UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIOAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

Luciana Zanchettin

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM BASE NA SALA DE AULA INVERTIDA

Santa Maria, RS
2020

Luciana Zanchettin

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM BASE NA SALA DE AULA INVERTIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática.**

Orientadora: Prof.ª Dra. Janice Rachelli

Santa Maria, RS
2020

Zanchettin, Luciana
Transformações Geométricas e Matrizes: uma proposta de ensino com base na sala de aula invertida / Luciana Zanchettin.- 2020.
90 p.; 30 cm

Orientadora: Janice Rachelli
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2020

1. Transformações Geométricas 2. Matrizes 3. Sala de Aula Invertida 4. Khan Academy 5. GeoGebra I. Rachelli, Janice II. Título.

Sistema de geração automática de ficha catalográfica da UFSM. Dados fornecidos pelo autor(a). Sob supervisão da Direção da Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central. Bibliotecária responsável Paula Schoenfeldt Patta CRB 10/1728.

Declaro, LUCIANA ZANCHETTIN, para os devidos fins e sob as penas da lei, que a pesquisa constante neste trabalho de conclusão de curso (Dissertação) foi por mim elaborada e que as informações necessárias objeto de consulta em literatura e outras fontes estão devidamente referenciadas. Declaro, ainda, que este trabalho ou parte dele não foi apresentado anteriormente para obtenção de qualquer outro grau acadêmico, estando ciente de que a inveracidade da presente declaração poderá resultar na anulação da titulação pela Universidade, entre outras consequências legais.

Luciana Zanchettin

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM BASE NA SALA DE AULA INVERTIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**.

Aprovada em 25 de setembro de 2020:

Janice Rachelli, Dra. (UFSM)
(Presidente/Orientadora)

Vanilde Bisognin, Dra. (UFN)

Karine Faverzani Magnago, Dra. (UFSM)

Valéria de Fátima Maciel Cardoso Brum, Dra. (UFSM)

Santa Maria, RS
2020

Dedico este trabalho a minha família em especial a minha querida filha Daiana.

AGRADECIMENTOS

Às queridas, Professora orientadora Janice Rachelli e Professora Alice Kozakevicius, agradeço pela motivação, dedicação, paciência e inspiração. Estarão sempre na minha memória como exemplos de competência e profissionalismo.

A minha filha Daiana e marido Rogério pela compreensão e paciência.

A todos os professores do programa de pós-graduação, PROFMAT, da Universidade de Santa Maria, pelas orientações e reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática.

Aos meus colegas de curso pela paciência, apoio e companheirismo.

E por fim, agradeço, a todas as pessoas que de alguma forma colaboraram e estiveram presentes neste período.

RESUMO

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM BASE NA SALA DE AULA INVERTIDA

AUTORA: Luciana Zanchettin
ORIENTADORA: Janice Rachelli

O objetivo desse trabalho é apresentar uma proposta de ensino por meio de uma sequência didática sobre o estudo das transformações geométricas e sua representação por meio de matrizes. Para isso adotamos a metodologia ativa denominada Sala de Aula Invertida e dividimos a sequência didática em aprendizagens individuais E em espaços virtuais ofertados pela plataforma Khan Academy e o software GeoGebra e em grupos no modo presencial na sala de aula. O estudo previsto para ser desenvolvido em seis encontros contempla atividades sobre reflexão, translação, rotação e transformação escala e suas relações com matrizes. As atividades da sequência didática foram elaboradas levando em conta os três momentos da Sala de Aula Invertida: Pré-aula, Aula e Pós-aula e além dos conceitos matemáticos a serem tratados, os estudantes serão desafiados a indicar situações que podem ser resolvidas com o uso dos conhecimentos adquiridos sobre a geometria das transformações. O trabalho foi realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica, do tipo estudo documental, com base em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e Superior, artigos científicos e acesso a plataforma Khan Academy e ao software GeoGebra. Acreditamos que esta proposta possa favorecer o processo de ensino e aprendizagem e contribuir para o desenvolvimento da autonomia e criatividade dos alunos, contemplando os temas estudados e contribuindo para solução de algum problema social na comunidade ou no ambiente escolar.

Palavras-chave: Transformações Geométricas. Matrizes. Metodologias Ativas. Sala de Aula Invertida. Khan Academy. GeoGebra.

