UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CURSO DE PÓS - GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Ivana Manfio Cocco

EXPLORANDO OS CONCEITOS DE ELEMENTO NEUTRO E OPOSTO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Santa Maria, RS
2020

Ivana Manfio Cocco

EXPLORANDO OS CONCEITOS DE ELEMENTO NEUTRO E OPOSTO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós - Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**.

ORIENTADORA: Prof.ª Luciane Gobbi Tonet

Santa Maria, RS
2020

Cocco, Ivana Manfio
Explorando os conceitos de elemento neutro e oposto por meio da resolução de equações no Conjunto dos Números Racionais / Ivana Manfio Cocco.- 2020.
54 f.; 30 cm

Orientadora: Luciane Gobbi Tonet
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2020

1. Anel 2. Elemento neutro e oposto 3. Resolução de equações I. Gobbi Tonet, Luciane II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

End. Eletr.: ivanamanfiococco@hotmail.com

Ivana Manfio Cocco

EXPLORANDO OS CONCEITOS DE ELEMENTO NEUTRO E OPOSTO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Pós - Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**.

Defesa em 3 de julho de 2020:

Luciane Gobbi Tonet

Luciane Gobbi Tonet, Dra. (UFSM)
(Presidenta/Orientadora)

Janice Rachelli

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)

Laerte Bemm

Laerte Bemm, Dr. (UEM)

Vânia

Vânia Bolzan Denardi, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2020

DEDICATÓRIA

Com muito amor e carinho, dedico ao meu pai, Vitélio, à minha mãe, Vanda e à minha irmã, Patrícia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pela vida e por Ele ter me dado força e ânimo para superar os obstáculos encontrados, pois sem isso seria impossível chegar até aqui.

Agradeço ao meu pai, Vitélio, à minha mãe, Vanda e minha irmã, Patrícia, pelo amor, pela paciência, pelo apoio e pela compreensão. Por entenderem o quão importante e difícil foi o caminho para chegar até aqui. Obrigada por estarem sempre ao meu lado.

Agradeço ao meu namorado, Mateus, pelo amor, pelo incentivo, pela confiança e pela compreensão.

Agradeço a minha orientadora, professora Luciane, pelos ensinamentos, pelas sugestões, pela paciência e pela amizade.

Agradeço aos professores membros da banca, por terem aceitado o convite, pelas sugestões e pelas contribuições.

Agradeço aos meus amigos, colegas e familiares, em especial Elizandro, Tauana, Graciele, Flávia, Claudia e Fábio, pela ajuda, pelos conselhos, pela paciência, pelo apoio e pelos ensinamentos.

Agradeço à Escola Municipal de Ensino Fundamental José Rubin Filho, pela oportunidade e confiança de realizar as atividades propostas nesse trabalho.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a concretização desse trabalho.

RESUMO

EXPLORANDO OS CONCEITOS DE ELEMENTO NEUTRO E OPOSTO POR MEIO DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

AUTORA: Ivana Manfio Cocco
ORIENTADORA: Luciane Gobbi Tonet

Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividade que contempla uma adaptação da definição de anel para o Ensino Fundamental, tendo como objetivo a compreensão de conceitos e propriedades operacionais estudadas nesse nível de ensino. Nessa perspectiva, exploramos tais propriedades, dentre as quais a existência de elemento neutro e oposto, com relação a operações distintas das usuais, resolvendo, em seguida, equações envolvendo essas operações. Ao longo dessa dissertação, exibimos e analisamos os resultados obtidos pelos alunos de uma turma de Sétimo Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de Pinhal Grande - RS. Finalizamos nosso trabalho com a conclusão de que nossa proposta de atividade foi satisfatória, complementando com sugestões que permitem aprimorá-la para uma próxima aplicação.

Palavras-chave: Anel. Elemento neutro e oposto. Resolução de equações.

ABSTRACT

EXPLORING THE CONCEPTS OF NEUTRAL AND OPPOSITE ELEMENTS WITH SOLVING EQUATIONS IN THE SET OF RATIONAL NUMBERS

AUTHOR: Ivana Manfio Cocco
ADVISOR: Luciane Gobbi Tonet

In this work we presented an activity proposal that contemplates an adaptation of the definition of ring for Elementary School, with the objective of understanding the concepts and operational properties studied at this level of education. So, we explored the existence of a neutral and opposite element in unusual operations and we solved equations with these operations. Throughout this dissertation, we exhibited and analyzed the results obtained by the students of a Seventh Grade Elementary School Class in a municipal public school in Pinhal de Grande - RS. We concluded that our activity proposal was satisfactory, complementing it with suggestions that allow us to improve it for the next application.

Keywords: Ring. Neutral and opposite element. Solving equations.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo das disciplinas propostas no curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), estudamos tópicos relacionados ao ensino de Matemática na Educação Básica. Em particular, no que se refere a disciplina de Aritmética, estudamos a definição de anel, bem como algumas de suas propriedades.

Tal definição, da forma como é abordada no Ensino Superior, não é passível de aplicação no Ensino Básico. No entanto, isso não diminui a sua importância nesse nível de ensino, até como forma de justificar e compreender propriedades operacionais estudadas, por vezes, como regras a memorizar. Desse modo, temos como objetivo geral do nosso trabalho investigar a compreensão dos conceitos de elemento neutro e oposto no Conjunto dos Números Racionais.

A partir disso, temos como objetivos específicos:

- adaptar a definição de anel para uma linguagem apropriada ao Ensino Fundamental, abordando para isso, apenas uma operação distinta das operações usuais;

- estudar operações distintas da adição e multiplicação habitualmente abordadas na Educação Básica;

- explorar propriedades inerentes a algumas operações distintas das usuais, as quais estão presentes na definição de anel;

- analisar as definições de elemento neutro e oposto relativos a estas novas operações, bem como a determinação dos mesmos;

- resolver equações que envolvam essas operações.

Nos documentos que norteiam a Educação Básica não há menção ao estudo de operações distintas das usuais, muito menos a resolução de equações envolvendo as mesmas. Entretanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs - afirmam que

> Ao se proporem situações-problema bastante diversificadas, o aluno poderá reconhecer diferentes funções de Álgebra (ao resolver problemas difíceis do ponto de vista aritmético, ao modelizar, generalizar e demonstrar propriedades e fórmulas, estabelecer relações entre grandezas). (BRASIL, 1998, p. 84).

Neste sentido, nossa proposta de trabalho consiste em abordar no Ensino Fundamental um modelo de Álgebra que vai além da utilização de regras e técnicas sem significação por parte dos alunos, permitindo assim, explorar diversas funções dessa área do conhecimento, nesse nível de ensino.

Além disso, ao trabalharmos com operações distintas das usuais, proporcionamos aos alunos situações que os conduzem a compreender de maneira eficiente alguns conceitos e propriedades que tradicionalmente são tratados de maneira superficial. Com relação a isso, Miguel (2005, p. 376) assegura que

> [...] o conhecimento matemático não se consolida como um rol de idéias prontas a serem memorizadas; muito além disso, um processo significativo de ensino de

> Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de idéias e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos [...].

Para que atinjamos os objetivos que apontamos anteriormente, o presente trabalho possui a seguinte estrutura: no segundo capítulo apresentamos uma abordagem sobre o ensino da Álgebra no Ensino Fundamental, dando ênfase no ensino de equações do 1º grau. Em seguida, exploramos de maneira breve a definição de anel por meio de exemplos. Encerramos o capítulo resolvendo equações do 1º grau que envolvem operações distintas das usuais.

No terceiro capítulo relatamos a sequência didática que realizamos com os alunos, bem como descrevemos brevemente a turma em que a mesma foi aplicada. Essa sequência é composta por três atividades introdutórias a respeito de operações distintas das usuais, exemplos sobre a resolução de equações que envolvem essas operações e, por fim, equações propostas para os alunos as quais ilustram os tópicos abordados nas aulas anteriores.

No quarto capítulo, apresentamos algumas respostas dadas pelos alunos para os exercícios apresentados no Capítulo 3. Para complementar esse capítulo, realizamos uma análise acerca dos resultados obtidos. Em seguida, finalizamos esse trabalho no quinto capítulo, dedicado às considerações finais, nas quais incluímos sugestões para o aperfeiçoamento das atividades que realizamos.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção apresentamos uma revisão bibliográfica a respeito do ensino de Álgebra no Ensino Fundamental, especialmente sobre equações. Além disso, abordamos a definição de anel por meio de exemplos numéricos e, por fim, resolvemos equações envolvendo operações não usuais no Conjunto dos Números Racionais.

2.1 ENSINO DE ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Quando observamos os documentos norteadores da Educação Básica, evidenciamos a importância da Álgebra nos currículos escolares. Segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC,

> A unidade temática Álgebra, por sua vez, tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p. 270).

Ainda, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs,

> O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. (BRASIL, 1998, p. 115).

Entretanto, a maneira como a Álgebra é ensinada no Ensino Fundamental pode causar nos alunos uma falsa impressão de que esta unidade temática resume-se a um conjunto de regras e manipulações simbólicas com pouca aplicabilidade. Neste sentido, Oliveira, Ferreira e Alves (2019, p. 166) afirmam que

> Em muitas ocasiões busca-se ferramentas para amenizar as dificuldades e os desafios encontrados diante dos conceitos algébricos, e este fator leva muitos professores a recorrerem a métodos que, por hora, resolvem os problemas, porém, tornar-se-ão barreiras no futuro de muitos alunos e impedirão o desenvolvimento de habilidades para as quais os alunos podem ter grande aptidão, mas não o farão por receio.

Além disso, Melara e Souza (2008) ressaltam que o aumento do uso de símbolos facilitou o entendimento algébrico, permitindo que a Álgebra pudesse fazer parte da formação de um grande número de cidadãos. Porém, segundo esses mesmos autores, ela pode tornar-se um fator de exclusão social se ensinada apenas de modo mecânico, visto que muitas reprovações são oriundas de uma compreensão algébrica não eficiente.

Dentro dessa unidade temática, as equações assumem papel de destaque uma vez que são fundamentais na resolução de muitos problemas, tanto na área de Matemática como na área das Ciências da Natureza.

Com relação as equações do 1º grau com uma variável, o Referencial Curricular Gaúcho - RCG - traz como habilidades

> **(EF07MA18RS-1)** Identificar e reconhecer a importância da utilização das expressões algébricas e o significado das incógnitas para representar situações reais. **(EF07MA18RS-2**) Descrever e solucionar problemas em linguagem algébrica, representados por equações de 1º grau, fazendo uso das propriedades de igualdade. (RIO GRANDE DO SUL, 2018, p. 141).

Entretanto, muitos docentes ainda trabalham o ensino de equações de modo mecânico, dando destaque ao uso de regras e técnicas que, na maioria das vezes, não são significativas para os alunos. Acreditamos que essa atitude pode estar baseada na forma em que os livros didáticos abordam esse assunto, uma vez que, segundo Barbosa e Lins (2013, p. 338)

> Os livros didáticos desempenham um papel essencial no sistema escolar, sendo assim, motivo de inúmeras pesquisas acadêmicas. No cotidiano da sala de aula, o livro didático tornou-se uma ferramenta indispensável no trabalho do professor, e na maioria das vezes, a única ferramenta pedagógica.

Outro fator relevante ao uso do livro didático por professores é que muitos deles seguem rigorosamente a maneira como os conteúdos são abordados pelos autores. Conforme Barbosa e Lima (2019, p. 1357), "existe certa conformidade entre as praxeologias a serem ensinadas, propostas pelos autores dos livros didáticos e as praxeologias efetivamente ensinadas pelos professores em sala de aula."

