



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CAMPUS BLUMENAU
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Edgar Noschang Kunz

Análise de Séries Temporais: estudo estatístico sobre modelos
ARIMA com uma aplicação prática em processo sazonal
determinístico.

Blumenau
2020

Edgar Noschang Kunz

**ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS:
ESTUDO ESTATÍSTICO SOBRE MODELOS ARIMA COM UMA
APLICAÇÃO PRÁTICA EM PROCESSO SAZONAL DETERMINÍSTICO**

Dissertação submetida ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT - Campus Blumenau da Universidade Federal de Santa Catarina para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hugo José Lara Urdaneta

Blumenau

2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Kunz, Edgar Noschang

Análise de Séries Temporais : estudo estatístico sobre
modelos ARIMA com uma aplicação prática em processo sazonal
determinístico / Edgar Noschang Kunz ; orientador, Hugo
José Lara Urdaneta, 2020.

132 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Campus Blumenau, Programa de Pós
Graduação em Matemática, Blumenau, 2020.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Séries temporais. 3. Estatística. 4.
Modelagem matemática. 5. Consumo de energia elétrica. I.
Urdaneta, Hugo José Lara. II. Universidade Federal de
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

Edgar Noschang Kunz

Análise de Séries Temporais: Estudo estatístico sobre modelos ARIMA com uma aplicação prática em processo sazonal determinístico

O presente trabalho em nível de mestrado foi avaliado e aprovado por banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Prof. Luiz Rafael dos Santos, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Prof. Felipe Delfini Caetano Fidalgo, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Blumenau

Prof. Rômulo Alberto Castillo Cardenas, Dr.
Universidade Federal de Santa Catarina - Campus Joinville

Certificamos que esta é a **versão original e final** do trabalho de conclusão que foi julgado adequado para obtenção do título de mestre em matemática.

Coordenação do Programa de
Pós-Graduação

Prof. Hugo José Lara Urdaneta, Dr.
Orientador

Blumenau, 2020.

Este trabalho é dedicado à minha esposa e à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Muita gratidão a Deus pelo chamado a esse caminho glorioso e pela força oferecida a mim por Ele sobre as adversidades encontradas. Também agradeço a todos que contribuíram direta ou indiretamente ao longo de todo o curso, pois, por menor que tenha parecido ser uma ajuda, lógica ou emocional, certamente os resultados positivos dependeram muito dela. E, finalmente, porém não menos importante, muito obrigado aos competentíssimos e incansáveis docentes que, paciente-mente, ensinaram-me um tanto de saber matemático e uma enorme paixão pela ciência.

Podemos nos surpreender com as jornadas que encaramos e quem nos acompanha, às vezes são as jornadas mais difíceis que revelam quem somos, do que somos capazes e quem amamos.

(Filme “Alfa”, 2018.)

RESUMO

O interesse dos estudos sobre séries temporais se resume em prever as realizações futuras, isto é, utilizar amostras de dados do passado para estimar modelos matemáticos capazes de projetar os dados aproximados que ocorrerão nos momentos ainda sem registros. Este trabalho destina-se a explorar a análise de séries temporais quanto aos seus conceitos básicos, processos e modelos necessários numa específica aplicação prática do estudo. Dá-se ênfase em elucidar os modelos ARIMA (autorregressivos integrados e de médias móveis), a sazonalidade determinística e a abordagem Box-Jenkins. A aplicação é realizada sobre a série de leituras de consumo de energia elétrica no prédio acadêmico da UFSC em Blumenau, consolidando a teoria sobre um caso de processo sazonal determinístico e oferecendo a ferramenta para a administração dessa instituição. Ao final, revela-se, ainda, uma proposta para o ensino médio que concede aos docentes desse público um meio de iniciar o estudo de séries temporais, ampliando seus conhecimentos em Estatística.

Palavras-chave: séries temporais; estatística; ARIMA; sazonalidade; consumo de energia elétrica.

ABSTRACT

The concern of time series studies is summed up in predicting future achievements, that is, using samples of data from the past to estimate mathematical models capable of projecting the approximate data that will occur in the moments that have not yet been recorded. This work aims to explore the analysis of time series as to its basic concepts, processes and models needed in a specific practical application of the study. Emphasis is placed on elucidating the ARIMA models (autoregressives integrated moving averages), deterministic seasonality and the Box-Jenkins approach. The application is performed on the series of readings of electricity consumption in the academic building of UFSC in Blumenau, Brazil, consolidating the theory about a case of deterministic seasonal process and offering the tool for the administration of that institution. In the end, it is also revealed a proposal for high school that gives teachers from that audience a means to start the study of time series, expanding their knowing in Statistics.

Keywords: time series; statistics; ARIMA; seasonality; electric power consumption.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Gráfico de linhas das unidades vendidas	30
2.2	Processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias e a série temporal realizada	35
2.3	Figura do filtro linear com entrada y_t , saída x_t	44
2.4	Ciclo iterativo para construção de modelos	53
2.5	Ciclo iterativo adotado neste trabalho	54
2.6	Exemplo de Decomposição pelo Método Census X-12	58
2.7	Gráfico com dois correlogramas de exemplo	64
2.8	Exemplo de montagem de correlograma	66
2.9	Fluxograma para caracterização da série temporal	67
3.1	Etapas da Pesquisa	77
3.2	Gráfico do consumo do prédio acadêmico em evolução mensal (em kWh)	80
3.3	Gráfico do consumo do prédio acadêmico na evolução anual de cada mês (em kWh)	81
3.4	Gráfico do consumo do prédio acadêmico na evolução mensal de cada ano (em kWh)	81
3.5	Gráfico da Série Temporal	84
3.6	Box Plot dos intervalos de t	85
3.7	FAC e FACP de X_t	86
3.8	Decomposição da série original	87
3.9	Estatísticas da série original sazonal	88
3.10	Gráfico das séries original e sazonalmente ajustada	88
3.11	Correlograma da série ajustada sazonalmente	89
3.12	Correlograma da regressão linear de X	90
3.13	Correlograma da regressão exponencial de X	91
3.14	Estatísticas da regressão linear de X	91
3.15	Estatísticas da regressão exponencial de X	92
3.16	Gráfico da estimação de X_t linear	92
3.17	Gráfico da estimação de X_t exponencial	93
3.18	Correlograma do Teste Ljung-Box dos resíduos de \hat{X}_t por ARMA(1, 12)	95
3.19	Correlograma do Teste Ljung-Box dos resíduos de \hat{X}_t por ARMA(6, 12)	96
3.20	Gráfico da estimação final de \hat{X}_t	97
3.21	Estatísticas de Y_t	98
3.22	Gráfico de Y_t com previsão e limites $\pm 2S.E.$	99
3.23	Gráfico de X_t com a previsão dada por Y_t	100
4.1	Exemplo de dados tabulados no Excel para plano de aula	110

4.2	Exemplo de gráfico plotado no Excel para plano de aula	110
4.3	Exemplo de medidas de centralidade e dispersão tabuladas no Excel para plano de aula	111
4.4	Exemplo de dados tabulados para projeção no Excel para plano de aula	111
4.5	Exemplo de gráfico com projeção futura no Excel para plano de aula	112
4.6	Exemplo extra de gráfico com projeção futura no Excel .	116
1	Gráfico de uma série com $n = 21$ e uma reta de tendência ao longo do tempo t	131

LISTA DE TABELAS

2.1	Exemplo de série temporal: vendas	30
2.2	Processo estocástico	34
2.3	Tipos de modelos de séries temporais lineares	50
3.1	Consumo de energia prédio acadêmico UFSC Blumenau (em kWh)	79
3.2	Amostragem X_t	83
3.3	Estatísticas de X anualmente	83
3.4	Tabela de valores de verificação do modelo ARMA(p, q) para X_t	94
3.5	Tabela de valores previstos para o consumo de energia no prédio acadêmico do Campus Blumenau da UFSC . .	100
4.1	Exemplo de dados para plano de aula	109
4.2	Exemplo extra de dados para plano de aula	114
4.3	Exemplo extra com tendência	115

SUMÁRIO

1	Introdução	23
1.1	Justificativa	25
1.2	Objetivos	27
1.3	Apresentação do Trabalho	27
2	Referencial Teórico	29
2.1	Conceitos Básicos para Análise de Séries Temporais .	29
2.1.1	Série Temporal	32
2.1.2	Autocorrelação	35
2.1.3	Estacionariedade	38
2.1.4	Processos integrados	39
2.1.5	Alguns processos básicos	41
2.2	Modelos ARIMA	42
2.2.1	Processo Linear	43
2.2.2	AR(p), MA(q), ARMA(p, q) e ARIMA(p, d, q) . .	46
2.2.3	Introdução à Modelagem Box-Jenkins	52
2.2.4	Sazonalidade	54
2.3	Modelagem	58
2.3.1	Fase de Identificação	59
2.3.2	Fases de Estimacão e Verificacão	67
2.3.3	Previso	74
3	Aplicaco	77
3.1	Procedimentos	77
3.2	Situaco inicial dos dados	78
3.2.1	Origem dos dados	78
3.2.2	Apresentaco dos dados	79
3.2.3	Interesses da gesto na pesquisa	79
3.3	Levantamento e organizaco dos dados	80
3.3.1	Informacoes	80
3.3.2	Organizaco lgica	82
3.4	Previso do Consumo	84
3.4.1	Identificaco	84
3.4.2	Estimaco e Verificaco	86
3.4.3	Previso	95
3.5	Resultados	98
4	Ideia para o Ensino Bsico	101
4.1	Contexto	101
4.2	Objetivo da sugesto da aplicaco no Ensino Bsico .	105

4.3	Plano de Aula	105
4.3.1	Turma de referência para o plano de aula . . .	106
4.3.2	Formulário de plano de aula	107
4.3.3	Sugestões para o desenvolvimento das aulas .	108
4.4	Alternativa para a aula	113
4.5	Conclusões	116
5	Considerações Finais	119
	Referências	121
	Tabela do Consumo (X) e da Estimação (Y)	125
	Plano de aula proposto	127
	Covariância em processo $MA(q)$	129
	Método dos Mínimos Quadrados	131

1 INTRODUÇÃO

A humanidade procura, desde sempre, conhecer os fenômenos presentes para então prever os seus comportamentos futuros.

Um exercício mental pode nos remeter à Idade da Pedra e nos fazer imaginar os ancestrais de nossa espécie capazes de perceber as temperaturas diminuírem diariamente e, com isso, prever a chegada de um novo momento gelado dentro de um certo ciclo no tempo, o que chamamos hoje de inverno. O que muda para a atualidade, ao se saber da chegada de dias frios, são as ações baseadas nos recursos disponíveis, hoje renovamos o armário com ida às compras enquanto que naquela Era os humanos precisavam caçar mais para estocar as peles.

Do aspecto meteorológico para o político, Maquiavel [1] faz um paralelo da análise de fenômenos ligados à medicina para explicar a importância de prever o futuro dos fatos. O autor cita que as ações sobre o fenômeno doença devem ocorrer no presente pois é previsto que no futuro ela tende a piorar, indicando que na política deve ser o mesmo ao relatar um exemplo de ação dos romanos na dominação da Grécia. Nessa oportunidade ficou a lição da necessidade de se precaver de distúrbios políticos por meio de alianças e repressões aplicadas no presente para que no futuro não tivessem resistências sociais.

Não se concentrar apenas em distúrbios presentes, mas também nos futuros, fazendo de tudo para evitá-los, pois com a prevenção é possível remediá-los mais facilmente, ao passo que, quando se espera demasiado, o tratamento não chega a tempo, porque a doença já se tornou incurável. [1, p. 36].

Ao longo do tempo, as percepções deixaram de ser intuitivas e começaram a ser computadas, ou seja, registradas as observações dos fenômenos de acordo com cada momento de ocorrência. Esse conjunto de observações ordenadas no tempo é denominada série temporal [2].

“Dados obtidos de observações coletadas sequencialmente ao longo do tempo são extremamente comuns” [3, p. 1]. Nos negócios, na meteorologia, agricultura e nas ciências biológicas se encontram estudos de séries temporais, assim como em diversas áreas [3].

Antes do ano de 1920, as previsões eram realizadas com a extrapolação simples de um valor global, ajustado em função do tempo [4]. Em 1927, Yule [5] apresentou um trabalho com base na série temporal como uma realização de um processo estocástico,

utilizando o modelo autorregressivo (AR) para prever valores futuros baseando-se em valores passados, conforme Xavier [4]. Na sequência dos anos de estudos estatísticos foram realizados trabalhos sobre séries temporais considerando que essas dependiam de modelos lineares e ruído, até que, em 1950, a técnica de alisamento exponencial facilitou o uso de modelos para previsão de séries temporais e, enfim, o aparecimento do computador que, em seguida, acentuou a evolução do tema [4].

A partir da década de 70 do século passado, a obra de Box e Jenkins [6], segundo Xavier [4], apresenta a integração do conhecimento até então existente sobre estimação de parâmetros, identificação e previsão, abordando modelos estocásticos no domínio do tempo para séries temporais discretas sob o critério de parcimônia. Modelos *parcimoniosos* são os que contêm um número pequeno de parâmetros e as previsões obtidas são bastante precisas, de acordo com Moretin e Toloí [2].

Atualmente, os métodos adotados visam a análise das séries temporais, que tem o objetivo duplo de:

(...) Entender ou modelar o mecanismo estocástico que dá origem a uma série observada e prever os valores futuros de uma série com base no histórico dessa série e, possivelmente, outras séries ou fatores. [3, p. 1].

Assim, as séries temporais estão presentes em diversos meios da vida humana atualmente e podem ser analisadas intuitivamente ou estatisticamente.

A engenharia de produção, por exemplo, adota análise de séries temporais para as previsões de demandas nas organizações empresariais, que são a base para o planejamento estratégico da produção, vendas e finanças, conforme Tubino [7]. De acordo com Allen [8], desde a revolução industrial até os dias de hoje, a evolução dos estudos administrativos e estatísticos buscam a eficiência na operação empresarial de tal forma que, ao longo do tempo, melhorias foram ocorrendo, como o surgimento do sistema da Ford, o sistema da Toyota, a Qualidade Total e a Organização Internacional de Padrões (ISO)¹, entre outros.

Acompanhando esta tendência no meio empresarial privado, novas necessidades surgiram para que as organizações públicas aplicassem também métodos de trabalho que dessem ênfase à eficiência

¹International Standards Organization.

administrativa. Matias-Pereira [9] destaca que a Emenda Constitucional nº 19, de 4 de junho de 1998, inclui na Constituição Federal do Brasil o princípio da eficiência, cujo conceito tem como base o interesse econômico na orientação da atividade administrativa para melhor nível de desempenho, com mais resultados e menos custos governamentais. Logo, tem-se, nesse âmbito, a possibilidade de aplicar métodos de análise de séries temporais que minimizem os gastos públicos que todo brasileiro financia.

Trataremos nesse trabalho da análise de séries temporais, procurando explorar o conhecimento e ferramentas existentes para aplicar em um caso na administração pública e, ainda, possibilitar sua aprendizagem no Ensino Básico.

1.1 JUSTIFICATIVA

O estudo da estatística na área da matemática nos permite trazer de situações complexas do nosso cotidiano, pessoal ou profissional, números que representam uma visão mais aguçada da realidade. Para Mann [10], a Estatística como disciplina de estudo é a ciência que corresponde a coletar, analisar, apresentar e interpretar dados, incluindo tomadas de decisões. Assim, explorar esse conhecimento permite, por exemplo, compreender aquilo que parece ser muito difícil de se resolver e isso motiva o desenvolvimento desta pesquisa.

Para prever as realizações futuras de uma série temporal é preciso alcançar suposições fundamentadas estatisticamente. Conforme Mann [10], a suposição fundamentada é aquela baseada em métodos estatísticos ou científicos. Logo, estudar os meios estatísticos que possibilitam a fundamentação de suposições sobre algum fenômeno observado ao longo do tempo é um início para a análise de séries temporais.

Baseando-se em observações de dados, transformando-os em informações sobre o fenômeno e realizando inferência sobre essas informações é que um pesquisador poderia estar fazendo Ciência, conforme Morettin e Bussab [11]. Por isso, a análise de séries temporais deriva da inferência estatística como meio que viabiliza a pesquisa apresentada neste trabalho, pois essa, conforme esse mesmo autor, tem por objetivo a coleta, redução, análise e modelagem de dados para fazer inferência para uma população da qual se obteve essa amostra, possibilitando fazer previsões e então tomar decisões.

Assim, justifica-se esta pesquisa teórica sobre análise de séries

temporais pela importância da mesma como fundamentação científica para as inferências realizadas na aplicação prática do estudo.

Este trabalho aplica o estudo na administração pública e sugere uma ideia de abordagem possível no Ensino Básico.

Inferir sobre fenômenos existentes na organização do serviço público permite monitorar e sugerir mais eficiência para a sociedade. E conquistar a atenção de estudantes antes do ensino superior para analisar séries temporais possibilita noção mais ampla da aplicação da Estatística, seja para aqueles que seguirão aprofundando os estudos ou aqueles que irão utilizar no dia a dia. Portanto, acredita-se que a escolha desse nicho é justificado pelos benefícios sociais oferecidos, como, por exemplo, melhorar o serviço empregado aos cidadãos, melhor destinar os recursos dos contribuintes, bem preparar os jovens para a vida acadêmica ou laboral e incentivar pesquisas futuras que voltem a beneficiar o coletivo em nosso Estado por meio da matemática.

Dentre tantas possibilidades que uma instituição de ensino superior como a UFSC tem para aplicar métodos que busquem mais eficiência está o controle de custos operacionais. O gasto com energia elétrica é, sem dúvida, vital para a condução das atividades acadêmicas e muitas vezes a falta de monitoramento leva ao descuido em sua exagerada utilização. Por exemplo, o Campus Blumenau da UFSC, objeto deste trabalho, ainda não fez qualquer estudo para determinar quais os valores estatisticamente aceitáveis de consumo de energia, carecendo de uma investigação que aponte um modelo adequado de previsão dessa demanda.

Presente na rotina de todas as pessoas, a energia elétrica é um exemplo fácil de fenômeno que podemos adotar dentro de uma série temporal, pois seu consumo pode ser observado periodicamente. Medida em kWh (quilowatt-hora), trata-se de uma variável contínua que comumente é arredondada para valores inteiros nas anotações mensais oferecidas pela empresa que fornece esse insumo.

Então, neste trabalho, uma aplicação de análise de série temporal é realizada na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) com o intuito de mitigar desperdícios no consumo de energia elétrica no Campus de Blumenau. Ao mesmo tempo, ideia-se uma ligação ao Ensino Básico ao elaborar uma sugestão para lecionar e aplicar análise de série temporal para alunos do Ensino Médio. Assim, acredita-se no amplo retorno do presente estudo para os interessados: administração da UFSC, comunidade acadêmica de Blumenau, cidadãos contribuintes, docentes de Ensino Básico, estu-

dantes e pesquisadores, entre outros tantos.

1.2 OBJETIVOS

Sob a problemática de encontrar um modelo de previsão de consumo de energia elétrica no Campus Blumenau da UFSC e da carência do assunto de séries temporais no Ensino Básico, traçaram-se os objetivos deste trabalho:

- explorar a análise de séries temporais baseando-se nos modelos de previsão existentes;
- aplicar modelo de previsão para o consumo de energia elétrica do Campus Blumenau da UFSC; e
- oferecer uma ideia de atividades educacionais para o Ensino Básico.

1.3 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

Os capítulos a seguir foram organizados de acordo com os objetivos a serem desenvolvidos, portanto divididos em Referencial Teórico, Aplicação e Ideia para o Ensino Básico.

O Referencial Teórico traz, baseado no que há na bibliografia atual e pesquisas anteriores, os conceitos e características básicas das séries temporais, os modelos e a metodologia a ser aplicada. A Aplicação é precedida de seus procedimentos e elucida como os dados são apresentados e tratados ao longo da modelagem de acordo com os métodos estudados. Por fim, a Ideia para o Ensino Básico destaca uma importante visão que estende tal assunto ao estudante de Ensino Médio e mostra uma maneira de aplicá-la.

Ao final do trabalho são feitas as considerações e conclusões julgadas importantes sobre a pesquisa e os resultados encontrados.

Recomenda-se ao leitor que antecipe conhecimentos básicos de estatística, como medidas de centralidade e dispersão, representações gráficas, covariância, agrupamentos de dados, modelos, tipos de variáveis, probabilidades, distribuições de frequência, distribuição conjunta, funções de distribuições, estimadores de momentos e testes de hipóteses, possíveis de serem consultados em literaturas como Sadowski [12], Iezzi [13], Mann [10] e Morettin e Bussab [11].

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico deste trabalho procura explorar a análise de séries temporais. Portanto, foram utilizadas bibliografias de diversas fontes existentes para compor as definições, características e os conceitos que conduzem aos modelos de previsão ARIMA por meio da metodologia Box-Jenkins.

As obras de Box, Jenkins e Reinsel [14] [15] e Box e Jenkins [6] são trabalhos referenciados em muitas oportunidades em outras obras também pesquisadas neste trabalho, como Morettin e Tolo [2], Cryer e Chan [3], Ehlers [16] e Krolzig [17]. Devido a grande aplicabilidade na área de econometria, foram úteis aqui também os trabalhos de Maddala [18] e Enders [19].

Para a aplicação do *software* EViews[®], o curso de Morais e Stona [20] foi o mais empregado entre outros, como manuais da própria marca e fontes midiáticas *online*.

Ainda, diversas outras referências foram importantes, citadas ou não, em situações específicas deste trabalho.

2.1 CONCEITOS BÁSICOS PARA ANÁLISE DE SÉRIES TEMPORAIS

“Uma série temporal é uma sequência de dados numéricos em que cada item está associado a um determinado instante no tempo.” [18, p. 525].

Exemplo de Série Temporal: Suponhamos um determinado vendedor que computou mensalmente suas vendas em quantidade ao longo do ano de 2017, conforme a Tabela (2.1). Obtém-se, portanto, uma série temporal para o fenômeno unidades vendidas pelo determinado vendedor: vendas.

Mesmo obtendo esse conjunto de dados do exemplo das vendas, carece saber como se analisa uma série temporal.

Analisar uma série temporal, conforme Morettin e Tolo [2] é:

- investigar o mecanismo que a gerou, como o comportamento das ondas no gráfico;
- fazer previsões de valores futuros;
- descrever o comportamento da série, construindo gráficos e verificando tendências, oscilações, etc.;
- procurar periodicidades relevantes.

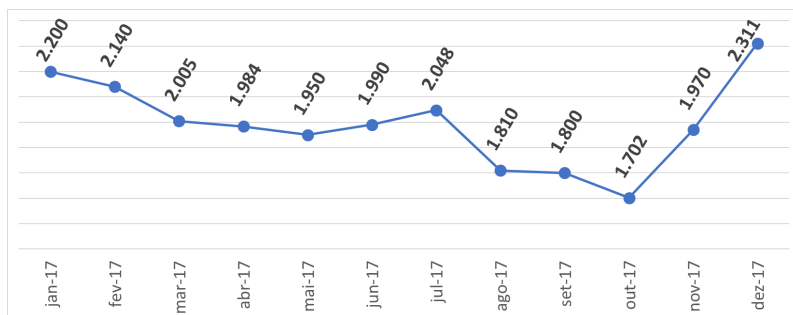
Tabela 2.1: Exemplo de série temporal: vendas.

Mês	Unidades Vendidas
jan/17	2.200
fev/17	2.140
mar/17	2.005
abr/17	1.984
mai/17	1.950
jun/17	1.990
jul/17	2.048
ago/17	1.810
set/17	1.800
out/17	1.702
nov/17	1.970
dez/17	2.311

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Então, para o exemplo vendas, podemos plotar os dados em um gráfico de linhas, conforme a Figura (2.1). Nesse caso, pode-se analisar quanto às ocorrências de crescimento e decrescimento dos dados ao passar do tempo.

Figura 2.1: Gráfico de linhas das unidades vendidas.



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Porém, qualquer previsão do futuro da série vendas sobre as informações obtidas pelos dados tabelados ou em gráficos de linhas ainda são muito intuitivas, por isso definiremos algumas estatísticas básicas que ajudam a explicar o comportamento do fenômeno.

Definição 1 (Média). *Dados os valores X_t de uma amostra de série*

temporal para cada instante $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$, então a esperança matemática $E(X) = \mu_x$ da série temporal pode ser estimada pela média amostral:

$$\bar{X} = \hat{\mu}_x = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t.$$

Definição 2 (Variância). Dados os valores X_t de uma amostra de série temporal para cada instante $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$, então a variância $Var(X) = \sigma_x^2$ pode ser estimada pela variância amostral:

$$S^2 = \hat{\sigma}_x^2 = T^{-1} \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2$$

A média é um tipo de medida de centralidade ou posição e a variância é um tipo de medida de dispersão.

Definição 3 (Desvio Padrão). Dados os valores X_t de uma amostra de série temporal para cada instante $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$, o desvio padrão $DP(X) = \sigma_x$ pode ser estimado por

$$DP(X) = \hat{\sigma}_x = \sqrt{Var(X)}$$

Logo, tomando o mesmo exemplo das vendas, calculamos as estatísticas dessa série temporal:

$$\hat{\mu} = 12^{-1} \cdot (2200 + 2140 + \dots + 2311) = \frac{23910}{12} = 1993$$

$$\hat{\sigma}^2 = 12^{-1} \cdot [(2200 - 1993)^2 + \dots + (2311 - 1993)^2] = \frac{326635}{12} = 27220$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{27220} = 164,98.$$

O que se pode concluir analisando essas estatísticas de centralidade e dispersão é que os valores da série temporal devem ocorrer em torno de 1993 vendas num mês com um desvio padrão de 165 vendas para mais ou para menos dessa média.

Percebe-se que, apenas com as medidas de centralidade e dispersão calculadas, ainda não se tem como determinar o exato valor previsto para os meses seguintes na série temporal do exemplo vendas. Portanto, precisaríamos inferir sobre os valores futuros por meio dos dados do passado, isto é, elaborar um modelo matemático que explique definitivamente o fenômeno estudado.

Assim, o estudo a seguir explora meios que possibilitam a previsão de séries temporais com uma precisão maior.

Para Tubino [7, p. 18], séries temporais possibilitam uso de técnicas para “modelar matematicamente a demanda futura relacionando os dados históricos do próprio produto com o tempo”. Isso nos remete a buscar teorias que possibilitem essa modelagem, isto é, encontrar um modelo matemático, para então realizar as previsões desejadas nesse processo de análise de séries temporais.

Há inúmeras possibilidades para as séries temporais e, por isso, cabe estudar as caracterizações que as diferenciam e os modelos matemáticos a empregar ao analisá-las. A classificação de determinada série temporal de acordo com suas características é que deve definir quais os modelos e métodos a serem adotados na sua análise. Portanto, nesta seção, busca-se os conceitos básicos que definem as séries temporais, os processos que as formam e os modelos a serem utilizados na previsão.

