X_n \cap Y_n),$$

que é novamente um intervalo.

3. Se  $X = (X_1, \dots, X_n)$  e  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  são vetores intervalares, então

$$X \subseteq Y, \text{ se } X_i \subseteq Y_i, \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

4. O comprimento do vetor intervalar  $X = (X_1, \dots, X_n)$  é o maior dos comprimentos dos seus intervalos componentes, isto é,

$$w(X) = \max_{1 \leq i \leq n} w(X_i).$$

**Exemplo 1.12.** Seja o vetor intervalar  $X = (X_1, X_2) = ([-10, 2], [0, 11])$ . Sendo assim,

$$w(X) = \max\{2 - (-10), 11 - 0\} = \max\{12, 11\} = 12.$$

5. O ponto médio do vetor intervalar  $X = (X_1, \dots, X_n)$  é

$$m(X) = (m(X_1), \dots, m(X_n)).$$

**Exemplo 1.13.** Seja o vetor intervalar  $X = (X_1, X_2) = ([-10, 2], [0, 11])$ . Sendo assim,

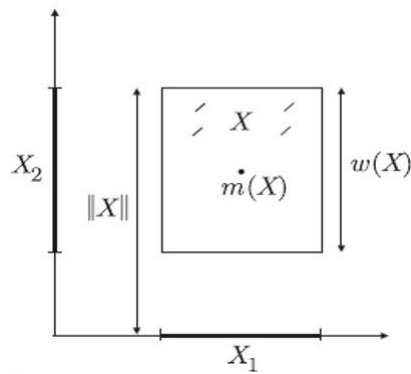
$$m(X) = \left( \frac{-10 + 2}{2}, \frac{0 + 11}{2} \right) = \left( -4, \frac{11}{2} \right).$$

6. A norma do vetor intervalar  $X = (X_1, \dots, X_n)$  é dada por

$$\|X\| = \max_{1 \leq i \leq n} |X_i|.$$

**Exemplo 1.14.** Seja o vetor intervalar  $X = (X_1, X_2) = ([-10, 2], [0, 11])$ . Sendo assim,

$$\|X\| = \max\{\max\{|-10|, |2|\}, \max\{|0|, |11|\}\} = \max\{10, 11\} = 11.$$



Usando a definição de norma intervalar em espaço  $n$ -dimensional, e apelando para a tradução geométrica de um vetor intervalar como um  $n$ -retângulo no  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -espaço, definimos um conjunto  $S$  como *limitado* se, existe um vetor intervalar  $X$   $n$ -dimensional tal que  $S \subset X$ . Estas ideias permitem-nos computar com conjuntos de forma análoga ao que fazemos com números e vetores ordinários.

É possível, dentro da arena da aritmética intervalar, definir um *produto interno* dos vetores intervalares  $U = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  e  $V = (V_1, V_2, \dots, V_n)$  como

$$P(U, V) = U_1 \cdot V_1 + U_2 \cdot V_2 + \dots + U_n \cdot V_n.$$

Neste caso, o intervalo  $P(U, V)$  contém todos os produtos internos de vetores ordinários cujas componentes correspondentes pertencem aos vetores intervalares  $U$  e  $V$ .

**Exemplo 1.15.** Uma família de vetores ordinários é dada por  $(f, 6, -7)$ , onde  $1 \leq f \leq 3$ . Calculemos a faixa de produtos internos entre essa família de vetores e  $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ . Nas notações acima, podemos escrever

$$U = ([1, 3], [6, 6], [-7, -7]) \text{ e } V = \left( \left[ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right], \left[ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right], [0, 0] \right).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} P(U, V) &= [1, 3] \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right] + [6, 6] \cdot \left[ \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right] + [-7, -7] \cdot [0, 0] \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right] + 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + (-7) \cdot 0 \\ &= \left[ \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}} \right] + \frac{12}{\sqrt{5}} \\ &= \left[ \frac{13}{\sqrt{5}}, \frac{15}{\sqrt{5}} \right] \end{aligned}$$

E assim, a faixa de produtos internos é  $\left[ \frac{13}{\sqrt{5}}, \frac{15}{\sqrt{5}} \right] = [5.8137767\dots, 6.7082\dots]$ .

---

## Outras propriedades da aritmética intervalar

---

Como visto no capítulo anterior, a aritmética ordinária e a aritmética intervalar gozam de propriedades semelhantes. Mas, esta última apresenta algumas peculiaridades, que iremos observar e comentar neste capítulo.

Relembramos a notação

$$X \odot Y = \{x \odot y : x \in X, y \in Y\}, \quad \text{onde } \odot \text{ representa } +, -, \cdot \text{ ou } \div .$$

No caso da divisão, tem-se que  $0 \notin Y$ , ou seja, ou  $Y < 0$  ou  $Y > 0$ .

### 2.1 Propriedades algébricas

A aritmética intervalar goza das propriedades comutativa e associativa para adição e multiplicação.

#### 2.1.1 Comutatividade

##### Adição

**Proposição 2.1.** *Se  $X$  e  $Y$  são intervalos reais, ao mudarmos a ordem das parcelas não será alterada a soma, ou seja,*

$$X + Y = Y + X$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que ao mudarmos a ordem das parcelas não será alterada

a soma. Vejamos,

$$\begin{aligned}
 X + Y &= [\underline{X}, \overline{X}] + [\underline{Y}, \overline{Y}] \\
 &= [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}] \\
 &= [\underline{Y} + \underline{X}, \overline{Y} + \overline{X}] \\
 &= [\underline{Y}, \overline{Y}] + [\underline{X}, \overline{X}] \\
 &= Y + X.
 \end{aligned}$$

E assim, fica demonstrado a validade da propriedade comutativa para a adição intervalar.  $\square$

### Multiplicação

**Proposição 2.2.** *Se  $X$  e  $Y$  são intervalos reais, ao mudarmos a ordem dos fatores não será alterado o produto, ou seja,*

$$X \cdot Y = Y \cdot X$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que ao mudarmos a ordem dos fatores não será alterado o produto. Vejamos, por um lado,

$$X \cdot Y = [\min S, \max S],$$

onde  $S = \{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}\}$ . Por outro lado,

$$Y \cdot X = [\min T, \max T],$$

onde  $T = \{\underline{Y}\underline{X}, \underline{Y}\overline{X}, \overline{Y}\underline{X}, \overline{Y}\overline{X}\}$ . Como  $S = T$ , temos que  $X \cdot Y = Y \cdot X$ . Logo, a propriedade comutativa da multiplicação é válida na aritmética intervalar.  $\square$

### 2.1.2 Associatividade

#### Adição

**Proposição 2.3.** *Se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são intervalos reais, ao associarmos as parcelas de diferentes maneiras não será alterada a soma, ou seja,*

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que ao associarmos as parcelas de diferentes maneiras não

será alterada a soma. Vejamos,

$$\begin{aligned}
 (X + Y) + Z &= ([\underline{X}, \bar{X}] + [\underline{Y}, \bar{Y}]) + [\underline{Z}, \bar{Z}] \\
 &= [\underline{X} + \underline{Y}, \bar{X} + \bar{Y}] + [\underline{Z}, \bar{Z}] \\
 &= [(\underline{X} + \underline{Y}) + \underline{Z}, (\bar{X} + \bar{Y}) + \bar{Z}] \\
 &= [\underline{X} + (\underline{Y} + \underline{Z}), \bar{X} + (\bar{Y} + \bar{Z})] \\
 &= [\underline{X}, \bar{X}] + [\underline{Y} + \underline{Z}, \bar{Y} + \bar{Z}] \\
 &= [\underline{X}, \bar{X}] + ([\underline{Y}, \bar{Y}] + [\underline{Z}, \bar{Z}]) \\
 &= X + (Y + Z)
 \end{aligned}$$

Logo, fica demonstrado a validade da propriedade associativa da adição intervalar.  $\square$

### Multiplicação

**Proposição 2.4.** *Se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são intervalos reais, ao associarmos os fatores de diferentes maneiras não será alterado o produto, ou seja,*

$$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$$

*Demonstração.* Vamos mostrar que ao associarmos os fatores de diferentes maneiras, o valor do produto não será alterado. Como

$$X \cdot Y = [\min S, \max S],$$

onde  $S = \{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\bar{Y}, \bar{X}\underline{Y}, \bar{X}\bar{Y}\}$ , temos que

$$(X \cdot Y) \cdot Z = [\min T, \max T],$$

onde

$$T = \{\min S \underline{Z}, \min S \bar{Z}, \max S \underline{Z}, \max S \bar{Z}\}.$$

E também, como

$$Y \cdot Z = [\min U, \max U],$$

onde  $U = \{\underline{Y}\underline{Z}, \underline{Y}\bar{Z}, \bar{Y}\underline{Z}, \bar{Y}\bar{Z}\}$ , temos que

$$X \cdot (Y \cdot Z) = [\min V, \max V],$$

onde

$$V = \{\underline{X} \min U, \underline{X} \max U, \bar{X} \min U, \bar{X} \max U\}.$$

Agora, pela associatividade da multiplicação da aritmética ordinária, temos que

$$\begin{aligned}
 \min T &= \min\{(\underline{X}\underline{Y})\underline{Z}, (\underline{X}\underline{Y})\bar{Z}, (\underline{X}\bar{Y})\underline{Z}, (\underline{X}\bar{Y})\bar{Z}, (\bar{X}\underline{Y})\underline{Z}, (\bar{X}\underline{Y})\bar{Z}, (\bar{X}\bar{Y})\underline{Z}, (\bar{X}\bar{Y})\bar{Z}\} \\
 &= \min\{\underline{X}(\underline{Y}\underline{Z}), \underline{X}(\underline{Y}\bar{Z}), \underline{X}(\bar{Y}\underline{Z}), \underline{X}(\bar{Y}\bar{Z}), \bar{X}(\underline{Y}\underline{Z}), \bar{X}(\underline{Y}\bar{Z}), \bar{X}(\bar{Y}\underline{Z}), \bar{X}(\bar{Y}\bar{Z})\} \\
 &= \min V
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \max T &= \max\{(\underline{X}\underline{Y})\underline{Z}, (\underline{X}\underline{Y})\overline{Z}, (\underline{X}\overline{Y})\underline{Z}, (\underline{X}\overline{Y})\overline{Z}, (\overline{X}\underline{Y})\underline{Z}, (\overline{X}\underline{Y})\overline{Z}, (\overline{X}\overline{Y})\underline{Z}, (\overline{X}\overline{Y})\overline{Z}\} \\ &= \max\{\underline{X}(\underline{Y}\underline{Z}), \underline{X}(\underline{Y}\overline{Z}), \underline{X}(\overline{Y}\underline{Z}), \underline{X}(\overline{Y}\overline{Z}), \overline{X}(\underline{Y}\underline{Z}), \overline{X}(\underline{Y}\overline{Z}), \overline{X}(\overline{Y}\underline{Z}), \overline{X}(\overline{Y}\overline{Z})\} \\ &= \max V \end{aligned}$$

E assim,  $X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$ . □

### 2.1.3 Elemento identidade na aritmética intervalar

Os intervalos degenerados 0 e 1 são os elementos identidades, respectivamente, da adição e da multiplicação intervalar. De fato, dado  $X$  um intervalo qualquer,

$$0 + X = X + 0 = X.$$

e

$$1 \cdot X = X \cdot 1 = X.$$

O intervalo degenerado 0 é o elemento absorvente da multiplicação intervalar, já que

$$0 \cdot X = X \cdot 0 = 0.$$

### 2.1.4 Os elementos inversos aditivos e multiplicativos

Primeiramente, vejamos os elementos inversos aditivos. Dado  $X$  intervalo, devemos procurar  $Y$  intervalo tal que  $X + Y = 0$ .

Vamos assumir  $X$  não degenerado, ou seja,

$$\underline{X} < \overline{X}$$

Assim,  $\underline{X} + \underline{Y} = 0$  e  $\overline{X} + \overline{Y} = 0$ . Por hipótese, temos que  $Y$  é o inverso de  $X$ .

Então,

$$-\underline{Y} = \underline{X}$$

e

$$\overline{X} = -\overline{Y}$$

Podemos afirmar que

$$-\underline{Y} = \underline{X} < \overline{X} = -\overline{Y} \Rightarrow -\underline{Y} < -\overline{Y}$$

Ao multiplicarmos esse resultado por  $(-1)$ , temos

$$\underline{Y} > \overline{Y}$$

Absurdo, pois  $\underline{Y} < \overline{Y}$ .

Consequentemente, *os únicos intervalos que têm inversos aditivos são os intervalos degenerados*, já que o conjunto dos intervalos degenerados é identificado com o conjunto dos números reais.

**Observação 2.5.** No caso de  $X$  ter comprimento diferente de 0, temos que

$$X - X = w(X) \cdot [-1, 1],$$

que é um intervalo simétrico.

Vejam os casos dos inversos multiplicativos. Para este caso, dado  $X$  intervalo, com  $0 \notin X$ , devemos mostrar que existe um intervalo  $Y$  tal que  $X \cdot Y = 1$ . Donde, segue-se que  $\underline{X} = \overline{X}$ .

Portanto, *os únicos intervalos que têm inversos multiplicativos são os degenerados não-nulos*.