ABSTRACT

GEOMETRIC TRANSFORMATIONS AND MATRICES: A TEACHING PROPOSAL BASED ON THE INVERTED CLASSROOM

AUTHOR: Luciana Zanchettin
ADVISOR: Janice Rachelli

The objective of this work is to present a teaching proposal through a didactic sequence on the study of geometric transformations and their representation through matrices. For this, we adopted the active methodology called Inverted Classroom and divided the didactic sequence into individual learning and virtual spaces offered by the Khan Academy platform and the GeoGebra software and in groups in the classroom mode. The study planned to be developed in six meetings includes activities on reflection, translation, rotation and scale transformation and their relations with matrices. The activities of the didactic sequence were elaborated taking into account the three moments of the Inverted Classroom: Pre-class, Class and Post-class and besides the mathematical concepts to be treated, students will be challenged to indicate situations that can be solved with the use of knowledge acquired on the geometry of transformations. The work was carried out through a bibliographic research of the documentary study type based on textbooks of Mathematics of High school and Higher Education, scientific articles and access to the Khan Academy platform and the GeoGebra software. We believe that this proposal can favor the teaching and learning process and contribute to the development of students' autonomy and creativity, contemplating the studied themes and contributing to the solution of some social problem in the community or in the school environment.

Keywords: Geometric Transformations. Matrices. Active Methodologies. Inverted classroom. Khan Academy. GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho trata de uma proposta de ensino, na área de Matemática, para abordar o objeto de conhecimento Geometria das Transformações com a utilização de Metodologias Ativas de Aprendizagem e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação.

Em particular, optamos pela abordagem das transformações geométricas associadas ao estudo de matrizes, visto que as transformações geométricas são expressas matematicamente por meio de matrizes. E, também porque neste contexto, podemos qualificar o estudo de matrizes, com aprendizagens voltadas para as aplicações, das quais, podemos destacar a movimentação de braços robóticos (COSTA, 2014) e a computação gráfica (GOMES; VELHO, 2003). Os estudos em que essas aplicações foram utilizadas indicam que as aplicações permitem aos alunos a possibilidade de perceber a importância deste conhecimento para o desenvolvimento tecnológico, engajando-se na proposta de modo que ocorra mudança da mentalidade com relação aos estudos, despertando-lhes interesse pela autoria e autonomia.

Sendo assim, a aquisição deste conhecimento pode possibilitar aos estudantes aprendizagens significativas de modo a desenvolver as competências e as habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e de que nossos alunos necessitarão nas suas atividades futuras para melhor atuarem na sociedade. De acordo com a BNCC, no Ensino Médio, o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática:

> Nesse contexto, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio, envolvidos, em diferentes graus dados por suas condições socioeconômicas, pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Tais considerações colocam a área de Matemática e suas Tecnologias diante da responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes, para promover ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, analíticos, indutivos, dedutivos e sistêmicos e que favoreçam a tomada de decisões orientadas pela ética e o bem comum (BRASIL, 2018, p. 518).

O estudo de transformações geométricas é indicado na Base Nacional Comum Curricular como uma habilidade a ser desenvolvida de modo que sua utilização permita a análise de “diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras” (BRASIL, 2018, p. 524). Além disso, na atualidade, as transformações geométricas possuem

> [...] extensas aplicações em nosso cotidiano, variando desde a configuração de memórias em computadores, programações, previsões em redes sociais de empresas e até a determinação de probabilidades e cálculos de comissões (DANTE, 2017, p. 323).

Sendo assim, ao estudar transformações geométricas e matrizes os alunos devem:

> [...] desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 519).

Em estudos correlatos, as transformações geométricas foram utilizadas, por exemplo, para analisar figuras planas (ESQUERDO, 2018), justificar as definições das operações entre matrizes (STORMOWSKI, 2008) e apresentar o ensino de multiplicação de matrizes a partir da construção de braços robóticos (COSTA, 2014).

O estudo realizado por Esquerdo (2018) teve como inspiração as obras de Escher para propor uma sequência didática com o objetivo de propiciar aos alunos a análise de figuras planas e suas transformações a partir de reflexões, translações e rotações. Segundo a autora, é importante que aluno estabeleça relações entre o cotidiano e a Matemática, colocando-o como um indivíduo ativo na relação ensino-aprendizagem e que o ensino precisa estar pautado na interdisciplinaridade.

Com o objetivo de propiciar ao aluno um estudo que justifique as definições das operações entre matrizes e suas respectivas propriedades, Stormowski (2008) desenvolveu uma sequência didática que permitiu a obtenção das definições e conceitos de matrizes partindo da observação e análise de algumas transformações geométricas de modo a se refazer o processo histórico. Além disso, o autor apresenta algumas atividades de aplicação de matrizes, em que composição e iteração de transformações geométricas no software Shapari geram algumas figuras fractais. O autor acredita que a sequência didática aliada a metodologia utilizada pelo docente pode propiciar um currículo em rede.

Costa (2014), em sua dissertação de mestrado, objetivou apresentar uma opção de ensinar o assunto multiplicação de matrizes a partir do estudo de transformações geométricas e a construção de braços robóticos. O autor desenvolveu a proposta com a utilização da ferramenta, Kit LEGO® Mindstorms NXT 2.0, escolhida por possibilitar a construção de braços robóticos, pela sua facilidade de interação com crianças e adolescentes, além de estimular a construção do aprendizado através da solução de problemas que possam aparecer durante o processo de construção do braço robótico.

