UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A APLICAÇÃO DO TEOREMA DE STURM NO ENSINO MÉDIO

Carla Araújo Oliveira de Almeida

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A APLICAÇÃO DO TEOREMA DE STURM NO ENSINO MÉDIO

Carla Araújo Oliveira de Almeida

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana

2020

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Almeida, Carla Araújo Oliveira de
A445s Sequência didática para aplicação do Teorema de Sturm no Ensino Médio/ Carla Araújo Oliveira de Almeida. - 2020.
56f.

Orientador: Jean Fernandes Barros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2020.

1. Teorema de Sturm. 2. Ensino médio. 3. Raízes (matemática). I. Barros, Jean Fernandes, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 511

Rejane Maria Rosa Ribeiro – Bibliotecária CRB-5/695

Universidade Estadual de Feira de Santana
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Carla Araújo Oliveira de Almeida do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte oito dias do mês de setembro de dois mil e vinte às 14:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: meet.google.com/jmb-woxo-mxr, da dissertação apresentada sob o título **"SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA A APLICAÇÃO DO TEOREMA DE STURM NO ENSINO MÉDIO",** da discente **Carla Araújo Oliveira de Almeida**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Junilson Cerqueira da Silva (IFBA - Euclides da Cunha) e Jacqueline Costa Cintra (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: A P R O V A D O.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.
Feira de Santana, 28 de setembro de 2020.

Jean Fer. Bar.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)
Orientador

Junilson Cerqueira da Silva

Prof. Dr. Junilson Cerqueira da Silva (IFBA - Euclides da Cunha)

Jacqueline Costa Cintra

Prof.ª Dra. Jacqueline Costa Cintra (UEFS)

Visto do Coordenador:

A Deus, família e amigos que me deram forças nessa jornada!

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por me dá força e sabedoria para enfrentar essa jornada. A meus pais por me colocarem no caminho dos estudos, mesmo sem conhecê-lo, em especial a minha mãe por cuidar de mim e em suas orações pedir para que tudo desse certo. Um agradecimento acalorado a aquele que me mostrou que estudar era o caminho para o sucesso, meu irmão Araujo. Ao meu noivo, Gilsoney, que mesmo com todo distanciamento causado pelos dias que tive que me dedicar aos estudos, esteve sempre a meu lado. A meu orientador muita gratidão pelo conhecimento compartilhado. E à minha turma, uma frase resume tudo: ainda bem que a gente tem a gente.

Quando clamei, tu me respondeste; deste-me
força e coragem.
Salmos 138:3

Resumo

O presente trabalho trata da aplicação do *Teorema de Sturm* para construção de uma sequência didática a ser aplicada no terceiro ano do Ensino Médio, visto que os estudantes sempre questionam o fato dos métodos diretos não serem aplicados às equações de grau maior ou igual a cinco. Para tal, fizemos um estudo sobre separação de raízes de polinômios reais utilizando resultados importantes, como o Teorema de Rolle, o Teorema de *de Gua*, o Teorema de Vincent e a regra de sinais de Descartes. E, como objetivo principal, será feito um estudo aprofundado sobre o Teorema de Sturm. Esta abordagem é feita para mostrar que as equações de grau elevado, embora não tenham fórmulas de resolução, possuem um meio indireto de contar e separar as raízes reais de uma equação algébrica.

Palavras-chave: Separação de raízes, Teorema de Sturm, Ensino Médio.

Abstract

The present work deals with the application of Sturm‘s theorem to construction of a didactic sequence to be applied in the third year of High School ,since students always questions the fact the direct methods are not applied to equations with a degree greater than or equal to five. For this purpose, we made a study on separation of real polynomial roots using results from important theorems, such as those of Rolle, Gua, Vincent and Descartes‘s rule of signs. Moreover, as a main object, a deeper study of Sturm´s theorem. This approach is to show that high-grade equations, although they have no solving formulas, they have a different way of counting and separating the real roots of an algebraic equation.

Key words: Root separation, Sturm‘s theorem, High School.

Sumário

Introdução

Este trabalho pretende ser mais um instrumento de motivação para os professores do Ensino Médio, pois tem como finalidade propor uma sequência didática para aplicação do Teorema de Sturm, com o objetivo de encontrar a quantidade de raízes reais de equações algébricas (que no nosso contexto significa equações polinomiais), uma vez que os estudantes questionam o fato das equações com grau maior ou igual a cinco não possuírem métodos diretos de resolução, isto é, atráves de fórmulas.

Baseados no livro de Uspensky [3], datado de 1948, buscamos fundamentar este trabalho com métodos indiretos para encontrar raízes reais de equações polinomiais sem raízes múltiplas. Assim, foi feito no primeiro capítulo desse trabalho um estudo detalhado sobre separação de raízes, que nada mais é do que encontrar intervalos que contenham exatamente uma única raiz. E, então, traremos resultados importantes, como o Teorema de Rolle, Teorema de *de Gua*, regra de sinais de Descartes, assim como o Teorema de Vincent que é uma das formas de separação.

No segundo capítulo é enunciado, demonstrado e aplicado o Teorema de Sturm, pois ele consiste em mais um método de separação de raízes e é o objetivo principal do trabalho.

Finalmente, no terceiro capítulo, construímos a sequência didática a ser aplicada no Ensino Médio, onde primeiro introduzimos a definição básica de derivação, construímos uma série de Sturm aplicarmos o Teorema. O site

htpp://www.calculadoraonline.com.br/

é citado como sugestão para auxiliar os cálculos envolvidos. Nessa construção é levado em consideração que os alunos já possuam o conhecimento de números complexos e polinômios.

Capítulo 1

Separação de Raízes

A finalidade deste capítulo é exibir métodos indiretos para calcular aproximações de raízes de equações algébricas. Estes métodos consistem em *isolar* ou *separar as raízes* de uma equação algébrica, isto significa obter intervalos dois a dois disjuntos que contenham exatamente cada uma das raízes da equação. No final do capítulo, descrevemos o método obtido do Teorema de Vincent e da regra de sinais de Descartes.

1.1 O Sinal de um Polinômio

Seja o polinômio $f(x) = c_0\, x^n + c_1\, x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\, x + c_n$ com coeficientes reais, o que denominamos de *polinômio real*, em que x assume valores reais.

Proposição 1.1.1 *Dado $\varepsilon > 0$, para x suficientemente pequeno, o valor numérico do polinômio $c_0\, x^n + c_1\, x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\, x$ é menor do que ε.*

Demonstração. Considerando $|x| = r$, temos que

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leq |c_0|\, r^n + |c_1|\, r^{n-1} + \ldots + |c_{n-1}|\, r \\
|f(x)| &\leq c\,(r + r^2 + \ldots + r^n),
\end{aligned}
$$

onde c é o maior dos números $|c_0|$, $|c_1|$, $\ldots$, $|c_{n-1}|$.

Tomando $0 < r < 1$, e levando em consideração a soma de uma progressão geométrica, chegamos a

$$r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1-r} < \frac{r}{1-r}.$$

E assim, $|f(x)| < \dfrac{c\,r}{1-r}$.

Dado $\varepsilon > 0$, vemos que a desigualdade $\dfrac{c\,r}{1-r} < \varepsilon$ é satisfeita para $r < \dfrac{\varepsilon}{c+\varepsilon} < 1$. Sendo assim, $|f(x)| < \varepsilon$, se $|x| < \dfrac{\varepsilon}{c+\varepsilon}$. □

Proposição 1.1.2 *Se $c_n \neq 0$, o polinômio $f(x) = c_0\,x^n + c_1\,x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\,x + c_n$, para x suficientemente pequeno, terá o sinal de c_n.*

Demonstração. Como $c_n \neq 0$, podemos escrever

$$f(x) = c_n\,(k_0\,x^n + k_1\,x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}\,x + 1),$$

onde $k_i = \dfrac{c_i}{c_n}$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Agora, para x suficientemente pequeno, a expressão

$$k_0\,x^n + k_1\,x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}\,x$$

tem valor absoluto menor do que um determinado número, digamos $\dfrac{1}{2}$. Sendo assim,

$$\frac{1}{2} < k_0\,x^n + k_1\,x^{n-1} + \ldots + k_{n-1}\,x + 1 < \frac{3}{2}.$$

Segue-se que, para x suficientemente pequeno, $f(x)$ terá o mesmo sinal de c_n. □

Exemplo 1.1.1 *Para x suficientemente pequeno, o polinômio $-124\,x^6 + 24\,x^5 - 6$ tem sinal negativo e o polinômio $2\,x^3 + 14\,x^2 - 25\,x + 8$ tem sinal positivo.*

Proposição 1.1.3 *Se $c_0 \neq 0$, o polinômio $f(x) = c_0\,x^n + c_1\,x^{n+1} + \ldots + c_p\,x^{n+p}$, para x suficientemente pequeno, terá o mesmo sinal de $c_0\,x^n$.*

Demonstração. Escrevemos

$$f(x) = c_0\,x^n\,(1 + k_1\,x + k_2\,x^2 + \ldots + k_p\,x^p),$$

onde $k_i = \dfrac{c_i}{c_0}$, para $i = 1, 2, \ldots, p$. Pela proposição 1.1.2, o polinômio $1 + k_1\, x + k_2\, x^2 + \ldots + k_p\, x^p$ é positivo. Logo, $f(x)$ terá o mesmo sinal de $c_0\, x^n$. $\square$

Exemplo 1.1.2 *Para x suficientemente pequeno, o polinômio $-12\, x^3 + 24\, x^2 - 6\, x$ tem sinal negativo e o polinômio $12\, x^4 - 51\, x^5 + 82\, x^6 - 44\, x^7$ tem sinal positivo.*

Proposição 1.1.4 *Se $c_0 \neq 0$, o polinômio $f(x) = c_0\, x^n + c_1\, x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}\, x + c_n$, para x suficientemente grande, terá o sinal de $c_0 x^n$, que é o termo de maior grau.*

Demonstração. Escrevemos

$$f(x) = c_0\, x^n\, (1 + k_1\, x^{-1} + k_2\, x^{-2} + \ldots + k_n\, x^{-n}),$$

onde $k_i = \dfrac{c_i}{c_0}$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Como, para x suficientemente grande,

$$1 + k_1\, x^{-1} + \ldots + k_n\, x^{-n}$$

é positivo, temos que $f(x)$ terá o mesmo sinal de $c_0 x^n$. $\square$

Exemplo 1.1.3 *Para x suficientemente grande, o polinômio $-2\, x^4 - 4\, x^3 - 6\, x$ tem o sinal negativo e o polinômio $8\, x^6 - 4\, x^7 - 3\, x^4$ tem sinal positivo.*

Oportunamente, façamos duas observações importantes, que faremos uso mais adiante, e que decorrem facilmente das proposições que acabamos de demonstrar.

Observação 1.1.1 *Seja $f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + a_2\, x^{n-2} + \ldots + a_n$ um polinômio real de grau n. Sendo assim, como antes, podemos escrever*

$$f(x) = a_0\, x^n \left[1 + \frac{a_1}{a_0\, x} + \frac{a_2}{a_0\, x^2} + \ldots + \frac{a_n}{a_0\, x^n} \right].$$

Desta forma, denotamos o valor de f para x infinitamente grande por $f(+\infty)$, cujo sinal é o mesmo de a_0. Analogamente, denotemos por $f(-\infty)$ o valor de f para x infinitamente pequeno, cujo sinal é o mesmo de a_0, se n é par, e contrário ao de a_0, se n é ímpar.

Observação 1.1.2 *Para x infinitamente grande ou infinitamente pequeno, temos que $\frac{1}{x}$ é zero. Mais geralmente, dado um número real a, para x infinitamente grande ou infinitamente pequeno, temos que $\frac{1}{a+x}$ é zero.*

1.2 O Teorema do Anulamento e o Teorema do Valor Intermediário para Polinômios

Para o que se segue, expressamos indistintamente *zeros* de um polinômio f e *raízes* da equação algébrica correspondente ao polinômio f, ou seja, $f(x) = 0$.

