



Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Luigi Mickele de Jesus Bruno

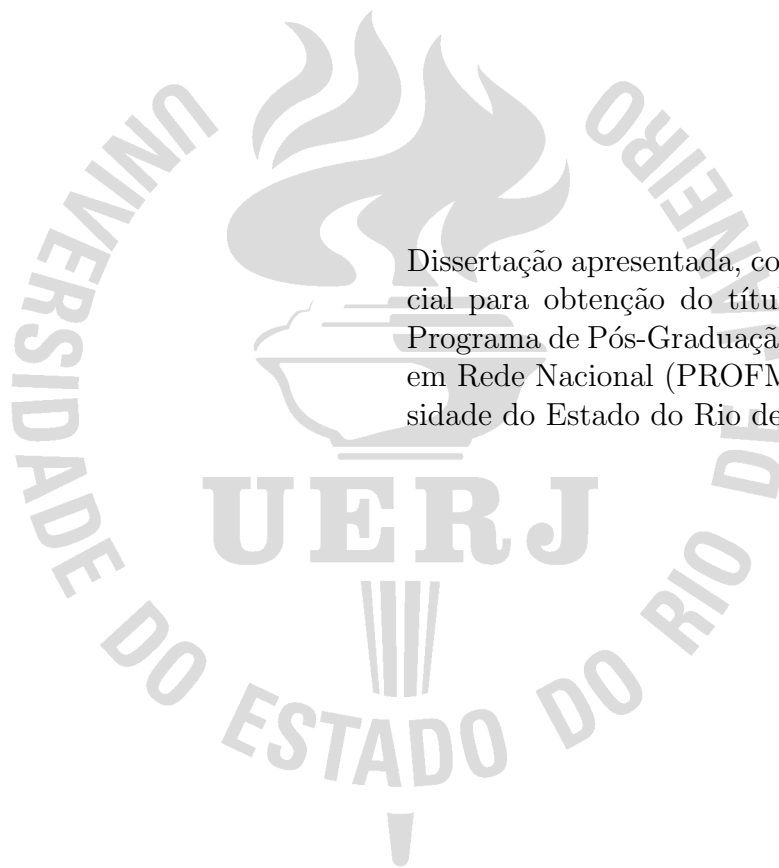
**Modelos e simulações voltados para a relação entre o Cálculo
Diferencial e Integral e a Dinâmica em cursos superiores**

Rio de Janeiro

2019

Luigi Mickele de Jesus Bruno

Modelos e simulações voltados para a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral e a Dinâmica em cursos superiores



Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof^ª. Dra. Aline de Lima Guedes Machado

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B898	<p>Bruno, Luigi Mিকেle de Jesus. Modelos e simulações voltados para a relação entre o cálculo diferencial e integral e a dinâmica em cursos superiores/ Luigi Mিকেle de Jesus Bruno. – 2020. 100 f. : il.</p> <p>Orientadora: Aline de Lima Guedes Machado Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.</p> <p>1. Ensino auxiliado por computador – Teses. 2. Física – Modelos matemáticos – Teses. 3. Física – Estudo e ensino - Teses. 4. Cálculo diferencial e integral – Teses. I. Machado, Aline de Lima Guedes. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 004:37</p>
------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Patricia Bello Meijinhos CRB-7/ 5217- Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica

Autorizo, apenas para fins acadêmicos e científicos, a reprodução total ou parcial desta dissertação, desde que citada a fonte.

Assinatura

Data

Luigi Mickele de Jesus Bruno

Modelos e simulações voltados para a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral e a Dinâmica em cursos superiores

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de Agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof^a. Dra. Aline de Lima Guedes Machado (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquinalha
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Augusto Cesar de Castro Barbosa
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof. Dr. Rogério Luiz Quintino de Oliveira Junior
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

Como não poderia ser diferente, cada segundo investido neste trabalho é dedicado a meus pais. Exemplos de dedicação, moral e caráter, me inspiraram e inspiram, contribuindo de forma decisiva na minha formação humana. Certamente dedico também à minha companheira Lidiane, meu refúgio nos momentos de dificuldade, minha felicidade nos demais momentos. Por último, mas não menos importante, dedico a cada um dos meus alunos, que se mostram diariamente como meus verdadeiros professores, na arte de viver.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, cuja existência, em qualquer que seja sua forma, deu-me forças e motivação para continuar meus percursos. Agradeço à minha orientadora, Aline de Lima Guedes Machado, por todo tempo dedicado, por toda a atenção despendida e por cada ensinamento transmitido. Agradeço à CAPES pela cessão da bolsa que me permitiu concluir o curso. Finalmente, agradeço ao meu pai, que em diversas madrugadas transpôs os quilômetros que me separavam da realização deste sonho. Justiça haveria se no diploma que almejo, houvesse seu nome impresso.

... A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo

Galileu Galilei

RESUMO

BRUNO, Luigi Mickele de Jesus. *Modelos e simulações voltados para a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral e a Dinâmica em cursos superiores*. 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)– Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

A necessidade de evolução das estratégias de ensino em todos os níveis de educação é flagrante. Este trabalho se propõe a investigar a modelagem matemática e a modelagem computacional, como ferramentas de ensino relevantes. Através de um apanhado, verificou-se que embora o processo de modelagem já exista há séculos, sua aplicação em ambientes educacionais ainda é bastante incipiente. Ao longo do trabalho defende-se a tese de que atividades de modelagem e simulação permite estabelecer conexões claras entre a matemática e a física estudadas em nível superior, promovendo uma educação mais significativa e como consequência, otimizando o processo de Ensino/Aprendizagem. A conclusão desse trabalho se dá com a criação de um Objeto de Aprendizagem na forma de um blog que dispõe de modelos criados dentro do campo da dinâmica e da cinemática.

Palavras-chave: Modelagem; Matemática; Física; Objeto de Aprendizagem.

ABSTRACT

BRUNO, Luigi Mিকেle de Jesus. *Models and simulations aimed at the relationship between the differential and integral calculus and dynamics in higher education courses.* 2019. 100 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT)– Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The need for evolution of teaching strategies at all levels of education is blatant. This work aims to investigate mathematical modeling and computational modeling as relevant teaching tools. Through a bibliographical review, was found that, although the modeling process has existed for centuries, its application in educational environments is still quite incipient. Throughout the work, the thesis defended is that modeling and simulation activities allow establishing clear connections between mathematics and physics studied during higher education, promoting a more significant education and, as a consequence, optimizing the Teaching/Learning process. The completion of this work occurs with the creation of a Learning Object in the form of a blog, that has models created within the field of dynamics and kinematics.

Keywords: Modeling; Mathematics; Physics; Learning Object.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Tela inicial do blog	21
Figura 2 - Modelo da derivada no blog	21
Figura 3 - Modelo da integral no blog	21
Figura 4 - Modelo da queda no blog	22
Figura 5 - Etapas da Modelagem	24
Figura 6 - Tela principal do GeoGebra	38
Figura 7 - Exemplo da barra de ferramentas do GeoGebra	40
Figura 8 - Detalhe do ícone do Controle Deslizante	41
Figura 9 - Tela aberta ao clicar no ícone do Controle Deslizante	41
Figura 10 - Controle Deslizante criado	41
Figura 11 - Teste da segunda derivada - Ponto de mínimo	45
Figura 12 - Teste da segunda derivada - Ponto de máximo	45
Figura 13 - Teste da segunda derivada - Ponto de inflexão	46
Figura 14 - comparação entre as inclinações das retas secante e tangente	47
Figura 15 - comparação entre as inclinações das retas secante e tangente	47
Figura 16 - Área a partir de 5 retângulos	50
Figura 17 - Área a partir de 10 retângulos	50
Figura 18 - Área a partir de 50 retângulos	51
Figura 19 - Detalhe dos textos representando variáveis	54
Figura 20 - comparação entre a área sob a curva e a área de 5 retângulos limitados pela curva	55
Figura 21 - comparação entre a área sob a curva e a área de 30 retângulos limitados pela curva	55
Figura 22 - comparação entre a área sob a curva e a área de 100 retângulos limitados pela curva	56
Figura 23 - Parâmetros criados através do controle deslizante	65
Figura 24 - Comparação entre as componentes verticais da velocidade	66
Figura 25 - Simulação de queda sem gravidade	67
Figura 26 - Simulação de queda com gravidade similar à da Terra	67
Figura 27 - Simulação de queda com gravidade similar à da Lua	68
Figura 28 - Modelo 1 - atividade 1	72
Figura 29 - Modelo 1 - atividade 2	74
Figura 30 - Modelo 1 - atividade 3	76
Figura 31 - Modelo 2 - atividade 1	78
Figura 32 - Modelo 2 - atividade 1	79
Figura 33 - Modelo 3 - atividade 1	81

Figura 34 - 1 retângulo	88
Figura 35 - 10 retângulos	89
Figura 36 - 20 retângulos	89
Figura 37 - 30 retângulos	89
Figura 38 - 40 retângulos	90
Figura 39 - 50 retângulos	90
Figura 40 - 60 retângulos	90
Figura 41 - 70 retângulos	91
Figura 42 - 80 retângulos	91
Figura 43 - 90 retângulos	91
Figura 44 - 100 retângulos	92
Figura 45 - 1 retângulo	92
Figura 46 - 10 retângulos	92
Figura 47 - 20 retângulos	93
Figura 48 - 30 retângulos	93
Figura 49 - 40 retângulos	93
Figura 50 - 50 retângulos	94
Figura 51 - 60 retângulos	94
Figura 52 - 70 retângulos	94
Figura 53 - 80 retângulos	95
Figura 54 - 90 retângulos	95
Figura 55 - 100 retângulos	95
Figura 56 - Resultado final dos cursos de engenharia na UFJF no período entre 2000 e 2005	98
Figura 57 - Cenário global do resultado do Exame Pisa - 2015	100
Figura 58 - Cenário global do resultado do Exame Pisa - 2018	100

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Soma da área dos retângulos	53
Tabela 2 - Soma da área dos retângulos para a função: $f(x) = x^2/12$	97
Tabela 3 - Soma da área dos retângulos para a função: $f(x) = \text{sen}(x)/2 + 4$. . .	97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
MRU	Movimento Retilíneo Uniforme
MRUV	Movimento Retilíneo Uniformemente variado
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
u.a.	Unidades de Área
NTIC	Novas Tecnologias de Informação e Comunicação
NTIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação
OA	Objeto de Aprendizagem
TDIC	Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

LISTA DE SÍMBOLOS

t	Tempo
m	Massa
v	Velocidade
a	Aceleração
k	Resistência do ar
g	Gravidade

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	15
1	A CRIAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM	18
1.1	Objetos de aprendizagem: Concepção e utilização	18
1.2	A construção do blog: Produto deste trabalho	19
2	INTEGRAÇÃO ENTRE MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELAGEM COMPUTACIONAL	23
3	A MODELAGEM E A SIMULAÇÃO NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO	29
3.1	A educação básica	29
3.2	A educação superior	31
4	A RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E AS DEMAIS CIÊNCIAS	35
5	A ESCOLHA DO SOFTWARE GEOGEBRA	38
6	ESTUDO DE TAXAS DE VARIAÇÃO COMO MODELO CINEMÁTICO	42
7	A INTEGRAL DEFINIDA RELACIONADA AO DESLOCAMENTO DE UM CORPO	49
8	PROBLEMATIZAÇÃO DOS CORPOS EM QUEDA	57
8.1	Queda livre sem resistência do ar	58
8.2	Queda considerando a resistência do ar	61
8.3	Do modelo matemático ao modelo computacional	64
9	POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO	69
9.1	Modelo: Estudo de taxas de variação como modelo cinemático	70
9.1.1	<u>Atividade 1: Discussões no âmbito qualitativo</u>	70
9.1.2	<u>Atividade 2: Estudo acerca da taxa de variação de grandezas físicas</u>	71
9.2	Aplicações do teste da segunda derivada	73
9.2.1	<u>Atividade 3: Relacionando o teste da segunda derivada com problemas de otimização</u>	73
9.3	Modelo: A integral definida relacionada ao deslocamento de um corpo	75
9.3.1	<u>Atividade 4 Aplicando a integral definida no cálculo da área sob uma curva qualquer</u>	75
9.4	Modelo: Problematização dos corpos em queda	77
9.4.1	<u>Atividade 5: Analisando algumas variáveis e suas implicações no problema da queda</u>	77
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	82

REFERÊNCIAS	84
APÊNDICE A – Representação gráfica das áreas dos retângulos pela soma de Riemann comparada à área sob a curva da função	88
APÊNDICE B – Soma da área dos retângulos	96
ANEXO A – Índice de retenção, promoção e evasão nos cursos de engenharia da UFJF	98
ANEXO B – Dados do exame PISA	99

INTRODUÇÃO

O termo “modelagem”, dentro do ambiente acadêmico, suscita diferentes interpretações. Todas derivam da acepção mais objetiva do termo, que remete à criação de moldes, ou ao ato de dar forma a algo. Todavia, dentro dos cursos de exatas, o termo supracitado usualmente se refere à modelagem matemática, e/ou à modelagem computacional. Em ambos os casos, os termos apresentam uma interpretação que se expande além da definição apresentada acima.

No primeiro caso, consideraremos ao longo desse trabalho, como o ato de manipular objetos matemáticos com o objetivo de quantificar, conjecturar, inferir, analisar ou descrever fenômenos diversos. Em particular, para fins de delimitação do tema, nos atemos a determinados fenômenos físicos, embora seja evidente que a linguagem matemática se aplique como tradutora de fenômenos das mais diversas áreas do conhecimento humano.

Já no segundo caso, trataremos como o ato de transformar linguagem matemática em linguagem computacional. Esta por sua vez, dotada de atributos gráficos capazes de conferir ao objeto de estudo noções de continuidade, dinamismo e movimento de forma muito mais simples e visualmente rica quando comparada aos métodos tradicionais de ensino.

Dada a subjetividade do processo de modelagem, há a necessidade de definir parâmetros capazes de garantir a qualidade de um modelo. Dentro dessa perspectiva, diversos autores apresentam uma série de passos a serem seguidos, em forma de algoritmo, a fim de garantir a qualidade do modelo. Ao longo deste trabalho adotaremos a concepção proposta em Almeida e Palharini (2012). Em um capítulo específico trataremos mais aprofundadamente desta definição de modelo bem como os fatores que culminaram com sua escolha.

Objetiva-se neste trabalho sustentar, por meio de uma revisão bibliográfica, a hipótese de que o desenvolvimento de modelos em ambiente acadêmico, possivelmente seguido por atividades de simulação baseadas nos modelos desenvolvidos, constitui uma ferramenta pedagógica, tão eficiente quanto subutilizada, cujo potencial de transformação, embora seja densamente pesquisado, ainda não encontra-se completamente conhecido. Em particular, ainda há muitas lacunas sobre as possibilidades de aplicação dentro dos cursos superiores.

O escopo deste trabalho fica limitado aos fenômenos de cinemática e dinâmica sob a ótica das disciplinas de cursos de exatas. Em especial, remetemos às disciplinas introdutórias e básicas no campo da física, bem como às disciplinas de cálculo diferencial e integral. Defendemos ao longo do texto, que há uma relação dialética, dentro do âmbito educacional, entre matemática e física, que entretanto, sucumbe a um hiato didático-metodológico. Esse cenário culmina com o alto índice de reprovação nessas disciplinas,

que fora alvo de diversos estudos e pesquisas. Em particular, Oliveira et al. (2007, p. 3), em um estudo de caso, avaliam os índices de reprovação, promoção e abandono de alunos dos cursos de engenharia no período entre 2000 e 2005. Dentre 9 disciplinas dos departamentos de Matemática e Física, somente três mostraram índices de promoção superior a 50%, conforme observa-se na figura 56, disponível no anexo A deste trabalho.

Defendemos que a referida conjuntura, poderia ser dirimida ou suprimida com as atividades de modelagem/simulação. Afinal, estas atividades priorizam a construção de conhecimentos dentro de ambientes de investigação, favorecendo o rompimento sistemático com o paradigma do exercício, estimulando a reflexão crítica. Dessa forma, defendemos que os conteúdos inseridos nas ementas das disciplinas serão revestidos de significância para o discente, de acordo com Bassanezi (2002) e Skovsmose (2000).

De certo, o senso comum por vezes atribui de maneira muito simplória, a responsabilidade pelos maus resultados nas referidas disciplinas à dita “falta de base” por parte dos alunos, indicativa de uma defasagem curricular. Sem sombra de dúvidas, pesquisar as etapas educacionais pregressas dos discentes constitui uma estratégia interessante para compreender percalços no processo de Ensino-Aprendizagem em estágios mais avançados de sua formação. Todavia, Barreiro e Bagnato (1992) ao pesquisarem causas da acentuada reprovação, vincula este quadro muito mais às questões ligadas às metodologias didáticas, em detrimento das questões associadas à formação discente ao longo da educação básica.

Cabe refletir acerca do seguinte fato: Tradicionalmente, os cursos de engenharia possuem notas de corte elevadas, quando comparadas à maioria dos cursos. Logo, pressupõe-se que a teoria da defasagem curricular dos alunos como fator preponderante para reprovação não se sustentaria, sem considerarmos com a devida minúcia outros fatores, e por conseguinte constitui um indicativo da relevância do tema deste trabalho acadêmico.

Ainda apresentando dados que corroboram com a justificativa da pesquisa, cabe analisar os dados obtidos a partir do Exame Pisa. Mais adiante explicaremos em pormenores o referido exame. Nesse momento basta saber que avalia-se 3 quesitos: Ciências, Matemática e Leitura. Justamente três dos conhecimentos mais relevantes no processo de modelagem. Verifica-se que nos últimos exames, Brasil e Estados Unidos ocupam posições distintas no ranking que avalia o rendimento médio dos alunos nas três referidas áreas de conhecimento, de acordo com as figuras 57 e 58 respectivamente, que encontram-se no anexo B deste trabalho. Embora haja discrepância nos dados do exame, também nos EUA verifica-se a preocupação da comunidade acadêmica acerca do rendimento dos alunos em cursos superiores em disciplinas inerentes à Física e à Matemática, em especial quanto à capacidade de diálogo entre essas disciplinas desses dois campos (CUI, 2006).

O trabalho apresenta modelos computacionais para modelar fenômenos físicos dentro do escopo citado anteriormente. A cada modelo se dedica um capítulo, iniciado com uma revisão bibliográfica seguida por uma breve formulação matemática acerca do tema a ser abordado. Em seguida apresenta-se uma sugestão de implementação computacional

do modelo desejado. Fichas com sugestões de atividades acerca de cada modelo foram desenvolvidas e estão organizadas constituindo um capítulo a parte desta pesquisa.

Dessa forma, a organização deste trabalho contempla: o capítulo 1 tratando da relevância de procedimentos para a criação de Objetos de Aprendizagem, o capítulo 2 que versa sobre a aproximação entre Modelagem Matemática e Modelagem Computacional, o capítulo 3 que discute as atividades de modelagem e simulação como estratégias pedagógicas, o capítulo 4 que busca ilustrar a maneira com a qual a Matemática estabelece diálogos com as demais áreas do conhecimento, o capítulo 5 que justifica o motivo pelo qual o software GeoGebra se consolidou como a melhor escolha para a implementação dos modelos aqui discutidos, seguido pelos capítulos 6, 7 e 8 que apresentam modelos específicos tratando de taxa de variação, deslocamento e problemas de queda respectivamente. Por fim o capítulo 9, já referido anteriormente, apresenta sugestões de atividades, baseadas nos modelos propostos. As atividades 1, 2 e 3 se referem ao modelos do capítulo 6, a atividade 4 se refere ao modelo do capítulo 7 e por fim a atividade 5 está associada ao modelo do capítulo 8.

Toda a parte computacional sugerida se baseia no software GeoGebra. A escolha do software deu-se pautada na facilidade de acesso e utilização do software, bem como o atendimento às mais variadas demandas que por ventura possam surgir ao longo dos processos de modelagem inseridos nos temas constituintes do escopo da pesquisa. Maiores detalhes sobre a escolha do GeoGebra bem como uma explanação mais rica em detalhes acerca das características do software em questão, também encontram-se em no capítulo 5, como dito, específico para o tema.

O trabalho resulta na criação de um objeto de aprendizagem. Ciente de que as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC)¹ têm ocupado um espaço cada vez maior no cotidiano, não poderia supor, no que tange a educação, que o cenário fosse muito diferente. Portanto, optou-se por criar um blog², contendo todos os modelos propostos neste trabalho. Blogs têm por característica a facilidade de atualização das informações hospedadas nele, permitindo que mais materiais desenvolvidos pelo autor, ou propostos por usuários, sejam inseridos rotineiramente. Dessa forma, pretende-se democratizar o acesso à informação e contribuir com o ensino colaborativo.

¹ A expressão Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, substituiu a expressão Novas tecnologias de Informação e Comunicação que vem caindo em desuso, uma vez que o termo “Nova” cada vez menos se aplica.

² O endereço eletrônico do blog é <https://luigimjb.wixsite.com/meusite>

1 A CRIAÇÃO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM

1.1 Objetos de aprendizagem: Concepção e utilização

Uma vez que o desenvolvimento deste trabalho culmina com a criação do blog³ que traz modelos matemáticos/computacionais que integram dialeticamente Matemática e Física, evidencia-se a necessidade de tratar da aplicação do uso de tecnologia como um eficaz Objeto de Aprendizagem. O momento em que se discutia se estas tecnologias eram ou não cabíveis em ambientes de ensino ou se devia-se primar por um modelo educacional conservador, já fora ultrapassado. Hoje, deve-se então, discutir como introduzi-la de maneira natural e justificada, constituindo assim uma ferramenta otimizadora da aprendizagem.

A presença cada vez mais constante da tecnologia impõe drásticas alterações na rotina de cada indivíduo. Não há necessidade de retroagir muito no tempo para observar grandes mudanças nas formas de se comunicar, trabalhar e locomover, por exemplo. Voltando apenas alguns anos, seria muito difícil acreditar que poderíamos fazer chamadas telefônicas de vídeo, com uma ou mais pessoas. Tal fato beiraria ficção científica. Entretanto, hoje trata-se de algo corriqueiro, quase banal. De certo que essa acelerada transformação, que rompe barreiras nos mais variados aspectos de nossa vida diária, também chegaria à educação. A maneira de transmitir e receber informação, bem como a forma de construir conhecimentos também são impactadas (de maneiras positivas ou negativas) pela presença maciça da tecnologia. O processo de Ensino-Aprendizagem pode, portanto, ser otimizado por meio da utilização apropriada da tecnologia (AUDINO; NASCIMENTO, 2010).