2.1.1 Série Temporal

De acordo com Morettin e Bussab [11], uma série temporal é uma das infinitas possíveis realizações do processo estocástico.

Conforme Box, Jenkins e Reinsel [14], é chamado de processo estocástico um modelo que descreve a estrutura de probabilidade de uma sequência de observações. Para Maddala [18, p. 527] “essa coleção de variáveis aleatórias ordenadas no tempo é chamada de processo estocástico”.

Para Mann [10], variável aleatória é uma variável cujo valor é determinado pelo resultado de um experimento aleatório (baseado no acaso), isto é, oriunda de uma seleção aleatória probabilística. Conforme Morettin e Bussab [11], as *variáveis aleatórias* (v.a.) melhor representam os modelos probabilísticos, podendo ser dos tipos *discretas*, *contínuas* e *multidimensionais*.

Portanto, tomando as pesquisas acima, podemos dizer que uma variável aleatória representa valores associados à probabilidades. Assim, definimos a seguir as variáveis aleatórias, processos estocásticos e as séries temporais a partir de Krolzig [17].

Sejam Ω espaço amostral um conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório e M um evento qualquer e subconjunto de Ω .

Seja Pr uma função que leva os pontos amostrais ao intervalo $[0, 1]$. A partir disso, podemos definir variável aleatória.

Consideremos um modelo probabilístico $[\Omega; P]$, tal que

$P = \text{Pr.}$

Definição 4. Variável aleatória (v.a.) é qualquer função de valor real $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Definição 5. Se Ω é discreto, então X é uma v.a. discreta e se Ω é contínuo, então X é uma v.a. contínua.

Definição 6. Dada a v.a. $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (discreto ou contínuo), define-se a função de distribuição acumulada (f.d.a.) F , por

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1],$$

$$F(x) = P(X \leq x), \forall x \text{ valor de } X.$$

Definição 7. Dada uma v.a. discreta $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com valores em $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, define-se a função de distribuição f de X à função

$$f: \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \rightarrow [0, 1], \text{ tal que}$$

$$f(x_i) = P(\{X = x_i\}).$$

A partir de todo exposto, observa-se que:

- i) f está definida nos valores de X , enquanto que F está definida em todo \mathbb{R} ;
- ii) para v.a. discretas, f e F carregam a mesma informação:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} f(x_i), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ e}$$

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \forall x_i \in \{x_2, x_3, \dots, x_k, \dots\};$$

- iii) se as probabilidades são calculadas com base nas observações das v.a., dizemos que tanto f ou F é empírica.

Seja \mathcal{T} o conjunto de todos os inteiros positivos que representam uma discretização do tempo, isto é, um conjunto de índices também denominados *lags*¹. Para Morettin e Toloí [2], um processo estocástico pode ser interpretado como uma família de variáveis aleatórias distribuídas em cada $t \in \mathcal{T}$. A definição a seguir vem de Krolzig [17].

¹Palavra oriunda do inglês e utilizada para diferenciar os diferentes instantes de tempo $t \in \mathcal{T}$.

Definição 8. Um processo estocástico (discreto) é a função de valor real:

$$X : \mathcal{T} \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \in \mathcal{T}$, $X_t(\omega)$ é uma variável aleatória.

Assim, um processo estocástico é uma sequência ordenada de variáveis aleatórias $\{X_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathcal{T}\}$, tal que para cada $t \in \mathcal{T}$, $X_t(\omega)$ é uma variável aleatória no espaço amostral Ω , e para cada $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ é uma realização do processo estocástico no conjunto de \mathcal{T} (que é o conjunto ordenado de valores, cada um correspondente a um valor do conjunto de índices)[17].

Tabela 2.2: Processo estocástico.

	ω_0	\dots	ω_j	\dots	ω_m
t_o	$X_{t_o}(\omega_0)$		$X_{t_o}(\omega_j)$		$X_{t_o}(\omega_m)$
\vdots			\vdots		
t_i	$X_{t_i}(\omega_0)$		$X_{t_i}(\omega_j)$		$X_{t_i}(\omega_m)$
\vdots			\vdots		
t_n	$X_{t_i}(\omega_0)$		$X_{t_n}(\omega_j)$		$X_{t_n}(\omega_m)$

Fonte: Krolzig [17].

Definição 9. Uma série temporal $\{x_t\}_{t=0}^T$ é uma realização particular $\{x_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ de um processo estocástico, com $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$.

Logo, uma realização de um processo estocástico é uma função $\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ em $t \longrightarrow X_t(\omega)$. Diz-se que o processo estocástico subjacente gerou a série temporal.

A série temporal $X_0(\omega), \dots, X_T(\omega)$ é usualmente denotada por x_0, \dots, x_T ou simplesmente x_t .

Definição 10. Suponha uma v.a. X . Então $E(X^n)$ é o n -ésimo momento de X , com $n \in \mathbb{Z}_+^*$ e $E(X^n) < \infty$.

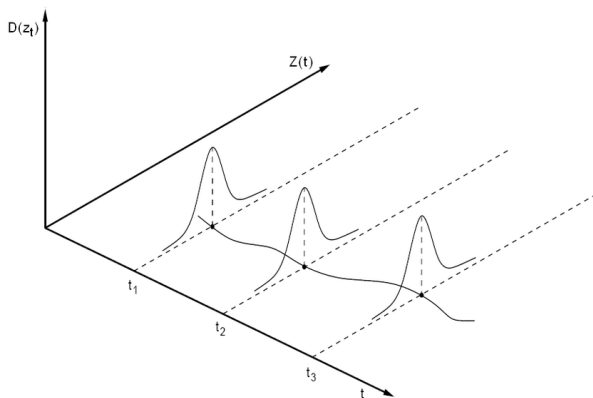
Definição 11. Seja X_1, X_2, \dots, X_T uma amostra de tamanho T de uma série temporal x_t . Então o n -ésimo momento amostral denotado por m_n estima $E(X^n)$ e é definido por

$$m_n = T^{-1} \sum_{t=1}^T X_t^n.$$

Um processo estocástico pode ser descrito pelas funções de distribuição conjunta de todas as sub-coleções finitas $x_t, t \in S \subset \mathcal{T}$ que, em geral, não estão disponíveis na prática. No entanto, os primeiros e segundos momentos amostrais podem ser estimados desde os dados.

A Figura (2.2) é uma representação gráfica da realização de uma série temporal, com $z_t = Z(t)$ e $D(z_t)$ a função de distribuição de probabilidade de $Z_t(\omega)$.

Figura 2.2: Processo estocástico como uma família de variáveis aleatórias e a série temporal realizada.



Fonte: Morettin e Toloi [2, p. 20].

2.1.2 Autocorrelação

A autocorrelação é a correlação em série temporal, pois tratamos de variáveis dentro de um mesmo fenômeno. Sabendo que a correlação (*Corr*) entre, por exemplo, as diferentes variáveis A e B depende das covariâncias (*Cov*), isto é, considerando uma amostra de dados, temos

$$\text{Corr}(A, B) = \frac{\text{Cov}(A, B)}{\sqrt{\text{Cov}(A, A) \cdot \text{Cov}(B, B)}} \text{ e}$$

$$\text{Cov}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a}) \cdot (b_i - \bar{b})}{n},$$

então dizemos que covariância é a média dos valores centrados das variáveis e que

$$\text{Corr}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i - \bar{a}}{dp(A)} \right) \left(\frac{b_i - \bar{b}}{dp(B)} \right).$$

Correlacionar os valores entre si é o que torna possível analisar as séries temporais, pois esses são os únicos dados que se possui. Como advém de autocovariância entre valores da série temporal, essa é uma medida de quanto um desses valores influencia um valor distante em h passos, com $(t-h) \in \mathcal{T}$. Os conceitos a seguir são das referências de Morettin e Toloi [2], Krolzig [17] e Cryer e Chan [3].

A distribuição conjunta de $(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-h})$ é geralmente caracterizada pelos primeiros e segundos momentos, como médias e covariâncias, portanto a função de autocovariância é

$$\begin{aligned} \gamma_t(h) &= \text{Cov}(x_t, x_{t-h}) \\ &= E[(x_t - \mu_t)(x_{t-h} - \mu_{t-h})]. \end{aligned}$$

Em que $\mu_t = E[x_t]$ é a média incondicional de x_t .

Definição 12. A autocorrelação entre x_t e x_{t-h} é

$$\rho_t(h) = \frac{\gamma_t(h)}{\sqrt{\gamma_t(0)\gamma_{t-h}(0)}}.$$

Como temos

$$\begin{aligned} \gamma_t(0) &= \text{Cov}(x_t, x_{t-0}) = \text{Cov}(x_t, x_t) = \text{Var}(x_t), \text{ e} \\ \gamma_{t-h}(0) &= \text{Cov}(x_{t-h}, x_{t-h-0}) = \text{Cov}(x_{t-h}, x_{t-h}) = \text{Var}(x_{t-h}). \end{aligned}$$

Segue que

$$\rho_t(h) = \frac{\gamma_t(h)}{\sqrt{\text{Var}(x_t)\text{Var}(x_{t-h})}}. \quad (2.1)$$

A autocorrelação indica a medida de *grau de associação linear*, isto é, uma avaliação do quanto a nuvem de pontos no gráfico de dispersão das variáveis quantitativas analisadas, x_t e x_{t-h} , aproxima-se de uma reta.

A proposição a seguir raramente é demonstrada nos livros, portanto apresentamos aqui nossa versão.

Proposição 1. *A autocorrelação entre x_t e x_{t-h} , para algum $(t-h) \in \mathcal{T}$ satisfaz*

$$-1 \leq \rho_t(h) \leq 1. \quad (2.2)$$

Demonstração. Como as variáveis são de valores reais, temos que

$$\left(\frac{x_t - \mu_t}{\sqrt{\text{Var}(x_t)}} + \frac{x_{t-h} - \mu_{t-h}}{\sqrt{\text{Var}(x_{t-h})}} \right)^2 \geq 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_t - \mu_t}{\sqrt{\text{Var}(x_t)}} \right)^2 + 2 \left(\frac{x_t - \mu_t}{\sqrt{\text{Var}(x_t)}} \cdot \frac{x_{t-h} - \mu_{t-h}}{\sqrt{\text{Var}(x_{t-h})}} \right) + \\ + \left(\frac{x_{t-h} - \mu_{t-h}}{\sqrt{\text{Var}(x_{t-h})}} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Segue que, tomando o valor esperado em ambos os lados da desigualdade, temos

$$\frac{\text{Var}(x_t)}{\text{Var}(x_t)} + 2 \cdot \frac{E[(x_t - \mu_t)(x_{t-h} - \mu_{t-h})]}{\sqrt{\text{Var}(x_t)\text{Var}(x_{t-h})}} + \frac{\text{Var}(x_{t-h})}{\text{Var}(x_{t-h})} \geq 0.$$

Logo,

$$1 + 1 + 2\rho_t(h) \geq 0$$

$$2\rho_t(h) \geq -2$$

$$\rho_t(h) \geq -1.$$

E, analogamente,

$$\left(\frac{x_t - \mu_t}{\sqrt{\text{Var}(x_t)}} - \frac{x_{t-h} - \mu_{t-h}}{\sqrt{\text{Var}(x_{t-h})}} \right)^2 \geq 0 \implies -\rho_t(h) \geq -1.$$

Logo,

$$\rho_t(h) \leq 1.$$

□

Portanto, um grau mais próximo de 1 implica que associação linear é direta, com uma reta de aproximação crescente. Por outro lado, com o grau mais próximo de -1 , a dependência linear é inversa, com uma reta de aproximação decrescente. E, finalmente, se há um grau neutro, mais próximo de zero, indica que não há associação linear e, portanto, sem uma reta aproximada para a dispersão dos pontos nas coordenadas.

2.1.3 Estacionariedade

Uma das suposições importantes a serem feitas sobre um determinado processo estocástico é quanto a sua estacionariedade, ou seja, se sua estrutura não é alterada probabilisticamente ao longo do tempo permitindo, portanto, inferir, isto é, modelar e realizar previsões [3].

A estacionariedade é uma característica destaque das séries temporais, pois a sua existência garante que um determinado processo, independente de sua origem no tempo, represente uma série temporal.

Para Morettin e Toloi [2], a depender de seu processo, uma série dita estacionária pode ser de dois tipos: *fraca e estrita (ou forte)*. As definições a seguir são baseadas em Box, Jenkins e Reinsel [14], Morettin e Toloi [2], Krolzig [17] e Maddala [18].

Definição 13. *O processo $\{x_t\}$ é considerado fracamente estacionário, ou de covariância estacionária baixa, se o primeiro e o segundo momentos do processo existirem e forem invariantes no tempo, isto é,*

$$\begin{aligned} E[x_t] &= \mu(t) = \mu, \text{ constante, para todo } t \in \mathcal{T}. \\ E[(x_t - \mu)(x_{t-h} - \mu)] &= \gamma(h) < \infty, \text{ para todo } t \text{ e } h. \end{aligned}$$

A proposição a seguir raramente é demonstrada nos livros, portanto apresentamos aqui nossa versão.

Proposição 2. *Estacionariedade implica $\gamma_t(h) = \gamma_t(-h) = \gamma(h)$.*

Demonstração. Suponha $t_h = (t + h) \in \mathcal{T}$, então

$$\begin{aligned} \gamma_{t_h}(h) &= E[(x_{t_h} - \mu)(x_{t_h-h} - \mu)] \\ &= E[(x_{t+h} - \mu)(x_{t+h-h} - \mu)] \\ &= E[(x_{t+h} - \mu)(x_t - \mu)] \\ &= E[(x_t - \mu)(x_{t+h} - \mu)] \\ &= \gamma_t(-h). \end{aligned}$$

Pela definição, o segundo momento é invariante no tempo, isto é, a autocovariância independe de t . Logo, $\gamma_{t_h}(h) = \gamma_t(h) = \gamma(h)$, Então

$$\gamma_{t_h}(h) = \gamma_t(-h) = \gamma_t(h) = \gamma(h).$$

□

Com a finalidade de simplificar a notação, consideramos que $\gamma(h) = \gamma_h$ quando tratamos de série estacionária.

Definição 14. O processo $\{x_t\}$ é estritamente estacionário se, para quaisquer valores de h_1, h_2, \dots, h_n a distribuição conjunta de

$$(x_t, x_{t+h_1}, \dots, x_{t+h_n})$$

depende somente dos intervalos h_1, h_2, \dots, h_n mas não no instante t em si:

$$f(x_t, x_{t+h_1}, \dots, x_{t+h_n}) = f(x_T, x_{T+h_1}, \dots, x_{T+h_n}),$$

para todo $t \in \mathcal{T}$.

Estacionariedade estrita implica que todos os momentos existentes são invariantes no tempo, conforme Krolzig [17] e Maddala [18].

Definição 15. O processo $\{x_t\}$ é gaussiano se, para qualquer conjunto h_1, h_2, \dots, h_n de \mathcal{T} , as variáveis aleatórias

$$(x_t, x_{t+h_1}, \dots, x_{t+h_n})$$

tem distribuição normal n -variada.

Em um processo gaussiano, as definições de estacionariedade fraca e forte coincidem.

2.1.4 Processos integrados

Uma classe importante de processos não estacionários são os processos integrados, que são aqueles que podem ser transformados em estacionários. Esses processos são formados por passeios aleatórios, conforme definido e observado a seguir [17].

Definição 16. O processo estocástico $\{x_t\}$ é dito ser um **passeio aleatório** se

$$x_t = x_{t-1} + u_t, \text{ para } t > 0 \text{ e } x_0 = 0,$$

onde u_t é independente, identicamente distribuído com média zero e variância $\sigma^2 < \infty$ para todo $t > 0$.

Proposição 3. Um passeio aleatório é não estacionário.

Demonstração. Faz-se as substituições sucessivas e tem-se que

$$\begin{aligned} x_t &= (x_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\ &= (x_{t-3} + u_{t-2}) + u_{t-1} + u_t \\ &\vdots \\ &= x_0 + \sum_{j=1}^t u_j. \end{aligned}$$

e, como o processo inicia em $x_0 = 0$, verifica-se que

$$\mu = E(x_t) = E \left[x_0 + \sum_{j=1}^t u_j \right] = x_0 + \sum_{j=1}^t E[u_j] = 0.$$

Aparentemente a média nula indicaria estacionariedade, porém, num segundo momento, temos divergências a partir da variância:

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_t) &= E[x_t^2] = E \left[\left(x_0 + \sum_{j=1}^t u_j \right)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{j=1}^t u_j \right)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^t u_j u_i \right] = \sum_{j=1}^t E[u_j^2] + \sum_{j=1}^t \sum_{i \neq j} E[u_j u_i] \\ &= \sum_{j=1}^t \sigma^2 = t\sigma^2 \\ &= t\sigma^2, \end{aligned}$$

e da autocovariância:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_t, x_{t-h}) &= E[x_t x_{t-h}] = E \left[\left(x_0 + \sum_{j=1}^t u_j \right) \left(x_0 + \sum_{i=1}^{t-h} u_i \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^t u_j \left(\sum_{i=1}^{t-h} u_i \right) \right] = \sum_{i=1}^{t-h} E [u_i^2] = \sum_{i=1}^{t-h} \sigma^2 \\ &= (t-h)\sigma^2, \text{ para todo } h > 0, \end{aligned}$$

então,

$$\gamma_t(h) = (t-h)\sigma^2.$$

Assim, temos a autocorrelação

$$\rho_t^2(h) = \frac{\gamma_t^2(h)}{\gamma_t(0)\gamma_{t-h}(0)} = \frac{[(t-h)\sigma^2]^2}{[t\sigma^2][(t-h)\sigma^2]} = \frac{t-h}{t}, \text{ para todo } h > 0.$$

Como a variância e a autocovariância dependem de t , esse processo não é estacionário após o segundo momento do passeio aleatório. \square

Por outro lado, pode-se notar que uma operação de diferença em um passeio aleatório é estacionária, já que

$$x_t - x_{t-1} = (x_{t-1} + u_t) - x_{t-1} = u_t.$$

Essa operação de diferenças é uma importante maneira de estacionarizar séries temporais, como será descrito, na sequência deste trabalho, no modelo ARIMA. Conforme Krolzig [17], se um processo estocástico precisa ser diferenciado d vezes para atingir a estacionariedade, diz-se que ele está integrado na ordem d .

2.1.5 Alguns processos básicos

Destacam-se alguns processos básicos ditos importantes nas séries temporais [17].

Definição 17. Um processo **ruído branco** ou *white-noise* (WN) é um processo fracamente estacionário que tem uma média zero e não está correlacionado ao longo do tempo:

$$u_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Assim, $\{u_t\}$ é um processo *WN* se, para todo $t \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} E[u_t] &= 0, \\ E[u_t^2] &= \sigma^2 < \infty, \text{ e} \\ E[u_t u_{t-h}] &= 0 \end{aligned}$$

em que $h \neq 0$ e $t - h \in \mathcal{T}$.

Definição 18. Um processo *WN* $\{u_t\}$ normalmente distribuído é chamado um processo ruído-branco gaussiano:

$$u_t \sim NID(0, \sigma^2).$$

Supor essa normalidade implica em estrita estacionariedade e independência serial.

Definição 19. Um processo $\{u_t\}$ com variáveis independentes e identicamente distribuídas é denominado *IID*:

$$u_t \sim IID(0, \sigma^2).$$

Diferentemente de um processo ruído-branco, um processo *IID* é imprevisível.

2.2 MODELOS ARIMA

Sendo um modelo a descrição probabilística de uma série temporal particular por meio de seus processos estocásticos, a construção desse modelo depende de variados fatores da natureza da série e dos objetivos da análise, dos métodos de estimação e de *softwares* adequados [2].

A importância dos modelos é que estes retratam matematicamente as séries temporais, sendo esta uma condição para a previsão estatística. Em outras palavras, pode se dizer que é por meio de um modelo que se é possível calcular um valor projetado para um período além daquele que se possui como amostra.

Os modelos autorregressivos integrados e de médias móveis (ARIMA) são um tipo de modelo paramétrico, ou seja, possuem um número de parâmetros finitos e com análise feita no domínio do tempo [2]. De acordo com Morettin e Toloí [2], esses modelos são frequentemente mais usados por conterem um número pequeno de parâmetros e as previsões serem bastante precisas.

Portanto, neste trabalho iremos tratar dos tipos de modelos ARIMA como opção para previsão de séries temporais.

2.2.1 Processo Linear

O processo linear deve ser estudado primeiramente porque é a partir desse tipo que se pode aplicar os modelos ARIMA.

Antes de definir um *processo linear*, precisamos definir os operadores e o filtro linear, que são ferramentas importantes na manipulação dos parâmetros a serem analisados. As definições a seguir são, principalmente, de Krolzig [17].

Definição 20 (Operador de atraso). *Suponha um processo estocástico $\{x_t\}$. Então, o operador de atraso L satisfaz*

$$Lx_t = x_{t-1}. \quad (2.3)$$

Observa-se que, para $j \in \mathbb{N}$, pode-se escrever uma composição de operadores como $L^j x_t = x_{t-j}$.

O operador de atraso é a ferramenta que opera no índice de tempo de uma série alternando em uma unidade de tempo para formar uma nova série [3].

Definição 21 (Operador de diferenças). *Suponha $\{x_t\}$ um processo estocástico. Então, o operador de diferenças Δ satisfaz*

$$\Delta x_t = (1 - L)x_t = x_t - x_{t-1}.$$

Observa-se que, para $j \in \mathbb{N}$ pode-se escrever a j -ésima diferença

$$\Delta^j x_t = (1 - L)^j x_t.$$

O operador de diferenças é a ferramenta que elimina tendências lineares ou encontra constantes entre momentos de determinada série temporal, conforme Morettin e Tolo [2].

Observa-se também que, para $s \in \mathbb{N}$, pode-se escrever a s -ésima diferença sazonal

$$\Delta_s x_t = (1 - L^s)x_t,$$

em que, de fato, $\Delta_s x_t$ representa diferença sazonal no período $t - s$:

$$\begin{aligned} \Delta_s x_t &= (1 - L^s)x_t \\ &= x_t - L^s x_t, \text{ por (2.3):} \\ &= x_t - x_{t-s}. \end{aligned}$$

Conforme as referências Box, Jenkins e Reinsel [14], Morettin e Tolo [2], Cryer e Chan [3] e Krolzig [17], tem-se definições de filtro linear e processo linear.

Definição 22 (Filtro linear). A transformação Ψ de uma série de entrada y_t em uma saída x_t aplicando um polinômio de atraso $\Psi(L)$, ou seja,

$$\Psi(L) = \left(\sum_{j=-n}^m \psi_j L^j \right),$$

é chamada **filtro linear**.

Portanto, tem-se um processo de tal forma que

$$\begin{aligned} x_t &= \Psi(L) y_t = \left(\sum_{j=-n}^m \psi_j L^j \right) y_t = \sum_{j=-n}^m \psi_j y_{t-j} \\ &= \psi_{-n} y_{t+n} + \cdots + \psi_0 y_t + \cdots + \psi_m y_{t-m}. \end{aligned}$$

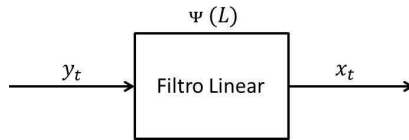
A representação gráfica da construção do sistema é ilustrado na figura (2.3). Neste caso o processo com filtro linear é tal que:

$$x_t = \mu + y_t + \psi_1 y_{t-1} + \psi_2 y_{t-2} + \cdots \quad (2.4)$$

$$= \mu + \psi(L) y_t, \quad (2.5)$$

em que $\psi(L) = 1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \cdots$ é denominada *função de transferência* do filtro e μ é um parâmetro que determina o nível da série.

Figura 2.3: Figura do filtro linear com entrada y_t , saída x_t .



Fontes: Morettin e Tolo [2] e Box, Jenkins e Reinsel [14].

Definição 23. Um **processo linear** $\{x_t\}$ é uma representação por uma combinação linear ponderada dos termos de ruído branco $\{\varepsilon_t\}$ entre os momentos do tempo analisado.

$$x_t = \Psi(L) \varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}, \quad (2.6)$$

em que $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$.

Então, seja x_t um *processo linear*, nesse caso discreto, e caracterizado por [2, p.108]:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0, \forall t \\ \text{Var}(\varepsilon_t) &= \sigma_\varepsilon^2, \forall t \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= 0, \forall s \neq t. \end{aligned}$$

Definindo $\tilde{x}_t = x_t - \mu$, temos que:

$$\tilde{x}_t = \psi(L)\varepsilon_t. \quad (2.7)$$

Pode-se escrever \tilde{x}_t como uma soma ponderada de valores passados $\tilde{x}_{t-1}, \tilde{x}_{t-2}, \dots$ e um ruído ε_t [2]:

$$\tilde{x}_t = \alpha_1 \tilde{x}_{t-1} + \alpha_2 \tilde{x}_{t-2} + \dots + \varepsilon_t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \tilde{x}_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Segue que

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j L^j\right) \tilde{x}_t = \varepsilon_t$$

e logo,

$$\alpha(L)\tilde{x}_t = \varepsilon_t. \quad (2.8)$$

Considerando o operador $\alpha(L)$,

$$\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots.$$

De (2.7) e (2.8) tem-se que

$$\alpha(L)\tilde{x}_t = \alpha(L)\psi(L)\varepsilon_t = \varepsilon_t.$$

Logo,

$$\alpha(L) = \psi^{-1}(L). \quad (2.9)$$

Essa é uma relação importante para ser usada na obtenção dos diferentes α_j em função dos ψ_j e vice-versa, que são os respectivos pesos das séries.

Teremos x_t estacionária e o filtro estável se a sequência de pesos $\{\psi_j, j \geq 1\}$ for finita ou infinita e convergente. Então μ é a média do processo. Caso contrário, x_t é não estacionária e μ fica sem significado. [2, p. 107].

2.2.2 AR(p), MA(q), ARMA(p, q) e ARIMA(p, d, q)

A partir de um processo linear é que se pode modelar com o método Box-Jenkins. Portanto, como os modelos ARIMA dependem dos parâmetros p , d e q , esses devem ser estimados.

Um modelo ARIMA é a composição de um modelo autorregressivo (AR) e um processo de média móvel para um processo integrado e, se o processo for estacionário sem integração, isto é, $d = 0$, então o modelo pode ser chamado ARMA.

Os conceitos a seguir são oriundos, principalmente, de Box, Jenkins e Reinsel [14], Morettin e Toloi [2], Krolzig [17] e Cryer e Chan [3].

Autorregressão AR(p)

A partir de um processo linear $x_t = \check{x}_t - \mu$ espaçado em $t - 1, t - 2, \dots, t - p$, isto é, até p de distância, com $(t - p) \in \mathcal{T}$, é que tem-se uma autorregressão da ordem p -ésima, denotada processo autorregressivo AR(p).

