Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PRO
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Abordagens para contextualização no ensino de matrizes na educação básica

Jordan Gustavo da Silva

Teresina

2020

Jordan Gustavo da Silva

Abordagens para contextualização no ensino de matrizes na educação básica

Dissertação apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual do Piauí, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de matemática.

Orientador: Prof. Dr Arnaldo Silva Brito.

Teresina

2020

JORDAN GUSTAVO DA SILVA

ABORDAGENS PARA CONTEXTUALIZAÇÃO NO ENSINO DE MATRIZES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Arnaldo Silva Brito

Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Sandoel de Brito Vieira

Prof. Dr. Sandoel de Brito Vieira- Examinador Externo

Natã Firmino Santana Rocha

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

TERESINA
Agosto/2020

S586a Silva, Jordan Gustavo da.
Abordagens para contextualização no ensino de matrizes na educação básica / Jordan Gustavo da Silva. – 2020.
52 f.: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2020.
"Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Silva Brito."

1. Matriz – Ensino. 2. Criptografia. 3. Computação gráfica. 4. Cadeias de Markov. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha Catalográfica elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Nayla Kedma de Carvalho Santos (Bibliotecária) CRB 3ª Região/1188

Jordan Gustavo da Silva graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela UFPI, concluiu curso de Mestrado PROFMAT/UESPI. É professor efetivo da rede pública federal no Estado do Maranhão

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha mãe, Maria da conceição, minha irmã, Janaína Maria, minha esposa, Kátia, e ao meu filho Gabriel.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a DEUS, por me dar uma família maravilhosa que sempre me incentivou.

À todos os meus familiares, em especial, à minha MÃE, Maria da Conceição, que sempre foi símbolo de dedicação e amor. Ela é a responsável por todas as conquistas que acontecem em minha vida.

À minha irmã, Janaína Maria, que, ao lado de minha mãe, foi a maior incentivadora para que eu seguisse nos estudos, em especial no curso de matemática.

À minha esposa, Kátia, que está sempre ao meu lado, incentivando-me a ser alguém melhor em todos os segmentos da vida, todos os dias.

Ao meu filho, Gabriel de Araújo e Silva, Por ser essa fonte de amor e inspiração que me dá forças pra querer ir sempre além.

Aos meus/minhas grandes amigos(as) de universidade e vida, Rui, Sandoel, Lucas, Kdu, Jerson, Atécio, Whanderson Bruno, Mariane, Antônio, Edilson, Gilson, Aline, Jadiel, Vitaliano, por todos os ensinamentos, incentivos, descomposturas e, principalmente, as cervejas durante todos esses anos.

Aos meus/minhas grandes amigos(as) que Buriticupu apresentou, Laércio, Maristhela, Dayvison e Dani. Vocês são fonte de inspiração e modelos de dedicação para mim.

Aos meus/minhas grandes amigos(as), Francisco Holanda, Thamires, Dheila, Robson, Samuel, Suiany, Joafson, Edvaldo, Amanda, Biel, Ademir e pintor por todas as belas histórias vividas, conselhos e conversas durante toda a vida.

Aos professores do PROFMAT/UESPI, por cada ensinamento, tanto matemático quanto pessoal. Em especial ao professor Afonso por toda paciência e dedicação à turma e por ser uma inspiração de como ser professor.

Ao meu orientador Arnaldo, que me direcionou com seus conhecimentos e sempre esteve disponível para me orientar.

À todos os amigos da turma do PROFMAT/UESPI.

RESUMO

Esta dissertação consiste de duas partes, ambas relacionadas ao estudo de matrizes e suas aplicações, que visam observar um conjunto de opções acessíveis aos estudantes da educação básica para que estes possam traçar uma relação entre o estudo de matrizes e sua utilização prática em situações reais, tornando-o, assim, aos olhos dos discentes, um tópico que produza significado e eficiência. A primeira parte compreende uma pesquisa com relação ao ensino de matemática, que visa observar a relevância da contextualização dos conteúdos para uma melhor relação no ensino-aprendizagem do aluno da educação básica e, ainda, um enfoque histórico sobre o surgimento do estudo de matrizes, de onde partiram os primeiros relatos e quais situações demandadas pela sociedade da época fizeram surgir um início dos estudos sobre este tópico. A segunda parte é dedicada ao estudo de métodos e técnicas destinados à propiciar uma contextualização do ensino de matrizes com o auxílio dos tópicos criptografia, manipulação de imagem por computação gráfica e cadeias de Markov. Por meio de técnicas de criptografia,um processo de codificação de mensagens as quais são transmitidas abertamente e que ainda assim somente o destinatário real poderá descobrir o seu real significado, realizadas através de operações de soma ou produto de matrizes; a manipulação de imagens por computação gráfica, por sua vez, é um processo observado no dia a dia de todos que possuem acesso a smartphones ou computadores e faz uso de manipulações algébricas matriciais, como produto de uma matriz por um escalar, produtos de matrizes, etc; e, por fim, as cadeias de Markov, sendo este um método utilizado para prever os resultados de um evento a partir do conhecimento de informações de alguns eventos anteriores, processo que se dá através do estudo de potência de matrizes. De uma maneira geral, a aplicação dos métodos destacados torna o conteúdo de matrizes mais acessível e mais próximo de situações reais e observáveis para alunos da educação básica, facilitando a interação entre teoria e prática e propiciando uma construção mais completa de suas habilidades.

Palavras-chave: Matriz; Criptografia; Computação gráfica; Cadeias de Markov

ABSTRACT

This dissertation consists of two parts, both related to the study of matrices and their applications, which aim to observe a set of options accessible to students of basic education so that they can trace a relationship between the study of matrices and their practical use in real situations, thus making it, in the eyes of the students, a topic that produces meaning and efficiency. The first part comprises a research related to the teaching of mathematics, which aims to observe the relevance of contextualizing the contents for a better relationship in the teaching of student learning in basic education and, also, a historical focus on the emergence of the study of matrices, of where the first reports started and what situations demanded by society at the time led to the beginning of studies on this topic. The second part is dedicated to the study of methods and techniques aimed at providing contextualization of matrix teaching with the help of the topics from cryptography, image manipulation by computer graphics and Markov chains. By means of encryption techniques, a process of encoding messages which are transmitted openly and which still only the real recipient will be able to discover its real meaning, carried out through sum or matrix product operations; the manipulation of images by computer graphics, in return, is a process observed in the daily lives of everyone who has access to smartphones or computers and makes use of matrix algebraic manipulations, as a matrix product by a scalar, matrix products, etc; and, finally, Markov chains, which is a method used to predict the results of an event from the knowledge of information from some previous events, a process that occurs through the study of matrix power. In general, the application of the highlighted methods makes the content of matrices more accessible and closer to real and observable situations for students of basic education, facilitating the interaction between theory and practice and providing a more complete construction of their skills.

Keywords: Matrix; cryptography;computer graphics; Markov chains

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

O ensino de matemática está sempre passando por renovação. Renovação esta que não está relacionada somente a conteúdos, mas sim aos objetivos e metodologias a serem abordados em cada novo conteúdo, nos diferentes níveis de ensino básico. A aprendizagem já não é observada como um simples processo de transmissão e recepção de informações, mas como uma construção de saberes, que se estimula com a investigação e observação dos alunos, traçando um paralelo entre teoria e realidade.

Ao discutir o papel da contextualização no ensino de matemática no processo de ensino-aprendizagem, é importante ressaltar a forma como esta se apresenta nas escolas. É imprescindível perceber que o aluno absorve mais o conteúdo quando ele pode traçar relações entre suas experiências com o material didático. Entretanto, na maioria das vezes, a escola tem dificuldade para ajustar o processo de ensino-aprendizagem, por priorizá-lo como uma mera forma de transmissão de conhecimentos em matemática, meros algoritmos isolados da realidade, deixando de possibilitar uma construção e desenvolvimento lógico no discente.

Se queremos uma educação inovadora, precisamos trabalhar a matemática dentro de um processo construtivo, no qual o aluno possa traçar um caminho por meios próprios, com tentativas, erros e orientação. Uma abordagem em que a matemática seja vista e relacionada ao mundo real, com aplicações em situações do cotidiano, não como algo abstrato e sem utilidade.

Mudar a forma como a matemática é vista pelo discente, como sendo algo acessível somente para alunos especiais, é uma tarefa à qual os professores da disciplina devem se dedicar. Mostrar a matemática com a sua relevância no desenvolvimento do aluno, na condição de um ser social, consoante previsão nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> [...] a matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (PCN, Brasil, 1998)

O docente de matemática não pode esquecer que esta disciplina, principalmente no ensino médio, tem um valor formativo essencial, ajudando a estruturar o pensamento, o raciocínio dedutivo, fundamental para a vida cotidiana em quase todas as atividades do ser humano.