Com relação aos livros didáticos de Matemática, Barbosa e Lins (2013) defendem que esses não devem conter erros em definições e conceitos, bem como roteiros prontos a serem seguidos na resolução de problemas. Entretanto, ao nos referirmos ao ensino de equações, muitos autores de livros didáticos ainda abordam a resolução das mesmas sem fazer menção ao uso das propriedades operacionais envolvidas no processo. Evidenciamos tal situação na Figura 2.1, onde embora o autor mencione que são utilizadas operações inversas na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, o mesmo não apresenta conexões diretas com os elementos neutros e opostos de cada operação.

Figura 2.1 – Resolução de equações em livros didáticos

$-4x - 10 = -10$

Usando a operação inversa, o 10 que estava no 1º membro subtraindo passa para o 2º membro adicionando:

$\rightarrow -4x = -10 + 10$

$-4x = 0$

Usando a operação inversa, o -4 que estava no 1º membro multiplicando, passa para o 2º membro dividindo:

$x = 0 : (-4)$

$x = 0$

Se $x = 0$, o conjunto solução é $S = \{0\}$

Fonte: (BONJORNO, J.; BONJORNO, R.; OLIVARES, 2006, p.153)

A respeito da manipulação desses métodos sem significação, Melara e Souza (2008, p.27) defendem que

> [...] erros correspondentes aos aspectos conceituais na resolução de equações do 1º grau, fazem com que as técnicas de resolução, ao invés de facilitarem, acabam tornando-se um obstáculo na aprendizagem, pois os alunos utilizam as frases "muda de lado, muda de sinal" e "tá multiplicando passa dividindo" sem entender o que elas significam, enquanto método de resolução.

Acreditamos que a teoria de anéis vem ao encontro dos ideais aqui expostos. Ao abordarmos uma operação não usual, trabalhamos com a definição de elemento neutro e oposto, por exemplo, sem usarmos técnicas ou de maneira mecânica, pois cada caso deve ser trabalhado de forma individual. As próprias propriedades associativa e comutativa também são visualizadas de maneira diferenciada, não sendo assumidas como verdadeiras depois de um número convincente de exemplos numéricos. Passamos, aqui, a ter a oportunidade de explorar melhor tais conceitos e propriedades, chegando a generalização dos resultados por meio de demonstrações, as quais são inviáveis no contexto comum em que tais assuntos são abordados rotineiramente.

2.2 O ANEL DOS NÚMEROS RACIONAIS $\mathbb{Q}$

Nessa seção vamos explorar a definição de anel através de alguns exemplos. Na sequência, resolveremos equações envolvendo operações distintas das usuais, tendo como objetivo a familiarização do leitor com o tema desse trabalho.

Ressaltamos que nosso objetivo não é fazer uma abordagem minuciosa sobre a teoria de anéis, com todo o rigor comumente adotado num curso superior de graduação.

Nosso enfoque será direcionado a adaptação deste conteúdo ao Ensino Básico, destacando a forma como o mesmo será ministrado em aula, bem como o relato da percepção dos alunos mediante este estudo. Caso o leitor tenha interesse ou sentir necessidade de aprofundar seus estudos nesse assunto, indicamos Hefez (1993) ou Domingues e Iezzi (1982).

Um conjunto K munido de duas operações $(+)$ e $(\cdot)$, ditas, respectivamente, adição e multiplicação, é denominado anel comutativo com unidade quando as operações citadas satisfizerem as seguintes propriedades:

1. As operações são comutativas, isto é, para quaisquer $a, b \in K$,

$$a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a.$$

2. As operações são associativas, isto é, para quaisquer $a, b, c \in K$,

$$a + (b + c) = (a + b) + c \text{ e } a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

3. Ambas as operações possuem elementos neutros, isto é, existem $0 \in K$ e $1 \in K$ tais que, para todo $a \in K$,

$$a + 0 = 0 + a = a \text{ e } 1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

4. Qualquer elemento de K admite elemento oposto, isto é, para todo $a \in K$, existe $-a \in K$ tal que

$$a + (-a) = 0.$$

5. Valem as leis distributivas da multiplicação em relação à adição, isto é, para quaisquer $a, b, c \in K$,

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ e } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Se além dessas cinco propriedades, todo elemento não nulo $b \in K$ possui um inverso em K, isto é, para todo $b \neq 0$, existe $b^{-1} \in K$ tal que

$$b \cdot b^{-1} = 1,$$

dizemos que K é um corpo.

Por exemplo, o Conjunto dos Números Racionais $(\mathbb{Q})$, munido da adição e da multiplicação usuais, é um corpo.

Essa definição, bem como as propriedades que dela decorrem, podem ser encontradas em Hefez e Villela (2018).

A fim de simplificar a notação, omitiremos o sinal $\cdot$ da multiplicação, ou seja, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Q}$, representaremos $a \cdot b$ somente por ab.

A definição acima, da maneira como nos é geralmente apresentada nos cursos de graduação, causa estranheza e é alvo de muitas dificuldades por parte dos estudantes quanto a seu entendimento. Em parte, devido a sua completa abstração e total desconexão com os conhecimentos prévios dos alunos.

Nesse sentido, nossa proposta é trabalhar essas propriedades com calma, de tal modo que, com o passar do tempo, elas se tornem corriqueiras nas aulas de Matemática, na resolução de equações, por exemplo, sem maiores dificuldades ou estranheza.

Vamos explicitar melhor nossa proposta através de um exemplo, utilizando as operações de adição e multiplicação usuais. Ao resolver a equação

$$3x + 5 = 3$$

o aluno precisa adicionar o oposto do número 5 a cada membro, obtendo assim

$$(3x + 5) + (-5) = 3 + (-5).$$

Usando a propriedade associativa da adição,

$$3x + (5 + (-5)) = -2$$

e, portanto, $3x+0 = -2$. Como $0 \in \mathbb{Q}$ é elemento neutro aditivo, concluímos que $3x = -2$.

Finalmente, devemos multiplicar pelo inverso do número 3 em ambos os membros, obtendo

$$3^{-1}(3x) = 3^{-1}(-2).$$

Novamente, pela propriedade associativa da multiplicação,

$$\begin{aligned} (3^{-1} \cdot 3)x &= -\frac{2}{3} \\ 1 \cdot x &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

e, sendo $1 \in \mathbb{Q}$ elemento neutro multiplicativo, concluímos que $x = -\frac{2}{3}$.

Resolver a equação desta forma torna evidente a aplicação de várias propriedades presentes na definição de anel. Ressaltamos que empregar, aqui, a famosa regra do "passar para o outro lado"oculta essas mesmas propriedades que supracitamos.

Uma vez compreendido esse processo, todos esses passos podem ser simplificados, tornando a resolução menos rigorosa. No entanto, nesta etapa, o aluno já terá compreendido os passos que estão sendo suprimidos.

Normalmente, na Educação Básica, tais propriedades são abordadas como regras, o que se torna um entrave na hora de generalizá-las. Conforme Melara e Souza (2008), a maioria dos professores continua priorizando um ensino com ênfase na utilização de procedimentos e técnicas algébricas sem significados e, consequentemente, limitando a capacidade do aluno de compreender os conceitos fundamentais para o domínio do conhecimento.

Usualmente, os livros didáticos iniciam a abordagem desse conteúdo por meio de exemplos numéricos. Em seguida, havendo um convencimento da validade das propriedades por parte dos alunos, é feita a formalização dessas propriedades, conforme apresentamos na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Abordagem das propriedades operacionais em livros didáticos

• Algumas propriedades da adição

Ao estudar a adição de números naturais, vimos que essa operação é comutativa e associativa. Essas propriedades são válidas também para a adição de números inteiros.

Veja os exemplos.

a) Observe a adição: $(-20) + (+5) = (-15)$

Trocando a ordem das parcelas, temos: $(+5) + (-20) = (-15)$

Portanto: $(-20) + (+5) = (+5) + (-20)$

Em uma adição de dois números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

b) Vamos calcular: $(+3) + (-7) + (-2)$

Podemos associar as duas primeiras parcelas e, ao resultado, adicionar a terceira:

$[(+3) + (-7)] + (-2) =$

$= (-4) + (-2) =$

$= (-6)$

Ou, então, associamos as duas últimas parcelas e adicionamos a primeira a esse resultado:

$(+3) + [(-7) + (-2)] =$

$= (+3) + (-9) =$

$= (-6)$

Em uma adição de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar a soma.

Fonte: (BIANCHINI, 2011, p. 28)

A partir dessa abordagem, os alunos conseguem perceber que tais propriedades são, de certa forma, naturalmente empregadas na resolução de exercícios do cotidiano. No entanto, não se tem uma formalização de resultados e, conclusões são feitas a partir de poucos exemplos.

Ainda sobre a definição de anel, muitas vezes a maneira como os livros didáticos abordam o conceito de elemento neutro nos induzem a acreditar que os números 0 e 1 são os únicos elementos neutros aditivo e multiplicativo, respectivamente. Evidenciamos esse fato quando Trotta (1985, p. 61) define que "$[\ldots]$ o número 0 não influi no resultado da adição de racionais. Dizemos por esta razão que o 0 é o elemento neutro da adição de racionais". E também, Trotta (1985, p. 68) afirma que "$[\ldots]$ o número 1 não influi no resultado da multiplicação de racionais. Dizemos, por esta razão, que o 1 é o elemento neutro da multiplicação de racionais".

O conceito de elemento neutro é considerado tão simples do ponto de vista da maioria dos autores de livros didáticos atuais que sua definição nem se faz presente. E, quando isso ocorre, geralmente, apenas é mencionado que, no Conjunto dos Números Racionais, as propriedades vistas no Conjunto dos Números Inteiros seguem válidas. Tamanha foi nossa dificuldade em pesquisar por tais definições que acabamos por nos reportar a livros da década de 80.

É provável que isso ocorra devido ao fato de considerarmos como únicas operações possíveis a adição e a multiplicação usuais, uma vez que na Educação Básica, dificilmente trabalha-se com outras operações além dessas e, por consequência disto, não existe a possibilidade de o aluno se questionar sobre a existência de elementos neutros distintos.

Além disso, Colaço (2010, p. 7) afirma que:

> Já os livros didáticos dos tempos atuais têm mostrado ausência, por muitas vezes completas, de explicações de teor matemático para que o aluno esteja a par, e entenda matematicamente, o porquê de certas passagens matemáticas na resolução de problemas que envolvam propriedades das operações.

Ainda, este mesmo autor assegura que, atualmente, a principal ferramenta para uma aprendizagem eficaz é a contextualização, gerando uma falta de interesse pelas demonstrações por parte dos autores de livros didáticos. Porém, se utilizada de maneira inadequada, a contextualização gera o desperdício dos conteúdos, haja visto que proporciona uma carência na habilidade de resolver problemas.

Para ampliarmos a percepção da importância de se explorar os conceitos e as propriedades com os alunos da Educação Básica, podemos considerar operações distintas das usuais, ou seja, a adição e a multiplicação podem seguir outras leis de formação, diferentes das que estamos habituados a usar. Nessas condições, por exemplo, os elementos neutros da adição e da multiplicação podem não coincidirem com os números 0 e 1, respectivamente.

Com o propósito de exemplificar nossa proposta, resolveremos um exercício proposto por Zahn (2013). Para tal, consideremos o Conjunto dos Números Racionais $(\mathbb{Q})$ e definimos, para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, as operações de adição e multiplicação, respectivamente, por

$$x * y = x + y - 3$$

e

$$xTy = x + y - \tfrac{1}{3}xy.$$

Para provarmos que a terna $(\mathbb{Q}, *, T)$ é um corpo, quando os elementos oposto e inverso se referirem às operações de adição e multiplicação usuais, respectivamente, suprimiremos a menção a estas operações. Apenas faremos distinção quando as operações não forem as usuais. Deste modo, sejam $a, b, c \in \mathbb{Q}$ elementos quaisquer.