Finalizando a subseção, observemos que

$$0 \in X - X \quad \text{e} \quad 1 \in \frac{X}{\overline{X}}.$$

**Exemplo 2.6.** Seja  $X = [-5, 3]$ . Sendo assim,

$$X - X = [-5, 3] + [-3, 5] = [-8, 8].$$

Logo,  $0 \in [-8, 8]$ .

**Exemplo 2.7.** Seja  $X = [3, 5]$ . Sendo assim,

$$\frac{X}{\overline{X}} = X \cdot \frac{1}{\overline{X}} = [3, 5] \cdot \left[ \frac{1}{5}, \frac{1}{3} \right] = [\min S, \max S],$$

onde  $S = \left\{ \frac{3}{5}, 1, \frac{5}{3} \right\}$ . E assim,  $\frac{X}{\overline{X}} = \left[ \frac{3}{5}, \frac{5}{3} \right]$ . Portanto,  $1 \in \left[ \frac{3}{5}, \frac{5}{3} \right]$ .

### 2.1.5 Subdistributividade

Da aritmética ordinária, temos que

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Porém, na aritmética intervalar a distributiva falha. Vejam, sejam  $X = [-4, -3]$ ,  $Y = [-2, 2]$  e  $Z = [-2, -1]$ . Então, por um lado,

$$\begin{aligned} X \cdot (Y + Z) &= [-4, -3] \cdot [-2 - 2, 2 - 1] \\ &= [-4, -3] \cdot [-4, 1] \\ &= [-4, 16]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} X \cdot Y + X \cdot Z &= [-4, -3] \cdot [-2, 2] + [-4, -3] \cdot [-2, -1] \\ &= [-8, 8] + [3, 8] \\ &= [-5, 16] \end{aligned}$$

Notadamente, existe a inclusão  $[-4, 16] \subseteq [-5, 16]$ .

Observando o contra-exemplo dado, percebemos que, embora não exista uma relação de distributividade, pois a igualdade não se mantém, o resultado nos sugere o seguinte

**Proposição 2.8.** *Sejam  $X, Y$  e  $Z$  intervalos. Então, vale a seguinte inclusão*

$$X \cdot (Y + Z) \subseteq X \cdot Y + X \cdot Z,$$

que é a propriedade de subdistributividade.

*Demonstração.* Observemos que  $X \cdot Y = [\min S, \max S]$ , onde

$$S = \{\underline{XY}, \underline{X\bar{Y}}, \bar{X}\underline{Y}, \bar{X}\bar{Y}\},$$

e  $X \cdot Z = [\min T, \max T]$ , onde

$$T = \{\underline{XZ}, \underline{X\bar{Z}}, \bar{X}\underline{Z}, \bar{X}\bar{Z}\}.$$

E também,  $Y + Z = [\underline{Y} + \underline{Z}, \bar{Y} + \bar{Z}]$  e  $X(Y + Z) = [\min U, \max U]$ , onde

$$U = \{\underline{X}(\underline{Y} + \underline{Z}), \bar{X}(\underline{Y} + \underline{Z}), \underline{X}(\bar{Y} + \bar{Z}), \bar{X}(\bar{Y} + \bar{Z})\}.$$

Como  $U = \{\underline{XY} + \underline{XZ}, \bar{X}\underline{Y} + \bar{X}\underline{Z}, \underline{X}\bar{Y} + \underline{X}\bar{Z}, \bar{X}\bar{Y} + \bar{X}\bar{Z}\}$ , temos que

$$U \subseteq S + T.$$

Agora, sabendo que  $\min U \geq \min(S + T) \geq \min S + \min T$  e  $\max U \leq \max(S + T) \leq \max S + \max T$ , temos que  $XY + XZ = [\min S + \min T, \max S + \max T]$ . Logo,

$$[\min U, \max U] \subseteq [\min S + \min T, \max S + \max T].$$

□

Todavia, na relação entre um número real e um intervalo a distributividade é válida, como mostra-nos a próxima proposição.

**Proposição 2.9.** *Sejam  $x$  um número real e  $Y$  e  $Z$  intervalos. Então,*

$$x \cdot (Y + Z) = x \cdot Y + x \cdot Z.$$



*Demonstração.* (I) Seja  $x > 0$ . Como  $Y + Z = [\underline{Y} + \underline{Z}, \overline{Y} + \overline{Z}]$ , temos que  $x \cdot (Y + Z) = [x(\underline{Y} + \underline{Z}), x(\overline{Y} + \overline{Z})]$ . Observando que  $x \cdot Y = [x\underline{Y}, x\overline{Y}]$  e  $x \cdot Z = [x\underline{Z}, x\overline{Z}]$ , chegamos a

$$xY + xZ = [x\underline{Y} + x\underline{Z}, x\overline{Y} + x\overline{Z}] = [x(\underline{Y} + \underline{Z}), x(\overline{Y} + \overline{Z})] = x[\underline{Y} + \underline{Z}, \overline{Y} + \overline{Z}] = x(Y + Z).$$

(II) Para  $x = 0$ , a demonstração é trivial, pois  $0 \cdot X = 0$ , para todo intervalo  $X$ .

(III) Agora, para  $x < 0$ ,  $x \cdot (Y + Z) = [x(\overline{Y} + \overline{Z}), x(\underline{Y} + \underline{Z})] = [x\overline{Y} + x\overline{Z}, x\underline{Y} + x\underline{Z}] = xY + xZ$ .

□

Salientamos que uma condição necessária e suficiente para que a multiplicação de intervalos seja distributiva é que os intervalos envolvidos na soma tenham o mesmo sinal, conforme veremos abaixo. Vejamos um exemplo que ilustra a condição.

**Exemplo 2.10.** Sejam  $X = [-3, 4]$ ,  $Y = [-4, -3]$  e  $Z = [-2, -1]$  intervalos. Sendo assim,

$$\begin{aligned} X \cdot (Y + Z) &= [-3, 4] \cdot [-4 - 2, -3 - 1] \\ &= [-3, 4] \cdot [-6, -4] \\ &= [-24, 18] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X \cdot Y + X \cdot Z &= [-3, 4] \cdot [-4, -3] + [-3, 4] \cdot [-2, -1] \\ &= [-16, 12] + [-8, 6] \\ &= [-24, 18] \end{aligned}$$

Logo,  $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$  para  $YZ > 0$ .

Mostremos que o observado no exemplo acima acontece em geral.

**Proposição 2.11.** *Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  intervalos. Então, tem-se que*

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z \text{ se, e somente se, } Y \cdot Z > 0.$$

*Demonstração.* A hipótese de que  $YZ > 0$  significa que os extremos de  $Y$  e  $Z$  têm os mesmos sinais. Sendo assim, precisamos verificar dois casos:

- i)  $(\underline{Y} < \overline{Y} < 0 \text{ e } \underline{Z} < \overline{Z} < 0)$  ou
- ii)  $(0 < \underline{Y} < \overline{Y} \text{ e } 0 < \underline{Z} < \overline{Z})$ .

Consideremos o primeiro caso, que é  $\underline{Y} < \overline{Y} < 0$  e  $\underline{Z} < \overline{Z} < 0$ . Disto, segue-se que  $\underline{Y} + \underline{Z} < \overline{Y} + \overline{Z} < 0$ .

- a) Para  $X > 0$ , temos que  $\overline{XY} < \underline{XY} < \underline{X\overline{Y}}$  e  $\overline{XY} < \overline{X\overline{Y}} < \underline{X\overline{Y}}$ . E assim, concluímos que  $X \cdot Y = [\overline{XY}, \underline{X\overline{Y}}]$ . Analogamente,  $X \cdot Z = [\overline{XZ}, \underline{X\overline{Z}}]$  e  $X \cdot (Y + Z) = [\overline{X(Y+Z)}, \underline{X(\overline{Y} + \overline{Z})}]$ . E então,

$$X \cdot (Y + Z) = [\overline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}, \underline{X(\overline{Y} + \overline{Z})}] = [\overline{X\underline{Y}} + \overline{X\underline{Z}}, \underline{X\overline{Y}} + \underline{X\overline{Z}}] = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

- b) Para  $X = 0$ , temos que  $0 \cdot (Y + Z) = 0 = 0 \cdot Y + 0 \cdot Z$ . Para  $X < 0$ , temos que  $\overline{X\overline{Y}} < \underline{X\overline{Y}} < \underline{XY}$  e  $\overline{X\overline{Y}} < \overline{X\underline{Y}} < \underline{XY}$ . E assim, concluímos que  $X \cdot Y = [\overline{X\overline{Y}}, \underline{XY}]$ . Analogamente,  $X \cdot Z = [\overline{X\overline{Z}}, \underline{XZ}]$  e  $X \cdot (Y + Z) = [\overline{X(\overline{Y} + \overline{Z})}, \underline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}]$ . E então,

$$X \cdot (Y + Z) = [\overline{X(\overline{Y} + \overline{Z})}, \underline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}] = [\overline{X\overline{Y}} + \overline{X\overline{Z}}, \underline{XY} + \underline{XZ}] = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

- c) Agora, consideremos o caso em que  $\underline{X} < 0 < \overline{X}$ . Sendo assim,  $\overline{X\underline{Y}} < \overline{X\overline{Y}} < \underline{X\overline{Y}} < \underline{XY}$ . Donde,  $X \cdot Y = [\overline{X\underline{Y}}, \underline{XY}]$ . Analogamente,  $X \cdot Z = [\overline{X\underline{Z}}, \underline{XZ}]$  e  $X \cdot (Y + Z) = [\overline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}, \underline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}]$ . Logo,

$$X \cdot (Y + Z) = [\overline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}, \underline{X(\underline{Y} + \underline{Z})}] = [\overline{X\underline{Y}} + \overline{X\underline{Z}}, \underline{XY} + \underline{XZ}] = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

O segundo caso, que é ( $0 < \underline{Y} < \overline{Y}$  e  $0 < \underline{Z} < \overline{Z}$ ), é totalmente análogo.  $\square$

### 2.1.6 Cancelamento

Na aritmética intervalar, é possível aplicarmos a lei do cancelamento.

**Proposição 2.12.** *Sejam  $X, Y$  e  $Z$  intervalos. Então, vale a lei do cancelamento, que é*

$$X + Z = Y + Z \Rightarrow X = Y.$$

*Demonstração.* O fato de que  $Z + X = Z + Y$  significa que  $\underline{Z} + \underline{X} = \underline{Z} + \underline{Y}$  e que  $\overline{Z} + \overline{X} = \overline{Z} + \overline{Y}$ . Como vale a lei do cancelamento em  $\mathbb{R}$ , temos que  $\underline{X} = \underline{Y}$  e  $\overline{X} = \overline{Y}$ . Logo,  $X = Y$ .  $\square$

Porém, não existe a lei do cancelamento para a multiplicação intervalar, como mostramos o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.13.** Sejam  $Z = [-1, 1]$ ,  $X = [-1, 0]$  e  $Y = [0, 1]$ . Observemos que  $X \neq Y$ , mas

$$Z \cdot X = [\min S, \max S] = [-1, 1] = Z \cdot Y,$$

onde  $S = \{-1, 0, 1\}$ .

Notadamente, ressaltamos, pela identificação de intervalos degenerados e números reais, que a aritmética intervalar é uma extensão da ordinária.

## 2.2 Inclusão isotônica da aritmética intervalar

Usando a notação  $\odot$  para representar cada uma das operações intervalares, e dados os intervalos  $A, B, C$  e  $D$ , vemos que

$$A \subseteq C \text{ e } B \subseteq D \Rightarrow A \odot B \subseteq C \odot D.$$

Isto significa que cada operação intervalar satisfaz a propriedade de *inclusão isotônica*, ou, equivalentemente, é dita uma *inclusão isotônica*.

Consequentemente, temos que *uma sequência finita de operações intervalares é uma inclusão isotônica*. Mostremos isto por indução sobre o número de operações intervalares. Para tanto, sejam  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  e  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$  vetores intervalares  $k$ -dimensionais tais que  $X \subseteq Y$ . Isto significa que, para cada  $i = 1, 2, \dots, k$ , tem-se que  $X_i \subseteq Y_i$ . Para  $k = 2$ , a afirmação é verdadeira, como observamos acima. Mostremos, para  $k = 3$ , como o processo indutivo funciona. Como, por hipótese,

$$X_2 \odot_2 X_3 \subseteq Y_2 \odot_2 Y_3,$$

temos que

$$X_1 \odot_1 (X_2 \odot_2 X_3) \subseteq Y_1 \odot_1 (Y_2 \odot_2 Y_3).$$

Agora, suponhamos, por hipótese de indução, que a afirmação é verdadeira para  $k - 1$ . Então,

$$X_1 \odot_1 (X_2 \odot_2 \odot_3 \dots \odot_{k-2} X_{k-1} \odot_{k-1} X_k) \subseteq Y_1 \odot_1 (Y_2 \odot_2 \odot_3 \dots \odot_{k-2} Y_{k-1} \odot_{k-1} Y_k).$$

**Exemplo 2.14.** Sejam os intervalos  $[2, 5]$ ,  $[1, 6]$ ,  $[-20, 12]$  e  $[-30, 15]$ . Sendo assim,  $[2, 5] \subseteq [1, 6]$  e  $[-20, 12] \subseteq [-30, 15]$ . E assim,

$$[2, 5] + [-20, 12] = [-18, 17] \subseteq [-29, 21] = [1, 6] + [-30, 15]$$

Percebemos, portanto, com o exemplo acima, a sequência de operações intervalares, denotando uma inclusão isotônica.