A matemática, hoje, não pode mais ser vista como uma ciência abstrata, mas sim como uma área com um papel bem definido, de formação de pensamentos e aquisição de habilidades, propiciando ao aluno o desenvolvimento de competências, técnicas e a capacidade de resolver problemas, investigar, analisar e enfrentar novas situações e desafios, ou seja, ser capaz de ter uma visão ampla da realidade.

Existe, ainda, uma máxima dentro das escolas de que a matemática é uma disciplina feita somente para os alunos mais inteligentes e aqueles que não possuem bom desempenho na área acabam sofrendo, por não possuírem o mesmo ritmo de apropriação do conteúdo que os demais.

> [...]quando o aluno possui afinidade com a matemática e o seu conteúdo, pouco interfere na aprendizagem a metodologia, o material didático utilizado e a forma como o professor conduz a aula, porém, cada aluno reage diferentemente, e estes fatores tornam-se significativos para aqueles que possuem dificuldades em aprender. SOARES (2009 apud Abreu, Ferreira, 2014, p.4)

Em algumas escolas existe uma concordância quanto à forma de ensinar a matemática, que, no geral, compreende uma metodologia tradicional, pautada em aulas expositivas, baseadas apenas no uso do livro didático e do quadro, sem o auxílio de qualquer outro material didático. Os conteúdos, comumente, são desvinculados das situações cotidianas dos estudantes, gerando, assim, um distanciamento natural entre estes e o assunto a ser aprendido. Disso resultam dificuldades no aprendizado.

Neste sentido, o presente trabalho propõe uma nova abordagem para o ensino de matrizes no âmbito do ensino médio, de forma a proporcionar aos alunos a possibilidade de visualizar intervenções em situações práticas, a partir da aplicação do conteúdo de matrizes. Trata-se de uma abordagem que vai ao encontro dos preceitos que a Lei 9.394/1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN) idealiza para o ensino de matemática.

> [...] dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao ,conhecimento matemático na escola. (BRASIL, 2006, p. 83, grifo nosso).

De forma geral, o conteúdo de matrizes é tratado na sala de aula como um mero algoritmo de álgebra, suscetível de aplicações somente ao se estudar a matemática mais avançada. A abordagem que será apresentada faz-se necessária uma vez que exporá meios para que se possa trabalhar, no ensino médio, questões que permeiam a vida cotidiana dos alunos.

Para atingir o objetivo em questão, inicialmente apresentamos um breve histórico sobre as matrizes e, em seguida, abordaremos alguns pré-requisitos, como, por exemplo, conceitos básicos de criptografia, estabelecendo uma nova forma de enviar e receber mensagens para os discentes, de modo que poderão ocultar mensagens em textos e símbolos visíveis a qualquer pessoa, ao passo que somente o destinatário original poderá descobrir o que aquele texto ou símbolo significa, processo completamente subsidiado pelo conteúdo de matrizes. Após, será lançada uma proposta de aplicação de matrizes, ao se utilizar os conceitos das cadeias de Markov[1], que são aplicações de matrizes associadas ao estudo de probabilidades, por meio das quais se pode fazer previsão de acontecimentos

[1]Um processo aleatório que satisfaz a propriedade de Markov possui a seguinte característica interessante: pode-se fazer previsões em seu futuro com base somente em seu estado atual, independentemente do que aconteceu no passado até esse estado atual.

através do estudo de matrizes. Por fim, será apresentado um estudo sobre transformações afim, que trata sobre manipulação de imagens, como zoom, espelhamento, rotação, translação, utilizando somente operações com matrizes, em seguida as considerações finais, onde pudemos constatar que tais modelos de aplicação para o conteúdo de matrizes se fazem satisfatórios a atender à necessidade de contextualização do conteúdo de matrizes para o estudante da educação básica.

2 Abordagem histórica sobre matrizes

A história sobre o estudo de matrizes está diretamente ligada ao estudo de sistemas lineares, o qual teve o início associado às civilizações chinesas e mesopotâmicas. Seus primeiros relatos constam do império chinês, no período de 206 a.C – 221 d.C, denominado por Dinastia Han. Entretanto, com o passar dos séculos, muitos arquivos se perderam.

> Se a matemática chinesa tivesse tido ininterrupta continuidade de tradição, algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos poderiam ter modificado substancialmente o desenvolvimento da matemática, mas a cultura chinesa foi seriamente prejudicada por quebras abruptas. Em 213 a.C., por exemplo, o imperador da china mandou queimar livros. (BOYER, 1974, p.144-145)

Desse contexto resultou um atraso natural na estruturação dos estudos de sistemas lineares e matrizes, fosse pela destruição de arquivos determinada por governantes ou, ainda, como no caso dos babilônios, que perderam alguns de seus registros por fazerem suas escrituras em frágeis tabelas de argila, assadas ao fogo ou secadas ao sol.

> Só de um local, a área da antiga Nipur, temos umas 50.000 tabelas. As bibliotecas em Columbia, Pennsylvania e Yale, entre outras, têm coleções de tabelas antigas da Mesopotâmia, algumas delas matemáticas. (BOYER, 1974, p.19)

Ainda que esta forma de registrar a história fosse mais eficiente que os papiros dos egípcios, algumas tabelas acabavam por se quebrar, ou até mesmo não ter as suas leituras possíveis. Dentre os registros matemáticos chineses, destaca-se o livro Chui-Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática, escrito na dinastia HAN, o qual tratava de 246 problemas matemáticos, divididos em 9 capítulos, sendo eles:

Capítulo 1: Medidas de campos (Fang Thien).

Capítulo 2: Cereais (Su Mei).

Capítulo 3: Distribuição por proporções (Tshui Fen).

Capítulo 4: Quanto mede? (Shao Kuang).

Capítulo 5: Cálculos para construções (Shang Kung)

Capítulo 6: Impostos justos (Chung Shu).

Capítulo 7: Excesso e falta (Chun Shu).

Capítulo 8: Arranjos retangulares (Fang Cheng).

Capítulo 9: Triângulos retângulos (Gou Gu).

No oitavo capítulo, denominado por arranjos retangulares, eram tratados problemas envolvendo sistemas lineares. De acordo com PAQUES, ROVERAN, (2017, p.4), o método de solução dos sistemas lineares é equivalente ao da eliminação de Gauss. Além disso, fornece instrumentos para o cálculo com números positivos e negativos, bem como de problemas refinados, como sistemas lineares indeterminados possuindo cinco equações e seis incógnitas.

Ainda neste capítulo, surge o primeiro problema com formato matricial, envolvendo três tipos de milho, dos quais três feixes são do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro, contabilizando 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro, perfazendo um total de 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro, resultando em 26 medidas. Indagando-se: Quantas medidas de milho estão contidas em um pacote de cada tipo? Onde x representa o primeiro tipo de milho, y o segundo e z o terceiro tipo.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

O que pode ser abordado pela forma de tabelas, em colunas, assim dispostas:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 36 \end{matrix}$$

Já em 1545, Girolamo Cardano[2] desenvolveu um método para resolver sistemas lineares, denominado *regulamentação de modo*, assemelhado à regra de Cramer para

[2]Girolamo Cardano nasceu em 24 de setembro de 1501 em Pavia, Itália. Morreu no dia 21 de setembro de 1576, em Roma. Cardano foi um físico e matemático italiano, que se dedicou à Matemática, física, astronomia, filosofia, medicina e astrologia.

solução de sistemas 2×2 que conhecemos atualmente. Com o passar das décadas, os estudos sobre sistemas lineares avançaram e teorias mais aprofundadas, como o conceito de determinantes, foram desenvolvidas. De acordo com SANCHES, (2002):

> A ideia de determinante apareceu quase simultaneamente no Japão e Europa. Contudo, a primeira publicação foi de Seki, no Japão. Em 1683, Seki escreveu Methods of solving the dissimulated problem, obra que apresentou os métodos matriciais escritos com tabelas, que são descritos da maneira como os métodos chineses foram construídos, mesmo sem ter nenhuma palavra correspondente à determinante. Seki introduziu esse conceito e explicitou os métodos gerais para calculá-los, baseado em exemplos. Utilizando seus determinantes, Seki foi capaz de achar determinantes de matrizes 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 e os aplicou para resolver equações. (SANCHES, 2002. P.11)

Coincidentemente, a primeira publicação sobre o tema ocorreu na Europa, também no ano de 1683, em uma carta enviada por Leibniz ao marquês de L'Hôpital, na qual afirmava que uma boa notação para representação dos determinantes seria primordial para um bom desenvolvimento da teoria. Registros apontam que Leibiniz trabalhou em pelo menos 50 formas diferentes, procurando uma melhor notação para o avanço do estudo de determinantes.