1. Ambas as operações são comutativas uma vez que a adição e a multiplicação usuais em $\mathbb{Q}$ são comutativas. De fato,

$$a * b = a + b - 3 = b + a - 3 = b * a$$

e

$$aTb = a + b - \tfrac{1}{3}ab = b + a - \tfrac{1}{3}ba = bTa.$$

2. Da mesma forma, vamos provar que ambas as operações são associativas, usando para isso que as operações de adição e multiplicação usuais são comutativas e associativas. Com efeito,

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a*(b+c-3) \\ &= a+(b+c-3)-3 \\ &= (a+b-3)+c-3 \\ &= (a*b)+c-3 \\ &= (a*b)*c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} aT(bTc) &= aT\left(b+c-\frac{1}{3}bc\right) \\ &= a+\left(b+c-\frac{1}{3}bc\right)-\frac{1}{3}a\left(b+c-\frac{1}{3}bc\right) \\ &= \left(a+b-\frac{1}{3}ab\right)+c-\frac{1}{3}c\left(a+b-\frac{1}{3}ab\right) \\ &= (aTb)+c-\frac{1}{3}c(aTb) \\ &= (aTb)Tc. \end{aligned}$$

3. Como as operações são distintas das usuais, devemos calcular os elementos neutros relativos a cada uma delas. Para isso, observamos que, por definição, $e \in \mathbb{Q}$ é elemento neutro da operação $*$ se, e somente se, $a*e=a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$.

Nesse sentido, consideremos $e \in \mathbb{Q}$ tal que $a*e=a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$. Ou seja, $a+e-3=a$ e, portanto, adicionando o oposto do número -3 e o oposto do número a a ambos os membros, obtemos $e=3 \in \mathbb{Q}$. Logo, existe $e=3 \in \mathbb{Q}$ elemento neutro relativo a operação $*$.

Agora, observamos que, por definição, $e' \in \mathbb{Q}$ é elemento neutro da operação T se, e somente se, $aTe'=a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$.

Desse modo, seja $e' \in \mathbb{Q}$ tal que $aTe'=a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$. Isto é, $a+e'-\frac{1}{3}ae'=a$, adicionando o oposto do número a a ambos os membros e utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição obtemos $e'\left(1-\frac{1}{3}a\right)=0$. Portanto, existe $e'=0 \in \mathbb{Q}$ elemento neutro relativo a operação T.

4. Vamos agora calcular o oposto de um elemento $a \in \mathbb{Q}$ qualquer. Para isso, seja $s \in \mathbb{Q}$ tal que $a*s=e$. Isto é, $a+s-3=3$ e, adicionando o oposto do número -3 e o oposto do número a em ambos os membros, obtemos $s=6-a \in \mathbb{Q}$.

5. No que segue, mostremos que valem as leis distributivas da operação T com relação à operação $*$. De fato, por definição,

$$aT(b*c) = aT(b+c-3) = a + (b+c-3) - \frac{1}{3}a(b+c-3).$$

Recordamos que em $\mathbb{Q}$ valem a distributividade da multiplicação em relação à adição e as propriedades de comutatividade e associatividade dessas operações. Logo,

$$aT(b*c) = \left(a+b-\frac{1}{3}ab\right) + \left(a+c-\frac{1}{3}ac\right) - 3 = (aTb) + (aTc) - 3 = (aTb)*(aTc).$$

Analogamente,

$$(a*b)Tc = (a+b-3)Tc = (a+b-3) + c - \frac{1}{3}(a+b-3)c.$$

Novamente, aplicando as propriedades do anel $\mathbb{Q}$, obtemos

$$(a*b)Tc = \left(a+c-\frac{1}{3}ac\right) + \left(b+c-\frac{1}{3}bc\right) - 3 = (aTc) + (bTc) - 3 = (aTc)*(bTc).$$

Logo, $(\mathbb{Q}, *, T)$ é um anel comutativo com unidade.

Agora, mostraremos que todo elemento $b \in \mathbb{Q}$, com $b \neq 3$, possui elemento inverso com relação à operação T. De fato, seja $r \in \mathbb{Q}$, tal que $bTr = 0$. Assim,

$$b + r - \frac{1}{3}br = 0.$$

Adicionando o oposto do número b em ambos os membros e, utilizando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, obtemos $r\left(1-\frac{b}{3}\right) = -b$. Logo, $r = -\frac{3b}{3-b} \in \mathbb{Q}$ é o elemento inverso de b com relação à operação T.

Portanto, a terna $(\mathbb{Q}, *, T)$ é um corpo.

Por meio desse exemplo, abordamos todas as propriedades das operações de adição e multiplicação no Conjunto dos Números Racionais, deixando evidente a importância de um entendimento efetivo dos conceitos de elementos neutro e oposto de cada operação, independente de sua lei de formação.

Ressaltamos que, demonstrar tais propriedades em conjuntos numéricos se torna muito difícil, principalmente para estudantes da Educação Básica. A demonstração da validade dessas propriedades, de forma geral, pode ser encontrada em Gonçalves (2017).

2.3 RESOLVENDO EQUAÇÕES EM $\mathbb{Q}$

Depois de definirmos e mostrarmos que o Conjunto dos Números Racionais, juntamente das operações $*$ e T definidas por

$$x * y = x + y - 3$$

e

$$xTy = x + y - \frac{1}{3}xy,$$

é um corpo, seguimos com a resolução de equações do 1º grau com uma variável envolvendo estas operações. Por se tratarem de equações que envolvem duas operações distintas, acreditamos que seu entendimento pode não ser totalmente eficaz no Ensino Fundamental e, por isso, no capítulo seguinte, restringiremos as equações a apenas uma operação distinta da usual.

A seguir, apresentamos algumas equações cuja resolução está fortemente baseada nos conceitos de elemento neutro e oposto de cada uma das operações envolvidas. Nosso objetivo é mostrar que sem a compreensão efetiva de ambos os conceitos não podemos resolver as atividades aqui propostas.

EXEMPLO 1. Resolva a equação $6Tx * 9 = 12$ em $\mathbb{Q}$.

Inicialmente, devemos calcular s, o elemento oposto de $9 \in \mathbb{Q}$ relativamente a operação $*$. Conforme destacamos na Seção 2.2,

$$s = 6 - 9 = -3 \in \mathbb{Q}.$$

Assim, da associatividade de $*$,

$$\begin{aligned} (6Tx * 9) * (-3) &= 12 * (-3) \\ 6Tx * 3 &= 12 - 3 - 3 \\ 6Tx &= 6, \end{aligned} \tag{2.1}$$

uma vez que $3 \in \mathbb{Q}$ é o elemento neutro da operação $*$. No que segue, vamos isolar a variável x.

Conforme vimos na Seção 2.2, o inverso do número 6 em relação à operação T é

$$r = -\frac{3 \cdot 6}{3 - 6} = 6 \in \mathbb{Q}.$$

Deste modo, operamos $6 \in \mathbb{Q}$ em ambos os membros da igualdade (2.1), de tal forma que

$$6T(6Tx) = 6T6,$$

e, então, pela propriedade associativa,

$$\begin{aligned} (6T6)Tx &= 0 \\ 0Tx &= 0 \\ x &= 0, \end{aligned}$$

pois $0 \in \mathbb{Q}$ é o elemento neutro de T. Portanto, o conjunto solução é $S = \{0\}$.

EXEMPLO 2. Resolva a equação $(x * 7)T9 = 15$ em $\mathbb{Q}$.

Primeiramente, vamos calcular r o elemento inverso de $9 \in \mathbb{Q}$ relativo a operação T. Então, conforme visto na Seção 2.2,

$$r = -\frac{3 \cdot 9}{3 - 9} = \frac{9}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Deste modo, pela associatividade de T,

$$\begin{aligned} ((x * 7)T9)T\frac{9}{2} &= 15T\frac{9}{2} \\ (x * 7)T\left(9T\frac{9}{2}\right) &= 15T\frac{9}{2} \\ (x * 7)T0 &= 15 + \frac{9}{2} - \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot \frac{9}{2} \\ x * 7 &= -3, \end{aligned} \tag{2.2}$$

já que 0 é o elemento neutro relativo a operação T.

Agora, isolaremos a incógnita x. Para tal, seja $s \in \mathbb{Q}$ elemento oposto de 7 relativamente a operação $*$. De acordo com a Seção 2.2,

$$s = 6 - 7 = -1 \in \mathbb{Q}.$$

Assim, operamos -1 nos dois membros da igualdade (2.2), de modo que

$$(x * 7) * (-1) = (-3) * (-1),$$

e então, pela associatividade de $*$,

$$\begin{aligned} x * (7 * (-1)) &= -3 - 1 - 3 \\ x * 3 &= -7 \\ x &= -7, \end{aligned}$$

pois $3 \in \mathbb{Q}$ é elemento neutro da operação $*$. Portanto, o conjunto solução é $S = \{-7\}$.

EXEMPLO 3. Resolva a equação $(xT9) * (xT21) = 4$ em $\mathbb{Q}$.

De início, devemos calcular s o elemento oposto de $(xT21)$ em relação a operação $*$. De acordo com o que vimos na Seção 2.2,

$$s = 6 - (xT21) \in \mathbb{Q}.$$

Assim, da propriedade associativa,

$$\begin{aligned} [(xT9) * (xT21)] * [6 - (xT21)] &= 4 * [6 - (xT21)] \\ (xT9) * 3 &= 4 + 6 - (xT21) - 3 \\ xT9 &= 7 - (xT21) \\ xT9 &= 7 - \left(x + 21 - \frac{1}{3}21x\right) \\ xT9 &= 6x - 14. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Na sequência, devemos isolar a variável x no primeiro membro. Conforme calculamos no Exemplo 2, $r = \frac{9}{2}$ é o elemento oposto de 9 relativo a operação T.

Deste modo, operamos $\frac{9}{2} \in \mathbb{Q}$ em ambos os membros da igualdade (2.3) de tal forma que

$$(xT9)T\frac{9}{2} = (6x - 14)T\frac{9}{2}$$

e, então, pela associatividade de T,

$$\begin{aligned} xT\left(9T\frac{9}{2}\right) &= (6x - 14) + \frac{9}{2} - \frac{1}{3}(6x - 14)\frac{9}{2} \\ xT0 &= -3x + \frac{23}{2} \\ x &= -3x + \frac{23}{2}, \end{aligned}$$

pois 0 é o elemento neutro da operação T.

Por fim, adicionando o número $3x$ nos dois membros, obtemos $4x = \frac{23}{2}$ e, então, multiplicando por $\frac{1}{4}$, concluímos que $x = \frac{23}{8}$. Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{\frac{23}{8}\right\}$.

Exemplo 4. Resolva a equação $(m + 4) * (m + 2) = 3$ em $\mathbb{Q}$.

Primeiramente, devemos calcular $s \in \mathbb{Q}$ elemento oposto de $m + 2$ com relação a operação $*$. Conforme vimos na Seção 2.2,

$$s = 6 - (m + 2) = 4 - m \in \mathbb{Q}.$$

Desse modo, operamos $4 - m$ em ambos os membros da equação inicial e, pela associatividade de $*$, obtemos

$$\begin{aligned}[(m+4)*(m+2)]*(4-m) &= 3*(4-m)\\ (m+4)*[(m+2)*(4-m)] &= 4-m\\ (m+4)*3 &= 4-m\\ m+4 &= 4-m.\end{aligned}$$

Por fim, adicionamos o oposto do número 4 e o oposto do número $-m$ em ambos os membros da igualdade acima e então, $2m = 0$. Logo, $m = 0$ e, portanto, o conjunto solução da equação dada é $S = \{0\}$.

Notemos que, se tomamos

$$(-m+4)*(m+2) = 3$$

então, seguindo o mesmo raciocínio, obtemos

$$\begin{aligned}-m-4 &= 4-m\\ -4 &= 4,\end{aligned}$$

o que é um absurdo. Ou seja, a alteração proposta na equação inicial nos retornou outra equação sem solução no conjunto universo.