Teorema 1.2.1 (Anulamento) *Seja f um polinômio real. Se para $x = a$ e $x = b$ os valores de f(a) e de f(b) têm sinais opostos, então existe pelo menos uma raiz da equação algébrica $f(x) = 0$ no intervalo (a, b).*

Demonstração. Sem restrição de generalidade, podemos supor que a e b são números inteiros pois, caso contrário, basta considerarmos a mudança de variável $x = a + (b - a)\,t$. De fato, considerando o polinômio real $\phi(t) = f(x(t))$ tal que $\phi(0) = f(a)$ e $\phi(1) = f(b)$, com $\phi(0) \cdot \phi(1) = f(a) \cdot f(b) < 0$. Desta forma, se ϕ tem uma raiz entre 0 e 1, segue-se que a equação original, $f(x) = 0$, tem solução no intervalo (a, b). Dessa forma, podemos supor que a e b são números inteiros.

Considerando os valores $f(a), f(a+1), \ldots, f(b)$, com, por exemplo, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$, existe um maior valor não-positivo, digamos $f(c_0)$, isto é, $f(c_0) \leq 0$ e $f(c_0 + 1) > 0$. No caso em que $f(c_0) = 0$, temos que a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz c_0 entre a e b, como queríamos. Caso contrário, dividindo o intervalo de extremos c_0 e $c_0 + 1$ em 10 partes iguais, e considerando os valores

$$f(c_0),\ f\Big(c_0 + \frac{1}{10}\Big),\ f\Big(c_0 + \frac{2}{10}\Big), \ldots,\ f(c_0 + 1)$$

com $f(c_0) \cdot f(c_0 + 1) < 0$, temos que existe um último, digamos $f\Big(c_0 + \frac{c_1}{10}\Big)$, com $0 \leq c_1 \leq 9$, tal que $f\Big(c_0 + \frac{c_1}{10}\Big) \leq 0$ e $f\Big(c_0 + \frac{c_1 + 1}{10}\Big) > 0$. Se $f\Big(c_0 + \frac{c_1}{10}\Big) = 0$, temos que a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz $c_0 + \frac{c_1}{10}$ entre a e b, como queríamos. Caso contrário, dividindo o intervalo de extremos $c_0 + \frac{c_1}{10}$ e $c_0 + \frac{c_1 + 1}{10}$ em 10 partes iguais, e considerando os valores

$$f\Big(c_0+\frac{c_1}{10}\Big),\ f\Big(c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{1}{10^2}\Big),\ldots,\ f\Big(c_0+\frac{c_1+1}{10}\Big)$$

com $f\Big(c_0+\dfrac{c_1}{10}\Big)\cdot f\Big(c_0+\dfrac{c_1+1}{10}\Big)<0$, temos que existe um último, digamos $f\Big(c_0+\dfrac{c_1}{10}+\dfrac{c_2}{10^2}\Big)$, com $0\le c_2\le 9$, tal que $f\Big(c_0+\dfrac{c_1}{10}+\dfrac{c_2}{10^2}\Big)\le 0$ e $f\Big(c_0+\dfrac{c_1}{10}+\dfrac{c_2+1}{10^2}\Big)>0$. Se $f\Big(c_0+\dfrac{c_1}{10}+\dfrac{c_2}{10^2}\Big)=0$, temos que a equação $f(x)=0$ tem uma raiz $c_0+\dfrac{c_1}{10}+\dfrac{c_2}{10^2}$ entre a e b, como queríamos. Novamente, supondo o contrário, dividindo o intervalo de extremos

$$c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}\ \text{e}\ c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2+1}{10^2}$$

em 10 partes iguais, procedemos como antes. E, assim, fazendo um processo iterativo chegamos ou a uma raiz racional da equação $f(x)=0$, digamos

$$c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\ldots+\frac{c_m}{10^m}$$

representada por uma fração decimal finita, entre a e b, ou, continuando indefinidamente, chegamos a um número decimal infinito $\xi=c_0+\dfrac{c_1}{10}+\dfrac{c_2}{10^2}+\ldots$. Observemos que, pela maneira como esse decimal é obtido e considerando

$$\xi_m=c_0+\frac{c_1}{10}+\frac{c_2}{10^2}+\ldots+\frac{c_m}{10^m}\quad \text{e}\quad \eta_m=c_0+\frac{c_1}{10}+\ldots+\frac{c_m+1}{10^m},$$

temos que $f(\xi_m)<0$ e $f(\eta_m)>0$, para $m=1,2,3,\ldots$. Pela fórmula de Taylor, ver [5], página 350, temos que

$$f(\xi_m)=f(\xi)+f'(\xi)\,(\xi_m-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}\,(\xi_m-\xi)^2+\ldots<0$$

e

$$f(\eta_m)=f(\xi)+f'(\xi)\,(\eta_m-\xi)+\frac{f''(\xi)}{2!}\,(\eta_m-\xi)^2+\ldots>0.$$

E então,

$$f(\xi)<f'(\xi)\,(\xi-\xi_m)-\frac{f''(\xi)}{2!}\,(\xi-\xi_m)^2+\ldots$$

e

$$f(\xi)>f'(\xi)\,(\xi-\eta_m)-\frac{f''(\xi)}{2!}\,(\xi-\eta_m)^2+\ldots.$$

Já sabemos que o polinômio $h\,f'(\xi)-h^2\dfrac{f''(\xi)}{1\cdot 2}+\ldots$ é numericamente menor do que qualquer número positivo ε, desde que o valor absoluto de h seja menor do que algum número δ, que pode ser obtido a partir do dado ε. Considerando que as diferenças $\xi - \xi_m$ e $\xi - \eta_m$ são numericamente menores do que $\frac{1}{10^m}$, onde tomamos m suficientemente grande tal que $\frac{1}{10^m} < \delta$. E então, os membros do lado direito das desigualdades acima são numericamente menores do que ε, isto é, $f(\xi) < \varepsilon$ e $f(\xi) > -\varepsilon$, não importando quão pequeno é ε. E assim, provamos que o número $\xi = c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots$, que pertence ao intervalo (a, b), é uma raiz da equação $f(x) = 0$. $\square$

Usando o teorema acima, chegamos ao próximo, que é o Teorema do Valor Intermediário para polinômios.

Teorema 1.2.2 (Valor Intermediário) *Seja f um polinômio real definido no intervalo $[a, b]$ então, para cada d no intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Seja d no intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$. Se $f(a) = d$ ou $f(b) = d$, temos o desejado. Caso contrário considerando $f(a) < d < f(b)$ e definindo o polinômio $\varphi(x) = f(x) - d$, temos que $\varphi(a) < 0$ e $\varphi(b) > 0$. Pelo Teorema do Anulamento, existe pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que $\varphi(c) = 0$. Logo, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$. $\square$

1.2.1 Outras Consequências do Teorema do Anulamento

Vejamos outras consequências importantes do teorema 1.2.1.

Proposição 1.2.1 *Uma equação algébrica real $f(x) = a_0\, x^{2n+1} + a_1\, x^{2n} + \ldots + a_{2n+1} = 0$ de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.*

Demonstração. No caso em que $a_{2n+1} = 0$, temos que $x = 0$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$. Vejamos o caso em que $a_{2n+1} \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a_0 > 0$. Sendo assim, para c suficientemente grande, $f(c) > 0$ e $f(-c) < 0$. Desta forma, para $a_{2n+1} < 0$, temos $f(0) = a_{2n+1} < 0$ e $f(c) > 0$. E então, existe uma raiz positiva da equação $f(x) = 0$. Para $a_{2n+1} > 0$, temos que $f(-c) < 0$ e $f(0) = a_{2n+1} > 0$. Neste caso, a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz negativa. $\square$

Proposição 1.2.2 *A equação* $f(x) := a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + ... + a_{2n} = 0$ *de grau par, em que o coeficiente* a_0 *e o termo constante* a_{2n} *têm sinais opostos, tem pelo menos duas raízes reais, uma positiva e outra negativa.*

Demonstração. Suponhamos que $a_0 > 0$. Agora, para c suficientemente grande, temos que $f(c)$ e $f(-c)$ são positivos. E assim, já que $f(-c) > 0$, $f(0) < 0$ e $f(c) > 0$, cada um dos intervalos $(-c, 0)$ e $(0, c)$ tem pelo menos uma raiz da equação $f(x) = 0$, como queríamos. □

Proposição 1.2.3 *Seja uma equação algébrica real, digamos* $f(x) = 0$*, sem raízes reais no intervalo* $[a, b]$*. Então, o polinômio real* f *mantém um sinal constante no intervalo* $[a, b]$*, isto é, ou* $f(x) > 0$ *ou* $f(x) < 0$*, para todo* $x \in [a, b]$*.*

Demonstração. Sejam x' e x'' em $[a, b]$. Se $f(x')$ e $f(x'')$ têm sinais contrários, temos que a equação $f(x) = 0$ tem uma raiz no intervalo $[a, b]$, que é uma contradição.
□

Proposição 1.2.4 *O número de raízes de* $f(x) = 0$ *entre* a *e* b*, contadas com as suas multiplicidades, é ímpar ou par, conforme* $f(a)$ *e* $f(b)$ *têm sinais opostos ou têm o mesmo sinal, respectivamente.*

Demonstração. Sejam $c_1, c_2, \ldots, c_s$ as raízes distintas de $f(x) = 0$ em $[a, b]$ e $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ suas respectivas multiplicidades. Sendo assim,

$$f(x) = (x - c_1)^{\gamma_1} (x - c_2)^{\gamma_2} \ldots (x - c_s)^{\gamma_s} \phi(x),$$

onde ϕ não tem zeros em $[a, b]$. Substituindo $x = b$ e $x = a$ e tomando o quociente, obtemos

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \Big(\frac{b - c_1}{a - c_1}\Big)^{\gamma_1} \Big(\frac{b - c_2}{a - c_2}\Big)^{\gamma_2} \cdots \Big(\frac{b - c_s}{a - c_s}\Big)^{\gamma_s} \frac{\phi(b)}{\phi(a)}.$$

Agora, pela Proposição 1.2.3, o quociente $\dfrac{\phi(b)}{\phi(a)}$ é positivo, enquanto

$$\frac{b - c_1}{a - c_1}, \frac{b - c_2}{a - c_2}, \ldots, \frac{b - c_s}{a - c_s}$$

são números negativos. Desta forma, o sinal de $\dfrac{f(b)}{f(a)}$ coincide com o sinal de $(-1)^{\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_s}$. Portanto, se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal, o número de raízes da equação $f(x) = 0$, que é $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_s$, é par caso contrário, o número é ímpar. $\square$

1.3 Uma Identidade e um Lema Importantes

Inicialmente, obtemos uma identidade importante.

Proposição 1.3.1 *Sejam x_1, $x_2, \ldots,$ x_s as raízes distintas da equação $f(x) = 0$, de multiplicidades γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$, respectivamente. Então,*

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x - x_1} + \frac{\gamma_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{\gamma_s}{x - x_s}.$$

Demonstração. Sejam x_1, x_2, x_3, ..., x_n as raízes da equação algébrica

$$f(x) = a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Consideremos a sua fatoração completa

$$f(x) = a_0\, (x - x_1)\, (x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

substituindo x por $x + h$, chegamos a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= a_0\, (x + h - x_1)\, (x + h - x_2) \ldots (x + h - x_n) \\ &= a_0\, (x - x_1)\, (x - x_2) \ldots (x - x_n) \Big(1 + \frac{h}{x - x_1}\Big)\Big(1 + \frac{h}{x - x_2}\Big) \ldots \Big(1 + \frac{h}{x - x_n}\Big) \\ &= f(x) \Big(1 + \frac{h}{x - x_1}\Big) \Big(1 + \frac{h}{x - x_2}\Big) \ldots \Big(1 + \frac{h}{x - x_n}\Big). \end{aligned}$$

Observando a expansão do produto $\Big(1 + \dfrac{h}{x - x_1}\Big) \Big(1 + \dfrac{h}{x - x_2}\Big) \ldots \Big(1 + \dfrac{h}{x - x_n}\Big)$ em potências crescentes de h, notamos que a soma dos dois primeiros termos é

$$1 + h \Big(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \ldots + \frac{1}{x - x_n}\Big).$$

Consequentemente,

$$f(x+h) = f(x) + h\left[\frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x-x_n}\right] + \ldots$$

Por outro lado, pela fórmula de Taylor, sabemos que

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \ldots$$

E comparando os coeficientes em h em ambas expressões, obtemos a identidade

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-x_1} + \frac{f(x)}{x-x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x-x_n},$$

que pode ser expressa como

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}.$$

Para obter essa identidade as raízes x_1, x_2, $x_3, \ldots$, x_n não precisam ser todas diferentes, podemos considerar x_1, $x_2, \ldots$, x_s as raízes distintas da equação $f(x) = 0$, de multiplicidades γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_s$ respectivamente, e obtemos a identidade