O termo Matriz é historicamente recente, pois somente em 1858 Arthur Cayley, ao publicar o livro *Memoir on the Theory of Matrices*, que tratava de memórias sobre a teoria dos sistemas lineares, introduziu o termo "matriz"para um quadrado de números e observou que eles poderiam ser adicionados e multiplicados de modo a formar o que hoje chamamos de álgebra associativa linear.

3 Pré-requisitos

Os conceitos apresentados neste capítulo serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Sendo utilizados como referências os trabalhos: IEZZI, (2016); LIMA, (2006) e IEZZI, HAZZAN, (1977).

3.1 Definição de matriz.

Definiremos que uma matriz $m \times n$ é uma lista de números reais a_{ij}, com índices duplos, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A matriz A é representada por um quadro numérico com m linhas e n colunas, no qual o elemento a_{ij} situa-se no cruzamento de i-ésima linha com a j-ésima coluna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A lista ordenada $(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ chama-se i-ésima linha ou i-ésimo vetor-linha da matriz A enquanto $(a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})$ é a j-ésima coluna ou o j-ésimo vetor coluna de A.

Diz-se que uma matriz A é quadrada quando tem o mesmo número de linhas e colunas.

Diremos que a matriz A é identicamente nula se todos os seus elementos forem iguais a zero. Neste caso temos que $A = 0$, corresponde $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

A matriz transposta da matriz A é a matriz cuja i-ésima coluna é a i-ésima linha da matriz A, que será denotada por A^T. Ou seja, se

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

3.2 Soma de matriz e produto de matriz por escalar

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes de mesma ordem, a soma de A com B resulta numa matriz $C = [c_{ij}]$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Além disso, definimos a multiplicação de um escalar λ por uma matriz $A = [a_{ij}]$ como sendo a matriz $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$.

3.3 Produto de matriz

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes do tipo $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente. O produto dessas matrizes é a matriz $AB = [c_{ij}]$, de tipo $m \times p$, cujo ij-ésimo elemento é dado por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Quando analisamos matrizes que têm um "número pequeno"de colunas, digamos menor ou igual a 4, escrevemos a i-ésima linha na forma (a_i, b_i, c_i, d_i) em vez de $(a_{i1}, b_{i2}, c_{i3}, d_{i4})$. Com esta notação, o produto de duas matrizes 3×3,

$$\text{A}= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \text{ e B} = \begin{bmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{bmatrix}$$

será a matriz abaixo:

$$\text{AB} = \begin{bmatrix} a_1r_1 + b_1r_2 + c_1r_3 & a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 & a_1t_1 + b_1t_2 + c_1t_3 \\ a_2r_1 + b_2r_2 + c_2r_3 & a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 & a_2t_1 + b_2t_2 + c_2t_3 \\ a_3r_1 + b_3r_2 + c_3r_3 & a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 & a_3t_1 + b_3t_2 + c_3t_3 \end{bmatrix}.$$

A matriz identidade $n \times n$ é a matriz $I_n = [\delta_{ij}]$ cujos elementos são $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$. Deste modo,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: Seja A uma matriz quadrada, denomina-se inversa da matriz A, a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$

3.4 Determinantes

Seja $A = [a_{ij}]$. Iremos, neste momento, adotar uma nova notação para fins de facilitar a definição formal do conceito de determinantes, neste sentido tome $v_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \ldots, v_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn})$ os vetores linha que compõem a matriz A. Deste modo podemos representar esta matriz por $A = [v_1 \ v_2 \cdots v_n]$ em que v_1, v_2, $\ldots$, v_n representam ordenadamente as linhas da matriz A. Daí podemos definir determinante de uma matriz como a função a seguir.

Definição: O determinante de uma matriz $A = [v_1 \ v_2 \ldots v_n]$, quadrada de ordem n, com $n \in \mathbb{N}$, em que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são os vetores linha de A, é uma função $det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n \ vezes} \rightarrow \mathbb{R}$, que goze das seguintes propriedades:

1) $det[I_n] = 1$

2) $det[v_1 \ldots v_l \ v_k \ldots v_n] = -det[v_1 \ldots v_k \ v_l \ldots v_n]$, com $k, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$

3) $det[v_1 \ldots \lambda \cdot v_k \ldots v_n] = \lambda \cdot det[v_1 \ldots v_k \ldots v_n]$, com $\lambda \in \mathbb{R}$

4) $det[v_1 \ldots (v_k + u) \ldots v_n] = det[v_1 \ldots v_k \ldots v_n] + det[v_1 \ldots u \ldots v_n]$, onde $u \in \mathbb{R}^n$ e $k \in \{1, 2, \ldots n\}$

Deste modo, podemos notar que para uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

terá seu determinante do seguinte modo:
Sejam $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ e u e v os vetores linhas desta matriz tais que $u = a_1e_1 + b_1e_2 = (a_1, b_1)$ e $v = a_2e_1 + b_2e_2 = (a_2, b_2)$. Observando ainda que $det[e_1, e_1] = x$ e $det[e_1, e_1] = -x$ deste modo $x = o$. Assim,

$$\begin{aligned}
det[u,v] &= det[a_1e_1 + b_1e_2, a_2e_1 + b_2e_2] \\
&= a_1 \cdot det[e_1, a_2e_1 + b_2e_2] + b_1 \cdot det[e_2, a_2e_1 + b_2e_2] \\
&= a_1 \cdot a_2 \cdot det[e_1, e_1] + a_1 \cdot b_2 \cdot det[e_1, e_2] + a_2 \cdot b_1 \cdot det[e_2, e_1] + b_1 \cdot b_2 \cdot det[e_2, e_2] \\
&= [a_1b_2 - a_2b_1] \cdot det[e_1, e_2] \\
&= [a_1b_2 - a_2b_1]
\end{aligned}$$

De modo análogo, temos que o determinante de uma matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

será obtido ao observar os vetores linha u, v e w da matriz M, tais que $u = a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3$, $v = a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3$ e $w = a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3$ em que $e_1 = (1,0,0), e_2(0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ Daí,

$$\begin{aligned}
det[u,v,w] &= det[a_1e_1 + b_1e_2 + c_1e_3, a_2e_1 + b_2e_2 + c_2e_3, a_3e_1 + b_3e_2 + c_3e_3] \\
&= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \\
&= (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1)
\end{aligned}$$

3.5 Probabilidade

Experimento aleatório: é aquele que, repetido em idênticas condições, produz resultados diferentes. Em geral, é possível descrever um conjunto com todos os possíveis resultados.

Espaço amostral: é o conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Evento: é todo subconjunto de um espaço amostral referente a um experimento aleatório dado.

Definição de probabilidade: Dado um espaço amostral finito $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. A cada evento $\{a_i\}$, em que $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, associa-se um número real $P(\{a_i\})$, chamado de probabilidade do evento $\{a_i\}$, que satisfaça as condições:

i. $0 \leq P(\{a_i\}) \leq 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

ii. $\sum_{i=1}^{k} P(\{a_i\}) = P(\{a_1\}) + P(\{a_2\}) + \cdots + P(\{a_k\}) = 1$

Seja A um evento qualquer de Ω, defini-se a probabilidade do evento A, indicada por $P(A)$, na forma:

a. Se $A = \emptyset$, $P(A) = 0$

b. Se $A \neq \emptyset$, $P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\})$.

4 Tópicos para contextualização no ensino de matrizes

Nesta seção trataremos de tópicos que podem trazer uma relação de significado para o discente, por entender que os temas trazem casos que instigam a sua imaginação na busca de resolução de problemas, cujas soluções perpassam pelo conteúdo de matrizes, proporcionando, ainda, que este possa vir a ser trabalhado abordando as suas potencialidades.

> O estudo de matrizes é desmotivado, com definições arbitrárias e afirmações peremptórias não justificadas. Determinantes são incorretamente definidos e suas propriedades fundamentais não são devidamente destacadas. Dessas propriedades elementares(segundo as quais o determinante é uma função multilinear alternada das linhas ou colunas da matriz), resultaria facilmente que o determinante do produto de duas matrizes é o produto de seus determinantes.(LIMA, Elon Lages,p.49)

Com base nestas observações realizadas no livro exame de texto, faz-se cada vez mais necessária a boa definição para os tópicos de matrizes e determinantes porque apenas deste modo pode-se abranger as suas possibilidades de aplicação.