O que percebemos com estas pesquisas e com as orientações da Base Nacional Comum Curricular é a necessidade de mudar a forma de ensinar e aprender. É preciso inovar, tirar o aluno da inércia e transformá-lo em agente principal responsável pela sua aprendizagem. Para Moran (2015a, p. 27),

> A educação inovadora deve formar jovens e crianças para desenvolverem competências cognitivas, pessoais e sociais que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora em cenários de rápida transformação.

Para que estes propósitos se concretizem esta proposta de ensino foi elaborada com base em Metodologias Ativas, em particular a aplicação da Sala de Aula Invertida e com a utilização de recursos de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, por acreditar que este método de ensino promove aprendizagens contribuindo para o desenvolvimento de competências que reforçam o compromisso com a educação integral dos estudantes com foco nos pilares cognitivos, sociais, emocionais e éticos previstos na BNCC.

Além disso, as tecnologias trazem benefícios educativos quando associadas às metodologias e visões inovadoras da educação, por isso devem ser integradas no cotidiano escolar por serem consideradas ferramentas que viabilizam a criação de espaços mais significativos de aprendizagem (BRASIL, 2018).

Sendo assim, as atividades previstas neste trabalho foram elaboradas em três etapas, Pré-aula, Aula e Pós-aula e em espaços de aprendizagem físicos e virtuais conforme a concepção da Sala de Aula Invertida, sendo que nos espaços virtuais, os recursos on-line mais explorados foram os ofertados pela plataforma Khan Academy.

Estudos realizados na plataforma Khan Academy em escolas públicas e privadas foram associados a expressiva melhoria da aprendizagem, diminuição da ansiedade com relação a Matemática e mais confiança na capacidade de aprender

(KHAN, 2020). Para Menegais, Fagundes e Sauer (2015, p. 6), a utilização da plataforma “potencializa as aulas de Matemática, colabora com a melhoria da aprendizagem, desenvolve a autonomia dos estudantes, além de despertar-lhes interesse, motivação, compromisso e interação".

Escolhemos esta plataforma de ensino por se destacar das demais ao ofertar ensino de qualidade e gratuito para professores e alunos, além de promover aprendizagem personalizada, voltada para o domínio e que transforma a mentalidade dos alunos.

Em nossa proposta, nas atividades presenciais as aulas ofertadas na Khan Academy foram complementadas com dinâmicas de grupo e construções geométricas a partir do software GeoGebra. De acordo com Gravina (2001), o estudo da Geometria, com o software GeoGebra, cria situações que preparam os alunos para o entendimento da necessidade e da importância das argumentações dedutivas, além de estabelecer condições para a exploração das propriedades geométricas das figuras construídas seguindo orientações de investigação.

Acreditamos que as informações mencionadas nos parágrafos anteriores são suficientes para justificar as escolhas deste trabalho que tem por objetivo apresentar uma proposta de ensino que possa servir para o estudo de transformações geométricas associada a matrizes tendo por base a aplicação da Sala de Aula Invertida e a exploração de plataformas de ensino.

Gostaríamos de registrar que, inicialmente, nosso objetivo era de propor uma sequência didática sobre as transformações geométricas e matrizes e desenvolvê-la em sala de aula, junto a estudantes do Ensino Médio na escola em que a autora deste trabalho atua. Porém, com a suspensão das aulas presenciais devido a pandemia de Covid19 e o retorno em regime de exercícios domiciliares tendo início somente no mês de junho, o desenvolvimento das atividades em sala de aula, não foi possível de realizar. Sendo assim, o que apresentamos, neste trabalho de dissertação de mestrado, é a proposta de ensino por meio de uma sequência didática, devidamente justificada, para o estudo das transformações geométricas e matrizes.