### 3.1 Introdução

Neste capítulo, daremos uma introdução às funções intervalares. Munido da aritmética intervalar, estenderemos as funções reais de uma variável real a funções cujos argumentos são intervalos, que são denominadas de *funções intervalares*.

### 3.2 O conjunto imagem e a extensão unida

Seja  $f$  uma função real de uma variável real. Dado  $X$  um subconjunto do domínio de  $f$ , a *imagem direta de  $X$  por  $f$* , indicada por  $f(X)$ , é o conjunto

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}. \quad (3.1)$$

Mais geralmente, considerando  $f$  uma função real de  $n$  variáveis reais, definimos a imagem direta de  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  por  $f$  como o conjunto

$$f(X) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in X_i\}.$$

A próxima definição fornece-nos a terminologia adequada para estendermos as funções reais de uma variável real para funções intervalares.

**Definição 3.1.** Sejam  $g : M_1 \rightarrow M_2$  uma função entre os conjuntos  $M_1$  e  $M_2$ , e  $S(M_1)$  e  $S(M_2)$  as famílias dos subconjuntos de  $M_1$  e de  $M_2$ , ou de outra forma, os conjuntos das partes de  $M_1$  e de  $M_2$ , respectivamente. A *extensão unida de  $g$*  é a função  $\bar{g} : S(M_1) \rightarrow S(M_2)$  tal que

$$\bar{g}(X) = \{g(x) : x \in X, X \in S(M_1)\}.$$

Para cada  $x \in M_1$ , temos que  $\bar{g}(\{x\}) = \{g(x)\}$ . Isso justifica o termo extensão na definição de  $\bar{g}$ . Além disso, leva-nos a observar que

$$\bar{g}(X) = \bigcup_{x \in X} \{g(x)\} = g(X),$$

isto é, o valor da extensão unida de  $g$  em um subconjunto  $X$  de  $M_1$  é precisamente a imagem direta de  $X$  por  $g$ , que é  $g(X)$ .

Para o que se segue, estaremos interessados em imagens diretas de intervalos ou  $n$ -úplas de intervalos. É importante observarmos que o domínio das funções intervalares, para cada uma das variáveis, caso exista mais de uma, é o subconjunto de  $S(\mathbb{R})$  constituído pelos intervalos fechados, e que seu contradomínio é  $S(\mathbb{R})$ . Além disso, para funções reais contínuas, o contradomínio é o subconjunto de  $S(\mathbb{R})$  constituído pelos intervalos fechados. De agora em diante, nós entenderemos desta forma, sem maiores detalhes.

Em geral, a determinação da extensão unida de uma função não é uma tarefa fácil. Mas, existem funções cujas extensões unidas são fáceis de determinar, como podemos ver nos exemplos abaixo.

**Exemplo 3.2.** Seja  $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3, 5\}$  dada por  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 1$  e  $f(3) = 1$ . Observemos que  $S(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$  e que  $S(\{1, 3, 5\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$ . Sendo assim, a extensão unida de  $f$ , que é  $\bar{f} : S(\{1, 2, 3\}) \rightarrow S(\{1, 3, 5\})$ , é dada por

1.  $\bar{f}(\emptyset) = \emptyset$ ;
2.  $\bar{f}(\{1\}) = \{f(1)\} = \{3\}$ ;
3.  $\bar{f}(\{2\}) = \{f(2)\} = \{1\}$ ;
4.  $\bar{f}(\{3\}) = \{f(3)\} = \{1\}$ ;
5.  $\bar{f}(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{1, 3\}$ ;
6.  $\bar{f}(\{1, 3\}) = \{f(1), f(3)\} = \{1, 3\}$ ;
7.  $\bar{f}(\{2, 3\}) = \{f(2), f(3)\} = \{1\}$ ;
8.  $\bar{f}(\{1, 2, 3\}) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{1, 3\}$ .

**Exemplo 3.3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = k$ , onde  $k$  é uma constante real. Sendo assim, dado  $X \in S(\mathbb{R})$ , isto é,  $X \subset \mathbb{R}$ , temos que

$$\bar{f}(X) = \{f(x) : x \in X\} = \{k\}.$$

Logo, a extensão unida de  $f$ , que é  $\bar{f} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$ , é dada por  $\bar{f}(X) = \{k\}$ .

**Exemplo 3.4.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x$ . Sendo assim, para cada  $X \in S(\mathbb{R})$ , temos que  $\bar{f}(X) = \{x : x \in X\} = X$ . Logo,  $\bar{f} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$  é dada por  $\bar{f}(X) = X$ .

**Exemplo 3.5.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = cx$ , onde  $c$  é constante real não-nula. Sendo assim,  $\bar{f} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$  é dada por  $\bar{f}(X) = \{cx : x \in X\} = cX$ .

**Exemplo 3.6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = cx + k$ , onde  $c$  e  $k$  são constantes reais não-nulas. Sendo assim,  $\bar{f} : S(\mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R})$  é dada por  $\bar{f}(X) = \{cx + k : x \in X\} = cX + k$ .

### 3.3 Outras funções intervalares simples

Nesta seção, calculemos as imagens diretas de intervalos para outras funções elementares. *Verbi gratia*, consideremos

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sendo assim, a imagem direta do intervalo  $X = [\underline{X}, \bar{X}]$  por  $f$  é dada por

$$f(X) = \begin{cases} [\underline{X}^2, \bar{X}^2], & \text{se } 0 \leq \underline{X} \leq \bar{X} \\ [\bar{X}^2, \underline{X}^2], & \text{se } \underline{X} \leq \bar{X} \leq 0 \\ [0, \max\{\underline{X}^2, \bar{X}^2\}], & \text{se } \underline{X} < 0 < \bar{X} \end{cases}$$

onde  $f(X) = \{x^2 : x \in X\}$ , que passamos a denotar por  $X^2$ . Verifiquemos que, em geral,  $X^2$  não é o mesmo que  $X \cdot X$ . Por exemplo, por um lado,

$$[-2, 1]^2 = [0, 4],$$

já, por outro lado,

$$[-2, 1] \cdot [-2, 1] = [-2, 4].$$

O que podemos afirmar é que, em geral,  $X^2 \subset X \cdot X$ , como é fácil ver. Também, é compreensível que  $X^2 = X \cdot X$ , se  $0 \notin X$ . Por exemplo, como

$$\underline{X}\underline{X} < \underline{X}\bar{X} = \bar{X}\underline{X} < \bar{X}\bar{X},$$

para  $X > 0$ , temos que

$$X^2 = [\underline{X}^2, \bar{X}^2] = [\min S, \max S] = X \cdot X,$$

onde  $S = \{\underline{X}\underline{X}, \underline{X}\bar{X}, \bar{X}\bar{X}\}$ .

A superestimação quando calculamos  $X^2$  como  $X \cdot X$  é devido ao fenômeno da *dependência intervalar*. Fato que devemos considerar para não nos depararmos com resultados insatisfatórios. Uma vez que  $X^2$  consiste de todos os elementos da forma  $x^2 = xx$ , enquanto que  $X \cdot X = \{xy : x, y \in X\}$  contém, em particular, tais elementos.

### 3.3.1 Comportamento intervalar para funções monótonas

Para funções monótonas, o cálculo das imagens diretas de intervalos é bastante simples. Lembramos que, dada  $f$  uma função real de variável real,  $f$  é uma *função monótona* se, para todos  $x$  e  $y$ , com  $x > y$ , tem-se que: ou  $f(x) > f(y)$ , caso em que  $f$  é dita *crescente*, ou  $f(x) < f(y)$ , caso em que  $f$  é dita *decrecente*. Por exemplo, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^2$  quando restrita aos intervalos  $(-\infty, 0]$  e  $[0, +\infty)$  são, respectivamente, decrescente e crescente. E assim, dado  $X \subset [0, +\infty)$  um intervalo, temos que

$$f([\underline{X}, \bar{X}]) = [f(\underline{X}), f(\bar{X})] = [\underline{X}^2, \bar{X}^2].$$

Analogamente, dado  $X \subset (-\infty, 0]$  um intervalo,

$$f([\underline{X}, \bar{X}]) = [f(\underline{X}), f(\bar{X})] = [\bar{X}^2, \underline{X}^2].$$

Veja a figura

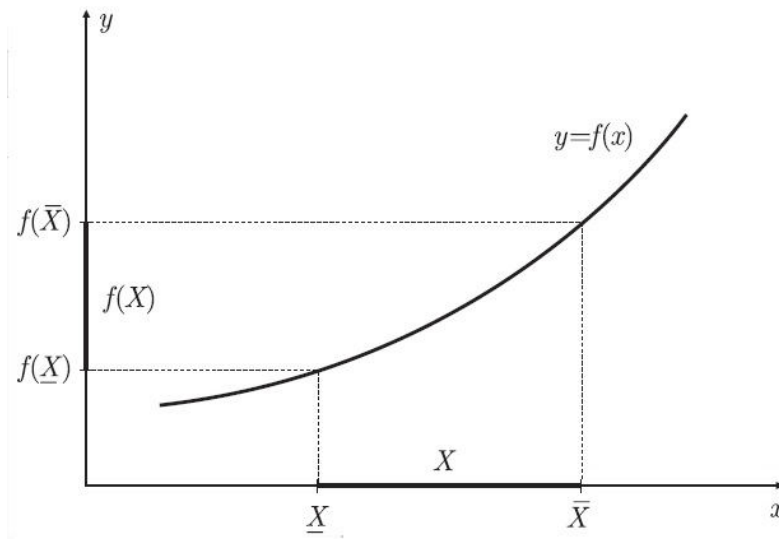


Figura 3.1: A imagem de um intervalo  $X$  sob a função crescente  $f(x)$ .

Vejam alguns exemplos.

1. **Função Exponencial.** Já sabemos que a função exponencial, definida por  $f(x) = \exp(x)$ , é uma função crescente. Sendo assim,

$$\exp(X) = [\exp(\underline{X}), \exp(\bar{X})].$$

2. **Função Logarítmica.** A situação para a função logarítmica, definida por  $f(x) = \log x$ , é similar ao caso da função exponencial, já que uma é inversa da outra. E então,

$$\log X = [\log \underline{X}, \log \bar{X}].$$

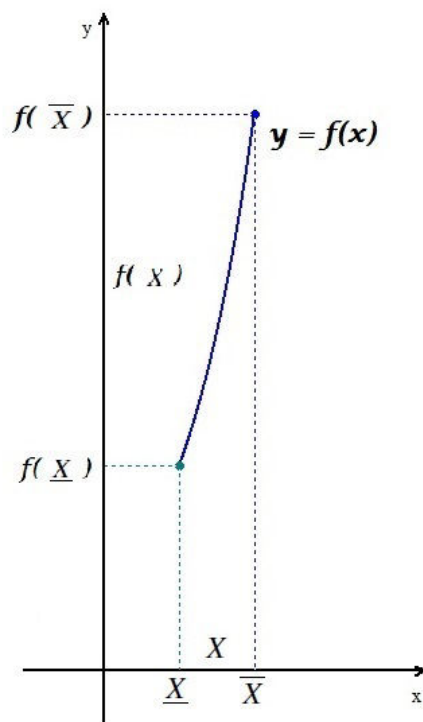


Figura 3.2: A imagem de um intervalo  $X$  sob a Função Exponencial  $f(x)$ .

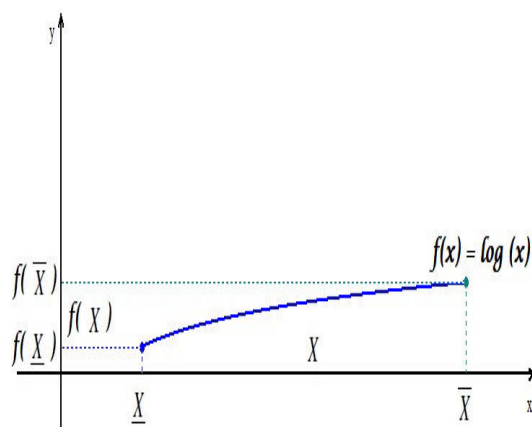


Figura 3.3: A imagem de um intervalo  $X$  sob a Função Logarítmica  $f(x)$ .

3. **Função Raiz Quadrada.** Dando continuidade, sabemos que a função raiz quadrada é crescente. E então,

$$\sqrt{X} = \left[ \sqrt{\underline{X}}, \sqrt{\bar{X}} \right],$$



para todo intervalo  $X \geq 0$ .