Definição 24. Um *modelo autorregressivo* x_t é um processo autorregressivo de ordem p , denotado $X_t \sim AR(p)$ tal que

$$x_t = \varepsilon_t + \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p}.$$

Equivale dizer que AR(p) satisfaz a equação:

$$x_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} + \varepsilon_t, \text{ em que } \varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2).$$

Ou, ainda, tomando o operador $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2 - \dots - \alpha_p L^p$, tem-se

$$\varepsilon_t = x_t - \alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2} - \dots - \alpha_p x_{t-p} \quad (2.10)$$

$$= \alpha(L)x_t. \quad (2.11)$$

Portanto, ε_t é a saída de um filtro linear com função de transferência $\alpha(L)$ e a entrada o processo x_t .

Na prática, o modelo autorregressivo possui $p + 2$ parâmetros desconhecidos $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \sigma_\varepsilon^2$ que devem ser estimados a partir dos dados.

Neste caso, a função de autocovariância satisfaz

$$\begin{aligned}\gamma_h &= E[x_t x_{t-h}] = E[(\alpha_1 x_{t-1} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t) x_{t-h}] \\ &= \alpha_1 E[x_{t-1} x_{t-h}] + \cdots + \alpha_p E[x_{t-p} x_{t-h}] + E[\varepsilon_t x_{t-h}].\end{aligned}$$

Como temos um processo autorregressivo x_{t-h} que só envolve ruídos até ε_{t-h} não correlacionados com ε_t , $E[\varepsilon_t x_{t-h}] = 0$, $h > 0$, resulta

$$\gamma_h = \alpha_1 \gamma_{h-1} + \cdots + \alpha_p \gamma_{h-p}. \quad (2.12)$$

Como x_t é processo linear, então $Var(x_t)$ é constante para todo $t \in \mathcal{T}$, então $Var(x_t) = Var(x_{t-h})$. Logo,

$$\sqrt{Var(x_t) \cdot Var(x_{t-h})} = \sqrt{[Var(x_t)]^2} = Var(x_t) = \gamma_t(0) = \gamma_0.$$

Dividindo (2.12) por γ_0 , obtemos, a partir de (2.1)

$$\rho_h = \alpha_1 \rho_{h-1} + \cdots + \alpha_p \rho_{h-p}.$$

Então, tomando seguintes **equações Yule-Walker**:

$$\left. \begin{aligned}\rho_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \rho_1 + \cdots + \alpha_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 &= \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p \rho_{p-2} \\ &\vdots \\ \rho_p &= \alpha_1 \rho_{p-1} + \alpha_2 \rho_{p-2} + \cdots + \alpha_p\end{aligned}\right\} \Rightarrow \rho_1, \dots, \rho_p,$$

$$\rho_k = \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} + \cdots + \alpha_p \rho_{k-p}, \text{ para } k > p.$$

Essas equações são resolvidas de forma recursiva para as ordens sucessivas $p = 1, 2, 3, \dots$.

Médias Móveis MA(q)

A partir de um processo linear $x_t = \tilde{x}_t - \mu$ dado por um ruído branco espaçado em $t-1, t-2, \dots, t-q$, isto é, até q de distância, com $(t-q) \in \mathcal{T}$, é que tem-se um processo de média móvel da q -ésima ordem, denotado processo MA(q).

Definição 25. O modelo de média móvel de ordem q , denotado $X_t \sim MA(q)$, satisfaz

$$x_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \beta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (2.13)$$

Equivale dizer que $MA(q)$ satisfaz a equação:

$$x_t = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j},$$

em que $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ e $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \cdots - \beta_q L^q$, $\beta_q \neq 0$.

Portanto, pode ser representado por:

$$x_t = \beta(L) \varepsilon_t. \quad (2.14)$$

Logo, a saída é o processo x_t de um filtro linear com função de transferência $\beta(L)$ e entrada ε_t .

Na prática, os $q+2$ parâmetros desconhecidos $\mu, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma_\varepsilon^2$ devem ser estimados a partir dos dados.

Considerando $x_t = \check{x}_t - \mu = \sum_{j=0}^q \beta_j \varepsilon_{t-j}$, $\beta_0 = 1$ e defasagem h , tal que $(t-h) \in \mathcal{T}$, pode-se definir a função de autocovariância como:

$$\begin{aligned} \gamma_h &= E \left[\left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \right) \left(\varepsilon_{t-h} - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right) \right] \\ &= -\beta_h E[\varepsilon_{t-h}^2] + \beta_1 \beta_{h+1} E[\varepsilon_{t-h-1}^2] + \cdots + \beta_{q-h} \beta_q E[\varepsilon_{t-q}^2]. \end{aligned}$$

Note que oferecemos uma demonstração para a segunda igualdade no apêndice.

Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \left(\sum_{j=0}^q \beta_j^2 \right) \sigma_\varepsilon^2, \\ \gamma_h &= \left(\sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h} \right) \sigma_\varepsilon^2, \text{ para } h = 1, 2, \dots, q \\ &\text{e } \gamma_h = 0, \text{ para } h > q. \end{aligned}$$

Com isto, a função de autocorrelação de um $MA(q)$ é dada por

$$\rho_h = \begin{cases} \frac{\sum_{j=0}^{q-h} \beta_j \beta_{j+h}}{\sum_{j=0}^q \beta_j^2} & h = 1, 2, \dots, q \\ 0 & h > q \end{cases}.$$

Assim, nota-se que a autocorrelação é nula para a ordem de valor maior que q , isto é, em outras palavras pode-se dizer que a função de autocorrelação de um processo médio móvel sofre um corte após o lag q .

Proposição 4. *Um processo linear será estacionário se a série $\psi(L) = \alpha^{-1}(L)$ convergir para $|L| \leq 1$, logo*

$$|\alpha| < 1;$$

Um processo linear será invertível se $\tilde{\psi}(L) = \beta^{-1}(L)$ convergir para $|L| \leq 1$, logo

$$|\beta| < 1.$$

Conforme Morettin e Toli [2, p.110], a proposição (4) foi demonstrada por Box, Jenkins e Reinsel [15].

Autorregressão e Médias Móveis ARMA(p, q)

O modelo ARMA agrega os anteriores, assim obtém-se uma parametrização equilibrada por meio do misto de média móvel e autorregressivo. Esse modelo trata de alguma variável no instante t como função de valores defasados da mesma variável, incluindo as condições de ambos os processos autorregressivo e de média móvel.

Definição 26 (Processo misto de média móvel e autorregressivo). *Dizemos que x_t é um processo misto de autorregressão de ordem p e de média móvel de ordem q , denotado $X_t \sim ARMA(p, q)$ tal que*

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \dots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \beta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (2.15)$$

Equivale dizer que ARMA(p, q) satisfaz

$$x_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i},$$

em que $\varepsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$, $\alpha(L) = 1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p$, $\alpha_p \neq 0$ e $\beta(L) = 1 - \beta_1 L - \dots - \beta_q L^q$, $\beta_q \neq 0$.

Logo, como $\alpha(L)$ é o operador autorregressivo e $\beta(L)$ é o operador de médias móveis, observa-se que

$$x_t = \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j},$$

$$x_t - \sum_{j=1}^p \alpha_j x_{t-j} = \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j},$$

$$x_t \left(1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j L^j \right) = \varepsilon_t \left(1 - \sum_{j=1}^q \beta_j L^j \right),$$

$$\alpha(L)x_t = \beta(L)\varepsilon_t.$$

A tabela (2.3) apresenta um resumo dos tipos de modelos de séries temporais lineares.

Tabela 2.3: Tipos de modelos de séries temporais lineares.

p	q	Modelo	Tipo	
p>0	q=0	$\alpha(L)x_t = \varepsilon_t$	(puro) processo autorregressivo de ordem p	AR (p)
p=0	q>0	$x_t = \beta(L)\varepsilon_t$	(puro) processo de média móvel de ordem q	MA (q)
p>0	q>0	$\alpha(L)x_t = \beta(L)\varepsilon_t$	(misto) processo autorregressivo e de média móvel	ARMA (p,q)

Fonte: Krolzig [17].

Os modelos elencados na Tabela (2.3) e definidos nessa seção, “são apropriados para descrever séries estacionárias”. [2, p. 134].

Autorregressivo Integrado e de Médias Móveis ARIMA(p, d, q)

Segundo Morettin e Toloi [2], muitas séries temporais podem ser não estacionárias, como as econômicas, financeiras, etc.

No entanto, essas séries podem ser *estacionarizadas* por modelos de *diferenciação* como o Modelo ARIMA.

Ainda, de acordo com Morettin e Toloi [2], as séries temporais não estacionárias podem ser *passeio casual ou explosiva*. Vimos que para dada uma série $(1 - \alpha L)x_t = \kappa_t$, ou seja AR(1), a condição para estacionariedade é $|\alpha| < 1$. Portanto [2, p. 134]:

- (i) Se $\alpha = 1$, então $x_t = x_{t-1} + \kappa_t$: série não estacionária tipo **passeio casual** ou não explosiva.
- (ii) Se $\alpha > 1$, então o processo “explode”: série não estacionária tipo **explosiva**.

Nesse trabalho trataremos de séries temporais não explosivas, ou seja, em caso de série não estacionária o comportamento deve apresentar alguma homogeneidade.

Proposição 5. *Se $\alpha = 1$ e x_t não estacionária, então $\Delta x_t = \kappa_t$ é estacionária.*

Demonstração. Conforme a Definição (21), podemos diferenciar um processo x_t em ordem de j . Tomando $j = 1$, temos que $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$. Logo, se o processo é passeio casual, então

$$\alpha = 1 \implies (1 - L)x_t = \kappa_t \implies \Delta x_t = \kappa_t.$$

□

Conforme Morettin e Toloi [2], o modelo ARIMA ajusta para a estacionariedade as séries de origem não estacionária do tipo passeio casual homogêneas ou portadoras de raízes unitárias tomando $j = d$ um número finito de diferenças.

Definição 27. *Seja x_t uma série temporal, o modelo ARIMA(p, d, q), isto é, modelo autorregressivo integrado e de médias móveis, é dado por*

$$\alpha(L)\Delta^d x_t = \beta(L)\kappa_t,$$

com p a ordem de $\alpha(L)$, q a ordem de $\beta(L)$ e d a ordem d -ésima diferença da série x_t ,

Tomando \hat{x}_t a série estacionarizada da série portadora de raízes unitárias x_t , então

$$\hat{x}_t = \Delta^d x_t,$$

portanto x_t é chamado de *processo integrado de ordem d*:

$$x_t \sim I(d).$$

Se $d = 0$, então x_t é estacionário.

Observações:

$$\text{ARIMA}(p, d, q) = \text{ARMA}(p, q) \iff d = 0,$$

$$\text{ARIMA}(p, d, q) = \text{AR}(p) \iff d = 0 \text{ e } q = 0,$$

$$\text{ARIMA}(p, d, q) = \text{MA}(q) \iff d = 0 \text{ e } p = 0.$$

2.2.3 Introdução à Modelagem Box-Jenkins

A abordagem Box-Jenkins ou método Box & Jenkins ou metodologia Box e Jenkins (1970) de Box e Jenkins [6] é conhecida por separar as fases das análises sobre a série temporal. Segundo Morettin e Toloi [2], essa metodologia ajusta modelos ARIMA a um conjunto de dados.

“A estratégia para a construção do modelo será baseada em um ciclo iterativo, no qual a escolha da estrutura do modelo é baseada nos próprios dados”. [2, p. 105].

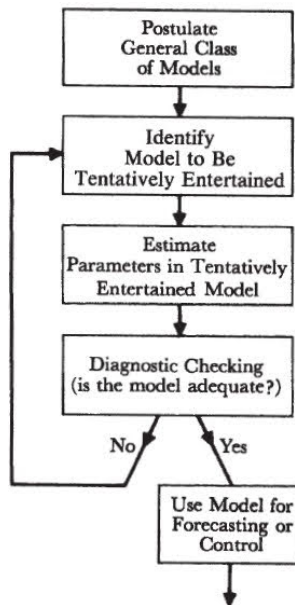
O ciclo iterativo é dado na Figura (2.4), da qual traduzimos livremente uma sequência de ações representadas por caixas e setas:

- considerar classe geral de modelos;
- identificar modelo para ser cogitado;
- estimar parâmetros no modelo experimentalmente cogitado;
- verificação de diagnóstico (o modelo é adequado?); e
- usar modelo para previsão ou controle.

Resumidamente, “os estágios do ciclo iterativo do método Box & Jenkins são a identificação, a estimação e a verificação, dado que especificamos a classe geral de modelos ARIMA”. [2, p. 149]

Portanto, considerando as especificações de modelos presentes ao longo deste trabalho, adotamos o método Box-Jenkins a ser aplicado com as fases: **identificação, estimação, verificação e previsão**.

Figura 2.4: Ciclo iterativo para construção de modelos.



Fonte: Box, Jenkins e Reinsel [14, p. 18].

A Figura (2.5) apresenta as fases do ciclo do método Box-Jenkins adotado neste trabalho, incluindo alguns tópicos importantes de cada fase. Os tópicos ainda não definidos são melhor detalhados nas seções a seguir, (2.2.4) e (2.3).

FAC é a função de autocorrelação e FACP é a função de autocorrelação parcial; com essas é possível realizar a caracterização da série quanto a sazonalidade e a estacionariedade. As decisões para o modelo adequado são aquelas que permitem determinar os possíveis parâmetros p , d e q para o modelo ARIMA. Os critérios de informações são métodos capazes de indicar o modelo mais ajustado aos dados. E a acuracidade é o teste final capaz de medir o grau de proximidade do modelo aos dados.

Figura 2.5: Ciclo iterativo adotado neste trabalho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.2.4 Sazonalidade

Alguns autores tratam o estudo da sazonalidade como separado do modelo ARIMA. No entanto, como neste trabalho o objetivo central é o emprego da abordagem Box-Jenkins, devemos considerar a possibilidade de o processo linear ser sazonal e necessitar o ajustamento da série.

Conforme Morettin e Tolo [2], do ponto de vista conceitual ou estatístico é difícil definir o que seja sazonalidade.

Empiricamente, consideramos como sazonais os fenômenos que ocorrem regularmente de ano para ano, como um aumento de vendas de passagens aéreas no verão, aumento da produção de leite no Brasil nos meses de novembro, dezembro e janeiro, aumento das vendas no comércio na época do Natal etc. [2, p. 64].

Muitos processos econômicos exibem alguma forma de sazonalidade. Os setores agrícola, de construção e de viagens têm padrões sazonais óbvios, resultantes de sua dependência do clima. Da mesma forma, o feriado de Ação de Graças para o Natal tem uma influência acentuada no comércio varejista. De fato, a variação sazonal de uma série pode ser responsável pela preponderância de

sua variação total. As previsões que ignoram importantes padrões sazonais terão uma alta variação. [19, p. 96].

Sejam $\{Z_t, t = 1, \dots, N\}$ as observações de uma série temporal. Escrevemos que Z_t é a soma de três componentes não observáveis [2],

$$Z_t = T_t + S_t + a_t, \quad (2.16)$$

com T_t representando a componente de tendência da série e S_t a componente sazonal, enquanto que a_t é a componente aleatória de média zero e variância σ_a^2 [2].

Portanto tomando $\{a_t\}$ como um processo estacionário, temos que Z_t é não estacionário [2].

A intenção é construir uma série temporal livre de sazonalidade ou *sazonalmente ajustada* [2]. Para Enders [19], a remoção da sazonalidade da série possibilita o melhor procedimento de estimação da série, pelo método Box-Jenkins, mas após isso é aconselhável evitar o uso da série sazonalmente ajustada.

Definição 28. *A série sazonalmente ajustada é dada por*

$$Z_t^{SA} = Z_t - \hat{S}_t, \quad (2.17)$$

com \hat{S}_t a estimativa sazonal

Conforme Maddala [18] e Morettin e Toloí [2], os componentes T_t e S_t são fortemente relacionados entre si, com influência da tendência sobre a componente sazonal. Para Pierce [21] *apud* Morettin e Toloí [2], isso ocorre porque a tendência pode afetar bastante os métodos de estimação de S_t e porque a especificação de S_t depende da especificação de T_t .

Proposição 6. *A tendência de uma série pode ser eliminada por operadores de diferenças.*

Ou seja, com base na Definição (21), para tendência linear usando

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1}, \quad (2.18)$$

e para tendência exponencial usando

$$\Delta Z_t^* = \Delta \log Z_t. \quad (2.19)$$

Demonstração. Suponhamos $T_t = \theta_0 + \theta_1 t$, então

$$\Delta T_t = (\theta_0 + \theta_1 t) - [\theta_0 + \theta_1(t - 1)] = \theta_1,$$

portanto o operador de diferenças elimina uma tendência linear ao passo que

$$\Delta Z_t = \Delta T_t + \Delta a_t = \theta_1 + a_t - a_{t-1}.$$

Logo, mesmo que não invertível, conforme proposição (4), ΔZ_t é uma série estacionária [2]. \square

“Se a série temporal sob consideração não estiver um comportamento explosivo (...), uma ou duas diferenças será suficiente para se obter estabilidade ou estacionariedade”. [2, p. 60]

As observações a seguir são, principalmente, embasadas em Morettin e Tolo [2].

Observação 1. *Um procedimento de ajustamento sazonal consiste em obter as estimativas \hat{S}_t de S_t e calcular (2.17).*

Observação 2. Sazonalidade determinística *ocorre quando pode ser prevista perfeitamente a partir de períodos anteriores, convencionalmente para dados observados mensalmente de sazonalidade anual com período $s = 12$.*

Observação 3. *A sazonalidade não determinística, ou sazonalidade estocástica, ocorre quando a componente sazonal varia com o tempo. Uma forma de identificá-la é observando se há autocorrelação significativa em lags sazonais, isto é, múltiplos de s .*

Neste trabalho nos deteremos a estudar a sazonalidade determinística.

O procedimento mais usual, de acordo com Morettin e Tolo [2], para estimar S_t de uma sazonalidade determinística é o método de regressão.

Seja $\{Z_t\}$ uma série de comportamento sazonal determinístico com período de 12, considerando a observação (2), tomamos o modelo

$$Z_t = \mu_t + N_t, \quad (2.20)$$

com μ_t uma função determinística tal que

$$\mu_t - \mu_{t-12} = 0 \text{ ou } (1 - L^{12})\mu_t = 0 \quad (2.21)$$

e N_t é um processo estacionário que pode ser modelado por um ARMA(p, q) [2].

Então,

$$\alpha(L)N_t = \beta(L)\varepsilon_t, \quad (2.22)$$

em que ε_t é ruído branco e μ_t tem solução dada por

$$\mu_t = \mu + \sum_{j=1}^6 \left[\varphi_j \cos\left(\frac{2\pi jt}{12}\right) + \omega_j \sin\left(\frac{2\pi jt}{12}\right) \right], \quad (2.23)$$

com $\mu, \varphi_j, \omega_j, j = 1, \dots, 6$ constantes desconhecidas [2].

Segue que, ao aplicarmos a diferença sazonal $(1 - L^{12})$ em (2.20) e considerando (2.21) e (2.22), obtemos, conforme Morettin e Toloi [2]:

$$(1 - L^{12})Z_t = (1 - L^{12})N_t$$

↓

$$\alpha(L)W_t = \beta(L)(1 - L^{12})\varepsilon_t, \quad (2.24)$$

com $W_t = (1 - L^{12})Z_t$.

O modelo (2.24) será muito útil na fase de identificação pelo Método Box-Jenkins, descrito na seção (2.3.1)

Segundo Morettin e Toloi [2], os procedimentos para ajustamento sazonal são de uma vasta referência bibliográfica e métodos. Em 1996 foi lançado o programa X-12-ARIMA que é uma evolução considerável de outros métodos do Bureau do Censo dos EUA capazes de ajustar sazonalmente um modelo Z_t da família ARIMA de maneira consistente [2].

O X-12-ARIMA ou Método Census X-12 inclui as seguintes capacidades [2, p. 77]:

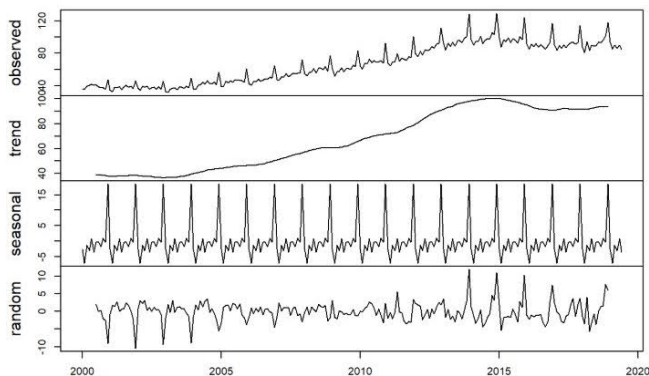
- (i) Extensão de séries por meio de previsões de valores futuros e de valores passados, utilizando modelos ARIMA, antes de fazer ajustamento sazonal. Possibilita a estimação no início e no fim da série.
- (ii) Diagnósticos para verificar a qualidade do ajustamento sazonal.
- (iii) Escolha de modelos para ajustar as observações com a inclusão de modelos de regressão com erros ARIMA.

- (iv) Opções de ajustamento sazonal.
- (v) Diversos testes de diagnóstico, incluindo a estimação do espectro para detectar efeitos sazonais e *trading-day*.
- (vi) Possibilidade de interface com outros aplicativos, possibilitando o processamento de um grande número de séries.

Observação 4. A *decomposição* de uma série temporal é feita pelo Método Census X-12, que estima as componentes sazonal e de tendência a serem eliminadas da série original para produzir a série ajustada sazonalmente.

A Figura (2.6) ilustra um exemplo de serie temporal decomposta pelo Método Census X-12. Nessa decomposição, o fator sazonal observado é que é levado em consideração para definir a sazonalidade determinística. Neste caso exemplificado na imagem da mesma figura, nota-se que há repetição perfeita do fator sazonal a cada 12 meses, confirmando a sazonalidade determinística.

Figura 2.6: Exemplo de Decomposição pelo Método Census X-12.



Fonte: Figueiredo [22].

2.3 MODELAGEM

A modelagem em análise de séries temporais é considerada como sendo o processo de construção do modelo matemático para a previsão. Nesse procedimento é que se aplica a análise das séries temporais por meio do ciclo iterativo proposto na abordagem de Box-Jenkins, seção (2.2.3).

2.3.1 Fase de Identificação

Na fase de identificação dos modelos, os dados devem ser observados para que as estimativas de funções de autocorrelações (FAC e FACP) sejam calculadas e comparadas com comportamentos que indiquem qual ou quais modelos que descrevem o processo estocástico [2]. Para Morettin e Toloi [2], essa é a fase mais crítica.

Função de Autocorrelação (FAC): Seja $\{x_t, t \in \mathbb{Z}\}$ um processo estacionário real discreto de média zero e $\gamma_h = E\{x_t x_{t+h}\}$ então, conforme proposto e provado por Morettin e Toloi [2, p. 25-26], a FAC é

$$\rho_h = \frac{\gamma_h}{\gamma_0},$$

com exceção de que agora $\rho_0 = 1$, assume as mesmas propriedades de γ_h :

- (i) $\gamma_0 > 0$,
- (ii) $\gamma_{-h} = \gamma_h$,
- (iii) $|\gamma_h| \leq \gamma_0$,
- (iv) γ_h é não negativa definida, no sentido que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_j a_k \gamma_{h_j - h_k} \geq 0,$$

para quaisquer números reais a_1, \dots, a_n e h_1, \dots, h_n de \mathbb{Z} .

Definição 29. A autocorrelação amostral satisfaz

$$\hat{\rho}_h = \hat{\gamma}_h / \hat{\gamma}(0), \quad (2.25)$$

em que $\hat{\gamma}_h$ é a autocovariância amostral, $h = 0, 1, 2, \dots$.

As propriedades a seguir são dadas por Morettin e Toloi [2, p. 130].

Propriedades 1. São características especiais de FAC, tal que um processo:

- (i) $AR(p)$ tem FAC que decai de acordo com exponenciais ou senoides amortecidas, infinita em extensão;

- (ii) $MA(q)$ tem FAC finita, no sentido que ela apresenta um corte após o lag q ;
- (iii) $ARMA(p, q)$ tem FAC infinita em extensão, que decai de acordo com exponenciais ou senoides amortecidas após o lag $p - q$.

Função de Autocorrelação Parcial (FACP): De $ARMA(p, q)$, multiplicamos cada membro de (2.15) por x_{t-j} e tomamos a esperança, então obtemos [2, p. 126-127]

$$E(x_t x_{t-j}) = E\{(\alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \cdots + \alpha_p x_{t-p} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2} - \cdots - \beta_q \varepsilon_{t-q})x_{t-j}\},$$

portanto

$$\begin{aligned} E(x_t x_{t-j}) &= \alpha_1 E\{x_{t-1} x_{t-j}\} + \alpha_2 E\{x_{t-2} x_{t-j}\} + \cdots + \\ &+ \alpha_p E\{x_{t-p} x_{t-j}\} + E\{\varepsilon_t x_{t-j}\} - \beta_1 E\{\varepsilon_{t-1} x_{t-j}\} - \\ &- \beta_2 E\{\varepsilon_{t-2} x_{t-j}\} - \cdots - \beta_q E\{\varepsilon_{t-q} x_{t-j}\}. \end{aligned}$$

Desta forma temos

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \alpha_1 \gamma_{t-1} + \alpha_2 \gamma_{t-2} + \cdots + \alpha_p \gamma_{t-p} + \gamma_{x\varepsilon}(j) - \beta_1 \gamma_{x\varepsilon}(t-1) - \\ &- \beta_2 \gamma_{x\varepsilon}(t-2) - \cdots - \beta_q \gamma_{x\varepsilon}(t-q). \end{aligned}$$

Como $\gamma_{x\varepsilon}(j) = E(\varepsilon_t x_{t-j})$ e x_{t-j} só depende de choques ε_t ocorridos até o instante $t - j$, então

$$\gamma_{x\varepsilon}(j) \begin{cases} = 0, & j > 0 \\ \neq 0, & j \leq 0. \end{cases}$$

Logo, obtemos

$$\gamma_j = \alpha_1 \gamma_{j-1} + \alpha_2 \gamma_{j-2} + \cdots + \alpha_p \gamma_{j-p}, \quad j > q,$$

e dividindo ambos os membros da igualdade por γ_0 .

$$\frac{\gamma_j}{\gamma_0} = \alpha_1 \frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_0} + \alpha_2 \frac{\gamma_{j-2}}{\gamma_0} + \cdots + \alpha_p \frac{\gamma_{j-p}}{\gamma_0}, \quad j > q,$$

segue que, de (2.25)

$$\rho_j = \alpha_1 \rho_{j-1} + \alpha_2 \rho_{j-2} + \cdots + \alpha_p \rho_{j-p}, \quad j > q. \quad (2.26)$$

Agora, denotamos α_{hj} o j -ésimo coeficiente de um modelo AR(h), tal que α_{hh} seja o último coeficiente. Então, a partir de (2.26) obtemos

$$\rho_j = \alpha_{h1}\rho_{j-1} + \alpha_{h2}\rho_{j-2} + \cdots + \alpha_{hh}\rho_{j-h}, \quad j = 1, 2, \dots, h \quad (2.27)$$

que implica nas equações Yule-Walker [2]:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{h1} \\ \alpha_{h2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{hh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_h \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Portanto, encontramos que [2]

$$\alpha_{hh} = \frac{|\mathbf{P}_h^*|}{|\mathbf{P}_h|},$$

em que \mathbf{P}_h é a matriz de autocorrelações e \mathbf{P}_h^* é a matriz \mathbf{P}_h com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações [2, p.131]:

$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_h \end{pmatrix}.$$

Conforme Morettin e Tolo [2], a quantidade α_{hh} é como função de h chamada *função de autocorrelação parcial*.