A seguir apresentamos uma breve descrição de como cada capítulo desta dissertação foi organizada. Neste capítulo, Introdução, apresentamos a justificativa, o objetivo geral e a estruturação do trabalho. No capítulo 2, apresentamos a fundamentação teórica, que consiste em escritos sobre metodologias ativas, em particular a sala de aula invertida e os recursos tecnológicos utilizados como base para elaboração desta proposta, a saber, plataforma de ensino Khan Academy e o software de geometria dinâmica, GeoGebra. Os conceitos matemáticos que serviram de suporte para a construção desta proposta, tais como geometria de coordenadas, matrizes, transformações e transformações geométricas no plano foram apresentadas no capítulo 3. No capítulo 4 encontram-se a descrição da proposta da sequência didática, a metodologia de ensino e as atividades. Para finalizar o trabalho, apresentamos o capítulo 5, que expõem as considerações finais na qual apresentamos reflexões sobre a elaboração desta proposta de ensino e as aspirações com sua implementação. Além disso, fazem parte deste trabalho as Referências constituídas por artigos científicos, livros e dissertações utilizados para fundamentar esta pesquisa, bem como o Apêndice A, composto pela sequência didática apresentada na proposta de ensino.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo discutimos a importância da inserção de metodologias ativas e o uso de tecnologias nas aulas de Matemática como forma de contribuir para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem. Destacamos a importância da utilização de metodologias ativas e o uso da plataforma Khan Academy e do software GeoGebra para o desenvolvimento das aulas. Também, descrevemos os três momentos da sala de aula invertida que é utilizada na proposta de ensino apresentada nesta dissertação.

2.1 METODOLOGIAS ATIVAS

Em tempos nos quais a sociedade passa por contínuas transformações, devido ao desenvolvimento acelerado da tecnologia, torna-se essencial que os indivíduos estejam preparados para o convívio e interações com este novo mundo sejam nas relações políticas, econômicas ou sociais.

Como parte fundamental para o funcionamento da sociedade, a educação também precisa passar por transformações e buscar inovação apresentando novos paradigmas que impactem o contexto escolar de forma positiva, não somente para os discentes como também para os docentes.

Para Moran (2015a, p. 15), a educação formal está num impasse diante de tantas mudanças na sociedade e por isso os processos de organizar o currículo, as metodologias, os tempos e os espaços precisam ser revistos tendo por base a busca de maneiras de “evoluir para tornar-se relevante e conseguir que todos aprendam de forma competente a conhecer, a construir seus projetos de vida e a conviver com os demais”. Neste contexto,

> A escola padronizada, que ensina e avalia a todos de forma igual e exige resultados previsíveis, ignora que a sociedade do conhecimento é baseada em competências cognitivas, pessoais e sociais, que não se adquirem da forma convencional e que exigem proatividade, colaboração, personalização e visão empreendedora (MORAN, 2015a, p. 16).

Uma das alternativas que vem sendo muito discutido no meio educacional e que vem apresentando soluções positivas para esse impasse é o ensino por metodologias ativas por meio de mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação. Diferente do modelo tradicional que é focado no professor, na metodologia ativa é priorizado o envolvimento maior do aluno sendo este, inserido como agente principal responsável pela sua aprendizagem e neste contexto ele aprende fazendo, aprende interagindo, construindo com o objeto e com os colegas. (BACICH; MORAN, 2018).

Para Moran (2015a, p. 16), “os métodos tradicionais, que privilegiam a transmissão de informações pelos professores, faziam sentido quando o acesso à informação era difícil”. Com a internet é possível reinventar a educação, pois podemos aprender em qualquer lugar, em qualquer hora e com pessoas diferentes.

Assim, a opção por metodologias ativas representam a possibilidade de transformar aulas em experiências de aprendizagem mais vivas e significativas para os estudantes da cultura digital, pois a tecnologia traz a integração de todos os espaços e tempos interligando o ensinar e o aprender entre o mundo físico e o mundo digital promovendo um espaço estendido, uma sala de aula ampliada, que se mescla constantemente (MORAN, 2015b).

Na educação formal, mesclar a sala de aula com ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e para trazer o mundo para dentro da escola promovendo nesses espaços equilíbrio entre os processos de comunicação formais e outros mais abertos, como os que acontecem nas redes sociais, onde há mais espontaneidade, fluência de imagens, ideias e vídeos com as tecnologias móveis (MORAN, 2015b).

As metodologias ativas de aprendizagem constituem processos amplos que podem englobar diferentes práticas de sala de aula e possuem como principal característica a inserção do aluno como agente principal e maior responsável pela construção da própria aprendizagem. Sendo assim, o objetivo principal desse paradigma de ensino é estimular a capacidade de adquirir conhecimentos de maneira autônoma e participativa. Para Moran (2015a, p.18), “as metodologias ativas são pontos de partida para avançar para processos mais avançados de reflexão, de integração cognitiva, de generalização, de reelaboração de novas práticas”.

Cabe destacar que as metodologias ativas não constituem algo novo, pois,

> Teóricos como Dewey (1950), Freire (2009), Rogers (1973), Novack (1999), entre outros, enfatizam, há muito tempo, a importância de superar a educação bancária, tradicional e focar a aprendizagem no aluno, envolvendo-o, motivando-o e dialogando com ele (MORAN, 2015a, p. 18).