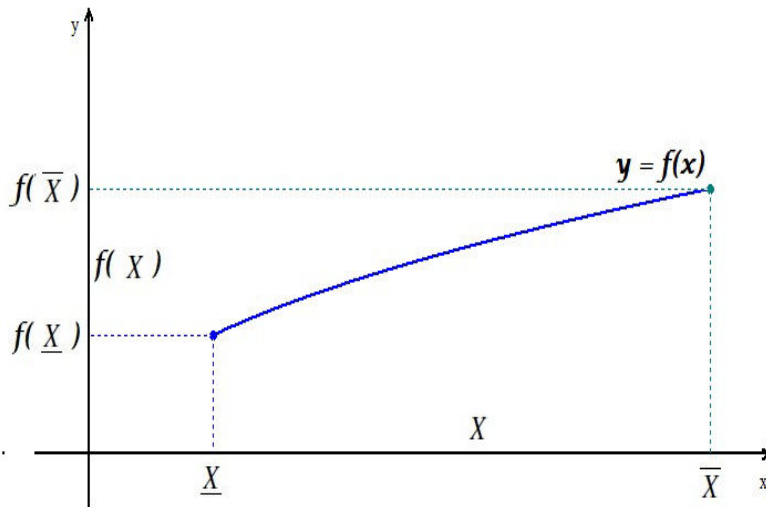


Figura 3.4: A imagem de um intervalo  $X$  sob a Função Raiz Quadrada  $f(x)$ .

Incipientemente, mostremos como utilizar as ideias que expomos até o momento para estender as funções reais às funções intervalares.

**Exemplo 3.7.** Seja o retângulo que tem comprimento medindo  $2m$ , com variação de  $0.005m$ , e largura,  $1m$ , com variação de  $0.005m$ . Calculemos a variação da sua diagonal.

*Seja um retângulo com dimensões  $2 \times 1$ . Queremos calcular a variação da diagonal. Para isso, utilizaremos a aritmética intervalar. Como existe uma variação de  $0.005m$  nas medições, temos que*

- Comprimento:  $1.995 \leq c \leq 2.005$
- Largura:  $0.995 \leq l \leq 1.005$

*Pela aritmética ordinária, a diagonal do retângulo é calculada pela fórmula*

$$d^2 = c^2 + l^2.$$

*Para estimarmos a variação da diagonal, utilizaremos um procedimento que será formalizado mais adiante, que é, na fórmula acima, substituir as operações ordinárias pelas operações intervalares correspondentes. E assim, obtemos*

$$D^2 = C^2 + L^2.$$

*Consequentemente, chegamos a*

$$\begin{aligned}
[\underline{D}, \overline{D}]^2 &= C \cdot C + L \cdot L \\
&= [3.99800025, 4.00200025] + [0.99900025, 1.00100025] \\
&= [4.9970005, 5.0030005] \\
[\underline{D}, \overline{D}] &= [\sqrt{4.9970005}, \sqrt{5.0030005}] \\
&= [2.2353, 2.2367].
\end{aligned}$$

Desta forma, dadas as variações das dimensões iniciais, concluímos que  $2.2353 \leq d \leq 2.2367$ .

**Exemplo 3.8.** Para uma antena localizada  $h$  metros acima do solo, a distância em km para o horizonte de rádio da linha de visada <sup>1</sup>, é dada por  $d = \sqrt{2h}$ . Portanto, se uma antena de transmissão estiver no topo de uma torre de altura  $h_1$  metros, e uma antena receptora fica no topo de um edifício de altura  $h_2$  metros, sua separação máxima permitida para a comunicação da linha de visada é  $s \approx \sqrt{2h_1} + \sqrt{2h_2}$ , em quilômetros. Avaliemos a faixa possível de valores de  $s$  para torres que variam em altura de 300 a 460 metros, e edifícios que variam em altura de 6 a 16 metros.

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{2H_1} + \sqrt{2H_2} \\
&= \sqrt{[2, 2] \cdot [300, 460]} + \sqrt{[2, 2] \cdot [6, 16]} \\
&= \sqrt{[600, 920]} + \sqrt{[12, 32]} \\
&= [\sqrt{600}, \sqrt{920}] + [\sqrt{12}, \sqrt{32}] \\
&= [24.49, 30.33] + [3.46, 5.65] \\
&= [27.95, 35.98]
\end{aligned}$$

Portanto, a faixa de variação dos valores de  $s$  é  $[27.95, 35.98]km$

4. **Função Exponencial Geral** Para cada  $y > 0$ , a função exponencial geral é dada por  $f(x) = x^y$ , para todo  $x > 0$ . Usando a expressão  $x^y = \exp^{y \log x}$ , concluímos que a função exponencial geral é crescente. E então,

$$X^y = [\underline{X}^y, \overline{X}^y],$$

para todos  $X > 0$  e  $y > 0$ .

---

<sup>1</sup>**Linha de visada** é uma linha imaginária que une dois objetos sem interceptar obstáculos de modo que uma pessoa na posição de um dos objetos possa ver o outro.

5. **Seno.** Analisando o Gráfico 3.5, vemos que a função seno não é monótona. Mas, por exemplo, se restringirmos a função seno em  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , a mesma torna-se crescente. E assim, para todo intervalo  $X \subseteq [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , temos que

$$\sin X = [\sin \underline{X}, \sin \overline{X}].$$

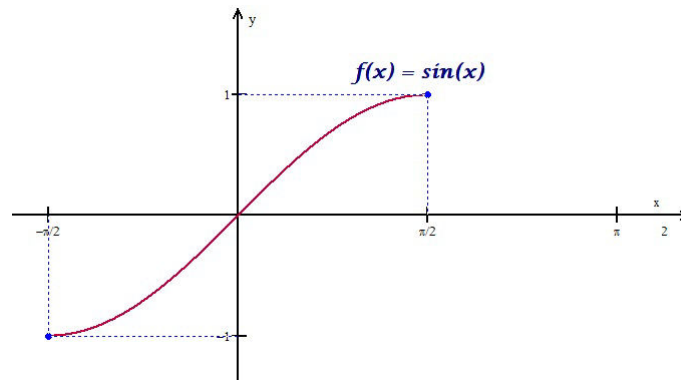


Figura 3.5: A imagem da Função Seno  $f(x)$  sob um intervalo  $A = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq X$ .

Nós podemos usar as conhecidas propriedades da função seno para determinar extensões intervalares para qualquer argumento intervalar. Por exemplo, dado  $k \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin x \in [-1, 1]$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Todas as funções vistas até aqui, exceto a última, são funções crescentes. A análise para as funções decrescentes é totalmente análoga, tomando o cuidado de ordenar corretamente os extremos. Por exemplo, se  $x$  aumenta de  $\underline{X}$  para  $\overline{X}$ , os valores de  $\exp(-x)$  diminuem de  $\exp(-\underline{X})$  para  $\exp(-\overline{X})$ . Desta forma,

$$\exp(-X) = [\exp(-\overline{X}), \exp(-\underline{X})],$$

como mostra-nos o Gráfico 3.6.

### 3.4 Extensões intervalares de funções reais

Na última seção, nós definimos algumas funções a valores intervalares, que denominamos de *funções intervalares*. Nossa estratégia foi determinar a imagem direta de um intervalo por uma função real.

Nesta seção, formalizaremos o procedimento que utilizamos no item 3.1, que foi substituir diretamente as operações ordinárias constantes na definição da função a valores reais, que adotamos como *fórmula*, pelas operações intervalares correspondentes.

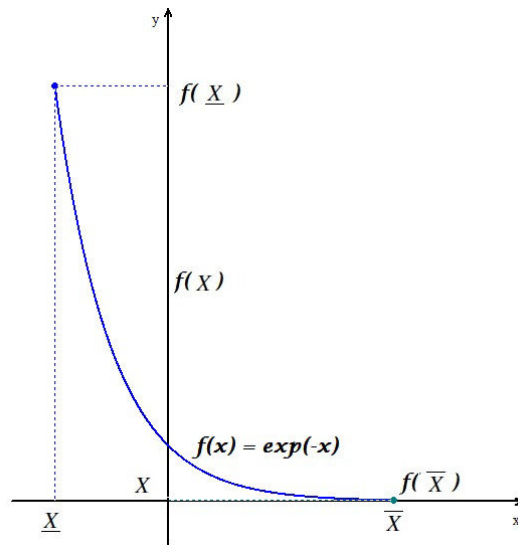


Figura 3.6: A imagem de um intervalo  $X$  sob a Função Exponencial decrescente  $f(x)$ .

### 3.4.1 Fórmulas e extensões intervalares

Inicialmente, consideramos um exemplo, que servirá de ilustração, que é um caso particular do exemplo 3.6, para  $c = -1$  e  $k = 1$ . Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $f(x) = 1 - x$ .

Observemos que uma função real é definida por dois ingredientes, que são

1. Um *domínio* sobre o qual a função age;
2. Uma *regra* que mostra como os elementos do domínio são modificados pela função.

Ambos os ingredientes estão presentes na função acima. No caso, o domínio de  $f$  é o conjunto dos números reais e a regra é dada por  $x \mapsto 1 - x$ .

Isoladamente, a expressão

$$f(x) = 1 - x \tag{3.2}$$

é uma fórmula, não uma função. Em geral, esta distinção tem sido ignorada. Por exemplo, na maioria dos livros de Matemática Elementar quando diz que  $f(x) = x - 1$  é uma função, entende-se que o domínio dela é o maior domínio possível, de acordo com as operações envolvidas na sua regra. Logo, para nossos interesses o domínio da função é tao essencial quanto a fórmula  $f(x)$ .

Para a função  $f(x) = 1 - x$ , usando o procedimento delineado no início desta seção, obtemos a função  $F$  a valores intervalares dada por  $F(X) = 1 - X$ , para todo intervalo  $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ . A função  $F$  é dita uma *extensão da função*  $f$ . O termo extensão de  $f$  faz sentido uma vez que, usando a identificação  $x = [x, x]$ , tem-se que, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$F([x, x]) = [1, 1] - [x, x] = [1 - x, 1 - x] = 1 - x = f(x).$$

Isso motiva a seguinte

**Definição 3.9.** Dada  $f$  uma função real, dizemos que  $F$  é uma *extensão intervalar* de  $f$ , se, para todo  $x$  no domínio de  $f$ , tem-se que  $F([x, x]) = f(x)$ .

Comparando  $F(X)$  com a imagem direta de  $X$  por  $f$ , observamos que

$$F(X) = [1, 1] - [\underline{X}, \overline{X}] = [1 - \overline{X}, 1 - \underline{X}] = -X + 1 = f(X).$$

E então, como já sabemos do Exemplo 3.6, temos que  $F$  é a extensão unida de  $f$ . Infelizmente, em geral, a situação não é tão simples, como veremos abaixo.

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções reais tais que  $f = g$  num intervalo  $X \subseteq \mathbb{R}$ , isto é,  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in X$ . Sendo assim, dadas  $F$  e  $G$  extensões intervalares, respectivamente, de  $f$  e  $g$  no intervalo  $X$ , pergunta-se:  $F(X) = G(X)$ ? Vamos responder esta questão. Para tanto, consideremos as funções reais  $f$  e  $g$  definidas por  $f(x) = x(1-x)$  e  $g(x) = x - x^2$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Claramente, na aritmética ordinária,  $f = g$  em  $\mathbb{R}$ . E também, para cada intervalo  $X \subseteq \mathbb{R}$ , temos que  $f(X) = g(X)$ .

Consideremos as funções a valores intervalares definidas por  $F(X) = X \cdot (1 - X)$  e  $G(X) = X - X^2$ . Estas funções são extensões intervalares óbvias de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Simplesmente, substituímos diretamente as operações ordinárias pelas operações intervalares correspondentes. Vejamos como estas extensões funcionam. Para cada intervalo  $X$ , por um lado,

$$\begin{aligned} F(X) &= X \cdot (1 - X) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] \cdot ([1, 1] + [-\overline{X}, -\underline{X}]) \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] \cdot [1 - \overline{X}, 1 - \underline{X}] \\ &= [\min S, \max S] \end{aligned}$$

onde  $S = \{\underline{X}(1 - \overline{X}), \underline{X}(1 - \underline{X}), \overline{X}(1 - \overline{X}), \overline{X}(1 - \underline{X})\}$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} G(X) &= X - X^2 \\ &= [\underline{X}, \overline{X}] - \begin{cases} [\underline{X}^2, \overline{X}^2], & \text{se } X \geq 0 \\ [\overline{X}^2, \underline{X}^2], & \text{se } X \leq 0 \\ [0, \max\{\underline{X}^2, \overline{X}^2\}], & \text{se } \underline{X} < 0 < \overline{X} \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\underline{X} - \overline{X}^2, \overline{X} - \underline{X}^2], & \text{se } X \geq 0 \\ [\underline{X} - \underline{X}^2, \overline{X} - \overline{X}^2], & \text{se } X \leq 0 \\ [\underline{X}, \overline{X} - \max\{\underline{X}^2, \overline{X}^2\}], & \text{se } \underline{X} < 0 < \overline{X}. \end{cases} \end{aligned}$$

Disto, segue-se que, para  $X = [0, 1]$ , temos

$$F([0, 1]) = [0, 1] \neq [-1, 1] = G([0, 1]),$$

já que  $S = \{0, 1\}$ . Além disso,  $F([0, 1])$  e  $G([0, 1])$  são distintos de  $f([0, 1])$ , que é igual a  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ .

As extensões intervalares acima para  $f$  e  $g$ , mostra-nos que, em geral, a resposta à pergunta que fizemos é negativa.