A partir de (2.28), para cada $h = 1, 2, 3, \dots$ resolvemos sucessivamente e encontramos

$$h = 1 \implies \rho_1 = \alpha_{11} \cdot \rho_0 \implies \alpha_{11} = \rho_1,$$

$$\begin{aligned}
 h = 2 &\implies \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{h1} \\ \alpha_{h2} \end{bmatrix} \\
 &\implies \rho_1 = \alpha_{21} + \alpha_{22}\rho_1 \wedge \rho_2 = \alpha_{21}\rho_1 + \alpha_{22} \\
 &\implies \alpha_{22} = \frac{\rho_1 - \alpha_{21}}{\rho_1} \wedge \alpha_{21} = \frac{\rho_2 - \alpha_{22}}{\rho_1} \\
 &\implies \alpha_{22} = \frac{\rho_1 - \frac{\rho_2 - \alpha_{22}}{\rho_1}}{\rho_1} = \frac{\rho_1^2 - \rho_2}{\rho_1^2 - 1} \cdot \frac{(-1)}{(-1)} \\
 &\implies \alpha_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h = 3 &\implies \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{h1} \\ \alpha_{h2} \\ \alpha_{h3} \end{bmatrix} \\
 &\implies \alpha_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}},
 \end{aligned}$$

$$h \implies \alpha_{hh} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & \rho_h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{h-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \rho_{h-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}.$$

A definição a seguir é baseada em Lenvinson [23] e Durbin [24] *apud* Cryer e Chan [3].

Definição 30. As equações (2.28) para FACP são recursivamente resolvidas por

$$\alpha_{hh} = \frac{\rho_h - \sum_{j=1}^{h-1} (\alpha_{h-1,j})(\rho_{h-j})}{1 - \sum_{j=1}^{h-1} (\alpha_{h-1,j})(\rho_j)} \quad (2.29)$$

Exemplos

$$\alpha_{22} = \frac{\rho_2 - \sum_{j=1}^1 (\alpha_{1,j})(\rho_{2-j})}{1 - \sum_{j=1}^1 (\alpha_{1,j})(\rho_j)} = \frac{\rho_2 - \alpha_{1,1}\rho_1}{1 - \alpha_{1,1}\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$$

$$\alpha_{33} = \frac{\rho_3 - \sum_{j=1}^2 (\alpha_{2,j})(\rho_{3-j})}{1 - \sum_{j=1}^2 (\alpha_{2,j})(\rho_j)} = \frac{\rho_3 - (\alpha_{2,1}\rho_2 + \alpha_{2,2}\rho_1)}{1 - (\alpha_{2,1}\rho_1 + \alpha_{2,2}\rho_2)}$$

As propriedades a seguir também são encontradas [2, p. 131].

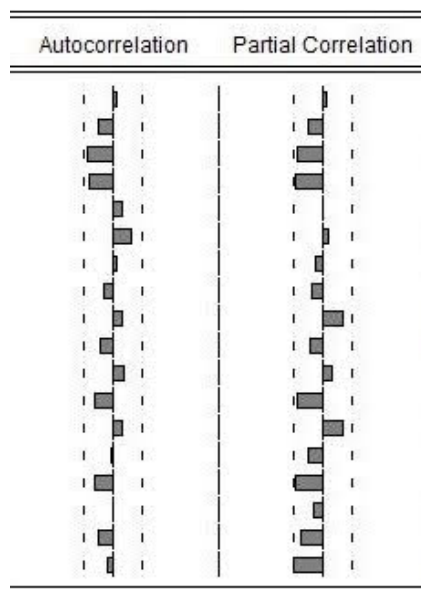
Propriedades 2. São características especiais de FACP, tal que um processo:

- (i) $AR(p)$ tem FACP $\alpha_{hh} \neq 0$ para $k \leq p$ e $\alpha_{hh} = 0$ para $k > p$;

- (ii) $MA(q)$ tem FACP que decai de acordo com exponenciais ou senóides amortecidas, infinita em extensão;
- (iii) $ARMA(p, q)$ tem FACP que se comporta como a FACP de um processo MA puro.

Correlogramas Um correlograma é um gráfico de valores calculados de FAC ou FACP versus cada *lag* t da série temporal [3]. O gráfico apresenta a escala das autocorrelações centralizada em zero e duas linhas tracejadas que destacam os limites que, para além dos quais, os valores são considerados significativamente diferentes de zero. A Figura (2.7) é um modelo de dois correlogramas² com valores menores que os limites, portanto um processo estacionário.

Figura 2.7: Gráfico com dois correlogramas de exemplo.



Fonte: Elaborado pelo autor no *software* EViews®.

A definição a seguir é conforme elucidado por Morettin e Tolo [2] e Cryer e Chan [3].

²Autocorrelation: FAC; Partial Correlation: FACP

Definição 31. *Seja um processo $AR(p)$ de uma amostra tal que $t \in \mathcal{T} = \{1, \dots, T\}$, isto é, amostra de tamanho T , então α_{hh} é dita significativamente diferente de zero se*

$$|\alpha_{hh}| > \frac{2}{\sqrt{T}}. \quad (2.30)$$

Observação 5. *Denominam-se **intervalos de confiança** do correlograma os limites conforme a Definição (31)*

Conforme Box, Jenkins e Reinsel [14], o correlograma é montado como uma trama das diagonais da matriz das autocorrelações, revelando sua simetria em zero porque $\rho_h = \rho_{-h}$. Portanto, dispensa-se de apresentar no gráfico final o lado negativo. A Figura (2.8) apresenta o exemplo dado pelo autor em sua obra, tomando $k = h$.

Caracterização: Para caracterizar a série temporal, deve-se, portanto, analisar quanto às características especiais de FAC e FACP, conforme a seção (2.3.1). O decaimento para zero de forma rápida ou exponencial indica um processo estacionário, caso contrário não estacionário [2] [19]. Havendo senoides amortecidas há possibilidade de ser estacionário ou não estacionário, pois o termo “amortecidas” pode não estar claro graficamente [19].

Então, baseando-se em Morettin e Toloí [2], Enders [19], Maddala [18], Box, Jenkins e Reinsel [14], *et al*, enten-de-se que essa identificação das características especiais pode ser atendida pelo fluxograma de observações e ações apresentados na Figura (2.9)

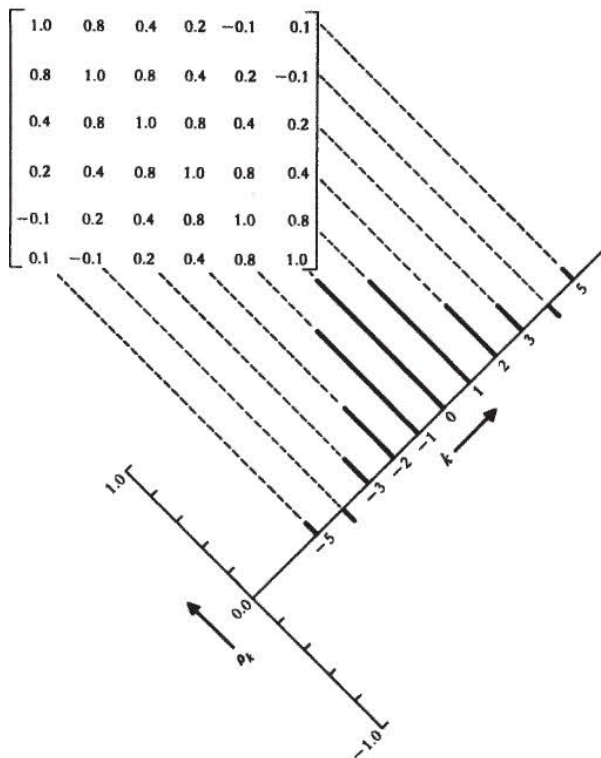
A análise sazonal consta de verificar a existência do componente sazonalidade na série [2]. Portanto, se, após extrair a série ajustada sazonalmente e a tendência da série, restar uma série puramente sazonal, isto é, uma componente sazonal, conclui-se que há sazonalidade na série temporal analisada [19].

A análise dos correlogramas da série sazonalmente ajustada não deve passar por nova análise de sazonalidade para poder ser caracterizada como uma série com componente sazonal determinística, conforme a Observação (3).

Por fim, a série pode ser caracterizada por:

- (i) Estacionária;
- (ii) Não estacionária;

Figura 2.8: Exemplo de montagem de correlograma.



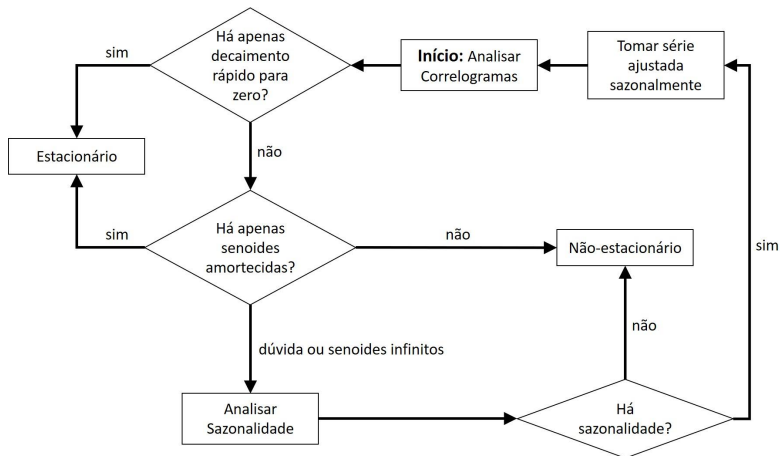
Fonte: Box, Jenkins e Reinsel [14, p.30].

- (iii) Sazonal determinística estacionária;
- (iv) Sazonal determinística não estacionária;
- (v) Sazonal não determinística estacionária;
- (vi) Sazonal não determinística não estacionária;

Sazonalidade determinística: Conforme descrito na seção (2.2.4) uma série temporal caracterizada como sazonal determinística possui o modelo (2.24) e as opções de ajustamento sazonal podem ser determinadas com o Método Census X-12, que é mais detalhadamente explorado por Findley [25].

A identificação desse modelo $W_t = (1 - L^{12})Z_t$ é feita em dois passos, conforme Morettin e Tolo [2, p. 244]:

Figura 2.9: Fluxograma para caracterização da série temporal.



Fonte: Elaborado pelo autor.

1. Obter estimativas preliminares $\tilde{\mu}$, $\tilde{\varphi}_j$, $\tilde{\omega}_j$ de μ , φ_j , e ω_j , $j = 1, \dots, 6$, na equação (2.23), por meio de análise de regressão de Z_t sobre 1 , $\sin \frac{2\pi jt}{12}$ e $\cos \frac{2\pi jt}{12}$, $j = 1, \dots, 6$.
2. Calcular os resíduos

$$\tilde{N}_t = Z_t - \tilde{\mu} - \mu_t - \sum_{j=1}^6 \left[\varphi_j \cos \frac{(2\pi jt)}{12} + \omega_j \sin \frac{(2\pi jt)}{12} \right]$$

e analisa os correlogramas para identificar um modelo ARMA(p, q) para N_t .

2.3.2 Fases de Estimação e Verificação

Conforme Morettin e Toloi [2], a dificuldade da aplicação do método Box-Jenkins causa a necessidade de utilização de programas computacionais adequados. Morettin e Toloi [2] menciona S-PLUS[®], MINITAB[®], SCA[®], ITSM[®] e EViews[®] como programas disponíveis entre tantos outros, capazes de determinar os parâmetros estimados automaticamente.

Há dois métodos para estimar dados por Morettin e Toloi [2]: o dos momentos e o de máxima verossimilhança (EMV). Ambos são introdutórios para uma estimação precisa, em que o primeiro é base para estimação não linear e o segundo possibilita aproximações [2].

Fica aberta, então, a possibilidade de futuros estudos que detalhem, demonstrem e inovem os métodos de estimação dos parâmetros de modelos ARMA(p, q) com exatidão.

Este trabalho utilizou ferramentas disponíveis, principalmente, no programa ou *software* EViews^{®3}. Na fase de estimação e verificação, as tarefas de elaborar os modelos, construir correlogramas e verificar os critérios de informações foram automatizados no *software*. No entanto, a identificação e as decisões fogem do alcance computacional, necessitando experiência e conhecimento específico para manejar os dados.

“Uma desvantagem da técnica Box-Jenkins é que sua utilização requer experiência e algum conhecimento além do uso automático de um pacote de computador” [2, p. 106].

A partir do modelo identificado, pode-se ter uma série estacionária ou não estacionária. Os parâmetros p , d e q precisam ser determinados para a melhor estimação da série, sendo que $d = 0$ caso a série seja estacionária.

No caso de uma série sazonal determinística, como visto na seção (2.3.1), o modelo ARMA(p, q) é que deve ser estimado. Porém, antes disso, devem ser realizadas as estimativas de tendência por regressão e verificar os resíduos para garantir a estacionariedade.

Estimação pelo método de máxima verossimilhança (EMV): Tomemos um modelo ARIMA(p, d, q) e com parâmetros no vetor $\xi = (\alpha, \beta, \sigma_a^2) = (\eta, \sigma_a^2)$, em que $\alpha(\mathcal{L})\Delta^d x_t = \beta(\mathcal{L})a_t$ é o modelo com processo a_t normal. Assim, os EMV de ξ são aqueles valores que maximizam \mathcal{L} ou $\ell = \log \mathcal{L}$ e aproximam-se da estimação de mínimos quadrados (EMQ) [2]. Consideremos, ainda, $W_t = \Delta^d Z_t$ estacionário, tal que W_1, \dots, W_n e $n = N - d$.

Podemos escrever ARMA(p, q) resultante, estacionário e invertível, como

$$a_t = \tilde{W}_t - \alpha_1 \tilde{W}_{t-1} - \dots - \alpha_p \tilde{W}_{t-p} + \beta_1 a_{t-1} + \dots + \beta_q a_{t-q}, \quad (2.31)$$

em que $\tilde{W}_t = W_t - \mu_w$ [2].

Como supomos que a_t é um processo normal, com

$$a_t \sim N(0, \sigma_a^2),$$

³Student Version - www.eviews.com

então temos que a função densidade conjunta de a_1, \dots, a_n é [2, p. 181]:

$$f(a_1, \dots, a_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma_a)^{-n} \exp \left\{ - \sum_{t=1}^n \frac{a_t^2}{2\sigma_a^2} \right\}. \quad (2.32)$$

Denota-se W_t^* e a_t^* os p valores dados de W_t e os q de a_t , respectivamente, então o logaritmo ℓ da **função de verossimilhança condicional** a escolha de W_t e a_t satisfaz, conforme Morettin e Toloi [2]:

$$\ell_*(\xi) = -n \log \sigma_a - \frac{\sum_{t=1}^n a_t^2(\eta|W, W^*, a^*)}{2\sigma_a^2}. \quad (2.33)$$

O logaritmo ℓ da **função de verossimilhança incondicional** satisfaz [14] *apud* [2]:

$$\ell(\xi) = -n \log \sigma_a - \frac{\sum_{t=-\infty}^n [a_t(\eta|W)]^2}{2\sigma_a^2}. \quad (2.34)$$

Portanto, de acordo com as equações (2.33) e (2.34), maximizar $\ell_*(\xi)$ e $\ell(\xi)$ é equivalente a minimizar $S_*(\eta)$ e $S(\eta)$ respectivamente [2], em que

$$S_*(\eta) = \sum_{t=1}^n a_t^2(\eta|W, W^*, a^*), \text{ e}$$

$$S(\eta) = \sum_{t=-\infty}^n [a_t(\eta|W)]^2.$$

Para calcular $S_*(\eta)$ deve considerar, inicialmente, a especificação de $a_0 = 0$ e $z_0 = E(z_t)$. Para $S(\eta)$ deve-se tomar Q um número inteiro suficientemente grande que permita minimizar a soma finita

$$S'(\eta) = \sum_{t=1-Q}^n [a_t(\eta|W)]^2.$$

Ao construir uma tabela contendo os valores de $S_*(\eta)$ e $S(\eta)$ para

$$\eta \in \mathcal{U} = \{0; \pm 0, 1; \pm 0, 2; \dots, \pm 0, 9; \},$$

pois η varia no intervalo $(-1, 1)$, obtem-se a aproximação mais adequada para estimar η que é aquela combinação dos menores valores de $S_*(\eta)$ e $S(\eta)$ [2].

Decisões: Baseando-se nas seções apresentadas anteriormente, pode-se realizar algumas observações para embasar as decisões no procedimento de estimação e verificação.

Observação 6. *Um valor significativo num determinado lag k num correlograma de FAC ou FACP, para estimar um parâmetro p ou q , é aquele que ρ_k ou α_{kk} apresentam valores significativamente maiores que zero, isto é, ultrapassa os intervalos de confiança indicados no gráfico.*

Observação 7. *O melhor modelo estimado é aquele que apresenta uma série ajustada estacionária e com qualquer ρ_h e α_{hh} , de FAC e FACP, significativamente iguais a zero.*

Observação 8. *Uma série identificada como não estacionária deve possuir d tal que resulte em uma série ajustada estacionária.*

Observação 9. *Para cada ρ_k ou α_{kk} existentes, existem parâmetros p ou q candidatos a comporem o modelo ajustado, tais que, $p = k$ ou $q = k$.*

Observação 10. *Os critérios de informação são aqueles que indicam o melhor modelo a ser adotado na fase de verificação de acordo com seus valores e condições.*

Observação 11. *O melhor modelo que se ajusta à série original é aquele que apresenta as combinações de p e q candidatos com melhores valores nos critérios de informação verificados.*

Critérios de informações Cada critério de informação é um método diferente de verificar o quanto cada modelo representa determinada série temporal. Esses critérios combinados auxiliam muito na escolha do melhor modelo. Trataremos neste trabalho os seguintes critérios de informações: mínimos quadrados (R^2), critério de informação de Akaike (AIC) e critério de informação Bayesiano (BIC).

R^2 é também conhecido como *R-squared* ou R^2 , dado por [20]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}, \quad (2.35)$$

com $\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ denominado de *soma do quadrado dos resíduos* do modelo proposto.

A proposição a seguir raramente é demonstrada nos livros, portanto apresentamos aqui nossa versão.

Proposição 7. *Seja R^2 dado em (2.35). Então $0 \leq R^2 \leq 1$.*

Demonstração. Provaremos em três etapas, (i), (ii) e (iii).

(i) Como qualquer quadrado de valor real é não negativo e $\hat{\varepsilon}_t, X_t \in \mathbb{R}$, então $\hat{\varepsilon}_t^2$ e $(X_t - \bar{X})^2$ não são negativos, logo

$$\frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \geq 0.$$

(ii) Agora, somando 1 em cada lado da inequação, temos

$$\frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} + 1 \geq 1,$$

que é

$$1 \geq 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2}.$$

Então,

$$1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} = R^2 \leq 1.$$

(iii) Como $Var(\hat{\varepsilon}_t) \leq Var(X_t)$, então

$$\sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})^2 \leq \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2 \implies \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2 \leq \sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2,$$

portanto,

$$\frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} \leq 1.$$

Logo, somando -1 em ambos os lados da inequação, temos

$$\frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} - 1 \leq 1 - 1,$$

portanto,

$$1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} = R^2 \geq 0.$$

□

Como

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})}{\sum_{t=1}^T (X_t - \bar{X})^2} = 1 - \frac{Var(\hat{\varepsilon}_t)}{Var(X_t)},$$

então podemos entender que quanto maior $\hat{\varepsilon}_t$, menor R^2 , logo, quanto menor for a variância dos resíduos em relação à variância da série, maior será R^2 . Por esse motivo que R^2 de valor mais próximo de 1 indica um modelo melhor.

As definições a seguir foram elaboradas a partir, principalmente, de Morais e Stona [20].

Definição 32. *Seja k o número de coeficientes não nulos do modelo. Então o critério de informação Adjusted R-squared⁴ indica o melhor modelo com o maior valor (\bar{R}^2) e satisfaz*

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{T - 1}{T - k}. \quad (2.36)$$

Portanto, \bar{R}^2 é o R^2 corrigido pelo número k de coeficientes não nulos do modelo.

Definição 33. *Dados p e q os parâmetros de um modelo ARMA(p, q) ajustado às T observações da série com $\hat{\sigma}_{p,q}^2$ uma estimativa da variância residual obtida [2], é indicado como o melhor modelo aquele com o menor valor de AIC (Critério de Informação de Akaike), isto é,*

$$AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + \frac{2(p + q)}{T}. \quad (2.37)$$

Definição 34. *O BIC (Critério de Informação Bayesiano), também conhecido como SBC (Critério Bayesiano de Schwarz) indica o melhor modelo com o menor valor satisfazendo*

$$BIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{p,q}^2 + (p + q) \frac{\ln T}{T}. \quad (2.38)$$

As minimizações de AIC e BIC correspondem a identificação de quais as ordens p e q que combinadas equilibram o comportamento do modelo em relação à série [2]. Portanto, apontam o modelo que melhor se ajusta à série [19].

Para Enders [19], os critérios de informação AIC e BIC para selecionar o melhor modelo são os mais usados entre os vários existentes.

⁴Adjusted R-squared: mínimos quadrados ajustados.

F-Statistic: Outro critério de informação que auxilia na escolha é o p -value⁵ dos coeficientes. No EViews[®] é representado por *Prob.* em coluna ao lado dos coeficientes ao se empregar a estimação de uma equação [20]. O p -value indica se é aceita ou rejeitada a hipótese nula de que determinado coeficiente é estatisticamente igual a zero [20]. Conforme Morais e Stona [20], para essa verificação é assumida uma distribuição t -student.

Para Morettin e Bussab [11], a probabilidade de significância ou nível descritivo do teste é o mesmo p -value. Assumindo uma hipótese H_0 verdadeira, a probabilidade de ocorrer valores da estatística nos extremos da curva gaussiana é calculada para o p -value [11]. Assim, um valor de 0,005 é considerado muito forte a significância, segundo a Escala de Fisher [26] *apud* Morettin e Bussab [11].

Para cada coeficiente do modelo com p -value com significância probabilística, isto é, $Prob < 0,005$, contabiliza-se um grau para esse modelo. Portanto, tomando G graus de p -value, um modelo pode ter $G = \{0, 1, 2, \dots, k\}$, com k o número de coeficientes do modelo.

O F -statistic “tem por objetivo testar se todos coeficientes das variáveis independentes no modelo, em conjunto, são estatisticamente iguais a zero” [20, p.121].

Definição 35. *Prob(F-statistic) é que determina a rejeição ou não da hipótese nula com base no p-value de F que satisfaz*

$$F = \frac{R^2}{(k - 1)} \cdot \frac{T - k}{(1 - R^2)}.$$

Ljung-Box: Conhecido como Q -statistic, o teste de Ljung-Box serve como uma verificação se os resíduos de um modelo estimado de ARMA(p, q) se comportam como um processo de ruído branco [19]. Conforme Morais e Stona [20], é um teste sobre a autocorrelação quanto sua significância estatística.

Definição 36. *Para k o lag máximo, o teste de Ljung-Box satisfaz*

$$Q = T(T + 2) \sum_{j=1}^k \frac{\rho_j^2}{(T - j)}. \quad (2.39)$$

⁵Também dito p -valor.

A hipótese nula para o teste é a ausência de autocorrelação até o lag k e o mesmo possui distribuição qui-quadrado com os graus de liberdade dados pelo número de autocorrelações que se está medindo. [20, p. 139].

No EViews[®], esse teste é apresentado como *Q-stat* em correlograma para cada lag e seu *p-value* identificado como *Prob*. A notação para apresentar o dado é $Q(k) = Q\text{-stat}[Prob]$ [20].

Portanto, a análise sobre a nulidade das autocorrelações dos resíduos depende do teste de hipótese dado pelo método de Ljung-Box.

Se não houver correlação serial nos resíduos, então as autocorrelações e autocorrelações parciais em todos os intervalos devem ser quase nulas e todas as estatísticas *Q-statistic* devem ser insignificantes com grandes valores de *Prob*. [27, p.108].

2.3.3 Previsão

Após o modelo ser estimado e verificado, tem-se uma série final ajustada que pode projetar valores futuros de acordo com os estimadores.

Previsão para modelo sazonal determinístico: Com base nas seções (2.2.4) e (2.3.1), substituindo cada um dos parâmetros de (2.23) por seus estimadores de mínimos quadrados para obter $\hat{\mu}_t$ no lugar de μ_t , encontra-se o processo estimado [2]

$$\hat{N}_t = Z_t - \hat{\mu}_t. \quad (2.40)$$

Assim, os valores futuros Z_{t+h} , dados Z_1, Z_2, \dots, Z_t , são obtidos por [2]

$$\hat{Z}_t(h) = \mu_{t+h} + \hat{N}_t(h). \quad (2.41)$$

Então,

$$\hat{Z}_t(h) = \mu + \sum_{j=1}^6 \left\{ \varphi_j \cos \frac{[2\pi j(t+h)]}{12} + \omega_j \text{sen} \frac{[2\pi j(t+h)]}{12} \right\} + \hat{N}_t(h).$$

Logo, com $h = 0$ e $\alpha(L)\hat{N}_t = \beta(L)\varepsilon_t$, temos

$$\hat{Z}_t = \mu + \sum_{j=1}^6 \left\{ \varphi_j \cos \frac{[2\pi j(t)]}{12} + \omega_j \text{sen} \frac{[2\pi j(t)]}{12} \right\} + [\alpha(L)]^{-1} \beta(L) \varepsilon_t.$$

Acuracidade Testar o resultado final previsto em relação aos dados originais é medir ou determinar o grau de acuracidade do modelo. Ou seja, para cada $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ uma série temporal X_t é ajustada para a previsão de dados futuros por um modelo Y_t , então, dado que n é o tamanho da amostra com $y_t \in \mathbb{R}$, determinamos o **erro percentual médio absoluto** (MAPE⁶) por [20]:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - y_t}{x_t} \right| \times 100\%. \quad (2.42)$$

Ao final desse capítulo, pode-se resumir que o estudo sobre análise séries temporais é dado sob duas perspectivas: uma referente a natureza das séries; e outra a respeito os procedimentos que possibilitam sua previsão. De um lado, é necessário se conhecer bem os fundamentos que levam a determinar as características de uma série, como a sazonalidade e estacionariedade. Num outro lado, entender os modelos disponíveis e os métodos que podem construir um objeto matemático que permita explicar o fenômeno investigado.