Por consequência do quadro acima descrito, observa-se constantemente a tentativa de trazer os recursos tecnológicos, ou as chamadas “Novas Tecnologias de Informação e Comunicação”, as quais comumente nos referimos como NTICs, para o interior das salas de aula (ou outros espaços educacionais onde se estabeleça a referida relação de Ensino-Aprendizagem). Em geral, uma maneira usual de fomentar o uso de TDIC em ambientes educacionais é a utilização dos Objetos de Aprendizagem. Por se tratar de um conceito novo, ainda carece de uma definição precisa. Diversas áreas onde podemos citar, mas sem nos limitarmos às mesmas como a educação e a computação, ainda objetivam construir tal conceito Assis et al. (2005). Entretanto, a maioria dos autores converge para as seguintes características: capacidade de ser utilizado com eficiência, reutilizado e referenciado, como

³ Blogs são sítios eletrônicos que permitem uma fácil atualização por meio de postagens. Diferenciam-se de sites especialmente por carecerem de atualizações constantemente.

dizem (AUDINO; NASCIMENTO, 2010) e (BRAGA et al., 2012). No entanto, a definição mais precisa no que tange o escopo deste trabalho, se encontra precisamente em Audino e Nascimento (2010):

Atualmente os objetos de aprendizagem podem ser encarados como materiais importantes no processo de ensino e aprendizagem, pois nos fornecem a capacidade de simular e animar fenômenos, entre outras características, assim como, reutilizá-los em vários outros ambientes de aprendizagem. (AUDINO; NASCIMENTO, 2010, p.3)

Destaca-se também que a mera utilização de tecnologia em ambientes educacionais pode ser prejudicial ao ensino. Council et al. (2000) avaliam que é necessário compreender que a utilização eficaz de TDIC dar-se-á mediante ao efeito produzido pelas NTICs não somente nos alunos, mas também nos professores, não se limitando às questões meramente técnicas. Portanto há de se observar fatores tais como: a capacitação do docente para utilizar determinada ferramenta; a preparação do discente para interagir com a mesma; bem como a própria qualidade do objeto de aprendizagem utilizado. A desconsideração destes aspectos pode interferir negativamente no processo, comprometendo o propósito da utilização daquele Objeto de Aprendizagem (OA). De acordo com Kroll e Kruchten (2003 apud BRAGA et al., 2012), OA deve primar pela qualidade em dois aspectos fundamentais: No que se refere ao aspecto pedagógico, deve-se atentar para que o OA cumpra corretamente o objetivos propostos, sob o risco de transmitir algum conceito impregnado por erros. Já sob o aspecto da computação, problemas técnicos podem contribuir significativamente para o desencorajamento por parte do discente.

1.2 A construção do blog: Produto deste trabalho

O blog criado constitui um OA voltado para o estreitamento dos flagrantes laços entre a Física e a Matemática no âmbito dos cursos superiores. Física e Matemática são trabalhados notoriamente em disciplinas distintas e por conseguinte, todas as interações entre estes campos, com valor histórico e pedagógico, perdem força. O que seria da Física Newtoniana sem a instrumentação provida pelo CDI? Quanta informação se perde ao conhecer vetores, bem como suas propriedades e teorias intrínsecas, fortemente trabalhadas nos cursos de Álgebra Linear, se não os virmos como aplicáveis em situações práticas, como conferir o caráter vetorial de grandezas como deslocamento, velocidade e aceleração? Ressalva-se que o escopo deste trabalho não se limita aos cursos de Física e Matemática, mas sim às disciplinas cujas ementas contemplem estes dois campos, independente do curso onde estas disciplinas sejam ofertadas. De certo que ao matemático interessa o estudo das técnicas de primitivação de funções, bem como o físico se ocupa com problemas concernentes à Física teórica, a título de exemplificação. Todavia, tanto para

estes, quanto para alunos de diferentes cursos, as interseções entre Física e Matemática permitem a percepção do conteúdo estudado como algo pertinente à realidade cotidiana. Dessa relação surge a reflexão:

Hoje, os fundamentos do cálculo e da física clássica são ensinados no ensino médio ou em disciplinas introdutórias na faculdade em todo o mundo, geralmente em cursos separados, em departamentos separados. No entanto, esses dois assuntos estão tão intimamente entrelaçados que seria significativo, tanto do ponto de vista pragmático quanto filosófico, investigar como os estudantes contemporâneos veem a conexão entre cálculo e física. (CUI, 2006, p. 17, tradução do autor)

Portanto, quanto da relação entre estes campos de conhecimento é explorada ou sequer reconhecida pelos alunos, ou até mesmo pelos professores? Se notoriamente o ensino compartimentado e fragmentado constitui um fator de empobrecimento da educação, haja visto que não explora de maneira eficiente as potencialidades do objeto de estudo, cabe ao professor se apropriar de técnicas e ferramentas que lhe permitam explorar os tópicos relevantes de cada conteúdo em sua totalidade.

Assim, os chamados blogs⁴, parecem se adequar de maneira muito pertinente às necessidades acima descritas. Afinal, trata-se de uma ferramenta de ensino que não demanda profundos conhecimentos acerca de tecnologias nem de linguagens de programação. Também prima pela simplicidade no que diz respeito às possibilidades de interação por parte dos usuários (MANTOVANI, 2006). Dessa forma, os limites impostos pela tecnologia são quase que totalmente dirimidos, restando tão somente a face útil das ferramentas tecnológicas.

Excedendo a facilidade de criação e manuseio, a maior periodicidade das postagens, o ambiente dinâmico, cooperativo e colaboracionista também diferenciam os blogs das páginas de internet. Para Fonseca, Souza e Oliveira (2013), o blog criado neste trabalho classifica-se como um blog educacional, muitas vezes descritos como “edublog”, uma vez que se ocupa de aprimorar a aprendizagem.

Desta maneira, o blog se trata de um OA que se propõe a oferecer um ambiente de aprendizagem dinâmico e interativo, objetivando otimizar a compreensão conceitual por meio de tópicos que pertencem tanto à Física quanto à Matemática. Para isso, dispõe de modelos criados pelo autor deste trabalho através do software de geometria dinâmica GeoGebra, cuja escolha encontra-se justificada posteriormente.

Todos os modelos foram produzidos por meio do software, hospedados dentro do website⁵ do próprio desenvolvedor do referido software e posteriormente disponibilizados

⁴ O termo blog deriva da contração da palavra weblog. Esta formada pela justaposição das palavras do idioma inglês: Web (rede) e log (diário).

⁵ O endereço eletrônico deste website é: <http://www.geogebra.org>

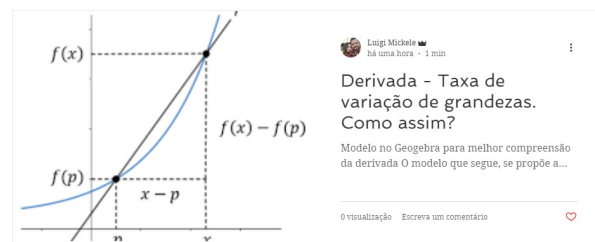
Figura 1 - Tela inicial do blog



Legenda: <https://luigimjb.wixsite.com/meusite>

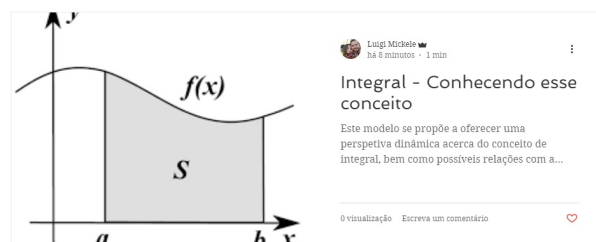
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 2 - Modelo da derivada no blog



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 3 - Modelo da integral no blog



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 4 - Modelo da queda no blog



Fonte: Produzido pelo autor.

no blog criado, cuja tela inicial se encontra disponível na figura 1. Destaca-se que o acesso a ambos os sítios eletrônicos é gratuito. Os modelos permitem análises qualitativas e quantitativas acerca dos fenômenos modelados, de acordo com as figuras 2, 3 e 4, instigando os alunos a questionar, conjecturar, testar, validar e descartar hipóteses. Endossa-se veementemente que os usuários dos modelos disponíveis se apropriem das técnicas básicas para utilização do GeoGebra e construam seus próprios modelos, adequados aos propósitos específicos de suas investigações, permitindo que os referidos discentes atuem não somente em atividades de simulação como protagonizem práticas de modelagem.

Outro ambiente de extrema importância disponível no blog são caixas de texto disponíveis para que os usuários tenham comentários acerca de sua interação com o blog e tudo que dela decorra. É portanto um valioso canal de comunicação que, embora não seja dotado de sincronicidade, permite a interação entre todos os atores do processo de ensino/aprendizagem. Neste espaço pode-se expor dúvidas, sugestões, agradecimentos, impressões, e demais formas de colaboração que transformam o blog em um ambiente de aprendizagem virtual vivo e dinâmico. Uma vez que os mesmos modelos expostos no blog estivessem disponíveis, por exemplo, em um dispositivo físico de armazenamento de dados (como um pen drive), a possibilidade de interação entre os referidos atores seria drasticamente sacrificada, limando algumas das possibilidades de ensino que somente a interação humana poderia propor. Tal característica “ênfatisa a zona de desenvolvimento proximal (ZPD)⁶ que é “algo coletivo” porque transcende os limites dos indivíduos” (MANTOVANI, 2006, p. 333).

⁶ Zona de Desenvolvimento Proximal trata-se de um conceito desenvolvido por Lev Vygotsky, que se refere à distância entre o que o indivíduo consegue executar com completa autonomia e aquilo que o referido indivíduo consegue executar somente com mediação.

2 INTEGRAÇÃO ENTRE MODELAGEM MATEMÁTICA E MODELAGEM COMPUTACIONAL

O conceito de Modelagem Matemática é notoriamente conhecido da comunidade científica, muito embora não seja possível precisar sua gênese com segurança. Entretanto, tomando por base o Papiro de Rhind, datando de aproximadamente 1.650 a.C. verifica-se que a civilização egípcia já resolvia problemas tais quais a divisão de alimentos, bem como estocagem de mantimentos, representando-os através de linguagem matemática, conforme analisa (BARASUOL, 2006). Constata-se então a Matemática como ferramenta capaz de impactar de forma objetiva e prática o cotidiano, bem como seus fenômenos intrínsecos. A utilização do termo “modelagem”, porém se deu recentemente, em meados do século XX. Foi durante esse período que houve importante crescimento das pesquisas nesse campo, impulsionadas pelo movimento utilitarista, que como a própria denominação sugere, se ocupa das utilizações e aplicações da Matemática, extrapolando os limites impostos pelo rigor da Matemática pura (BIEMBENGUT, 2009). Ainda de acordo com a autora, o desenvolvimento sistemático da modelagem no Brasil se dá quase concomitantemente ao que ocorre na comunidade Matemática internacional. Sob esse olhar, é verossímil a possibilidade do surgimento da Modelagem Matemática ainda nesse período (BARASUOL, 2006). Já no que tange o processo de simulação, de acordo com Costa (2017), este se observa dentro da comunidade científica há mais de 40 anos. Porém, foi nos últimos 30 anos que as simulações passaram a ser estimuladas como uma ferramenta útil no sentido de otimização do processo de Ensino-Aprendizagem, sendo defendida como um processo de ensino que estimula de forma plural as interações entre todos os sujeitos inerentes ao processo, inclusive o próprio objeto de estudo.

A fim de condensar todo o processo de construção de um modelo matemático, podemos adotar o entendimento de modelagem presente em Almeida e Palharini (2012). Nessa concepção, utiliza-se uma rotina simples e objetiva para a produção de um modelo matemático eficiente e eficaz. Primeiramente identifica-se uma situação-problema. Posteriormente defini-se com clareza o problema a ser atacado, para então produzir-se um modelo matemático. Esse modelo é testado e discutido para finalmente ser admitido ou descartado. Portanto, o processo de modelagem se reveste de um caráter investigativo e indutivo.

Ferruzzi et al. (2003) resumem esse processo da seguinte maneira: “A Modelagem Matemática procura traduzir situações reais para a linguagem Matemática, utilizando-se para isso estudo e conhecimento da situação física e o conhecimento matemático” (FERRUZZI et al., 2003, p.1354). De maneira semelhante, os autores sistematizam o processo de modelagem em 6 etapas:

- Definição do Problema;

Figura 5 - Etapas da Modelagem



Fonte: Almeida e Palharini (2012).

- Simplificação e Formulação de Hipóteses;
- Dedução do Modelo Matemático;
- Resolução do Problema Matemático;
- Validação;
- Aplicação do Modelo.

Partindo do processo acima descrito, são incontáveis os modelos matemáticos, triviais ou não, amplamente utilizados pela comunidade acadêmica ou pelo senso comum. Objetivando-se ilustrar a afirmação acima, debruçemo-nos sobre a concepção do Planeta Terra como uma esfera. Trata-se de um modelo, que se apropria da esfera (objeto matemático) suficientemente útil para compreensão de inúmeros fenômenos. Esse modelo substituiria portanto o modelo da Terra plana, uma vez que este sucumbiria à fase da experimentação, inerente ao método científico. É flagrante que embora o planeta Terra não se apresente em formato perfeitamente esférico, este é um modelo suficientemente bom, para que problemas reais possam obter soluções aproximadas, caracterizando de maneira contundente o processo de modelagem supracitado. A figura 5 representa de forma bastante precisa essa concepção de modelagem.

Ao longo desse trabalho, serão abrangidas duas vertentes significativas da modelagem. A saber: Modelagem Matemática e Modelagem Computacional. Ambas se baseiam no conceito básico da modelagem, ou seja, elaborar um modelo capaz de descrever com considerável precisão algum fenômeno real. Quando esse fenômeno for modelado por objetos matemáticos, tais quais equações, funções, figuras geométricas, tabelas ou gráficos por exemplo, tratar-se-á da Modelagem Matemática. Quando o modelo for desenvolvido em um software através da introdução quantitativa ou qualitativa de dados inerentes ao fenômeno em questão, a modelagem descrita será de cunho computacional. Certamente

que em muitos casos ambas as perspectivas da modelagem irão se apresentar simultaneamente, ou seja, quando através do processo de Modelagem Matemática obtiver-se dados que por sua vez alimentem o software para a criação do modelo computacional, então ambas as vertentes da modelagem poderão ser observadas. É cabível destacar que a mera utilização e/ou manipulação de objetos matemáticos não configura obrigatoriamente o processo de modelagem, que consiste, repito, na elaboração do modelo.

Sobre a flagrante relação entre os processos de modelagem e simulação, tornam-se relevantes as observações feitas por Medeiros e Medeiros (2002, p.79), ao afirmar que:

Evidentemente, qualquer simulação está baseada em um modelo de uma situação real, modelo este matematizado e processado pelo computador a fim de fornecer animações de uma realidade virtual. A construção, portanto, de uma simulação computacional pressupõe, necessariamente, a existência de um modelo que lhe dá suporte e que lhe confere significado. (MEDEIROS; MEDEIROS, 2002, p.79)

Em adição aos contributos dos processos de modelagem, nos permitiremos adicionar um passo a esse processo, que será a recorrente utilização da simulação computacional com o intuito de testar com viés de investigação os modelos apresentados. A relevância da correlação entre modelagem e simulação fica evidente em incontáveis trabalhos acadêmicos. Em especial, Cui (2006) investiga duas formas de transferência de conhecimento, denominadas como transferência vertical e horizontal, considerando ambas necessárias para solucionar quaisquer tipos de problemas.

A transferência horizontal se ocupa da aplicação de conhecimentos previamente adquiridos e exige a intensa repetição e reutilização desses conhecimentos dentro de uma determinada perspectiva por parte dos alunos. Podemos explicitar um exemplo, examinando um problema onde seja dada a função que descreve a velocidade de um corpo e deseja-se obter a função que descreva a aceleração do mesmo objeto. Uma vez que o conhecimento de que a segunda pode ser obtida por derivação da primeira em relação ao tempo já tenha ocorrido, o aluno somente precisa encaixar variáveis dentro de uma fórmula e repetir um processo que ele mesmo, pressupõe-se, já se ocupou de realizar diversas vezes. Não houve necessidade de investigação acerca do problema, embora tenha havido reflexão no ato de reconhecer as variáveis apresentadas no enunciado da questão e reconhecido, de maneira correta, de qual forma estas variáveis se relacionam, a fim de obter a solução prevista para o exercício. Portanto, pode-se relacioná-la com a utilização de modelos prontos, ou seja, trata-se da simulação, que dentro do panorama utilizado neste trabalho, compõe o processo de modelagem.

Por outro lado, a transferência vertical está relacionada com a construção de conhecimentos. Observa-se, portanto, o desenvolvimento de novos saberes a partir daqueles já previamente adquiridos, enfatizando uma análise investigativa a partir dos dados apresentados. Nesse caso, o aluno observa o problema através de diferentes perspectivas, sendo capaz de desenvolver um modelo adequado que por meio da correlação entre as

perspectivas supracitadas, lhe permita inferir e concluir acerca do seu objeto de estudo. Um exemplo cabível seria apresentar a posição de um objeto em diferentes instantes e questionar sobre a aceleração deste mesmo objeto em qualquer momento, dentro do intervalo de tempo no qual o problema esteja inserido. Depois de analisar a variação da posição em cada partição apresentada para os intervalos de tempo inerentes ao problema, o aluno consegue verificar que uma determinada função pode descrever de maneira muito próxima a posição do corpo em estudo para cada instante. Posteriormente, ele usa essa função para obter a função velocidade e a partir dessa, a função aceleração por meio de duas derivações sucessivas em relação ao tempo. Novamente os conhecimentos prévios do aluno foram utilizados, mas ele precisou ir além. Sem uma investigação crítica a partir dos dados apresentados, não seria possível alcançar uma solução adequada para o problema atacado. Portanto, esta forma de transferência está relacionada com o processo de modelagem.

Dessa forma, torna-se razoável concluir que a modelagem não necessita que os conhecimentos utilizados na confecção do modelo possuam caráter de ineditismo. Os objetos matemáticos utilizados, bem como quaisquer outros conhecimentos prévios inseridos no processo de modelagem, compõe tanto a transferência horizontal quanto a vertical e são imprescindíveis ao ato de atacar o problema, quer seja de maneira pragmática, quer seja de maneira criativa. Este modelo sim, será inédito. Se não em uma análise macro, uma vez que certamente o fenômeno modelado provavelmente já compõe a vasta gama de conhecimentos científicos, mas ao menos em uma perspectiva micro, considerando o processo indutivo, de cunho particular, adotado pelo autor do modelo em seu processo de investigação.

Interessante perceber que as atividades de modelagem/simulação de fenômenos físicos possuem aplicação em ambos os sentidos: Tanto da Física para a Matemática quanto da Matemática para Física. Por exemplo: Pode-se usar simulações relativas à derivadas para motivar o estudo da relação entre a função posição e a função velocidade, bem como pode-se usar um modelo da cinemática para introduzir a ideia da derivada de uma função. Nesse sentido, Skovsmose (2000) fala sobre referências. Estas podem ser: Referência à Matemática pura, à semi-realidade (uma realidade “preparada” pelo autor do problema somente para justificar a resolução do exercício) ou à própria realidade. Essas referências combinam-se com duas formas pelas quais pode-se trabalhar uma questão: através do paradigma do exercício ou por meio de um cenário para investigação. Há de se destacar que mesmo no escopo da Matemática pura, há espaço para atividades investigativas. Nos problemas de Física, onde fatalmente encontram-se problemas relativos à semi-realidade ou à realidade, estimular a reflexão crítica acerca das questões torna-se ainda mais fácil e vantajoso. Destaca-se também a oportunidade do desenvolvimento de atividades que permitam ou estimulem a possibilidade de transitar entre os exercícios e cenários de investigação. Dessa maneira, pode-se partir de exercícios como

uma preparação para uma futura investigação relativa a um problema específico, bem como pode-se utilizar a investigação como ponto de partida para introdução de um tópico ou uma pergunta motivadora, para posteriormente consolidar o conhecimento construído por meio de exercícios.

Pautado na perspectiva das referências supracitada, este trabalho se propõe a desenvolver e apresentar modelos, bem como convida à criação de novos modelos, a partir dos quais se possa explorar todas as possibilidades de desenvolvimento de questões. De certo que o principal foco dos modelos criados se ampara na referência à semi-realidade dentro de um cenário para a investigação. Todavia, as possibilidades de interação tanto com os modelos, em uma visão mais restrita, quanto com o software, de forma mais genérica, mostram-se tão ricas, que há espaço inclusive para formulação de questões com referência à Matemática pura dentro do paradigma do exercício. Nesse contexto, o trabalho de Ferruzzi et al. (2003), muitas vezes amparado pelas ideias de Skovsmose, aponta que dentro das universidades, ainda observa-se uma predileção pelo paradigma do exercício. Assim, o trabalho aqui desenvolvido apresenta essencialmente uma proposta de ruptura com o tradicionalismo enraizado na educação Matemática no âmbito dos cursos superiores.

Ainda em Ferruzzi et al. (2003), os autores destacam que o docente dentro dos cursos superiores, muitas vezes optam pelas possibilidades ofertadas pelo ensino tradicional em virtude da permanência na zona de conforto, em detrimento do que Skovsmose (2000) classifica como uma zona de risco. É bastante simples entender o motivo da saída do paradigma do exercício ser entendido como um risco. Afinal, dentro do paradigma do exercício, somente uma possibilidade de resposta (aquela previamente conhecida e estudada pelo docente) pode ser considerada correta, havendo muito pouco espaço para reflexões e questionamentos, que de alguma maneira possam surpreender, e assim fragilizar o docente. Afinal, muitas vezes este teme deparar-se com questões cujas respostas não sejam de seu conhecimento prévio, bem como não se pressupõe a necessidade do uso de ferramentas tecnológicas, essas, por sua vez, tão intimamente associadas aos métodos mais atuais de ensino, onde se inclui a própria Modelagem Matemática.

Sem desconsiderar os benefícios observados em estratégias de ensino mais conservadoras, tanto Skovsmose (2000) quanto Ferruzzi et al. (2003) observam um grande entrave educacional ao se priorizar o paradigma do exercício: Suprime-se veementemente o estímulo à capacidade de refletir de forma crítica e por consequência a diminuição da capacidade de questionar, propor, intervir, inferir e sobretudo, criar. Assim, cria-se um problema de ordem pedagógica inserido no campo da educação Matemática, e talvez com gravidade ainda maior, um problema de ordem social, ao romper com o que há de mais básico nos fundamentos da educação, que é educar para formação social do indivíduo. E o que se espera de um indivíduo que não reflete, não questiona, não propõe, não intervém, não infere e não cria?

É nessa lacuna educacional que este trabalho se insere, tentando mitigar os princi-

país fatores que mantem os docentes enraizados no paradigma do exercício. O temor pelo questionamento pode ser minimizado pelos modelos amparados em uma semi-realidade, cujas variáveis relevantes podem ser propostas, admitidas e rejeitadas pelo docente, baseado nos objetivos didático-pedagógicos planejados para a aula. De igual maneira, qualquer aversão ao uso de novas tecnologias pode ser diminuída pela facilidade de utilização do software escolhido.

3 A MODELAGEM E A SIMULAÇÃO NO ÂMBITO DA EDUCAÇÃO

3.1 A educação básica

A disciplina Matemática é componente obrigatório do currículo da educação básica. Entretanto, confrontando a tendência educacional da interdisciplinaridade, paulatinamente se afasta de seu viés reflexivo e sucumbe à sua concepção meramente pragmática. De acordo com Bassanezi (1999), a Matemática tende a se afastar de outras ciências, justamente pelo potencial de se desvincular de quaisquer contextos, constituindo uma linguagem que pode se abster do diálogo com as demais ciências e por conseguinte, primar pelo rigor puramente matemático.

A consequência do ensino da Matemática rigorosa e descontextualizada, primada pelo correto uso da vasta simbologia associada, porém carente de conexão com o mundo externo, é o confronto direto aos textos que direcionam o ensino da Matemática nas mais primárias etapas do ensino desta disciplina.

Em um momento anterior, já confrontava-se com o que se encontrava nos antigos PCN's, que nos objetivos gerais do ensino da Matemática destacavam:

identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (PCN, 1998, p.47).