Esse exemplo nos mostra que, embora a operação $*$ envolva somente as operações de adição e multiplicação usuais, não é toda equação que possui solução.

Evidenciamos que por se tratar de equações que envolvem operações distintas das usuais, fica inviável resolvê-las através de macetes e técnicas que são comumente trabalhadas no Ensino Fundamental. Nossa proposta, nesse sentido, está de acordo com o que afirmam Melara e Souza (2008, p. 14)

> Sabemos que o domínio de regras e técnicas é importante para o programa de álgebra, contudo dever-se-ia priorizar a compreensão dos conceitos algébricos e a capacidade de usar esse conhecimento nas mais diversas situações; dever-se-ia conceber habilidade algébrica como algo que vai além da manipulação de símbolos e técnicas.

Em virtude disso, quando o aluno aprende que para resolver uma equação basta deixar a incógnita isolada em um membro, utilizando para isso a regra "passa para o outro lado com o sinal contrário", estamos restringindo a capacidade do aluno a simplesmente memorizar e aplicar uma regra, a qual muitas vezes é sem sentido para ele. Além disso, tal regra não é válida quando trabalhamos em situações como as ilustradas nos exemplos anteriores, uma vez que, em se tratando de operações não usuais, não tem sentido a expressão "sinal contrário".

Ressaltamos que todos os exemplos anteriores podem também serem resolvidos utilizando as definições das operações $*$ e T. Neste caso, a resolução dessas equações recai na resolução de equações envolvendo as operações usuais em $\mathbb{Q}$. Entretanto, este não é o objetivo desse trabalho.

3 ATIVIDADES PROPOSTAS

Nesta seção, apresentamos a descrição da turma e das atividades realizadas com os alunos, as quais foram desenvolvidas em três etapas: a primeira etapa corresponde ao contato inicial dos alunos com operações distintas das usuais; a segunda etapa diz respeito à discussão de exemplos de equações que envolvem operações distintas; e por fim, a terceira etapa refere-se à resolução de exercícios por parte dos alunos.

3.1 DESCRIÇÃO DA TURMA

As atividades propostas nesse trabalho foram realizadas em uma turma de Sétimo Ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental José Rubin Filho, localizada no município de Pinhal Grande, Rio Grande do Sul. Por ser a única escola municipal da cidade que possui Ensino Fundamental completo, atende cerca de duzentos alunos oriundos de todas as localidades do município, principalmente da Zona Rural.

A aplicação ocorreu no terceiro trimestre do ano letivo de 2019, em uma das turmas da autora deste trabalho. Essa turma era composta por doze alunos regulares, com faixa etária de doze a quatorze anos. De modo geral, a turma era bastante agitada mas possuía bom desempenho na disciplina de Matemática. Entretanto, dois desses alunos encontravam-se em situação de vulnerabilidade social e, por isso, necessitavam de atendimento psicopedagógico extra-classe. Para a realização das atividades propostas, o atendimento foi fundamental a esses alunos, uma vez que complementou o estudo sobre a resolução de equações, trabalhado em sala de aula.

A realização das atividades ocorreu no turno da manhã e teve duração de nove períodos, sendo cada um deles de cinquenta minutos, distribuídos em quatro dias. No início de cada aula, os alunos tinham a oportunidade de formar duplas ou trios, conforme desejassem, para discutirem as atividades propostas.

3.2 PRIMEIRA PARTE: INTRODUÇÃO ÀS OPERAÇÕES NÃO USUAIS

A primeira parte das atividades desenvolvidas com os alunos tem como objetivo proporcionar o seu primeiro contato com operações distintas das usuais, ou seja, permitir que os alunos desenvolvam cálculos envolvendo operações diferentes das que estão acostumados a trabalhar.

Na sequência, a partir destas operações não usuais estabelecidas, buscamos ilustrar por meio de exemplos numéricos algumas propriedades tais como comutatividade e existência de elemento neutro e oposto. Com isso, pretendemos mostrar ao aluno que algumas destas propriedades podem ou não serem mantidas, dependendo da operação e/ou do conjunto a ser considerado.

Para finalizar essa etapa, abordamos a generalização da validade de algumas propriedades com relação a determinada operação. Neste momento, procuramos dar ênfase na escrita e rigor matemático de tais generalizações, atentando a sua adequação à faixa etária, como forma de suprir a grande deficiência que percebemos nesse sentido ao pesquisar brevemente alguns livros da Educação Básica na área. Segundo Colaço (2010, p. 69)

> Nos exemplos relacionados com os tempos atuais, ratifica meu entendimento no tocante a falta de formalidade na resolução de exercícios. Os autores tentam levar o aluno a seguir passos sem que ele saiba que propriedades estão sendo usadas, ou seja, não são exploradas, nem explicitadas, as propriedades das operações provocando apenas memorização do que se deve fazer.

Ressaltamos que nessa seção, as propriedades das operações de adição e multiplicação usuais serão utilizadas sem maiores comentários, uma vez que, conforme dito anteriormente, nosso objetivo é estudar essas propriedades relativas às operações distintas das usuais.

A seguir apresentamos as questões trabalhadas com os alunos, bem como as respostas desenvolvidas pela autora. Primeiramente, os alunos debatiam as questões e em seguida, realizávamos uma discussão na lousa.

A Questão 1 tem por objetivo apenas a manipulação algébrica das operações, visando a familiarização com as mesmas.

QUESTÃO 1. (OBMEP – 2ª fase – 2018 – Nível 3 - ADAPTADA) Sérgio inventou as operações matemáticas $\boxtimes$ e $@$ entre os números inteiros, como abaixo:

$$a \boxtimes b = a^2 + b^2$$
$$a@b = (a+b)^2.$$

Por exemplo, $1 \boxtimes 4 = 1^2 + 4^2 = 17$ e $1@(-6) = (1 + (-6))^2 = 25$. Utilizando as operações criadas por Sérgio, responda as questões abaixo:

a) Qual o valor de:

• $(-1) \boxtimes 1$?

Resposta:

$$(-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2.$$

• $1 \boxtimes (-5)$?

Resposta:

$$1^2 + (-5)^2 = 1 + 25 = 26.$$

- $1 \boxtimes 5$?

Resposta:

$$1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26.$$

- $2 \boxtimes 3$?

Resposta:

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

- $6 \boxtimes 0$?

Resposta:

$$6^2 + 0^2 = 36 + 0 = 36.$$

- $2@0$?

Resposta:

$$(2 + 0)^2 = 2^2 = 4.$$

- $3@2$?

Resposta:

$$(3 + 2)^2 = 5^2 = 25.$$

- $2@3$?

Resposta:

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25.$$

- $2@(-3)$?

Resposta:

$$(2 + (-3))^2 = (-1)^2 = 1.$$

- $(-1)@1$?

Resposta:

$$((-1) + 1)^2 = 0^2 = 0.$$

b) Qual é o valor de $(2@3) - (2 \boxtimes 3)$?

Resposta:

$$(2 + 3)^2 - (2^2 + 3^2) = 5^2 - 2^2 - 3^2 = 12.$$

Segundo a Base Nacional Comum Curricular - BNCC, "A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental."(BRASIL, 2017, p. 265). Em virtude disso, na Questão 2 proposta a seguir, almejamos estudar a propriedade comutativa de ambas as operações definidas.

QUESTÃO 2. Sejam $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Definimos as operações:

$$a \blacktriangle b = ab$$

$$a \blacklozenge b = b^a.$$

Calcule:

a) $1 \blacktriangle 3$

Resposta:

$$1 \cdot 3 = 3.$$

b) $3 \blacktriangle 1$

Resposta:

$$3 \cdot 1 = 3.$$

c) $(-2) \blacktriangle (-3)$

Resposta:

$$(-2) \cdot (-3) = 6.$$

d) $(-3) \blacktriangle (-2)$

Resposta:

$$(-3) \cdot (-2) = 6.$$

e) $3 \blacktriangle 2$

Resposta:

$$3 \cdot 2 = 6.$$

f) $2 \blacktriangle 3$

Resposta:

$$2 \cdot 3 = 6.$$

g) $3 \blacklozenge 5$

Resposta:

$$5^3 = 125.$$

h) $2 \blacklozenge (-1)$

Resposta:

$$(-1)^2 = 1.$$

i) $6 \blacklozenge 1$

Resposta:

$$1^6 = 1.$$

j) $1 \blacklozenge 6$

Resposta:

$$6^1 = 6.$$

Nos itens (i) e (j), realizamos a operação $\blacklozenge$ com os mesmos números, entretanto os resultados obtidos são distintos. O que isso nos permite concluir?

Resposta: A operação ♦ não é comutativa, pois quando mudamos a ordem das parcelas obtemos resultados diferentes.

E quanto à operação ▲: é comutativa? Justifique!

Resposta: Nos pares de itens (a) e (b), (c) e (d) e (e) e (f) , realizamos a operação ▲ com os mesmos números e obtemos os mesmos resultados. Com isso, temos que, ao mudar a ordem das parcelas, o resultado não se altera. Portanto, a operação ▲ é comutativa.

Ressaltamos que, matematicamente, não podemos concluir que esta operação é comutativa a partir de três situações exemplificadas numericamente. No entanto, esse tipo de conclusão está de acordo com a prática adotada em livros didáticos e, de certa forma, adequada ao nível de rigor matemático inerente a introdução do assunto a uma turma de Ensino Fundamental.

Para a próxima questão, abordamos o elemento neutro da operação $*$, bem como uma análise mais abrangente das propriedades que lhes são inerentes. Nesta etapa, procuramos descrever cada passo com mais detalhes, generalizando alguns resultados.

QUESTÃO 3. Em $\mathbb{Q}$, definimos a operação:

$$x * y = x + y - 3.$$

a) Calcule:

• $2 * 3$

Resposta:

$$2 + 3 - 3 = 2.$$

• $5 * 3$

Resposta:

$$5 + 3 - 3 = 5.$$

• $10 * 3$

Resposta:

$$10 + 3 - 3 = 10.$$

• $\frac{8}{5} * 3$

Resposta:

$$\frac{8}{5} + 3 - 3 = \frac{8}{5}.$$

b) O que ocorre quando uma das parcelas é 3?

Resposta: Quando operamos um número com 3, obtemos como resultado o próprio número.

c) Podemos dizer que 3 é o elemento neutro da operação $*$?

Resposta: Sim, pois para qualquer $a \in \mathbb{Q}$, temos

$$a * 3 = a + 3 - 3 = a + 0 = a.$$

d) Calcule:

• $2 * 4$

Resposta:

$$2 + 4 - 3 = 3.$$

• $8 * (-2)$

Resposta:

$$8 + (-2) - 3 = 3.$$

• $3 * 3$

Resposta:

$$3 + 3 - 3 = 3.$$

• $5 * 1$

Resposta:

$$5 + 1 - 3 = 3.$$

e) Em cada uma das operações realizadas no item (d), obtivemos como resultado o elemento neutro relativo à operação $*$. O que isso significa?

Resposta: Em cada item, um dos números é o oposto do outro.

f) Dado um número $a \in \mathbb{Q}$, qual é o elemento oposto de a?

Resposta: Queremos encontrar $a' \in \mathbb{Q}$, tal que $a * a' = 3$, ou seja,

$$\begin{aligned} a + a' - 3 &= 3 \\ a + a' - 3 + 3 &= 3 + 3 \\ a + a' &= 6 \\ a + a' + (-a) &= 6 + (-a) \\ a' &= 6 - a. \end{aligned}$$

Logo, o elemento oposto de a é $a' = 6 - a \in \mathbb{Q}$.

g) Calcule:

• $4 * 5$

Resposta:

$$4 + 5 - 3 = 6.$$

• $5 * 4$

Resposta:

$$5 + 4 - 3 = 6.$$

• $(-2) * 6$

Resposta:

$$(-2) + 6 - 3 = 1.$$

• $6 * (-2)$

Resposta:

$$6 + (-2) - 3 = 1.$$

h) Analisando o item anterior, vimos que podemos comutar as parcelas da operação $*$ e o resultado permanece igual. Será que isto é possível para quaisquer números?