Assim, o objetivo é desenvolver estratégias para que os estudantes aprendam novas formas de reter o conteúdo por meio de técnicas de ensino que ocupem o aluno em fazer alguma coisa, e ao mesmo tempo, refletir sobre o que está fazendo, levando-o a ler, escrever, perguntar, discutir, resolver problemas e desenvolver projetos de modo a envolvê-lo no desenvolvimento de tarefas, como análise, síntese e avaliação, tanto no estudo em sala de aula, quanto extraclasse (BONWELL; EISON, 1991). Sendo assim,

> As metodologias precisam acompanhar os objetivos pretendidos. Se queremos que os alunos sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que os alunos se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham que tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MORAN, 2015a, p. 17).

Segundo Diesel, Baldez e Martins (2017), alguns princípios são fundamentais para o sucesso da abordagem pautada em metodologias ativas de ensino como os que estão apresentados em síntese na Figura 1.

Figura 1 – Princípios que constituem as metodologias ativas de ensino

Fonte: (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017, p. 273).

Segue a descrição dos princípios apresentados na Figura 1:

- Aluno, centro do ensino e de aprendizagem: A organização das práticas pedagógicas deve induzir o estudante a participar do seu processo de aprendizagem, exigindo deles:

> [...] ações e construções mentais variadas, tais como: leitura, pesquisa, comparação, observação, imaginação, obtenção e organização dos dados, elaboração e confirmação de hipóteses, classificação, interpretação, crítica, busca de suposições, construção de sínteses e aplicação de fatos e princípios a novas situações, planejamento de projetos e pesquisas, análise e tomadas de decisões (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017, p. 273).

- Autonomia: Nesta metodologia o estudante deve ser estimulado a desenvolver atitudes críticas que proporcionem o engajamento nas aprendizagens, fundamental para o exercício da liberdade, do trabalho em equipe, da independência e da tomada de decisões, tanto no contexto escolar quanto na vida futura. Neste contexto, o professor deve atuar de modo a nutrir os interesses pessoais dos alunos, oferecer explicações racionais para os conteúdos, valer-se de uma linguagem que informe ao invés de controlar, respeitar o ritmo de aprendizagem de cada um, além de, reconhecer e aceitar os sentimentos negativos da classe.
- Problematização da realidade e reflexão: O conteúdo deve ser articulado ao contexto social, de modo que a problematização dele, permita que os estudantes possam enxergar a aplicação prática e a utilidade no seu dia a dia, permitindo-lhes analisar a realidade e tomar consciência dela, promovendo assim uma aproximação crítica e reflexiva da realidade. Para Medeiros (2014 apud DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017, p. 276),

> O método envolve a construção de situações de ensino que promovam uma aproximação crítica do aluno com a realidade; a opção por problemas que geram curiosidade e desafio; a disponibilização de recursos para pesquisar problemas e soluções; bem como a identificação de soluções hipotéticas mais adequadas à situação e a aplicação dessas soluções. Além disso, o aluno deve realizar tarefas que requeiram processos mentais complexos, como análise, síntese, dedução, generalização (p. 43).

- Trabalho em equipe: Cabe ao professor estimular a constante interação entre os estudantes e em diferentes espaços, proporcionando situações que despertem uma postura crítica diante da realidade, discussões e trocas para a construção do conhecimento e maior compreensão de mundo. Para Diesel, Baldez e Martins (2017, p. 177),

> Esse movimento de interação constante com os colegas e com o professor, leva o estudante a, constantemente, refletir sobre uma determinada situação, a emitir uma opinião acerca da situação, a argumentar a favor ou contra, e a expressar-se.

- Inovação: Trata-se de encontrar formas de potencializar as ações de ensino e aprendizagem renovando, inventando ou criando metodologias investidas de tecnologias e formatos de conteúdo que permitam que os alunos se engajem nas propostas e desenvolvam autonomia.
- Professor: mediador, facilitador, ativador: Na metodologia ativa a posição do professor muda deixando de ser ele, o único detentor do conhecimento para se tornar um facilitador, atuar como mediador entre o conhecimento e os alunos, estimulando essa interação e ajudando nas dificuldades, além de, "provocar, desafiar ou ainda promover as condições de construir, refletir, compreender, transformar, sem perder de vista o respeito a autonomia e dignidade deste outro" (DIESEL; BALDEZ; MARTINS, 2017, p. 178).

Bacich e Moran (2018) defendem que cabe ao professor criar situações para despertar a curiosidade do aluno e lhe permitir pensar o concreto, conscientizar-se da realidade, questioná-la e construir conhecimentos para transformá-lo. Além disso,

> [...] as metodologias ativas demandam a autonomia do professor para criar atividades com potencial de promover experiências e aprendizagens aos estudantes esforçando-se na criação e reconstrução das atividades tendo como referência os métodos consubstanciados na literatura (BACICH; MORAN, 2018, p. xii).