4.1 Aplicação de matrizes para o ensino médio utilizando criptografia

Para a elaboração desta seção utilizaremos como referência HEFEZ, Abramo (2016) e COUTINHO, S.C(2015)

4.1.1 Origens da criptografia

A palavra criptografia tem suas origens do grego, onde kriptos significa oculto. Deste modo, criptografia significa "escrita oculta". Assim, a criptografia estuda meios de estabelecer uma comunicação em que, mesmo pública, uma mensagem só possa ser compreendida pelo seu destinatário final.
Um dos códigos mais simples, que consiste em substituir cada letra do alfabeto pela sua sucessora. Por exemplo, a mensagem EU ESTUDO MATEMÁTICA seria codificada como:

FV FTUEP NBUFNBUJDO.

Figura 1: Júlio César (100-44 a.C)

Um dos métodos mais famosos de criptografia da antiguidade foi utilizado pelo ditador Júlio César [3], na Roma antiga, que para se comunicar com suas legiões espalhadas pela Europa desenvolveu um sistema que consiste em substituir cada letra do alfabeto na mensagem original por uma outra letra, do mesmo alfabeto, pré-determinada. Existem relatos que Júlio César utilizava-se da seguinte tabela para realizar a codificação de suas mensagens.

[3] Caio Júlio César foi um patrício, líder militar e político romano. Desempenhou um papel crítico na transformação da República Romana no Império Romano.

Tabela 1: Cifra de César

Alfabeto	Cifra	Alfabeto	Cifra
A	d	N	q
B	e	O	r
C	f	P	s
D	g	Q	t
E	h	R	u
F	i	S	v
G	j	T	w
H	k	U	x
I	l	V	y
J	m	W	z
K	n	X	a
L	o	Y	b
M	p	Z	c

Porém, códigos como o de Júlio César, em que cada letra é substituída sistematicamente por outra letra ou um símbolo, são fáceis de decifrar, pois em toda língua existe um padrão na frequência de repetição de cada letra. Assim, em textos mais longos fica fácil definir qual letra é representada em cada símbolo. Esse tipo de criptografia é chamada de substituição simples. O código de Júlio César possui ao menos 25 variantes, que consistem em iniciar a segunda linha por uma outra letra que não seja D e nem a letra A.

Em particular, na língua portuguesa, tem-se as seguintes frequências das letras do alfabeto[4]:

[4]http://www.numaboa.com.br/criptografia/criptoanalise/310-frequencia-portugues

Tabela 2: Frequência de letras do alfabeto na língua portuguesa

A	14,63%	H	1,28%	O	10,73%	V	1,67%
B	1,4%	I	6,18%	P	2,52%	W	0,01%
C	3,88%	J	0,40%	Q	1,20%	X	0,21%
D	4,99%	K	0,02%	R	6,53%	Y	0,01%
E	12,57$	L	2,78%	S	7,81%	Z	0,47%
F	1,02%	M	4,74%	T	4,34%		
G	1,3%	N	5,5%	U	4,63%		

A fragilidade deste método custou literalmente a cabeça da rainha da Escócia, Maria Stuart(1542-1587), que tramava o assassinato de sua prima, a rainha Elizabeth I da Inglaterra, intento decifrado através da observação de mensagens cifradas, onde letras e palavras muito recorrentes eram substituídas por outros símbolos. A interceptação das mensagens e a análise de frequência permitiu a quebra do seu sigilo e forneceu provas contra Maria Stuart, condenada à morte por decapitação.

4.1.2 Aplicações de matrizes envolvendo criptografia

O tema criptografia, para um olhar desatento, pode parecer obsoleto, pois trata de enviar e receber mensagens ocultas em textos visíveis, entretanto é cada vez mais atual e seu estudo é cada vez mais necessário pois na era das mídias sociais, transações eletrônicas, importante tentar proteger os dados dos usuários de plataformas digitais, como por exemplo em compras com cartão de crédito pela internet, transferências bancárias por aplicativos, etc.

Proteger essas informações que se passam cada vez mais pela internet é um trabalho robusto para a criptografia. Nesta seção iremos dar exemplos de como a utilização de matrizes pode ser um instrumento para tornar mais difícil a quebra de segredo da mensagem criptografada.

4.1.3 Cifras de Hill

De acordo com (Zatti, 2010), as cifras de Hill são um sistema poligráfico em que um texto é dividido em um conjunto n letras, em que cada um será substituído por n letras cifradas. Assim sendo, as cifras de Hill são baseadas em transformações matriciais.

No caso mais simples de cifra de Hill, o texto será separado em grupos de duas letras, assim o procedimento a ser seguido é o seguinte: primeiro o texto da mensagem será substituído por um conjunto de símbolos numéricos e inseridos em uma matriz, daí então multiplique-a pela matriz de codificação, sendo esta uma matriz invertível que satisfaça os critérios para multiplicação entre matrizes com a matriz gerada pela codificação da mensagem. Por fim, converta a matriz da mensagem em uma nova matriz de valores numéricos que contém a mensagem criptografada.

A ideia básica da criptografia é que as informações podem ser codificadas usando um esquema de criptografia e decodificadas por qualquer pessoa que o conheça. Existem muitos esquemas de criptografia que variam de muito simples a muito complexos. A maioria deles é de natureza matemática. O codificador é uma matriz e o decodificador é sua inversa. Seja A a matriz de codificação, B a matriz da mensagem e C será a matriz criptografada (os tamanhos de A e B terão que ser compatíveis a multiplicação entre elas e determinarão o tamanho de C). Em seguida, matematicamente, a operação é $A \cdot B = C$. Alguém tem C e conhece A e deseja recuperar B, a mensagem original. Isso seria o mesmo que resolver a equação da matriz para B. Multiplicando ambos os lados da equação à esquerda por A^{-1}, temos $B = A^{-1} \cdot C$.

Para fins de codificações de mensagens, adotaremos a seguinte tabela de codificação:

Estes símbolos adicionais serão utilizados para tornar mais fácil a interpretação das

Tabela 3: Cifra de codificação de mensagens

Alfabeto	Cifra	Alfabeto	Cifra
A	1	N	14
B	2	O	15
C	3	P	16
D	4	Q	17
E	5	R	18
F	6	S	19
G	7	T	20
H	8	U	21
I	9	V	22
J	10	W	23
K	11	X	24
L	12	Y	25
M	13	Z	26
Simbolo	**Cifra**	**Simbolo**	**Cifra**
.	27	#	29
!	28	@	30

mensagens, onde os símbolos # e @ serão utilizados para representar espaços em branco entre cada palavra ou no fim da frase.

Com base nessas informações, podemos agora realizar operações reais de criptografia utilizando apenas os conhecimentos prévios de matrizes. Assim como nos exemplos a seguir:

Exemplo 1. Codifique a mensagem EU ESTUDO MATEMÁTICA. utilizando a matriz de codificação

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução 1. Utilizando a Tabela 3, a frase ficaria cifrada na forma $5-21-29$ $5-19-20-21-4-15-29-13-1-20-5-13-1-20-9-3-1-27$.

Pela cifra de Hill devemos tomar agrupamento de n letras de forma a tornar possível a multiplicação entre a matriz codificadora e a matriz que contém a mensagem. Deste modo, como a matriz codificadora é de ordem 3×3, iremos tomar grupamentos de três símbolos. assim teremos:

$$\begin{matrix} 5 & 5 & 21 & 29 & 20 & 1 & 3 \\ 21 & 19 & 4 & 13 & 5 & 20 & 1 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{matrix}$$

Feito isto, iremos montar uma matriz com estes grupamentos e realizaremos o procedimento de codificação desta matriz ao multiplicá-la pela matriz codificadora predefinida.