Assim, na situação do estudo sobre modelos ARIMA e séries de sazonalidade determinística, percebe-se a importância do entendimento do quanto as funções de autocorrelação implicam em toda análise das séries temporais. Ainda, o método Box-Jenkins é capaz de determinar os parâmetros p , d e q que ajustem o modelo aos dados com ótima acuracidade, mas isso dependerá de bons critérios de informações a serem escolhidos e devidamente aplicados pelo pesquisador.

Finalmente, resta uma aplicação prática que exemplifique as teorias pesquisadas. Isso é feito no capítulo seguinte para, então, firmar o estudo.

⁶Mean Absolute Percentage Error

3 APLICAÇÃO

3.1 PROCEDIMENTOS

O estudo foi aplicado sobre o histórico de consumo de energia elétrica (em kWh) na UFSC, Campus de Blumenau. Os dados baseiam-se nas leituras mensais aferidas pela CELESC¹, companhia responsável pelo fornecimento e faturamento desse produto à UFSC.

A pesquisa foi executada em três etapas, como pode ser visualizada na Figura (3.1).

Figura 3.1: Etapas da Pesquisa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A primeira constou do estudo dos dados existentes e dos interesses da gestão da UFSC em controlar a informação do seu consumo de energia elétrica, ou seja, um apanhado da situação inicial dos dados.

Na segunda etapa foi realizado o levantamento e organização dos dados, tabulando em planilhas eletrônicas para posterior análise em *software* estatístico com ferramentas específicas para séries temporais. O *software* computacional empregado foi o *EViews*[®].

Então, na terceira etapa, utilizando o *EViews*[®], foi construída a previsão do consumo com base no método ARIMA e com outras ferramentas disponíveis nesse *software*. Por fim, foi feita a análise da previsão obtida para os meses seguintes a se consumir energia elétrica no campus.

Planilhas eletrônicas também foram utilizadas para computar e estruturar os dados a serem analisados.

Os modelos empregados foram verificados por meio dos critérios de Akaike² e Bayesian³, entre outros, com a finalidade de que os melhores parâmetros, em concordância com o método Box-Jenkins, fossem adotados no modelo ARIMA(p, d, q).

¹Centrais Elétricas de Santa Catarina - www.celesc.com.br

²AIC - Akaike Information Criterion

³BIC - Bayesian Information Criterion

Por fim, a acuracidade do modelo foi verificada pelos valores obtidos pelo indicador MAPE⁴ e, então, o estudo dos resultados foram analisados.

3.2 SITUAÇÃO INICIAL DOS DADOS

3.2.1 Origem dos dados

Mensalmente a energia elétrica consumida no Campus Blumenau da UFSC é medida pela CELESC, ação que também é chamada de leitura. Há, portanto, um histórico desse consumo. Devido ao próprio tempo de existência do campus, os dados desses consumos puderam ser levantados desde dezembro de 2015.

O ambiente físico da UFSC em Blumenau-SC possui três prédios alugados: o administrativo; o acadêmico; e o laboratório de informática.

O prédio administrativo sedia a direção do campus, as coordenações, as salas de professores, a direção administrativa e outros locais acessórios aos processos da instituição. O prédio acadêmico concentra a principal atividade que é o ensino, composto pelas salas de aula, laboratórios dos cursos, auditório, biblioteca, secretaria e outros locais afins aos processos da instituição. O prédio laboratório de informática possui computadores em duas salas de distintas.

O estudo a ser realizado se concentrará no prédio acadêmico, visto que esse local atende a atividade fim da instituição, consome mais de 70% da energia elétrica total do campus e permite o maior histórico de dados possível. A relevância desse foco deve-se ao interesse de economicidade pela Universidade, pois, como um órgão público que é, mantém-se preocupada com a qualidade do serviço entregue à comunidade. É nesse prédio que o maior número de pessoas transita e utiliza os serviços do campus que, em conjunto com o maior banco de dados de leituras existente, torna o estudo consideravelmente amplo e preciso.

A gestão da energia elétrica é realizada pela direção administrativa do campus, que realiza os serviços de manutenção, ampliação, segurança e controle do consumo por meio do setor DIST⁵. Os dados estudados foram disponibilizados pelo DIST, possuindo, mensalmente, uma leitura para cada um dos 27 medidores de registro de energia elétrica existentes no Prédio acadêmico.

⁴*Mean Absolute Percentage Error*

⁵Divisão de Infraestrutura e Segurança do Trabalho

3.2.2 Apresentação dos dados

É por meio da fatura de energia elétrica gerada pela CELESC, a partir da leitura, que a UFSC confere o seu consumo de energia elétrica mensal. Os dados da fatura levados em consideração nessa pesquisa são: consumo medido no mês; data da leitura atual; e número da unidade consumidora.

As leituras são feitas no dia cinco de cada mês, exceto quando esse dia não for útil que, então, é realizado no dia útil subsequente. Portanto, o mês (ou data) de referência para esse estudo é considerado o mês anterior ao da realização da leitura.

Assim, o consumo de energia elétrica do prédio acadêmico pode ser observado na Tabela (3.1).

Tabela 3.1: Consumo de energia prédio acadêmico UFSC Blumenau (em kWh).

MÊS	ANO					
	2015	2016	2017	2018	2019	2020
jan		9027	8302	10559	15252	13651
fev		9225	14491	20705	16492	15465
mar		13076	21196	25213	25000	
abr		13554	17262	24746	24614	
mai		9891	18249	16101	18508	
jun		11069	15174	13981	16108	
jul		8018	9904	10023	11422	
ago		9864	16540	16207	15850	
set		11996	17362	19405	18211	
out		13943	18454	18485	22273	
nov		15175	18686	21413		
dez	10606	9746	11898	12969		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se na Tabela (3.1) que há oscilações nos valores no transcorrer do tempo.

3.2.3 Interesses da gestão na pesquisa

Tendo em vista a necessidade da gestão em minimizar o consumo discrepante de energia elétrica, ou seja, o desperdício, um dos interesses é encontrar a faixa aceitável de consumo. Assim, a direção administrativa pode agir gerencialmente cada vez que os

valores ultrapassem o que seria previsto como aceitável o campus gastar mensalmente.

De posse do relatório das informações até essa seção do estudo, percebemos apenas os dados tabulados na Tabela(3.1) e, assim apresentados para a gestão da UFSC, foi percebida considerável variação mensal, tornando muito difícil determinar intuitivamente qual será um valor aceitável para o próximo período. Por isso, análise estatística deve ser empregada nessa série temporal para obtermos uma previsão mais precisa.

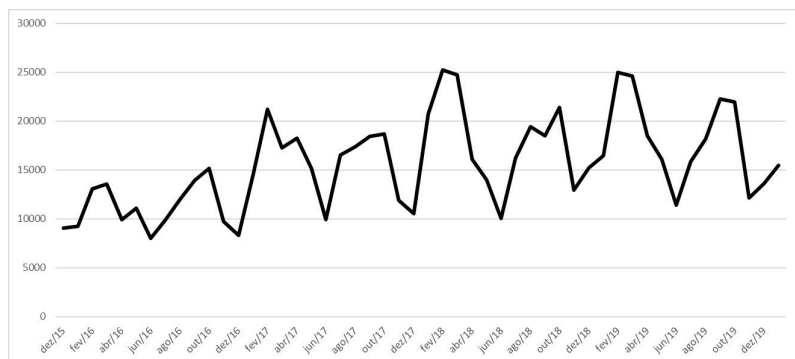
Ao ser aplicado o modelo de previsão, será possível determinar intervalos de confiança para cada um dos momentos futuros. Assim, quando o acontecimento de uma leitura de energia extrapolar o valor máximo previsto pelo modelo, significará um caso de anomalia, ou seja, um potencial desperdício.

3.3 LEVANTAMENTO E ORGANIZAÇÃO DOS DADOS

3.3.1 Informações

Após termos os dados distribuídos ao longo do tempo, iremos, agora, verificar as diferentes maneiras que os dados devem ser dispostos. Com o uso de planilhas eletrônicas e do *software EViews*[®], gráficos foram elaborados a fim de levantar os dados em informações que por ventura venham a ser úteis.

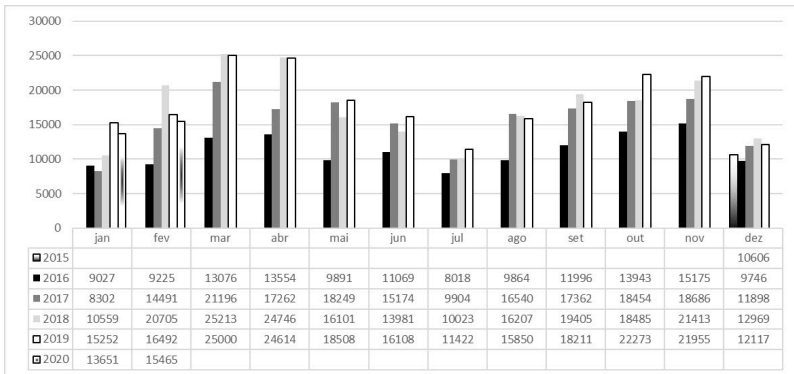
Figura 3.2: Gráfico do consumo do prédio acadêmico em evolução mensal (em kWh).



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

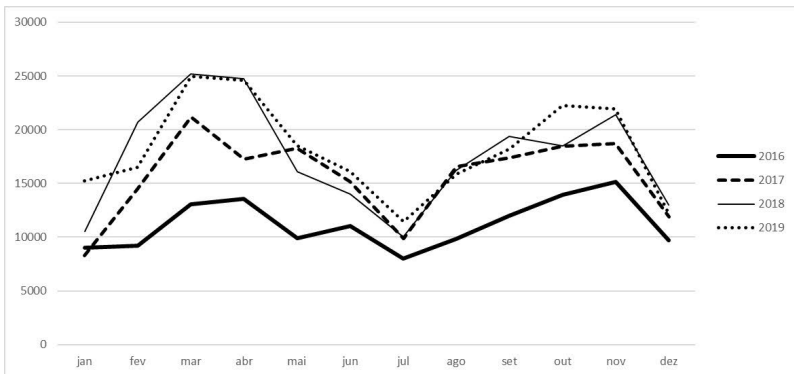
A Figura (3.2) apresenta dados mensais conectados por linhas ao longo do tempo, evidenciando a série temporal estudada.

Figura 3.3: Gráfico do consumo do prédio acadêmico na evolução anual de cada mês (em kWh).



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Figura 3.4: Gráfico do consumo do prédio acadêmico na evolução mensal de cada ano (em kWh).



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Percebe-se nesse gráfico que os valores realmente oscilam e isso parece ocorrer com sazonalidade semestral.

O gráfico na Figura (3.3), que contém também os dados tabelados, mostra a evolução do consumo de cada mês ao longo dos anos. Em alguns meses houve evolução, como julho, novembro e dezembro; enquanto outros apresentaram certa estagnação em algum momento nesse processo, como março, abril, agosto e outubro; e outros tiveram ao menos uma inversão como janeiro, fevereiro, maio,

junho e setembro.

Para entender separadamente o comportamento do consumo em cada ano, a Figura (3.4) foi gerada. Nesse gráfico pode-se comparar cada ano e perceber que 2016 foi bastante menor o consumo em relação aos demais anos. Também nota-se no mesmo gráfico que meses como janeiro, julho e dezembro há menores valores, enquanto que março e novembro ocorrem elevados.

3.3.2 Organização lógica

Até aqui pudemos ter noção do que vem ocorrendo com os dados, mas ainda não foi possível determinar um valor exato para o mês subsequente. Portanto, iremos tratar de organizar os dados que possuímos de forma mais objetiva. Assim, poderá se avançar para cálculos que são meios necessários na busca de um prognóstico.

Observação 12. *Seja t a data de referência de cada leitura, também denominado lag. Portanto $t \in \mathbb{Z}$ e $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, n\}$ é o conjunto dos meses de leituras de uma amostra de tamanho n .*

Observação 13. *Seja X a variável aleatória (v.a.) do consumo de energia elétrica no prédio acadêmico (em kWh).*

Observação 14. *Seja \mathcal{T} um conjunto de amostras com $n = 51$ e X_1 a leitura do consumo referente a dezembro de 2015.*

Evidência: Conforme a Tabela (3.2) que permite a construção do gráfico da série temporal de acordo com a Figura (3.5).

Observação 15. *X_t é a série temporal da v.a. X medida a cada $t \in \mathcal{T}$ e é também denominada **série original**.*

A partir de então puderam ser calculados as estatísticas da média aritmética (\bar{X}), variância (S^2), limites inferior e superior (Lim_{inf} e Lim_{sup}) e mediana (md) para os anos completos da amostra, exibidos na Tabela (3.3). Essas estatísticas indicam sucessivos crescimentos ano a ano, com exceção de S^2 , Lim_{sup} e Lim_{inf} que reduziram em 2019.

Consequentemente o múltiplo gráfico tipo box plot da Figura (3.6) pôde ser construído para visualização do que ocorre com os dados da série temporal classificada em intervalos de 12 para $1 < t < 50$.

Tabela 3.2: Amostragem X_t .

t	X	t	X	t	X
1	10606	19	15174	37	12969
2	9027	20	9904	38	15252
3	9225	21	16540	39	16492
4	13076	22	17362	40	25000
5	13554	23	18454	41	24614
6	9891	24	18686	42	18508
7	11069	25	11898	43	16108
8	8018	26	10559	44	11422
9	9864	27	20705	45	15850
10	11996	28	25213	46	18211
11	13943	29	24746	47	22273
12	15175	30	16101	48	21955
13	9746	31	13981	49	12117
14	8302	32	10023	50	13651
15	14491	33	16207	51	15465
16	21196	34	19405		
17	17262	35	18485		
18	18249	36	21413		

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3.3: Estatísticas de X anualmente.

Ano	t	Estatísticas de X				
		\bar{X}	S^2	Lim_{inf}	Lim_{sup}	md
2016	2 a 13	11215	2284	8018	15175	10480
2017	14 a 25	15627	3856	8302	21196	16901
2018	26 a 37	17484	5070	10023	25213	17346
2019	38 a 49	18150	4498	11422	25000	17352

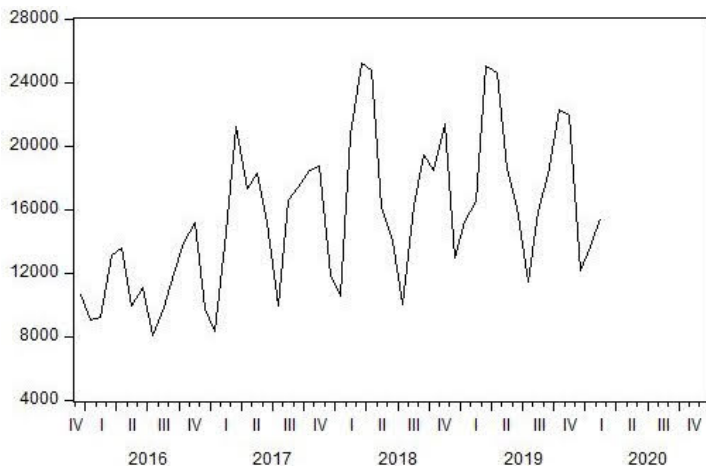
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 16. Seja S um conjunto de dados de uma v.a. Θ_t delimitado de s o período sazonal e denotado por intervalo:

$$S = [\Theta_t, \Theta_{t+s}]$$

Na Figura (3.4) ainda notamos a possibilidade de haver sazonalidade semestral ou anual, ou seja $S = [X_t, X_{t+6}]$ ou $S = [X_t, X_{t+12}]$, pois os decrescimentos e crescimentos parecem ocorrer em períodos semelhantes a cada seis ou 12 meses. Além disso, o gráfico da figura (3.6) mostra o crescimento anual, pois a cada

Figura 3.5: Gráfico da Série Temporal.



Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

$S = [X_t, X_{t+12}]$ diferente na série, tem-se estatísticas crescentes.

3.4 PREVISÃO DO CONSUMO

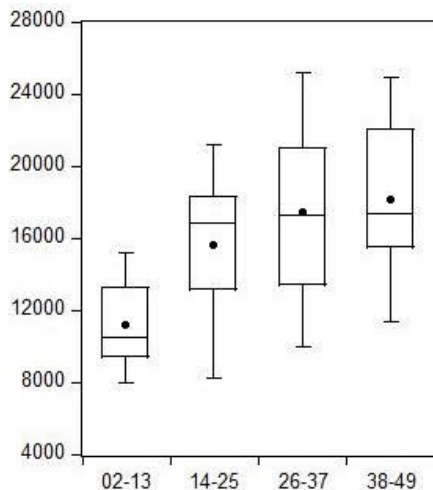
Partindo para a obtenção de um prognóstico para a v.a. X , aplicamos a abordagem de **Box e Jenkins (1970)** conforme as fases propostas por [14]: identificação, estimação, verificação e previsão.

3.4.1 Identificação

Conforme análise descritiva realizada na seção anterior, percebemos que há certa tendência para X_t crescer se $t > 51$, pois há crescimento na série. Também foi notada a possível sazonalidade $S = [X_t, X_{t+6}]$ ou $S = [X_t, X_{t+12}]$. Portanto, agora poderemos comprovar se há de fato esses acontecimentos.

A Figura (3.7) mostra os correlogramas FAC e FACP da v.a. X com $t = 24$. Constata-se que a série pode ser estacionária, pois decai rapidamente em sentido nulo, no entanto, resta dúvida quanto aos picos relevantes em crescimento de FAC na sequência da série num comportamento senoidal.

Observação 17. X é v.a. de uma série temporal sazonal determinística.

Figura 3.6: Box Plot dos intervalos de t .

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Evidência: Identifica-se que há sazonalidade devido os valores serem significativos estatisticamente no correlograma da FAC na Figura (3.7) em $t = 6$ e em $t = 12$. Além disso, os valores de FAC e FACP alternam-se em forma senoidal.

Com o **Método Census X-12**, pudemos traçar as diferentes curvas expostas na Figura (3.8) que representam a série original decomposta após ajustamento sazonal aditivo. Nessa imagem é claramente identificada a sazonalidade determinística, 12 meses, pois os ciclos do fator sazonal não se alteram.

A partir da sazonalidade identificada, recorreu-se ao programa computacional (*software*) para estimar preliminarmente os parâmetros com análise de regressão e, então, identificar os resíduos pelos valores de FAC e FACP. A Figura (3.9) mostra as estatísticas da série original ajustada e a Figura (3.10) exhibe o gráfico da série original, da série ajustada sazonalmente e dos resíduos do ajuste sazonal.

Observação 18. *A série original é não estacionária.*

Evidência Conforme a Figura (3.11), o correlograma apresenta FAC decaindo lentamente para zero. Logo, rejeita-se a hipótese nula

Figura 3.7: FAC e FACP de X_t .

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.558	0.558	16.841	0.000
		2	0.085	-0.329	17.240	0.000
		3	-0.147	-0.043	18.457	0.000
		4	0.001	0.257	18.457	0.001
		5	0.424	0.467	29.031	0.000
		6	0.573	0.087	48.737	0.000
		7	0.411	0.068	59.128	0.000
		8	-0.031	-0.277	59.187	0.000
		9	-0.224	0.037	62.409	0.000
		10	-0.106	-0.111	63.143	0.000
		11	0.275	0.257	68.252	0.000
		12	0.505	0.021	85.950	0.000
		13	0.215	-0.255	89.230	0.000
		14	-0.156	-0.107	91.015	0.000
		15	-0.347	0.057	100.07	0.000
		16	-0.224	-0.173	103.93	0.000
		17	0.103	-0.016	104.76	0.000
		18	0.231	-0.135	109.12	0.000
		19	0.127	0.168	110.47	0.000
		20	-0.144	0.072	112.28	0.000
		21	-0.310	0.031	120.95	0.000
		22	-0.203	-0.022	124.80	0.000
		23	0.020	-0.092	124.84	0.000
		24	0.162	-0.062	127.47	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews[®].

de estacionariedade, ou seja, implica ser não estacionária a série ajustada pelos parâmetros de sazonalidade.

Pelas Observações (17) e (18), identifica-se, conforme Morrettin e Tolo [2], que o modelo a ser empregado é ARMA após estacionarizar a série.

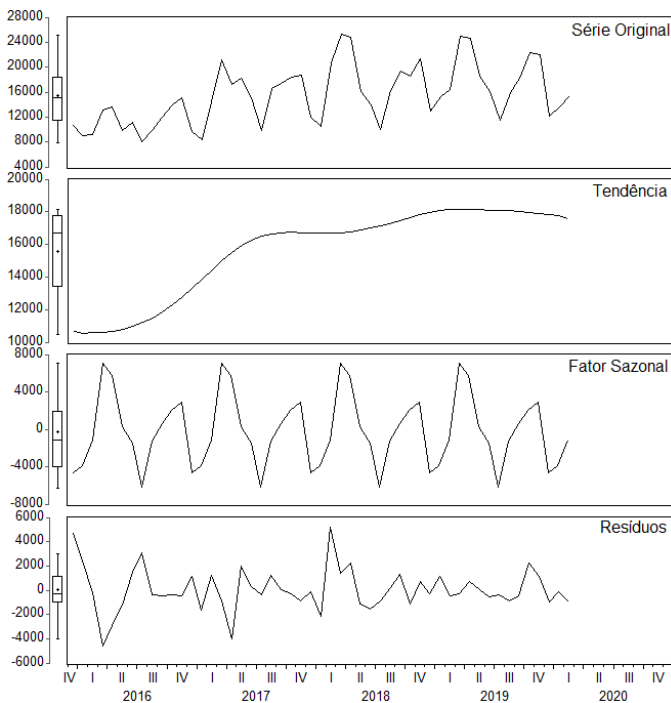
3.4.2 Estimação e Verificação

Inicialmente é necessário obter as estimativas de tendência por regressão e identificar os resíduos. Com auxílio do *software*, calculamos as regressões de tendências partindo da linear até que o modelo apresente resíduos independentes e identicamente distribuídos, isto é, ruído branco. Para tanto, recorre-se a verificação pelo teste de *Ljung-Box* e os valores de seus critérios de informação contabilizados: mínimos quadrados ajustados (\bar{R}^2 ou *Adjusted R-squared*); AIC (Akaike criterion); e BIC (Schwarz criterion).

Quanto maior \bar{R}^2 e menores AIC e BIC, mais indicado é o modelo. No teste de *Ljung-Box*, o resíduo é ruído branco se a hipótese nula for afirmada, portanto um *p-valor* significativo.

Observação 19. A regressão exponencial indica o melhor modelo para X_t .

Figura 3.8: Decomposição da série original.



Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Evidência: A Figura (3.12) mostra que nos *lags* 1, 23 e 24 o teste de *Ljung-Box* descarta hipótese nula, portanto os resíduos não são ruído branco, isso implica que a tendência linear é insuficiente para estacionarizar a série ajustada sazonalmente. A Figura (3.13) ao mesmo teste indica que nenhum *lag* é significativamente diferente de zero, isto é, os resíduos são ruído branco e, portanto, a tendência exponencial é suficiente para estacionarizar a série. As Figuras (3.14) e (3.15) mostram as estatísticas calculadas. Pode-se notar que as estatísticas da regressão exponencial indicam ser esse o melhor modelo pelo \bar{R}^2 ser maior e AIC e BIC menores.

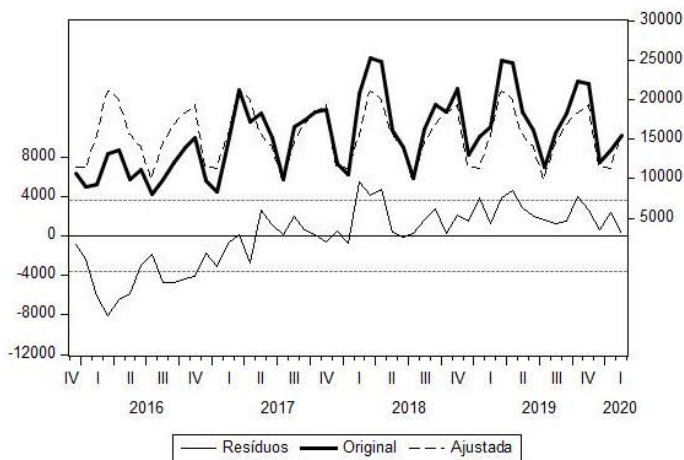
O gráfico a partir da Figura (3.14) é apresentado na Figura (3.16) e o gráfico da Figura (3.15) é apresentado na Figura (3.17). Nesses gráficos podemos notar os resíduos distribuídos como supostos ruídos brancos e a série ajustada está posicionada bastante próxima da série original, que sensivelmente é melhor em estimação

Figura 3.9: Estatísticas da série original sazonal.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	11467.20	1592.854	7.199153	0.0000
@MONTH=1	-109.0000	2252.636	-0.048388	0.9617
@MONTH=2	3808.400	2252.636	1.690642	0.0989
@MONTH=3	9654.050	2389.281	4.040567	0.0002
@MONTH=4	8576.800	2389.281	3.589699	0.0009
@MONTH=5	4220.050	2389.281	1.766243	0.0852
@MONTH=6	2615.800	2389.281	1.094806	0.2803
@MONTH=7	-1625.450	2389.281	-0.680309	0.5003
@MONTH=8	3148.050	2389.281	1.317572	0.1953
@MONTH=9	5276.300	2389.281	2.208321	0.0332
@MONTH=10	6821.550	2389.281	2.855064	0.0069
@MONTH=11	7840.050	2389.281	3.281343	0.0022
R-squared	0.552544	Mean dependent var	15479.08	
Adjusted R-squared	0.426338	S.D. dependent var	4702.544	
S.E. of regression	3561.730	Akaike info criterion	19.39620	
Sum squared resid	4.95E+08	Schwarz criterion	19.85075	
Log likelihood	-482.6032	Hannan-Quinn criter.	19.56990	
F-statistic	4.378120	Durbin-Watson stat	0.443719	
Prob(F-statistic)	0.000283			

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Figura 3.10: Gráfico das séries original e sazonalmente ajustada.



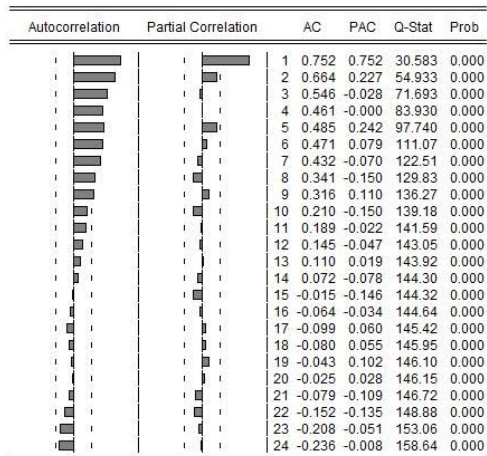
Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

exponencial.