Nessa perspectiva, "o educador tem o papel de curador, que escolhe o que é relevante entre as informações disponíveis e auxilia, acolhe, estimula, valoriza, inspira e orienta os estudantes tanto no desenvolvimento de atividades individuais como em grupo" (MORAN, 2015a, p. 24).

Para Bonwell e Eison (1991), as características que definem a aprendizagem ativa são o atendimento a diferentes necessidades de aprendizagem, a ênfase ao desenvolvimento de habilidades de raciocínio analítico, crítico e tomada de decisão, o aumento da motivação e do desempenho, o envolvimento em atividades que exploram atitudes e valores em relação ao conteúdo além de criar um forte senso de comunidade através da interação.

O ensino híbrido, a aprendizagem por problemas, a personalização do ensino, atividades baseadas em projetos, o pensamento computacional, a aprendizagem adaptativa, a educação maker, a gameficação, a aprendizagem entre pares e a sala de aula invertida são algumas das formas para desenvolver aprendizagens ativas que, segundo Bacich e Moran (2018), tem o potencial de levar os alunos a aprendizagens por meio da experiência, autonomia, protagonismo e respeitando os princípios da metodologia.

Todos estes métodos de aprendizagem ativa propiciam aos alunos benefícios. Dentre eles, destacamos: a aquisição de autonomia, o desenvolvimento de confiança, o enxergar a aprendizagem como algo tranquilo, a aptidão para resolver problemas, a produção de profissionais mais qualificados e valorizados e o protagonismo no seu aprendizado.

Para Moran (2013, p. 23),

> Um dos modelos mais interessantes de ensinar hoje é o de concentrar no ambiente virtual o que é informação básica e deixar para a sala de aula as atividades mais criativas e supervisionadas. É o que se chama de aula invertida).

Dedicamos a próxima seção para tratarmos da sala de aula invertida, visto que esta foi a abordagem explorada para a elaboração das atividades desta proposta de trabalho.

2.1.1 Sala de aula invertida

Atualmente uma das formas mais utilizada para aplicação de metodologias ativas é o ensino híbrido, que consiste em combinar o ensino presencial e experiências de ensino digital. A ideia é que educadores e estudantes possam ensinar e aprender em tempos e espaços variados constituindo um equilíbrio entre os espaços físicos e virtuais, potencializando o aprendizado.

Uma das estratégias que derivou do ensino híbrido é a sala de aula invertida, também chamada de flipped classroom, em que o aluno desenvolve atividades e estuda conceitos por conta própria antes da aula presencial, utilizando ferramentas digitais, e realiza a parte prática em sala de aula por meio de exercícios, debates, atividades em classe, compartilhando dúvidas e reflexões com os colegas, sob a mediação do professor.

Para Bacich e Moran (2015, p. 2),

> Diversos estudos têm demonstrado que os estudantes constroem sua visão sobre o mundo ativando conhecimentos prévios e integrando as novas informações com as estruturas cognitivas já existentes para que possam, então, pensar criticamente sobre os conteúdos ensinados. Essas pesquisas também indicam que os alunos desenvolvem habilidades de pensamento crítico e têm uma melhor compreensão conceitual sobre uma ideia quando exploram um domínio primeiro e, a partir disso, têm contato com uma forma clássica de instrução, como uma palestra, um vídeo ou a leitura de um texto.

Para a comunidade Flipped Learning Network, FLN (2014), uma sala de aula invertida deve estar fundamentada em quatro pilares, definidos pela sigla FLIP, que consistem em:

- Flexible environment ou Ambiente flexível: Os educadores criam diferentes espaços de aprendizagem, virtual, físico ou híbrido, com flexibilidade em relação as expectativas, aos tempos de aprendizagem e a avaliação dos alunos promovendo momentos de reflexão e aprendizagem individuais ou em grupos.
- Learning culture ou Cultura de aprendizagem: No modelo tradicional, o professor é o centro principal da informação e o aluno aprende prestando a atenção. Já na abordagem invertida muda o foco para o aluno, de modo que ele seja responsável pela sua aprendizagem participando ativamente na construção do conhecimento dele e dos colegas.
- Intentional content ou Conteúdo intencional: Os professores se preocupam continuamente em como podem usar o modelo FLIP para auxiliar os alunos a desenvolver a compreensão dos conceitos e procedimentos, assim como a sua capacidade de acessar os conceitos construídos. Os educadores escolhem o que irão ensinar e quais ferramentas serão disponibilizadas para maximizar o tempo de aula, a fim de adotar métodos e estratégias de aprendizagem ativa centradas no aluno.
- Professional Educator ou Educador profissional: Os educadores profissionais continuamente observam seus alunos, fornecendo-lhes *feedback* relevante em todos os momentos, bem como avaliando o seu trabalho. Os educadores profissionais refletem sobre sua prática, interagem uns com os outros, aceitam críticas construtivas e toleram "o caos controlado em suas salas de aula".