Seja

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 21 & 29 & 20 & 1 & 3 \\ 21 & 19 & 4 & 13 & 5 & 20 & 1 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

a matriz que contém a mensagem e A a matriz codificadora. Daí

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 & 21 & 29 & 20 & 1 & 3 \\ 21 & 19 & 4 & 13 & 5 & 20 & 1 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot5+2\cdot21+3\cdot29 & 1\cdot5+2\cdot19+3\cdot20 & 74 & 58 & 69 & 68 & 86 \\ 0\cdot5+1\cdot21+4\cdot29 & 0\cdot5+1\cdot19+4\cdot20 & 64 & 17 & 57 & 56 & 109 \\ 0\cdot5+0\cdot21+1\cdot29 & 0\cdot5+0\cdot19+1\cdot20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 134 & 103 & 74 & 58 & 69 & 68 & 86 \\ 137 & 99 & 64 & 17 & 57 & 56 & 109 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

Sendo esta a matriz codificada, podemos aí perceber que a maior parte dos números não está na tabela de símbolos predefinidos. Neste caso iremos utilizar aritmética dos restos [5], $mod\, 30$, pois todos os seus restos serão menores que 30, para definir quais os seus equivalentes dentro da tabela de símbolos. Deste modo, temos:

$$\begin{gathered} 134 \equiv 14\ (mod\, 30) \\ 137 \equiv 17\ (mod\, 30) \\ 103 \equiv 13\ (mod\, 30) \\ 99 \equiv 9\ (mod\, 30) \\ 74 \equiv 14\ (mod\, 30) \\ 64 \equiv 4\ (mod\, 30) \\ 58 \equiv 28\ (mod\, 30) \\ 69 \equiv 9\ (mod\, 30) \\ 57 \equiv 27\ (mod\, 30) \\ 68 \equiv 8\ (mod\, 30) \\ 56 \equiv 26\ (mod\, 30) \\ 86 \equiv 26\ (mod\, 30) \\ 109 \equiv 19\ (mod\, 30) \end{gathered}$$

Assim podemos notar que a matriz codificada será equivalente a

$$\begin{bmatrix} 14 & 13 & 14 & 28 & 9 & 8 & 26 \\ 17 & 9 & 4 & 17 & 27 & 26 & 19 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

[5] Seja m um número natural diferente de zero. Diremos que dois números naturais a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Assim $a \equiv b\ (mod\, m)$

Por consequência, a mensagem criptografada seria escrita da seguinte maneira:

NQ#MITNDO!QAI.MHZIZS.

Ao receber a mensagem codificada, o destinatário, conhecendo a chave de decodificação, pode obter a mensagem original simplesmente remontando a matriz, já conhecendo a quantidade de letras que compõe cada grupamento, e multiplicando-a pela inversa da matriz codificadora. Assim, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é a matriz codificadora da mensagem, então

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

será a matriz que trará a mensagem original de volta.

Fazendo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 14 & 13 & 14 & 28 & 9 & 8 & 26 \\ 17 & 9 & 4 & 17 & 27 & 26 & 19 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 21 & 29 & 20 & 1 & 3 \\ 21 & 19 & 4 & 13 & 5 & 20 & 1 \\ 29 & 20 & 15 & 1 & 13 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

.

Assim, trazendo a mensagem original de volta.

Exemplo 2. Harry Potter está com problemas. Ele está sendo perseguido por Lord Voldemort e atualmente escondido em um local secreto para escapar de ser capturado por ele. Ele precisa enviar mensagens para seus dois bons amigos, Ron e Hermione, para contar sobre a situação dele e paradeiro. Claro que ele tem que mandar as mensagens em código, apenas no caso de serem interceptados e achados por Lord Voldemort pelo caminho. Então ele compõe sua primeira mensagem, "Please save me!", substituindo cada letra na mensagem por um número, de acordo com o código da tabela abaixo.

Tabela 4: Cifra de codificação do Harry Potter

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?	.
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Sabendo que a matriz de codificação de mensagem usada por Harry e seus amigos é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

deste modo, determine a maneira como a mensagem codificada ficou escrita e, em seguida, decodifique a mensagem.

Solução 2. O primeiro passo é substituir as letras da frase pelos seus respectivos substitutos na tabela utilizada por Harry e seus amigos, assim a mensagem ficaria na forma:

P	L	E	A	S	E		S	A	V	E		M	E	!
16	12	5	1	19	5	0	19	1	22	5	0	13	5	27

Como a matriz de codificação é de ordem 3×3, temos que separar os símbolos em grupos de três, do seguinte modo:

$$\begin{matrix} 16 & 1 & 0 & 22 & 13 \\ 12 & 19 & 19 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 27 \end{matrix}$$

Então, basta realizar o produto da matriz que contém a mensagem pela matriz codificadora:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 1 & 0 & 22 & 13 \\ 12 & 19 & 19 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 215 & 6 & 1 & 22 & 40 \\ -4 & 18 & 19 & -17 & -8 \\ 22 & 29 & 21 & 5 & 59 \end{bmatrix}$$

Utilizando congruência módulo 30, teremos:

$$\begin{bmatrix} 21 \\ -4 \\ 22 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 21 \\ 26 \\ 22 \end{bmatrix} (mod\, 30)$$

$$\begin{bmatrix} 22 \\ -17 \\ 5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 22 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} (mod\, 30)$$

$$\begin{bmatrix} 40 \\ -8 \\ 59 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 10 \\ 22 \\ 29 \end{bmatrix} (mod\, 30)$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} 21 & 6 & 1 & 22 & 40 \\ -4 & 18 & 19 & -17 & -8 \\ 22 & 29 & 21 & 5 & 59 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 21 & 6 & 1 & 22 & 10 \\ 26 & 18 & 19 & 13 & 22 \\ 22 & 29 & 21 & 5 & 29 \end{bmatrix} (mod\, 30)$$

Portanto, a mensagem ficaria codificada da seguinte maneira:

P	L	E	A	S	E		S	A	V	E		M	E	!
U	Z	V	F	R	.	A	S	U	V	M	E	J	V	.

Deste modo, a mensagem recebida por Ron e Hermione é **UZVFR.ASUVMEJV.** e, como estes conhecem a matriz de codificação da mensagem, podem determinar a sua inversa. Ou seja, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então sua inversa será

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para trazer a mensagem original de volta basta levar a mensagem codificada para a forma de símbolos e, em seguida, para forma matricial e multiplicá-la pela inversa da matriz codificadora. Assim:

U	Z	V	F	R	.	A	S	U	V	M	E	J	V	.
21	26	22	6	18	29	1	19	21	22	13	5	10	22	29

Daí, observe que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 6 & 1 & 22 & 10 \\ 26 & 18 & 19 & 13 & 22 \\ 22 & 29 & 21 & 5 & 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 46 & 1 & 0 & 22 & 13 \\ 72 & 19 & 19 & 5 & 5 \\ -25 & 5 & 1 & 0 & 27 \end{bmatrix}.$$

Deste ponto, voltaremos a utilizar congruência módulo 30 para poder transformar os símbolos que não são representados na tabala de substituição. Portanto:

$$\begin{bmatrix} 46 \\ 72 \\ -25 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 26 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix} (mod\, 30)$$

$$\begin{bmatrix} 52 \\ 65 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 22 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} (mod\, 30)$$

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 35 \\ -3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 27 \end{bmatrix} (mod\, 30) \; .$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} 46 & 1 & 0 & 52 & 13 \\ 72 & 19 & 19 & 65 & 35 \\ -25 & 5 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 16 & 1 & 0 & 22 & 13 \\ 12 & 19 & 19 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 27 \end{bmatrix} (mod\, 30).$$

E assim podemos decodificar a mensagem

16	12	5	1	19	5	0	19	1	22	5	0	13	5	27
P	L	E	A	S	E		S	A	V	E		M	E	!

4.2 Utilização de matrizes na computação gráfica

Nesta seção abordaremos o tópico de computação gráfica, com o objetivo de materializar a utilização de matrizes em manipulação de imagens. Para isso utilizaremos como referência bibliográfica BATTAIOLA, (2019); IEZZI, (2016).

4.2.1 Origens da computação gráfica

A computação gráfica pode ser observada como um conjunto de algoritmos e técnicas para a criação, manipulação e tratamento de imagens. Estes processos se dão em computadores e periféricos.

De acordo com BATTAIOLA,(2019, p.4), estes recursos possuem grande valia para o desenvolvimento de várias ciências, como matemática, física, medicina, psicologia, engenharia, artes, etc. O desenvolvimento da computação gráfica e dessas ciências acontece de maneira mútua, uma dá subsídios à outra para que possam se desenvolver cada vez mais. A matemática, por exemplo, se faz presente no desenvolvimento de todos os estudos de computação gráfica, uma vez que os conceitos de álgebra linear e trigonometria são utilizados de forma massiva para que a própria computação gráfica venha a existir e, em contrapartida, a computação gráfica dá suporte à matemática ao permitir o entendimento do comportamento de funções matemáticas mais complexas. Na próxima subseção trataremos do conceito de transformação afim e nas subseções seguintes discorreremos sobre as principais transformações afim, a saber: translação, escalamento, rotação e espelhamento.