Evidentemente o texto já apontava a necessidade de priorizar o ensino de uma Matemática reflexiva e interdisciplinar, requerendo explicitamente que o aluno desenvolva ao longo dos ensinamentos Fundamental e Médio, a capacidade de modelar fenômenos através de ferramentas do campo desta ciência. Interessante ressaltar que o aspecto apontado no texto como “característico da Matemática”, somente pode ser observado quando se observa esta disciplina em sua totalidade. Entretanto, ao analisá-la sob um ângulo estritamente tecnicista, como usualmente o ensino da Matemática é descrito, este aspecto fica suprimido, transparecendo somente o viés pragmático.

Considerando agora a BNCC como o principal direcionador do currículo essencial da educação básica brasileira, observamos novamente que, por diversas vezes, o texto faz menção à necessidade não somente da interpretação e reconhecimento de um modelo, bem como de criação de modelos aplicáveis à determinadas situações. Podemos destacar a terceira, das três competências específicas da Matemática, presentes no documento supracitado:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos

contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (MEC, 2019, p.527).

É praticamente inevitável se questionar acerca de um ponto bastante óbvio: se o processo de modelagem e de interpretação de modelos já encontravam-se inseridos nos textos que direcionavam o processo de ensino/aprendizagem da Matemática nas diferentes etapas e, em nenhum momento sua demanda foi suprimida, inclusive pertencendo à BNCC que já está sendo implementada, por qual motivo a predominância do ensino pragmático se perpetua?

Decorre diretamente da inercialidade do educador matemático frente ao desafio da implementação de um ensino da Matemática predominantemente reflexivo ao longo da educação básica, conforme apontam Skovsmose (2000) e Ferruzzi et al. (2003), a perpetuação de um modelo educacional que prioriza o rigor em detrimento da reflexão crítica e da capacidade de modelar situações e/ou fenômenos através de ferramentas matemáticas. Metodologias tecnicistas e práticas ocupam o lugar da reflexão e do questionamento crítico. As aulas são sistematicamente ministradas através de um “script” bem definido, composto por uma breve explanação de um conteúdo ou tópico, seguido de exemplos resolvidos e posteriormente de exercícios, que em nada auxiliam os alunos no que tange tanto a compreensão macro da realidade que o cerca quanto à relevância da Matemática na descrição de situações-problemas alheias à sala de aula (BENNEMANN; ALLEVATO, 2012). Nesse momento, grande parte daquilo que os antigos PCN e que a futura BNCC preconizam, se perde.

Excluindo-se o fator humano dentre as causas do ensino deficiente da Matemática, é possível construir uma análise pautada nas avaliações internacionais as quais regularmente os sistemas educacionais são submetidos. Exames como o PISA ⁷, são usados como parâmetro qualificador da educação no país. Entretanto, tratando-se de uma avaliação de caráter internacional, é previsível que o exame se abstenha de avaliar a capacidade crítica e criativa do aluno, mais uma vez priorizando o método tradicional de ensino da Matemática. Ubiratan D’Ambrósio é preciso ao afirmar que “Um dos efeitos da sociedade globalizada é uma forte tendência para eliminar diferenças, promovendo uma cultura planetária. Particularmente afetados são os sistemas educacionais” (D’AMBRÓSIO et al., 2005, p. 1). D’ambrosio (2002), explicita o papel da Matemática nas civilizações, definindo-a como um instrumento intelectual necessário para solucionar problemas reais. Dessa forma, infere-se uma Matemática globalmente valorizada, revestida de formalidades, se comparada com a Matemática socialmente útil, alicerçada sobre sua capacidade de se

⁷ PISA é o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes, que avalia e pontua por amostragem o conhecimento de estudantes a partir do 7º ano do ensino fundamental acerca de Matemática, ciências e leitura.

inserir no cotidiano, ocupam posições diametralmente opostas. Ainda que ambas possuam relevâncias em diferentes aspectos, o favorecimento da primeira em detrimento da segunda, agride a educação básica.

Fica evidente, portanto, um conflito entre a Matemática dita útil, imbuída da capacidade de resolver problemas através dos inúmeros objetos matemáticos e a Matemática rigorosa, caracterizada por demandar um relativamente alto grau de desenvolvimento cognitivo por parte de quem a utiliza. Sob esse aspecto, é interessante a maneira com a qual esse tema é abordado em Matos (2002), uma vez que segundo o autor, a Matemática escolar não se mostra útil como também não se mostra capaz de induzir o desenvolvimento cognitivo. Constitui somente um fator relevante no que tange a seriação do aluno dentro do sistema educacional e portanto, é percebida como um fator de exclusão do discente.

Desta forma, destaca-se a importância da criação de diferentes estratégias de ensino, de modo que a Matemática escolar (e também acadêmica) contribua para o desenvolvimento e aprimoramento de habilidades matemáticas desejadas, como afirma (MACHADO; MACHADO, 2019, p.42).

3.2 A educação superior

É bastante razoável relacionar o quadro acima descrito no âmbito da educação básica com o reconhecido alto índice de reprovação em disciplinas de cursos superiores, com destaque ao Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e disciplinas introdutórias do campo da Física, como Física Básica e Física I. Índices estes, que já motivaram uma grande quantidade de pesquisas científicas. Rezende (2003, p.28) “procura interpretar as dificuldades de aprendizagem no ensino do cálculo em termos de obstáculos epistemológicos de certos conceitos do cálculo”. Junior et al. (2006, p. 2) analisam fatores que implicam nos altos índices de reprovação na disciplina de cálculo no Brasil e no mundo, cita textualmente como um desses fatores “as questões pragmáticas ligadas à sua aplicabilidade”.

Há de se admitir que alunos de cursos superiores tendem a possuir maior capacidade de reflexão, obtida pelo acúmulo de vivências, independente de estarem (ou não) diretamente inseridas em um contexto pedagógico, quando comparados aos alunos da educação básica. Certamente que o ensino descontextualizado não passa despercebido pelo crivo destes discentes. Bassanezi (2002), apresenta um interessante relato em relação a um projeto desenvolvido com alunos de Tecnologia de Alimentos da UNICAMP em 1983, dentro da disciplina de CDI. O contexto onde se inseria o projeto se baseia no objetivo de otimizar uma plantação. Antes mesmo do início do projeto, alunos do curso, que nem sequer haviam estudado cálculo, utilizavam camisas em alusão ao curso no qual encontravam-se matriculados, porém com a seguinte inscrição: “Detesto Cálculo”, muito

embora se reconheça a relevância da disciplina CDI em cursos superiores. Certamente que por questão de praticidade em detrimento da aprendizagem consolidada, enfatiza-se as estratégias de resolução do problema real. Ora, se desde a educação básica a Matemática carrega o estigma de desvincular-se da realidade, suprimindo a necessidade de dialogar com o cotidiano e adicionando a infâmia que persegue o CDI como disciplina componente da grade de um curso que, a princípio, em nada se relaciona diretamente com a Matemática, o protesto de fato torna-se compreensível (FERRUZZI et al., 2003). Este autor ainda se ocupa em descrever o desenvolvimento do projeto, onde a partir de uma pergunta motivadora proposta por um aluno sobre a distância entre as sementes plantadas, o processo de modelagem se desenrola naturalmente. Uma grande quantidade de objetos matemáticos foram arrolados ao problema, como destaca Bassanezi (2002):

Assim é que trabalhamos com função (linear, potência, exponencial), função inversa (logaritmo), função discreta (forma de recorrência), continuidade, limites (assíntotas), derivadas (crescimento, pontos críticos, concavidade), raízes de funções (Teorema do Valor Médio – bissecção), gráfico de funções etc. Em cada etapa deste processo procurávamos selecionar problemas diversos com resoluções análogas. O conceito de integral definida foi introduzido posteriormente, quando estudamos a plantação de batatas em terrenos irregulares (cálculo de áreas). (BASSANEZI, 2002, p.191).

Como consequência direta da maneira com a qual foi desenvolvido o projeto, essa turma apresentou somente uma reprovação em CDI dentre os 70 inscritos, embora tenha sido avaliada sob os mesmos componentes avaliativos que as demais 14 turmas. Portanto, esse resultado corrobora a tendência de que os altos índices de reprovação na disciplina estejam prioritariamente atrelados às estratégias de ensino-aprendizagem e não aos métodos de avaliação.

Este trabalho de projeto se assemelha muito à proposta de Ferruzzi et al. (2003), ao projetar uma análise da temperatura no interior de um forno elétrico. Tanto no Projeto de Bassanezi quanto no de Ferruzzi, observa-se a quebra do paradigma do exercício observado por Skovsmose (2000) e o mergulho em um ambiente de investigação, onde conhecimentos prévios sobre Matemática foram primordiais para a criação de modelos eficientes para aplicação prática. de acordo com Bassanezi (2002) ou para descrição precisa do objeto de estudo, conforme apontam Ferruzzi et al. (2003).

Tais resultados fortalecem a conjectura de que os trabalhos de modelagem, seguidos ou não por simulações, fornecem um poderoso incremento no processo de ensino/aprendizagem dentro de cursos superiores. Não só em virtude da evidente necessidade de manipulação de objetos matemáticos bem como de revisitação a tópicos já conhecidos pelos discentes, mas por fatores que embora não habitam algum campo da Matemática. Tal circunstância fica evidente nas considerações de Ferruzzi et al. (2003):

Observamos que a interação estimulada pelo trabalho em grupo trouxe benefícios para o processo de aprendizagem da Matemática. Verificamos ainda

que com atividades de Modelagem no ensino o aluno pode observar a Matemática presente no dia-a-dia, estabelecer relação entre a Matemática e o mundo fora dela, desenvolver habilidades para aplicar os conceitos matemáticos para solucionar problemas e visualizar a aplicabilidade da Matemática escolar na sua vida profissional como também no meio social e político em que vive (FERRUZZI et al., 2003, p.1358).

Tanto Rezende (2003) quanto Giraldo (2004), apontam que a discussão sobre a introdução ou não de TDIC como ferramentas de ensino já fora superada. Afinal, o cotidiano apresenta o uso de novas tecnologias nos mais variados aspectos. Esse uso encontra-se em expansão notória, não deixando qualquer espaço para crer que a educação caminharia no sentido oposto. O cerne da questão então, se afasta do “se” e se aproxima do “como” conforme pondera Rezende (2003).

Evidentemente, a mera utilização de Novas Tecnologias de Ensino, embora necessária, não é suficiente para produzir um efeito positivo relevante na aprendizagem. De fato, sua implementação carece de reflexão e planejamento adequados, pois caso contrário, o efeito desejado poderia não ser atingido, ou, no pior cenário, poderia tornar-se prejudicial ao processo de Ensino-Aprendizagem.

Ao tratar sobre possíveis problemas enfrentados ao utilizar recursos computacionais em sala de aula, Giraldo (2004) aponta a possível perda ou desfiguração conceitual dos objetos matemáticos (ou físicos) inseridos no escopo do problema que estiver em questão. Tais objetos podem ter suas imagens de conceito ⁸ associadas à rotina de programação, desvinculando-se completa ou parcialmente de seus significados reais. O autor ainda destaca que por vezes, o próprio docente não reconhece que a implementação de TDIC contribua de alguma maneira significativa com a qualidade da aprendizagem, classificando-a como mero desperdício de tempo. Tempo este, que na visão dos referidos docentes, seria melhor aproveitado em salas de aula convencional. Se o próprio professor não enxerga os recursos computacionais como aliados no processo de ensino, não há quaisquer motivos para crer que o uso das NTICs por parte desse professor culminará com resultados positivos. Porém nesse caso, os resultados poderiam ser negativos não em consequência de possíveis limitações dos recursos tecnológicos, mas pela recusa em compreender a educação como parte do cotidiano irreversivelmente computadorizado. Laudares e Lachini (2000) observam a ocorrência de casos onde o uso do computador se limita à realização de cálculos e operações matemáticas e, portanto, não há qualquer conexão estabelecida entre aluno e o muitos dos objetivos da disciplina. Nesses casos, os alunos anseiam tão somente pela unicidade de respostas certas para cada questão, con-

⁸ Imagem de conceito pode ser compreendida como o conjunto de entendimentos construído através de múltiplas vivências do indivíduo, permanecendo em estado de perpetua mutação, através do qual este indivíduo interpreta e por consequência, se apropria, de um determinado conceito (TALL; VINNER, 1981)

sequência óbvia do, anteriormente citado, paradigma do exercício, certamente já inculcido na vivência dos alunos, ao longo de suas formações escolares e acadêmicas.

4 A RELAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E AS DEMAIS CIÊNCIAS

Galileu Galilei, ao afirmar que “A Matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo”⁹, corroborava com o entendimento da Matemática como uma linguagem capaz de descrever o universo, bem como seus incontáveis fenômenos intrínsecos. Muitas vezes, para descrever um fenômeno de forma que se possa traduzi-lo em aplicação real e efetiva pode se fazer necessário quantificá-lo. Portanto a Matemática de fato constitui uma ciência impreterível para conhecer e interpretar uma enorme quantidade de fenômenos, cuja compreensão é condição sine qua non para o entendimento do universo, em diferentes níveis de profundidade. Desde a simples queda de um objeto, aos mais sofisticados modelos cosmológicos, tornam-se possíveis mediante o uso e a manipulação de objetos matemáticos.

Diversos campos da ciência moderna se amparam em símbolos matemáticos que creditam confiabilidade a um modelo. Consiste nisso a afirmação de Menezes (2000, p.1), ao dizer que “A Matemática tem funcionado como uma espécie de metaciência, na medida em que perpassa e estrutura muitas outras ciências”.

Ao fundamentar conhecimentos de tantas áreas da ciência, de certo que a Matemática permeia o cotidiano de maneira tão profunda que se reveste de um caráter socioepistemológico. Portanto, a Matemática deve ser observada considerando não somente suas nuances como ciência pura e atemporal, mas também suas implicações derivadas de seu caráter (pouco explorado) de ciência social, com relevância coletiva e histórica, como aponta Almeida e Ferruzzi (2009). Em outras palavras, abordar a Matemática sem o devido cuidado com as múltiplas relações estabelecidas entre ela e o mundo, implica em uma análise bastante rasa.

Nesse contexto, a relação entre os conhecimentos inerentes aos vastos campos de saberes tanto da Matemática como da Física, obviamente apresenta intersecções. É fato que enquanto à Matemática é facultado se desligar da realidade, a Física apresenta inúmeras definições conceituais. Em ambos os casos, Matemática e Física se apresentam de maneira absolutamente independente. Todavia, contrapondo estes exemplos pontuais, Matemática e Física coabitam uma infinidade de conhecimentos.

Por muitas vezes este trabalho faz menção ao CDI, por caracterizar um conjunto de disciplinas que evidenciam a relação com as Físicas introdutórias dentro de cursos de graduação. Ressalta-se entretanto, que modelar fenômenos físicos consiste em uma tarefa com vertentes e níveis de profundidade tão variados, que poderia caber a qualquer campo da Matemática a responsabilidade por embasar tais modelos.

⁹ Frase apresentada no clássico filme de 1959 *Donald in Mathmagic Land*, cujo título em português foi traduzido como Donald no País da Matemática.

Cabe aqui então, a divagação histórica acerca do processo de criação, camada por camada do CDI até a atualidade. Rezende (2003) destaca que definir o Cálculo consiste em uma tarefa árdua, tanto para alunos quanto para professores. De igual maneira, atribuir a responsabilidade da criação desta ferramenta a uma pessoa, ou até a um grupo limitado, não é uma tarefa das mais fáceis. A base sólida sobre a qual se constrói algo tão grandioso como podem ser considerados os desdobramentos das aplicações do CDI, se deve a séculos de estudo e aprimoramento de conceitos matemáticos. Baron (2014) aponta que praticamente tudo que se desenvolveu relativo às ciências, entre os séculos XVII e XIX, se relaciona em algum nível com o CDI. Porém, notoriamente, os nomes de dois gênios que mesmo post mortem, seguem continuamente associados ao desenvolvimento CDI são: Newton ¹⁰ e Leibniz ¹¹. Embora contemporâneos, enxergavam o CDI sob diferentes aspectos. Todavia, as aplicações do vasto desenvolvimento dos conceitos matemáticos inerentes ao CDI lapidados por ambos, tomaram encaminhamentos dotados de algumas diferenças, em especial ao analisar o cerne do currículo das disciplinas de Física Introdutórias bem como as de CDI. Enquanto o primeiro encontra-se comumente citado nas disciplinas de Física, o segundo, de certo é mais frequentemente abordado nas disciplinas de matemática Boyer (1959 apud REZENDE, 2003). Ainda analisando a relação Física e Matemática refletida no desenvolvimento do CDI e ilustrada pelo “confronto” Newton e Leibniz, podemos refletir sobre a afirmação de Baron e Bos (1985 apud REZENDE, 2003):

ainda que o Cálculo não tenha começado nem terminado com estes dois homens [Newton e Leibniz], cabe a eles um grande mérito. Newton estendeu e unificou os vários processos de cálculo e Leibniz ligou-ou através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional (BARON; BOS, 1985 apud REZENDE, 2003, p. 188).

Ora, não seriam algumas das funções mais óbvias da Matemática, justamente a de operacionalizar e a de desenvolver notações? Torna-se ainda mais evidente que o referido “confronto” entre Newton e Leibniz indica o alto grau de profundidade na qual Matemática e Física se permeiam.

A dedução lógica aponta para o fato de que, se Matemática e Física em tanto se aproximam, dentro das instituições de ensino, em especial, dentro das ementas das disciplinas de cursos superiores, ambas devem dialogar. É certamente que isto deve ocorrer de maneira muito mais profunda do que a mera concepção da Matemática como ferramenta para quantificação de grandezas físicas, ou do que o uso da Física como exemplo pontual na modelagem de questões da Matemática. Dessa maneira, Pietrocola (2002) afirma:

¹⁰ Isaac Newton nasceu em 1643 e viveu até 1727

¹¹ Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1646 e viveu até 1716

Esta tradição [de matematizar o conhecimento físico] se impôs na pesquisa física estabelecida pelo uso, mostrando o poder do simbólico que funciona por si próprio, chegando, hoje, ao seu maior requinte com as modernas teorias físicas, onde é impossível pensar o empírico sem auxílio de um simbolismo matemático altamente sofisticado (PIETROCOLA, 2002, p. 93).

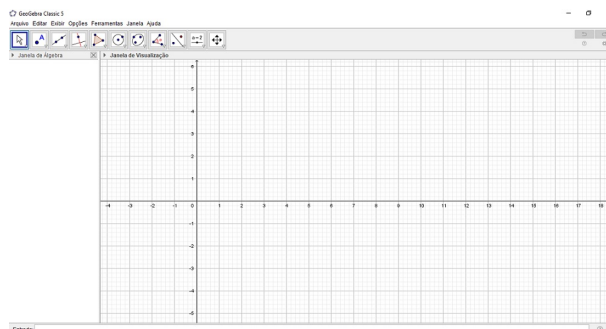
5 A ESCOLHA DO SOFTWARE GEOGEBRA

Existe uma grande quantidade de softwares matemáticos, com aplicações nas mais diversas áreas, cujas utilizações podem ser voltadas para a modelagem matemática. Cada qual carrega especificidades, quer seja no âmbito técnico, como por exemplo o tipo de licença ou os sistemas operacionais onde o software funciona, quer seja no âmbito da própria Matemática, onde observa-se potencialidade de aplicação/utilização do software em diferentes campos e níveis de ensino. Objetivando-se maximizar o alcance dos modelos aqui propostos, optou-se por analisar softwares gratuitos ou livres e portanto sem a necessidade da aquisição de licenças. Uma vez que o objetivo deste trabalho está associado ao nível superior de ensino, o software escolhido foi o GeoGebra. Ao longo deste trabalho será utilizada a versão GeoGebra Classic 5.0.539.0-d, para Windows, cuja tela principal encontra-se na figura 6.

O GeoGebra é o produto de uma dissertação de mestrado¹². Foi desenvolvido para ser utilizado em ambiente de sala de aula, de maneira inovadora na educação básica. Seu público alvo, em um primeiro momento, era constituído de estudantes entre 10 e 18 anos, embora hoje seja notória sua utilização nos mais variados níveis de ensino, e por consequência, atendendo às mais diversas faixas etárias. O evidente crescimento das possibilidades de utilização do software pode facilmente ser explicada por dois fatores: o crescente número de pesquisas acadêmicas relacionadas ao uso de Novas Tecnologias de Ensino, como pondera Rezende (2003), bem como a possibilidade dos usuários do software fazerem contribuições e sugestões de utilização do GeoGebra, por meio da exposição de

¹² Objeto da dissertação de Markus Hohenwarter na Universidade de Salzburg - Áustria - em 2001 (HALLAL et al., 2016)

Figura 6 - Tela principal do GeoGebra



Fonte: Produzido pelo autor.

suas produções em canais hospedados no website oficial do GeoGebra, ou até mesmo, por ser um software livre, alterando seu código fonte, de acordo com Soares (2012). Em virtude dos bons resultados obtidos por meio de sua utilização para fins educacionais, o software recebeu diversas premiações em diversos países¹³ (HOHENWARTER; FUCHS, 2004).

De acordo com Santos, Loreto e Gonçalves (2010), foram observadas características que tornam o software em questão extremamente útil considerando os objetivos deste trabalho, afinal trata-se de um software livre, disponível para os três sistemas operacionais mais utilizados, com aplicação tanto a nível de educação básica quanto a nível de educação superior. Também possui abrangência para os mais diversos conteúdos relativos a tópicos de geometria, álgebra e cálculo. Cabe o destaque de que se encontra disponível para utilização em diversas plataformas, como tablets e smartphones bem como pode ser utilizado online, através do browser de navegação, sem necessidade de instalação do software.

Outros softwares possuem características muito similares às aquelas encontradas no GeoGebra. Entretanto, o GeoGebra possui o diferencial no que diz respeito à facilidade de utilização (SOARES, 2012). São necessários conhecimentos relativamente básicos de informática, uma vez que não exige que o usuário domine alguma linguagem de programação específica. Da mesma maneira, o programa não demanda grande aprofundamento em matemática para seu aproveitamento de maneira satisfatória. Certamente, a quantidade de conhecimentos prévios necessários tende a aumentar de acordo com o grau de aprofundamento das ações que se deseja executar. A manipulação dos itens e subitens disponíveis na barra de ferramentas do programa é simples e intuitiva, possuindo representação escrita ou por meio de ícones, como observam Petla e Rolkowsky (2008) e Mussoi et al. (2011), conforme pode ser verificado na figura 7.

Ainda segundo Mussoi et al. (2011), outra vantagem da utilização do GeoGebra remete à possibilidade de produzir e/ou observar um objeto matemático sob três diferentes ângulos: Gráfico, algébrico ou através de planilhas. Entretanto, os autores fazem a ressalva de que a mera utilização de aparatos tecnológicos na educação, tal qual o referido software, não garante a contextualização do conteúdo, reforçando a necessidade de investigação do objeto em análise que estiver em questão, o que reforça a predisposição do GeoGebra para aplicação em atividades de modelagem matemática.