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x-x_1} + \frac{\gamma_2}{x-x_2} + \ldots + \frac{\gamma_s}{x-x_s}.$$

□

Disto, segue-se o seguinte lema:

Lema 1.3.1 *Se x aumenta e passa por uma raiz real da equação $f(x) = 0$, então o quociente $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, ao se tornar infinito, muda de sinal de $-$ para $+$, ou passa de $-\infty$ para $+\infty$.*

Demonstração. Sendo c_1 uma raiz de $f(x)$ com multiplicidade γ_1 consideremos $f(x) = (x-c_1)^{\gamma_1}\, g(x)$, onde o polinômio $g(x)$ tem raízes $c_2, c_3, \ldots, c_s$ de multiplicidades $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_s$, respectivamente. Aplicando a identidade acima ao polinômio g, temos que

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\gamma_2}{x-c_2} + \ldots + \frac{\gamma_s}{x-c_s}.$$

E assim,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x - c_1} + \frac{\gamma_2}{x - c_2} + \ldots + \frac{\gamma_s}{x - c_s}$$

logo

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\gamma_1}{x - c_1} + \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Suponhamos agora que f é um polinômio real e que c_1 é uma de suas raízes reais. Sendo assim, g é um polinômio real e $g(c_1) \neq 0$,sendo assim consideramos $x = c_1 - \varepsilon$ e $x = c_1 + \varepsilon$, temos que

$$\frac{f'(c_1 - \varepsilon)}{f(c_1 - \varepsilon)} = -\frac{\gamma_1}{\varepsilon} + \frac{g'(c_1 - \varepsilon)}{g(c_1 - \varepsilon)}$$

e

$$\frac{f'(c_1 + \varepsilon)}{f(c_1 + \varepsilon)} = \frac{\gamma_1}{\varepsilon} + \frac{g'(c_1 + \varepsilon)}{g(c_1 + \varepsilon)}.$$

Fazendo ε tendendo a zero pela direita, os termos $-\frac{\gamma_1}{\varepsilon}$ e $\frac{\gamma_1}{\varepsilon}$ tornam-se infinitamente pequeno e infinitamente grande, respectivamente, e superam os termos $\frac{g'(c_1 - \varepsilon)}{g(c_1 - \varepsilon)}$ e $\frac{g'(c_1 + \varepsilon)}{g(c_1 + \varepsilon)}$, os quais se aproximam da quantidade finita $\frac{g'(c_1)}{g(c_1)}$.

Segue-se que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o quociente $\frac{f'(c_1 - \varepsilon)}{f(c_1 - \varepsilon)}$ é negativo e o quociente $\frac{f'(c_1 + \varepsilon)}{f(c_1 + \varepsilon)}$ é positivo, e ambas expressões são grandes em valor absoluto. $\square$

1.4 O Teorema de Rolle

Para um primeiro método de separação de raízes enunciaremos e demonstraremos o Teorema de Rolle.

Teorema 1.4.1 (Rolle) *Entre duas raízes reais consecutivas a e b da equação algébrica $f(x) = 0$, existe uma quantidade ímpar de raízes da equação $f'(x) = 0$.*

Demonstração. Sejam a e b duas raízes reais consecutivas de $f(x) = 0$. Sendo assim, f não muda de sinal em $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$, para $\varepsilon > 0$ conveniente. Logo,

$f(a+\varepsilon)\cdot f(b-\varepsilon)>0$ desta forma, para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno temos, pelo Lema 1.3.1 , que

$$\frac{f'(a+\varepsilon)}{f(a+\varepsilon)}>0 \text{ e } \frac{f'(b-\varepsilon)}{f(b-\varepsilon)}<0.$$

Consequentemente, $f'(a+\varepsilon)\cdot f'(b-\varepsilon)<0$.

Segue-se que entre a e b temos pelo menos uma raiz de $f'(x)=0$ além disso, pela Proposição 1.2.4 o número dessas raízes, contadas com multiplicidades, é ímpar. □

Corolário 1.4.1 *Entre duas raízes consecutivas c e d da equação $f'(x)=0$, existe no máximo uma raiz de $f(x)=0$.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observamos que as raízes de $f(x)=0$ em (c,d) são simples, já que f' não muda de sinal em (c,d). Além disso, se existissem duas raízes α e β da equação $f(x)=0$ entre c e d, digamos $c<\alpha<\beta<d$, pelo Teorema de Rolle, a equação $f'(x)=0$ tem pelo menos uma raiz entre α e β. Portanto, c e d não são raízes consecutivas de $f'(x)=0$, o que contradiz a hipótese. Analogamente, supondo que a é a menor raiz e que b é a maior raiz da equação $f'(x)=0$, concluímos que cada um dos intervalos $(-\infty,a)$ e $(b,+\infty)$ tem no máximo uma raiz de $f(x)=0$.

Já sabemos, pela proposição 1.2.4, que $f(x)=0$ tem um número par de raízes, contadas com multiplicidades, se $f(c)\cdot f(d)>0$, e um número ímpar, contadas com multiplicidades, se $f(c)\cdot f(d)<0$. Como entre c e d $f(x)=0$ tem no máximo uma raiz, temos que $f(x)=0$ não tem raiz em (c,d), se $f(c)\cdot f(d)>0$, e uma raiz em (c,d), se $f(c)\cdot f(d)<0$. Analogamente, concluímos que nos intervalos $(-\infty,a)$ e $(b,+\infty)$ não tem nenhuma ou apenas uma raiz de $f(x)=0$, se os valores de f nos extremos dos intervalos têm o mesmo sinal ou sinais contrários, respectivamente. □

1.4.1 Um Primeiro Método de Separação de Raízes

Baseados nos resultados anteriores, obtemos um método para separar as raízes de uma equação algébrica $f(x)=0$, no caso em que as raízes são simples, desde que se conheça as raízes da equação $f'(x)=0$.

Sejam $c_1<c_2<\ldots<c_s$ as raízes distintas de $f'(x)=0$. Lembrando da observação 1.1.1, consideremos os sinais da sequência $f(-\infty)$, $f(c_1)$, $f(c_2),\ldots,f(c_s)$,

$f(+\infty)$. Para cada mudança sucessiva de sinal na sequência dizemos que se tem *uma variação de sinal.* Caso contrário, dizemos que se tem *uma permanência.* Por exemplo, a sequência de sinais $++--+-+-$ apresenta cinco variações de sinais e duas permanências. Adotando esta terminologia, vemos que o número de raízes reais da equação $f(x) = 0$ é igual ao número de variações de sinais na sequência $f(-\infty)$, $f(c_1)$, $f(c_2), \ldots, f(c_s)$, $f(+\infty)$. De fato, como vimos no Corolário 1.4.1, a cada variação de sinal na sequência corresponde uma raiz da equação $f(x) = 0$, e que cada permanência de sinal mostra-nos que f não se anula no intervalo correspondente. Além disso, vê-se que as raízes ficam separadas.

1.4.2 Outras Aplicações do Teorema de Rolle

Consideremos a equação algébrica $f(x) = 0$ com suas raízes reais e distintas $b_1 < b_2 < \ldots < b_s$, com suas respectivas multiplicidades β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_s$, de modo que contamos $r = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s$ raízes reais.

Pelo Teorema de Rolle, cada um dos intervalos (b_1, b_2), $(b_2, b_3), \ldots, (b_{s-1}, b_s)$ contém pelo menos uma raiz da equação $f'(x) = 0$. Como o número de intervalos é $s - 1$, temos pelo menos $s - 1$ raízes distintas de $f'(x) = 0$. E mais, para cada $i = 1, 2, \ldots, s$, exceto quando a raiz for simples, a raiz b_i é uma raiz de multiplicidade $\beta_i - 1$ da equação $f'(x) = 0$. Sendo assim, existem

$$\beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 + \ldots + \beta_s - 1 = r - s$$

raízes diferentes das enumeradas anteriormente. Ao todo, a equação $f'(x) = 0$ tem pelo menos $r - s + s - 1 = r - 1$ raízes reais. Com isso, temos o seguinte resultado

Proposição 1.4.1 *Se a equação $f(x) = 0$ tem r raízes reais e o número de raízes reais de $f'(x) = 0$ é pelo menos $r - 1$, então o número de raízes imaginárias da equação $f'(x) = 0$ não é maior do que o número de raízes imaginárias de $f(x) = 0$.*

Demonstração. *Sejam $2\,k$ o número de raízes imaginárias de $f(x) = 0$ e n o grau de f. Sendo assim, $n = r + 2\,k$. Analogamente, se r' é o número de raízes reais de $f'(x) = 0$ e $2\,k'$ é o de raízes imaginárias, temos que $n - 1 = r' + 2\,k'$. Como*

$r' \geq r - 1$, *temos que*

$$1 = n - (n-1) = r + 2\,k - (r' + 2\,k') = r - r' + 2\,(k - k') \leq 1 + 2\,(k - k')$$

onde, $2\,k' \leq 2\,k$. □

Em particular, se todas as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais, temos que $k = 0$, e consequentemente, $k' = 0$. E assim, as raízes da equação $f'(x) = 0$ são todas reais, além disso, concluímos que $r' = r - 1$. Isso significa, para $s \geq 2$, que cada um dos intervalos (b_1, b_2), $(b_2, b_3), \ldots,$ (b_{s-1}, b_s) contém exatamente uma raiz de $f'(x) = 0$, necessariamente simples. E as outras raízes de $f'(x)$ são as raízes múltiplas de $f(x)$. Temos também que as raízes de $f'(x)$ estão contidas entre a menor e a maior raízes de $f(x)$. Aplicando o mesmo raciocínio a $f'(x)$, depois a $f''(x)$, e assim sucessivamente, obtemos os seguintes resultados:

1. Se todas as raízes da equação $f(x) = 0$ são reais, então o mesmo é verdade para as raízes das equações $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0, \ldots$.

2. Se $f(x) = 0$ tem pelo menos duas raízes reais distintas, então cada uma das equações $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0, \ldots$ terá raízes simples.

3. As raízes múltiplas das equações $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0, \ldots$ são as raízes múltiplas de $f(x) = 0$.

4. As raízes de cada uma das equações $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 0, \ldots$ estão no intervalo cujos extremos são a menor e a maior raízes da equação $f(x) = 0$.

1.5 O Teorema de *de Gua*

Seja f um polinômio real. Consideremos a equação algébrica

$$F(x) = x\,f'(x) + \alpha\,f(x),$$

onde α é uma constante real não-nula. Sejam $0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s$ as raízes reais positivas de $f(x) = 0$ de multiplicidades β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_s$, respectivamente, em que contamos $r = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_s$ raízes positivas. Agora, diante dessa definição, vamos enunciar o Teorema de *de Gua*:

Teorema 1.1 (de Gua) *Se o polinômio $f(x)$ tem r raízes positivas, então a equação $F(x) = 0$ tem pelo menos $r - 1$ raízes postivas.*

Demonstração. Escrevendo $f(x) = (x - b_i)^{\beta_i} f_1(x)$, com $f_1(b_i) \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \beta_i (x - b_i)^{\beta_i - 1} f_1(x) + (x - b_i)^{\beta_i} f_1'(x) \\ &= (x - b_i)^{\beta i - 1} [\beta_i f_1(x) + (x - b_i) f_1'(x)] \\ &= (x - b_i)^{\beta i - 1} f_2(x), \end{aligned}$$

onde $f_2(x) = \beta_i f_1(x) + (x - b_i) f_1'(x)$, com $f_2(b_i) = \beta_i f_1(b_i) \neq 0$. Dessa forma, obtemos

$$F(x) = (x - b_i)^{\beta_i - 1} [x f_2(x) + \alpha (x - b_i) f_1(x)].$$

Como $b_i f_2(b_i) + \alpha (b_i - b_i) f_1(b_i) = b_i f_2(b_i) \neq 0$, temos que b_i é uma raiz de $F(x) = 0$ de multiplicidade $\beta_i - 1$. Assim, a equação $F(x) = 0$ tem por certo $\beta_1 - 1 + \beta_2 - 1 + \ldots + \beta_s - 1 = r - s$ raízes. Além disso, *afirmamos que $F(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz em cada um dos intervalos* (b_1, b_2), $(b_2, b_3), \ldots, (b_{s-1}, b_s)$. Pelo lema 1.3.1, para cada $i = 1, 2, \ldots, s$, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $(b_i + \varepsilon) \dfrac{f'(b_i + \varepsilon)}{f(b_i + \varepsilon)}$ é um número positivo muito grande, enquanto que $(b_{i+1} - \varepsilon) \dfrac{f'(b_{i+1} - \varepsilon)}{f(b_{i+1} - \varepsilon)}$ é um número negativo de valor absoluto muito grande. Segue-se que

$$\frac{F(b_i + \varepsilon)}{f(b_i + \varepsilon)} = (b_i + \varepsilon) \frac{f'(b_i + \varepsilon)}{f(b_i + \varepsilon)} + \alpha > 0$$

e

$$\frac{F(b_{i+1} - \varepsilon)}{f(b_{i+1} - \varepsilon)} = (b_{i+1} - \varepsilon) \frac{f'(b_{i+1} - \varepsilon)}{f(b_{i+1} - \varepsilon)} + \alpha < 0,$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, já que $f(b_i + \varepsilon) \cdot f(b_{i+1} - \varepsilon) > 0$, assim, $F(b_i + \varepsilon) \cdot F(b_{i+1} - \varepsilon) < 0$, então, a equação $F(x) = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo (b_i, b_{i+1}). Sendo assim, vemos que a equação $F(x) = 0$ tem pelo menos $r - s + (s - 1) = r - 1$ raízes. $\square$

Analogamente, demonstramos que o número de raízes negativas da equação $F(x) = 0$ é pelo menos $r' - 1$, onde r' é o número de raízes negativas de $f(x) = 0$.