Resposta: Sim. Mostraremos, para o caso geral, que a operação $*$ é comutativa, isto é $a * b = b * a$. Para isso, consideremos $a, b \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} a * b &= a + b - 3 \\ &= b + a - 3 \\ &= b * a. \end{aligned}$$

i) Calcule:

• $(1 * 6) * 5$

Resposta:

$$(1 + 6 - 3) * 5 = 4 * 5 = 4 + 5 - 3 = 6.$$

• $1 * (6 * 5)$

Resposta:

$$1 * (6 + 5 - 3) = 1 * 8 = 1 + 8 - 3 = 6.$$

• $(9 * 4) * 2$

Resposta:

$$(9 + 4 - 3) * 2 = 10 * 2 = 10 + 2 - 3 = 9.$$

• $9 * (4 * 2)$

Resposta:

$$9 * (4 + 2 - 3) = 9 * 3 = 9,$$

pois 3 é o elemento neutro da operação $*$.

j) Pelo item anterior, vimos que podemos associar de maneiras distintas as parcelas da operação $*$, obtendo o mesmo resultado. Isto ocorre para quaisquer números racionais?

Resposta: Sim. Mostraremos, para o caso geral, que a operação $*$ é associativa, *isto é,* $(a * b) * c = a * (b * c)$*. Para isso, consideremos* $a, b, c \in \mathbb{Q}$*. Temos que*

$$\begin{aligned} (a * b) * c &= (a + b - 3) * c \\ &= (a + b - 3) + c - 3 \\ &= a + b + c - 6. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= a * (b + c - 3) \\ &= a + (b + c - 3) - 3 \\ &= a + b + c - 6. \end{aligned}$$

Portanto, $(a * b) * c = a * (b * c)$*.*

Para encerrar essa seção, sugerimos realizar com os alunos a distinção entre os processos de ilustrar e de demonstrar determinada propriedade. O processo de ilustração baseia-se em um convencimento da validade da mesma, isto é, o aluno verifica se tal propriedade é satisfeita por um número finito de exemplos e se convence que ela é válida para todos os outros. Por outro lado, o processo de demonstração consiste na generalização da validade dessa propriedade, isto é, significa mostrar ao aluno que ela é válida, independente dos elementos envolvidos.

As questões 2 e 3 abordadas anteriormente exemplificam, respectivamente, os processos de ilustração e demonstração de algumas propriedades.

3.3 SEGUNDA PARTE: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

Na sequência, passamos a resolução de equações que envolvem tais operações. Nesta etapa, apresentamos uma espécie de roteiro elaborado a partir das técnicas comumente apresentadas aos alunos quanto à resolução de uma equação do 1º grau com uma incógnita, o qual destacamos a seguir.

Passos para a resolução de equações que envolvem operações distintas das usuais:

1º) Determinar o elemento neutro da operação, isto é, dado $a \in \mathbb{Q}$, calcularemos qual é o número $e \in \mathbb{Q}$, que operado com a resulte no próprio a.
2º) Determinar o elemento oposto da operação, isto é, dado $a \in \mathbb{Q}$, calcularemos qual é o número $a' \in \mathbb{Q}$ que operado com a resulte no elemento neutro.
3º) Resolver a equação dada, usando os elementos dos passos anteriores.

No que segue, estudaremos a resolução de alguns exemplos utilizando o roteiro acima descrito.

EXEMPLO 1. Determine o conjunto solução da equação $x * 12 = 14$.

De acordo com o roteiro acima, iniciamos determinando o elemento neutro $e \in \mathbb{Q}$ da operação $*$. Por definição $a*e = a$, ou seja, $a+e-3 = a$, para todo $a \in \mathbb{Q}$. Adicionando o oposto do número -3 e do número a em ambos os membros, obtemos $e = 3$, o elemento neutro relativo a operação $*$.

Na sequência, determinamos o elemento oposto de $a \in \mathbb{Q}$ com relação à operação $*$. Com efeito, seja $a' \in \mathbb{Q}$ o elemento oposto de a. Por definição, $a * a' = e$, ou seja, $a + a' - 3 = 3$. Adicionando o oposto do número -3 e do número a a ambos os membros, concluímos que $a' = 6 - a$.

Prosseguimos com a resolução da equação. Para isso, observamos que o elemento oposto de 12 em relação a operação $*$ é $6 - 12 = -6$. Logo,

$$(x * 12) * (-6) = 14 * (-6).$$

Pela associatividade da operação $*$,

$$x * (12 * (-6)) = x * 3 = 14 + (-6) - 3 = 5.$$

Como 3 é o elemento neutro da operação $*$, temos $x = 5$. Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \{5\}$.

Por fim, achamos oportuno verificar se o resultado obtido está correto, tendo em vista a possível dificuldade que os alunos poderiam apresentar relacionadas ao contexto novo das operações introduzidas. Para isso, devemos substituir na equação inicial a incógnita pelo valor encontrado e obter como resultado o número 14. Ou seja,

$$5 * 12 = 5 + 12 - 3 = 14.$$

Destacamos que já realizamos o cálculo dos elementos neutro e oposto na Seção 3.2, mas fica como sugestão refazer os cálculos em função da dificuldade que os alunos podem apresentar. Além disso, será muito importante revisá-los caso as atividades ocorram em dias distintos de aplicação, por exemplo.

EXEMPLO 2. Determine o conjunto solução da equação $2x * 12 = 7 * x$.

Como vimos anteriormente, o elemento oposto do número 12 em relação a operação $*$ é $6 - 12 = -6$. Desse modo, quando operamos com o número -6 em ambos os membros da equação em questão obtemos

$$(2x * 12) * (-6) = (7 * x) * (-6).$$

Devido as propriedades comutativa e associativa da operação $*$, segue que

$$2x * (12 * (-6)) = (7 * (-6)) * x,$$

ou seja, $2x * 3 = (-2) * x$. Logo, $2x = (-2) * x$

Agora, o elemento oposto do número x relativo a operação $*$ é $6 - x$. Então, operando com o número $6 - x$ em ambos os lados da equação anterior e pelas propriedades da operação $*$, temos

$$2x * (6 - x) = (-2) * (x * (6 - x)).$$

Ou seja, $x + 3 = -2$. Por fim, adicionando o oposto do número 3 nos dois membros dessa equação, concluímos que $x = -5$. Portanto, o conjunto solução dessa equação é $S = \{-5\}$.

Novamente, vamos verificar se a solução encontrada está correta. Para isso, devemos substituir a incógnita pelo valor encontrado em cada membro da equação inicial e obter o mesmo resultado em ambas as substituições. Ou seja,

$$2 \cdot (-5) * 12 = (-10) * 12 = -10 + 12 - 3 = -1.$$

E, por outro lado,

$$7 * (-5) = 7 + (-5) - 3 = -1.$$

Após realizar o estudo e compreender as propriedades relacionadas a operação $*$, passaremos a resolver as equações sem precisar mencioná-las o tempo todo.

3.4 TERCEIRA PARTE: EXERCÍCIOS RESOLVIDOS PELOS ALUNOS

Nesta terceira e última etapa, os alunos, reunidos em duplas ou trios, tiveram a oportunidade de resolver equações, baseadas nas que foram abordadas na etapa anterior. As mesmas foram selecionadas de maneira que o grau de dificuldade aumentasse gradativamente. Abaixo, destacamos o exercício proposto aos alunos.

EXERCÍCIO: Considerando a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações a seguir, no conjunto universo $\mathbb{Q}$.

a) $5 * m = 0$

Resposta: Conforme o roteiro que apresentamos na Seção 3.3, temos que $6-5=1$ *é o elemento oposto de* 5 *relativo a operação* $*$*. Assim, pela associatividade de* $*$*,*

$$\begin{aligned} 1 * (5 * m) &= 1 * 0 \\ (1 * 5) * m &= 1 + 0 - 3 \\ 3 * m &= -2 \\ m &= -2, \end{aligned}$$

pois 3 *é o elemento neutro da operação* $*$*. Portanto, o conjunto solução é* $S = \{-2\}$*.*

b) $x * 23 = 25$

Resposta: Baseado no que vimos na Seção 3.3, o elemento oposto de 23 *em relação a operação* $*$ *é* $6 - 23 = -17 \in \mathbb{Q}$*. Deste modo, pela propriedade associativa de* $*$*,*

$$\begin{aligned} (x * 23) * (-17) &= 25 * (-17) \\ x * (23 * (-17)) &= 25 + (-17) - 3 \\ x * 3 &= 5 \\ x &= 5, \end{aligned}$$

uma vez que 3 *é o elemento neutro da operação* $*$*. Portanto, o conjunto solução é* $S = \{5\}$*.*

c) $(x - 7) * 5 = 15$

Resposta: De acordo com a letra a), o elemento oposto de 5 *é* $6 - 5 = 1 \in \mathbb{Q}$*. Assim, pela propriedade associativa de* $*$*,*

$$\begin{aligned} [(x-7) * 5] * 1 &= 15 * 1 \\ (x-7) * (5 * 1) &= 15 + 1 - 3 \\ (x-7) * 3 &= 13 \\ x - 7 &= 13, \end{aligned}$$

pois 3 *é o elemento neutro da operação* $*$*. Então, adicionando o oposto do número* -7 *em ambos os membros, concluímos que* $x = 20$*. Portanto,* $S = \{20\}$*.*

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$

Resposta: Conforme o que vimos na Seção 3.3, o elemento oposto do número $m+2$ *relativo a operação* $*$ *é* $6-(m+2)=4-m \in \mathbb{Q}$*. Deste modo, pela associatividade de* $*$*,*

$$\begin{aligned}[(m+4)*(m+2)]*(4-m) &= 3*(4-m)\\ (m+4)*[(m+2)*(4-m)] &= 4-m\\ (m+4)*3 &= 4-m\\ m+4 &= 4-m,\end{aligned}$$

pois 3 *é o elemento neutro da operação* $*$*. Assim, adicionando os opostos dos números* $-m$ *e* 4 *em ambos os membros obtemos* $2m=0$ *e, então, concluímos que* $m=0$*. Portanto, o conjunto solução é* $S=\{0\}$*.*

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

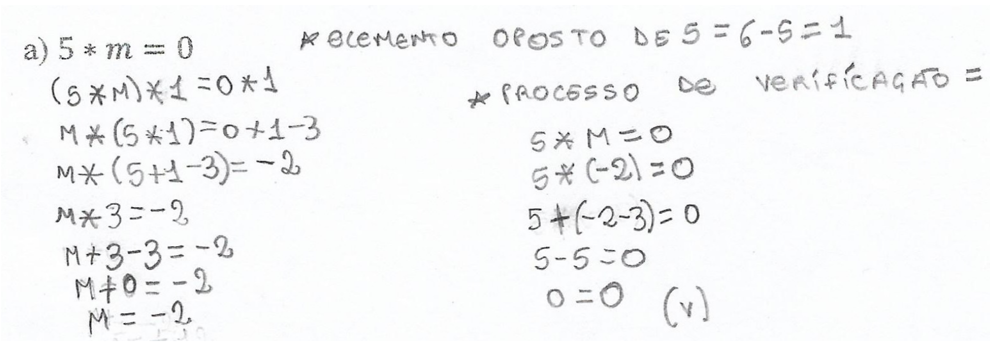
Ao longo desta seção, exibimos uma análise das respostas dadas pelos alunos na resolução de cada uma das equações propostas na Seção 3.4 do capítulo anterior. Além disso, apresentamos algumas opiniões dadas pelos mesmos à respeito da atividade desenvolvida.