Dentre as diversas ferramentas presentes no software, uma se destaca por fornecer a possibilidade de transitar do o estático para o dinâmico, através do ícone em destaque na figura 8. Com esta ferramenta, cria-se uma variável, um intervalo limitado para os valores que a referida variável pode assumir, bem como o valor do incremento mínimo a

¹³ Suécia em 2002, Áustria em 2003 e Alemanha em 2004, por exemplo

Figura 7 - Exemplo da barra de ferramentas do GeoGebra

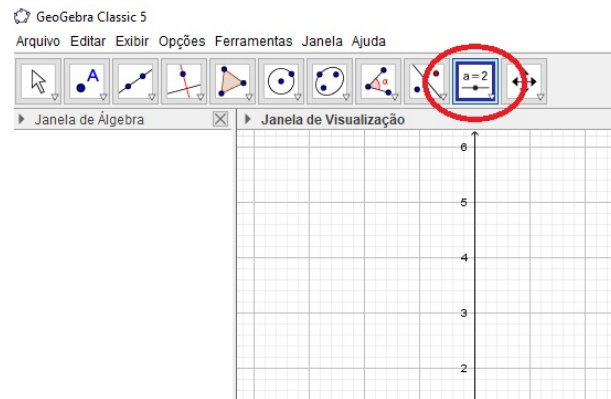


Fonte: Produzido pelo autor.

ser adicionado ou retirado da variável¹⁴, conforme observa-se na figura 9. Uma vez criado o controle deslizante, associa-se o mesmo a algum objeto matemático do modelo. A partir desse ponto a sensação de movimento pode ser obtida, clicando sobre o controle deslizante com o botão esquerdo do mouse (ou pressionando com o dedo em dispositivos com touch screen) e fazendo-o deslizar, conforme a figura 10.

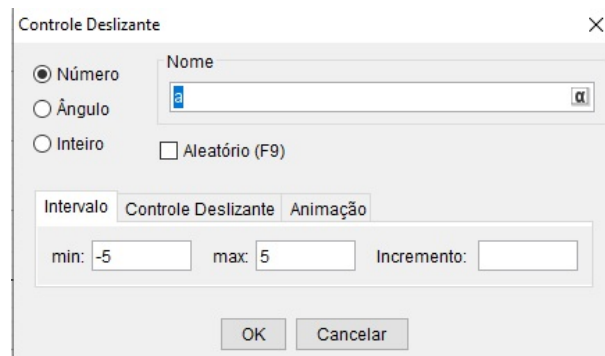
¹⁴ O valor do incremento faz-se necessário, uma vez que o software não é capaz de lidar com intervalos contínuos, somente com intervalos discretos.

Figura 8 - Detalhe do ícone do Controle Deslizante



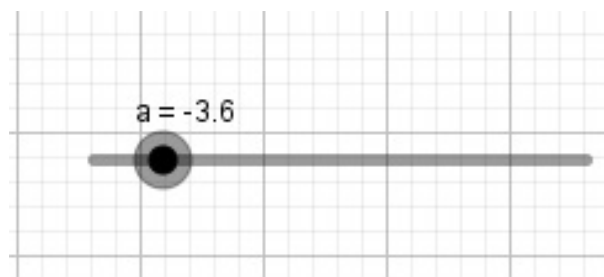
Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 9 - Tela aberta ao clicar no ícone do Controle Deslizante



Fonte: Produzido pelo autor.

Figura 10 - Controle Deslizante criado



Fonte: Produzido pelo autor.

6 ESTUDO DE TAXAS DE VARIAÇÃO COMO MODELO CINEMÁTICO

O cálculo diferencial foi inicialmente pensado e desenvolvido como uma ferramenta para solucionar problemas matemáticos. muitos dos quais compreendidos dentro do escopo da cinemática. Contudo, o desenvolvimento e aperfeiçoamento dessa ferramenta conduziram ao uso mais amplo em diferentes ciências, dentre as quais, obviamente a Física e seus mais variados campos de interesse Melchiors (2013). Ainda sobre a relação intrínseca entre Matemática e Física, o autor afirma que:

O cálculo infinitesimal é o estudo do movimento e da mudança, e antes da sua descoberta, os matemáticos mantinham-se bastante restritos às questões estáticas de contar, medir e descrever as formas (MELCHIORS, 2013, p.67)

Mussoi et al. (2011) ainda consideram que não mais cabe o ensino de Física por meio de fórmulas Matemáticas sem um meio de conexão dessas expressões com o mundo real. Os autores sinalizam o GeoGebra como uma ferramenta capaz de modelar situações e fenômenos reais e portanto, otimizar o processo de aprendizagem.

Sob essa perspectiva, o primeiro problema que será abordado é a concepção da derivada como taxa de variação de grandezas em detrimento de outras formas de analisar a derivada (desde sua definição através de limite com predomínio da Matemática pura, passando pela relação com a inclinação da reta tangente de um gráfico em um determinado ponto). Em Física, são inúmeras as grandezas que podem ser expressadas por meio da variação entre outras duas grandezas. Dentro desse contexto, conhecimentos matemáticos e físicos se interpenetram mutuamente, estabelecendo uma relação dialética. Esta perspectiva fornece um vasto campo de estudo no que se refere à interação entre Matemática e Física. Em especial, mas sem o risco de perder generalidade, podemos relacionar a variação da posição de um objeto (considerando que haja uma função que dependa do tempo) que doravante chamaremos de “função posição” representada por $f(t)$ com a variação do tempo decorrido para que a posição do corpo sofresse a referida variação. Entretanto, é certamente de conhecimento do aluno, ao menos desde o ensino médio, que a velocidade média pode ser obtido pela razão entre o deslocamento e o tempo decorrido nesse deslocamento. Representamos este fato por meio da equação:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

Consideremos que o tempo decorrido seja um valor h . Decorre daí que a variação de posição nesse intervalo de tempo será dada pela diferença das posições ocupadas pelo corpo nos instantes $t+h$ e t , ou seja: $f(t+h) - f(t)$. Portanto, a razão entre a variação da

posição do corpo e o tempo decorrido pode ser encontrado a partir da seguinte expressão:

$$V_m = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \quad (2)$$

Considerando que h se aproxime de zero tão fortemente quanto se queira, então encontraremos a velocidade média para um intervalo de tempo potencialmente muito limitado. Tão limitado que não se trata mais da velocidade média e sim da velocidade instantânea do objeto em estudo. Matematicamente, estamos tratando da taxa de variação entre a posição em relação ao tempo, que nesse exemplo se trata da derivada da função posição, que pode ser representada através da equação abaixo:

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

Sobre esse tema, em Stewart (2016), podemos ler:

O problema de encontrar a reta tangente a uma curva e o problema de encontrar a velocidade de um objeto envolvem determinar o mesmo tipo de limite [...] Este tipo especial de limite é chamado de derivada e veremos que ele pode ser interpretado como uma taxa de variação tanto nas ciências quanto na engenharia (STEWART, 2016, p. 131).

Tomando por base a definição de derivada apresentada acima, pode-se considerar a função posição definida por $f(t)$, cujo domínio é o intervalo contínuo $[0, \infty[$, como a função posição de um objeto, dessa vez na variável t , indicando o tempo como a variável independente. Limitando-nos a movimentos unidimensionais, podemos oferecer o tratamento das grandezas “velocidade” e “deslocamento” como escalares, embora saibamos de seu caráter vetorial.

Admitindo-se, sem perda de generalidade, que o objeto sob estudo não está em repouso e considerando um incremento h no tempo decorrido, é uma implicação óbvia que haverá alguma variação na posição do objeto.

Uma vez compreendida a ideia de derivada, bem como um pouco de suas aplicações na modelagem de problemas, vale abordar uma classe especial de problemas. Trata-se de problemas de otimização. A relação dessa classe de problemas e as derivadas é bastante estreita e abrange uma grande quantidade de situações práticas, que podem ser analisadas sob essa ótica, além, claro, dos problemas estritamente matemáticos abordando pontos críticos, de inflexão, de máximo ou de mínimo. Em Stewart (2016), o autor pondera que:

Um homem de negócios quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. O Princípio de Fermat na óptica estabelece que a luz segue o caminho que leva o menor tempo. Nesta seção vamos resolver problemas tais como maximizar áreas, volumes e lucros e minimizar distâncias, tempo e custos. Na solução destes problemas práticos, o

maior desafio está frequentemente em converter o problema em um problema de otimização Matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada (STEWART, 2016, p. 294).

Problemas de otimização, por sua vez, são um convite tentador para o desenvolvimento intuitivo do chamado teste da segunda derivada. Obviamente abriremos mão do rigor matemático, em favor do desenvolvimento intuitivo dessa regra tão importante dentro do escopo do CDI e com as já mencionadas aplicações em problemas e por conseguinte, utilidade em processos de modelagem.

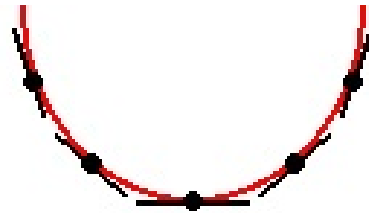
Para tanto, o aluno deve ser levado a raciocinar sobre algumas questões simples, como:

- Seja f uma função derivável dentro de um intervalo $[a, b]$. O que significariam os pontos onde $f'(x) = 0$?
- Supondo que no intervalo escolhido, a função admita uma nova derivada. O que significaria se o valor da derivada dessa função em c onde $a < c < b, \forall c \in [a, b]$, fosse um valor positivo (figura 11)? O esboço do gráfico de $f''(x)$ seria útil para compreender as implicações dessa condição?
- Supondo que no intervalo escolhido, a função admita uma nova derivada. O que significaria se o valor da derivada dessa função em c onde $a < c < b, \forall c \in [a, b]$, fosse um valor negativo (figura 12)? O esboço do gráfico de $f''(x)$ seria útil para compreender as implicações dessa condição?
- Supondo que no intervalo escolhido, a função admita uma nova derivada. O que significaria se o valor da derivada dessa função em c onde $a < c < b, \forall c \in [a, b]$, fosse novamente igual a zero (figura 13)? O esboço do gráfico de $f''(x)$ seria útil para compreender as implicações dessa condição?

Uma vez construídos os modelos matemáticos consistentes, o próximo passo será implementar um modelo computacional através do software GeoGebra, que permita testar e verificar a qualidade dos modelos acima. São inúmeros os modelos que poderiam ser construídos com a finalidade de estudar derivadas ou taxas de variações de grandezas físicas, bem como verificar intuitivamente o teste da segunda derivada. Portanto, o que de fato será apresentado a seguir, constitui tão somente uma sugestão de construção do modelo, estando aberto para receber diversas variações justificadas pela sensibilidade didática do docente que o aplica, bem como pelas competências já desenvolvidas pelo discente que o utiliza. Para tanto, foi tomado o seguinte procedimento:

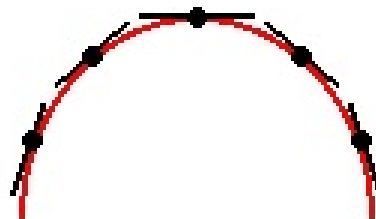
1. Na caixa de entrada, inserir a lei de formação desejada, garantindo que se trate de uma função diferenciável. Neste modelo, usamos a função: $f(x) = \sin(x) - \cos(x) + 0,2x$.

Figura 11 - Teste da segunda derivada - Ponto de mínimo



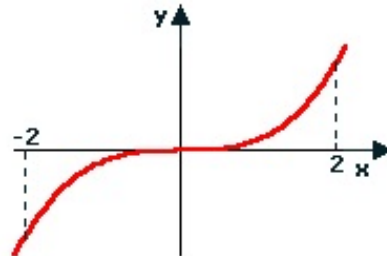
Fonte: (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2006).

Figura 12 - Teste da segunda derivada - Ponto de máximo



Fonte: (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2006).

Figura 13 - Teste da segunda derivada - Ponto de inflexão



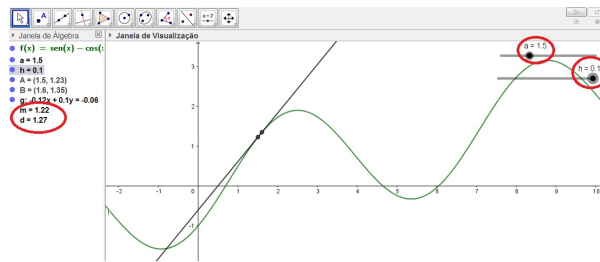
Fonte: (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, 2006).

2. Usando a ferramenta “controle deslizante”, cria-se o número a , variando de 0 a 5 com passo de 0,1. Esse valor será o ponto onde estudaremos a função. Portanto, para fins de simplificação, limitamos nosso modelo ao intervalo $[0, 5]$ de seu domínio. Entretanto, quaisquer outras faixas de valores podem ser definidas de igual maneira.
3. Novamente usando a ferramenta “ controle deslizante”criamos agora o número h , que representará o incremento no tempo. Delimite-o no intervalo $[0,01 , 0,1]$ e defina o passo como 0,01.
4. usando a caixa de entrada, define-se dois pontos, “A”e “B”através dos códigos: $A = (a, f(a))$ e $B = (a + h, f(a + h))$.
5. Clica-se sobre a ferramenta “reta”e posteriormente sobre os dois pontos supracitados. Será criada uma reta secante ao gráfico que passe pelos pontos A e B.
6. Novamente na caixa de entrada cria-se dois números chamados de m e d , através dos códigos: $m = (f(a + h) - f(a))/h$ e $d = f'(a)$. Esses números receberão respectivamente os valores da inclinação da reta secante ao gráfico da função $f(t)$, passando pelos pontos A e B e o valor da derivada da função $f(t)$ em a e portanto, a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em $f(a)$.

A partir desse momento, basta clicar nos valores de a e h (representados pelos controles deslizantes) e arrastá-los, fazendo-os variarem. Observando os valores impressos na tela para m e d , deve-se verificar que quanto menor o valor de h , mais próximos serão os valores das inclinações das retas tangente e secante, conforme as figuras 14 e 15.

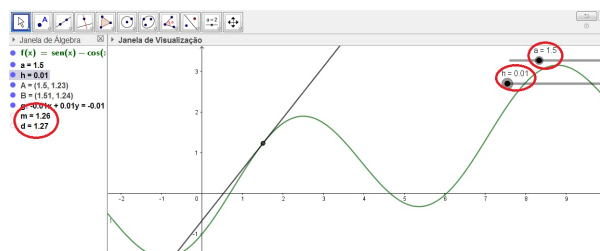
O usuário em questão poderá livremente variar os valores para a e h e assim verificar a relação entre a inclinação das retas. Poderá constatar que quanto menor for

Figura 14 - comparação entre as inclinações das retas secante e tangente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 15 - comparação entre as inclinações das retas secante e tangente



Fonte: Elaborado pelo autor.

o incremento “ h ”, ou seja, quanto mais próximo h for de zero, mais próximos serão os valores das inclinações das retas. Ou em termos físicos, quanto menor for o incremento h em relação ao tempo, mais próximos serão os valores dos módulos da velocidade média no intervalo de tempo estudado e da velocidade instantânea no ponto em questão.

Todo o processo descrito nesse capítulo, que culminou com a confecção deste modelo, baseou-se em encadeamentos de conhecimentos dos quais certamente alunos de cursos superiores na área de Matemática ou Física já se apropriaram (transferência horizontal). Todavia o produto final, pode por si só pode constituir um conhecimento novo. Ainda que não constitua, a investigação que pode transcorrer por meio das simulações feitas, quer seja na alteração da Lei de Formação da função posição, quer seja por meio da variação dos parâmetros introduzidos no problema, resultará na apropriação de novos saberes.

7 A INTEGRAL DEFINIDA RELACIONADA AO DESLOCAMENTO DE UM CORPO

Um dos problemas clássicos do estudo da cinemática, consiste em obter o deslocamento de um corpo em um intervalo fechado a partir do gráfico de sua velocidade em função do tempo. É comumente ensinado na disciplina de Física ao longo do ensino médio, que este deslocamento é numericamente igual à área da região obtida entre a curva da função velocidade e o eixo das abscissas. Esse fato será demonstrado mais adiante. No ensino médio, o referido problema costuma se ater ao MRU bem como ao MRUV. Essas classes de movimento têm por característica funções velocidades modeladas por funções constantes ou de primeiro grau, respectivamente. Por conseguinte, as regiões delimitadas serão retângulos, triângulos ou trapézios. Todavia, a grande maioria dos movimentos delimitarão regiões com perfil dotado de maior grau de complexidade, cujas áreas necessitam de cálculos muito menos triviais. Uma estratégia interessante para contornar esse problema, seria subdividir a região em retângulos. A área de polígono formado pela união desses retângulos poderia representar uma aproximação para a área da região de interesse do problema. De acordo com as figuras 16, 17, 18, confirma-se que a noção intuitiva de que quanto maior a quantidade de retângulos, mais próxima da área da região S estará a área obtida por meio dos retângulos. Tem-se então, por consequência direta, que na medida que a quantidade de retângulos tender para o infinito, mais consistente ficaria a aproximação das áreas. Trata-se então de um problema físico do campo da cinemática, modelado por uma Soma de Riemann.

De forma geral tomemos um movimento iniciado no instante $t = a$ e finalizado no instante $t = b$. No caso de aproximar a área através de dois, três ou quatro retângulos, as medidas da base sobre o eixo das abscissas seriam dadas respectivamente por:

$$\Delta t = \frac{b-a}{2}, \Delta t = \frac{b-a}{3} \text{ e } \Delta t = \frac{b-a}{4}.$$

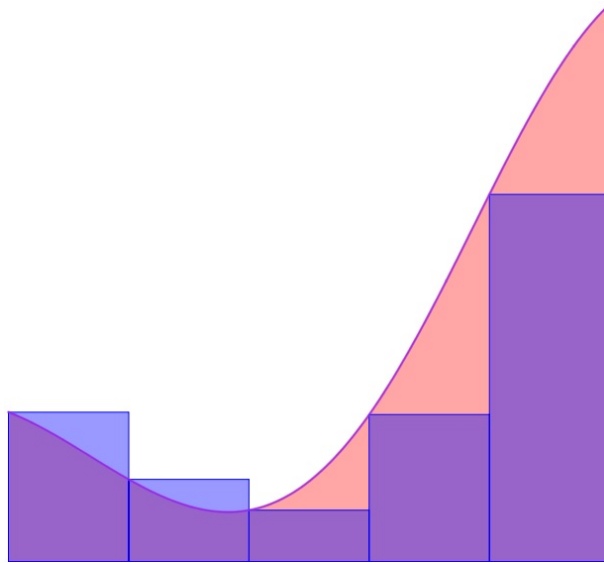
Portanto, de forma geral, temos que a base do retângulo, quando o intervalo for dividido em n partes pode ser calculada por:

$$\Delta t = \frac{b-a}{n}. \tag{4}$$

Sem perda de generalidade, trataremos o problema por meio da Soma de Riemann à esquerda. Isso significa que para cada partição do intervalo, a altura do retângulo será dada pelo valor da função calculada no ponto mais à esquerda da partição em questão. Portanto, a área de cada retângulo será dada pelo produto de $\frac{b-a}{n}$ pelo valor da função calculada no ponto referido anteriormente. Em termos matemáticos equivale a dizer que:

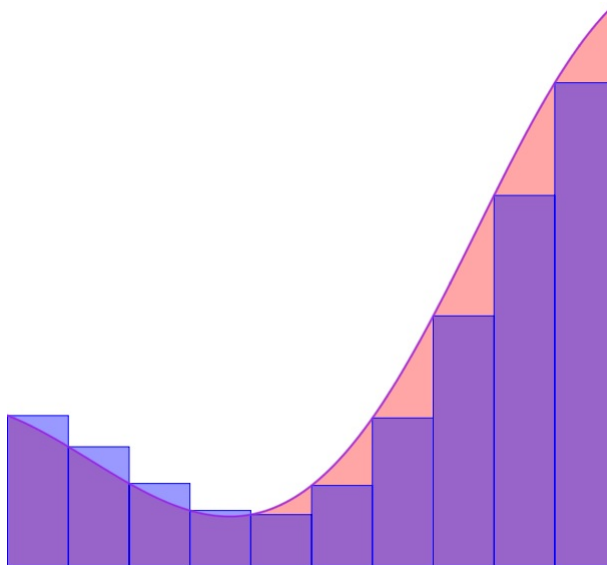
- $[a, b]$ fica dividido em n partições cujas faixas de valores são: $[a, a + \Delta t]$, $[a + \Delta t, a + 2 \cdot \Delta t]$, $[a + 2 \cdot \Delta t, a + 3 \cdot \Delta t]$, ..., $[a + (n - 1) \cdot \Delta t, b]$;

Figura 16 - Área a partir de 5 retângulos



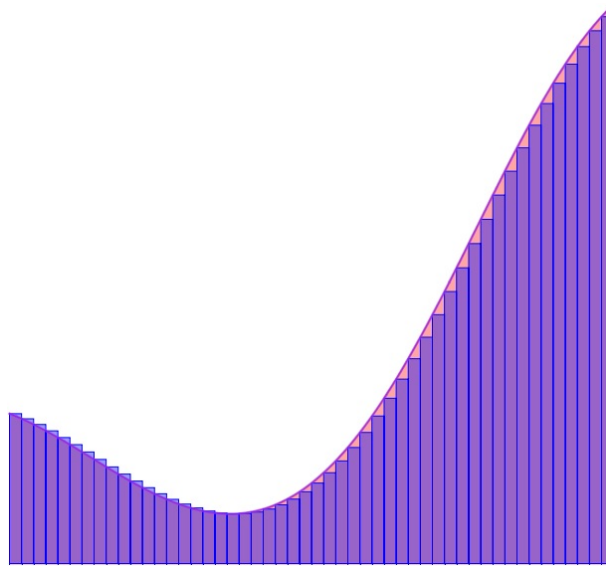
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 17 - Área a partir de 10 retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18 - Área a partir de 50 retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

- A altura do i -ésimo retângulo será dada por $f(a + i \cdot \Delta t)$;
- A área do i -ésimo retângulo será portanto dada por:

$$A_i = \frac{b - a}{n} \cdot f(a + i \cdot \Delta t). \quad (5)$$

Interessante notar a partir da equação acima que $\frac{b-a}{n}$ representa uma variação no tempo, ou seja, Δt , assim como $f(a + i \cdot \Delta t)$ representa a velocidade no instante $a + i \cdot \Delta t$. Portanto, para um Δt suficientemente pequeno, drasticamente próximo de zero, podemos considerar a velocidade constante e portanto a área de cada retângulo de fato representaria o deslocamento do corpo para o referido intervalo de tempo. Refletindo sobre a equação (1), de fato a área estudada será numericamente igual ao deslocamento do corpo entre os instantes em um dado período de tempo. Assim, a soma das áreas dos retângulos que será dada por $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(a + i \cdot \Delta t)$ equivalerá à soma dos deslocamentos em cada partição do intervalo $[a, b]$, uma vez que n tenta ao infinito. Segue daí que:

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b - a}{n} \cdot f(a + i \cdot \Delta t) \quad (6)$$

Como o membro direito da equação (6) trata-se da própria definição da integral definida

de uma função f entre os intervalos a e b , temos:

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (7)$$

Considere a equação:

$$\Delta s = v(t) \cdot \Delta t \quad (8)$$

Imaginando que a quantidade de retângulos que permeiam a área estudada tenda ao infinito, temos que a base dos retângulos se aproximará fortemente de zero. Ou seja, seriam valores tão pequenos, que poderiam ser considerados diferenciais. Por conseguinte, sob essas circunstâncias, a equação anterior poderia ser tratada como:

$$ds = v(t) \cdot dt \quad (9)$$

Transportando a Modelagem Matemática acima descrita para o ambiente do software GeoGebra, pode-se construir um modelo computacional usando o software por meio dos seguintes passos:

1. Na caixa de entrada, determine qual função deseja estudar como função velocidade. Neste modelo, usamos o comando: Função($t^2 + \text{sen}(t) + t/2$, 0, 5)¹⁵. Este comando além de determinar a lei de formação da função, também determina que o intervalo do domínio da função que será considerado será $0 \leq t \leq 5$.
2. Usando a ferramenta “controle deslizante” cria-se o número n que posteriormente será definido como a quantidade de retângulos definidos com base na curva definida por f . Delimitamos no intervalo inteiro entre 1 e 100 com passo de 1.
3. Através do comando: Integral(f , 0, 5) será colorida a área entre a curva da função f e o eixo das abscissas no intervalo definido bem como será impressa na tela a área dessa figura.
4. Por meio do comando: SomaDeRiemanÀEsquerda(f , 0, 5, n), será construída graficamente a Soma de Riemann à esquerda para a função estudada, dentro do intervalo descrito, através da construção de n retângulos. Essa quantidade de retângulos pode ser simulada através do controle deslizante criado previamente. Também será impressa na tela a soma das áreas dos retângulos criados.