4.2.2 Transformações afim

Seja o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, será denominada transformação afim em $\mathbb{R}^3$ uma transformação de coordenadas da forma $\overrightarrow{v'} = A \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{b}$ em que, as coordenadas (x', y', z') do vetor $\overrightarrow{v'}$ são funções lineares das coordenadas (x, y, z) do vetor $\overrightarrow{v}$, onde os coeficientes a_{ij} e b_i serão constantes determinadas pelo tipo de transformação a ser realizada, desta forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

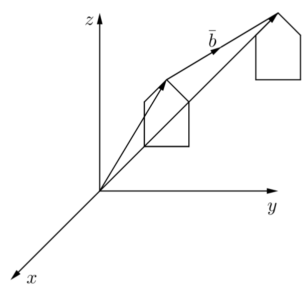
As transformações afim têm a função de modificar a posição de pontos ou objetos no espaço, esse tipo de transformação tem como característica geral transformar linhas paralelas em linhas paralelas e mapear finitos pontos. Estes processos definem a geometria afim, que estuda os conceitos de razões e proporções entre entes geométricos. Conceitos importantes como paralelismo e seus teoremas são tratados de forma igual tanto na geometria afim como na geometria Euclidiana.

Para fins de contextualização do conteúdo de matrizes no ensino médio, iremos adotar manipulação de imagens representadas por matrizes, em que será possível mostrar ao discente como ele poderá alterar esta imagem fazendo simples manipulações algébricas. Para isto adotaremos as seguintes transformações: Rotação, translação, escalamento e espelhamento.

4.2.3 Translação

A translação é a alteração na posição em todos os pontos da figura, de maneira a possibilitar a sua movimentação no espaço. Algebricamente a translação corresponde à soma de um vetor de deslocamento ao vetor que define os pontos que se deseja deslocar. Deste modo, em (4.1) o vetor b_i seria o vetor de deslocamento da imagem.

Figura 2: Translação de imagem



4.2.4 Escalamento

A mudança de escala de uma figura, algebricamente corresponde a multiplicar as coordenadas de um ponto ou de todos os pontos desta figura com o objetivo de aumentar, diminuir ou distorcer esta imagem. Quando somente a operação de escalamento é realizada, a matriz A da equação (4.1) é substituída pela matriz,

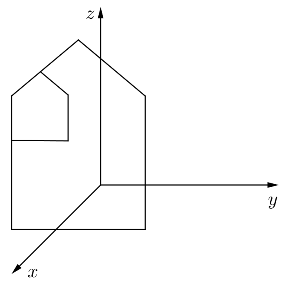
$$E = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix},$$

onde e_x, e_y, e_z são os fatores escaladores das coordenadas, que determinam a proporção de distorção a ser realizada na imagem primária, x, y e z, respectivamente. Deste modo, podemos perceber que o vetor $\overrightarrow{v}$ ficará descrito da forma:

$$\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x x \\ e_y y \\ e_z z \end{bmatrix}$$

Podemos observar este tipo de operação na seguinte imagem:

Figura 3: Escalamento de uma imagem

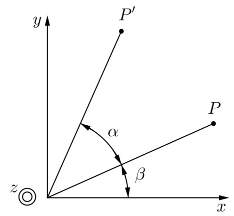


4.2.5 Rotação

A rotação é o giro da figura em determinado ângulo, com relação a um ponto de referência, sem a alteração da distância entre eles. Normalmente esta operação é aplicada sobre todos os pontos da figura, fazendo assim que ela seja rotacionada. Vários aplicativos possuem esta funcionalidade, sendo a maioria deles aplicando rotações de 90 e 180 graus.

Algebricamente o cálculo de rotação, em relação a um dos eixos coordenados, de uma imagem no espaço se dará considerando apenas duas coordenadas, por exemplo **x** e **y**. Assim um ponto **P** de coordenadas (x, y) será rotacionado em torno do eixo **OZ** até uma posição **P'**(x', y').

Figura 4: Rotação de um ponto em torno de um eixo



Supondo que a distância do ponto **P** à origem seja D, tem-se:

$$x = D \cdot cos(\beta) \tag{4.2}$$

$$y = D \cdot sen(\beta) \tag{4.3}$$

$$x' = D \cdot cos(\alpha + \beta) \tag{4.4}$$

$$y' = D \cdot sen(\alpha + \beta) \tag{4.5}$$

Da trigonometria, temos:

$$cos(a + b) = cos(b) \cdot cos(a) - sen(b) \cdot sen(a) \tag{4.6}$$

$$sen(a + b) = cos(b) \cdot sen(a) + cos(a) \cdot sen(b) \tag{4.7}$$

Usando as equações (4.2), (4.3), (4.6) e (4.7) nas equações (4.4) e (4.5) temos:

$$x' = xcos(\alpha) - ysen(\alpha) \tag{4.8}$$

$$y' = xsen(\alpha) + ycos(\alpha) \tag{4.9}$$

Em forma matricial as equações (4.8) e (4.9) ficam:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

Podemos perceber a partir destas expressões que o cálculo para o espaço tridimensional da rotação de um ponto **A** para um ponto **A'**, sendo o plano de rotação perpendicular ao eixo x, y ou z, pode ser dado por uma das seguintes expressões:

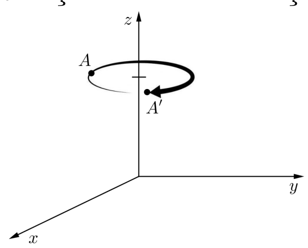
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{(Rotação em torno de z)} \tag{4.11}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & 0 & sen(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{(Rotação em torno de y)} \tag{4.12}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sen(\alpha) \\ 0 & sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{(Rotação em torno de x)} \tag{4.13}$$

Deste modo, pode-se observar a rotação deste ponto em torno do eixo z do seguinte modo:

Figura 5: Rotação de A em relação ao eixo z

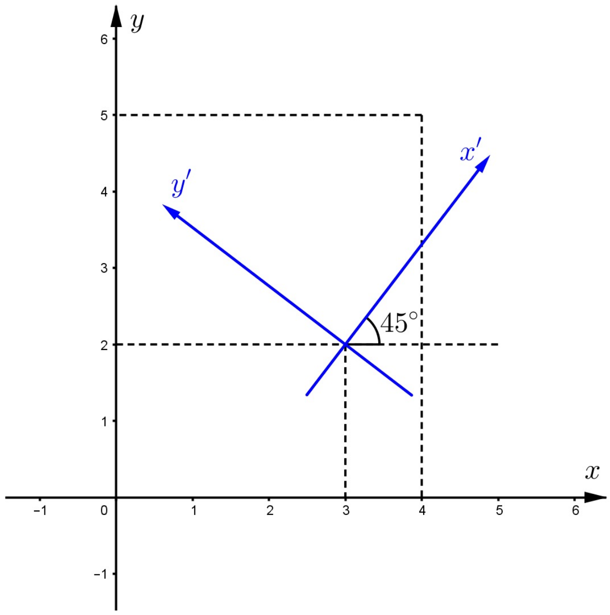


4.2.6 Espelhamento

O espelhamento é uma operação bastante usual em aplicativos de tratamento de imagem, que consiste em rotacionar uma imagem em torno de um eixo de maneira que todos os pontos da imagem original e na imagem espelhada mantenham uma mesma distância em relação ao eixo de referência, para o caso bidimensional, ou a um plano de referência para o caso tridimensional. Para ambos os casos o ângulo de rotação será sempre de 180 graus.

Exemplo 3. Dado que a origem do sistema de eixos $x' \times y'$ como na Figura 6 , tem coordenadas $(3, 2)$ no sistema $x \times y$, calcule a matriz de transformação de $x \times y$ para $x' \times y'$ e as coordenadas finais dos pontos $P_1 = (4, 5)$ e $P_2 = (2, 2)$ no sistema destino P'_1 e P'_2.

Figura 6: Ilustração do exemplo



Solução 3. Primeiro resolveremos a translação.

$$(x', y') = (x + 3, y + 2)$$
$$\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y + 2 \end{cases}$$

Note que podemos olhar apenas por:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos T a matriz de translação. Para rotacioná-la em 45 graus, basta usar a matriz de rotação:

$$x' = xcos(\alpha) - ycos(\alpha)$$
$$y' = xsen(\alpha) + ycos(\alpha)$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Acima, ao escolher um ponto $(x, y) \xrightarrow{T} (\tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{R} (x', y')$

Logo:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deste modo, P_1' será:

$$P_1' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_1' = (0, 7\sqrt{2})$$

E ainda, P_2' será:

$$P_2' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P_2' = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2})$$

Exemplo 4. Determine a matriz de rotação em torno de um eixo arbitrário em 3D dada por $\overline{P_1P_2}$.