Para a resolução das equações, os alunos podiam consultar o material contendo os exemplos trabalhados em aulas anteriores, além de estarem organizados em grupos de duas ou três pessoas.

1. Quanto à resolução da equação $5 * m = 0$.

Na Figura 4.1, disponibilizamos a resolução dada por um aluno. É possível notar que, primeiramente, o aluno encontrou o elemento oposto do número 5. Em seguida, ele fez uso das propriedades comutativa e associativa da operação $*$. Conforme destacamos previamente, ambas propriedades foram demonstradas em aulas anteriores.

Figura 4.1 – Resposta dada para a equação 1



Fonte: Dados da pesquisa

Ainda com relação a Figura 4.1, na coluna da direita o aluno realizou o processo de verificação a fim de ter certeza que o resultado encontrado estava correto. Nessa resolução, o mesmo não apresentou o conjunto solução da equação resolvida.

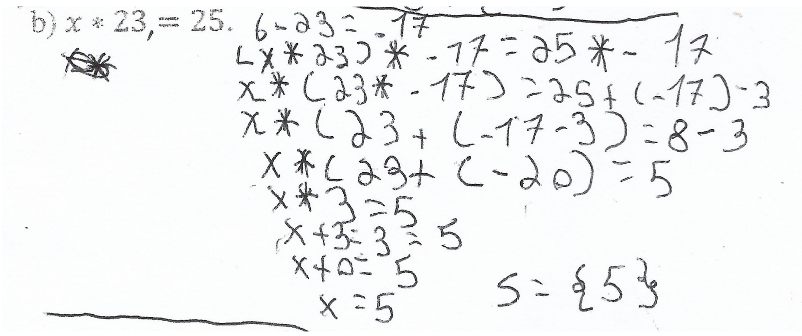
Com essa equação, os alunos puderam perceber que, diferente da adição e da multiplicação usuais, operando dois números que não sejam opostos e ambos sejam não nulos, podemos obter como resultado o número zero.

Os alunos não apresentaram dificuldades na resolução desta questão, haja visto que todos os grupos resolveram corretamente e sem a nossa ajuda, somente discutindo com os demais colegas do grupo.

2. Quanto à resolução da equação $x * 23 = 25$.

Apresentamos na Figura 4.2 uma resposta dada por um aluno. Similar à resolução anterior, o aluno calculou o elemento oposto do número 23 e utilizou as propriedades de comutatividade e associatividade de $*$. Nessa resolução, não foi apresentado o processo de verificação.

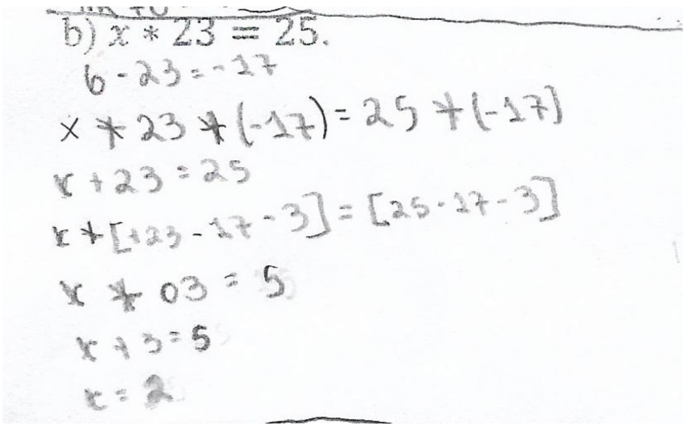
Figura 4.2 – Resposta dada para a equação 2



Fonte: Dados da pesquisa

No total, três alunos resolveram essa questão de maneira equivocada, sendo que o erro de dois desses alunos encontra-se principalmente nos cálculos das operações usuais envolvendo números inteiros e não na manipulação da operação $*$. O erro do terceiro aluno encontra-se no engano da utilização dos símbolos $*$ e $+$, conforme podemos perceber na Figura 4.3, na passagem da quinta para a sexta linha da resolução.

Figura 4.3 – Resposta com erro no uso dos símbolos



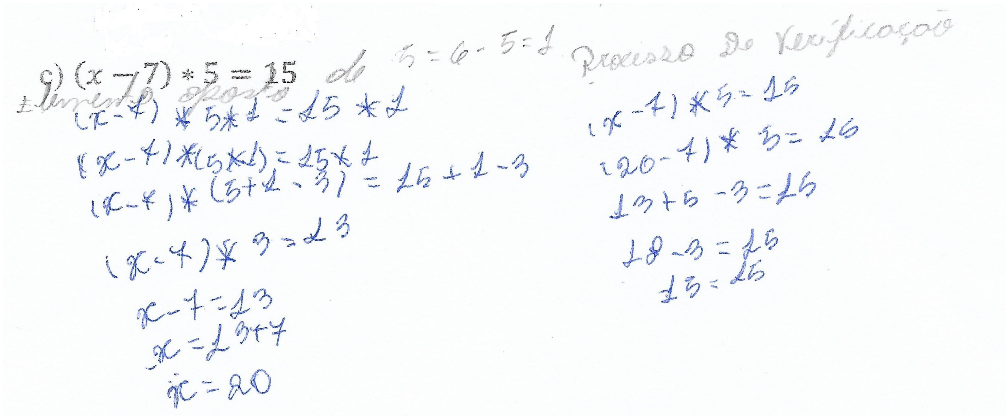
Fonte: Dados da pesquisa

Nessa resolução, evidenciamos que o erro cometido pelo aluno poderia ter sido evitado se ele tivesse clareza do conceito de elemento neutro, uma vez que $x * 3 = 5$ implica diretamente que $x = 5$, pois 3 é o elemento neutro da operação $*$.

3. Quanto à resolução da equação $(x - 7) * 5 = 15$.

Na Figura 4.4 destacamos a resolução apresentada por um aluno. É possível perceber que o esquema de resolução é similar ao das questões anteriores. Entretanto, nessa resolução, o aluno não escreveu o conjunto solução.

Figura 4.4 – Resposta dada para a equação 3



Fonte: Dados da pesquisa

Nessa equação, alguns alunos tiveram dificuldade em interpretar o elemento $x - 7$ como um número só. Para solucionar este problema, solicitamos que os alunos comparassem essa equação com a anterior. Ao perceber a diferença entre as equações, os alunos resolveram a Questão 3 associando a $x - 7$ o papel desenvolvido por x na Questão 2.

Em alguns grupos, foi necessário utilizar uma notação diferente para o elemento $x - 7$, isto é, trocar esse elemento por uma única letra, exceto a letra x. Com isso, a equação em questão estaria no mesmo padrão da equação anterior.

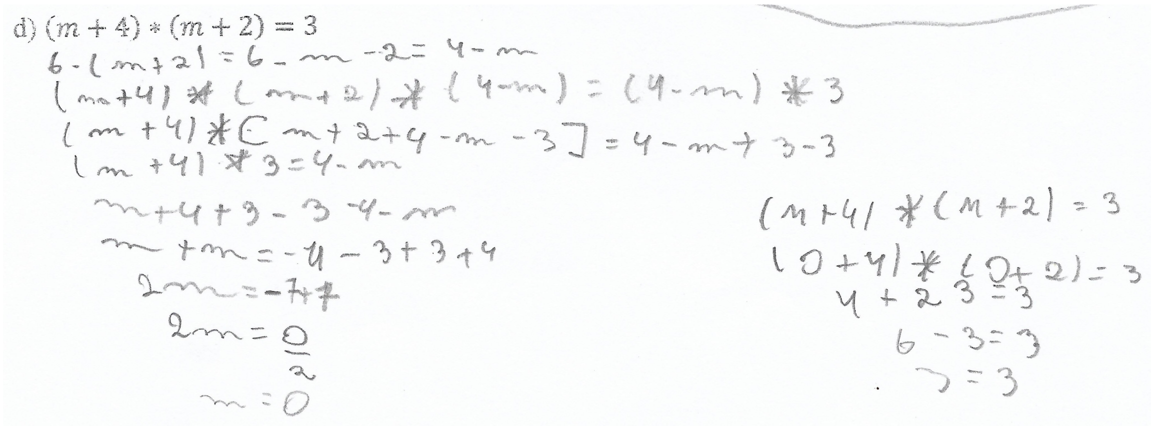
Como alguns grupos estavam mais avançados na resolução das atividades do que outros, auxiliamos cada um deles de modo individual, conforme as dúvidas iam surgindo.

Apenas um aluno resolveu essa equação de maneira errada e o equívoco estava relacionado com cálculos numéricos e também com a utilização dos símbolos $*$ e $+$.

4. Quanto à resolução da equação $(m + 4) * (m + 2) = 3$.

Na sequência, mostramos a resolução feita por um aluno. Embora não esteja escrito, a primeira linha da resolução diz respeito à determinação do elemento oposto do número $m + 2$.

Figura 4.5 – Resposta dada para a equação 4



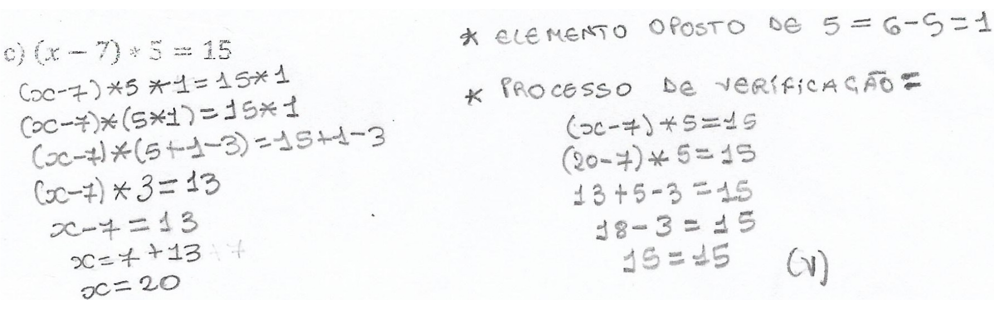
Fonte: Dados da pesquisa

Esta foi a questão em que os alunos mais apresentaram dificuldades. Alguns deles tiveram dificuldade de relacionar essa equação com as demais, pois não conseguiam perceber que os elementos $m + 4$ e $m + 2$ representavam, cada um deles, um único número. Outra dificuldade consistiu em determinar de qual dos dois números, $m + 4$ e $m + 2$, deveria ser calculado o elemento oposto uma vez que em qualquer das escolhas, tal elemento teria a variável junto.

Trabalhadas algumas dicas à respeito do cálculo do elemento oposto, apenas um aluno não conseguiu determinar de maneira correta o conjunto solução dessa equação. O erro consistia em cálculos numéricos envolvendo números inteiros.

De modo geral, ao analisarmos todas as resoluções apresentadas pelos alunos, evidenciamos que a maioria deles, mesmo sabendo que o número 3 era o elemento neutro da operação $*$, efetuava os cálculos para concluir que o resultado se mantinha igual. Somente três alunos realizavam esse passo diretamente, apenas utilizando o conceito de neutralidade do número 3, conforme ilustramos na Figura 4.6, na passagem da quarta para a quinta linha.

Figura 4.6 – Resolução utilizando o conceito de elemento neutro



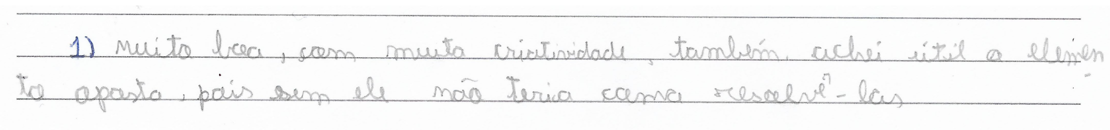
Fonte: Dados da pesquisa

No entanto, todos os alunos efetuaram os cálculos que envolviam elementos opostos. Ou seja, nenhum deles levou em consideração o fato de que quando operamos com dois números opostos em relação a operação $*$, obtemos como resultado o elemento neutro 3.