¹⁵ Para algumas versões do GeoGebra, pode ser necessário utilizar x como a variável independente e assim relacioná-la com o tempo

Tabela 1 - Soma da área dos retângulos

Número de retângulos	Área (u.a.)
1	0
10	12.46
20	12.33
30	12.36
40	12.38
50	12.39
60	12.40
70	12.40
80	12.41
90	12.41
100	12.41

No processo de modelagem acima descrito, os textos: “Número de retângulos”, “Área sob a curva” e “Área dos retângulos”, conforme observa-se nos detalhes em destaque na figura 19, foram produzidos da seguinte forma:

- Clicar sobre o objeto matemático em questão com o botão direito do mouse.
- Clicar com o botão esquerdo do mouse em “Propriedades”.
- Clicar com o botão esquerdo do mouse em “Básico”.
- Clicar com o botão esquerdo na caixa de texto “Legenda” e digitar o texto correspondente.
- Selecionar com o botão esquerdo do mouse a opção “Exibir rótulo”.
- Selecionar com o botão esquerdo do mouse na caixa de texto ao lado de “Exibir rótulo” a opção “Legenda & valor”.

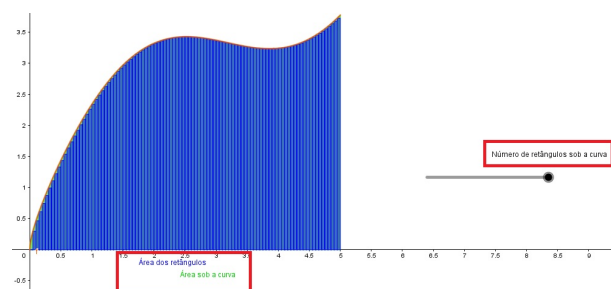
Através da simulação da quantidade de retângulos, o usuário poderá comparar a diferença entre as áreas obtidas através do comando “integral” e do comando “SomaDeRiemannÀEsquerda”, que fornecem respectivamente a área obtida por meio da integração e a área aproximada por retângulos. Em particular, ao analisar as figuras 20 e 21, percebe-se que o aumento do número de retângulos leva ao aumento do “preenchimento” da área delimitada entre a curva em estudo e o eixo x .

Podemos analisar os dados obtidos por meio da simulação acima descrita, dispondo os dados na tabela 1. A área obtida através da integração no software da função em questão é de 12.45 u.a. . Vale ressaltar que o software trabalha com valores discretos. Portanto o valor da integral calculada será arredondado a partir da segunda casa decimal.

Verifica-se que, excetuando-se a área obtida pela criação de 10 retângulos que se tornou muito próxima da área obtida por integral por mero acaso, o aumento do número de retângulos de fato aproxima a soma dessas áreas da área da figura estudada. É coerente observar que a partir do 80º retângulo o valor parece estagnar. Entretanto, clicando em “opções” e seguidamente em “arredondamento”, há a opção de aumentar a quantidade de casas decimais para até 15 casas. Essa mudança fará com que o usuário verifique que a medida que aumenta o número de retângulos, a soma das áreas dos retângulos continuará a convergir para a área da região S , porém cada vez mais lentamente.

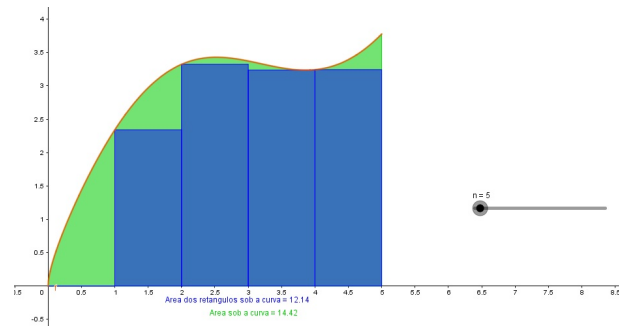
Torna-se bastante importante ressaltar que eventualmente o CDI será lecionado em cursos onde a necessidade de demonstrações e provas submetidas ao rigor matemático são secundárias. Muitas vezes a noção de convergência pode ser desenvolvida através de uma análise visual. Com a finalidade de maximizar a eficiência pedagógica inerente à aplicação de atividades relativas ao modelo em questão, deve-se considerar o valor didático que pode ser atribuído à comparação entre o valor da soma das áreas dos retângulos com a ilustração que represente graficamente os retângulos delimitados pela curva da função. Para melhor compreensão desse conceito, produzimos diversos exemplos, para outras duas funções, definidas dentro do mesmo intervalo de domínio, e pelas Leis de Formação: $f(x) = x^2/12$ e $f(x) = \text{sen}(x)/2 + 4$. Para tanto, cabe a comparação entre as figuras disponíveis no apêndice A com as tabelas apresentadas no apêndice B. Assim, torna-se possível construir a ideia de que a convergência observada no caso específico da função apresentada no modelo em questão, não se deu por mero acaso.

Figura 19 - Detalhe dos textos representando variáveis



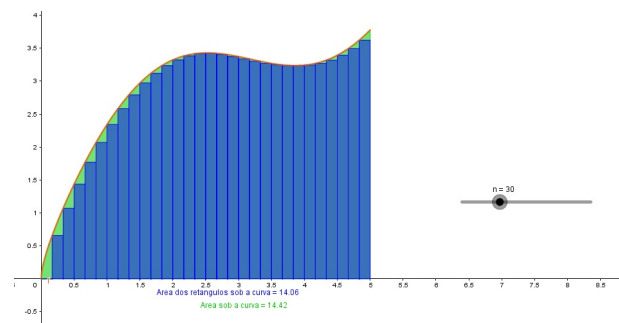
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 20 - comparação entre a área sob a curva e a área de 5 retângulos limitados pela curva



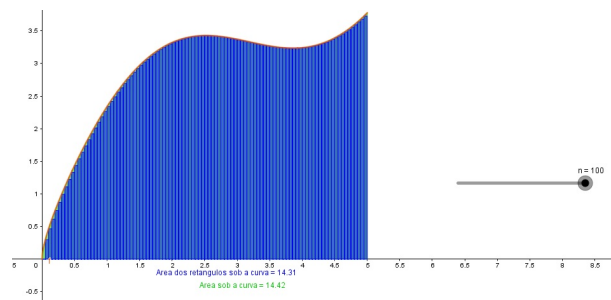
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 - comparação entre a área sob a curva e a área de 30 retângulos limitados pela curva



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 22 - comparação entre a área sob a curva e a área de 100 retângulos limitados pela curva



Fonte: Elaborado pelo autor.

8 PROBLEMATIZAÇÃO DOS CORPOS EM QUEDA

Ao longo deste trabalho, já foi comentado que o desenvolvimento de modelos bem como sua subsequente aplicação, antecede o processo de modelagem no âmbito da educação. Ao analisar a relevância de Equações Diferenciais para não matemáticos, Boyce e DiPrima (2002) ponderam que:

Muitas vezes é fácil permitir a variação dos parâmetros no modelo matemático em um amplo intervalo, enquanto isso poderia levar muito tempo ou ser muito caro, se não impossível, em um ambiente experimental. De qualquer modo, a Modelagem Matemática e a experimentação ou observação são criticamente importantes e tem papéis um tanto complementares nas investigações científicas. (BOYCE; DIPRIMA, 2002, p.38).

Com base na constatação acima, o próximo modelo a ser analisado tratará da comparação da queda de um objeto analisada sob duas perspectivas: A primeira considerará como desprezível o efeito da resistência do ar sobre o corpo em queda, como usualmente se aborda problemas concernentes à queda dos corpos ao longo do estudo da Física na educação básica. Já na segunda perspectiva, consideraremos essa resistência como uma força proporcional à velocidade de queda do corpo, porém obviamente, no sentido contrário da velocidade.

Dentro desse aspecto, algumas considerações se fazem muito pertinentes. Certamente que desprezar a resistência do ar, ou considerá-la proporcional à velocidade de queda nos moldes que estudaremos aqui, não esgota as possibilidades de modelos para esse problema. Apesar de aparentemente simples, esse problema engloba uma enorme quantidade de variáveis que, para fins de simplificação, serão aproximadas, desprezadas ou condensadas em uma única variável. A título de exemplo podemos citar o fato de considerarmos gotas de chuva perfeitamente esféricas, que a aceleração imposta pela gravidade é constante ao longo da queda e que não haverá quaisquer outras forças atuando no corpo, excetuando-se o peso (e a resistência imposta pelo ar, quando se aplicar). Isto nos recorda que a qualidade do modelo está intimamente associada com quão próximo do fenômeno real se deseja chegar e não à reprodução idêntica deste fenômeno.

Podemos estabelecer a comparação entre as perspectivas acima citadas adotando uma questão levantada em um exercício, subdividida em dois itens: “Gotas de chuva caem 1700 m de uma nuvem até o chão. (a) Se as gotas não estivessem sujeitas à resistência do ar, qual seria a velocidade ao atingirem o solo? (b) Seria seguro caminhar na chuva?” (RESNICK; HALLIDAY; WALKER, 2001, p. 99).

Este questionamento proposto no exercício, certamente carece de um tratamento com viés qualitativo acerca das informações obtidas por meio da resolução do primeiro item da questão. Certamente que decorre dele uma série de novos questionamentos, como: a partir de qual velocidade de queda da gota de chuva haveria risco, caso atingisse alguma

pessoa? Se normalmente não há risco ao caminhar sob chuva, qual seria a velocidade terminal da queda da gota? Obviamente que a partir desse novo leque de questionamentos, ainda mais objetos matemáticos, bem como conceitos físicos, serão incorporados à solução das questões. Portanto, ao solicitar uma resposta qualitativa, o autor induz o aluno a imergir em um ambiente de reflexão e por conseguinte, de modelagem, tornando a questão muito mais rica sob o aspecto da educação.

8.1 Queda livre sem resistência do ar

Considerando que não haja resistência do ar, impõe-se uma restrição muito relevante ao problema. Afinal, dentro dessa circunstância, estamos tratando de um corpo em queda no vácuo ou simplesmente supondo que a resistência imposta pelo ar não se trata de um fator significativo, podendo ser desprezado sem prejuízo para a validação do modelo.

Sem perda de generalidade, convencionaremos que: o movimento será unidimensional ao longo do eixo y ; consideraremos o eixo y orientado para baixo; o corpo será abandonado da origem do plano cartesiano.

Abordando este problema pautado na perspectiva da dinâmica, deve-se conjecturar sobre as forças que atuam sobre o corpo em queda. Sendo desprezada a resistência do ar, haveria somente uma força relevante o suficiente para ser considerada no modelo. Trata-se da força peso:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \tag{10}$$

A abordagem baseada nas leis que regem a dinâmica dentro da Física Newtoniana, nos oferece as Leis de Newton como teoria capaz de embasar teoricamente o modelo em desenvolvimento. De acordo com a segunda Lei de Newton ¹⁶, temos que:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \tag{11}$$

Como dentro do modelo não se considera outra força exceto o peso, temos que este

¹⁶ Trata-se do princípio fundamental da dinâmica e determina que a resultante das forças que atuam sobre um corpo equivale ao produto da massa do corpo pela aceleração imposta a ele.

se trata da própria força resultante. Por conseguinte temos:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{g} \quad (12)$$

Das equações (11) e (12), segue que:

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} \quad (13)$$

Dividindo ambos os lados da equação por m (o que se justifica facilmente, uma vez que $m \neq 0$), temos que: $\vec{a} = \vec{g}$, ou simplesmente $a_y = g$ considerando o movimento somente em relação ao eixo vertical. Este resultado nos permite admitir que a aceleração experimentada pelo corpo em queda é constante ¹⁷. Nesse caso, o movimento trata-se de um MRUV, cujas equações que descrevem sua aceleração, sua velocidade bem como sua posição em função do tempo, são bastante conhecidas no campo da cinemática, podendo ser obtidas por meio de integração, afinal, se $a_y(t) = g$, temos:

$$a_y(t) = g \Rightarrow \int a_y(t)dt = \int gdt \Rightarrow v_y(t) = C_1 + g \cdot t \quad (14)$$

A constante C_1 trata-se de uma constante de integração. Esta, representa a velocidade inicial do corpo, a qual doravante será denominada como v_{y0} , afinal é bastante simples observar que $v_y(0) = C_1$. Portanto temos que: $v_y(t) = v_0 + g \cdot t$. Integrando novamente temos:

$$v_y(t) = v_{y0} + g \cdot t \Rightarrow \int v_y(t)dt = \int v_{y0} + g \cdot tdt \Rightarrow s_y(t) = C_2 + v_{y0} \cdot t + g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (15)$$

Novamente surge a constante de integração C_2 , que representa a posição inicial do corpo no instante inicial do problema, denominada como s_{y0} , uma vez que $s_y(0) = C_2$.

Voltando ao problema inicial da queda da gota de chuva e considerando que a queda ocorra 1.700m acima da superfície da Terra, como propõe o exercício que motiva este capítulo, que a posição inicial da queda seja a origem do plano cartesiano, que a aceleração da gravidade seja aproximadamente igual a $9,8m/s^2$ e que a gota parta do

¹⁷ Admitimos que o corpo em estudo encontra-se suficientemente próximo da superfície da Terra.

repouso, temos:

$$s_y(t) = 1.700m \Rightarrow 1.700 = s_{y0} + v_{y0} \cdot t + g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (16)$$

$$1.700 = g \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow 1.700 = 9,8 \cdot \frac{t^2}{2} \quad (17)$$

Ou seja: $t^2 \approx 347 \Rightarrow t \approx \sqrt{347} \Rightarrow t \approx 19s$. Usando $t = 20$ na função velocidade do corpo em queda, temos:

$$v(20) = 9,8 \times 19 = 186m/s \Rightarrow v(20) = 669km/h \quad (18)$$

Para fins de enriquecimento do modelo, pode-se considerar as equações relativas ao eixo horizontal. Neste caso, como não há forças atuando nessa direção, trata-se de um MRU. Segue então que:

$$a_x(t) = 0 \Rightarrow \int a_x(t) = \int dt \Rightarrow v_x(t) = C_3, \quad (19)$$

onde C_3 se refere a velocidade inicial em relação ao eixo x , denominada $v_{umavezquev_{x0}}$. Integrando a função velocidade com respeito à variável t , temos:

$$\int v_x(t)dt = \int v_{x0} \Rightarrow s_x = v_{x0} \cdot t + C_4 \quad (20)$$

Novamente aparece a constante de integração C_4 , que representa a posição inicial do corpo, em relação ao eixo x , resumindo a função posição em relação a este eixo como:

$$s_x(t) = v_{x0} \cdot t + s_{x0} \quad (21)$$

É bastante interessante notar que, embora o modelo discutido não se aplique na maioria das situações reais, afinal sucumbiria à etapa da modelagem que se ocupa do confronto do modelo com as experimentações e/ou observações, a reflexão acerca do processo de modelagem é bastante produtiva, sob vários aspectos. Em especial por trabalhar transversalmente diversos conhecimentos relativos tanto à Matemática quanto à Física, bem como oferecer uma resposta embasada para a pergunta motivadora deste modelo, que indaga sobre a segurança ao caminhar na chuva, caso a resistência do ar não produzisse efeito significativo. De certo que a velocidade acima dos $700km/h$ comprometeriam a segurança do transeunte (NOBREGA, 2005, p.23). É notório que fatores tais como a área da secção transversal, a aerodinâmica, a massa bem como tantas outras informações

intrínsecas ao corpo em queda, foram desconsideradas.

Também é cabível o destaque de que as equações obtidas por meio de integração, são as mesmas encontradas no estudo da cinemática a nível de educação básica. Tal fato não só confere credibilidade ao modelo, bem como torna esse modelo potencialmente útil no que tange o estudo da relação entre posição, velocidade e aceleração por meio da integração ou derivação destas funções.

8.2 Queda considerando a resistência do ar

Uma vez que seja admitido que a resistência do ar se trata de um fator que, via de regra, não pode ser desprezado, pode-se adotar novamente uma abordagem pautada nas Leis de Newton. Para tanto, deve-se conjecturar um modelo para a resistência do ar. Aqui adotaremos a resistência do ar como uma força proporcional à velocidade do corpo em cada instante. Sob esta ótica, podemos definir k como coeficiente de resistência do ar. Considerando novamente o eixo vertical orientado para baixo, a posição inicial como a origem do plano cartesiano, temos que:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{g} + k \cdot \vec{v} \quad (22)$$

Aplicando a segunda Lei de Newton e tratando a equação acima em termos de movimento unidimensional com abordagem escalar, temos:

$$\sum F_y = m \cdot a_y \quad (23)$$

Das equações (22) e (23), segue que:

$$m \cdot a_y = m \cdot g - k \cdot v_y \Rightarrow m \frac{dv}{dt} = m \cdot g - k \cdot v_y \quad (24)$$

Dividindo toda a equação por m , mais uma vez com o respaldo de que $m \neq 0$, temos:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v_y \quad (25)$$

Dividindo agora toda a equação por $v_y - \frac{mg}{k}$, temos:

$$\frac{\frac{dv}{dt}}{v_y - \frac{mg}{k}} = -\frac{k}{m} \quad (26)$$

Vale a ressalva de que a divisão realizada na etapa anterior é válida, pois ao tomar a integral em ambos os lados da equação, o membro esquerdo da equação resulta em $\ln|v_y - \frac{mg}{k}|$, que impõe a mesma restrição de que $v_y - \frac{mg}{k} \neq 0$. Também é interessante observar que, uma vez que a aceleração é notoriamente positiva ao longo de todo o trajeto do corpo, a equação (25) impões que $v_y < \frac{mg}{k}$. Portanto podemos considerar $\ln|v_y - \frac{mg}{k}| = \ln(\frac{mg}{k} - v_y)$, dispensando assim o uso do módulo. Realizando então a referida integração em ambos os membros da equação com respeito à variável t , temos:

$$\ln(\frac{mg}{k} - v_y) = -\frac{k \cdot t}{m} + C_5, \quad (27)$$

Onde C_5 trata-se da constante de integração. Tomando-se a exponencial em ambos os membros da equação temos:

$$\frac{mg}{k} - v_y = c \cdot e^{-\frac{k \cdot t}{m}}, \quad (28)$$

Onde $c = e^{C_5}$.

Utilizando a condição de contorno $v_y(0) = v_{y0}$, temos que:

$$\frac{mg}{k} - v_y(0) = c \cdot e^{\frac{k \cdot 0}{m}} \Rightarrow \frac{mg}{k} - v_{y0} = c \quad (29)$$

Segue portanto, após manipulação algébrica simples, que:

$$v_y(t) = (v_{y0} - \frac{mg}{k}) \cdot e^{-\frac{k \cdot t}{m}} + \frac{mg}{k} \quad (30)$$

Novamente integrando a equação acima em relação a t , poderemos obter a equação que determina a posição em função do tempo para o corpo em questão. Assim, temos:

$$\int v_y(t) dt = \int (v_{y0} - \frac{mg}{k}) \cdot e^{-\frac{k \cdot t}{m}} + \frac{mg}{k} dt \quad (31)$$

Logo:

$$s_y(t) = -\left(v_{y0} - \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} + \frac{mg}{k} \cdot t + C_6 \quad (32)$$

Novamente utilizando a condição de contorno de que $s_y(0) = s_{y0}$, teremos que:

$$s_y(0) = -\left(v_{y0} - \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{-k \cdot 0}{m}} + \frac{mg}{k} \cdot 0 + C_6 \Rightarrow C_6 = s_{y0} + \frac{m}{k} \cdot v_{y0} - \frac{m^2 \cdot g}{k^2} \quad (33)$$

Por fim temos que:

$$s_y(t) = -\left(v_{y0} - \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} + \frac{mg}{k} \cdot t + s_{y0} + \frac{m}{k} \cdot v_{y0} - \frac{m^2 \cdot g}{k^2} \quad (34)$$

Objetivando-se obter as equações que possibilitam descrever o movimento de forma mais completa (em duas dimensões), pode-se deduzir, de maneira quase análoga ao que já fora apresentado neste capítulo, as equações do movimento em relação ao eixo x . Para o movimento nesse eixo, podemos considerar que não há quaisquer outras forças atuando no corpo em queda, excetuando-se a força referente à resistência do ar. Como esta fora considerada proporcional à velocidade, temos a consequência óbvia que na ausência de uma velocidade inicial em relação ao eixo horizontal, o movimento dar-se-á estritamente ao longo do eixo vertical. Temos portanto, em termos de equações escalares:

$$\sum F_x = m \cdot a_x \quad (35)$$

O que leva à seguinte equação:

$$m \cdot a_x = -k \cdot v \quad (36)$$

Tratando $a_x(t) = dv(x)/dt$, temos como solução da Equação Diferencial Ordinária (E.D.O.) em questão e utilizando a condição de contorno, $v_x(0) = v_{x0}$, analogamente ao que já fora apresentado nesse capítulo, temos:

$$v_x(t) = v_{x0} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} \quad (37)$$

Por meio de integração em relação à variável t , e adotando como posição inicial do

corpo em queda a origem do sistema de coordenadas, culmina em:

$$s_x(t) = \frac{-m}{k} \cdot v_{x0} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} + m \cdot \frac{v_{0x}}{k} \quad (38)$$

8.3 Do modelo matemático ao modelo computacional

Na seção anterior, foram deduzidas funções que representam a velocidade e a posição de um corpo em queda, com base em leis da Física Newtoniana. Estas funções modelam dois casos específicos de queda: a queda livre (desprezando forças dissipativas que atuem no corpo) e a queda com resistência do ar proporcional à velocidade da queda.

No modelo computacional criado no software GeoGebra, as funções velocidade de queda e posição, serão representadas pelas letras v e s . Quando maiúsculas, indicarão as funções para queda livre. Quando minúsculas, indicarão as funções para a queda com resistência do ar. Na sintaxe das funções, também haverá subíndices, a saber: x , y , 0 , que representam respectivamente os eixos x , y e uma condição inicial para o instante $t = 0$.

Primeiramente, usando a ferramenta “Controle deslizante”, já utilizada anteriormente, criaremos os seguintes parâmetros: m , v_{0x} , v_{0y} , g , k e t . Estes, representam respectivamente: massa do corpo em queda, velocidade inicial em relação ao eixo x , velocidade inicial em relação ao eixo y , aceleração imposta pela gravidade, constante de proporcionalidade entre a força de resistência do ar e a velocidade no eixo em questão e finalmente, o tempo decorrido. O passo e o intervalo de valores definidos para cada parâmetro dependerão do fenômeno que o estudante deseja modelar. Considera-se cada parâmetro utilizado, como expresso em unidades do S.I., sejam primárias ou derivadas das mesmas. Estes controles deslizantes podem ser customizados. No modelo criado, os parâmetros foram produzidos conforme se observa na figura 23.