Observação 1.5.1 *O número total de raízes reais da equação* $f(x) = 0$ *é* $m = r + r'$*, se* $f(0) \neq 0$*, e* $m = r + r' + \nu$*, se* $f(0) = 0$*, onde* ν *é a multiplicidade de* 0*.*

Para o caso em que 0 é raiz de multiplicidade ν de f temos que

$$F(x) = x^{\nu}[(\nu + \alpha)\, f_1(x) + x\, f_1'(x)],$$

onde $f(x) = x^{\nu}\, f_1(x)$, com $f_1(0) \neq 0$. Isto mostra que 0 é uma raiz de multiplicidade pelo menos ν da equação $F(x) = 0$, já que $(\nu + \alpha)\, f_1(0) + 0\, f_1'(0) = (\nu + \alpha)\, f_1(0)$. Como o número de raízes positivas e negativas da equação $F(x) = 0$ é pelo menos $r + r' - 2$, temos que o número de todas as raízes reais dessa equação é pelo menos $m - 2$. Em particular, se todas as raízes de $f(x) = 0$ são reais, a equação

$$F(x) = x\, f'(x) + \alpha\, f(x) = 0$$

não pode ter mais do que duas raízes imaginárias, pois o grau de F não é maior do que o grau de f. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.5.1 *A equação* $f(x) = x^3 - x = 0$ *mostra-nos que mesmo tendo somente raízes reais, que são* -1, 0, 1, *a equação*

$$F(x) = x\, f'(x) + \alpha\, f(x) = 0,$$

que é $(\alpha + 3)\, x^3 - (\alpha + 1)\, x = 0$*, pode ter raízes imaginárias. De fato, tomando* $\alpha = -2$*, temos que* $F(x) = x^3 + x = x(x^2 + 1)$*.*

Proposição 1.5.1 *Todas as raízes de* $x\, f'(x) + \alpha\, f(x) = 0$ *são reais, se* $\alpha > 0$*.*

Demonstração. Considerando o quociente

$$\frac{F(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = \varepsilon\, \frac{f'(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} + \alpha,$$

temos que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, o quociente é positivo, se $f(0) \neq 0$. Para $f(0) = 0$, já mostramos acima que entre duas raízes reais consecutivas de

$f(x) = 0$, no caso entre 0 e b_1, existe pelo menos uma raiz de $F(x) = 0$. Então, se n é o grau de f, a equação $F(x) = 0$ tem pelo menos $n - 1$ raízes reais, de modo que todas as suas raízes são reais. □

1.6 Regra de Sinais de Descartes

Em uma sequência de números a_0, a_1, ..., a_n, nenhum dos quais é zero, dois termos consecutivos a_{i-1} e a_i podem ter o mesmo sinal ou sinais opostos. No primeiro caso, dizemos que os termos a_{i-1} e a_i apresentam *uma permanência de sinais* e, no segundo, apresentam *uma variação de sinais.* Por exemplo, na sequência -2, -3, 4, 4, -1, 7, 7, 7, -5, -4, 1 existem cinco variações e cinco permanências. Se alguns termos em uma sequência são nulos, eles são simplesmente desconsiderados na contagem do número de variações e permanências. Sendo assim, na sequência 1, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 2, 3, -1, 0, 0 existem três variações e duas permanências. Daí, podemos enunciar a Regra de Sinais de Descartes.

Teorema 1.6.1 (Descartes) *O número de raízes reais positivas de uma equação com coeficientes reais,*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0,$$

nunca é maior do que o número de variações de sinais na sequência de seus coeficientes a_0, a_1, ..., a_n*. E, se menor, sempre por um número par.*

Demonstração. Sejam V o número de variações de sinais da sequência a_0, a_1, ..., a_n e r o número de raízes positivas da equação $f(x) = 0$, cada raiz contada de acordo com sua multiplicidade. Queremos provar que $V = r + 2\,h$, onde h é um número inteiro não negativo e, para isso, mostraremos por indução matemática sobre V. O teorema é evidente no caso $V = 0$, pois se todos os coeficientes não nulos têm o mesmo sinal, a equação não terá raízes positivas, de modo que $r = 0$. Supondo, por hipótese de indução, que o teorema é verdadeiro para $V - 1$ variações. Provaremos que é verdadeiro para o caso de V variações e isso basta para concluirmos a generalidade do teorema por indução.

Consideremos a_α e a_β, com $\beta > \alpha$, dois coeficientes de sinais opostos, onde os coeficientes intermediários, se houver algum, são iguais a 0. O número de variações V é composto por três partes: o número de variações v_1 na seção $a_0, a_1, \ldots, a_\alpha$, uma variação na seção $a_\alpha, \ldots, a_\beta$ e o número de variações v_2 na seção $a_\beta, \ldots, a_n$, de modo que $V = v_1 + v_2 + 1$.

Agora, consideremos a equação

$$F(x) := x\, f'(x) - \lambda\, f(x) = 0,$$

cujos coeficientes são

$$(n-\lambda)a_0,\ (n-1-\lambda)a_1,\ \ldots,\ (n-\alpha-\lambda)a_\alpha,\ \ldots,\ (n-\beta-\lambda)a_\beta,\ \ldots,\ -\lambda a_n.$$

Escolhamos λ tal que $n-\alpha-\lambda > 0$, $n-\beta-\lambda < 0$, ou seja, tal que $n-\beta < \lambda < n-\alpha$, o que é possível desde que $\beta > \alpha$. Observando que $n-\lambda$, $n-1-\lambda$, $\ldots$, $n-\alpha-\lambda$ são positivos, enquanto que $n-\beta-\lambda$, $n-\beta-1-\lambda$, $\ldots$, $n-n-\lambda = -\lambda$ são negativos, nas seções $(n-\lambda)a_0, \ldots, (n-\alpha-\lambda)a_\alpha$ e $(n-\beta-\lambda)a_\beta, \ldots, -\lambda a_n$ contamos, respectivamente, v_1 e v_2 variações, mas na seção $(n-\alpha-\lambda)a_\alpha, \ldots, (n-\beta-\lambda)a_\beta$ não há variação, pois os termos extremos têm o mesmo sinal e os intermediários são nulos. Portanto, para a equação $F(x) = x\, f'(x) - \lambda\, f(x) = 0$ o número de variações é $v_1 + v_2 = V - 1$. Pelo teorema de *de Gua*, o número de raízes positivas dessa equação não é menor do que $r - 1$. Supondo que o teorema seja verdadeiro no caso de $V - 1$ variações, temos que $r - 1 \le V - 1$, ou seja, $r \le V$.

Resta-nos mostrar que a diferença $V - r$ é um número par. Na sequência $a_0, a_1, \ldots, a_n$, seja a_v o último termo que é diferente de zero. Pela definição de variação de sinal, é imediato que se V é par, tem-se que a_0 e a_v têm o mesmo sinal, caso contrário, isto é, se V é ímpar, a_0 e a_v têm sinais opostos. Nós já sabemos que o polinômio $f(x) = a_0\, x^n + \ldots + a_v\, x^{n-v}$, para x positivo e suficientemente pequeno, tem o sinal de a_v e para x positivo e suficientemente grande, tem o sinal de a_0. Portanto, se a_0 e a_v têm o mesmo sinal, o número de raízes positivas é par, mesma paridade de V, e se a_0 e a_v têm sinais opostos, o número de todas as raízes é ímpar, mesma paridade de V e assim, r e V são ambos pares ou ambos ímpares. Desta forma, a diferença $V - r$ é um número par, como queríamos demonstrar. □

Substituindo x por $-x$ na equação $f(x) = 0$, obtemos a equação

$$g(x) = f(-x) = 0,$$

que obviamente possui tantas raízes positivas quantas são as raízes negativas de $f(x) = 0$, que é a equação proposta. Se r' é o número de raízes negativas da equação proposta e V' o número de variações correspondentes de $g(x)$, então $V' = r' + 2\,h'$, onde h' é um número inteiro não negativo.

A regra de sinais de Descartes indica o número exato de raízes reais positivas para $V = 0$ e $V = 1$. No primeiro caso, segue-se que $r = 0$, e no segundo, a relação $r + 2\,h = 1$, com h um número inteiro e não-negativo, requer que $h = 0$ e $r = 1$. Este resultado específico pode ser provado independentemente como segue. Se houver apenas uma variação na sequência $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_n$, podemos dividi-la em duas partes, a primeira $a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_{\mu-1}$ consiste em termos não-negativos, nem todos nulos, digamos, $a_{\mu-1} > 0$, e a segunda $a_\mu = -b_0$, $a_{\mu+1} = -b_1, \ldots, a_n = -b_{n-\mu}$, começando com a_μ, um termo negativo, e permanecendo com termos não-positivos. O polinômio $f(x)$ pode ser escrito como

$$f(x) = x^{n-\mu+1}\Big[a_0\, x^{\mu-1} + \ldots + a_{\mu-1} - \Big(\frac{b}{x} + \ldots + \frac{b_{n-\mu}}{x^{n-\mu+1}}\Big)\Big].$$

A expressão entre colchetes é uma função crescente, pois é a diferença entre uma função crescente e uma decrescente, que passa de um valor negativo muito grande, para x suficientemente pequeno e positivo, para um valor positivo muito grande, para x suficientemente grande e positivo. Sendo assim, f anula-se apenas uma vez e assim concluímos que existe apenas uma raiz positiva da equação $f(x) = 0$.

No caso $V > 1$, a regra de sinais de Descartes indica apenas um limite superior para número de raízes positivas e raízes negativas.

1.6.1 Equações com Raízes Reais

Aqui, veremos mais um caso em que a regra de sinais de Descartes conta exatamente o número de raízes positivas e raízes negativas que é o caso em que todas as raízes de uma equação são reais.

Consideremos V o número de variações na sequência de coeficientes

$$a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n \tag{1.1}$$

de $f(x)$ e para V' o número de variações na sequência de coeficientes

$$a_0,\, -a_1,\, a_2,\, \ldots,\, (-1)^n a_n \tag{1.2}$$

de $(-1)^n f(-x)$.

As próximas proposições são cruciais para obtermos a conclusão de que a regra de sinais de Descartes conta exatamente o número de raízes da equação $f(x) = 0$, no caso em que todas as suas raízes são reais.