Defendemos que a prática de exercícios deste formato, com maior regularidade, poderia levar o aluno a superar esta etapa de verificação, compreendendo de maneira mais efetiva o papel dos elementos neutro e oposto, no âmbito da resolução de equações.

A partir desses exemplos, os alunos puderam evidenciar a importância dos elementos neutro e oposto na resolução de equações. Observamos isso através da Figura 4.7, em que apresentamos a resposta dada por um aluno com relação a sua opinião sobre a atividade.

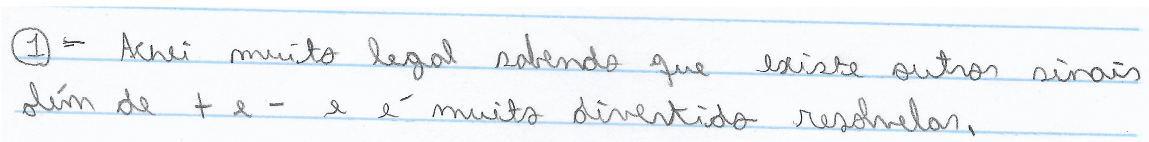
Figura 4.7 – Opinião dada sobre o elemento neutro


1) muito boa, com muita criatividade, também achei útil o elemen
to oposto, pois sem ele não teria como resolvê-las

Fonte: Dados da pesquisa

Outro fato que despertou o interesse dos alunos foi trabalhar com operações distintas das que estão acostumados a utilizar. Podemos evidenciar tal situação, através da resposta dada por um aluno, na Figura 4.8.

Figura 4.8 – Opinião dada sobre as operações distintas

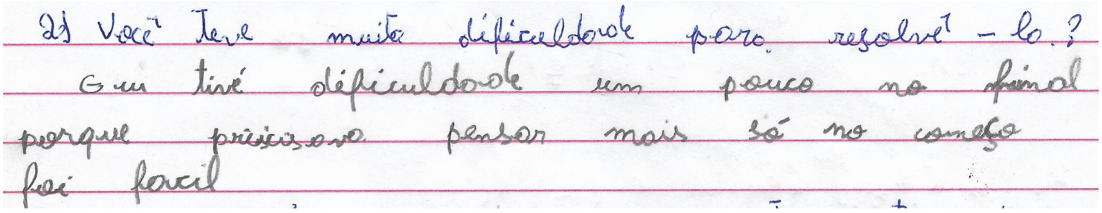

1 - Achei muito legal sabendo que existe outros sinais
além de + e - e é muito divertido resolvelas.

Fonte: Dados da pesquisa

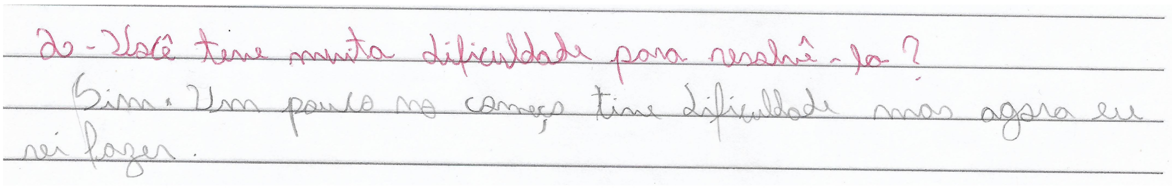
Ainda com relação às operações não usuais, alguns alunos nos questionaram se era possível criar qualquer tipo de operação. Respondemos que sim, é possível criar qualquer operação, entretanto, para facilitar os cálculos, criam-se operações que satisfaçam algumas propriedades elementares, como por exemplo, a operação $*$.

Para finalizar, quando pedido aos alunos se eles tiveram dificuldades para resolver as equações, alguns responderam que as primeiras equações eram mais fáceis do que as últimas; outros responderam que, mesmo achando difícil conseguiram compreender o processo de resolução. Vejamos a Figura 4.9, na qual apresentamos a resposta de dois alunos.

Figura 4.9 – Opiniões dadas sobre o nível de dificuldade da atividade



2) Você Teve muita dificuldade para resolvê-lo?
Eu tive dificuldade um pouco no final
porque precisava pensar mais só no começo
foi facil



2a- Você teve muita dificuldade para resolvê-lo?
Sim. Um pouco no começo tive dificuldade mas agora eu
sei fazer.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse sentido, após a análise que realizamos, evidenciamos que apesar das dificuldades que surgiram, os alunos gostaram de trabalhar com atividades diferentes das que estavam acostumados a desenvolver, uma vez que sentiram-se motivados e empenhados na resolução das mesmas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso propósito, nessa dissertação, era abordar no Ensino Fundamental, mediante adaptações, um conteúdo estudado nas disciplinas do Mestrado Profissional em Matemática. Optamos por não aplicar as atividades em um grupo de estudo e sim, realizar a aplicação durante os períodos de aula com todos os alunos da turma. Desse modo, estávamos sujeitos as mais diversas situações imprevistas, como por exemplo, indisciplina dos alunos e dificuldades básicas de aprendizagem.

Durante nossa pesquisa, encontramos vários autores que defendem que o ensino de Álgebra, principalmente no que se refere ao estudo de equações, não deve priorizar a utilização de técnicas automatizadas e sem significados mas sim uma compreensão efetiva de cada passo realizado na resolução dos exercícios.

Entretanto, a maioria desses autores não apresenta propostas de atividades diferenciadas que buscam amenizar essa falta de formalidade em relação aos conceitos e procedimentos utilizados pelos professores no conteúdo em questão. Nesse sentido, elaboramos e aplicamos atividades que permitiram aos alunos compreender de modo significativo os conceitos e propriedades presentes na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Antes de aplicarmos as atividades com os alunos, não trabalhamos a resolução de equações do 1º grau com um incógnita por meio de "atalhos matemáticos". Ao invés disso, enfatizamos o uso e os conceitos dos elementos neutros e opostos das operações de adição e multiplicação usuais. Em virtude disso, os alunos não estavam acostumados a utilizar os tradicionais macetes para isolar a incógnita: "passa para o outro lado com o sinal contrário"ou ainda "se está multiplicando passa para o outro lado dividindo".

Acreditamos que a maneira como ensinamos esse conteúdo foi essencial para que a turma conseguisse resolver as equações que envolviam operações distintas, uma vez que o modo de resolução era semelhante.

Tendo em vista os resultados que obtivemos com as atividades, consideramos que nossa proposta de aplicação é digna de ser repetida em outras oportunidades. Porém, julgamos necessário ampliar o número de exercícios introdutórios, para que os alunos possam compreender mais amplamente as definições de elemento neutro e oposto, sem atrelar apenas aos números zero e um.

Além disso, para projetos futuros, buscaremos trabalhar com a resolução de equações envolvendo as duas operações presentes na definição de anel. A partir daí, poderemos resolver equações utilizando outras propriedades que decorrem da definição de anel, como por exemplo a propriedade distributiva.

Ressaltamos que, embora aplicamos no Ensino Fundamental, nossa proposta de atividade pode ser desenvolvida também no Ensino Médio. Neste nível de ensino, a maioria dos alunos resolve as equações utilizando somente os "atalhos matemáticos". Com essa aplicação é possível perceber se tal resolução ocorre de modo mecânico ou se eles realmente compreendem os conceitos e propriedades existentes nos passos que estão habituados a usar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, E. J. T.; LINS, A. F. Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática. **Revista Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 337-357, mai/ago., 2013. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/15062/pdf>. Acesso em: 27 de abril de 2020.

BARBOSA, E. J. T.; LIMA, A. P. A. B. Praxeologias do Professor: análise comparativa do livro didático no ensino de equações polinomiais do primeiro grau. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 33, n. 65, p. 1357-1378, set/dez., 2019. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2019000301357>. Acesso em: 28 de abril de 2020.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. São Paulo: Moderna, 2011.

BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática:** fazendo a diferença. 1. ed. São Paulo: FTD, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192> Acesso em: 27 de fevereiro de 2020.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 01 de abril de 2020.

COLAÇO, W. S.; **Movimento da Matemática Moderna aos tempos modernos:** uma análise de livros didáticos sobre explicitação e exploração das propriedades de operações. 2010. p. 75. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática)-Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2010. Disponível em : <http://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/tede/1977/1/PDF%20-%20Walber%20Santiago%20Colaco.pdf>. Acesso em: 22 de abril de 2020.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. São Paulo: Atual, 1982.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2018.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**. Rio de Janeiro: 1993. v.1.

MELARA, R.; SOUZA, O. A. **O Ensino de Equações do 1º Grau com significação:** uma experiência prática no ensino fundamental. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/2457-8.pdf>. Acesso em: 13 de abril de 2020.

MIGUEL, J. C. **O ensino de Matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas**. In: Sheila Zambello de Pinho; José Roberto Corrêa Saglietti. (Org.). Núcleos de Ensino - PROGRAD - UNESP. I ed. São Paulo: UNESP, 2005, v. 1, p. 375-394. Disponível em : <http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/SLC0630-1/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf>. Acesso em: 06 de abril de 2020.

OBMEP. **Banco de questões**. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1bs3rEHm3sE0ELp1N-oFK7QsR2nDLiUEU/view>. Acesso em: 21 de outubro de 2019.

OLIVEIRA, T. R.; FERREIRA, F. F,; ALVES, T. F. O. Técnicas para o ensino de equação de 1º grau com uma incógnita: uma análise sobre a eficiência dos "atalhos matemáticos"utilizados no ensino de equações. **Revista Eixo**, Brasília, v. 8, n. 2, p. 165-175, dez., 2019. Disponível em: <http://revistaeixo.ifb.edu.br/index.php/RevistaEixo/article/view/681>. Acesso em: 07 de abril de 2020.

RIO GRANDE DO SUL. **Referencial Curricular Gaúcho: Matemática**. Porto Alegre: SEE, 2018. Disponível em: <http://portal.educacao.rs.gov.br/Portals/1/Files/1533.pdf>. Acesso em: 13 de abril de 2020.

TROTTA, F. **Matemática:** 6ª série. Primeiro Grau. São Paulo: Scipione Autores e Editores, 1985.

ZAHN, M. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2013.

ANEXO A – RESOLUÇÃO DO ALUNO A

Agora é sua vez...

7º 1

Considerando, em $\mathbb{Q}$, a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

Elemento oposto de 5 = 6 - 5 = 1

a) $5 * m = 0$

(5 * M) * 1 = 0 * 1
M * (5 * 1) = 0 + 1 - 3
M * (5 + 1 - 3 = -2
M * 3 = -2
M + 3 - 3 = -2
M + 0 = -2
M = 12   S = {-12}

Processo de verificação

5 * M = 0
5 * (-2) = 0
5 + (-2 - 3) = 0
5 - 5 = 0
0 = 0

Elemento oposto de 23 = 6 - 23 = -17

b) $x * 23 = 25$.