Para que a sala de aula invertida funcione, é preciso que os alunos apoiem a proposta, comprometendo-se com o desafio em três momentos, denominados por Elmôr Filho, et al. (2019) de Pré-aula, Aula e Pós-aula.

O momento que antecede a aula presencial é denominado Pré-aula. Nele os estudantes deverão realizar, em casa, as atividades disponibilizadas pelo educador seguindo as orientações para o desenvolvimento e interação com as mesmas. Segundo Elmôr Filho et al. (2019, p. 47),

> Essa atividade pode ser de forma on-line (vídeos, áudios, *podcasts*, *screencasts*, *games*, textos, entre outros) ou física (textos impressos, leitura do livro texto ou artigo científico, ou outros). Este material deve auxiliar os estudantes no desenvolvimento de habilidades de pensamento, tais como lembrar, entender e aplicar.

A Aula é momento onde o aluno compartilha com o grupo sua compreensão do tema, trocando saberes com o professor e os colegas. Este momento é de suma importância para desenvolver a autonomia intelectual, adquirir confiança, questionar com maturidade e aprofundar os temas estudados, pois além de propiciar a participação ativa na construção de seu próprio conhecimento, faz com que o "estudante passe a reconhecer benefícios ao interagir com os colegas e com o professor, em condições de pelo menos, fazer perguntas" (ELMÔR FILHO et al.,2019, p. 47). Para Elmôr Filho et al. (2019, p. 48), durante a aula,

> [...] o professor poderá então desenvolver as atividades programadas, frequentemente em equipes, procurando estimular habilidades de pensamento de ordem superior, tais como analisar, sintetizar, e criar, bem como de trabalho em equipe, pensamento crítico, resolução de problemas, dentre outras.

O momento Pós-aula, pode coincidir com a Pré-aula do próximo encontro, ou seja, os alunos podem começar a interagir com o material disponibilizado pelo professor, preparando-se para a próxima aula. Pode também ser destinado para conclusão de tarefas sobre os assuntos aprofundados em sala de aula, ou para promover avaliação formativa, quando professor poderá dispor de todas as informações a respeito do que foi tratado em aula. É neste momento que,

> [...] o estudante revisa o conteúdo e amplia seus conhecimentos por meio de atividades que o professor pode conceber para esta finalidade, levando em consideração o desenvolvimento da aula. Dependendo de quanto foi possível avançar, o estudante pode ser levado a descobrir um fenômeno, a

> compreender outros conceitos por si mesmo e a relacionar suas descobertas com seu conhecimento prévio do mundo ao seu redor (ELMÔR FILHO et al., 2019, p. 50).

Na Figura 2, apresentamos uma comparação entre o método tradicional de ensino e a abordagem da sala de aula invertida, contendo uma breve descrição sobre os três momentos Pré-aula, Aula e Pós-aula presentes neste texto.

Figura 2 – Comparação entre a abordagem tradicional e a sala de aula invertida

Fonte: (ELMÔR FILHO et al., 2019, p. 48).

Neste cenário de sala de aula invertida, o aluno é amplamente responsável pela qualidade do ensino que irá receber. Já do educador espera-se um bom planejamento de aula, capaz de conectar de forma dinâmica e didática os conteúdos trazidos para a classe de modo a promover equilíbrio entre aprendizagem individual e grupal (MORAN, 2015a).

Além disso, é importante inserir as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) nas atividades de aprendizagem como propõem Almeida e Valente (2012), uma vez que elas oferecem recursos como vídeos, animações, simulações ou mesmo o uso de laboratórios virtuais, além de facilitar a avaliação dos alunos no que se refere ao estudo on-line, pois as avaliações quando elaboradas e registradas na própria plataforma on-line, permitem ao professor acessar os resultados e conhecer quais foram os pontos críticos do material estudado e o que devem ser retomados em sala de aula como sugere que seja feito na proposta de sala de aula invertida. Para Bacich e Moran (2015, p. 2),

> A integração cada vez maior entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e trazer o mundo para dentro da escola. Outra integração necessária é a de prever processos de comunicação mais planejados, organizados e formais com outros mais abertos, como os que acontecem nas redes sociais, em que há uma linguagem mais familiar, uma espontaneidade maior, uma fluência constante de imagens, ideias e vídeos.

Pensando nesse propósito, apresentamos na próxima seção a plataforma de ensino e aprendizagem Khan Academy e o software GeoGebra, escolhidos para a implementação desta proposta, por entendermos que agregam ao ensino de matemática, qualidade e inovação, além de oportunizarem vivenciar a matemática de modo interativo e serem tecnologias digitais ofertadas de forma gratuita.