Posteriormente, insere-se na caixa de entrada as funções:

$$V_y(t) = v_{0y} + g \cdot t.$$

$$S_y(t) = -v_{0y} \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}.$$

$$V_x(t) = v_{0x}.$$

$$S_x(t) = v_{0x} \cdot t.$$

$$v_y(t) = \left(v_{y0} - \frac{mg}{k}\right) \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} + \frac{mg}{k}.$$

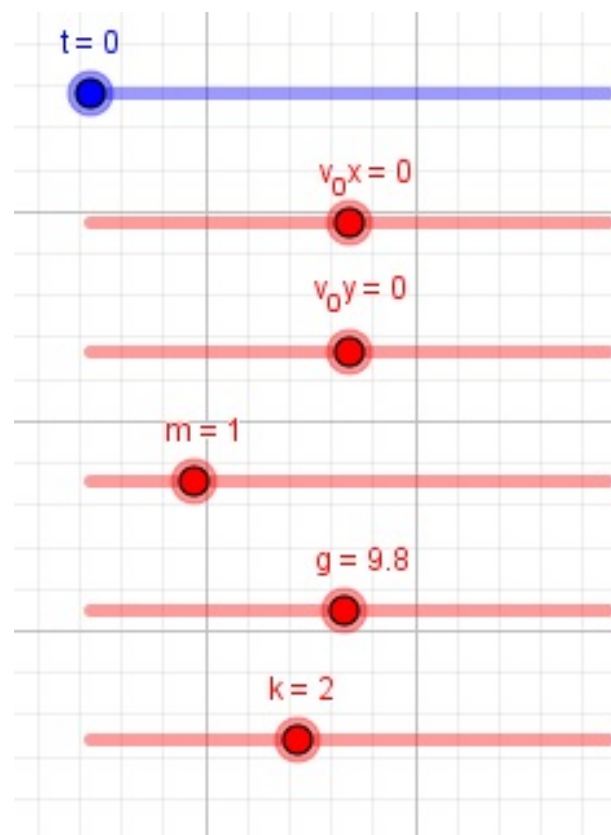
$$s_y(t) = \left(v_{y0} - \frac{mg}{k}\right) \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} - \frac{mg}{k} \cdot t - \frac{m}{k} \cdot v_{y0} + \frac{m^2 \cdot g}{k^2}.$$

$$v_x(t) = v_{x0} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}}.$$

$$s_x(t) = -m \cdot v_{x0} \cdot e^{\frac{-k \cdot t}{m}} + m \cdot \frac{v_{0x}}{k}.$$

Em ambos os casos, tanto para o eixo x quanto para o eixo y , a posição inicial foi suprimida, pois é conveniente adotá-la como a origem do sistema de coordenadas utilizado. Também pode-se notar que as funções $s_y(t)$ e $S_y(t)$, foram adaptadas por meio de uma

Figura 23 - Parâmetros criados através do controle deslizante



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 24 - Comparação entre as componentes verticais da velocidade



Fonte: Elaborado pelo autor.

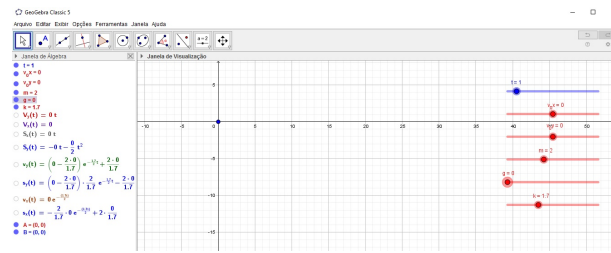
multiplicação por -1 , para compensar a orientação positiva do eixo y no sentido para baixo.

Posteriormente, cria-se dois pontos. Para o ponto A, usamos a sintaxe: $A = (S_x(t), S_y(t))$. Para o ponto B, usamos a sintaxe: $B = (s_x(t), s_y(t))$. Estes pontos modelam o corpo em queda. O ponto A representa o corpo em queda livre, enquanto o corpo representa o corpo sujeito à resistência imposta pelo ar. Com a finalidade de conferir clareza ao modelo, sugere-se omitir o rótulo dos objetos matemáticos criados, bem como customizá-los convenientemente, com distinção de cores, por exemplo.

O modelo estará então, pronto para utilização, possibilitando que o aluno manipule os parâmetros definidos anteriormente. Este poderá realizar de acordo com seu interesse, análises qualitativas e quantitativas. Quer sejam por meio da análise dos gráficos de posição em função do tempo ou da velocidade em função do tempo, quer sejam pela análise do movimento dos corpos em queda, modelados pelos pontos A e B. Seguem alguns exemplos de investigações possibilitadas, com a ressalva de que estas não configuram um limite quanto às possibilidades ofertadas.

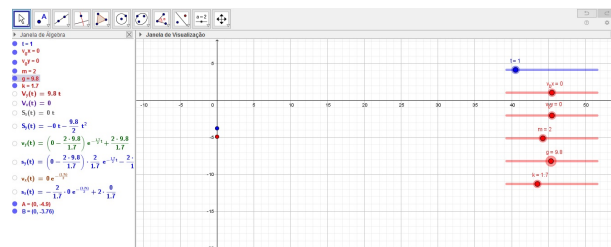
- Pode-se inferir acerca do caráter assintótico da velocidade, em relação ao eixo y , quando considera-se a resistência do ar, ilustrando assim o conceito de velocidade terminal de queda, sendo possível, inclusive, confrontar os gráficos das velocidades de queda para ambos os casos analisados, conforme a figura 24. Na ilustração, a componente vertical da velocidade de queda livre aparece em vermelho, enquanto no outro caso aparece em verde. Fica evidente o aumento considerável da velocidade para o segundo caso. Entretanto, no caso em que se considera a resistência do ar, verifica-se o aumento bastante perceptível da velocidade por um intervalo pequeno de tempo e posteriormente evidencia-se o referido caráter assintótico.
- Analisar a interferência dos parâmetros (individualmente ou em conjunto) no movimento dos corpos em ambos os casos. Simulando situações hipotéticas cuja ex-

Figura 25 - Simulação de queda sem gravidade



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 - Simulação de queda com gravidade similar à da Terra



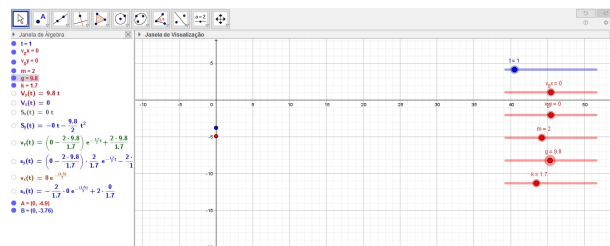
Fonte: Elaborado pelo autor.

perimentação real apresenta considerável grau de dificuldade. A título de exemplo, pode-se simular a queda com gravidade zero (simulando vácuo), conforme figura 25 e confrontar com condições de gravidade similares àsquelas encontradas na Terra, conforme figura 26 ou na Lua, de acordo com a figura 27, por exemplo. No caso da figura 25, somente o ponto azul aparece, pois ocupa a mesma posição do ponto vermelho. Isto deve-se ao fato de que, tanto o parâmetro referente à gravidade quanto o parâmetro referente à componente vertical da velocidade inicial foram definidos como nulos, não haveria movimento, de acordo com a primeira lei de Newton.¹⁸

- Comparar as posições dos corpos ao longo do tempo em ambos os casos.
- Pesquisar a velocidade terminal de queda de uma gota de chuva e através da variação do parâmetro k , encontrar o valor que se ajuste ao valor da velocidade obtido na pesquisa.

¹⁸ A primeira lei de Newton é a lei da inércia, que garante que na ausência de forças externas atuando sobre um corpo, este conservará seu estado natural, seja ele MRU ou estado de repouso.

Figura 27 - Simulação de queda com gravidade similar à da Lua



Fonte: Elaborado pelo autor.

9 POSSIBILIDADES DE APLICAÇÃO

Ao longo desse trabalho encorajou-se, por diversas vezes, a aplicação de atividades tanto no âmbito da simulação quanto da modelagem. A proposta pautou-se no objetivo de quebrar o predomínio do paradigma do exercício, já citado anteriormente, dando espaço para ambientes de investigação. Dessa maneira, construir o modelo configura um primeiro passo dentro de uma vasta gama de possibilidades oriundas da exploração deste modelo, permitindo aos alunos uma possibilidade de aprendizagem ativa, a partir de recursos inerentes ao software como manipulação, variação, animação de objetos, entre tantos outros (SOARES, 2012).

Dentro dessa perspectiva, cada modelo sugerido em instâncias anteriores deste trabalho, será base para uma sequência de proposições de atividades que podem ser utilizadas em ambiente de sala de aula. Reitera-se que este capítulo não se propõe a esgotar as possibilidades de exploração de cada modelo. O fato de modelagem e simulação demandarem criatividade e, portanto, habitarem o fértil campo da subjetividade, por si só já frustraria essa perspectiva. Objetiva-se somente oferecer um norte para o professor, que deve se manter atento às tantas outras possibilidades de exploração que em última instância maximize a interação entre aluno e objetos matemáticos, bem como otimize o processo de Ensino-Aprendizagem dentro das disciplinas onde estas atividades se inserirem.

Ciente das inúmeras possibilidades de modelos úteis no âmbito da educação superior, tanto para Matemática quanto para Física, este trabalho explora modelos inseridos nas quatro classes propostas por Kline (1998), como motivadoras do desenvolvimento do CDI: problemas cinemáticos, problemas sobre retas tangentes, problemas de otimização e finalmente problemas relativos à medidas de comprimentos, de áreas e de volumes. Optamos por abordar intencionalmente estes tópicos, pela evidente facilidade de correlação com conteúdos do campo da Física, reforçando o caráter de quase indissociabilidade existente entre CDI e Física (CUI, 2006). É coerente destacar que, embora alguns dos exercícios propostos não explorem de forma explícita temas inseridos no campo da Física, eles são responsáveis por expandir e consolidar imagens de conceitos de tópicos inerentes ao CDI. Tópicos estes, que por sua vez são de fundamental importância para a construção dos conhecimentos físicos abordados nos modelos apresentados.

9.1 Modelo: Estudo de taxas de variação como modelo cinemático

9.1.1 Atividade 1: Discussões no âmbito qualitativo

Esta atividade se refere ao modelo proposto no capítulo 6 deste trabalho, que versa sobre a correlação entre as taxas de variação entre grandezas e problemas inseridos no âmbito da cinemática.

- Objetivos

- Desenvolver nos discentes a reflexão crítica acerca dos tópicos inseridos no modelo. Dessa maneira, deseja-se estabelecer uma quebra de paradigma, uma vez que de forma geral, as abordagens oferecidas em problemas de taxa de variação priorizam aspectos quantitativos. Por conseguinte, a atividade visa otimizar a capacidade dos alunos de inferir e arguir sobre os temas abordados, atribuindo assim, significância para os objetos de estudo, que se materializariam, suplantando a mera quantificação de operações algébricas.
- Oferecer aos alunos a visualização do problema dentro de uma perspectiva dinâmica, assim contrapondo a percepção estática e limitadora usualmente oferecida em métodos convencionais de aulas meramente expositivas onde se prescinde do uso de NTICs.
- Revisitar conceitos inerentes aos campos da Física e/ou da Matemática como: taxas de variação, inclinação de retas, deslocamento, velocidade, aceleração, retas secantes e retas tangentes. Destaca-se que a compreensão conceitual faz parte da aprendizagem completa de disciplinas de CDI ou Físicas Introdutórias, porém, como já discutido anteriormente, acabam tendo sua relevância minimizada quando a aprendizagem se engessa dentro do Paradigma do Exercício.

- Desenvolvimento

- O docente deverá formular questionamentos, bem como estimular que os discentes proponham novos pontos a serem debatidos e fomentar as discussões construtivas que surjam dos referidos questionamentos. Deve-se cuidar para que o cerne das questões levantadas se limitem aos aspectos qualitativos.

Para desenvolver a atividade estimula-se que o docente divida a turma em grupos, e proponha que cada grupo discuta internamente os questionamentos levantados. Deve-se verificar se dentro das possibilidades apresentadas, ocorre máxima heterogeneidade dos grupos. Sabe-se que essa diversidade garante a pluralidade de pontos de vista e constitui um fator extremamente benéfico no desenvolvimento do trabalho (BARROS et al., 2004).

Posteriormente, os grupos serão convidados a expor para a turma suas impressões acerca dos debates internos promovidos em cada grupo, sobre os questionamentos anteriormente levantados.

- Duração da atividade:
 - Entre uma ou duas aulas.
- Material recomendado:
 - Recomenda-se o uso de computadores conectados à internet ou com o software GeoGebra instalado previamente e com o modelo proposto no capítulo 6 já disponível, bem como um projetor, além de materiais necessários para anotações.

9.1.2 Atividade 2: Estudo acerca da taxa de variação de grandezas físicas

Esta atividade se refere ao modelo proposto no capítulo 6 deste trabalho, que versa sobre a correlação entre as taxas de variação entre grandezas e problemas inseridos no âmbito da cinemática.

- Objetivo
 - Estimular uma análise mais aprofundada sobre o conceito da taxa de variação de grandezas físicas e sua relação com a derivada de uma função.
 - Estabelecer conexões entre as Imagens de Conceito referentes à: derivada, inclinação de retas tangentes ao gráfico de uma função em um determinado ponto e taxa de variação.
- Desenvolvimento
 - Com a turma novamente dividida em grupos e respeitando o critério de heterogeneidade ao qual fez-se referência anteriormente, solicita-se aos grupos que dividam o intervalo do domínio definido pelo controle deslizante a , em subintervalos na mesma quantidade que o número de grupos, de modo que para cada grupo corresponda um subintervalo.

Posteriormente fixa-se um valor para o parâmetro h , o qual deverá ser adotado por todos os grupos.

Em seguida, cada grupo deve escolher arbitrariamente três valores para o parâmetro a dentro do subintervalo referente ao seu respectivo grupo.

Figura 28 - Modelo 1 - atividade 1

Atividade 1 – Discussões no âmbito qualitativo

Integrantes do grupo:

- 1 - _____
 2 - _____
 3 - _____
 4 - _____
 5 - _____

1 - O que acontece com a reta que passa pelos pontos A e B, conforme se aumenta ou se diminui o valor do incremento “h”?

2 – O que acontece quando comparamos o valor da inclinação “m” da reta supracitada com o valor da derivada “d” da função f, conforme promovemos a diminuição sucessiva do incremento “h”?

3 – Geometricamente, o que são os pontos onde a derivada é igual zero?

4 – Fisicamente, o que representam esses pontos, na medida em que se considera que o eixo x representa o parâmetro “tempo” e o eixo y representa o parâmetro “deslocamento”?

5 – Ainda atribuindo as referidas grandezas aos eixos coordenados, e admitindo que ao parâmetro “h” possam ser atribuídos valores tão próximos de zero quanto se desejar, qual a grandeza física seria representada pela expressão

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad ?$$

6 – Assumindo que f(x) seja a função velocidade do móvel cujo movimento estaria sob análise no modelo proposto, qual a

grandeza física que seria representada pela expressão $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} \quad ?$

7 – Sendo “a” uma grandeza independente, bem como “b” uma grandeza dependente de “a”, como seu grupo definiria a taxa de variação de “b” em função de “a”?

8 – Se um corpo estivesse em MRU, qual a classe de funções modelaria seu movimento?

9 – O que se pode afirmar sobre a derivada dessa classe de funções?

10 – Que interpretação geométrica se pode fazer sobre o questionamento anterior, sob o ponto de vista da cinemática?

11 – Esse resultado corrobora ou confronta de alguma forma os conhecimentos acerca desta classe de movimento, acumulados em momentos pregressos de sua formação escolar e/ou acadêmica?

USE ESTE ESPAÇO PARA PROPOR QUESTIONAMENTOS: _____

USE ESTE ESPAÇO PARA RESPONDER QUESTIONAMENTOS DE OUTROS GRUPOS: _____

Para cada valor escolhido, calcula-se o valor numérico da expressão $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Posteriormente, os alunos seriam convidados a discutir aspectos como os apresentados na figura 29.

- Duração da atividade:
 - Uma aula
- Material recomendado:
 - Recomenda-se o uso de computadores conectados à internet ou com o software GeoGebra instalado previamente e com o modelo proposto no capítulo 6 já disponível, calculadoras, bem como um projetor, além de materiais necessários para anotações.

9.2 Aplicações do teste da segunda derivada

9.2.1 Atividade 3: Relacionando o teste da segunda derivada com problemas de otimização

Esta atividade se refere ao modelo proposto no capítulo 6 deste trabalho, que versa sobre a correlação entre as taxas de variação entre grandezas e problemas inseridos no âmbito da cinemática.

- Objetivos
 - Reforçar a concepção da derivada como taxa de variação de grandezas.
 - Reforçar a concepção de derivada de uma função em um ponto determinado, como o coeficiente de inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto em questão.
 - Induzir a noção intuitiva acerca do teste da segunda derivada.
 - Utilizar o teste da segunda derivada para resolver um problema no âmbito da semi-realidade.
 - Inculcar na rotina do aluno o processo de modelagem como uma ferramenta útil para visualizar, interpretar e possivelmente, solucionar problemas.
 - Estimular os alunos a criarem um modelo computacional simples, dentro do software GeoGebra, visando uma melhor interpretação do problema proposto.
- Desenvolvimento

Figura 29 - Modelo 1 - atividade 2

Atividade 2 - Estudo acerca da taxa de variação de grandezas físicas

Integrantes do grupo:

1- _____

2- _____

3- _____

4- _____

5- _____

Valor escolhido para o parâmetro “h”:

Valores escolhidos para o parâmetro “a”:

Caso I - Caso II - Caso III -

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$$

Discussão do Caso I:

- Sobre o valor da expressão calculada acima, pode-se afirmar que ele é:
 Positivo Negativo Zero

- Observe o valor da derivada impresso na tela do modelo. Pode-se afirmar que ele é:
 Positivo Negativo Zero

- Parece haver alguma relação entre a derivada e o valor calculado para a expressão?
 Sim Não Inconclusivo

- Parece haver relação entre a inclinação da reta tangente ao gráfico em “a” com o valor da derivada?
 Sim Não Inconclusivo

Discussão do Caso II:

- Sobre o valor da expressão calculada acima, pode-se afirmar que ele é:
 Positivo Negativo Zero

- Observe o valor da derivada impresso na tela do modelo. Pode-se afirmar que ele é:
 Positivo Negativo Zero

- Parece haver alguma relação entre a derivada e o valor calculado para a expressão?
 Sim Não Inconclusivo

- Parece haver relação entre a inclinação da reta tangente ao gráfico em “a” com o valor da derivada?
 Sim Não Inconclusivo

Discussão do Caso III:

- Sobre o valor da expressão calculada acima, pode-se afirmar que ele é:
 Positivo Negativo Zero

- Observe o valor da derivada impresso na tela do modelo. Pode-se afirmar que ele é:
 Positivo Negativo Zero

- Parece haver alguma relação entre a derivada e o valor calculado para a expressão?
 Sim Não Inconclusivo

- Parece haver relação entre a inclinação da reta tangente ao gráfico em “a” com o valor da derivada?
 Sim Não Inconclusivo

- Discuta com integrantes de outros grupos os resultados obtidos

- Responda:

a) o que se pode inferir sobre a relação entre o valor numérico da derivada calculada em um ponto de cada um destes subintervalo e a percepção visual da inclinação da reta tangente ao gráfico nos pontos escolhidos?

b) Considerando que o eixo x representa o parâmetro “tempo” e o eixo y representa o parâmetro “deslocamento, o que se pode afirmar sobre os casos em que o valor numérico das expressões foram positivos, negativo ou zero, respectivamente?

c) Indique outras grandezas que poderiam estar representadas nos eixos x e y . Reflita sobre o item b). Quais foram as grandezas escolhidas? considerando estas novas grandezas, o que se pode afirmar sobre os casos em que o valor numérico das expressões foi positivos, negativo ou zero, respectivamente?

- Os alunos devem ser divididos em trios. Em um primeiro momento, os alunos devem receber uma função delimitada por sua lei de formação e um intervalo de domínio. Devem ser informados que a função tem como variável dependente a posição de um corpo e como a variável independente, o tempo. Seguidamente, devem ser solicitados que realizem os cálculos e esbocem os gráficos necessários para responder questionamentos que envolvam tanto questões estritamente Matemáticas quanto questões associadas ao contexto físico, estimulados para que investiguem as correlações, de acordo com a figura 30. A fim de facilitar a interpretação do problema, deve-se incentivar os alunos para que utilizem o software Geogebra para criarem um modelo que lhes permitam uma visualização mais clara do problema a ser abordado.
- Duração da atividade:
 - * Duas aulas.
- Material recomendado:
 - * Recomenda-se o uso de computadores com o software GeoGebra instalado previamente, calculadoras, além de materiais necessários para anotações.

9.3 Modelo: A integral definida relacionada ao deslocamento de um corpo

9.3.1 Atividade 4 Aplicando a integral definida no cálculo da área sob uma curva qualquer

Esta atividade se refere ao modelo proposto no capítulo 7 deste trabalho, que trata da relação entre a integral definida e o deslocamento de um corpo.

- Objetivos
 - Estimular a ideia intuitiva da interpretação geométrica da integral como soma das áreas de retângulos com bases tão pequenas quanto se possa desejar.
 - Estimular a ideia intuitiva de que quanto menor forem as bases desses retângulos, mais essa soma se aproximará do valor real da área sob a curva estudada.
 - Reforçar a compreensão de que as Somas de Riemann de infinitas parcelas resultam no mesmo valor, tomadas à direita ou tomadas à esquerda.
- Desenvolvimento
 - Individualmente, os alunos definirão uma função estabelecendo sua Lei de Formação e um intervalo $[a, b]$ para seu domínio. Nesta atividade os alunos devem cuidar para que a função seja contínua no intervalo definido e

Figura 30 - Modelo 1 - atividade 3

Atividade 3 - Relacionando o teste da segunda derivada com problemas de otimização

Aluno: _____

Aluno: _____

Aluno: _____

Considere a função $f(x) = 2x^5 - 8x^4 - 6x^3 + 68x^2 - 104x + 48$, definida no intervalo $[-5,5]$.

Admita que a referida função represente a posição de um corpo em função do tempo, expressos respectivamente em unidades de comprimento e unidades de tempo genéricas.