Verifica-se que a extensão unida da função original  $f$  decorre de uma terceira fórmula equivalente, que é dada por  $h(x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ . E então, denotando sua extensão intervalar óbvia por  $H$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 H(X) &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] - \left([\underline{X}, \overline{X}] - \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)^2 \\
 &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] - \left[\underline{X} - \frac{1}{2}, \overline{X} - \frac{1}{2}\right]^2 \\
 &= \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] - \begin{cases} \left[\left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right], & \text{se } \underline{X} \geq \frac{1}{2} \\ \left[\left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right], & \text{se } \overline{X} \leq \frac{1}{2} \\ \left[0, \max\left\{\left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right\}\right], & \text{se } \underline{X} < \frac{1}{2} < \overline{X} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \left[\frac{1}{4} - \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{4} - \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right], & \text{se } \underline{X} \geq \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4} - \left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{4} - \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right], & \text{se } \overline{X} \leq \frac{1}{2} \\ \left[\frac{1}{4} - \max\left\{\left(\underline{X} - \frac{1}{2}\right)^2, \left(\overline{X} - \frac{1}{2}\right)^2\right\}, \frac{1}{4}\right], & \text{se } \underline{X} < \frac{1}{2} < \overline{X} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} [\overline{X}(1 - \overline{X}), \underline{X}(1 - \underline{X})], & \text{se } \underline{X} \geq \frac{1}{2} \\ [\underline{X}(1 - \underline{X}), \overline{X}(1 - \overline{X})], & \text{se } \overline{X} \leq \frac{1}{2} \\ \left[\min\left\{\underline{X}(1 - \underline{X}), \overline{X}(1 - \overline{X})\right\}, \frac{1}{4}\right], & \text{se } \underline{X} < \frac{1}{2} < \overline{X} \end{cases}
 \end{aligned}$$

E isso é precisamente  $f(X)$ . Em particular,

$$\begin{aligned}
 H([0, 1]) &= \left[\frac{1}{4} - \max\left\{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2\right\}, \frac{1}{4}\right] \\
 &= \left[0, \frac{1}{4}\right].
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.10.** Sejam  $A_1 = [0, 1]$ ,  $A_2 = [1, 2]$  e  $A_3 = [-2, 1]$ . Calculemos os valores das expressões  $F = (A_1 - A_2) \cdot \frac{A_3}{A_2}$  e  $G = \left(\frac{A_1}{A_2} - 1\right) \cdot A_3$ . Do ponto de vista da aritmética ordinária, as duas expressões são iguais, desde que a divisão faça sentido. Pela Proposição 2.11, nós antecipamos que a distributividade não é válida, desde que dentro dos parênteses os termos têm sinais opostos. Passemos aos cálculos das expressões intervalares.

$$\begin{aligned}
F &= ([0, 1] - [1, 2]) \cdot \frac{[-2, 1]}{[1, 2]} \\
&= ([0, 1] + [-2, -1]) \cdot \left( [-2, 1] \cdot \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \right) \\
&= [-2, 0] \cdot [-2, 1] \\
&= [-2, 4]
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
G &= \left( \frac{[0, 1]}{[1, 2]} - 1 \right) \cdot [-2, 1] \\
&= \left( [0, 1] \cdot \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] - [1, 1] \right) \cdot [-2, 1] \\
&= ([0, 1] - [1, 1]) \cdot [-2, 1] \\
&= [-1, 0] \cdot [-2, 1] \\
&= [-1, 2]
\end{aligned}$$

Os cálculos mostra-nos que  $F \neq G$ . Com maior razão,  $G \subset F$ .

### 3.4.2 Extensões intervalares de funções multivariáveis

Até o momento, limitamo-nos às funções intervalares de uma variável intervalar. Mas, não há razão para evitarmos funções de várias variáveis intervalares, que são funções da forma

$$F = F(X_1, \dots, X_n),$$

que, no caso, dependem de  $n$  variáveis intervalares  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Analogamente, como fizemos no caso de uma variável intervalar, podemos definir

**Definição 3.11.** Seja  $f$  uma função real de  $n$  variáveis reais. Uma *extensão intervalar* de  $f$  é uma função  $F$  a valores intervalares de  $n$  variáveis intervalares  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tal que

$$F([x_1, x_1], [x_2, x_2], \dots, [x_n, x_n]) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Um exemplo importante é o das operações intervalares. Neste caso, cada operação intervalar é um exemplo de uma função a valores intervalares de duas variáveis intervalares. De fato, cada uma das operações intervalares é uma extensão intervalar da operação ordinária correspondente. Usando a notação  $\odot$ , que representa qualquer uma das operações intervalares, definimos a função intervalar correspondente por

$$\odot(X, Y) = X \odot Y = \{x \odot y : x \in X, y \in Y\},$$

para todos os intervalos  $X$  e  $Y$ .

Com maior razão, as operações intervalares são extensões unidas das operações ordinárias correspondentes.

### 3.4.3 A propriedade de subconjunto da extensão unida

Seja  $g : M_1 \rightarrow M_2$ . É imediato da definição de extensão unida, que a extensão unida de  $g$  satisfaz a *propriedade de subconjunto*, isto é, para todos  $X, Y \in S(M_1)$  tais que  $X \subseteq Y$  tem-se que

$$\bar{g}(X) \subseteq \bar{g}(Y).$$

Adiante, retornaremos a esta propriedade.

### 3.4.4 Inclusão isotônica

**Definição 3.12.** Diz-se que uma função  $F$  a valores intervalares de  $n$  variáveis intervalares é uma *inclusão isotônica* se para todos  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  e  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  tais que  $X \subseteq Y$ , tem-se que

$$F(X_1, X_2, \dots, X_n) \subseteq F(Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

A Subseção 3.4.3 mostra-nos que toda extensão unida que satisfaz a propriedade de subconjunto é uma inclusão isotônica. Em particular, como já mencionamos na seção 2.2, temos que as operações intervalares são inclusões isotônicas, isto é, para todos  $(X_1, X_2) \subseteq (Y_1, Y_2)$ , tem-se que

$$X_1 \odot X_2 \subseteq Y_1 \odot Y_2.$$

## 3.5 Funções intervalares racionais

**Definição 3.13.** Uma *função intervalar racional* é uma função a valores intervalares cujos valores estão definidos por uma sequência finita de operações intervalares.

**Exemplo 3.14.** Considere a função a valores intervalares de duas variáveis intervalares dada por

$$F(X_1, X_2) = ([1, 2] \cdot X_1 + [0, 1]) \cdot X_2.$$

Observemos que  $F$  pode ser escrita como  $F(X_1, X_2) = T_2(X_1, X_2) \cdot X_2$ , onde  $T_2 = T_1 + [0, 1]$  e  $T_1(X_1, X_2) = [1, 2] \cdot X_1$ . E assim,  $F$  é uma extensão intervalar racional.

Pela natureza da definição, uma extensão intervalar racional surge como uma extensão intervalar de alguma função a valores reais. No Exemplo 3.14, a função  $F$  é uma extensão intervalar da função a valores reais de duas variáveis reais da forma

$$f(x_1, x_2) = (c_1 x_1 + c_2) x_2,$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes reais, como é fácil ver, substituindo diretamente as operações ordinárias pelas operações intervalares correspondentes.



Do comentário acima, concluímos que a função intervalar dada por

$$F(X) = m(X) + \frac{1}{2}(X - m(X))$$

não é uma função intervalar racional, já que a função

$$m(X) = \frac{\underline{X} + \overline{X}}{2}$$

não é uma operação intervalar.

**Lema 3.15.** *Todas as funções intervalares racionais são inclusões isotônicas.*

*Demonstração.* Seja  $F$  uma função intervalar racional. Sendo assim, os valores de  $F$  são obtidos por uma sequência finita de operações intervalares. Como uma sequência finita de operações intervalares é uma inclusão isotônica, ver Seção 2.2, temos que as funções intervalares racionais são inclusões isotônicas.  $\square$

**Exemplo 3.16.** Mostraremos, por um contraexemplo, que a função intervalar

$$F(X) = m(X) + \frac{1}{2}(X - m(X))$$

não é inclusão isotônica. Sendo assim, pelo lema acima, ela não é uma função intervalar racional, como havíamos observado antes. Inicialmente, é fácil ver que, dado um intervalo  $X$ ,

$$F(X) = \left[ \frac{3\underline{X} + \overline{X}}{4}, \frac{3\overline{X} + \underline{X}}{4} \right].$$

Sendo assim, dados  $X$  e  $Y$  intervalos tais que  $X \subseteq Y$ , para que  $F(X) \subseteq F(Y)$  é necessário que

$$3\underline{Y} + \overline{Y} \leq 3\underline{X} + \overline{X} \leq 3\overline{X} + \underline{X} \leq 3\overline{Y} + \underline{Y}.$$

Desta forma, se alguma destas desigualdades não é verificada, então a inclusão  $F(X) \subseteq F(Y)$  não ocorre. Por exemplo, para  $X = [-1, 0]$  e  $Y = [-1, 1]$ , temos que  $X \subset Y$ , mas

$$F([-1, 0]) = \left[ -\frac{3}{4}, -\frac{1}{4} \right] \not\subseteq F([-1, 1]) = \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$

já que  $-\frac{3}{4} < -\frac{1}{2}$ . Distó, segue-se que  $F$  não é uma inclusão isotônica.

### 3.6 O Teorema Fundamental da Análise Intervalar

Agora, estamos prontos para enunciar e demonstrar um teorema central.

**Teorema 3.17** (Teorema Fundamental da Análise Intervalar). *Se  $F$  é uma extensão intervalar de  $f$ , então  $F$  é uma inclusão isotônica. Assim,*

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) \subseteq F(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

para todo vetor intervalar  $n$ -dimensional  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

*Demonstração.* Por definição de extensão intervalar, temos que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

para todo  $x_i \in X_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Isto significa que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

para cada  $n$ -úpla intervalar  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Como  $F$  é uma inclusão isotônica, temos que

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bigcup_{x \in X} \{f(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \subseteq F(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ , □

Até aqui, vimos que, para cada função real  $f$ , obtemos uma extensão intervalar substituindo diretamente as operações ordinárias constantes na fórmula  $f(x)$  pelas operações intervalares correspondentes. Uma extensão intervalar  $F$ , resultante deste procedimento, é dita uma *extensão intervalar natural* de  $f$ . O mesmo procedimento pode ser utilizado para funções intervalares de várias variáveis intervalares. Como observamos acima, devemos manter em mente que

*duas expressões racionais que são equivalentes na aritmética ordinária podem não ser equivalentes na aritmética intervalar.*

Todavia, para funções intervalares racionais, que já mostramos que são inclusões isotônicas, temos o seguinte corolário do Teorema 3.17.

**Corolário 3.18.** *Se  $F$  é uma extensão intervalar racional de  $f$ , então*

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) \subseteq F(X_1, X_2, \dots, X_n),$$

para todo vetor intervalar  $n$ -dimensional  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

O corolário mostra-nos que o valor intervalar de uma extensão natural de uma dada função real contém a sua imagem correspondente.

**Exemplo 3.19.** Considere o polinômio

$$p(x) = 1 - 5x + \frac{1}{3}x^3.$$

Suponha que desejamos conhecer a faixa de valores para  $p(x)$ , quando  $2 \leq x \leq 3$ . Sendo assim, uma extensão natural de  $p$  é

$$P(X) = 1 - 5X + \frac{1}{3}X \cdot X \cdot X.$$

Desta forma, pelo corolário acima, os valores de  $p$  no intervalo  $[2, 3]$  estão contidos no intervalo

$$P([2, 3]) = 1 - 5[2, 3] + \frac{1}{3}[8, 27] = \left[ \frac{-34}{3}, 0 \right].$$

Uma outra extensão natural de  $p$  pode ser obtida reescrevendo  $p$  como

$$q(x) = 1 - x \left( 5 - \frac{1}{3}x^2 \right).$$

Segue-se que uma extensão natural de  $p$  é dada por

$$Q(X) = 1 - X \cdot \left( 5 - \frac{1}{3}X \cdot X \right).$$

Sendo assim,  $p([2, 3])$  está contida em

$$\begin{aligned} Q([2, 3]) &= 1 - [2, 3] \cdot \left( 5 - \frac{[2, 3] \cdot [2, 3]}{3} \right) \\ &= 1 - [2, 3] \cdot \left( 5 - \left[ \frac{4}{3}, 3 \right] \right) \\ &= 1 - [2, 3] \cdot \left( 5 + \left[ -3, -\frac{4}{3} \right] \right) \\ &= 1 - [2, 3] \cdot \left[ 2, \frac{11}{3} \right] \\ &= 1 - [4, 11] \\ &= 1 + [-11, -4] \\ &= [-10, -3]. \end{aligned}$$

Este intervalo mais estreito nos dá uma melhor estimativa para a faixa desejada de valores de  $p(x)$ .

Usando o cálculo ordinário, podemos calcular a imagem direta de  $[2, 3]$  através de  $p$ , que é dada por

$$p(x) = 1 - 5x + \frac{1}{3}x^3.$$

Inicialmente, estudemos o sinal da primeira derivada. Vejamos, como  $p'(x) = x^2 - 5$ , segue-se que

1. Os pontos críticos de  $p$  são  $\pm\sqrt{5}$ ;
2.  $p$  cresce em  $(-\infty, -\sqrt{5}]$  e em  $[\sqrt{5}, +\infty)$ ;
3.  $p$  decresce em  $[-\sqrt{5}, +\sqrt{5}]$ .