Proposição 1.6.1 *Se $f(x)$ é um polinômio completo, isto é, todos os termos da sequência (1.1) são diferentes de zero, então $V + V' = n$.*

Demonstração. A cada permanência em (1.1) corresponde uma variação em (1.2), e vice-versa. Desta forma, $V + V'$ é o número de variações e permanências na sequência (1.1), que é igual a n. $\square$

Proposição 1.6.2 *Se $f(x)$ não é um polinômio completo, então $V + V' \leq n$.*

Demonstração. Considere os termos da sequência

$$a_0,\, a_\alpha,\, \ldots,\, a_\mu, a_v \tag{1.3}$$

que são diferentes de zeros. Então, os termos diferentes de zero na sequência (1.2) são

$$a_0,\, (-1)^\alpha\, a_\alpha,\, (-1)^\beta\, a_\beta,\, \ldots,\, (-1)^\mu\, a_\mu, (-1)^v\, a_v. \tag{1.4}$$

Claramente, as sequências (1.3) e (1.4) apresentam V e V' variações, respectivamente. Agora, substituímos a sequência (1.3) por

$$a_0,\, a_0,\, \ldots,\, a_\alpha,\, a_\alpha,\, \ldots,\, a_\beta,\, \ldots,\, a_\mu,\, a_v,\, a_v,\, \ldots,\, a_v \tag{1.5}$$

para ter uma sequência completa de $n+1$ termos, todos diferentes de 0. É evidente que o número de variações em (1.5) é novamente V. A partir de (1.3), derivamos outra sequência de $n+1$ termos, alternando os sinais de termos consecutivos de (1.3)

$$a_0,\, -a_0,\, \ldots,\, (-1)^{\alpha}\, a_{\alpha},\, (-1)^{\alpha+1}\, a_{\alpha},\, \ldots,\, (-1)^{\beta}\, a_{\beta},\, \ldots,\, (-1)^{v}\, a_{v},\, \ldots,\, (-1)^{n}\, a_{v}. \quad (1.6)$$

Seja V'' o número de variações na sequência (1.6). Então, por um lado, $V+V" = n$, já que (1.5) é uma sequência completa de $n+1$ termos, e, por outro lado, $V' \leq V''$. Isso pode ser visto separando as sequências (1.6) e (1.4) nas seções correspondentes da seguinte maneira:

$$a_0,\, -a_0,\, \ldots,\, (-1)^{\alpha}\, a_{\alpha} \text{ corresponde a } a_0,\, (-1)^{\alpha}\, a_{\alpha},$$
$$(-1)^{\alpha}\, a_{\alpha},\, \ldots,\, (-1)^{\beta}\, a_{\beta} \text{ corresponde a } (-1)^{\alpha},\, (-1)^{\beta}\, a_{\beta}$$
$$\ldots$$
$$(-1)^{\mu}\, a_{\mu},\, \ldots,\, (-1)^{v}\, a_{v} \text{ corresponde a } (-1)^{\mu}\, a_{\mu},\, (-1)^{v}\, a_{v},$$

e a seção $(-1)^{v}\, a_{v},\, \ldots,\, (-1)^{n}\, a_{v}$ não tem correspondência em (1.4). Claramente, cada seção em (1.6) não possui menos variações do que a seção correspondente em (1.4). Sendo assim, segue-se que $V' \leq V"$ então,

$$V + V' \leq V + V'' = n,$$

como queríamos provar. □

Agora, se r e r' são o número das raízes positivas e negativas, respectivamente, da equação $f(x) = 0$ de grau n, cujas raízes são reais e diferentes de zero, temos que $r + r' = n$.

Sejam $V = r + 2\,h$ e $V' = r' + 2\,h'$. Sendo assim,

$$V + V' = r + r' + 2\,h + 2\,h' = n + 2\,(h + h') \leq n,$$

ou seja, tem-se que $h + h' \leq 0$ o que é possível apenas se $h = h' = 0$. E assim, $r = V$ e $r' = V'$.

No caso em que alguma raiz da equação $f(x) = 0$ seja nula, digamos, de multiplicidade γ, nós podemos escrever

$$f(x) = x^{\gamma}\,\phi(x),$$

onde $\phi(0) \neq 0$. Analogamente, mostramos que os números de variações de sinais de $\phi(x)$ e de $\phi(-x)$ dão exatamente os números de raízes positivas e negativas de $\phi(x) = 0$ e de $\phi(-x) = 0$, respectivamente, que são as mesmas raízes não nulas de $f(x) = 0$.

1.7 O Teorema de Vincent

O Teorema de Rolle e a regra de sinais de Descartes, embora possam frequentemente ajudar a separar as raízes de uma equação, não fornecem por si mesmos uma solução completa e exaustiva desse importante problema. A aplicação do Teorema de Rolle para esse propósito requer um conhecimento das raízes reais da derivada, que é, na maioria das vezes, difícil de saber. A regra de sinais de Descartes é uma proposição bastante fraca e, aplicada a uma equação cuja natureza das raízes não é conhecida, não fornece o número exato de raízes positivas ou negativas, exceto se o número de variações for zero ou um, ou no caso em que todas as raízes são reais. Mas, exatamente os dois primeiros casos em que a regra de sinais de Descartes conta exatamente o número de raízes, combinados com um notável teorema publicado por Vincent em 1836, ver [4], e sugerido anteriormente por Fourier, fornecem o método mais eficiente, não apenas para determinar o número exato de raízes positivas e negativas, mas também para efetuar sua separação, caso a equação proposta não tenha raízes reais múltiplas.

A seguir traremos o enunciado do teorema de Vincent. Nossa intenção nesse trabalho não é detalhar o método de Vincent, e sim, o de Sturm por isso, não daremos uma demonstração do Teorema de Vincent mas, os interessados podem encontrar uma demonstração em [3].

Teorema 1.7.1 (Vincent) *Sejam a, b, c, … uma sequência arbitrária de números inteiros positivos. Transformando uma equação sem raízes múltiplas por uma série* *de substituições sucessivas*

$$x = a + \frac{1}{y},\ y = b + \frac{1}{z},\ z = c + \frac{1}{t}, \ldots,$$

após várias substituições independente da escolha dos números inteiros a, b, c, $\ldots$, chegamos a uma equação transformada com, no máximo, uma variação de sinal.

Vejamos como se aplica o método de Vincent para o caso de raízes positivas, já que o caso para raízes negativas é totalmente análogo, (basta substituirmos x por $-x$) onde verificamos a existência das raízes positivas em $x > 1$ ou $x < 1$. O caso em que $x = 1$ é imediato, pois basta substituirmos no polinômio e verificarmos se a soma dos coeficientes do mesmo é zero. As raízes positivas maiores do que 1 podem ser escritas na forma $x = 1 + y$, com $y > 0$, enquanto as menores do que 1 podem ser apresentadas na forma $x = \dfrac{1}{1+y}$, com $y > 0$.

O propósito é transformar a equação proposta, por sucessivas transformações da forma $x = 1 + y$ e $x = \dfrac{1}{1+y}$. Essas transformações podem ser feitas de maneira muito conveniente usando apenas adições, como será visto nos exemplos. Se as equações transformadas não tiverem variações, ou apenas uma, a questão está resolvida. Por exemplo, se a equação obtida pela transformação $x = 1 + y$ não possui variações, significa que a equação original não tem raízes maiores do que 1. Já a presença de apenas uma variação na equação transformada indica que a equação proposta tem exatamente uma raiz maior do que 1. Conclusões semelhantes são obtidas para a equação resultante da transformação $x = \dfrac{1}{1+y}$.

Se uma ou ambas as equações transformadas tiverem mais de uma variação, caso saibamos de antemão que a equação proposta não tem raízes múltiplas, aplicamos iteradamente as substituições do mesmo tipo, $y = 1 + z$ ou $y = \dfrac{1}{1+z}$, até obtermos uma equação que tenha no máximo uma variação de sinal. Pelo Teorema de Vincent, esse procedimento termina após um número finito de etapas. Para transformações da forma $x = 1+y$, $y = 1+z$, $\ldots$, seguida de uma transformação da forma $v = \dfrac{1}{1+w}$, são equivalentes a duas transformações: uma do tipo $x = a+\dfrac{1}{y}$, onde a é um número inteiro positivo, e outra do tipo $y = 1 + z$. Disto, segue-se que qualquer equação transformada resulta da equação proposta ou por uma série de transformações

$$x = a + \frac{1}{y},\ y = b + \frac{1}{z},\ \ldots,\ u = l + \frac{1}{v},\ v = \frac{1}{w}$$

ou pelas transformações

$$x = \frac{1}{y},\ z = b + \frac{1}{t},\ y = a + \frac{1}{z},\ \ldots,\ u = l + \frac{1}{v},\ v = \frac{1}{w}$$

onde a, b, $\ldots$, l são inteiros positivos. Observemos que a segunda série não difere da primeira, já que o número de variações não é alterado pela substituição $x = \dfrac{1}{y}$. Novamente, pelo Teorema de Vincent as transformações

$$x = a + \frac{1}{y},\ y = b + \frac{1}{z},\ \ldots,\ u = l + \frac{1}{v},$$

em um número suficiente, levam a uma equação com no máximo uma variação de sinal, e uma transformação adicional do tipo $v = \dfrac{1}{w}$ não altera o número de variações. Sendo assim, o processo descrito leva a uma equação com no máximo uma variação de sinal.

Exemplo 1.7.1 *Vamos separar as raízes positivas da equação* $x^3 - 7x + 7 = 0$*. Como* 1 *não é raiz da equação, temos que as raízes positivas podem ser divididas em maiores do que* 1*, escritas na forma* $x = 1 + y$*, ou entre* 0 *e* 1*, escritas na forma* $x = \dfrac{1}{1+y}$*. Desta forma, montamos o dispositivo a seguir, fazendo adições, que correspondem à substituição* $x = 1 + y$*, realizadas na parte inferior e, as que* *correspondem a* $x = \dfrac{1}{1+y}$, *na parte superior.*

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & 7 \\
 & & 14 & 7 \\
 & 7 & 7 & 7 \\
1 & 0 & 0 & 7 \\
\hline
1 & 0 & -7 & 7 \\
\hline
1 & 1 & -6 & 1 \\
1 & 2 & -4 & \\
1 & 3 & & \\
1 & & &
\end{array}
$$

Da substituição $x = 1 + y$, *encontramos a equação* $y^3 + 3\,y^2 - 4\,y + 1 = 0$. *E da substituição* $x = \dfrac{1}{1+y}$, *encontramos* $7\,y^3 + 14\,y^2 + 7\,y + 1 = 0$ *onde podemos notar que a equação* $7\,y^3 + 14\,y^2 + 7\,y + 1 = 0$ *não tem variação. Logo, não temos rizes positivas entre* 0 *e* 1. *Já em* $y^3 + 3\,y^2 - 4\,y + 1 = 0$, *temos duas variações e devemos continuar a substituição.*

Agora, substituímos $y = \dfrac{1}{1+z}$ *e* $y = 1 + z$ *em* $y^3 + 3\,y^2 - 4\,y + 1 = 0$, *seguindo o mesmo padrão do dispositivo anterior, chegamos a*

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & -1 & 7 \\
 & -2 & -2 & 1 \\
1 & 0 & -3 & 1 \\
\hline
1 & 3 & -4 & 1 \\
\hline
1 & 4 & 0 & 1 \\
1 & 5 & 5 & \\
1 & 6 & & \\
1 & & &
\end{array}
$$

Daí, obtemos para $y = 1+z$ *a equação* $z^3+6\,z^2+5\,z+1 = 0$, *e para* $y = \dfrac{1}{1+z}$ *temos* *a equação* $z^3 - z^2 - 2\,z + 1 = 0$. *Como não há variação em* $z^3 + 6\,z^2 + 5\,z + 1 = 0$, *paramos aqui. E continuamos a substituição par* $z^3 - z^2 - 2\,z + 1 = 0$ *que possui duas variações.*

Substituindo $z = 1 + t$ *e* $z = \dfrac{1}{1+t}$, *da mesma forma que fizemos anteriormente, obtemos*

$$
\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & 1 & 1 \\
 & -2 & 0 & 1 \\
-1 & -2 & -1 & 1 \\
\hline
1 & -1 & -2 & 1 \\
\hline
1 & 0 & -2 & -1 \\
1 & 1 & -1 & \\
1 & 2 & & \\
1 & & &
\end{array}
$$

No que se segue, lembramos a observação 1.1.2. Como para $z = 1 + t$, *a equação* $t^3 + 2\,t - t - 1 = 0$ *tem uma única variação, e para* $z = \dfrac{1}{1+t}$, *a equação* $t^3 + t^2 - 2\,t - 1 = 0$, *também, tem uma única variação, podemos encontrar os intervalos que separam as raízes positivas, tomando* $t = 0$ *e* $t = +\infty$ *em* $x = 1 + \dfrac{1}{2+t}$ *e em* $x = 1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+t}}$. *Vejamos, para* $t = 0$ *e* $t = +\infty$ *em* $x = 1 + \dfrac{1}{2+t}$, *obtemos uma raiz da equação* $x^3 - 7\,x + 7 = 0$ *no intervalo* $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$. *E, para* $t = 0$ *e* $t = +\infty$ *em* $x = 1\dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+t}}$, *obtemos a outra raiz da equação* $x^3 - 7\,x + 7 = 0$ *no intervalo* $\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

Capítulo 2

O Teorema de Sturm

Neste capítulo, enunciamos e demonstramos o Teorema de Sturm, o qual originalmente foi publicado em [2], descrevendo um método bastante conhecido para a separação de raízes reais e que permite encontrar o número exato de raízes reais entre dois números dados para equações sem raízes múltiplas. Um primeiro passo é a obtenção de uma série de Sturm relativa a um dado intervalo.