(x * 23) * (-17) = 25 * (-17)
x * (23 * (-17)) = 25 * (-17)
x * (23 + (-17) - 3) = 25 + (-17) - 3
x * 10 = -8
x = 10 - 3 - 8
x = 10 - 5
x = 5   S = {5}

Processo de verificação

x * 23 = 25
5 * 23 = 25
5 + (23 - 3) = 25
25 = 25
(V)

Elemento oposto de 5 = 6 - 5 = 1

c) $(x - 7) * 5 = 15$

(x - 7) * 5 * 1 = 15 * 1
(x - 7) * (5 * 1) = 15 * 1
(x - 7) * (5 + 1 - 3) = 15 + 1 - 3
(x - 7) * 3 = 13
x - 7 = 13
x = 13 + 7
x = 20

Processo de verificação

(x - 7) * 5 = 15
(20 - 7) * 5 = 15
13 + 5 - 3 = 15
18 - 3 = 15
15 = 15

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$

Elemento oposto de m + 2 (4 . m) 6 - (m + 2) = 6 - m - 2
4 - m

(m + 4) * (m + 2) * (4 - m) = 3
(m + 4) * [(m + 2) * (4 - m)] = 3 * (4 - m)
(m + 4) * [m + 2 + 4 - m - 3] = 3 + (4 - m) - 3
(m + 4) * 3 = -m * 4
m + 4 = -m + 4
m + m = 4 - 4
m = 0

Processo de verificação

(m + 4) * (m + 2) = 3
(0 + 4) * (0 + 2) = 3
6 - 3 = 3
3 = 3

ANEXO B – RESOLUÇÃO DO ALUNO B

Agora é sua vez... T ≃ H

Considerando, em $\mathbb{Q}$, a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações: Verificação

a) $5 * m = 0$

$5 * m = 0$
$1 * m = 0$

$(5 \times m) * 1 = 0 * 1$
$m * (5 * 1) = 0 * 1$
$m * 5 + 1 - 3 = 0 + 1 - 3$
$m * 3 = -2$
$m * 3 - 3 = +2$
$m - 0 = -2$
$m = -2$
$S = \{-2\}$

b) $x * 23 = 25.$

$6 - 23 = -17$
$(x * 23) * -17 = 25 * -17$
$x * (23 * -17) = 25 + (-17) - 3$
$x * (23 + (-17 - 3)) = 8 - 3$
$x * (23 + (-20)) = 5$
$x * 3 = 5$
$x + 3 - 3 = 5$
$x + 0 = 5$
$x = 5$ $\quad S = \{5\}$

c) $(x - 7) * 5 = 15$

$6 - 5 = 1$
$(x-7) * 5 = 15 * 1$
$(x-7) * 5 + 1 - 3 = 15 + 1 - 3$
$(x-7) * 6 - 3 = 13$
$(x-7) * 3 - 3 = 13$
$x - 7 = 13$
$x = 13 + 7$
$x = 20$ $\quad S = \{20\}$

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$

Elemento oposto $6 - (m + 2) = 6 - m - 2 = 4 - m$
$(m+4) * (m+2) * (4 - m) = 3 * (4 - m)$
$(m+4) * [m + 2 + 4 - m - 3] = 3 + (4 - m) - 3$
$(m+4) * 0 + 6 - 3 = 7 - m - 3$
$(m+4) * 3 = 4 - m$
$m + 4 + 3 - 3 = 4 - m$
$m + 4 = 4 - m$
$m + m = 4 - 4$
$2m = 0$
$2m$

ANEXO C – RESOLUÇÃO DO ALUNO C

Agora é sua vez...

Considerando, em $\mathbb{Q}$, a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

a) $5 * m = 0$

$6 - 5 = 1$
$(5 * m) * 1 = 0 * 1$
$m * (5 * 1) = 0 * 1$
$m * 5 + 1 - 3 = 0 + 1 - 3$
$m * 6 - 3 = 0 + 2$
$m * 3 = -2$
$m + 3 - 3 = -2$
$m + 0 = -2$

$m = -2$ (V)

$5 * 1 = 0$
$5 + 1 - 3 = 0 - 3$
$6 - 3 = -3$
$-3 = -3$
-3

Processo de verificação

$5 * (-2) = 0$
$5 - 2 - 3 = 0$
$0 = 0$

Portanto, $S = \{-2\}$

b) $x * 23 = 25.$

$6 - 23 = -17$
$x * 23 * (-17) = 25 * (-17)$
$x + 23 = 25$
$x * [+23 - 17 - 3] = [25 - 17 - 3]$
$x * 03 = 5$
$x + 3 = 5$
$x = 2$

Elemento oposto de 23: $6 - 23 = -17$

$= 25$

c) $(x - 7) * 5 = 15$

$5 - 6 = 1$
$(x - 7) * (5 * 1) = 15 * 1$
$(x - 7) * (5 + 1) = 15 + 1$
$(x - 7) * (+6 - 3) = (16 - 3)$
$(x - 7) * 3 = 13$
$x - 7 + 3 - 3 = 13$

$x = +7 - 3 + 3 + 13$
$x = 4 + 16$
$x = 20$

$(x - 7) * 5 = 15$
$(20 - 7) * 5 = 15$
$13 + 5 - 3 = 15$
$18 - 3 = 15$
$15 = 15$

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$

$6 - (m + 2) = 6 - m - 2 = 4 - m$
$(m + 4) * (m + 2) * (4 - m) = (4 - m) * 3$
$(m + 4) * [m + 2 + 4 - m - 3] = 4 - m + 3 - 3$
$(m + 4) * [0 + 6 - 3] = 4 - m$
$(m + 4) * 3 = 4 - m$
$m + 4 + 3 - 3 = 4 - m$
$m + m = -4 - 3 + 3 + 4$
$2m = -7 + 7$
$2m = 0$
$m = \frac{0}{2}$

$(m + 4) * (m + 2) = 3$
$(0 + 4) * (0 + 2) = 3$
$4 + 2 - 3 = 3$
$6 - 3 = 3$
$3 = 3$

ANEXO D – RESOLUÇÃO DO ALUNO D

Agora é sua vez...

Considerando, em $\mathbb{Q}$, a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

$6 - 5 = 1$

a) $5 * m = 0$

$m * [5 + 1 - 3] = [0 + 1 - 3]$

$m * 3 = -2$

$m = -2$

$S = \{-2\}$

Verificação

$5 * -2 = 0$

$5 + (-2) - 3 = 0$

$3 - 3 = 0$

$0 = 0$ (V)

b) $x * 23 = 25.$

$x * [23 - 17 - 3] = [25 - 17 - 3]$

$x * 3 \quad 5$

$x + 3 = 5$

$x = 5$

$S = \{5\}$

Verificação

$5 + 23 = 25$

$5 + 23 - 3 = 25$

$28 - 3 = 25$

$25 = 25$ (V)

c) $(x - 7) * 5 = 15$

$(x - 7) * 5 * 1 = 15 * 1$

$(x - 7)\ 5 * 1 - 3 = 15 + 1 - 3$

$(x - 7) * 3 = 13$

$x - 7 = 13$

$x = 13 + 7$

$x = 20$

$S = \{20\}$

Verificação

$(20 - 7) + 5 = 15$

$13 + 5 - 3 = 15$

$18 - 3 = 15$

$15 = 15$ (V)

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$

$(m + 4) * (m + 2) * (4 - m) = 3 * (4 - m)$

$(m + 4) * [(m + 2) * (4 - m)] = 3 * (4 - m)$

$(m + 4) * [(m + 2) + (4 - m) - 3]$

$(m + 4) * 3 = 3 + (4 - m) - 3$

$m + 4 = 4 - m$

$m + m = 4 - 4$

$2m = 0$

$m = 0$

$S = \{0\}$

Verificação

$(0 + 4) + (0 + 2) = 3$

$4 + 2 - 3 = 3$

$6 - 3 = 3$

$3 = 3$ (V)

ANEXO E – RESOLUÇÃO DO ALUNO E

Agora é sua vez...

Considerando, em $\mathbb{Q}$, a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

a) $5 * m = 0$

$(5 * m) * 1 = 0 * 1$
$m * (5 * 1) = 0 * 1$
$m * 5 + 1 - 3 = 0 + 1 - 3$
$m * 3 = -2$
$m + 3 - 3 = -2$
$m + 0 = -2$
$S = \{-2\}$

Verificação:
$5 * -2 = 0$
$5 + -2 - 3 = 0$
$0 = 0$ (V)

b) $x * 23 = 25.$

$x * 23 * -17 = 25 * 17 = [25 - 17 - 3]$
$x + [+23 - 17 - 3] = [25 - 17 - 3]$
$x * 3 = 5$
$x + 3 = 5$
$x = 5$
$S = \{5\}$

Verificação:
$5 * 23 = 25$
$5 + 23 - 3 = 25$
$25 = 25$ (V)

c) $(x - 7) * 5 = 15$

$(x - 7)\ 5 * 1 = 15 * 1$
$(x - 7) * 5 + 1 - 3 = 15 + 1 - 3$
$(x - 7) * 3 = 13$
$(x - 7) + 3 - 3 = 13$
$x = 13 + 7$
$x = 20$
$S = \{20\}$

Verificação
$(20 - 7) * 5 = 15$
$13 * 5 = 15$
$13 + 5 - 3 = 15$
$15 = 15$ (V)

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$

$6 - (m + 2) = 6 - m - 2 = 4 - m$
$(m + 4) * (m + 2) * (4 - m) = 3 * (4 - m)$
$(m + 4) * [m + 2 + 4 - m - 3] = 3 + (4 - m) - 3$
$(m + 4) * 0 + 6 - 3 = 7 - m - 3$
$(m + 4) * 3 = 4 - m$
$m + 4 + 3 - 3 = 4 - m$
$m + 4 = 4 - m$
$m + m = 4 - 4$
$2m = 0$
$S = \{0\}$

Verificação
$(0 + 4) * (0 + 2) = 3$
$4 + 2 - 3 = 3$
$6 - 3 = 3$
$3 = 3$ (V)

ANEXO F – RESOLUÇÃO DO ALUNO F

Agora é sua vez...

Considerando, em $\mathbb{Q}$, a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

a) $5 * m = 0$

$(5*M)*1 = 0*1$
$M*(5*1) = 0+1-3$
$M*(5+1-3) = -2$
$M*3 = -2$
$M+3-3 = -2$
$M+0 = -2$
$M = -2$

* ELEMENTO OPOSTO DE $5 = 6-5 = 1$

* PROCESSO DE VERIFICAÇÃO =

$5*M = 0$
$5*(-2) = 0$
$5+(-2-3) = 0$
$5-5 = 0$
$0 = 0$ (V)

b) $x * 23 = 25.$

$(x*23)*(-17) = 25*(-17)$
$x*(23*(-17)) = 25*(-17)$
$x*(23+(-17)-3) = 25+(-17)-3$
$x*10 = -8$
$x = 10-3-8$
$x = 10-5$
$x = 5$

* ELEMENTO OPOSTO DE $23 = 6-23 = (-17)$

* PROCESSO DE VERIFICAÇÃO =

$x*23 = 25$
$5*23 = 25$
$5+(23-3) = 25$
$25 = 25$ (V)

c) $(x-7)*5 = 15$

$(x-7)*5*1 = 15*1$
$(x-7)*(5*1) = 15*1$
$(x-7)*(5+1-3) = 15+1-3$
$(x-7)*3 = 13$
$x-7 = 13$
$x = 7+13$
$x = 20$

* ELEMENTO OPOSTO DE $5 = 6-5 = 1$

* PROCESSO DE VERIFICAÇÃO =

$(x-7)*5 = 15$
$(20-7)*5 = 15$
$13+5-3 = 15$
$18-3 = 15$
$15 = 15$ (V)

d) $(m+4)*(m+2) = 3$

$(M+4)*(M+2)*(4-M) = 3$
$(M+4)*[(M+2)*(4-M)] = 3*(4-M)$
$(M+4)*[M+2+4-M] = 3+(4-M)-3$
$(M+4)*3 = -M+4$
$M+M = 4-4$
$M = 0$

* ELEMENTO OPOSTO DE $(M+2)$
* $(4-M)*6-(M+2) = 6-M-2$
* $\boxed{4-M}$

* PROCESSO DE VERIFICAÇÃO =

$(M+4)*(M+2) = 3$
$(0+4)*(0+2) = 3$
$4+2-3 = 3$
$6-3 = 3$
$3 = 3$ (V)