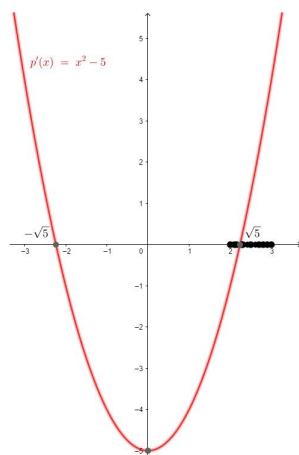


Figura 3.7: O gráfico mostra os pontos de inflexão da  $p(x)$

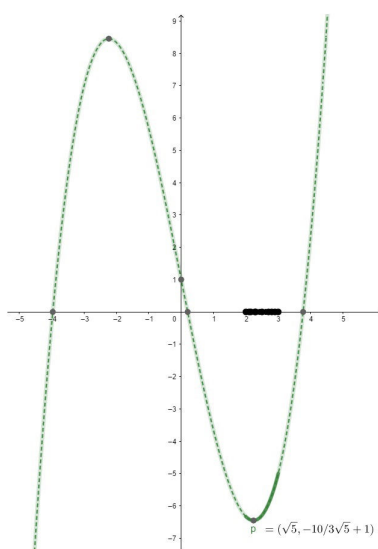


Figura 3.8: A imagem da Função polinomial  $p(x)$  sob um intervalo  $A = [2, 3]$

Como a  $f$  é contínua e o ponto crítico  $-\sqrt{5} \notin [2, 3]$ , temos três resultados possíveis para mínimo e máximo, ou são os extremos ou o ponto crítico  $\sqrt{5}$ . É o que veremos agora:

$$\begin{aligned}
 p(2) &= 1 - 5 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 2^3 \\
 &= 1 - 10 + \frac{1}{3} \cdot 8 \\
 &= 1 - 10 + \frac{8}{3} \\
 &= -\frac{19}{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(\sqrt{5}) &= 1 - 5\sqrt{5} + \frac{1}{3}(\sqrt{5})^3 \\
&= 1 - 5\sqrt{5} + \frac{5}{3}\sqrt{5} \\
&= 1 - 5\sqrt{5} + \frac{5\sqrt{5}}{3} \\
&= \frac{3 - 15\sqrt{5} + 5\sqrt{5}}{3} \\
&= -\frac{10\sqrt{5}}{3} + 1.
\end{aligned}$$

Sendo assim,  $\sqrt{5}$  é o ponto de mínimo de  $p$  em  $[2, 3]$ .

Após calcularmos o mínimo de  $p$  em  $[2, 3]$ , vamos calcular o máximo. Levando em consideração que  $p$  cresce a partir de  $\sqrt{5}$ , temos que o intervalo atinge o máximo em 3, como veremos:

$$\begin{aligned}
p(3) &= 1 - 5 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 27 \\
&= 1 - 15 + 9 \\
&= -5.
\end{aligned}$$

Assim sendo, usando a aritmética ordinária, constatamos que

$$p([2, 3]) = \left[ \frac{-10\sqrt{5}}{3} + 1, -5 \right].$$

Prestemos atenção como foi laborioso chegarmos a imagem precisa de  $p$  em  $[2, 3]$ . Isso mostra-nos a utilidade da análise intervalar para determinarmos intervalos que contenham a imagem direta de uma função real, apenas calculando uma expressão intervalar.

Mediante as discussões tecidas até aqui, ficou notório que as formas aninhadas dos polinômios

$$A_0 + X \cdot (A_1 + X \cdot (A_2 + \dots + X \cdot (A_n) \dots))$$

normalmente produz resultados melhores, e nunca piores, do que aqueles relativos a forma

$$A_0 + A_1 X + A_2 X \cdot X + \dots + A_n X \cdot \dots \cdot X.$$

Esta afirmação é válida pela Proposição 2.8.

Acontece que qualquer extensão natural de uma função racional na qual cada variável ocorra apenas uma vez, caso exista, e apenas a primeira potência é suficiente para calcular o intervalo exato dos valores, desde que não haja divisão por um intervalo contendo zero, conforme o exemplo da função dada por  $f(x) = 1 - x$ .

**Exemplo 3.20.** Vamos encontrar  $f([0, 3])$ , para  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x$ . Inicialmente, estudemos o sinal de  $f'$ . Como  $f'(x) = x^2 - 2$ , temos que

1. Os pontos críticos de  $f$  são  $\pm\sqrt{2}$ ;
2.  $f$  cresce em  $(-\infty, -\sqrt{2}]$  e em  $[\sqrt{2}, +\infty)$ ;
3.  $f$  decresce em  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

Estas informações leva-nos a concluir que os pontos de mínimo e de máximo de  $f$  em  $[0, 3]$  são  $\sqrt{2}$  e 3, respectivamente. Pois em 0, o ponto mínimo seria o próprio 0, dessa forma, temos  $f([0, 3]) = \left[ -\frac{4\sqrt{2}}{3}, 3 \right]$ .

Pela aritmética ordinária, considerando  $g(x) = x \left( \frac{1}{3}x^2 - 2 \right)$ , temos que  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Agora, considerando a extensão natural de  $f$  dada por  $F(X) = \frac{1}{3}X \cdot X \cdot X - 2X$ , calculemos  $F([0, 3])$ . Efetuando os cálculos, chegamos a

$$\begin{aligned} F([0, 3]) &= \frac{1}{3}[0, 3] \cdot [0, 3] \cdot [0, 3] - 2[0, 3] \\ &= \frac{1}{3}[0, 27] - [0, 6] \\ &= [0, 9] + [-6, 0] \\ &= [-6, 9] \end{aligned}$$

O que mostra que  $f(X)$  está contido em  $F(X)$ , mas  $f(X) \neq F(X)$ . Usando a fórmula equivalente  $g(x)$ , obtemos uma nova extensão natural de  $f$  dada por

$$G(X) = X \cdot \left( \frac{1}{3}X \cdot X - 2 \right).$$

Calculemos  $G([0, 3])$ .

$$\begin{aligned} G([0, 3]) &= [0, 3] \cdot \left( \frac{1}{3}[0, 3] \cdot [0, 3] - 2 \right) \\ &= [0, 3] \cdot \left( \frac{1}{3}[0, 9] - 2 \right) \\ &= [0, 3] \cdot ([0, 3] - 2) \\ &= [0, 3] \cdot [-2, 1] \\ &= [-6, 3] \end{aligned}$$

Pela propriedade da subdistributividade temos que  $G([0, 3]) \subseteq F([0, 3])$ , uma vez que a forma aninhada produz resultados melhores do que na forma de soma de potências.

Sob o holofote do corolário do Teorema Fundamental da Análise Intervalar, concluímos que

$$f([0, 3]) \subseteq G([0, 3]) \subseteq F([0, 3]).$$

**Observação 3.21.** Suponhamos que  $F$  seja uma extensão natural de uma função racional real  $f$ , digamos,  $f = \frac{g}{h}$ , onde  $g$  e  $h$  são polinômios. Sabemos que na definição de função

racional real, exige-se que o denominador não se anule no domínio da função. Os pontos do domínio de  $f$  em que  $h$  se anula são denominados de *polos de  $f$* . Consideremos  $G$  e  $H$  extensões naturais de  $g$  e  $h$ , respectivamente. Seja  $X_0$  um intervalo tal que  $0 \notin H(X_0)$ . Como  $F$  é uma extensão racional de  $f$ , para cada  $x \in X_0$ , temos que

$$\underline{F(X_0)} \leq f(x) \leq \overline{F(X_0)}.$$

E assim,  $f(x)$  não tem polos em  $X_0$ , já que  $0 \notin H(X_0)$ . E então, nenhuma divisão por um intervalo contendo 0 ocorrerá para  $F(X)$ , para todo  $X \subseteq X_0$ . Do fato de que  $F$  é uma inclusão isotônica, segue-se que  $F(X)$  está bem definido, para todo  $X \subseteq X_0$ .

Na Subseção 3.3.1, usamos a monotonicidade para calcular as imagens dos intervalos  $X$  para certas funções simples. Vimos exemplos de que, para cada intervalo  $X$ , se  $f$  é crescente, então

$$f(X) = [f(\underline{X}), f(\overline{X})]$$

E também, se  $f$  é decrescente, então

$$f(X) = [f(\overline{X}), f(\underline{X})].$$

Na prática, muitos desses cálculos são inacessíveis, porque os extremos requeridos não podem ser calculados exatamente. No entanto, com o uso de máquina de cálculo, podemos determinar uma aproximação dos extremos tão boa que inclua o erro de aproximação. E então, obtemos intervalos que contêm os valores exatos das imagens de uma dada função. Isso é feito, por exemplo, usando um pacote de software como o INTLAB. Sendo assim, podemos realizar estes cálculos através de dispositivos eletrônicos tais como: computador, *laptop* e *tablet*.

---

### A Aritmética intervalar na sala de aula

---

Neste capítulo, vamos apresentar algumas possibilidades de aplicação e/ou exploração da aritmética intervalar na sala de aula fazendo uma articulação entre as Unidades Temáticas, que são números, álgebra, grandezas e medidas e geometria.

#### 4.1 A BNCC e o estudo do intervalo

O que a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) aborda sobre aritmética intervalar? Essa pergunta será respondida ao longo dessa seção.

A Base Nacional Comum Curricular é

um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). BRASIL, BNCC: 2017. p. 7.

Como estamos aqui tratando da Educação Básica, e dentro desta, analisando o 9º ano do Ensino Fundamental - Anos finais, vamos nos deter a perscrutar a BNCC apenas nesse ano. Assim sendo, ao iniciarmos a análise dos objetos de conhecimentos propostos para esse ano, os quais abrem várias possibilidades de explorarmos os conceitos de aritmética intervalar, visto que os alunos já estão intelectualmente mais preparados para compreender conceitos com níveis de abstração mais elevada.

Outro fato que concorre para a implementação dessa abordagem no ano em tela é a disposição dos objetos de conhecimento, onde tomando a unidade temática Números



para análise encontramos o objeto de conhecimento “Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento da reta” (BNCC: 2017. p. 314). Temos ainda, dentro da unidade temática Álgebra, cujo objeto de conhecimento: “Funções: representações numérica, algébrica e gráfica” (BNCC: 2017. p. 314). Esses objetos citados servirão de importantes ganchos para implementarmos a nossa proposta.

Considerando que a BNCC delinea os conteúdos mínimos necessários para a implementação de uma educação de qualidade, sabemos que é o currículo que tratará das condições ambientais, físicas, estruturais e pedagógicas, bem como, os caminhos que serão trilhados pela Escola para o sujeito se apropriar desses conhecimentos que a BNCC traz no seu bojo. Mediante isso é salutar falarmos um pouco sobre currículo, a fim de alinharmos algumas concepções. Assim sendo,

“O currículo escolar abrange as experiências de aprendizagens implementadas pelas instituições escolares e que deverão ser vivenciadas pelos estudantes. Nele estão contidos os conteúdos que deverão ser abordados no processo de ensino-aprendizagem e a metodologia utilizada para os diferentes níveis de ensino”. (OLIVEIRA, pág. 1).

Em cada escola, o currículo ganha uma identidade própria. Visto que, para cada unidade de ensino onde essas atividades propostas forem aplicadas, levará em consideração a realidade da mesma. A BNCC estabelece a igualdade no tocante às aprendizagens essenciais para todos os estudantes, bem como para o ingresso e permanência desses alunos na Educação Básica, e foca a equidade ao reconhecer as diferentes necessidades dos estudantes. Sabemos ainda que é o currículo escolar quem vai dar conta de prover os meios necessários para que todos os alunos tenham o mesmo direito de aprender. Assim sendo a equidade será promovida no currículo.

É nesse contexto que vamos inserir os conceitos de aritmética intervalar no sentido de oferecer aos alunos uma aprendizagem mais significativa. Por fim, vimos que a BNCC não traz o tema aritmética intervalar - como era de se esperar - porém, traz importantes brechas para a sua inserção e discussão. O que propomos neste trabalho é, a partir do que já temos delineado na BNCC, suscitar formas de inserção desses conceitos nos objetos de conhecimento a serem explorados. Com isso, esperamos que os alunos possam operacionalizar com segmentos de reta se utilizando das operações intervalares e para isso, façam as ligações necessárias entre os segmentos de reta e os intervalos correspondentes. Esperamos também que esses mesmos alunos adquiram habilidades para, a partir de uma  $f$  real, encontrar uma das suas respectivas extensões naturais  $F$ , e calcular a  $F(X)$ .

Toda discussão deixa claro que existe a viabilidade pedagógica seja no campo conceitual, procedimental ou atitudinal. E, por assim ser verdade, vamos apresentar algumas aplicações no 9º ano, do Ensino Fundamental - Anos finais.

## 4.2 Da teoria à prática

Nesta seção serão delineadas algumas propostas para possíveis aplicações de alguns conceitos da aritmética intervalar no último ano do Ensino Fundamental - Anos finais.

Considerando a reta real como o ingrediente principal e, assim sendo, nosso ponto de partida, analisaremos segmentos da mesma, momento em que, oportunamente, lançaremos mão de algumas abordagens elencadas aqui neste trabalho, a saber, conceitos da aritmética intervalar.

Analisando a BNCC [2], vimos a Unidade Temática Números, a qual traz no seu bojo o objeto de conhecimento: *necessidade dos números reais para medir qualquer segmento da reta*, campo fértil para discorrermos sobre nossas abordagens intervalares. É oportuno aqui descrevermos o procedimento utilizado para medir um segmento qualquer na reta real.