(a) $P_1 = (2, 2, 2)$ e $P_2 = (6, 6, 6)$

(b) $P_1 = (3, 3, 1)$ e $P_2 = (6, 8, 6)$

Solução 4. Para resolvermos este problema iremos transladar $\overline{P_1P_2}$, de forma que o eixo de rotação passe pela origem do sistema de coordenadas; rotacionar $\overline{P_1P_2}$ para que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenados; realizar a rotação sobre o eixo de coordenadas escolhido; aplicar a rotação inversa para trazer o eixo de rotação para a sua orientação original e, por fim, aplicar a translação inversa para trazer o eixo de rotação para a sua posição espacial original. Deste modo, resolver este problema equivale a encontrar o produto dado por:

$$R(\theta) = T^{-1} \cdot R_x^{-1}(\alpha) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_z^{-1}(\theta) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \cdot T$$

(a) Sejam $P_1 = (2, 2, 2)$ e $P_2 = (6, 6, 6)$

Iniciamos pela matriz T, que pode ser dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora temos que rotacionar o vetor $(4, 4, 4)$ em X de modo que ele passe a pertencer ao plano YZ. Para facilitar vamos normalizar [6] $V = (4, 4, 4)$, $u = \frac{V}{||V||}$. Assim $u = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Vamos rotacionar α graus em X, de modo que $u' = \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Assim temos:

[6] Norma de um vetor é igual ao seu módulo, ou seja, igual ao comprimento do vetor.

$$cos(\alpha) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen(\alpha) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto,

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é encontrar o ângulo β que rotacione u' em torno de Y, encontramos u'' sobre o eixo Z. Para isso:

$$cos(\beta) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$
$$sen(\beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo,

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora rotacionamos em Z, que é:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar as inversas das rotações basta fazer a transposta. Assim:

$$R_y^{-1}(\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R_x^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$R(\theta) = T^{-1} \cdot R_x^{-1}(\alpha) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_z(\theta) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \cdot T.$$

(b) $P_1 = (3, 3, 1)$ e $P_2 = (6, 8, 6)$

Seguindo analogamente ao exercício anterior, temos:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor $V = (3, 5, 5)$, $u = \dfrac{V}{||V||} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{59}}, \dfrac{5}{\sqrt{59}}, \dfrac{5}{\sqrt{59}}\right)$.

Lembre que:

$$\begin{cases} a = \dfrac{3}{\sqrt{59}} \\ b = \dfrac{5}{\sqrt{59}} \\ c = \dfrac{5}{\sqrt{59}} \\ d = \sqrt{b^2 + c^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} cos(\alpha) = \dfrac{c}{d} = \dfrac{\dfrac{5}{\sqrt{59}}}{\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(\alpha) = \dfrac{b}{d} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Daí,

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_x^{-1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontramos β, usando:

$$cos(\beta) = d = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}}$$

$$sen(\beta) = -a = -\frac{3}{\sqrt{59}}$$

Logo,

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}} & 0 & -\dfrac{3}{\sqrt{59}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{3}{\sqrt{59}} & 0 & \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } R_y^{-1}(\beta) = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}} & 0 & \dfrac{3}{\sqrt{59}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{3}{\sqrt{59}} & 0 & \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, basta usar $R_z(\theta)$ análoga ao item (a) e fazer.

$$R(\theta) = T^{-1} \cdot R_x^{-1}(\alpha) \cdot R_y^{-1}(\beta) \cdot R_z(\theta) \cdot R_y(\beta) \cdot R_x(\alpha) \cdot T$$

4.3 Aplicações de matrizes utilizando Cadeias de Markov

Nesta sessão verificaremos as possibilidades de contextualização do conteúdo de matrizes ao utilizar as propriedades de potências de matrizes em conjunto com o estudo de probabilidades, utilizando como referência FIGUEIREDO,(2010); MAGELA,(2015); SATO(2010).

4.3.1 Cadeias de Markov

Se soubermos a probabilidade de um filho, cujo pai pertence à classe de renda baixa, vir a se tornar da classe renda média ou alta bem como conhecermos as informações semelhantes para um filho em que o pai seja de classe renda média ou alta, qual seria a probabilidade de que um neto ou bisneto de um pai de classe renda baixa se torne de classe renda média ou alta?

Usando cadeias de Markov, apresentaremos as respostas para essas perguntas. Um processo estocástico é um modelo matemático que evolui com o tempo em uma maneira probabilística, ou seja, é uma sequência finita de experimentos em que cada deles tem um número finito de ocorrências e com probabilidades conhecidas. Nesta seção, estudamos um tipo especial de processo estocástico, chamada de cadeia de Markov, onde o resultado de um experimento depende apenas do resultado do experimento anterior. Em outras palavras, o próximo estado do sistema depende apenas do estado atual, não dos estados anteriores. Aplicações de cadeias de Markov na medicina são bastante comuns e se tornaram uma ferramenta padrão na tomada de decisão, conforme SATO(2010, p.376). As cadeias de Markov recebem o nome do matemático russo A. A. Markov (1856-1922), que iniciou a teoria dos processos estocásticos.

Na sociologia, é conveniente classificar as pessoas, por renda, como classe baixa, classe média e classe alta. Os sociólogos descobriram que o determinante mais forte da classe de renda de um indivíduo é a classe de renda dos pais do indivíduo, de acordo com FIGUEIREDO(2010). Por exemplo, se um indivíduo da classe de baixa renda diz-se que está no estado 1, um indivíduo na classe de renda média está no estado 2 e um indivíduo na classe de renda alta está no estado 3, então as seguintes probabilidades podem ser aplicadas em uma alteração na classe de renda de uma geração para a seguinte. A Tabela 5 mostra que se um indivíduo está no estado 1 (classe de baixa renda), então existe uma probabilidade de 0,65 de que qualquer descendente esteja na classe de baixa renda, uma probabilidade de 0,28 que a prole esteja na classe de renda média e uma probabilidade de 0,07 que a prole estará na classe de alta renda.

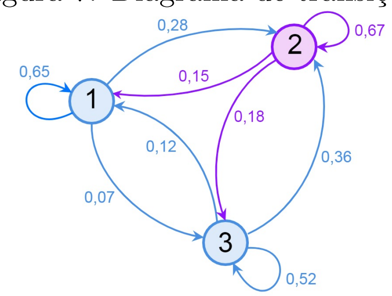
Tabela 5: Mudança de estado entre gerações

	Estado	Próxima geração		
		1	2	3
Geração atual	1	0.65	0.28	0.07
	2	0.15	0.67	0.18
	3	0.12	0.36	0.52

Fonte: Dados fictícios

O símbolo P_{ij} será usado para a probabilidade de transição do estado i para o estado j em uma geração. Por exemplo, P_{23} representa a probabilidade de uma pessoa no estado 2 ter filhos no estado 3; da tabela acima $P_{23} = 0,18$ Também da tabela, $P_{31} = 0,12, P_{22} = 0,67$ e assim por diante. As informações da Tabela 5 podem ser escritas de outras formas. A Figura 7 é um diagrama de transição que mostra os três estados e as probabilidades de ir de um estado para outro.

Figura 7: Diagrama de transições



Em uma matriz de transição, os estados são indicados na lateral e na parte superior. Se P representa a matriz de transição para a tabela acima, então

$$\begin{bmatrix} 0.65 & 0.28 & 0.07 \\ 0.15 & 0.67 & 0.18 \\ 0.12 & 0.36 & 0.52 \end{bmatrix} = P$$

Uma matriz de transição possui várias propriedades características:

1. É quadrada, pois todos os estados possíveis devem ser usados como linhas e como colunas.

2. Todas as entradas estão entre 0 e 1, inclusive; isso ocorre porque todas as entradas representam probabilidades.

3. A soma das entradas em qualquer linha deve ser 1, pois os números na linha dão as probabilidades de um dado estado mudar para todos os estados.

Uma matriz de transição, como a matriz P acima, também mostra duas principais características de uma cadeia de Markov. Uma sequência de ensaios de um experimento é uma cadeia de Markov se :

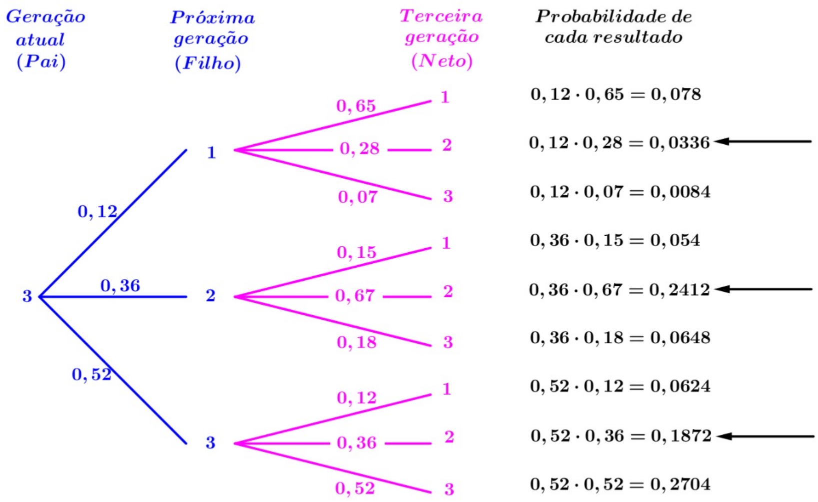
1. O resultado de cada experimento é um de um conjunto de estados discretos;

2. O resultado de um experimento depende apenas do estado atual e não de nenhum estado passado. Por exemplo, na matriz de transição P, supõe-se que uma pessoa esteja em um dos três estados discretos (renda mais baixa, média ou mais alta), com cada filho em um desses mesmos três estados discretos.