Observação 20. A série sazonal ajustada exponencialmente é estacionária, portanto podemos chamá-la de série original estacionarizada.

Evidência: Conforme a Figura (3.13), o correlograma apresenta FAC e FACP dos resíduos da estimação realizada, em que nota-se

Figura 3.11: Correlograma da série ajustada sazonalmente.



Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

que não há autocorrelações relevantes pois os valores se encontram dentro dos limites de confiabilidade. Além disso, possuem aproximadamente média zero e variância constante, portanto são ruído branco.

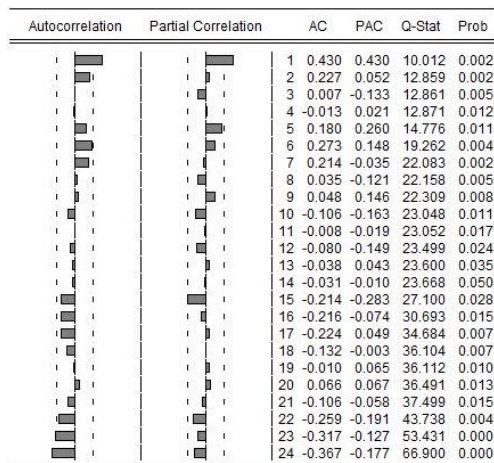
O próximo passo, ao obter a série estacionária, é definir os parâmetros para o modelo ARMA, isto é $AR(p)$ e $MA(q)$. O objetivo é encontrar os p e q que definem o melhor ajustamento da série.

Para cada p e q combinados foram anotados para verificação os critérios de informação \bar{R}^2 , AIC e BIC e tabelados conforme a Figura (3.4). As opções para esses parâmetros foram baseadas no correlograma da série original, dado pela Figura (3.7), em que selecionamos $t = 1, 5, 6, 12$ como os valores mais significantes. Nota-se outros valores diferentes de zero, no entanto com autocorrelações muito menores dessas selecionadas, por isso é um aceitável critério de moderação.

Em todas essas combinações, o p -value⁶ calculado para o conjunto dos coeficientes foi de zero. Logo, em todas as possibilidades há fortíssima significância probabilística segundo a Escala de Fisher⁷. Assim, rejeita-se a hipótese nula de que os coeficientes angulares da regressão são conjuntamente iguais a zero. Individualmente, ne-

⁶Prob(F-statistic) dos coeficientes no EViews®.

⁷Escala crescente do grau de significância [11].

Figura 3.12: Correlograma da regressão linear de X .

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

nhum dos coeficientes dos potenciais modelos apresentou significância probabilística (p -value), portanto dispensa-se o comparativo entre eles.

Observação 21. Seja \hat{X}_t a série temporal estacionarizada e calculada com modelo $ARMA(p, q)$ a partir da v.a. X em cada $t \in \mathcal{T}$. \hat{X}_t é também denominada **série ajustada ao modelo**.

Para escolher os melhores parâmetros que estimam \hat{X}_t , precisamos analisar com mais cautela os resíduos das duas possibilidades encontradas, conforme Tabela (3.4), $ARMA(1, 12)$ e $ARMA(6, 12)$ porque apresentaram os melhores valores nos critérios de informações. Para tanto foram realizados os Q -statistics ou testes de *Ljung-Box* a fim de verificar o comportamento de seus resíduos.

Foram realizados os diagnósticos pelo teste de **Ljung-Box** sobre os resíduos de cada possibilidade de \hat{X}_t , isto é, $ARMA(1, 12)$ e $ARMA(6, 12)$, conforme Figuras (3.18) e (3.19).

Identifica-se que nos lags 4 e 24 a FAC extrapola o intervalo de confiança em $ARMA(6, 12)$, enquanto que em $ARMA(1, 12)$ nenhum lag apresenta valor significativamente diferente de zero. Portanto, os resíduos de $ARMA(1, 12)$ são ruído branco enquanto que de $ARMA(6, 12)$ não são. Pode-se concluir que apenas o modelo

Figura 3.13: Correlograma da regressão exponencial de X .

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob	
		1	0.214	0.214	2.4708	0.116
		2	-0.088	-0.140	2.8971	0.235
		3	-0.322	-0.290	8.7534	0.033
		4	-0.284	-0.190	13.398	0.009
		5	0.005	0.047	13.400	0.020
		6	0.195	0.081	15.676	0.016
		7	0.147	-0.028	17.012	0.017
		8	-0.083	-0.154	17.441	0.026
		9	-0.009	0.139	17.446	0.042
		10	-0.164	-0.128	19.213	0.038
		11	-0.008	0.004	19.217	0.057
		12	-0.087	-0.191	19.744	0.072
		13	0.002	0.010	19.744	0.102
		14	0.033	-0.011	19.826	0.136
		15	-0.174	-0.316	22.103	0.105
		16	-0.160	-0.217	24.067	0.088
		17	-0.080	-0.048	24.578	0.105
		18	0.013	-0.156	24.590	0.137
		19	0.175	0.003	27.170	0.101
		20	0.314	0.121	35.779	0.016
		21	0.104	0.113	36.745	0.018
		22	-0.070	-0.000	37.199	0.022
		23	-0.179	-0.081	40.309	0.014
		24	-0.278	-0.210	48.018	0.003

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Figura 3.14: Estatísticas da regressão linear de X .

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	7618.400	1202.781	6.333989	0.0000
@TREND	160.3667	22.99474	6.974060	0.0000
@MONTH=1	-269.3667	1511.543	-0.178206	0.8595
@MONTH=2	3487.667	1512.068	2.306554	0.0266
@MONTH=3	10135.15	1604.532	6.316578	0.0000
@MONTH=4	8897.533	1603.708	5.548102	0.0000
@MONTH=5	4380.417	1603.213	2.732274	0.0095
@MONTH=6	2615.800	1603.048	1.631766	0.1110
@MONTH=7	-1785.817	1603.213	-1.113899	0.2723
@MONTH=8	2827.317	1603.708	1.762988	0.0859
@MONTH=9	4795.200	1604.532	2.988535	0.0049
@MONTH=10	6180.083	1605.685	3.848877	0.0004
@MONTH=11	7038.217	1607.166	4.379272	0.0001
R-squared	0.803742	Mean dependent var	15479.08	
Adjusted R-squared	0.741765	S.D. dependent var	4702.544	
S.E. of regression	2389.683	Akaike info criterion	18.61127	
Sum squared resid	2.17E+08	Schwarz criterion	19.10370	
Log likelihood	-461.5875	Hannan-Quinn criter.	18.79944	
F-statistic	12.96852	Durbin-Watson stat	1.036466	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

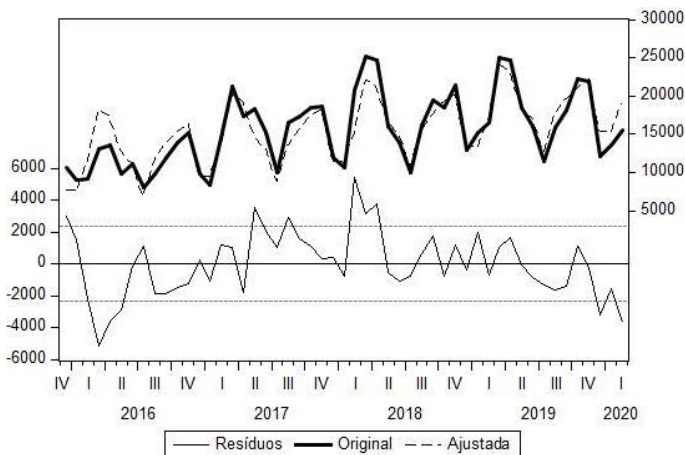
ARMA(1, 12) é estacionário entre as opções possíveis para o modelo final.

Analisando ainda melhor o modelo ARMA(6, 12) rejeitado, percebe-se que o seu coeficiente de MA é $\beta = -1$, portanto é não invertível, pois $|\beta| < 1$ implica em invertibilidade. Logo, definitivamente, rejeita-se utilizar a estimação ARMA(6, 12).

Figura 3.15: Estatísticas da regressão exponencial de X_t .

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	5750.040	1173.667	4.899208	0.0000
@TREND	438.3964	80.32651	5.457681	0.0000
@TREND^2	-5.560595	1.555469	-3.574866	0.0010
@MONTH=1	-274.9273	1320.647	-0.208176	0.8362
@MONTH=2	3487.667	1321.104	2.639963	0.0121
@MONTH=3	9618.015	1409.334	6.824509	0.0000
@MONTH=4	8341.474	1409.778	5.916871	0.0000
@MONTH=5	3796.554	1410.228	2.692156	0.0106
@MONTH=6	2015.256	1410.633	1.428618	0.1615
@MONTH=7	-2391.922	1410.962	-1.695242	0.0984
@MONTH=8	2226.772	1411.205	1.577923	0.1231
@MONTH=9	4211.338	1411.372	2.983860	0.0050
@MONTH=10	5624.024	1411.495	3.984445	0.0003
@MONTH=11	6521.081	1411.624	4.619561	0.0000
R-squared	0.854126	Mean dependent var	15479.08	
Adjusted R-squared	0.802873	S.D. dependent var	4702.544	
S.E. of regression	2087.883	Akaike info criterion	18.35380	
Sum squared resid	1.61E+08	Schwarz criterion	18.88411	
Log likelihood	-454.0219	Hannan-Quinn criter.	18.55645	
F-statistic	16.66488	Durbin-Watson stat	1.406338	
Prob(F-statistic)	0.000000			

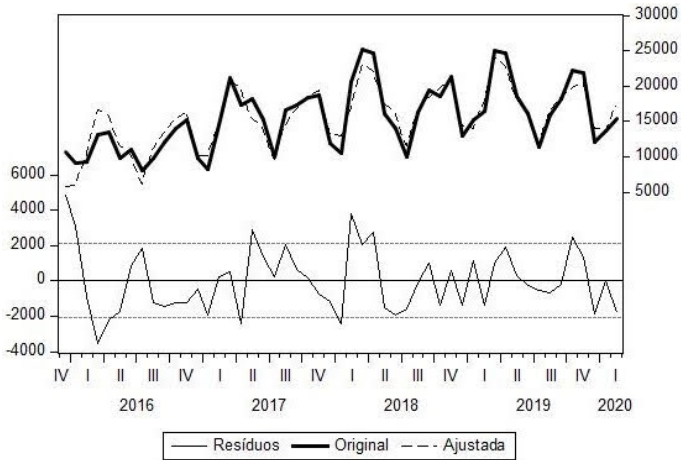
Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Figura 3.16: Gráfico da estimação de X_t linear.

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Observação 22. O modelo selecionado é o $ARMA(1, 12)$ para a série temporal ajustada sazonalmente ser a série ajustada ao modelo: \hat{X}_t .

Evidência: Entre as possibilidades de modelos não rejeitadas, o maior valor de \bar{R}^2 , o menor valor de AIC e o menor valor de BIC

Figura 3.17: Gráfico da estimação de X_t exponencial.

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

são da combinação ARMA(1, 12) para \hat{X}_t , conforme a Tabela (3.4). Portanto esse é o modelo mais indicado.

Tabela 3.4: Tabela de valores de verificação do modelo ARMA(p, q) para X_t .

p	q	\bar{R}^2	AIC	BIC
1	12	0,892922	18,16844	18,81238
6	12	0,891362	18,16041	18,80435
0	12	0,886132	18,21727	18,82333
5	12	0,883018	18,25477	18,89871
0	6	0,867139	18,24681	18,85287
12	6	0,865204	18,28385	18,92779
1	6	0,863922	18,28108	18,92502
5	6	0,863237	18,28598	18,92993
6	6	0,861675	18,23967	18,88361
6	0	0,807266	18,36693	18,97299
6	1	0,80712	18,37313	19,01707
12	12	0,805122	18,45804	19,10198
12	1	0,804593	18,38719	19,03113
0	1	0,804576	18,36938	18,97544
1	0	0,804083	18,37202	18,97809
6	5	0,801604	18,40611	19,05006
1	1	0,799255	18,40666	19,0506
5	1	0,79884	18,40854	19,05248
1	5	0,798346	18,41115	19,05509
12	0	0,795033	18,42016	19,02622
0	5	0,79163	18,43216	19,03822
5	0	0,791617	18,4322	19,03826
12	5	0,78901	18,45937	19,10331
5	5	0,78583	18,47005	19,11399

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observação 23. O modelo final estimado é o ARMA(1, 12), portanto \hat{X}_t .

Evidência: Conforme Observação (23) e Figura (3.18) que mostra o correlograma com teste de *Ljung-Box* desse modelo, todos os *lags* estão dentro do intervalo de confiança. Isto é, *Prob* não é significativo que, então, não rejeita-se a hipótese nula do teste para os resíduos de X_t com ajuste ARMA(1, 12), indicando que esse é o modelo mais adequado para a previsão.

Conforme observado na seção (2.2.2), podemos dizer que

Figura 3.18: Correlograma do Teste **Ljung-Box** dos resíduos de \hat{X}_t por ARMA(1, 12).

Q-statistic probabilities adjusted for 2 ARMA terms

	Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*
1			-0.026	-0.026	0.0370	
2			-0.067	-0.067	0.2829	
3			-0.265	-0.270	4.2335	0.040
4			-0.280	-0.329	8.7271	0.013
5			0.058	-0.042	8.9221	0.030
6			0.223	0.122	11.908	0.018
7			0.204	0.106	14.459	0.013
8			-0.153	-0.210	15.925	0.014
9			-0.004	0.090	15.926	0.026
10			-0.195	-0.034	18.433	0.018
11			0.054	0.050	18.631	0.029
12			0.117	0.002	19.584	0.033
13			0.046	-0.004	19.734	0.049
14			0.108	0.143	20.589	0.057
15			-0.233	-0.164	24.681	0.025
16			-0.134	-0.171	26.062	0.025
17			-0.018	0.030	26.089	0.037
18			0.006	-0.120	26.091	0.053
19			0.091	-0.106	26.796	0.061
20			0.216	0.145	30.866	0.030
21			0.023	0.127	30.915	0.041
22			-0.074	0.080	31.427	0.050
23			-0.024	0.018	31.481	0.066
24			-0.305	-0.236	40.823	0.009

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

ARMA(1,12) equivale a ARIMA(1,0,12), em que, por convenção, utilizamos o primeiro caso preferencialmente.

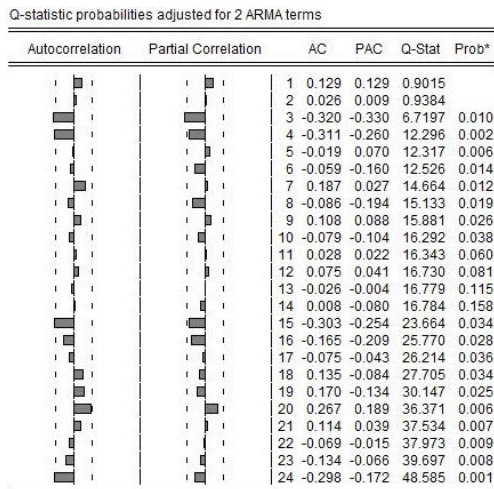
O gráfico desse modelo final, contendo X_t (original) e \hat{X}_t , está na Figura (3.20) que evidencia a série ajustada ao modelo final muito próxima da original.

Portanto, o modelo estimado nessa fase, conforme Observação (23) e Figura (3.21), indica que 89,3% da variabilidade do percentual de X (conforme \bar{R}^2) pode ser atribuída a tendência do modelo. Assim, podemos seguramente aplicar esse modelo na próxima fase do estudo.

3.4.3 Previsão

Observação 24. Seja Y_t a série temporal do modelo final estimado conforme Observação (23).

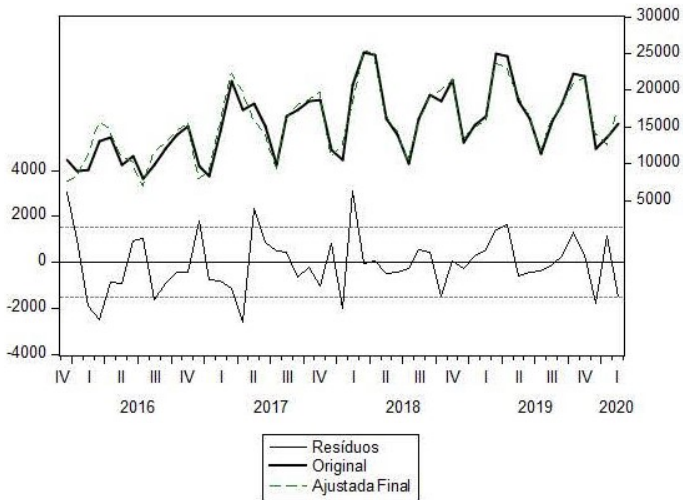
Figura 3.19: Correlograma do Teste **Ljung-Box** dos resíduos de \hat{X}_t por ARMA(6, 12).



Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Conforme calculado no EViews, com estatísticas apresentadas na Figura (3.21), obtemos

$$\begin{aligned}
 y_t = & 6026,74 + 398,02t - 5,06t^2 - 308,97 \cos \frac{2\pi t}{12} + \\
 & + 4145,61 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{12} + 10027,53 \cos \frac{4\pi t}{12} + 8626,15 \operatorname{sen} \frac{4\pi t}{12} + \\
 & + 4232,57 \cos \frac{6\pi t}{12} + 2279,81 \operatorname{sen} \frac{6\pi t}{12} - 2180,3 \cos \frac{8\pi t}{12} + \\
 & + 2789 \operatorname{sen} \frac{8\pi t}{12} + 4785,54 \cos \frac{10\pi t}{12} + 5981,91 \operatorname{sen} \frac{10\pi t}{12} + \\
 & + 7186,26 \cos \frac{12\pi t}{12} + \omega_6 \operatorname{sen} \frac{12\pi t}{12} + \\
 & + [0.341376(L)]^{-1} \cdot 0.999995(L)\varepsilon_t.
 \end{aligned}$$

Figura 3.20: Gráfico da estimação final de \hat{X}_t .

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Segue que

$$\begin{aligned}
 y_t = & 6026,74 + 398,02t - 5,06t^2 - 308,97 \cos \frac{\pi t}{6} + \\
 & + 4145,61 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{6} + 10027,53 \cos \frac{\pi t}{3} + 8626,15 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{3} + \\
 & + 4232,57 \cos \frac{\pi t}{2} + 2279,81 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2} - 2180,3 \cos \frac{2\pi t}{3} + \\
 & + 2789 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{3} + 4785,54 \cos \frac{5\pi t}{6} + 5981,91 \operatorname{sen} \frac{5\pi t}{6} + \\
 & + 7186,26 \cos \pi t + [0.341376(L)]^{-1} \cdot 0.999995(L)\varepsilon_t.
 \end{aligned}$$

A previsão dentro da amostra (*in sample*) pode ser verificada pela projeção de Y_t no futuro. Portanto, utilizando EViews®, foram criados os gráficos dessa projeção dos dados, os quais apresentam diferentes perspectivas conforme as Figuras (3.22) e (3.23).

Observação 25. Seja $\pm 2S.E.$ as séries temporais em função de Y_t com dois desvios padrão de diferença ou soma em relação à média em cada instante t . São os intervalos de confiança e denominados **limites da previsão**.

Portanto, os gráficos (3.22) e (3.23) apresentam as previsões para até o final do ano de 2020. Esses dados de previsão podem

Figura 3.21: Estatísticas de Y_t .

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	6026.745	654.1722	9.212781	0.0000
@TREND	398.0211	83.00675	4.795045	0.0000
@TREND^2	-5.061540	1.773635	-2.853767	0.0073
@MONTH=1	-308.9710	448.9975	-0.688135	0.4960
@MONTH=2	4145.612	432.8319	9.577881	0.0000
@MONTH=3	10027.53	577.7016	17.35763	0.0000
@MONTH=4	8626.153	585.7363	14.72702	0.0000
@MONTH=5	4232.573	689.5764	6.137932	0.0000
@MONTH=6	2279.809	1002.468	2.274196	0.0294
@MONTH=7	-2180.297	1281.100	-1.701894	0.0979
@MONTH=8	2789.999	1164.859	2.394281	0.0223
@MONTH=9	4785.543	1232.244	3.883599	0.0005
@MONTH=10	5981.912	708.2513	8.446030	0.0000
@MONTH=11	7186.259	854.1516	8.413330	0.0000
AR(1)	0.341376	0.149748	2.279670	0.0290
MA(12)	-0.999995	5734.189	-0.000174	0.9999
SIGMASQ	1578611.	4.69E+09	0.000337	0.9997
R-squared	0.927187	Mean dependent var	15479.08	
Adjusted R-squared	0.892922	S.D. dependent var	4702.544	
S.E. of regression	1538.804	Akaike info criterion	18.16844	
Sum squared resid	80509152	Schwarz criterion	18.81238	
Log likelihood	-446.2952	Hannan-Quinn criter.	18.41451	
F-statistic	27.05931	Durbin-Watson stat	1.901627	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

ser conferidos detalhadamente em apêndice e com uma parcela a se observar na Tabela (3.5).

Observação 26. *A acuracidade do modelo final estimado é muito boa, segundo cálculo pelo valor de MAPE (Mean Absolute Percentage Error).*

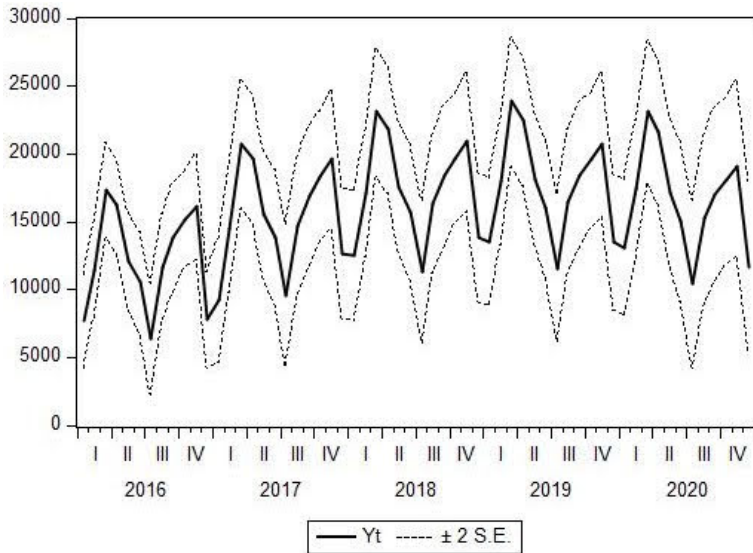
Evidência: Dado que MAPE é definido pela equação (2.42), então $MAPE = 9,81$. Logo o erro é consideravelmente baixo, indicando muito boa acuracidade do modelo final estimado.

3.5 RESULTADOS

A previsão encontrada para o consumo de energia elétrica no prédio acadêmico da UFSC em Blumenau mostra que há possibilidade de que haja certa redução do consumo ao longo dos meses no ano de 2020. Isso é evidenciado quando, por exemplo, mede-se \bar{X} entre março de 2019 e dezembro de 2019, isto é, $t = [40, 49]$ e \bar{Y} entre março de 2020 e dezembro de 2020, isto é, $t = [52, 61]$:

$$18606 = \bar{X}_{[40,49]} > \bar{Y}_{[52,61]} = 16857$$

Fica elucidado que há uma faixa de valores aceitáveis para cada mês a se consumir energia elétrica futuramente do Campus.

Figura 3.22: Gráfico de Y_t com previsão e limites $\pm 2S.E.$.

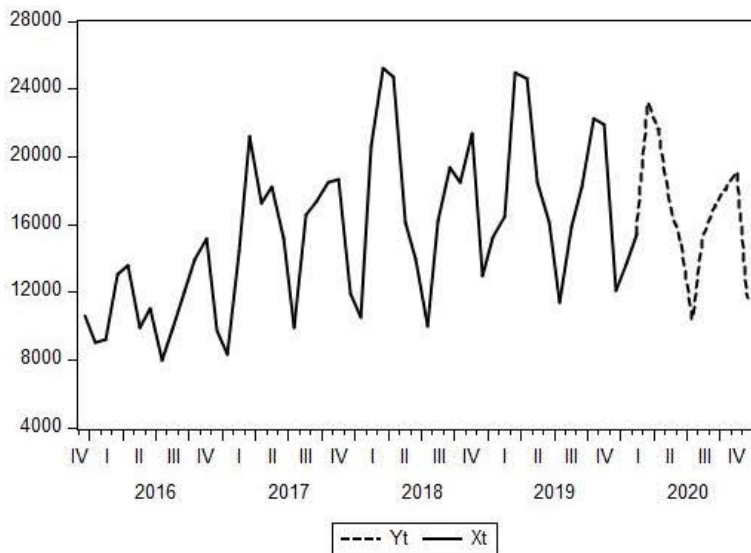
Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Assim, surgindo alguma extrapolação, a direção administrativa poderá agir de diversas formas para detectar as causas e determinar medidas para possivelmente retomar o curso do consumo normalmente esperado.

Quanto ao método de previsão a ser adotado em próximas aplicações na série aqui estudada, recomenda-se sempre seguir os passos: identificação, estimação, verificação e previsão. Então, sabendo que o comportamento da série é sazonal, basta verificar os critérios de informação para conhecer o melhor modelo.

Para estudos em outras séries temporais mesmo com dados de mesma grandeza física, ou seja, kWh consumo de energia elétrica, poderão haver mudanças quanto a existência sazonalidade. Portanto, uma análise descritiva e mais completa será necessária.

Enfim, foi encontrada a previsão para a série temporal estudada, conforme requerido inicialmente, logo, alcançou-se o objetivo da presente aplicação.

Figura 3.23: Gráfico de X_t com a previsão dada por Y_t .

Fonte: Elaborado pelo autor no EViews®.

Tabela 3.5: Tabela de valores previstos para o consumo de energia no prédio acadêmico do Campus Blumenau da UFSC.

t	mês-ano	X	Y	$-S.E. = Y_{min}$	$+S.E. = Y_{max}$
48	nov-2019	21955	20739	15394	26084
49	dez-2019	12117	13470	8519	18421
50	jan-2020	13651	13068	8030	18106
51	fev-2020	15465	17420	12328	22511
52	mar-2020		23188	17952	28424
53	abr-2020		21664	16294	27033
54	mai-2020		17137	11631	22642
55	jun-2020		15040	9161	20919
56	jul-2020		10426	4211	16642
57	ago-2020		15232	8902	21562
58	set-2020		17055	10593	23516
59	out-2020		18067	11910	24223
60	nov-2020		19077	12550	25604
61	dez-2020		11686	5436	17937

Fonte: Elaborado pelo autor.

4 IDEIA PARA O ENSINO BÁSICO

A intenção de elaborar uma ideia para o Ensino Básico parte da importância que se dá à aplicabilidade destes estudos, alcançando um público que pode, além de aprender, conduzir futuras pesquisas e aplicações em seus convívios. Proporcionar ao jovem educando um conhecimento que será útil em sua casa, em seu emprego ou na continuidade de seus estudos é a visão que se tem neste trabalho.