2.1 Uma série de Sturm

Seja V um polinômio real tal que a equação $V(x) = 0$ não tenha raízes múltiplas.

Como veremos, é possível, a partir de V, obtermos uma série de polinômios V, V_1, V_2, ..., V_s, que num determinado intervalo (a, b), onde $a < b$, possuem as seguintes propriedades:

1. Quando x aumenta de a para b e passa por uma raiz da equação $V(x) = 0$, o quociente $\dfrac{V}{V_1}$ muda de sinal de $-$ para $+$;
2. Não existem dois termos consecutivos da série que se anulam para o mesmo valor de x no intervalo (a, b);
3. Para algum $i = 1, 2, \ldots, s-1$ se algum x no intervalo (a, b), um termo da série, V_i, , onde $V_0 = V$, anula-se, os dois termos adjacentes V_{i-1} e V_{i+1} para o mesmo x têm sinais opostos;

4. O último termo V_s não se anula no intervalo (a, b) e, consequentemente, mantém um sinal constante quando x varia no intervalo (a, b).

Definição 2.1.1 *Qualquer série de polinômios que possua as quatro propriedades acima é dita uma série de Sturm para $V(x) = 0$ relativa ao intervalo (a, b).*

A respeito de uma série de Sturm relativa a um intervalo, podemos estabelecer os seguintes fatos:

- Multiplicando uma série de Sturm por fatores constantes positivos obtemos outras séries de Sturm.

- Para evitarmos frações, multiplicamos os coeficientes de cada resto parcial por fatores positivos apropriados. Pois, o efeito disto no resto final é simplesmente a multiplicação por um fator positivo.

- Se na construção de uma série de Sturm relativa a um intervalo, obtemos um termo V_m, que não tem raízes reais ou que não tem raízes reais no intervalo, podemos parar o processo na atual etapa concluindo que a série V, V_1, V_2, $\ldots$, V_m é de Sturm.

2.2 Um Método para Construir uma Série de Sturm

Um método para construir uma série de Sturm em relação ao intervalo $(-\infty, +\infty)$, e consequentemente também em relação a qualquer outro intervalo, é como segue. A partir do polinômio V o segundo termo, V_1, é a derivada V' de V ou um múltiplo positivo dela. Observemos que a primeira propriedade é satisfeita, como consequência do lema 1.3.1. Os outros termos V_2, V_3, $\ldots, V_s$ da série são determinados por um processo completamente análogo àquele do máximo divisor comum de V e $V_1 = V'$. Primeiramente, dividimos V por V_1 até obtermos um resto de grau menor do que o de V_1. Consideramos V_2 o polinômio que é o resto da divisão de V por V_1 multiplicando por -1 sendo assim, temos que $V = V_1 Q_1 - V_2$, para um certo polinômio Q_1, o qual é o quociente da divisão. Se V_2 não é constante, dividimos V_1 por V_2 até obtermos um resto de grau menor do que o de V_2. Consideramos V_3 o polinômio que é o resto da divisão de V_1 por V_2 multiplicado por -1 onde temos que $V_1 = V_2\,Q_2 - V_3$, para um certo polinômio Q_2. Continuamos o procedimento até obtermos um resto constante não-nulo, digamos V_s. O que é possível já que V e V' não têm fatores comuns, exceto fatores constantes. Podemos então considera o Lema a seguir:

Lema 2.2.1 *V, V_1, V_2, ..., V_s é uma série de Sturm.*

Demonstração. Já vimos que a série satisfaz a propriedade 1, já que $V_1 = V'$. Para a propriedade 2, notamos que, em geral, para cada $i = 1, 2, \ldots, s-1$,

$$V_{i-1} = V_i\,Q_i - V_{i+1},$$

onde $V = V_0$. Sendo assim, se existisse $x = \xi$ tal que $V_i(\xi) = 0$ e $V_{(i+1)}(\xi) = 0$, para algum i, então $V_{(i-1)}(\xi) = 0$. Similarmente, teríamos $V_{(i-2)}(\xi) = 0$ chegando a $V_1(\xi) = V'(\xi) = 0$ e $V(\xi) = 0$. Mas, isto é impossível uma vez que implica que ξ seria raiz múltipla de V. Desta forma, dois termos consecutivos da série não se anulam para o mesmo valor de x satisfazendo a propriedade 2.

Vejamos a propriedade 3. Seja ξ tal que $V_i(\xi) = 0$, para algum i. Então, $V_{i-1}(\xi) = -V_{i+1}(\xi)$. Pela propriedade 2, temos que os números $V_i(\xi)$ e $V_{i+1}(\xi)$ são não-nulos e com sinais opostos mostrando a propriedade 3.

Finalmente, a propriedade 4 segue do fato de que V_s é uma constante não-nula.

Teoricamente, é sempre possível encontrar uma série de Sturm relativa a um dado intervalo, mas em alguns casos, quando o grau do polinômio V é alto, os cálculos envolvidos podem conter números enormes.

É importante salientar a utilidade dos fatos relatados no final da seção 2.1 para a simplificação dos cálculos, como veremos nos exemplos abaixo.

Exemplo 2.2.1 *Dado o polinômio $V(x) = x^3 - 7\,x + 7$, seguindo os passos abaixo, encontramos uma série de Sturm para $V(x) = 0$.*

1. *Encontrar $V_1 = V'$.*

2. *Encontrar V_2, que é igual ao resto da divisão de V por V_1, dividido por 7 e multiplicado por -1. Aqui, usamos o primeiro fato relatado no final da seção 2.1.*

3. *Encontrar V_3, que é o resto final da divisão de $2\,V_1$ por V_2, em que se multiplica o primeiro resto por 2, e multiplicado por -1. Aqui, usamos o segundo fato relatado no final da seção 2.1.*

E assim, uma série de Sturm para $V(x) = 0$ é

$$\begin{aligned} V(x) &= x^3 - 7\,x + 7 \\ V_1(x) &= 3\,x^2 - 7 \\ V_2(x) &= 2\,x - 3 \\ V_3(x) &= 1 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.2 *Dado o polinômio $V(x) = x^4 - 6\,x^3 + x^2 - 1$, seguindo os passos abaixo, encontramos uma série de Sturm para $V(x) = 0$.*

1. *Encontrar $V_1 = \dfrac{1}{2}\,V'$. Aqui, usamos o primeiro fato relatado no final da seção 2.1.*

2. *Encontrar V_2, que é igual ao resto da divisão de $2\,V$ por V_1, em que se multiplica o primeiro resto por 2, e multiplicado por -1. Aqui, usamos o segundo fato relatado no final final da seção 2.1.*

3. *Parar o processo, já que as raízes de V_2 não são reais, conforme o último fato relatado no final da seção 2.1.*

A série de Sturm para $V(x) = 0$ é

$$\begin{aligned} V(x) &= x^4 - 6\,x^3 + x^2 - 1 \\ V_1(x) &= 2\,x^3 - 9\,x^2 + x \\ V_2(x) &= 25\,x^2 - 3\,x + 4 \end{aligned}$$

Exemplo 2.2.3 *Dado o polinômio $V(x) = x^5 - 10\,x^4 + 15\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7$, seguindo os passos abaixo, encontramos uma série de Sturm para $V(x) = 0$.*

1. *Encontrar $V_1 = V'$.*

2. *Encontrar V_2, que é igual ao resto da divisão de $5\,V$ por V_1 multiplicado por -1.*

3. *Encontrar V_3. Começamos dividindo $10\,V_1$ por V_2. Multiplicando o primeiro resto parcial por 50, e continuando a divisão, obtemos V_3 como o resto final multiplicado por -1. Aqui, usamos os dois primeiros fatos relatados no final da seção 2.1.*

4. *Encontrar V_4, que é o resto da divisão de $200\,V_2$ por V_3 multiplicado por -1. Aqui, usamos o primeiro fato relatado no final da seção 2.1.*

5. *Encontrar V_5, que é o resto aproximado da divisão de V_3 por V_4 multiplicado por -1. Como V_5 é uma constante negativa, e usando o primeiro fato relatado no final da seção 2.1, podemos tomar $V_5 = -1$.*

A série de Sturm para $V(x) = 0$ é

$$\begin{aligned}
V(x) &= x^5 - 10\,x^4 + 15\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7 \\
V_1(x) &= 5\,x^4 - 40\,x^3 + 45\,x^2 - 2\,x + 3 \\
V_2(x) &= 50\,x^3 - 87\,x^2 - 8\,x + 29 \\
V_3(x) &= 4331\,x^2 + 4954\,x - 10577 \\
V_4(x) &= -5580,7\,x + 6462,7 \\
V_5(x) &= -1
\end{aligned}$$

A ocorrência de números muito grandes no processo de obtenção de uma série de Sturm é uma desvantagem do método de Sturm para a separação de raízes. Mas, isso pode ser evitado usando aproximações, veja o último exemplo. De fato, o que nos interessa é o sinal dos termos da série de Sturm em certos valores de x, o que nos permite usar os coeficientes aproximados.

2.3 Teorema de Sturm

Seja V, V_1, V_2, V_3, $\ldots$, V_s uma série de Sturm para $V(x) = 0$ relativa ao intervalo (a, b). Aqui, continuamos a supor que a equação $V(x) = 0$ não tem raízes múltiplas. Dado $\xi \in (a, b)$, substituindo $x = \xi$ em cada um dos termos da série, obtemos os valores $V(\xi)$, $V_2(\xi)$, $V_3(\xi)$, $\ldots$, $V_s(\xi)$, com $V_s(\xi) \neq 0$. Suponhamos que $V(\xi) \neq 0$, e desconsideremos os valores intermediários nulos. Substituindo os valores não-nulos pelos seus sinais, obtemos uma sequência de sinais $+$ ou $-$ e contamos o numero de variações que ocorrem. Este número de variações $\nu(\xi)$ é dito *o número de variações na série de Sturm relativa ao intervalo (a, b) para o valor $x = \xi$*, que pode ser visto como uma função de ξ, definida para todos os valores de ξ no intervalo (a, b), exceto as raízes da equação $V(x) = 0$ que estão no intervalo (a, b).

De posse dessas preliminares, estamos prontos para enunciar e demonstrar o Teorema de Sturm.