Seja  $r$  uma reta, na qual denotamos a coordenada 0, onde será a origem, e lhe atribuímos o ponto  $O$ . Considerando a *unidade* como a distância entre 0 e 1, temos que, cada número real  $x$ , é representado pelo ponto que está a  $x$  unidades à direita da origem. E cada número real  $-x$  é representado pelo ponto que está  $x$  unidades à esquerda da origem. Como os reais é um corpo ordenado, temos que, ao tomarmos  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ , tendo  $a$  à esquerda de  $b$ , então podemos afirmar que  $a < b$ .

De agora em diante, levamos em consideração que o segmento que estamos tratando é orientado, e terá a mesma orientação que o intervalo fechado.

Como existe uma relação biunívoca entre o conjunto  $\mathbb{R}$  e a reta, então traduziremos os pontos que determinam um segmento como os reais dos extremos de um dado intervalo. Como veremos adiante no diagrama:

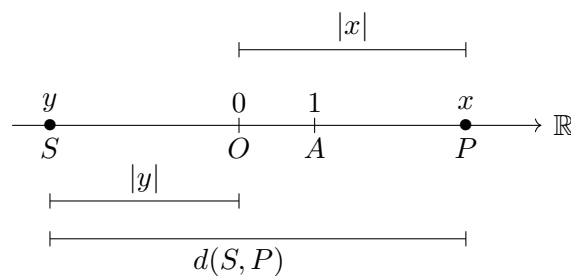


Figura 4.1: Medindo um segmento de reta

Usando a fórmula de comprimento de um intervalo, temos

$$d(S, P) = w([y, x]) = x - y$$

**Exemplo 4.1.** Seja  $X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ , então temos que o comprimento desse intervalo é  $w[-1, 1] = 2$

Com isso, tornou-se perceptível que podemos associar pontos da reta como números reais e vice-versa. Dessa forma, tomando um segmento qualquer, podemos utilizar aritmética intervalar para procedermos aos cálculos de forma rápida e segura, com as suas operações básicas, observando as suas peculiaridades, é claro.

Analisando a Figura 4.1, vimos que os segmentos de reta conservam as mesmas características que os intervalos reais, uma vez que, para efeito de cálculos, poderemos realizá-los na arena da aritmética intervalar e depois retornarmos com os resultados na forma de segmento que não alterará a estrutura deste, antes, porém, contribuirá para dinamizar o processo na realização das contas. Portanto, para cada intervalo real, faremos a leitura como um segmento e para cada segmento calculamos como intervalo real, visto que eles são correspondentes.

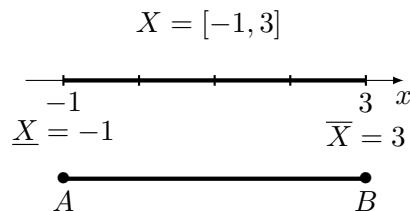
### 4.2.1 Números

Iniciaremos a abordagem do conteúdo analisando intervalos reais como segmentos de reta.

Como antes, adotamos a seguinte notação para o intervalo  $X$

$$X = [\underline{X}, \overline{X}], \text{ onde } \underline{X} \leq x \leq \overline{X}.$$

A partir de agora, vamos fazer importantes conexões entre aritmética e geometria. Nesse momento, faremos uma representação de um mesmo intervalo nas formas numérica e em diagrama - utilizando a reta real como suporte.



Como podemos perceber, o intervalo  $X$  é correspondente ao segmento  $\overline{AB}$ . Conservando a mesma estrutura quanto a sua dimensão, e orientação, ou seja, deslocando-se da esquerda para a direita, 4 unidades de comprimento.

Seguiremos durante todo o percurso do nosso trabalho obedecendo essa mesma dinâmica, apresentando sempre resultados em números e diagramas, e estes, por sua vez, nos remetendo aos segmentos de reta. Neste ínterim, teremos a oportunidade de vislumbrar as operações intervalares sendo mostradas através de intervalos na reta real.

Dando continuidade, vamos tomar intervalos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  quaisquer na reta real e veremos o que acontece ao introduzirmos cálculos de conjuntos: interseção, união e fecho de intervalo.

**Exemplo 4.2.** Seja  $X = [2, 5]$ ,  $Y = [4, 6]$  e  $Z = [-3, 0]$ , temos: Pela Definição 1.1, a

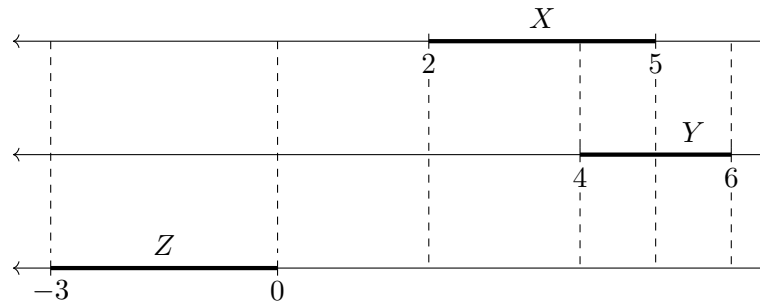


Figura 4.2: Interseção de Intervalos na reta real

interseção de intervalos acontece quando temos elementos, neste caso, números reais, que pertencem a todos intervalos envolvidos ao mesmo tempo.

Observando a Figura 4.2, vimos claramente que,

$$X \cap Y = [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}] = [4, 5],$$

ou seja, esse novo intervalo compreende todos os números reais que vai do 4 ao 5. Enquanto,

$$X \cap Z = \emptyset,$$

ou seja, não existem números reais que pertençam a  $X$  e a  $Z$  simultaneamente. Por isso que a interseção entre esses dois conjuntos é vazia. O mesmo vale para a interseção entre os conjuntos  $Y$  e  $Z$ , que também é vazia.

Agora, vamos tomar dois conjuntos  $X$  e  $Y$  e, ao analisar a Figura 4.2, calcularmos a união entre esses conjuntos. constatamos que

$$X \cup Y = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}] = [2, 6].$$

Através da Figura 4.2 é fácil ver que, de fato, a união de  $X$  e  $Y$  formam um intervalo. Agora veremos o que acontece com  $X \cup Z$ , o que resultará em dois intervalos, a saber,

$$X \cup Z = [-3, 0] \cup [2, 5],$$

o que dificultaria sobremaneira para a efetivação de cálculos com intervalos. Agora, pois, o fecho intervalar

$$X \underline{\cup} Z = [\min\{\underline{X}, \underline{Z}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Z}\}] = [-3, 5]$$

sempre forma um único intervalo, viabilizando assim a realização de diversos cálculos com a aritmética intervalar.

Nesse momento, é oportuno explicarmos para os alunos a sutil diferença entre união e fecho intervalar.

Como vimos, a união entre dois intervalos nem sempre forma um intervalo, o fecho intervalar, no entanto, sempre forma um intervalo. Frise-se ainda que as informações perdidas não representa muito na aritmética intervalar.

Após discutirmos as operações de interseção, união e fecho intervalar, vamos mostrar o que acontece, na reta real, quando incluímos as operações intervalares: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Para adicionarmos intervalos, basta somar os seus extremos correspondentes e teremos a soma, veja:

**Exemplo 4.3.** Seja  $X = [-4, 1]$  e  $Y = [-1, 4]$ , vamos mostrar que o resultado dessa adição intervalar resulta um novo intervalo e, portanto, o subconjunto do Intervalo Fechado é fechado na soma.

$$\begin{aligned} X + Y &= [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}] \\ &= [-4 + (-1), 1 + 4] \\ &= [-5, 5] \end{aligned} \tag{4.1}$$

Agora veremos como se comporta essa soma na reta real.

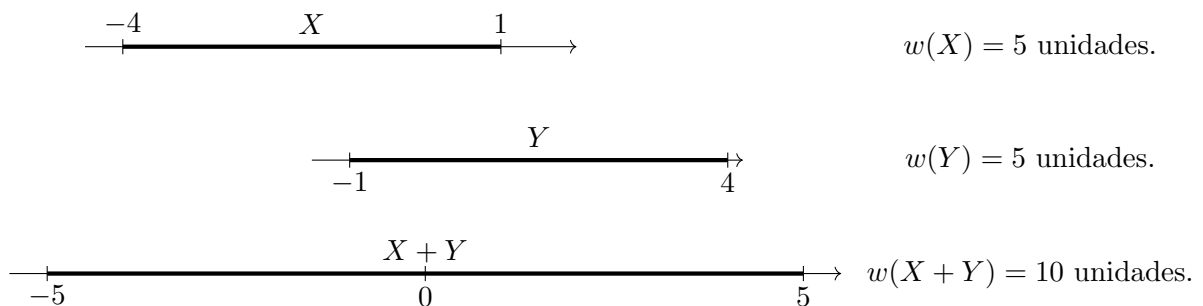


Figura 4.3: Soma de Intervalos na reta real

É importante mostrarmos aos alunos a praticidade na soma de intervalos, pois, com muita facilidade, evidenciamos que os resultados das operações intervalares são fechados no conjunto dos intervalos fechados.

A diferença de intervalos segue os mesmos parâmetros da soma, porém somamos o primeiro intervalo com o oposto do segundo.

É sempre oportuno darmos exemplos para melhor fixação e compreensão do tema ora abordado.

**Exemplo 4.4.** Seja  $X = [-4, 1]$  e  $Y = [-1, 4]$ , vamos mostrar que o resultado dessa subtração, gera um novo intervalo, e este é retratado na sua representação gráfica. Como  $-X$  não é um inverso aditivo de  $X$  no sistema de intervalos, por não ser um intervalo

degenerado, então o nosso resultado NÃO será 0 como poderíamos deduzir. Temos que  $-Y = [-4, 1]$

$$\begin{aligned} X - Y &= [\underline{X} - \overline{Y}, \overline{X} - \underline{Y}] \\ &= [-4 + (-4), 1 + 1] \\ &= [-8, 2] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Agora veremos na Figura 4.4 como se comporta a subtração na reta real.

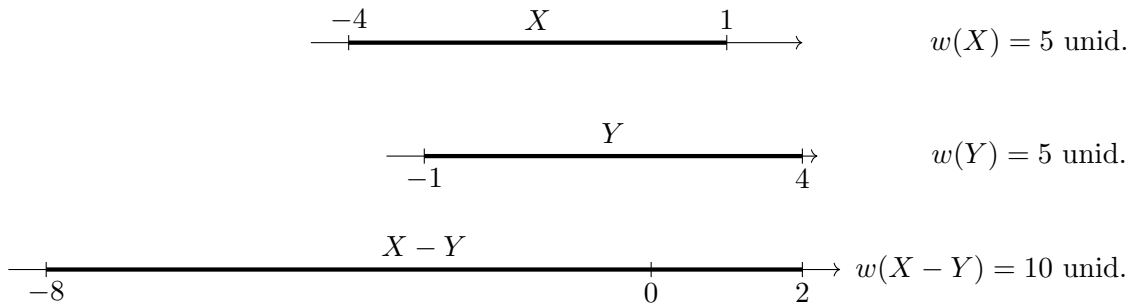


Figura 4.4: Subtração de Intervalos na reta real

A multiplicação de intervalos numa reta se dará da seguinte forma: Sejam  $X$  e  $Y$  intervalos reais, temos

$$X \cdot Y = [\min S, \max S], \text{ onde } S = \{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}\}$$

Assim sendo, veremos um exemplo abaixo:

**Exemplo 4.5.** Seja  $X = [-2, 1]$  e  $Y = [3, 4]$ , multiplicaremos, conforme teoria acima, os intervalos dados.

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= [\min S, \max S], \text{ onde } S = \{-8, -6, 3, 4\} \\ &= [-8, 4] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Agora veremos na Figura 4.5 como se comporta a multiplicação na reta real.

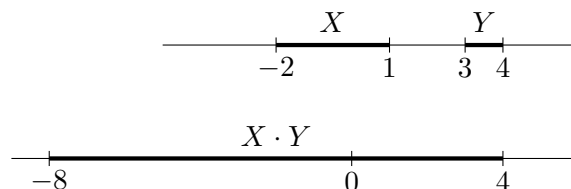


Figura 4.5: Multiplicação de Intervalos na reta real

Na aritmética ordinária, a divisão é a operação inversa da multiplicação para números diferentes de zero, porém a divisão intervalar, como já vimos, não é a operação inversa da multiplicação intervalar. Mas, continuamos a não admitir divisão por zero. Por isso, o intervalo no denominador não pode conter o zero. Por definição, temos que, dados os intervalos reais  $X$  e  $Y$ , com  $0 \notin Y$ ,

$$\frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y} \text{ onde } \frac{1}{Y} = \left[ \frac{1}{\overline{Y}}, \frac{1}{\underline{Y}} \right]$$

**Exemplo 4.6.** Seja  $X = [-2, 1]$  e  $Y = [3, 4]$ , dividiremos, conforme teoria acima, os intervalos dados.

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= X \cdot \frac{1}{Y}, \text{ onde } \frac{1}{Y} = \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right] & (4.4) \\ &= [-2, 1] \cdot \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right] \\ &= [\min S, \max S], \text{ onde } S = \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3} \right\} \\ &= \left[ -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right] \end{aligned}$$

Agora veremos na Figura 4.6 como se comporta a divisão na reta real.