A matriz de transição P mostra a probabilidade de mudança na classe de renda de uma geração para a próxima. Agora vamos investigar as probabilidades de mudanças na classe de renda de mais de duas gerações. Por exemplo, se um pai estiver no estado 3 (na classe alta) qual é a probabilidade de um neto está no estado 2?

Para descobrir, comece com um diagrama em árvore, como mostra a figura 8. As várias probabilidades provêm da matriz de transição P. As setas apontam para os resultados "neto no estado 2 "; o neto pode chegar ao estado 2 depois de ter pais em qualquer estado 1, estado 2 ou estado 3. A probabilidade de um pai ou mãe no estado 3 ter um neto no estado 2 é dada pela soma das probabilidades indicadas por setas.

Figura 8: arvore de possibilidades



Costumávamos representar a probabilidade de mudar do estado i para o estado j em uma geração. Essa notação pode ser usada para escrever a probabilidade de um pai/mãe no estado 3 ter um neto no estado 2:

$$p_{31} \cdot p_{12} + p_{32} \cdot p_{22} + p_{33} \cdot p_{32}$$

Essa soma de produtos de probabilidades deve lembrá-lo que a multiplicação de matrizes nada mais é do que um passo no processo de multiplicação da matriz P por si própria. Em particular, é a linha 3 de P vezes a coluna 2 de P. Se P^2 representa a matriz produto $P * P$, em seguida, P^2 fornece as probabilidades de uma transição de um estado para outro em duas repetições de um experimento.

Generalizando, P^k fornece as probabilidades de uma transição de um estado para outro em k repetições de um experimento.

Podemos ainda perceber aplicações de cadeias Markov em diferentes tipos de situações, por exemplo.

Exemplo 5. (COSTA, 2017) Toda quarta feira a noite, Mikael assiste jogo do campeonato brasileiro de futebol da série A ou vai ao cinema, de modo que ele nunca assiste futebol duas quartas seguidas. Entretanto, se ele decidir ir nessa quarta ao cinema, a probabilidade de ir novamente na próxima quarta é de $\frac{1}{3}$. Qual a probabilidade de Mikael estar assistindo futebol ou estar no cinema após 3 quartas feiras?

Solução 5. Adotemos C para o caso de Mikael ir ao Cinema e F para o caso de assistir futebol, temos:

Tabela 6: Probabilidade de transição

	C	F
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
F	1	0

Assim, temos P a matriz de transição de estados:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos notar que a distribuição inicial de probabilidade deste sistema é $P^{(0)} = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ou seja, é de 50% para cada um dos estados. Como queremos saber a probabilidade após 3 quartas feiras, devemos encontrar $P^{(3)} = P^{(0)} \cdot P^{(3)}$. Assim obtemos:

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{13}{27} & \frac{14}{27} \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6296 & 0,3704 \end{bmatrix}$$

Portanto, após 3 quartas feiras, a probabilidade de Mikael estar assistindo futebol é de $62,96\%$ e de estar no cinema é de $37,04\%$.

5 Considerações finais

O estudo de matrizes na educação básica, comumente observado como meros algoritmos, de um modo geral, possui foco em técnicas de operações e poucas vezes recorre-se às situações problema e sua contextualização, modelo de abordagem que dificulta ao aluno notar a aplicabilidade do conteúdo e pode ser considerado um fator desfavorável à sua aprendizagem.

Partindo desse introito, a primeira parte do trabalho apresentou dados que consubstanciam a relevância da contextualização dos conteúdos, com relação ao ensino de matemática na educação básica, trazendo, ainda, um enfoque histórico sobre o surgimento do estudo de matrizes. A segunda parte propõe o estudo de métodos e técnica destinados à apresentação de soluções para o entrave, apresentando três alternativas para a contextualização do ensino de matrizes, nas séries do ensino médio, com o auxílio dos tópicos criptografia, manipulação de imagem por computação gráfica e cadeias de Markov.

Por meio de técnicas de criptografia, com operações de soma ou produto de matrizes, o aluno compreende, na prática, que mensagens, de um modo geral, quando codificadas, ainda que transmitidas abertamente, o seu significado é acessível somente ao destinatário real. Na manipulação de imagens por computação gráfica, apenas com o uso de operações com matrizes, o discente consegue manipular imagens, aumentando-as, rotacionando-as, transladando-as, etc. Por fim, a aplicação das cadeias de Markov induz o aluno a prever os resultados de um evento a partir do conhecimento de informações de alguns eventos anteriores, processo que se dá por meio do estudo de potência de matrizes.

A elaboração das novas estratégias para abordagem do tema, no âmbito das séries do ensino médio, torna a compreensão da matéria mais acessível por parte dos discentes, uma vez que são apresentados três caminhos diferentes, os quais possuem um mesmo objetivo no bojo do processo de ensino-aprendizagem, que é dar-lhe significado prático, de modo a propiciar o estímulo a um estudo mais avançado de matemática, aproximando-o do dia a dia.

Referências

[1] BOYER, C.B.,*História da matemática. Trad. Elza F. Gomide*, São Paulo: Edgard. Blücher, 1974.

[2] BRASIL*Parâmetros curriculares nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*, Brasilia: MEC/SEF, 1998.

[3] BRASIL,*Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Diretrizes e Bases da Educação Nacional*,Brasília, DF. 1996.

[4] PAQUES, Otília T. Wiermann; ROVERAN, Adilson Pedro, *Uma visão geral de problemas muito interessantes do livro "Os nove capítulos da arte matemática" de Liu Hui, do seculo II d.C* , Disponível em http://www.ime.unicamp.br/lem2/uploads/lecture/attachments/70/INTRODUCAO_nine_final _2017_01_fev.pdf. Acesso em 27 jun. 2019.

[5] SANCHES, Maria Helena Figueiredo, *Feitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes*, , disponível em http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/253429/1/Sanches_MariaHelenaFigueiredo_M.pdf, Acesso em 25 jun. 2019.

[6] ABREU, Carlos Eduardo de Paula; FERREIRA, Francinildo Nobre, *O ENSINO DA MATEMATICA CONTEXTUALIZADO*, disponível em https://ufsj.edu.br/portal-repositorio/File/profmat/Carlos.pdf. Acesso em 25 jun. 2019.

[7] HEFEZ, Abramo, *Aritimética*, Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[8] COUTINHO, S.C, *Criptografia*, Rio de Janeiro: IMPA/OBMEP, 2015.

[9] BATTAIOLA, André luiz, *Apostila do curso de computação gráfica*, disponível em http://docplayer.com.br/15759407-Apostila-do-curso-de-computacao-grafica-prof-dr-andre-luiz-battaiola-adaptado-por-prof-dr-jose-hiroki-saito.html. Acesso em 19 dez. 2019.

[10] IEZZI, Gelson; et. al, *Matemática: ciências e aplicações: ensino médio, volume 2*, São Paulo: Saraiva, 2016.

[11] FIGUEIREDO, Erik Alencar,*Mobilidade intrageracional de renda no Brasil*, disponível em https://doi.org/10.1590/S0103-63512010000300002

[12] Magela, Mateus Mendes ,*Teoria básica das cadeias de MarkovO*, disponível em https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=87175

[13] Sato, Renato Cesar; Zouain, Désirée Moraes*Modelos de Markov aplicados a saúde*, disponível em http://www.scielo.br/pdf/eins/v8n3/pt_1679-4508-eins-8-3-0376.pdf

[14] LIMA, Elon Lages; et. al,*A Matemática do ensino médio, volume 3*, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006

[15] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel, *Fundamentos de Matemática Elementar, volume 4*, São Paulo: Atual, 1977.

[16] COSTA, Fábio de Souza.,*Cadeias de Markov regulares: Uma abordagem para alunos e professores do ensino médio. 2017. 100 f. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional)*, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2017.