Teorema 2.3.1 (Sturm) *Sejam a e b números reais distintos, digamos, com $a < b$, tais que nenhum deles é raíz da equação $V(x) = 0$. Então, o número de raízes da equação $V(x) = 0$ em (a, b) é igual a diferença $\nu(a) - \nu(b)$ determinando o número de variações perdidas na série de Sturm quando x vai de a para b.*

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que nenhum dos números nas sequências

$$V(a),\ V_1(a),\ V_2(a),\ \ldots,\ V_s(a)$$
$$V(b),\ V_1(b),\ V_2(b),\ \ldots,\ V_s(b)$$

é zero. Sejam $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$, com $a < c_1$ e $c_m < b$, todas as raízes das equações

$$V(x) = 0,\ V_1(x) = 0,\ V_2(x) = 0,\ \ldots,\ V_s(x) = 0$$

no intervalo (a, b). Para cada $i = 1, 2, \ldots, m - 1$, escolhamos arbitrariamente ϵ_i em (c_i, c_{i+1}). Consideremos a soma telescópica

$$\nu(a) - \nu(b) = [\nu(a) - \nu(\epsilon_1)] + [\nu(\epsilon_1) - \nu(\epsilon_2)] + \ldots + [\nu(\epsilon_{m-1}) - \nu(b))],$$

ou seja,

$$\nu(a) - \nu(b) = \sum_{i=1}^{m} [v(\epsilon_{i-1}) - v(\epsilon_i)]$$

onde $\epsilon_0 = a$ e $\epsilon_m = b$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, m-1$, observemos que entre ϵ_{i-1} e ϵ_i há apenas um dos números c_1, c_2, ..., c_m, denominemos c_i. O número c_i é uma raiz de um ou mais dos termos da série de Sturm. Suponhamos que c_i não é uma raiz do primeiro deles, V, mas é raiz de V_{α_1}, V_{α_2}, ..., V_{α_i}. Pelas propriedades 2 e 4 de uma série de Sturm, temos que

$$\alpha_2 > \alpha_1 + 1,\ \alpha_3 > \alpha_2 + 1, \ldots, \alpha_i > \alpha_{i-1} + 1 \quad \text{e} \quad \alpha_i < s.$$

Para compararmos $\nu(\epsilon_{i-1})$ e $\nu(\epsilon_i)$, organizamos a série de Sturm da seguinte maneira

$$\begin{array}{r} V,\ V_1,\ \ldots,\ V_{\alpha_1-1},\ V_{\alpha_i},\ V_{\alpha_1+1} \\ V_{\alpha_1+1},\ V_{\alpha_1+2},\ \ldots,\ V_{\alpha_2-1},\ V_{\alpha_2},\ V_{\alpha_2+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{\alpha_{i-1}+1},\ V_{\alpha_{i-1}+2},\ \ldots,\ V_{\alpha_i-1},\ V_{\alpha_i},\ V_{\lambda_i+1} \\ V_{\alpha_1+1},\ \ldots,\ V_s \end{array}$$

Como V, V_1, ..., V_{α_1-1} não tem raízes em $(\epsilon_{i-1}, \epsilon_i)$, temos que V, V_1, ..., V_{α_1-1} têm o mesmo sinal para $x = \epsilon_{i-1}$ e para $x = \epsilon_i$. Por esse motivo, o número de variações em ambas as sequências

$$\begin{array}{r} V(\epsilon_{i-1}),\ V_1(\epsilon_{i-1}),\ \ldots, V_{\alpha_1-1}(\epsilon_{i-1}) \\ V(\epsilon_i),\ V_1(\epsilon_i),\ \ldots,\ V_{\alpha_1-1}(\epsilon_i) \end{array}$$

é o mesmo, denominemos A.

Afirmamos que

$$V_{\alpha_1-1}(x),\ V_{\alpha_1}(x),\ V_{\alpha_1+1}(x)$$

têm uma variação de sinal para $x = \epsilon_{i-1}$ e para $x = \epsilon_i$. Vejamos, os sinais de

$$V_{\alpha_1-1}(\epsilon_{i-1}),\ V_{\alpha_1-1}(c_i),\ V_{\alpha_1-1}(\epsilon_i)$$

são os mesmos. Similarmente,

$$V_{\alpha_1+1}(\epsilon_i - 1),\ V_{\alpha_1+1}(c_i),\ V_{\alpha_1+1}(\epsilon_i)$$

têm o mesmo sinal, pois ϵ_{i-1}, c_i e ϵ_i não são raízes de V_{α_1+1}. Pela propriedade 3, já que $V_{\alpha_1}(c_i) = 0$, temos que $V_{\alpha-1}(c_i)$ e $V_{\alpha+1}(c_i)$ têm sinais opostos. Disto, segue-se que as sequências

$$V_{\alpha_1-1}(\epsilon_{i-1}),\ V_{\alpha_1}(\epsilon_{i-1}),\ V_{\alpha_1+1}(\epsilon_{i-1})$$
$$V_{\alpha_1-1}(\epsilon_i),\ V_{\alpha_1}(\epsilon_i),\ V_{\alpha_1+1}(\epsilon_i)$$

têm, cada uma, uma variação de sinal, já que o termo central tem o mesmo sinal de um dos adjacentes. Consequentemente , $V_{\alpha_1-1}(\epsilon_i)$, $V_{\alpha_1}(\epsilon_i)$, $V_{\alpha_1+1}(\epsilon_i)$ tanto para $x = \epsilon_{i-1}$ quanto para $x = \epsilon_i$, apresenta o mesmo número de variações de sinais, denominamos $A + 1$. Analogamente, podemos demonstrar o mesmo para as outras seções onde tem-se que, para cada $i = 1, 2, \ldots, m$,

$$\nu(\epsilon_{i-1}) - \nu(\epsilon_i) = 0,$$

no caso em que $V(c_i) \neq 0$.

Para o que se segue, suponhamos que $V(c_i) = 0$ e analogamente podemos provar que para $x = \epsilon_{i-1}$ e $x = \epsilon_i$ a sequência

$$V_1(x),\ V_2(x),\ \ldots,\ V_s(x)$$

apresenta o mesmo número de variações, desde que $V_1(c_i) \neq 0$. Pela primeira propriedade de uma série de Sturm, os termos V e V_1 tem uma variação de sinal para $x = \epsilon_{i-1}$ e nenhuma variação para $x = \epsilon_i$, já que x crescendo de ϵ_{i-1} para ϵ_i passa pela raiz c_i de V. E então,

$$\nu(\epsilon_{i-1}) - \nu(\epsilon_i) = 1,$$

no caso em que c_i é uma raiz da equação $V(x) = 0$. A soma

$$\sum_{i=1}^{m} [\nu(\epsilon_{i-1}) - \nu(\epsilon_i)]$$

consiste de tantos termos iguais a 1 quantas são as raízes da equação $V(x) = 0$ entre a e b e os outros termos da equação iguais a zero. Mas, como sabemos tal soma é igual a

$$\nu(a) - \nu(b),$$

o que demonstra o teorema para o caso em que nenhum dos termos da série de Sturm anula-se para $x = a$ ou $x = b$.

Consideremos a possibilidade de algum dos termos V_1, V_2, $\ldots$, V_s anular-se em a ou b. Por hipótese, temos que $V(a) \neq 0$ e $V(b) \neq 0$. Para ϵ positivo suficientemente pequeno, o número de raízes da equação $V(x) = 0$ em (a, b) é o mesmo que o número de raízes em $(a + \epsilon, b - \epsilon)$ e nenhum outro termo da série de Sturm anula-se para $x = a + \epsilon$ ou para $x = b - \epsilon$. Acrescentamos que a escolha adequada de ϵ, de tal forma que não exista no intervalo $(a, a + \epsilon]$ nenhuma raiz dos termos da série de Sturm, permite-nos afirmar que os termos da série mantêm sinais constantes em $(a, a + \epsilon]$, que são os mesmos sinais dos termos para $x = a + \epsilon$. Como vimos acima, para este caso, o número de raízes é

$$\nu(a + \epsilon) - \nu(b - \epsilon).$$

Seja $V_\alpha(a) = 0$, para algum $\alpha \in \{1, 2, \ldots, s - 1\}$. Sendo assim, na seção

$$V_{\alpha-1}(a),\ V_\alpha(a),\ V_{\alpha+1}(a)$$

contamos apenas uma variação de sinal, já que pela terceira propriedade da série de Sturm, os termos adjacentes têm sinais opostos. Analogamente, não importando o sinal de $V_{\alpha-1}(a+\epsilon)$, a seção

$$V_{\alpha-1}(a+\epsilon),\, V_{\alpha}(a+\epsilon),\, V_{\alpha+1}(a+\epsilon)$$

tem apenas uma variação de sinal, já que $V_{\alpha-1}$ e $V_{\alpha+1}$ têm sinais constantes em $(a, a+\epsilon]$. A partir desses fatos, concluímos que $\nu(a) = \nu(a+\epsilon)$ e da mesma forma, prova-se que $\nu(b) = \nu(b-\epsilon)$. Portanto, o número de raízes de V em (a,b), com $V(a) \neq 0$ e $V(b) \neq 0$, é dado por $\nu(a) - \nu(b)$. $\square$

Vamos, através de um exemplo, mostrar como o Teorema de Sturm pode ser usado para fins de separação de raízes.

Exemplo 2.3.1 *Separemos as raízes da equação*

$$V(x) = x^3 - 7\,x + 7 = 0.$$

no intervalo $(-4, 2)$.

Como vimos acima, uma série de Sturm para $V(x) = 0$ *é dada por*

$$\begin{aligned} V(x) &= x^3 - 7\,x + 7 \\ V_1(x) &= 3\,x^2 - 7 \\ V_2(x) &= 2\,x - 3 \\ V_3(x) &= 1. \end{aligned}$$

Substituindo x *pelos números inteiros* $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$, *formamos a tabela abaixo, exibindo os sinais dos termos da série nos valores especificados. Notamos*

x	V	V_1	V_2	V_3
2	+	+	+	+
1	+	-	-	+
0	+	-	-	+
-1	+	-	-	+
-2	+	+	-	+
-3	+	+	-	+
-4	-	+	-	+

rapidamente que existe uma raiz entre -4 *e* -3, *já que se perde uma variação de* *sinal, e duas raízes entre* 1 *e* 2*, já que se perdem duas variações de sinais. Para separar as raízes no intervalo* $(1, 2)$*, inserimos um número intermediário, por exemplo,* $\frac{3}{2}$*. Os sinais para* $x = 1$*,* $\frac{3}{2}$ *e* 2*, são verificados na tabela correspondente. E*

x	V	V_1	V_2	V_3
2	+	+	+	+
3/2	-	-	0	+
1	+	-	-	+

assim observamos que no intervalo $(1, 2)$*, existe uma raiz entre* 1 *e* $\frac{3}{2}$*, e uma raiz entre* $\frac{3}{2}$ *e* 2*. Portanto, as raízes estão separadas nos intervalos*

$$(-4, -3),\ \left(1, \frac{3}{2}\right)\ e\ \left(\frac{3}{2}, 2\right).$$

Capítulo 3

Aplicação do Teorema de Sturm no Ensino Médio

A finalidade deste capítulo é construir uma sequência didática de $8\,h$, mostrando como podemos utilizar o Teorema de Sturm no 3° ano do Ensino Médio como um método para saber quantas raízes reais têm uma equação polinomial sem raízes múltiplas e como separá-las em intervalos reais.

No Ensino Médio, em geral, utilizamos métodos diretos para a solução das *equações algébricas*. Iniciamos pelas equações de 1° grau ou *lineares*, que são resolvidas de maneira direta isolando a incógnita. Passamos pelas equações de 2° grau ou *quadráticas*, que resolvemos usando uma fórmula de *fórmula de Bhaskara*. Para as equações de 3° ou *cúbicas*, existem métodos, tais como o *dispositivo Briot-Ruffini* e as *relações de Girard*, ambas de prática recorrente no Ensino Médio, que necessitam de condições prévias, tais como o conhecimento de uma de suas raízes ou as relações entre elas. Ademais menos difundida, tem-se que existe uma fórmula para a obtenção das raízes de uma equação cúbica, conhecida como a *fórmula de Cardano-Tartaglia*. Para equações de 4° grau ou *biquadráticas* existe uma fórmula, pouco difundida para obtenção das raízes, conhecida como a *fórmula de Ferrari*. A partir do 5° grau, mostra-se que não existem fórmulas para a obtenção de raízes de equações algébricas.

Ao se deparar com equações algébricas de grau muito alto, os alunos questionam se existe uma fórmula para resolvê-la. Como observamos acima, não existem fórmulas para resolver equações algébricas de grau maior do que ou igual a 5. Mas, existem métodos, ditos *indiretos*, que auxiliam o estudante a perceber de forma aproximada, onde se encontram as raízes reais da equação. A *separação de raízes* é um bom caminho de entendimento para a solução de equações de grau elevado. O que propomos é utilizar um desses métodos indiretos em sala de aula e o escolhido é o que se baseia no teorema de Sturm, cuja exposição vimos nos capítulos anteriores.

Na implementação do método de Sturm, existe a necessidade de utilizar a *derivação de polinômios.* O *cálculo diferencial* já fez parte do currículo do Ensino Médio, antes chamado de Ensino Secundário. Esse tema foi incluído através da Reforma Capanema, em 1942. Mas, após o movimento da Matemática Moderna, o estudo do cálculo diferencial deixou de ser tratado na Educação Básica. Uma referência à inclusão do cálculo diferencial no Ensino Médio pode ser vista em [1].

Como precisaremos da derivada de polinômios, a sequencia didática será iniciada pela aplicação da regra de derivação para polinômios. Nas outras aulas, aplicaremos progressivamente o método de Sturm. No desenvolvimento das atividades será usado o site http://www.calculadoraonline.com.br/ para fazer as divisões de polinômios, e as substituições necessárias. Dessa forma podemos otimizar o tempo e dinamizar as aulas com o uso de uma ferramenta já bem conhecida e de fácil acesso.