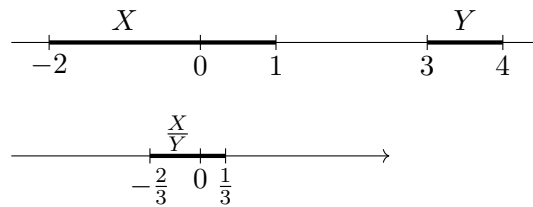


Figura 4.6: Divisão de Intervalos na reta real

Toda essa abordagem vista até aqui, envolve apenas vetores unidimensionais na reta real, determinando assim segmentos de reta.

Após estudo realizado no Capítulo 2, vimos que a maioria das propriedades na aritmética intervalar concorda com as propriedades da aritmética comum. Já sabemos que o resultado obtido em intervalo, simplesmente é lido como segmento de reta. Assim sendo, para a aplicação dessas propriedades na aritmética intervalar, basta mudarmos a representação, ao invés de intervalo, segmento, conforme a Figura 4.7.

**Exemplo 4.7.** Seja  $X = [2, 4]$  e  $Y = [1, 5]$ , se nós comutarmos os intervalos, o resultado

não se alterará.

$$\begin{aligned} X + Y &= [2, 4] + [1, 5] \\ &= [2 + 1, 4 + 5] \\ &= [3, 9], \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Y + X &= [1, 5] + [2, 4] \\ &= [1 + 2, 5 + 4] \\ &= [3, 9]. \end{aligned}$$

Geometricamente, temos

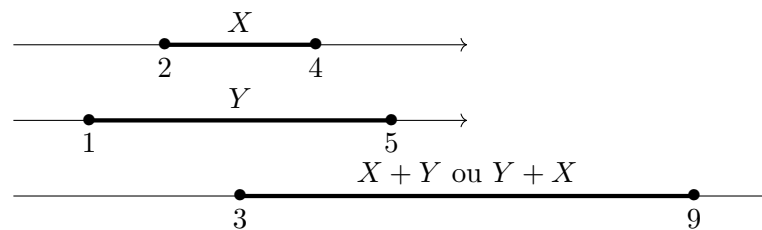


Figura 4.7: Segmento como resultado na comutatividade da soma intervalar

E como proceder com algumas propriedades peculiares, como é o caso da distributividade?

Neste caso, a aritmética intervalar, em geral, não herda a distributividade da aritmética comum, como vimos no Capítulo 2. Mas, existe uma propriedade denominada de subdistributividade que se assemelha a distributividade da aritmética comum.

### 4.2.2 Álgebra

Vamos nos deter na Unidade Temática Álgebra, cujo objeto de conhecimento é “Funções: representação numérica, algébrica e gráfica”. Dada a introdução ao conteúdo de funções, e após analisar suas formas de representação: numérica, algébrica e gráfica, onde vamos, oportunamente, explorar essas relações a partir do estudo de funções intervalares, e voltamos a salientar, comparando com os resultados obtidos através do estudo das funções reais.

No estudo do gráfico de uma função, o professor pode explorar o comportamento desse gráfico num determinado intervalo. Podemos plotar o gráfico de uma função qualquer,



seja do 1º grau ou do 2º grau, e inquirir o seu comportamento num intervalo dado, se é crescente ou decrescente; em qual intervalo o gráfico toca o eixo  $x$  ou o eixo  $y$ , por exemplo.

Considerando ainda as funções quadráticas, podemos determinar a imagem de uma função num intervalo dado, e assim os alunos não vão se limitar em encontrar valores que zeram a função sem fazer as devidas análises críticas, antes, eles terão oportunidade de estudar o gráfico sob outros olhares, inclusive de intervalos.

Faremos uma proposta de encontrar a imagem de uma função quadrática da forma convencional, usando a aritmética ordinária e de outra forma, usaremos a aritmética intervalar, para encontrarmos valores bem próximos.

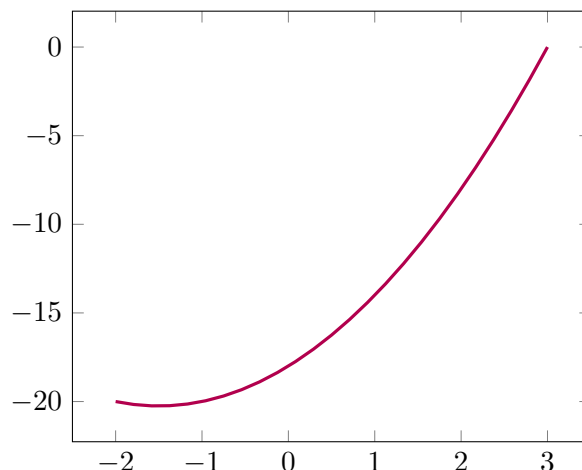
**Exemplo 4.8.** Dada a função  $f(x) = x^2 + 3x - 18$ , vamos calcular a sua imagem no intervalo  $[-2, 3]$ . Para isso nós vamos encontrar o vértice de  $f$ . Como  $a > 0$ , então a concavidade da parábola é voltada para cima, logo o ponto mínimo da função coincidirá com o vértice, vejamos:

$$\begin{aligned}\Delta &= 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) \\ &= 81 \\ X_v &= \frac{-3}{2} = -1.5 \\ Y_v &= \frac{-81}{4} = -20.25\end{aligned}$$

Agora, calculando  $f(3)$ , temos:

$$\begin{aligned}f(3) &= 3^2 + 3 \cdot 3 - 18 \\ &= 0\end{aligned}$$

Função quadrática



O gráfico nos mostra que o intervalo  $f([-2, 3]) = [-20.25, 0]$ .

Vamos calcular a  $F(X)$ , que é a extensão intervalar natural da  $f$ .

$$F(X) = X \cdot X + 3 \cdot X - 18$$

Calculando  $F$  em  $X = [-2, 3]$ , obtemos

$$\begin{aligned} F([-2, 3]) &= [-2, 3] \cdot [-2, 3] + [3, 3] \cdot [-2, 3] - [18, 18] \\ &= [-6, 9] + [-6, 9] - [18, 18] \\ &= [-12, 18] - [18, 18] \\ &= [-30, 0] \end{aligned}$$

Logo, como era se esperar,  $f([-2, 3]) = [-20.25, 0] \subseteq [-30, 0] = F([-2, 3])$ .

Vejamos outros exemplos de extensão intervalar natural.

**Exemplo 4.9.** Observando a função

$$f(x) = x^2,$$

cuja extensão intervalar é

$$F(X) = X \cdot X$$

Calculando a imagem direta de  $[-3, -1]$  por  $f$ , conforme a Figura 4.8, obtemos o intervalo  $[1, 9]$ . Agora, calculando o valor da extensão  $F$  no intervalo  $[-3, -1]$  obtemos o mesmo valor da imagem direta do intervalo  $[-3, -1]$  por  $f$ , que é  $[1, 9]$ . Isso acontece, uma vez que  $[-3, -1] < 0$ .

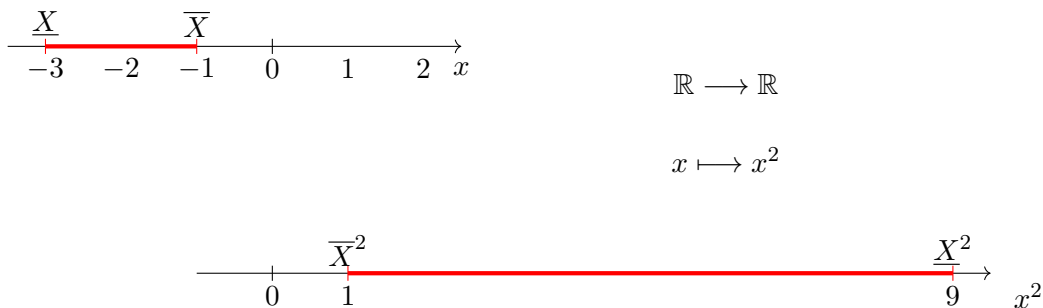
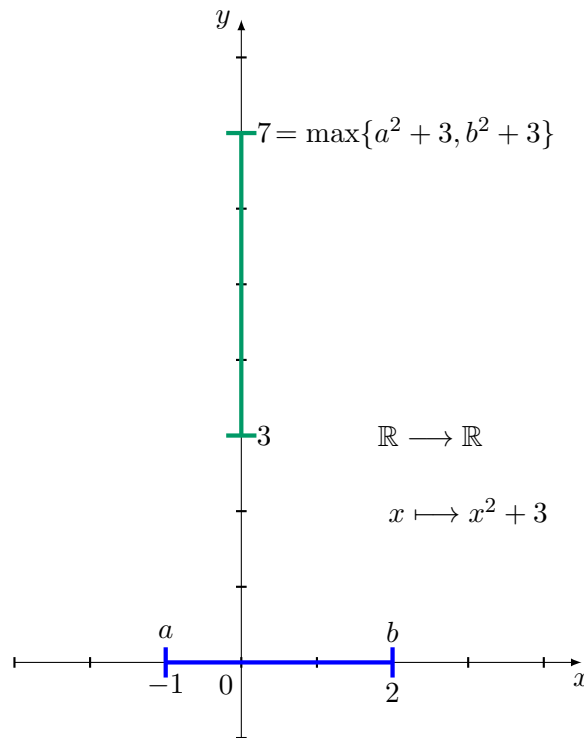


Figura 4.8: Imagem da  $f$  na reta

Observamos que a função  $f$  leva o intervalo  $[-3, -1]$  em  $x$  a outro intervalo  $[1, 9]$  em  $x^2$ .

Vimos também que o intervalo  $X$  desse exemplo é negativo. Agora veremos o Exemplo 4.10, onde o  $0 \in X$ .

**Exemplo 4.10.** Veremos a projeção do eixo das abcissas no eixo das ordenadas pela função  $f(x) = x^2 + 3$ , no intervalo  $[-1, 2]$ .

Figura 4.9: Imagem da  $f$  na ordenada  $y$ 

Os exemplos 4.9 e 4.10, que acabamos de ver, mostra-nos que, não importando a expressão equivalente que temos de uma dada função, e se estamos interessados numa solução aproximada do problema relacionado à função dada, podemos utilizar os resultados básicos da análise intervalar vistos até aqui, para determinarmos boas aproximações dos resultados exatos. É claro que as funções  $f$  nos exemplos são bastante simples, o cálculo diferencial simplificou o procedimento. Mas, se vislumbramos funções mais complicadas, e que possam exigir cálculos extensos, os resultados vistos fornece-nos um procedimento mais simples, sem que envolvamos cálculo diferencial, mas tão somente computação exata e simbólica.

Finalizamos este capítulo na esperança de que essas discussões venham contribuir para aplicação desses e de outros recursos da aritmética intervalar no 9º Ano do Ensino Fundamental - Anos finais.

## CAPÍTULO 5

---

### Considerações finais

---

Hodiernamente convivemos com o descrédito da educação como um todo, desde a família até as entidades governamentais. A matemática, por ser parte importante do componente curricular, não fica alheia a este cenário e com mais um agravante: muitos alunos não se afinam com boa parte das metodologias usadas neste campo de conhecimento.

Após termos abordado diversos objetos de conhecimento voltados para esse componente curricular que muito contribuiu, e ainda contribui, para o avanço de todos os ramos da ciência desde a antiguidade até os dias atuais, é que esperamos ter despertado um interesse maior no estudo de segmentos reais, seja na reta ou no esboço de gráficos. Para tanto foi mostrado sua eficácia através de argumentos, proposições, exemplos, dentre outras estratégias para melhor elucidar a temática em epígrafe.

Mediante o exposto, podemos considerar finalmente que o estudo da aritmética intervalar tem se constituído uma importante abordagem prática para se fazer medições diversas, inclusive explorar segmentos quaisquer e com isso favorecer a melhoria da qualidade do ensino-aprendizagem, e dessa forma lapidar a relação aluno *versus* conhecimento matemático.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALEFELD, Göd; MAYER, Günter *Interval analysis: theory and applications*. J. Comp. App. Math., 121 (2000) 421-464.
- [2] BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Educação é a Base. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME, 2017.
- [3] JAULIN, Luc; KIEFFER, Michel; DIDRIT, Olivier; WALTER, Éric. *Applied Interval Analysis*. Springer, London, 2001.
- [4] MALGORZATA, M.; ZGLICZYNSKI, P. *Central configurations in planar  $n$ -body problem with equal masses for  $n = 5, 6, 7$* . Celestial Mech. Dynam. Astronom., 131 (2019) 46.
- [5] MOORE, Ramon; KEARFOTT, R. Baker; CLOUD, Michael J. *Introduction to Interval Analysis*. Philadelphia: Ed. Siam, 2009.
- [6] MOORE, Ramon E. *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM, Studies Applied Mathematics 2, Philadelphia, 1979.
- [7] MOORE, Ramon E. *Interval Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [8] OLIVEIRA, Emanuelle. *Teorias do Currículo*. Disponível em <https://www.infoescola.com/educacao/teorias-do-curriculo/>. Acesso em 20 de julho de 2020.
- [9] SUNAGA, Teruo *Theory of an Interval Algebra and Its Application to Numerical Analysis*. Japan J. Indust. Appl. Math., 26 (2009) 125-143.