- 1) a) Qual a derivada dessa função?
- 1) b) Qual o significado dessa derivada no ponto de vista matemático?
- 1) c) Qual o significado dessa derivada no ponto de vista físico? Ela representaria a relação entre quais grandezas?
- 2) a) Existem pontos críticos na função f ? Caso existam, quais seriam?
- 2) b) Qual a relação desses pontos com o movimento do corpo em questão?
- 3) c) Esboce os gráficos de $f(x)$ e de $f'(x)$ sobrepostos com o auxílio do software GeoGebra.
- 3) d) Há pontos de máximo no gráfico da função f ? Caso existam, quais são?
- 3) e) Há pontos de mínimo no gráfico da função f ? Caso existam, quais são?
- 3) f) Há pontos de inflexão no gráfico da função f ? Caso existam, quais são?
- 3) g) Trace no gráfico, retas verticais, de modo que estas retas passem pelos pontos onde o gráfico de f' intercepta o eixo x .
- 3) h) Masque no gráfico os pontos onde essas retas interceptaram o gráfico da função f .
- 3) i) O que se pode afirmar sobre esses pontos?
- 3) j) Sobreponha aos gráficos de f e de f' o gráfico correspondente a segunda derivada da função f .
- 3) k) Marque no gráfico os pontos onde as retas construídas anteriormente interceptam o gráfico de f'' .
- 3) l) Quais os valores numéricos de $f''(x)$, calculado nos pontos marcados no item anterior?
- 3) m) Qual a relação desses valores com a resposta dos itens d), e) e f)?

também atentar para que $f(c) \geq 0, \forall c \in [a, b]$. Posteriormente, os alunos devem dividir os intervalos em três subintervalos iguais. Ou seja, devem obter $[a, b] = [a, a + \frac{b-a}{3}] \cup [a + \frac{b-a}{3}, a + \frac{2 \cdot (b-a)}{3}] \cup [a + \frac{2 \cdot (b-a)}{3}, b]$. Posteriormente, devem repetir esse processo com 5 e 10 intervalos, respectivamente. Na etapa seguinte os alunos devem esboçar o gráfico da função, marcando no eixo x os pontos $a, a + \frac{b-a}{3}$ e $\frac{2 \cdot (b-a)}{3}$. Cada um desses subintervalos devem ser considerados bases para retângulos, cujas alturas serão respectivamente iguais a: $f(a + \frac{b-a}{3})$, $f(a + \frac{2 \cdot (b-a)}{3})$ e $f(b)$ ¹⁹, para o caso com 3 intervalos, e procedendo de maneira análoga para os casos com 5 e 10 intervalos. Em ato contínuo, os alunos devem calcular essas áreas e somá-las. Também devem calcular a seguinte integral: $\int_a^b f(x)dx$. Logo após dispor esses dados em uma tabela, deve-se estimular o debate sobre os dados obtidos de acordo com as figuras 31 e 32.

* Duração da atividade:

- Entre duas e três aulas.

* Material recomendado:

- Novamente recomenda-se o uso de computadores conectados à internet ou com o software GeoGebra instalado previamente e com o modelo utilizado já disponível, calculadoras, bem como um projetor, além de materiais necessários para anotações.

9.4 Modelo: Problematização dos corpos em queda

9.4.1 Atividade 5: Analisando algumas variáveis e suas implicações no problema da queda

Esta atividade se refere ao modelo proposto com capítulo 8 deste trabalho, que se propõe a analisar os movimentos de queda, quer seja de um corpo em queda livre, quer seja sobre um corpo em queda sujeito à resistência do ar.

• Objetivos:

- Estimular a reflexão sobre quais aspectos influenciam diretamente na qualidade de um modelo proposto.
- Permitir a visualização simultânea de dois modelos distintos para um mesmo fenômeno.

¹⁹ Note que o desenrolar da atividade leva ao conceito da Soma de Riemann à direita. Esse fato reforça que o modelo criado no capítulo 7 (onde se trabalha com a Soma de Riemann à esquerda) constitui somente uma proposta de modelo, podendo ser livremente adaptada.

Figura 31 - Modelo 2 - atividade 1

Atividade 4 - Aplicando a integral definida no cálculo da área sob uma curva qualquer

Aluno: _____

1- Defina a função por meio de uma Lei de Formação e um intervalo de domínio.

Obs: Garanta que para qualquer argumento da função, sua imagem seja não negativa

Lei de Formação: _____ Intervalo de domínio: _____

2- Divida este intervalo em 3, 5 e 10 subintervalos respectivamente.

3 subintervalos

1^o: _____ 2^o: _____ 3^o: _____

5 subintervalos

1^o: _____ 2^o: _____ 3^o: _____ 4^o: _____ 5^o: _____

10 subintervalos

1^o: _____ 2^o: _____ 3^o: _____ 4^o: _____ 5^o: _____

6^o: _____ 7^o: _____ 8^o: _____ 9^o: _____ 10^o: _____

3- Considere que a extremidade direita de cada subintervalo constitua a altura de um retângulo. Calcule essa altura usando a Lei de Formação estabelecida por você.

3 subintervalos: Altura do retângulo

1^a: _____ 2^a: _____ 3^a: _____

5 subintervalos: Altura do retângulo

1^a: _____ 2^a: _____ 3^a: _____ 4^a: _____ 5^a: _____

10 subintervalos: Altura do retângulo

1^a: _____ 2^a: _____ 3^a: _____ 4^a: _____ 5^a: _____

6^a: _____ 7^a: _____ 8^a: _____ 9^a: _____ 10^a: _____

4 – Considere cada subintervalo como a base de um retângulo. Lembre-se que a altura de cada um desses retângulos já fora calculada no item anterior. Dito isto, calcule as áreas de cada retângulo.

3 subintervalos: Área do retângulo

1^a: _____ 2^a: _____ 3^a: _____

5 subintervalos: Área do retângulo

1^a: _____ 2^a: _____ 3^a: _____ 4^a: _____ 5^a: _____

10 subintervalos: Área do retângulo

1^a: _____ 2^a: _____ 3^a: _____ 4^a: _____ 5^a: _____

6^a: _____ 7^a: _____ 8^a: _____ 9^a: _____ 10^a: _____

5 – Calcule a integral definida da função, dentro do intervalo definido por você, e anote o resultado no quadro abaixo:

--

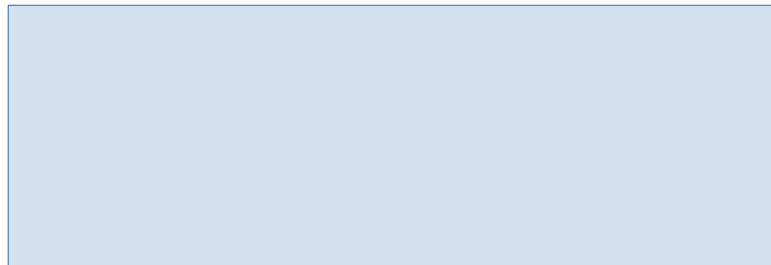
Figura 32 - Modelo 2 - atividade 1

6 – Complete a tabela com os valores obtidos nos itens anteriores:

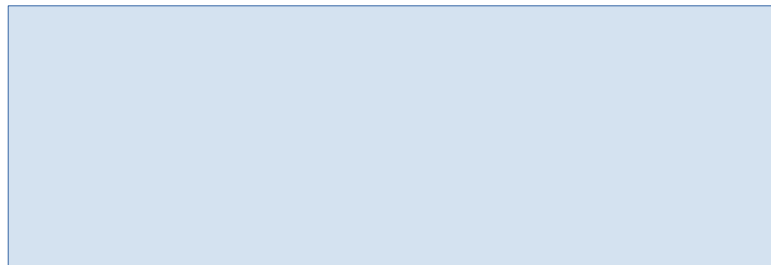
Comparando valores	
Soma das áreas dos 3 retângulos	
Soma das áreas dos 5 retângulos	
Soma das áreas dos 10 retângulos	
Integral definida no intervalo de domínio	

7 – Represente em um mesmo esboço o gráfico da função e os retângulos correspondentes a cada caso:

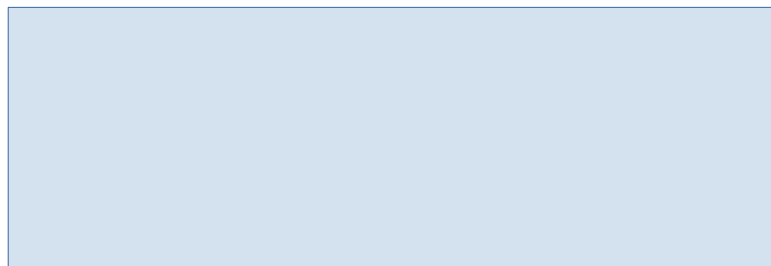
3 retângulos



5 retângulos



10 retângulos



8 – Proposta de debate: Parece haver alguma relação entre a soma das áreas dos retângulos e o valor numérico da integral definida calculada? O aumento do número de retângulos apresenta que implicação? O que se pode inferir para o caso do número de retângulos ser infinito?

- Fomentar a discussão sobre quais variáveis são relevantes e quais podem ser desprezadas durante o processo de modelagem.
 - Garantir a investigação do problema por meio da livre simulação dos valores atribuídos às variáveis presentes no modelo.
 - Estimular a pesquisa em publicações científicas acerca de um determinado experimento correlato ao que se apresenta no modelo, trazendo as atividades propostas para o âmbito da realidade.
- Desenvolvimento
 - Os alunos devem ser divididos em duplas. As duplas devem ter liberdade de explorar o modelo em questão, fazendo as simulações que julgarem interessantes e esclarecedoras.
 - Recomenda-se que haja um tempo para uma discussão coletiva sobre as impressões acerca do modelo, bem como espaço para que sejam feitas colocações e questionamentos. Dessa forma, deseja-se garantir que os discentes ingressem na próxima etapa da atividade após apropriarem-se intelectualmente do modelo apresentado.
 - Em seguida, as duplas serão estimuladas a responder um breve questionário, conforme exposto na figura 33, que enfatizará a relevância de cada variável considerada no modelo bem como induzirá a reflexão sobre quais outras poderiam ser consideradas.
 - Em um último momento, as duplas devem pesquisar sobre experimentos abordando o fenômeno modelado, fazendo com que a atividade faça referência à realidade. Como desdobramento da pesquisa, os alunos serão convidados a fazer novas simulações a fim de verificar dados bem como produzir novas deduções.
 - Duração da atividade:
 - * Entre duas e três aulas.
 - Material recomendado:
 - * Novamente recomenda-se o uso de computadores conectados à internet ou com o software GeoGebra instalado previamente e com o modelo apresentado no capítulo 8 já disponível, calculadoras, bem como um projetor, além de materiais necessários para anotações.

Figura 33 - Modelo 3 - atividade 1

Atividade 5 - Analisando algumas variáveis e suas implicações no problema da queda

Aluno: _____

Aluno: _____

Refleta e debata com sua dupla acerca dos itens abaixo apresentados. Caso necessário, proceda simulações dentro do modelo

- 1) Quais são as variáveis consideradas nos modelos apresentados?
- 2) Descreva qualitativamente qual o impacto do ponto de vista cinemático, ao desconsiderar a resistência do ar.
- 3) De que forma, cada uma das variáveis inseridas nos modelos, contribuem com o movimento dos corpos em queda?
- 4) O que acontece com o corpo em queda sem resistência do ar, se variarmos a massa do corpo? Por qual motivo isso ocorre?
- 5) Se considerarmos a resistência do ar numericamente igual a zero, estaríamos simulando qual condição natural?
- 6) A variação da posição do corpo em o tempo decorrido de um corpo em queda próximo à superfície da Terra, seria idêntica a algum dos casos no modelo criado no GeoGebra? Justifique.
- 7) Quais variáveis poderiam estar presentes em uma situação real de queda, que foram suprimidas ou desprezadas no modelo criado no GeoGebra?
- 8) O fato do modelo não considerar todas as possibilidades de variáveis inerentes ao problema, inviabiliza a utilização do modelo por comprometer sua qualidade? Justifique.

Atividade de Pesquisa

- 1) Pesquise com sua dupla em publicações acadêmicas, experimentos de queda de corpos com resistência do ar. Use os dados para estimar um valor numérico para a constante “k” na superfície do planeta Terra, através da simulação com as variáveis encontradas no modelo do GeoGebra.
- 2) Imagine um novo planeta, com condições muito próximas às que se encontra na Terra, exceto por sua gravidade, que é aproximadamente metade da gravidade em nosso planeta. Se o experimento utilizado como base para a pesquisa anterior fosse repetida nesse planeta, quais seriam as posições do corpo em queda, em função do tempo?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, foi possível perceber que o processo de modelagem, seja matemático ou computacional, se notabiliza por duas perspectivas: no que se refere à modelagem aplicada fora do ambiente educacional: pode-se considerar como um campo de reconhecida necessidade e relevância, fortemente estabelecido como ferramenta profissional. Já dentro da perspectiva da educação, a modelagem ainda se encontra em um estágio bastante incipiente, tanto na educação básica, quanto no nível superior de ensino.

Também pudemos diagnosticar que a comunidade acadêmica, nacional e internacional, dedica-se a otimizar o processo de ensino-aprendizagem dentro das disciplinas universitárias de Física e de CDI. As disciplinas, de forma geral, ainda são lecionadas de forma desconexa, seja do mundo ou seja das outras disciplinas. Uma das formas de obter êxito nesse propósito seria buscar uma educação mais integrada e significativa. Nesse momento as atividades de modelagem e simulação surgem como uma alternativa aos métodos tradicionais de ensino, que por vezes se mostraram ineficazes. Não por acaso que diversos documentos que norteiam a educação em diferentes níveis incorporam em seu texto, direta ou indiretamente, recomendações acerca do uso da modelagem como ferramenta pedagógica.

A defasagem curricular em diversos campos do conhecimento dentro da educação básica no Brasil é amplamente conhecida e estudada, sendo usualmente ratificadas por exames e avaliações internacionais. Dessa forma torna-se simples atribuir eventuais adversidades no nível superior de ensino a este fator. Entretanto, pesquisas que embasam esse trabalho apontam que parte significativa da responsabilidade pelas referidas adversidades, pode ser atribuída a atuação docente. A resistência à inserção de novos métodos de ensino deve-se a uma vasta gama de fatores, onde certamente podemos destacar a segurança ao lecionar de uma mesma maneira em detrimento do risco de inovar, bem como o apego exagerado ao elevado nível de rigor matemático, muitas vezes observado em disciplinas que compõe o currículo de cursos onde o rigor matemático mostra-se perfeitamente dispensável.

Decorre daí a percepção de que a educação rompe com um flagrante processo de mergulho em uma era tecnológica. Praticamente todos os outros setores da sociedade utilizam amplamente TDIC. Entretanto, a educação mantém-se resistente ao uso dessas tecnologias, e quando o faz, por vezes incorre em uma utilização inadequada ou ineficaz. Assim produz a sensação de frustração, que culmina no aumento da resistência do docente à introdução da tecnologia como ferramenta de ensino. Constitui-se assim um ciclo arraigado na educação que a afasta de uma reforma didática.

Sob essa ótica, neste trabalho propusemos sugestões de atividades de caráter inte-

gradador e inseridas em um ambiente de investigação. Como suporte para estas atividades utilizamos um software de geometria dinâmica, o GeoGebra. Dentre as múltiplas possibilidades ofertadas por esse software, encontra-se o desenvolvimento de modelos computacionais e de atividades de simulação dentro desse modelo. Não obstante, os modelos propostos foram hospedados em um blog, constituindo um objeto de aprendizagem que oferece facilidade de acesso e de atualização. Uma vez que a democratização do acesso a internet encontra-se em evolução, o referido blog possui o potencial de alcançar um grande número de usuários.

Os modelos que serviram de referência para as atividades acima citadas, abordaram primordialmente os conceitos de integral e derivada, bem como problemas de queda, que por diversas vezes dialogaram com temas transversais, expandindo as possibilidades de exploração de cada modelo.

O primeiro modelo, ao tratar de taxas de variação, discorreu sobre algumas aplicações da derivada de funções. Nele, partiu-se de uma problematização de caráter físico, que leva a ricos questionamentos e ponderações no campo da Matemática.

O segundo modelo, seguindo linha de raciocínio análoga, versa sobre a relação entre deslocamento de um corpo e integral de uma função. Se baseando primordialmente em conceitos pertinentes ao currículo da disciplina de Física na Educação Básica, o capítulo trata da integral, trazendo no bojo da discussão noções de limite. Culmina então, com a geração de gráficos e tabelas com potencial de fomentar discussões densas no que se refere ao papel das demonstrações e do rigor matemático em cursos superiores.

O último modelo caminha no sentido inverso dos dois primeiros: parte de uma problematização de cunho físico, como é o caso da queda dos corpos, chegando em equações diferenciais. Este certamente trata-se do modelo mais denso deste trabalho, com vasto material para desenvolvimento de atividades.

Finalizando, as atividades propostas, em conjunto com os modelos criados, bem como a atualização constante do blog, oferecem a possibilidade de aplicação prática de todo o material produzido. Dessa forma, pretendemos fornecer nossa pequena parcela de contribuição, objetivando o desenvolvimento da educação superior no Brasil.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W. de; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria: revista de educação em ciência e tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 117–134, 2009.
- ALMEIDA, L. M. Werle de; PALHARINI, B. N. Os "mundos da matemática. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 26, n. 43, 2012.
- ASSIS, L. S. d. et al. Concepções de professores de matemática quanto à utilização de objetos de aprendizagem: um estudo de caso do projeto rived-brasil. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.
- AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. da S. Objetos de aprendizagem–diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. *Revista Contemporânea de Educação*, v. 5, n. 10, 2010.
- BARASUOL, F. F. A matemática da pré-história ao antigo egito. *UNI revista*, v. 1, 2006.
- BARON, M. E. *The origins of infinitesimal calculus*. [S.l.]: Elsevier, 2014.
- BARON, M. E.; BOS, H. J. M. *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo*. [S.l.]: UnB., 1985.
- BARREIRO, Á. C. de M.; BAGNATO, V. S. Aulas demonstrativas nos cursos básicos de física. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 9, n. 3, p. 238–244, 1992.
- BARROS, J.; REMOLD, J.; TAGLIATI, J. R.; SILVA, G. S. da. Engajamento interativo no curso de física i da ufjf. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, 2004.
- BASSANEZI, R. C. Modelagem matemática uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. 1999.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. [S.l.]: Editora Contexto, 2002.
- BENNEMANN, M.; ALLEVATO, N. S. G. Educação matemática crítica. *Revista de Produção Discente em Educação Matemática*. ISSN 2238-8044, v. 1, n. 1, 2012.
- BIEMBENGUT, M. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 2, n. 2, p. 07–32, 2009. ISSN 1982-5153. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37939>>.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, 9a edição. *Rio de Janeiro*, 2002.
- BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development: (The concepts of the calculus)*. [S.l.]: Courier Corporation, 1959.

- BRAGA, J. C.; DOTTA, S.; PIMENTEL, E.; STRANSKY, B. Desafios para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem reutilizáveis e de qualidade. In: *Anais do Workshop de Desafios da Computação Aplicada à Educação*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 90–99.
- COSTA, M. Simulações computacionais no ensino de física: revisão sistemática de publicações da área de ensino. In: *anais - EDUCERE - XIII Congresso Nacional de Educação, 2017*. [S.l.: s.n.], 2017.
- COUNCIL, N. R. et al. *How people learn: Brain, mind, experience, and school: Expanded edition*. [S.l.]: National Academies Press, 2000.
- CUI, L. *Assessing college students' retention and transfer from calculus to physics*. Tese (Doutorado) — Kansas State University, 2006.
- D'AMBROSIO, U. Etnomatemática e educação. *Reflexão e Ação*, v. 10, n. 1, p. 7–19, 2002.
- D'AMBRÓSIO, U. et al. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. *Educação e Pesquisa, São Paulo*, SciELO Brasil, v. 31, n. 1, p. 99–120, 2005.
- FACTS MAPS. *PISA 2018 Worldwide Ranking – average score of mathematics, science and reading*. 2019. Disponível em: <http://factsmaps.com/pisa-2018-worldwide-ranking-average-score-of-mathematics-science-reading/>. Acesso em: 26 ago. 2019.
- FACTS MAPS. *PISA Worldwide Ranking – average score of mathematics, science and reading*. 2019. Disponível em: <http://factsmaps.com/pisa-worldwide-ranking-average-score-of-math-science-reading/>. Acesso em: 26 ago. 2019.
- FERRUZZI, E. C. et al. A modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia. Florianópolis, SC, 2003.
- FONSECA, S. S. da; SOUZA, I. d. S. de; OLIVEIRA, C. A. de. O blog como recurso didático para o ensino de matemática. *Revista EDaPECI*, v. 13, n. 2, p. 298–309, 2013.
- GIRALDO, V. Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada. *Unpublished Doctoral Thesis, Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brazil*, 2004.
- HALLAL, R. et al. Geogebra no ensino de cálculo diferencial e integral i. *Revista ESPACIOS— Vol. 37 (Nº 20) Año 2016*, 2016.
- HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system geogebra. In: *Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching conference*. [S.l.: s.n.], 2004.
- JUNIOR, O. et al. Compreensões de conceitos de cálculo diferencial no primeiro ano de matemática: uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2006.

- KLING, M. *Calculus: an intuitive and physical approach*. [S.l.]: Courier Corporation, 1998.
- KROLL, P.; KRUCHTEN, P. *The rational unified process made easy: a practitioner's guide to the RUP*. [S.l.]: Addison-Wesley Professional, 2003.
- LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. O uso do computador no ensino de matemática na graduação. *23a Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*, Brasília Brazil, p. 32–43, 2000.
- MACHADO, A. d. L. G.; MACHADO, L. da S. Geometria e funções: uma abordagem computacional a partir de problemas da obmep. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 5, n. 1, p. 41–57, 2019.
- MANTOVANI, A. M. Blogs na educação: construindo novos espaços de autoria na prática pedagógica. *Revista Prisma*, v. 1, n. 3, 2006.
- MATOS, J. F. Educação matemática e cidadania. *Revista Quadrante*, v. 11, n. 1, p. 1–6, 2002.
- MEC. *Base Nacional Comum Curricular*. 2019. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>. Acesso em: 15 jun. 2019.
- MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. d. Possibilidades e limitações das simulações computacionais no ensino da física. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 24, n. 2, p. 77–86, 2002.
- MELCHIORS, A. História do cálculo diferencial e integral. *Maiêutica-Matemática*, v. 1, n. 1, 2013.
- MENEZES, L. Matemática, linguagem e comunicação. *Millenium*, Instituto Politécnico de Viseu, 2000.
- MUSSOI, E. M.; FLORES, M. L. P.; BULEGON, A. M.; TAROUÇO, L. M. R. Geogebra and exe learning: applicability in the teaching of physics and mathematics. *Journal of Systemics, Cybernetics and Informatics*, v. 9, n. 2, p. 61–66, 2011.
- NOBREGA, P. d. N. Equações diferenciais. *PROGRAMAÇÃO VISUAL*, v. 1, 2005.
- OLIVEIRA, V. F. d. et al. Rendimentos dos alunos de engenharia nas disciplinas do núcleo de conteúdos básicos da ufjf. In: *XXXV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. [S.l.: s.n.], 2007.
- PCN, P. C. N. Matemática. *Secretária de Educação Fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- PETLA, R. J.; ROLKOWSKY, E. Geogebra—possibilidades para o ensino de matemática. *União da Vitória, PR*, p. 1419–6, 2008.
- PIETROCOLA, M. A matemática como estruturante do conhecimento físico. *Caderno brasileiro de ensino de física*, v. 19, n. 1, p. 93–114, 2002.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; WALKER, J. *Fundamentos de física*. [S.l.]: Grupo Pátria Cultural SA DE CV, 2001.

REZENDE, W. M. O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica. *Linguagem, Conhecimento, Ação—ensaios de epistemologia e didática*. São Paulo: Escrituras, 2003.

SANTOS, R. dos; LORETO, A. B.; GONÇALVES, J. L. Avaliação de softwares matemáticos quanto a sua funcionalidade e tipo de licença para uso em sala de aula. *Revista de ensino de Ciências e Matemática*, v. 1, n. 1, p. 47–65, 2010.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, v. 13, n. 14, p. 66–91, 2000.