Neste capítulo está apresentado, inicialmente, um contexto da educação básica no Brasil que aborda a análise de séries temporais como um possível assunto a ser conhecido nesse nível de ensino. Ao final, a ideia é definitivamente exposta e detalhada.

4.1 CONTEXTO

É de todos a tarefa de oferecer uma educação básica de qualidade para inserir o aluno, desenvolver o país e consolidar a cidadania [28]. Portanto, independente da área profissional de atuação, há de chegar o momento que o cidadão compartilhe seu conhecimento ou experiência para o bem da comunidade.

Como esse trabalho traz uma sugestão de aplicação na escola básica de ensino, pode-se definir que as finalidades do Ensino Médio são [28, p. 7]:

O aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado. [28, p. 7].

Logo, o Ensino Médio deve completar a educação básica no sentido de preparar para a vida, propiciando um aprendizado permanente no prosseguimento dos estudos ou no mundo do trabalho [29]. É com esse intuito que o presente estudo propõe uma experiência prática da rotina vivida pelos estudantes escolares.

De acordo com MEC¹ [28], a Matemática deve propiciar aos alunos as capacidades de resolver problemas práticos do cotidiano, modelar fenômenos e compreender a ciência via teoremas e demonstrações. Por isso, trazer exemplos de dentro do convívio do aluno é uma ideia adequada para a aprendizagem, especialmente aqueles que encaixam com a metodologia científica.

¹Ministério da Educação do Governo Federal Brasileiro

A aprendizagem deve incluir o raciocínio matemático para:

Formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contra-exemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. [28, p. 70].

Também, conforme Sadowski [12] *apud* Secretaria da Educação da Prefeitura Municipal de Blumenau [30]:

Para produzir um conhecimento de boa qualidade, não basta conhecer truques e fórmulas matemáticas memorizadas, é preciso saber como e porque aplicá-las e, mais que isso, compreendê-las, pois o que há de gostoso e interessante na matemática é o jogo da argumentação: discutir ideias e desafios. [30, p. 210].

Então, mais do que calcular e chegar em resultados, o importante é que o aluno saiba contextualizar e raciocinar sobre os problemas. Assim, esse estudante melhor compreenderá e poderá muito bem argumentar sobre o assunto aprendido.

Por outro lado, há a organização curricular que necessita atender a amplitude geral do ensino. Os seguintes componentes são propostos pelas Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº. 9393/96), conforme [28, p. 7]:

Base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada que atenda a especificidades regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e do próprio aluno (Art. 26); planejamento e desenvolvimento orgânico do currículo, superando a organização por disciplinas estanques; integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização; proposta pedagógica elaborada e executada pelos estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as de seu sistema de ensino; e participação dos docentes na elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino. [28, p. 7].

É nessa direção que a ideia a ser apresentada neste trabalho pode vir a se tornar uma proposta que contempla reflexões práticas sobre o conteúdo a ser ensinado, por meio de atividade interativa em sala de aula, aprendizado de outras áreas de conhecimento e exploração de tópicos diversos da estatística. Assim, a ideia exposta mais adiante é uma sugestão para que, a critério de interessados,

seja aplicada com a finalidade de adicionar conhecimentos mesmo que fora da estrutura curricular convencionalmente organizada.

Na matemática escolar, deve-se considerar que os conteúdos básicos são organizados em quatro blocos dinâmicos entre si quanto a aplicação: *Números e operações*; *Funções*; *Geometria*; e *Análise de dados e probabilidade* [28]. O estudo de estatística é parte do bloco *Análise de dados e probabilidade*, em que o MEC² [28] recomenda para o Ensino Médio:

(...) Ênfase na construção e na representação de tabelas e gráficos mais elaborados, analisando sua conveniência e utilizando tecnologias, quando possível. Problemas estatísticos realísticos usualmente começam com uma questão e culminam com uma apresentação de resultados que se apoiam em inferências tomadas em uma população amostral. (...) os alunos precisam adquirir entendimento sobre o propósito e a lógica das investigações estatísticas, bem como sobre o processo de investigação. Deve-se possibilitar aos estudantes o entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos. [28, p. 78].

A análise de séries temporais, como explorado principalmente no capítulo da aplicação prática, necessita das habilidades mais naturais da Estatística, isto é, capacidades técnicas que vão desde a coleta de dados até a tomada de decisões. Para Binotto [31], a estatística é um importante instrumento para tomadas de decisões baseadas em dados amostrais coletados, resumidos, organizados, apresentados e analisados. De acordo com MEC [28] *apud* Binotto [31, p. 23] “(...) o estudo da estatística viabiliza a aprendizagem da formulação de perguntas que podem ser respondidas com uma coleta de dados, organização e representação.”

Além disso, o estudo apresentado no capítulo de referência teórica permite que sejam tomadas definições e demonstrações para apresentar aos alunos. Conforme MEC [28], os eventos aleatórios são também parte do estudo de estatística no Ensino Médio, quando estudantes devem aprender a descrevê-los, associá-los a eventos elementares, representá-los esquematicamente e estimar as probabilidades. As referências estatísticas devem ser aplicados fortemente e sistematicamente (utilizando linguagem matemática simbólica convencionalizada e organizada) nos anos finais do Ensino Médio [32].

Desse modo, a aprendizagem ideada a seguir embasa-se no estudo de todo este trabalho sob uma dimensão mais simples, isto

²Ministério da Educação do Governo Federal Brasileiro

é, mais intuitiva, adequando-se ao nível do ensino objetivado. Do capítulo da aplicação pode-se aproveitar o método claro que permite a investigação estatística sob um processo lógico. Os conceitos expostos no referencial teórico servem para reflexão sobre diversos outros assuntos avançados para esses alunos, mas que remetem a análises menos intuitivas e mais exatas num momento futuro.

Apresentar novas ferramentas, como os *softwares* existentes para organizar dados, calcular estatísticas ou até para modelagem de previsão em séries temporais é também uma possibilidade no Ensino Médio. Para a Secretaria de Estado da Educação do Governo do Estado de Santa Catarina [32], o professor deve aplicar inovações em sala de aula e se atualizar constantemente por meio de pesquisas e metodologias em destaque como, por exemplo, a modelagem matemática.

“A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real” [33, p.16]. Esse meio, conforme Pereira e Fernandes [34], no ensino, desperta interesses novos nos alunos, partindo de uma real situação-problema na sua vivência para um estímulo ensino-aprendizagem que acentua o senso crítico.

Assim, os alunos têm a possibilidade de expandir o pensamento para além dos cálculos manuais e conhecer a matemática refletida no mundo tecnológico que vivem. Por isso, neste trabalho, são ideadas, para o Ensino Básico, tarefas computacionais que reproduzem com precisão o ensinado em aula e apresentam soluções extras que despertam a curiosidade para estudos mais complexos futuramente.

A utilização de meios computacionais é muito bem vinda nas escolas, pois, sua consciente utilização, como mediadores do ensino, aprimora o conhecimento e contribui com a produção de novos saberes [32]. Para Pereira e Fernandes [34], a introdução de computadores no ensino de matemática são inovações que estimulam, nos alunos, a abordagem experimental em que a observação e análise são mais importantes do que o resultado. Então, os alunos podem ter o contato com os *softwares* disponíveis atualmente e se projetarem explorando novos horizontes, seja no estudo matemático ou na aplicação das ferramentas.

Por tudo isso, este trabalho sobre séries temporais vem a inspirar uma sugestão de um plano de aula ao Ensino Médio, utilizando, no conteúdo de análise de dados, um estudo de fundamentos importantes, com recursos tecnológicos e projetando princípios de análi-

ses básicas que permitem algumas inferências um tanto intuitivas, mas com algum nível de exatidão.

4.2 OBJETIVO DA SUGESTÃO DA APLICAÇÃO NO ENSINO BÁSICO

Nesse capítulo é desenvolvido um modelo de aula sugerido para ser aplicado em escolas do Ensino Médio no Estado de Santa Catarina. O objetivo é elaborar uma sugestão de plano de aula com aprendizagem básica sobre análise de séries temporais para o Ensino Médio.

4.3 PLANO DE AULA

Um plano de aula é uma ferramenta útil para que seja ministrada uma aula de forma eficiente e eficaz, pois permite que seja tudo pensado previamente e organizadamente. Planejar uma aula é fundamental ao professor e ao aluno para evitar frustração entre as partes nesse processo de ensino [34]. Para planejar o professor precisa [34]:

Conhecer o contexto didático-pedagógico da escola: averiguar a quantidade de alunos, condições físicas da escola, recursos disponíveis, filosofia da escola, condições socioeconômicas, nível intelectual dos alunos (teste diagnóstico), entre outros. A partir disso, à medida que o professor vai ministrando suas aulas, ele pode a partir dos *feedback* dos alunos fazer alterações em sua disciplina, ou seja, o planejamento não é um engessado, ele é flexível e a medida que o professor sentir necessidade ele pode alterar a forma de dar aula, exercícios, trabalhos, etc. O aluno, nesse processo, se torna ativos no planejamento das aulas. Fica claro, portanto, que o planejamento efetivo constitui numa atividade contínua e flexível. [34, p. 61].

O planejamento escolar contempla o plano de aula que trata do detalhamento do plano de ensino [35]. Para Libâneo [35], o plano de ensino é o mesmo que o plano do curso, ou seja, um roteiro organizado das unidades didáticas para um ano ou semestre que justificam a disciplina em relação aos objetivos da escola.

O plano de aula é a preparação de um conjunto de aulas, pois o processo de ensino e aprendizagem é uma sequência de fases: preparação e apresentação de objetivos, conteúdos e tarefas;

desenvolvimento de matéria nova; consolidação (fixação, exercícios, recapitulação, sistematização); aplicação; e avaliação [35]. A avaliação é útil para verificar o rendimento dos alunos, podendo ou não ser formal, pois é aplicada no início, durante e ao final de uma unidade didática abordada e tem finalidade de compor notas ou conceitos ou apenas de diagnóstico do progresso dos alunos [35].

Um formulário descritivo deve representar o plano de aula, nele deve conter [35]:

- a) **Dados Iniciais:** da escola, turma, disciplina, professor e data;
- b) **Unidade Didática:** a sequência do conteúdo referente ao plano de ensino, elucidar o assunto para o aluno;
- c) **Objetivos Específicos:** elencar em sequência lógica de acordo com os resultados esperados da assimilação dos conhecimentos e habilidades;
- d) **Conteúdos:** especifica a ligação com os tópicos da matéria ou disciplina estudada para cada objetivo específico;
- e) **Número de aulas:** dado em unidades de aulas ou tempo para cada objetivo específico;
- f) **Desenvolvimento Metodológico:** para cada objetivo específico deve descrever os métodos, os meios e procedimentos didáticos.

Os objetivos específicos devem ser tratados como cada assunto ou momentos didáticos ao longo das aulas, apresentados de forma não rígida de tal maneira que permita uma boa fluência entre o real aprendizado e o empenho nas tarefas, por isso o tempo planejado deve ser flexibilizado de acordo com as necessidades no transcorrer da aplicação do plano de aula [35]. Além disso, cada assunto deve ser preparado, introduzido, desenvolvido, sistematizado e aplicado [35].

4.3.1 Turma de referência para o plano de aula

Conforme o objetivo do capítulo, o plano de aula é uma sugestão de modelo aplicável a alguma escola do Ensino Médio no Estado de Santa Catarina, portanto, foram tomadas as informações das escolas do ensino público estadual.

Quantidade de alunos na turma Considerando o Censo 2018³ para o 1º ano do Ensino Médio foram 86.472 matrículas e 3.066 turmas disponibilizadas em toda a rede de ensino estudada. Portanto, em média cada turma teria 29 alunos. O valor é razoável, considerando ainda casos de evasão para os anos subsequentes e uma margem de garantia, vamos adotar 30 alunos por turma como a quantidade para o plano de aula.

Demais informações Conforme o PEE⁴, as condições filosóficas, socioeconômicas e físicas das escolas da rede de ensino estudada são evidentes, portanto, comunitárias. Ainda, no PEE pode-se atribuir o nível intelectual dos alunos à meta para média estaduais no IDEB⁵ 2021 ao Ensino Médio: 5.6, portanto acima da média nacional e superando a maior nota que é 5.2 de todo Ensino Médio (inclui rede privada) do próprio Estado de SC, segundo última apuração⁶ de 2017.

Portanto, o plano de aula a ser ideado tem como referência uma turma de 30 alunos e de nível intelectual elevado. Assim, os interessados inserir isso numa proposta pedagógica, ou de apenas aplicar extraordinariamente, podem fazer as ponderações que julgarem necessárias para o bom resultado do ensino.

4.3.2 Formulário de plano de aula

A unidade didática do Ensino Médio designada para conter a aprendizagem de análise de séries temporais, objetivo da aplicação no Ensino Básico ideado, é a estatística básica. Conforme Iezzi *et al* [13], são apresentadas na estatística básica do Ensino Médio os conhecimentos sobre tipos de variáveis, tabelas de frequência, representações gráficas, medidas de centralidade e medidas de dispersão.

³Disponível em <<http://www.sed.sc.gov.br/documentos/censo-278/censo-escolar-2018/relatorios-censo-escolar-2018/matricula-inicial>>. Acesso em 10/02/2020.

⁴Plano Estadual de Educação do Estado de Santa Catarina - Lei Nº 16.794 de dez/2015. Disponível em <<http://www.sed.sc.gov.br/professores-gestores/16970-plano-estadual-de-educacao>>. Acesso em 10/02/2020.

⁵Índice de Desenvolvimento de Educação Básica.

⁶Disponível em <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/portal_ideb/planilhas_para_download/2017/ResumoTecnico_Ideb_2005-2017.pdf>. Acesso em 10/02/2020.

O conteúdo sugerido para ser ministrado deve permitir que cada aluno consiga projetar os valores futuros de uma série temporal com base nas medidas de centralidade e dispersão previamente assimiladas.

O estudante pode aplicar em situação real de sua rotina para que o estudo sirva tanto como um exercício prático particular quanto um bom instrumento para seu controle pessoal sobre a série. O grau de confiabilidade dessa previsão pode ser calculado e a reflexão sobre técnicas e *softwares* de maior precisão pode ser feita opcionalmente, inclusive aproveitando materiais presentes ao longo deste trabalho.

A infraestrutura sugerida para exercitar em tecnologia de informação é um microcomputador com possibilidade de acesso e projeção, por multimídia de imagem, de trabalho em planilha eletrônica. O plano e aula ideado permite ensinar sem essas ferramentas, no entanto, trata-se de um importante meio para que os estudantes agreguem mais conhecimento e tenham maior capacidade de replicar o exercício.

Como a aula abrange o exercício de um caso para cada aluno e sugere-se que seja aplicado em série de consumo de energia elétrica, tem-se que um recurso importante é que cada aluno providencie uma conta de luz que contenha o histórico de consumo de um ano.

Assim, o plano de aula ideado deste trabalho foi elaborado e está exposto em apêndice, detalhando cada objetivo específico e seus desenvolvimentos metodológicos.

4.3.3 Sugestões para o desenvolvimento das aulas

A principal sugestão didática é que seja aplicada a exposição dos conteúdos ao longo da resolução de um exemplo no quadro. Dessa forma o aluno pode acompanhar mais a prática do que a teoria, essa deve ser apenas lembrada.

Ao fim de cada objetivo específico atingido no quadro, os alunos iniciam a prática do mesmo por meio de seus dados previamente coletados. Assim, cada etapa ganha a devida ênfase e os sucessos vão sendo percebidos pelos estudantes nesse exercício.

A definição de MAPE é dada nesse trabalho em (2.42), que representa uma margem de erro para a previsão. Naturalmente que o método aplicado nesse plano de aula irá incidir em erros elevados, mas, independente disso, o importante é destacar que a acuracidade depende do comportamento da série e que a dificuldade em prever

está relacionada com o quanto distante está do modelo utilizado, nesse caso, uma constante.

A seguir é dado um exemplo que serve de referência quanto ao desenvolvimento da aula no quadro, apresentado em planilha eletrônica.

Exemplo 1. *A Tabela (4.1) apresenta, mensalmente, o consumo de energia elétrica de uma residência A no ano de 2019. O morador quer saber quais são os valores previstos para 2020 como aceitáveis, isto é, dentro de determinados limites.*

Seja X : consumo de energia elétrica (kWh) da residência A no mês.

Tabela 4.1: Exemplo de dados para plano de aula.

Mês	X
jan	170
fev	157
mar	136
abr	101
mai	98
jun	95
jul	87
ago	84
set	93
out	103
nov	139
dez	167

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisar a série temporal graficamente: A figura (4.1) apresenta os dados tabulados no Excel, dispostos lado a lado. Portanto, na figura (4.2) podemos verificar que o gráfico aponta decréscimo acentuado de janeiro até abril de 2019, crescimento acentuado de outubro a dezembro de 2019, poucas oscilações entre abril e outubro de 2019, mais consumo em janeiro de 2019 e menos consumo em agosto de 2019.

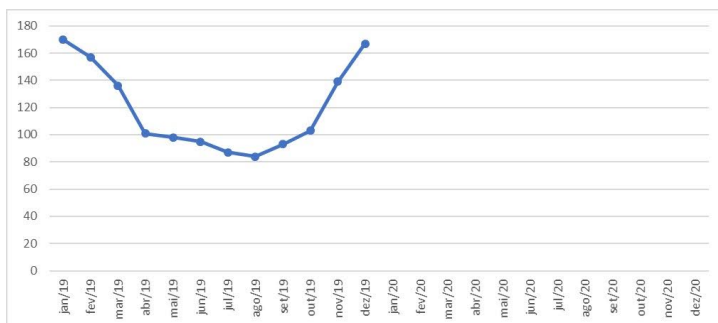
Analisar as medidas de centralidade e dispersão: A Figura (4.3) traz os valores calculados para as medidas de centralidade e dispersão, dos quais podemos verificar que a média está um tanto distante

Figura 4.1: Exemplo de dados tabulados no Excel para plano de aula.

	A	B	C
4			
5		Mês	X
6		jan/19	170
7		fev/19	157
8		mar/19	136
9		abr/19	101
10		mai/19	98
11		jun/19	95
12		jul/19	87
13		ago/19	84
14		set/19	93
15		out/19	103
16		nov/19	139
17		dez/19	167

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Figura 4.2: Exemplo de gráfico plotado no Excel para plano de aula.



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

da mediana e o desvio padrão possui valor expressivo ao comparar com a média, por exemplo. Para escolher o valor médio, pode-se tomar algum entono da média, enquanto que os valores máximo e mínimo podem ser relacionados com o desvio padrão.

Projetar valores futuros para a série temporal: O valor médio será dado pela média aritmética e os valores máximo e mínimo serão dados pela média aritmética diferida em dois desvios padrões ou seja:

$$V_{max} = \bar{X} + 2 \cdot \sigma_x,$$

Figura 4.3: Exemplo de medidas de centralidade e dispersão tabuladas no Excel para plano de aula.

J	K	L	M
Média Arit.	Mediana	Desvio Padrão	Variância
119,167	102	31,037	963,306

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

$$V_{min} = \bar{X} - 2 \cdot \sigma_x.$$

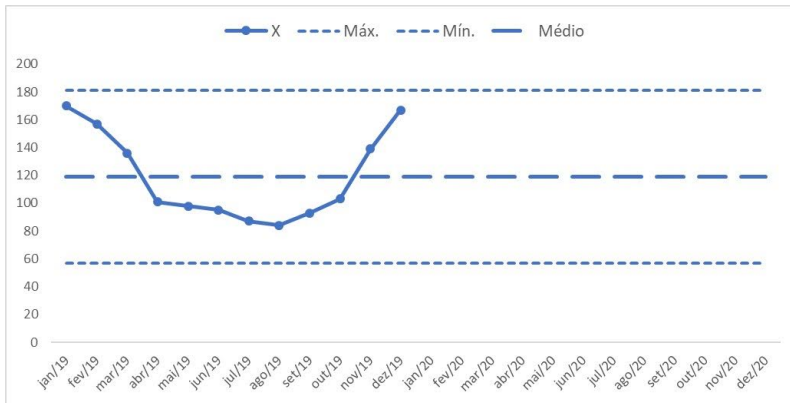
Os dados dessa projeção foram tabulados conforme a Figura (4.4) e plotados no gráfico apresentado na Figura (4.5). Para manter o regulamentar na medição do consumo de energia elétrica ao efetuar a leitura no equipamento, isto é, medida dada em número inteiro, foram feitos arredondamentos.

Figura 4.4: Exemplo de dados tabulados para projeção no Excel para plano de aula.

B	C	D	E	F
Mês	X	Máx.	Mín.	Médio
jan/19	170	181	57	119
fev/19	157	181	57	119
mar/19	136	181	57	119
abr/19	101	181	57	119
mai/19	98	181	57	119
jun/19	95	181	57	119
jul/19	87	181	57	119
ago/19	84	181	57	119
set/19	93	181	57	119
out/19	103	181	57	119
nov/19	139	181	57	119
dez/19	167	181	57	119
jan/20		181	57	119
fev/20		181	57	119
mar/20		181	57	119
abr/20		181	57	119
mai/20		181	57	119
jun/20		181	57	119
jul/20		181	57	119
ago/20		181	57	119
set/20		181	57	119
out/20		181	57	119
nov/20		181	57	119
dez/20		181	57	119

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Figura 4.5: Exemplo de gráfico com projeção futura no Excel para plano de aula.



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

Apurar a acuracidade da projeção: A projeção é a média aritmética, conforme definido no tópico anterior, portanto, tomamos $y_t = 119$ para todo t da amostra. Temos que

$$\begin{aligned}
 \text{MAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{x_t - y_t}{x_t} \right| \times 100 \\
 &= \frac{100}{12} \left[\left| \frac{170 - 119}{170} \right| + \left| \frac{157 - 119}{157} \right| + \dots + \left| \frac{167 - 119}{167} \right| \right] \\
 &= \frac{100}{12} [0,3 + 0,242 + \dots + 0,28743] \\
 &= 24,7\%.
 \end{aligned}$$

Portanto o erro percentual médio é de 24,7%, um valor muito elevado para se ter como modelo exato, conforme previsto. No entanto é uma boa referência para que o morador da residência A consiga determinar se os consumos em 2020 estão dentro dos aceitáveis. Esse instrumento pode servir como meio para o morador evitar desperdícios de energia elétrica, basta que o consumo não ultrapasse o valor máximo calculado. Para arrojar os limites, basta ponderar os valores em relação ao desvio padrão, ou seja, $\sigma_x \cdot K$, tal que $0 < K < 2$.

4.4 ALTERNATIVA PARA A AULA

O que pode vir a ocorrer em algumas situações reais é uma série de um consumo de energia elétrica que possui uma tendência de crescimento. Então, de forma adicional, exibimos nessa seção uma situação alternativa para que seja adicionada ou substituída no plano de aula, a critério do professor interessado.

Essa alternativa de aula sobressai dos assuntos abordados no ensino básico, no entanto é possível, a critério do professor da aula, aplicar para os potenciais alunos em iniciação científica ou ingressantes no ensino superior.

No consumo de energia elétrica é possível que haja consecutivos aumentos e, assim, a série apresentaria uma tendência de crescimento. Uma determinada residência, por exemplo, foi, ao passar do tempo, instalando novos aparelhos eletroeletrônicos e, com isso, aos poucos, elevando o consumo médio de energia. Outra ocasião hipotética seria o aumento mês a mês de pessoas utilizando o mesmo espaço. Isso também é válido para redução de equipamentos ou pessoas, que indicaria uma tendência de decrescimento.

Assim, utilizar a média como estimador em uma série com tendência não iria indicar uma acuracidade tão boa quanto se adotasse uma função afim

$$f(t) = at + b$$

para $t = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ os lags mensais. Essa tendência pode ser obtida pelo método dos mínimos quadrados, um tipo de regressão linear simples.

Proposição 8. *A tendência de uma série temporal x_t é determinada pela função $\hat{x}_t = \hat{a}t + \hat{b}$ com \hat{a} e \hat{b} estimados pelo **método dos mínimos quadrados**:*

$$\hat{a} = \frac{n \cdot \sum_{t=1}^n (t \cdot x_t) - \sum_{t=1}^n t \cdot \sum_{t=1}^n x_t}{n \cdot \sum_{t=1}^n t^2 - (\sum_{t=1}^n t)^2}, \quad (4.1)$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t) - a \cdot \sum_{t=1}^n t}{n}; \quad (4.2)$$

com n o número de lags da série temporal.

A **demonstração** da Proposição (8) é dada em apêndice.

Toma-se o Exemplo (2) com tendência que, assim como o Exemplo (1), possui $n = 12$.

Exemplo 2. A Tabela (4.2) apresenta, mensalmente, o consumo de energia elétrica de uma residência B no ano de 2019. O morador quer saber quais são os valores previstos para 2020 como aceitáveis, isto é, dentro de determinados limites.

Seja Z : consumo de energia elétrica (kWh) da residência B no mês.

Tabela 4.2: Exemplo extra de dados para plano de aula.

Mês	t	Z
jan	1	98
fev	2	95
mar	3	88
abr	4	85
mai	5	76
jun	6	71
jul	7	81
ago	8	96
set	9	119
out	10	127
nov	11	134
dez	12	150

Fonte: Elaborado pelo autor.

Medidas de centralidade e dispersão: Mantendo o procedimento para arredondamento a números inteiros, a média e o desvio padrão são dados por

$$\bar{Z} = 102,$$

$$\sigma_z = 24.$$

Acuracidade sem tendência: Utilizando mesmo critério para definir o valor projetado do Exercício (1), a média, se obtém

$$\begin{aligned} \text{MAPE}(\bar{Z}) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{z_t - \bar{Z}}{z_t} \right| \times 100 \\ &= \frac{100}{12} \left[\left| \frac{98 - 102}{98} \right| + \left| \frac{95 - 102}{95} \right| + \dots + \left| \frac{150 - 102}{150} \right| \right] \\ &= \frac{100}{12} [0,0374 + 0,0701 + \dots + 0,3222] \\ &= 20,4\%. \end{aligned}$$

Acuracidade com tendência: Primeiramente calcula-se a e b conforme (4.1) e (4.2).

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \frac{12 \cdot (1 \cdot 98 + \dots + 12 \cdot 150) - (1 + \dots + 12) \cdot (98 + \dots + 150)}{12 \cdot (1^2 + \dots + 12^2) - (1 + \dots + 12)^2} \\ &= 5,02,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{(98 + \dots + 150) - 5,02 \cdot (1 + \dots + 12)}{12} \\ &= 69,03.\end{aligned}$$

Portanto, a função de tendência é

$$\hat{z}_t = 5,02t + 69,03.$$

A Tabela (4.3) apresenta os valores da tendência \hat{z} arredondados para números inteiros. Assim, pode-se calcular

Tabela 4.3: Exemplo extra com tendência.