3.1 Sequência Didática

3.1.1 Aula 1: Derivada

1. **Objetivo:** Aplicar a regra de derivação para polinômios.

2. **Duração:** $2\,h$.

3. **Pré-requisitos:** Funções polinomiais.

4. **Desenvolvimento:**

   Considerando o polinômio real $f(x) = a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + a_2\,x^{n-2} + \ldots + a_n$, a derivada de f, denotada como f' ,é por definição o polinômio

$$f'(x) = n\, a_0\, x^{n-1} + (n-1)\, a_1\, x^{n-2} + (n-2)\, a_2\, x^{n-3} + \ldots + a_{n-1}.$$

Essa definição é meramente formal, pois desse conteúdo é necessário apenas encontrar as derivadas de funções polinomiais.

Apliquemos a regra dada pela definição nos exemplos abaixo.

(a) Se $f(x) =$ a, então $f'(x) = 0$. Por exemplo, para $f(x) = -\dfrac{3}{5}$, temos que $f'(x) = 0$.

(b) Se $f(x) = a\,x + b$, então $f'(x) = a$. Por exemplo, para $f(x) = 3\,x$, temos que $f'(x) = 3$.

(c) Se $f(x) = a_0\, x^2 + a_1\, x + a_2$, então $f'(x) = 2\, a_0\, x + a_1$. Por exemplo, para $f(x) = 4\, x^3$, temos que $f'(x) = 12\, x^2$.

(d) Se $f(x) = a_0\, x^3 + a_1\, x^2 + a_2\, x + a_3$, então $f'(x) = 3\, a_0\, x^2 + 2\, a_1\, x + a_2$. Por exemplo, para $f(x) = 12\, x^3 - x + 1$, temos que $f'(x) = 36\, x^2 - 1$.

(e) Se $f(x) = a_0\, x^4 + a_1\, x^3 + a_2\, x^2 + a_3\, x + a_4$, então $f'(x) = 4\, a_0\, x^3 + 3\, a_1\, x^2 + 2\, a_2\, x + a_3$. Por exemplo, para $f(x) = 2\, x^4 - 3\, x^3 + x^2 - 4$, temos que $f'(x) = 8\, x^3 - 9\, x^2 + 2\, x$.

Exercício: Usando a regra de derivação para polinômios, encontre a derivada de

(a) $f(x) = x^2 + 5\, x - 4$.

(b) $f(x) = x^5 - 6\, x^4 + 4\, x^3 - 2\, x + 10$.

(c) $f(x) = x^3$.

(d) $f(x) = x^6 - x^5 + 12\, x^4 - 3\, x^3 + 5\, x^2$

(e) $f(x) = -16$

3.1.2 Aula 2: Construção da série de Sturm

1. **Objetivo:** Aprender a como construir uma série de Sturm.

2. **Duração:** $2\,h$.

3. **Pré-requisitos**: Regra de derivação para polinômios e divisão de polinômios.

4. **Desenvolvimento**:

   Seja V um polinômio real tal que a equação $V(x) = 0$ não tenha raízes múltiplas. É possível, a partir de V, obtermos uma série de polinômios V, V_1, V_2, ..., V_s, denominada uma série de Sturm para V.

   Vejamos, dado o polinômio $V(x) = x^3 - 3\,x + 1$, seguindo os passos abaixo, encontramos uma série de Sturm para V.

   (a) Encontrar $V_1 = V'$.

   (b) Encontrar V_2, que é igual ao resto da divisão de V por V_1, simplificando e multiplicando por -1.

   A partir daqui utilizamos a calculadora online.

   (c) Encontrar V_3, que é o resto da divisão de V_1 por V_2, simplificando e multiplicando por -1.

   (d) Continuar o processo até que se chegue em um número real ou em uma equação de raízes complexas.

   Temos então, que a série de Sturm para $V = 0$ é

$$\begin{aligned} V(x) &= x^3 - 3\,x + 1 \\ V_1(x) &= 3\,x^2 - 3 \\ V_2(x) &= 2\,x - 1 \\ V_3(x) &= 9 \end{aligned}$$

   <u>**Exercício:**</u> Agora, vamos criar uma Série de Sturm para

   (a) $x^4 - 4\,x^3 + x^2 + 6\,x + 2 = 0$.

   (b) $x^4 + 2\,x^3 + x^2 - 4\,x + 10 = 0$.

   (c) $x^5 - 10\,x^4 + 15\,x^3 - x^2 + 3\,x - 7 = 0$

3.1.3 Aula 3: Teorema de Sturm

1. **Objetivo:** Aplicar o Teorema de Sturm para encontrar os intervalos que separam as raízes reais de um polinômio.

2. **Duração:** $2\,h$.

3. **Pré-requisitos**: Construção de uma série de Sturm.

4. **Desenvolvimento**:

   Separar raízes de uma equação algébrica é colocá-las em intervalos dois a dois disjuntos, que contenham exatamente cada uma das raízes da equação. Para isso, vamos utilizar o Teorema de Sturm. Seja V, V_1, V_2, V_3, $\ldots$, V_s uma série de Sturm para V relativa ao intervalo (a, b), onde a e b são números reais distintos com $a < b$, tais que nenhum deles é raiz da equação $V(x) = 0$. Dessa forma temos o número de raízes da equação $V(x) = 0$ em (a, b) é igual a diferença $\nu(a) - \nu(b)$ sendo o número de variações perdidas na série de Sturm quando x vai de a para b.

   Vamos aplicar o Teorema de Sturm para o polinômio $V(x) = 4\,x^2 - 8\,x + 3$. Pelo método de resolução de equações do segundo grau, temos que suas raízes são $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{3}{2}$. Para aplicarmos o método de Sturm precisamos criar uma série de Sturm para V, como aprendemos na aula anterior, utilizando a calculadora online. Sendo assim, uma série de Sturm para V é dada por

$$
\begin{aligned}
V(x) &= 4\,x^2 - 8\,x + 3 \\
V_1(x) &= V'(x) = 8\,x - 8 \\
V_2(x) &= -2
\end{aligned}
$$

   Como chegamos a um número real o processo termina. Feito isso, substituímos sucessivamente x por -2, -1, 0, 1, 2, 3 na série para analisarmos as variações de sinais. Aqui podemos utilizar o comando calculadora científica.

E obtemos a seguinte tabela

x	V	V_1	V_2
-2	$+$	$-$	$+$
-1	$+$	$-$	$+$
0	$+$	$-$	$+$
1	$-$	0	$+$
2	$+$	$+$	$+$
3	$+$	$+$	$+$

Estudando a variação dos sinais para cada um dos termos da série, verificamos que ocorre uma perda de variação de sinal quando x passa de 0 para 1 e que ocorre outra perda de variação de sinal quando x passa de 1 para 2. Isso mostra, pelo Teorema de Sturm, que em cada um dos intervalos $(0,1)$ e $(1,2)$ há uma raiz de $V(x) = 0$. O que de fato é verdade, pois em $(0,1)$ há a raiz $\dfrac{1}{2}$, e em $(1,2)$ há a raiz $\dfrac{3}{2}$. Com isso, isolamos as raízes da equação $V(x) = 0$ nos intervalos $(0,1)$ e $(1,2)$.

3.1.4 Aula 4: Exercícios sobre o Teorema de Sturm

1. **Objetivo:** Fazer exercícios sobre o teorema de Sturm.

2. **Duração:** $2\,h$.

3. **Pré-requisitos**: Todo o conhecimento adquirido nas aulas anteriores.

4. **Desenvolvimento**:

   No exemplo da aula anterior, utilizamos o Teorema de Sturm para isolar as raízes de uma equação algébrica. É claro que o exemplo que demos era bastante simples. Nós poderíamos ter descoberto as raízes sem recorrer ao Teorema de Sturm, simplesmente, aplicando uma fórmula. Mas, para ilustrarmos o método, fizemos questão de um exemplo simples. De fato, o Teorema de Sturm descreve um método para isolar as raízes de uma equação de grau qualquer.

Exercício: Isole as raízes de cada uma das equações abaixo.

(a) $x^4 - 4\,x^3 + x^2 - 1 = 0.$

Construindo uma série de Sturm para $V(x) = x^4 - 4\,x^3 + x^2 - 1$, obtemos

$$\begin{aligned} V(x) &= x^4 - 4\,x^3 + x^2 - 1 \\ V_1(x) &= 2\,x^3 - 6\,x^2 + x \\ V_2(x) &= 5\,x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

já que os zeros de V_2 são imaginários. Agora, substituindo x sucessivamente por -1, 0, 1, 2, 3, 4, obtemos a seguinte tabela

x	V	V_1	V_2
-1	$+$	$-$	$+$
0	$-$	0	$+$
1	$-$	$-$	$+$
2	$-$	$-$	$+$
3	$-$	$+$	$+$
4	$+$	$+$	$+$

Concluímos que em $(-1, 4)$ temos duas raízes reais, uma no intervalo $(-1, 0)$, e a outra no intervalo $(3, 4)$.

(b) $x^4 - 4\,x^3 + x^2 + 6\,x + 2 = 0.$ Construindo uma série de Sturm para $V(x) = x^4 - 4\,x^3 + x^2 + 6\,x + 2$, obtemos

$$\begin{aligned} V(x) &= x^4 - 4\,x^3 + x^2 + 6\,x + 2 = 0 \\ V_1(x) &= 4\,x^3 - 12\,x^2 + 6 \\ V_2(x) &= 5\,x^2 - 10\,x - 7 \\ V_3(x) &= x - 1 \\ V_4(x) &= 12 \end{aligned}$$

já que V_4 é um número real. Agora, substituindo sucessivamente x por -1, 0, 1, 2, 3, obtemos a seguinte tabela

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4
-1	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
1	$+$	0	$-$	0	$+$
2	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Observando a tabela acima notamos a presença de duas raízes no intervalo $(-1, 0)$ e duas no intervalo $(2, 3)$, incluindo valores intermediários, $-\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{5}{2}$, aos intervalos encontrados, podemos deixar uma única raiz em cada intervalo. Fazendo as substituições temos:

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4
-1	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-1/2$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
0	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4
2	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$5/2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
3	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Podemos concluir que as raízes da equação $V(x) = 0$ estão isoladas nos intervalos

$$\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(2, \frac{5}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{5}{2}, 3\right).$$

Considerações Finais

A busca por formas de aprimorar o conhecimento a ser mediado deve ser constante para, que assim consigamos facilitar o processo de ensino/aprendizagem, pois temos um papel fundamental na construção de saberes, criando situações educativas que despertem o desejo de aprender. E é nesse intuito que propomos aplicar o Teorema de Sturm no terceiro ano do Ensino Médio, como um recurso didático.

Nós utilizamos uma calculadora online, situada em

htpp://www.calculadoraonline.com.br/

para nos auxiliar durante o processo de explicação do tema, pois, além de ser prática, é uma maneira de tornar o estudante protagonista de seu aprendizado, experimentando novas formas de adquirir conhecimento. Além disso, a tecnologia favorece a interação entre os alunos, a sala de aula se torna um ambiente de exposição e troca de ideias e conteúdos. A ideia é que ao utilizarem o computador ou o próprio celular para essa finalidade os alunos possam aprender se distraindo e tornar o processo ensino/aprendizagem uma oportunidade de enriquecimento.

Esse processo torna-se também desafiador, para aluno e professor, tratando-se de um contato com definições novas e aplicações nunca estudadas na Educação Básica, tais como derivação, variação de sinais e o próprio Teorema de Sturm. Logo, além de esclarecedora, essa prática pode se tornar exploradora das potencialidades matemáticas, criando novas práticas pedagógicas para o ensino.

Referências

[1] ÁVILA, G. **O Ensino de Cálculo no** $2°$ **grau.** Revista do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), $n°$ 18, p. 1-9, 1991.

[2] STURM, C. **Mémoire sur la Résolution des Équations Numériques**, Mémoire des Savants Etrangers, 6 (1835) 271–318.

[3] USPENSKY, J. V. **Theory of Equations**, McGraw-Hill, New York, 1948.

[4] VINCENT, A. J. H. **Sur la résolution des equations numériques**, Mémories de La Société Royale de Lille (1834) 1-34. Also in J. Math. Pures Appl. 1 (1836) 341-372.

[5] NETO, A.C.M. **Fundamentos de Cálculo**, Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.