SOARES, L. H. Tecnologia computacional no ensino de matemática: o uso do geogebra no estudo de funções. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*. ISSN 2237-9657, v. 1, n. 1, 2012.

STEWART, J. Cálculo volume 1, 7 edição. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, Springer, v. 12, n. 2, p. 151–169, 1981.

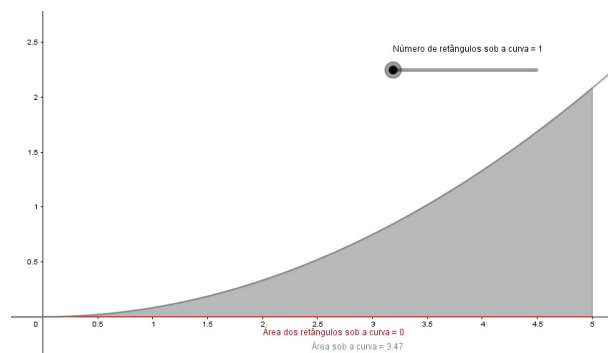
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA. *ENSINO SUPERIOR: Cálculo: Máximos e mínimos: Teste da segunda derivada*. 2006. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/calculo/maxmin/mm03.htm>. Acesso em: 15 ago. 2019.

APÊNDICE A – Representação gráfica das áreas dos retângulos pela soma de Riemann comparada à área sob a curva da função

A.1 Ilustrações para a função $f(x) = x^2/12$

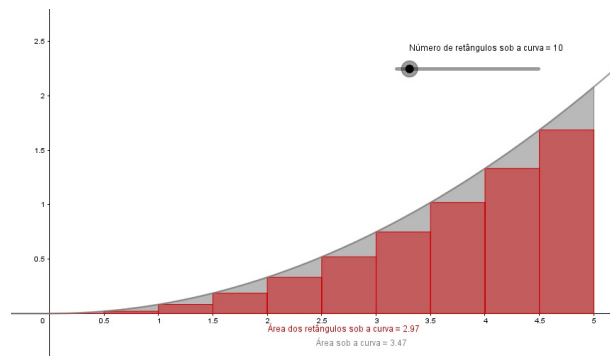
A.2 Ilustrações para a função $f(x) = \text{sen}(x)/2 + 4$

Figura 34 - 1 retângulo



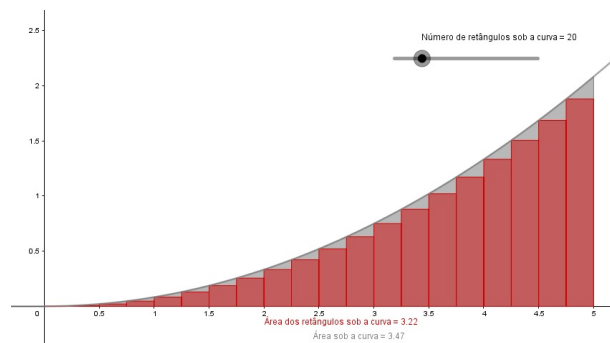
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 - 10 retângulos



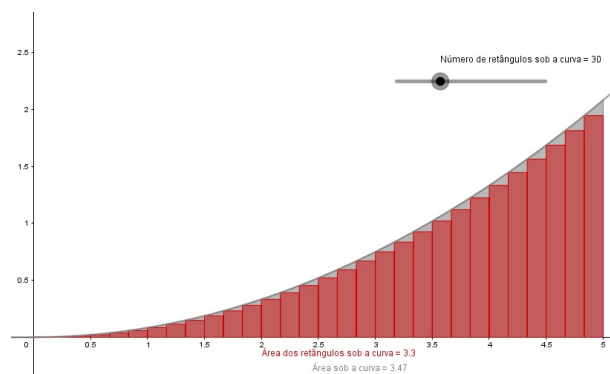
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 - 20 retângulos



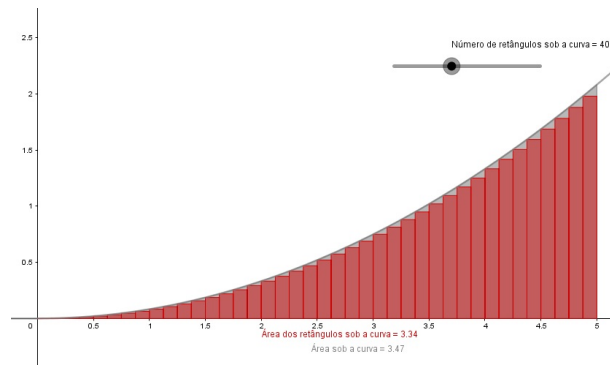
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 - 30 retângulos



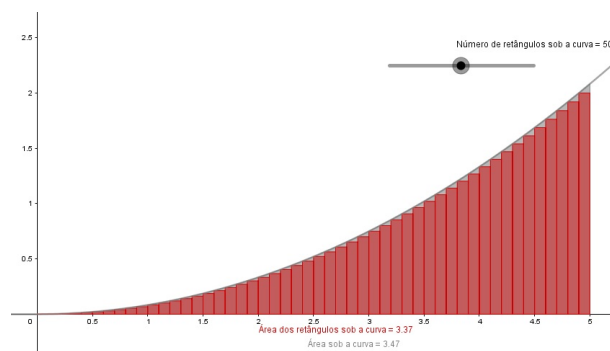
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 - 40 retângulos



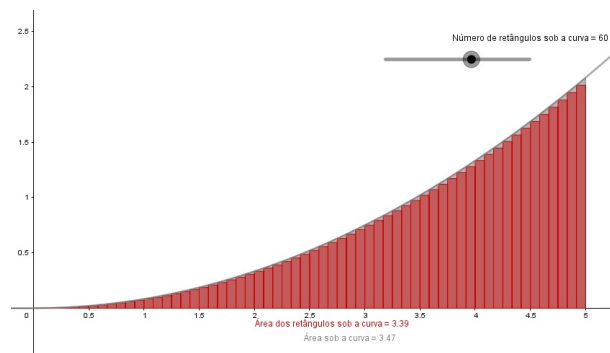
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 - 50 retângulos



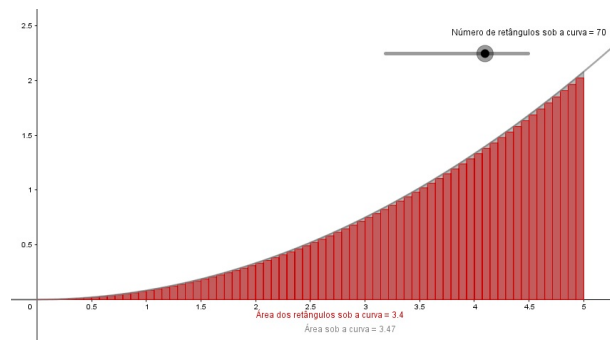
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 - 60 retângulos



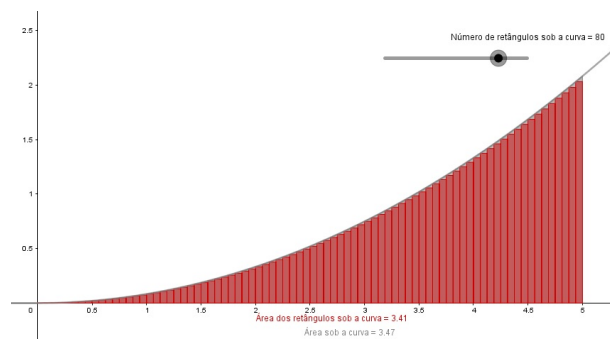
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 - 70 retângulos



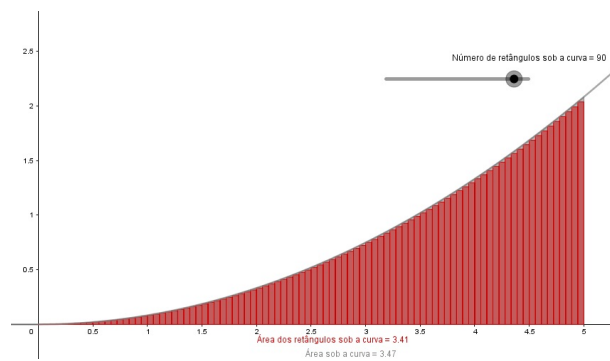
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 - 80 retângulos



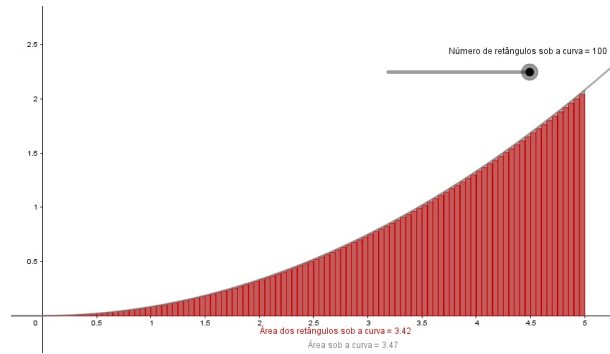
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 - 90 retângulos



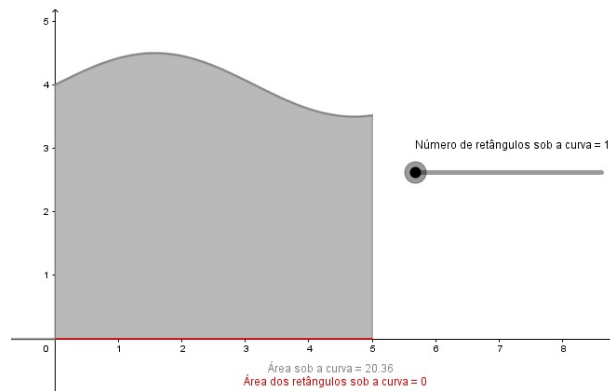
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 - 100 retângulos



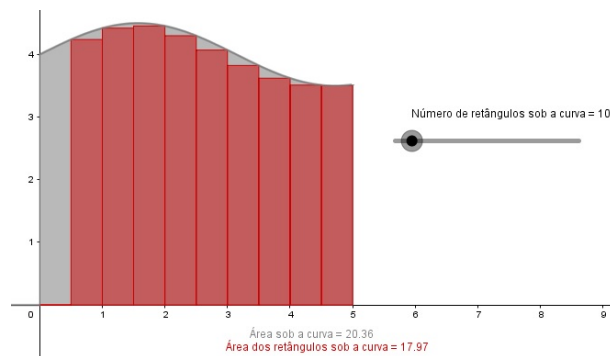
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 - 1 retângulo



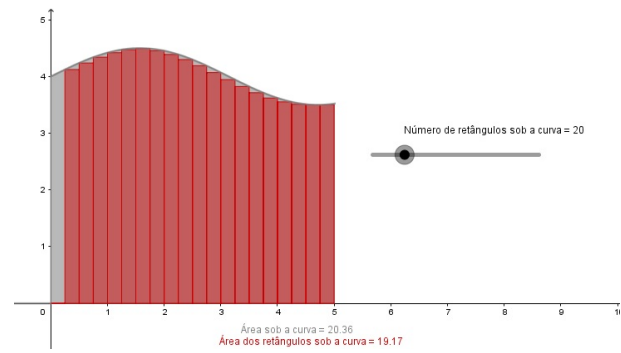
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 - 10 retângulos



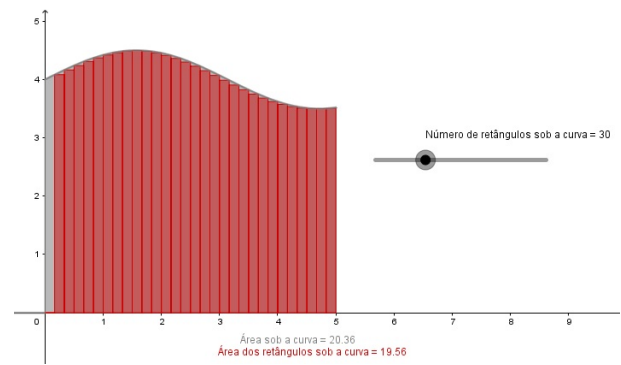
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 - 20 retângulos



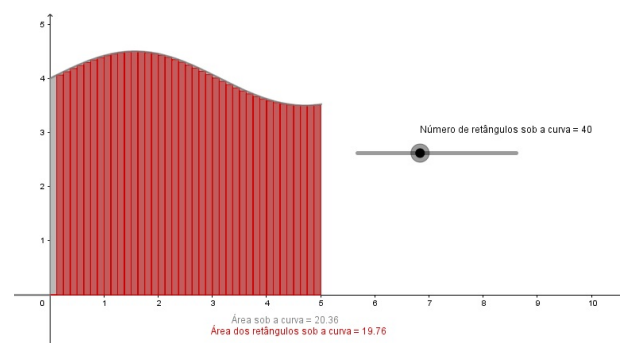
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 - 30 retângulos



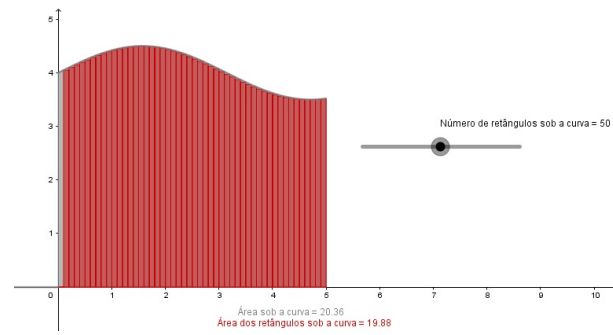
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49 - 40 retângulos



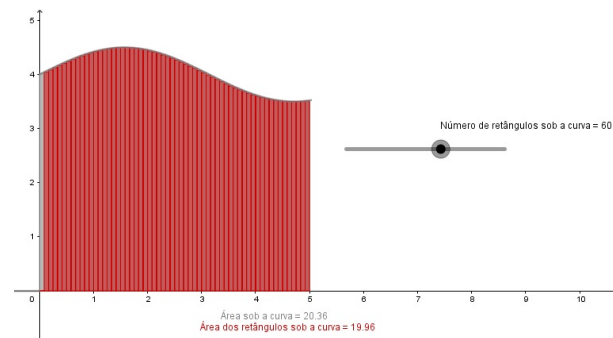
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 50 - 50 retângulos



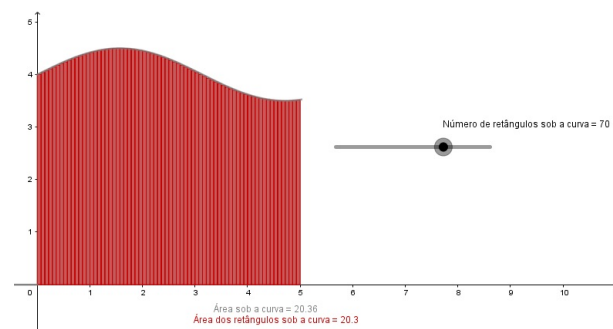
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 51 - 60 retângulos



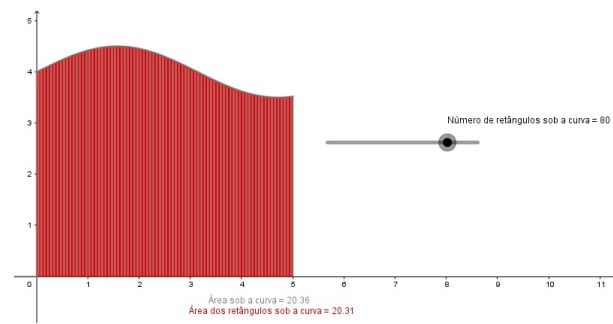
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 52 - 70 retângulos



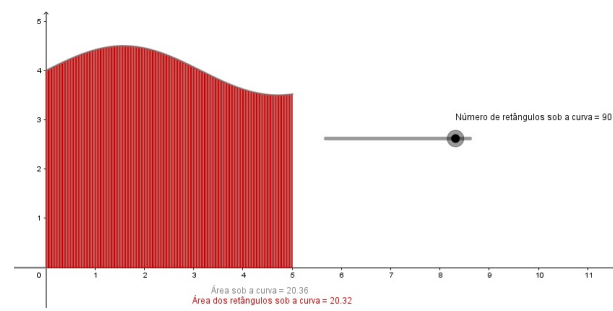
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 53 - 80 retângulos



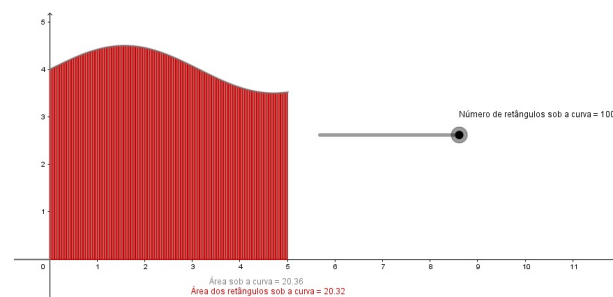
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 54 - 90 retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 55 - 100 retângulos



Fonte: Elaborado pelo autor.

APÊNDICE B – Soma da área dos retângulos

B.1 Tabela comparativa para a função $f(x) = x^2/12$

B.2 Tabela comparativa para a função $f(x) = \text{sen}(x)/2 + 4$

Tabela 2 - Soma da área dos
retângulos para a
função: $f(x) = x^2/12$

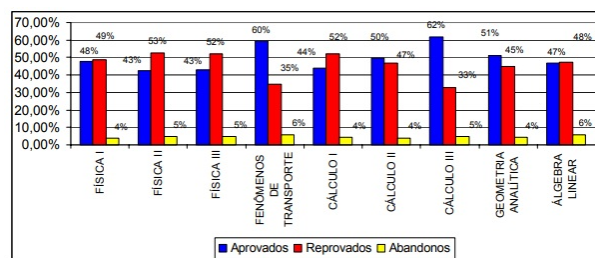
Número de retângulos	Área (u.a.)
1	0
10	2.97
20	3.22
30	3.30
40	3.34
50	3.37
60	3.39
70	3.40
80	3.41
90	3.41
100	3.42

Tabela 3 - Soma da área dos
retângulos para a
função:
 $f(x) = \text{sen}(x)/2 + 4$

Número de retângulos	Área (u.a.)
1	0
10	17.97
20	19.17
30	19.56
40	19.76
50	19.88
60	19.96
70	20.30
80	20.31
90	20.32
100	20.32

ANEXO A – Índice de retenção, promoção e evasão nos cursos de engenharia da UFJF

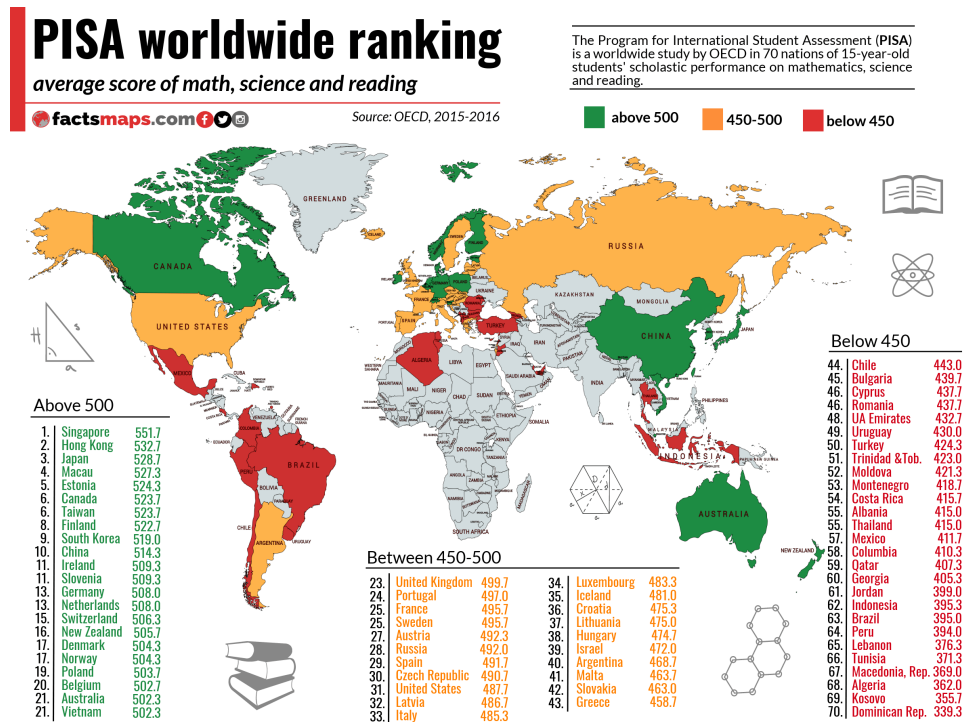
Figura 56 - Resultado final dos cursos de engenharia na UFJF no período entre 2000 e 2005



Fonte: (OLIVEIRA et al., 2007, p.3).

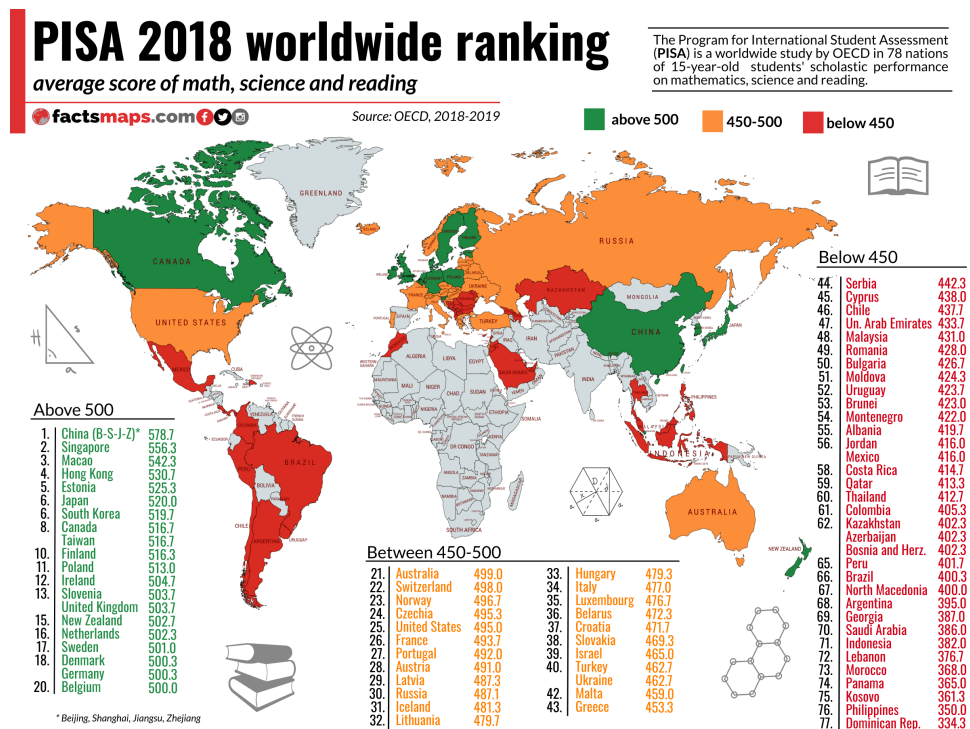
ANEXO B – Dados do exame PISA

Figura 57 - Cenário global do resultado do Exame Pisa - 2015



Fonte: (FACTS MAPS, 2019b).

Figura 58 - Cenário global do resultado do Exame Pisa - 2018



Fonte: (FACTS MAPS, 2019a).