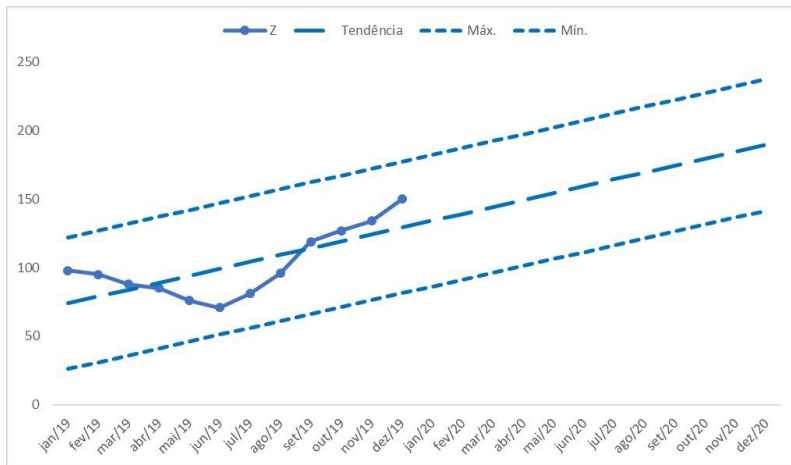
Mês	t	Z	\hat{Z}
jan	1	98	74
fev	2	95	79
mar	3	88	84
abr	4	85	89
mai	5	76	94
jun	6	71	99
jul	7	81	104
ago	8	96	109
set	9	119	114
out	10	127	119
nov	11	134	124
dez	12	150	129

Fonte: Elaborado pelo autor.

$$\begin{aligned}
 \text{MAPE}(\hat{z}_t) &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left| \frac{z_t - \hat{z}_t}{z_t} \right| \times 100 \\
 &= \frac{100}{12} \left[\left| \frac{98 - 74}{98} \right| + \left| \frac{95 - 79}{95} \right| + \dots + \left| \frac{150 - 129}{150} \right| \right] \\
 &= \frac{100}{12} [0,2444 + 0,1677 + \dots + 0,1381] \\
 &= 15,6\%.
 \end{aligned}$$

Como esperado, encontramos que a acuracidade é melhor para a estimação utilizando a tendência da série como previsão. A Figura (4.6) apresenta a projeção \hat{Z} em momentos futuros, com valores máximos e mínimos tomados de maneira similar do Exercício (1).

Figura 4.6: Exemplo extra de gráfico com projeção futura no Excel.



Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

4.5 CONCLUSÕES

Na aplicação do plano de aula, ideia-se que o professor irá munido de informações contidas neste trabalho, seja nos capítulos anteriores ou no presente. Os exemplos e os exercícios sugeridos para a aula indicam ideias para o docente utilizar e permitem o envolvimento do aluno com a prática do assunto. O referencial teórico deste trabalho possibilita que o professor entenda e utilize

para apresentar, de forma extraordinária, aos alunos, as definições e demonstrações que julgar mais importantes.

Fica a possibilidade de futuros estudos para idear planos de aulas que contemplem ainda mais tópicos da análise de séries temporais, como autocorrelações ou outros *softwares*. Aqui indicamos, ainda, que o professor interessado aproveite o arquivo disponível publicamente⁷, elaborado pelo autor deste trabalho, para calcular precisamente as funções de autocorrelação das séries exercitadas no plano de aula deste trabalho e, por consequência, analisar essas séries temporais quanto a estacionariedade. Assim, disponibiliza-se neste trabalho possibilidades de ampliar os conhecimentos dos alunos do Ensino Básico.

Por fim, a plano de aula foi apresentado e atende o objetivo de idear uma aprendizagem que agregue conhecimento estatístico no Ensino Básico por meio da análise de séries temporais.

⁷Disponível em <https://drive.google.com/open?id=1YDgDDHggBUckqlv_6p18J7-OmMT1DvUY>.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sob a luz da intenção deste trabalho em explorar a análise de séries temporais e as propostas para melhorar o controle de gastos na UFSC e o ensino de estatística no Ensino Básico, buscou-se uma pesquisa bibliográfica seguida de um caso prático aplicado nesse órgão público. O estudo das teorias permitiu definir os conceitos básicos de séries temporais, os modelos autorregressivos integrados e de médias móveis (ARIMA), a sazonalidade e a abordagem Box-Jenkins para previsão de séries temporais.

A importância dos conceitos básicos, como a estacionariedade e as autocorrelações por exemplo, permitem que as séries temporais sejam bem identificadas para somente depois terem a definição de qual modelo deve ser aplicado. Essa necessidade que foi revelada por Box & Jenkins nos anos 70 ainda vale hoje em dia e é muito importante ser feita pela pessoa que busca prever a série, pois, mesmo com auxílio de computadores para estimar e verificar os modelos, as decisões sobre a identificação da série e os ajustes a serem realizados são sobre situações peculiares de cada série temporal a ser analisada.

O modelo ARIMA é dotado de método capaz de estacionarizar uma série, a diferenciação, que possibilita as etapas seguintes que levam à previsão. No entanto, é necessário que o fator sazonalidade seja identificado e ajustado previamente, visto que esse requer um procedimento diferente para a estimação de uma série.

A previsão de uma série temporal é baseada no modelo ARIMA (p, d, q) de parâmetros p e q estimados e resulta em uma sequência de valores em uma série de tempo projetada para o futuro, isto é, para datas posteriores à última data de amostra coletada para a análise. Assim, determinando para cada t valores máximos e mínimos confiáveis, obtém-se uma faixa (margem) de futuras possibilidades de valores distribuídos no tempo. Ao comparar os valores previstos com os realizados é possível medir a acuracidade da estimação e definir a sua validade para a série temporal estudada.

A aplicação da análise de série temporal na UFSC permitiu, no fim, que a previsão indicasse os possíveis valores futuros para o consumo de energia elétrica no campus. Com a sazonalidade tendendo a permanecer, o consumo tende a diminuir ou se manter no próximo ano no prédio estudado. O modelo encontrado no estudo prático indicou um erro percentual médio absoluto de 9,81%, que é de uma muito boa acuracidade. Adicionalmente, a cada nova coleta de amostra é possível realizar nova análise e a administração da UFSC pode diagnosticar se esse comportamento agora previsto

se manterá ou sofrerá mudanças.

A ideia para o Ensino Básico contou com uma contextualização que apresentou a importância de se agregar conhecimentos ou pontos de vistas novos sobre estatística, sendo essa aprendizagem útil também para a vida dos estudantes. A ideia foi um plano de aula sobre análise básica de séries temporais, com exercícios práticos e dinâmicos, utilizando tecnologias de informação e sugestões para o ensino. Assim, os professores podem criar momentos para ampliar os conhecimentos de seus alunos tomando por base este trabalho.

Portanto, a análise de séries temporais foi possível em função das teorias exploradas em torno de modelos paramétricos existentes; a aplicação do modelo $ARMA(p, q)$ sobre a série sazonal determinística do consumo de energia elétrica permite à UFSC uma melhor gestão de seus recursos e; a ideia de aprendizagem para o Ensino Básico oferece um plano de aula bem construído, detalhado e contextualizado. Assim, os objetivos propostos para este trabalho foram alcançados, possibilitando, ainda, o retorno de um conteúdo para estudos futuros sobre análise de séries temporais e proporcionando retorno prático para os interessados na aplicação e na ideia desenvolvidas.

REFERÊNCIAS

- 1 MAQUIAVEL, N. O Príncipe. *Penguin Companhia*, p. 130, disponível em: <<https://dynamicon.com.br/wp-content/uploads/2017/02/O-Pr%C3%ADncipe-de-Nicolau-Maquiavel.pdf>>. Acesso em 24 mar. 2020., 1532.
- 2 MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. 2ª. ed. São Paulo, SP: Ed. Blucher, 2006.
- 3 CRYER, J. D.; CHAN, K. *Time Series Analysis*. 2ª. ed. New York - NY, USA: Ed. Springer, 2008.
- 4 XAVIER, J. M. N. Análise e previsão de séries temporais com modelos ARIMA e análise espectral singular. *Dissertação de Mestrado em Bioestatística e Biometria apresentada à Universidade Aberta*, p. 102, disponível em: <<http://hdl.handle.net/10400.2/5873>>. Acesso em 24 mar. 2020., 2016.
- 5 YULE, G. U. *Philos. Trans. Royal Soc.*, n. A226, p. 267–298, 1927.
- 6 BOX, G. A. P.; JENKINS, G. M. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 1ª. ed. San Francisco - CA, USA: Ed. Holden-Day (Revised edition, 1976), 1970.
- 7 TUBINO, D. F. *Planejamento e controle da produção: teoria e prática*. 1ª. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2007.
- 8 ALLEN, T. T. *Introduction to engineering statistics and six sigma: statistical quality control and design of experiments and systems*. 1st. ed. London, UK: Springer, 2006.
- 9 MATIAS-PEREIRA, J. *Manual de gestão pública contemporânea*. 4ª. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2012.
- 10 MANN, P. S. *Introdução à Estatística / tradução Teresa Cristina Padilha de Souza; contribuições de Christopher Jay Lacke*. 8ª. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2015.
- 11 MORETTIN, P. A.; BUSSAB, W. O. *Estatística Básica*. 8ª. ed. São Paulo, SP: Ed. Saraiva, 2013.
- 12 SADOWSKI, P. *O ensino de matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios*. São Paulo, SP: Ática, 2010.
- 13 IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações, 3: ensino médio*. 8ª. ed. São Paulo, SP: Atual, 2014.

- 14 BOX, G. A. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. *Time Series Analysis*. 4^a. ed. Hoboken - NJ, USA: Ed. Wiley, 2008.
- 15 BOX, G. A. P.; JENKINS, G. M.; REINSEL, G. C. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 3^a. ed. Englewood Cliffs - NJ, USA: Ed. Prentice Hall, 1994.
- 16 EHLERS, R. S. Análise de Séries Temporais. *icmc.usp.br*, v. 5, p. 1–118, 2009.
- 17 KROLZIG, H. Introduction to Time–Series Analysis. *Hilary Term 2002*, v. 1, p. 1–48, 2002.
- 18 MADDALA, G. S. *Introduction to econometrics*. 2nd. ed. New York, NY: Macmillan Publishing Company, 1992.
- 19 ENDERS, W. *Applied econometric time series*. 4nd. ed. Danvers, MA, USA: Wiley, 1948.
- 20 MORAIS I A C DE; STONA, F. S. G. *Econometria Aplicada no EViews®*. 1^a. ed. Porto Alegre, RS: FEE, 2016.
- 21 PIERCE, D. A. A survey of recent developments in seasonal adjustment. *The American Statistician*, n. 34, p. 125–134, 1980.
- 22 FIGUEIREDO, A. M. R. Séries Temporais: decomposição clássica e a abordagem X11. *RPubs*, p. disponível em: <http://rpubs.com/amrofi/decompose_x11_varejoms>. Acesso em 21 mai. 2020., 2019.
- 23 LEVINSON, N. The Weiner RMS error criterion in filter design and prediction. *Journal of Mathematical Physics*, n. 25, p. 261–278, 1947.
- 24 DURBIN, J. Global optimization of gas allocation to a group of wells in artificial lift using nonlinear constrained programming. *Review of the International Institute of Statistics*, n. 28, p. 233–244, 1960.
- 25 FINDLEY, D. F. et al. New capabilities and methods of the X-12-ARIMA seasonal-adjustment program. *Journal of Business and Economic Statistics*, n. 16, p. 127–177, 1998.
- 26 FISHER, R. A. *Statistical methods for research workers*. 12^a. ed. New York - NY, USA: Hafner, 1954.
- 27 EViews. *EViews 10 User's Guide II*. 2nd. ed. Irvine, CA: IHS Markit, 2017.

- 28 MEC, S. d E. B. *Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias/ Secretaria de Educação Básica*. Brasília, DF: 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2), 2006.
- 29 MEC, S. d. E. M. e. T. S. *Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília, DF: 141 p. (Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais, 2002.
- 30 BLUMENAU, S. da Educação; Prefeitura Municipal de. Diretrizes Curriculares Municipais para a Educação Básica - Educação de Jovens e Adultos. *Diretrizes Curriculares Municipais, vol.3*, p. 230, Disponível em <<https://www.blumenau.sc.gov.br/governo/secretaria-de-educacao/pagina/diretrizes-curriculares-municipais>>. Acesso em 06 fev. 2020, 2014.
- 31 BINOTTO, C. Ensino de estatística por meio da metodologia de resolução de problemas - uma proposta aplicada ao ensino médio. *Dissertações PROFMAT*, p. 101, Disponível em <<http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes/>>. Acesso em 06 fev. 2020, 2019.
- 32 GOVERNO, d. S. C. Secretaria de Estado da E. Proposta Curricular em Matemática e em Temas Multidisciplinares. *Disciplinas Curriculares*, p. 226, Disponível em <<http://www.sed.sc.gov.br/professores-e-gestores/16977-nova-proposta-curricular-de-sc-2014>>. Acesso em 06 fev. 2020, 2014.
- 33 BASSANEZI, C. R. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 3ª. ed. São Paulo, SP: Contexto, 2002.
- 34 PEREIRA, A. C. C.; FERNANDES, M. C. *Prática de ensino em matemática I*. 1ª. ed. Fortaleza, CE: EdUECE, 2010.
- 35 LIBÂNIO, J. C. *Didática*. 2ª. ed. São Paulo, SP: Cortez, 2013.
- 36 ACTION, P. Estimação dos parâmetros do modelo. *Análise de Regressão*, p. <<http://www.portaction.com.br/analise-de-regressao/12-estimacao-dos-parametros-do-modelo>>, acesso em 30/05/2020., 2020.

TABELA DO CONSUMO (X) E DA ESTIMAÇÃO (Y)

t	mês-ano	X	Y		t	mês-ano	X	Y
1	dez-2015	10606			31	jun-2018	13981	15692
2	jan-2016	9027	7674		32	jul-2018	10023	11321
3	fev-2016	9225	11482		33	ago-2018	16207	16369
4	mar-2016	13076	17385		34	set-2018	19405	18435
5	abr-2016	13554	16226		35	out-2018	18485	19690
6	mai-2016	9891	12143		36	nov-2018	21413	20943
7	jun-2016	11069	10516		37	dez-2018	12969	13796
8	jul-2016	8018	6376		38	jan-2019	15252	13515
9	ago-2016	9864	11646		39	fev-2019	16492	17988
10	set-2016	11996	13894		40	mar-2019	25000	23878
11	out-2016	13943	15216		41	abr-2019	24614	22475
12	nov-2016	15175	16197		42	mai-2019	18508	18070
13	dez-2016	9746	7785		43	jun-2019	16108	16095
14	jan-2017	8302	9255		44	jul-2019	11422	11603
15	fev-2017	14491	14486		45	ago-2019	15850	16530
16	mar-2017	21196	20795		46	set-2019	18211	18474
17	abr-2017	17262	19694		47	out-2019	22273	19607
18	mai-2017	18249	15552		48	nov-2019	21955	20739
19	jun-2017	15174	13827		49	dez-2019	12117	13470
20	jul-2017	9904	9580		50	jan-2020	13651	13068
21	ago-2017	16540	14751		51	fev-2020	15465	17420
22	set-2017	17362	16938		52	mar-2020		23188
23	out-2017	18454	18315		53	abr-2020		21664
24	nov-2017	18686	19690		54	mai-2020		17137
25	dez-2017	11898	12664		55	jun-2020		15040
26	jan-2018	10559	12505		56	jul-2020		10426
27	fev-2018	20705	17099		57	ago-2020		15232
28	mar-2018	25213	23111		58	set-2020		17055
29	abr-2018	24746	21829		59	out-2020		18067
30	mai-2018	16101	17545		60	nov-2020		19077
					61	dez-2020		11686

PLANO DE AULA PROPOSTO

Escola: _____ Disciplina: __matemática_____ Data: _____			
Série: _____ 3ª do ensino médio _____ Professor(a): _____			
UNIDADE DIDÁTICA: Estatística Básica: análise de série temporal			
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	CONTEÚDOS	Nº DE AULAS	DESENVOLVIMENTO METODOLÓGICO
1. Analisar Série Temporal Graficamente	1. Gráficos de linha	15 min	a) Tabular dados; b) Construir gráfico de linha incluindo período futuro de mesmo tamanho da amostra; e c) analisar crescimentos e decrescimentos.
2. Analisar as medidas de centralidade e dispersão	2.1. Medidas de centralidade 2.2. Medidas de dispersão	25 min	a) Calcular média aritmética dos dados de toda a amostra; b) Calcular a mediana dos dados de toda a amostra; c) Calcular o desvio padrão dos dados de toda a amostra; d) Calcular a variância dos dados de toda a amostra; e e) Analisar valor médio, máximo e mínimo possíveis para o futuro.
3. Projetar valores futuros para a série temporal	3. Gráficos de linha	15 min	a) Determinar o valor médio como o valor projetado para as realizações futuras (sugestão: média aritmética); b) Determinar os valores máximos e mínimos (sugestão: dois desvios padrões); e c) Construir as linhas dos valores médio, máximo e mínimo no gráfico.
4. Apurar a acuracidade da projeção	4. Erro percentual médio absoluto (MAPE)	10 min	a) Definir o cálculo do erro percentual médio absoluto (MAPE); b) Realizar o cálculo do MAPE para a série temporal obtida, tomando os valores da amostra coletada como a realizada para o cálculo e o valor médio como a projetado; e c) Interpretar o valor descritivamente.
5. Apresentar o método em planilha eletrônica	5.1. Microsoft Excel 5.2. Fórmulas para medidas de centralidade 5.3. Fórmulas para medidas de dispersão 5.4. Inserir gráficos	30 min	a) Apresentar o acesso ao programa Microsoft Excel; b) Tabular os dados com espaço para os valores médio, máximo e mínimo; c) Em tabulação separada, calcular média aritmética, mediana, desvio padrão e variância dos dados da amostra; d) Anotar os valores máximo, mínimo e médio; e e) Inserir o gráfico com as linhas conforme tabulação dos dados.
6. Análise final da série temporal	6.1 MAPE 6.2. Gráfico de linha 6.3. Medidas de centralidade 6.4. Medidas de dispersão 6.5. Microsoft Excel 6.6. Análise de séries temporais (opcional)	30 min	a) Interpretar valores diferentes encontrados na turma para MAPE; b) Sugerir a série para acompanhar próximo ano de consumo real comparando com os valores médios, máximo e mínimo e interpretando o significado de extrapolações; c) Apresentar exemplos de modelos de séries temporais eficazes (opcional); e d) Apresentar outros softwares para análises de séries temporais com precisão (opcional).

Fonte: Elaborado pelo autor em planilha eletrônica.

COVARIÂNCIA EM PROCESSO MA(q)

$$\gamma_h = E \left[\left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \right) \left(\varepsilon_{t-h} - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right) \right]$$

$$\gamma_h = E \left[\left(\varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \right) \left(\varepsilon_{t-h} - \sum_{j=1}^{q-h} \beta_j \varepsilon_{t-h-j} - \sum_{j=q-h+1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right) \right]$$

Como $h = \{1, 2, \dots, q\}$ e MA(q) é um processo linear, então qualquer $E(\varepsilon_s \varepsilon_r) = 0$, $r \neq s$ e $r, s \in \mathcal{T}$, logo são válidos os cancelamentos a seguir

$$\begin{aligned} \gamma_h = & \cancel{E \left[\varepsilon_t \varepsilon_{t-h} \right]} - E \left[\varepsilon_t \sum_{j=1}^{q-h} \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right] - E \left[\varepsilon_t \sum_{j=q-h+1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right] - E \left[\varepsilon_{t-h} \sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \right] + \\ & + E \left[\sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \left(\sum_{j=1}^{q-h} \beta_j \varepsilon_{t-h-j} + \sum_{j=q-h+1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_h = & \cancel{-E \left[\varepsilon_{t-h} \sum_{j=1}^{h-1} \beta_j \varepsilon_{t-j} \right]} - E \left[\varepsilon_{t-h} \beta_h \varepsilon_{t-h} \right] - E \left[\varepsilon_{t-h} \sum_{j=h+1}^q \beta_j \varepsilon_{t-j} \right] + E \left[\left(\sum_{j=1}^h \beta_j \varepsilon_{t-j} + \beta_{h+1} \varepsilon_{t-h-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \beta_{h+2} \varepsilon_{t-h-2} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-q} \right) \left(\beta_1 \varepsilon_{t-h-1} \beta_2 \varepsilon_{t-h-2} + \dots + \beta_{q-h} \varepsilon_{t-h-q} + \beta_{q-h+1} \varepsilon_{t-h-q} + \dots + \beta_q \varepsilon_{t-h-q} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_h &= E \left[-\beta_h (\varepsilon_{t-h})^2 \right] + E \left[\sum_{j=1}^h \beta_j \varepsilon_{t-j} \right] + E \left[\sum_{j=1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right] + E \left[\beta_{h+1} \varepsilon_{t-h-1} \beta_1 \varepsilon_{t-h-1} \right] + E \left[\beta_{h+1} \varepsilon_{t-h-1} \sum_{j=2}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right] + \\
&\quad + E \left[\beta_{h+2} \varepsilon_{t-h-2} \beta_1 \varepsilon_{t-h-1} \right] + E \left[\beta_{h+2} \varepsilon_{t-h-2} \beta_2 \varepsilon_{t-h-2} \right] + E \left[\beta_{h+2} \varepsilon_{t-h-2} \sum_{j=3}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right] + \dots + \\
&\quad + E \left[\beta_q \varepsilon_{t-q} \sum_{j=1}^{q-h-1} \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right] + E \left[\beta_q \varepsilon_{t-q} \beta_{q-h} \varepsilon_{t-h} \right] + E \left[\beta_q \varepsilon_{t-q} \sum_{j=q-h+1}^q \beta_j \varepsilon_{t-h-j} \right]
\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\gamma_h = E \left[-\beta_h (\varepsilon_{t-h})^2 \right] + E \left[\beta_{h+1} \varepsilon_{t-h-1} \beta_1 \varepsilon_{t-h-1} \right] + E \left[\beta_{h+2} \varepsilon_{t-h-2} \beta_2 \varepsilon_{t-h-2} \right] + \dots + E \left[\beta_q \varepsilon_{t-q} \beta_{q-h} \varepsilon_{t-q} \right]$$

Logo,

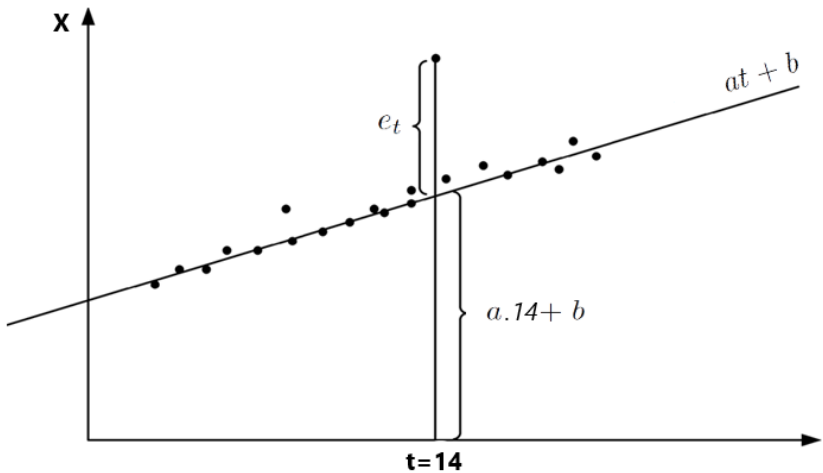
$$\gamma_h = -\beta_h E \left[(\varepsilon_{t-h})^2 \right] + \beta_1 \beta_{h+1} E \left[(\varepsilon_{t-h-1})^2 \right] + \beta_2 \beta_{h+2} E \left[(\varepsilon_{t-h-2})^2 \right] + \dots + \beta_{q-h} \beta_q E \left[(\varepsilon_{t-q})^2 \right]$$

■

MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

A intenção é que a reta τ dada pela função $f(t) = at + b$ seja alocada no plano do gráfico da série temporal (dada pelos pontos dispersos) de tal forma que a distância vertical dos pontos para τ seja a mínima possível. A Figura (1) exibe um exemplo do gráfico. Portanto, temos $|x_t - f(t)| = e_t$ o erro da estimativa para cada $t = 1, 2, \dots, n$.

Figura 1: Gráfico de uma série com $n = 21$ e uma reta de tendência ao longo do tempo t .



Fonte: Action em [36] e adaptado pelo autor.

Assim,

$$x_t = x_t + 0$$

$$x_t = x_t + (f(t) - f(t))$$

$$x_t = f(t) + (x_t - f(t))$$

$$x_t = at + b + e_t$$

Como queremos o mínimo para e_t de qualquer t , então a soma dos erros deve ser o mais próximo de zero possível. Logo, $e_t = |x_t - f(t)|$ deve ser minimizado.

Por isso, $\sum_{t=1}^n (x_t - f(t))^2$ deve ser minimizado. Segue que devemos minimizar em relação a a e b :

$$S(a, b) = \sum_{t=1}^n (x_t - at - b)^2$$

Para tal minimização, derivamos

$$\begin{cases} S'(a, b) = \frac{\partial S(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{t=1}^n (x_t - at - b)t \\ S'(a, b) = \frac{\partial S(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{t=1}^n (x_t - at - b) \end{cases}$$

Assim, para indicar os valores particulares que minimizam S utilizamos \hat{a} e \hat{b} e igualamos a zero as derivadas

$$\begin{cases} -2 \sum_{t=1}^n (x_t - \hat{a}t - \hat{b})t = 0 \\ -2 \sum_{t=1}^n (x_t - \hat{a}t - \hat{b}) = 0 \end{cases}$$

Então simplificamos e obtemos as *equações normais* [2, p.50]:

$$\begin{cases} n\hat{b} + \hat{a} \sum_{t=1}^n t = \sum_{t=1}^n x_t \\ \hat{b} \sum_{t=1}^n t + \hat{a} \sum_{t=1}^n t^2 = \sum_{t=1}^n tx_t \end{cases}$$

Segue que

$$\begin{cases} \hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t - \hat{a} \sum_{t=1}^n t}{n} \\ \hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^n (tx_t) - \hat{b} \sum_{t=1}^n t}{\sum_{t=1}^n t^2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t - \hat{a} \sum_{t=1}^n t}{n}$$

E

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^n tx_t - \frac{\sum_{t=1}^n x_t \sum_{t=1}^n t}{n}}{\sum_{t=1}^n t^2 - \frac{(\sum_{t=1}^n t)^2}{n}} = \frac{n \sum_{t=1}^n tx_t - \sum_{t=1}^n x_t \sum_{t=1}^n t}{n \sum_{t=1}^n t^2 - (\sum_{t=1}^n t)^2}$$

Portanto, uma previsão para x_t deve ser dada pela tendência estimada $\hat{x}_t = \hat{a}t + \hat{b}$ com parâmetros \hat{a} e \hat{b} determinados pelo método de mínimos quadrados. ■