2.2 PLATAFORMA DE ENSINO KHAN ACADEMY

A Khan Academy é uma plataforma de aprendizagem a distância, sem fins lucrativos fundada pelo indiano Salman Khan, com a missão de oferecer ensino gratuito e de qualidade para qualquer pessoa e em qualquer lugar. Ela pode ser acessada através do link, https://pt.khanacademy.org/, no qual poderá ser criado um perfil personalizado para ensino e aprendizagem através de um cadastro padrão.

Atualmente a Khan Academy tem um alcance de mais de 190 países ao redor do mundo, com tradução em mais de 30 idiomas que é feito por voluntários que acreditam na missão desta instituição. A plataforma conta também com uma equipe de colaboradores que tem por missão de vida transformar a educação para inspirar o mundo a aprender, facilitando a relação entre professor e aluno, ajudando na economia do tempo e potencializando a maneira em que se ensina e aprende. Para isso trabalham em parceria com professores para criar ferramentas e recursos que possam ser usadas por estes e pelos alunos, afim de que o aprendizado aconteça da melhor forma possível contribuindo para desenvolvimento da autonomia e para que sejam mais eficientes e eficazes.

Esta plataforma oferece cursos on-line completos e em diferentes áreas de conhecimento com conteúdos teóricos e práticos, organizados por assunto e abrangendo da pré-escola ao ensino médio e, em alguns casos até os primeiros anos da faculdade. Para Menegais (2015, p. 48),

> A Khan Academy tornou-se um grande portal com videoaulas e atividades acompanhadas por um software no qual os estudantes podem escolher um assunto por tema, assistindo às aulas e praticando as atividades de acordo com suas dificuldades ou facilidades.

Os vários conteúdos são desenvolvidos em níveis de conhecimento alinhados a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com tecnologias adaptativas que identificam os pontos fortes e lacunas no aprendizado, ensinados de uma forma fácil de aprender e valendo-se de elementos de aprendizagem socioemocionais, porque segundo os colaboradores da Khan Academy, aprender é desafiador e requer confiança, por isso a plataforma combina conteúdos e softwares de modo a simplificar a aprendizagem tornando-a divertida, interessante e motivadora; ajudando a elevar a autoestima para que os usuários ganhem autonomia com valores de um eterno aprendiz (KHAN AKADEMY, 2020).

Para a Khan Academy, o professor é considerado agente de mudança da sala de aula, e exerce o papel principal na aprendizagem dos alunos, por isso além de oferecer recursos tecnológicos de excelência e desenvolver as ferramentas e os cursos de modo a facilitar a prática do educador, dá suporte através de tutoriais e cursos de formação, para que o professor receba todas as instruções necessárias para usufruir gratuitamente dos recursos e ferramentas do painel do professor desenvolvidas especificamente para ele, que permitem criar turmas e gerenciá-las.

Essa instituição se esforça para promover aprendizagem personalizada, voltada para o domínio e que transforme a mentalidade dos alunos. Por isso, a instituição idealiza que o aluno acredite no seu potencial e que desenvolva estratégias de aprendizagem passando a assimilar conteúdos difíceis (KHAN AKADEMY, 2020). Sendo assim, apresenta a aprendizagem para o domínio como tema central à sua metodologia, pois ela pressupõe que os alunos devam alcançar um alto nível de compreensão de um dado conceito antes de desenvolver o entendimento de outro mais avançado, ou seja, esta abordagem implica que a progressão de conteúdo seja estruturada por níveis de compreensão e que o ensino seja personalizado de acordo com as necessidades de cada aluno (KHAN ACADEMY, 2020).

No intuito de promover a aprendizagem para o domínio, a plataforma criou um sistema que monitora o progresso de aprendizagem dividido por habilidades e com recursos que permitem que o professor recomende atividades para alunos específicos ou para toda a turma.

Na plataforma Khan Academy também são propostas mudanças de ensino e aprendizagem inovadoras, mas que não sobrecarregam o professor, seguindo os pilares: acesso ao conteúdo gratuito para professores e alunos; adaptação do conteúdo segundo os parâmetros de ensino de diferentes países, em particular, a BNCC no Brasil; proposta tecnológica que não provoca uma mudança drástica a ponto do professor ter que repensar toda dinâmica da sua sala de aula.

Menegais (2015, p. 49), afirma que a metodologia que a Khan Academy:

> [...] propõe na plataforma desenvolve a curiosidade e a autonomia do estudante, permitindo que este construa o conhecimento de acordo com o seu próprio ritmo e que utilize a maior parte do tempo em sala de aula para interagir com seus professores. A sala de aula, então, passa a ser um lugar para discutir o assunto e tirar dúvidas, e não somente para aulas expositivas que, por vezes, não geram um diálogo construtivo. O diferencial da plataforma é a sua propriedade de adaptar-se aos conhecimentos prévios dos estudantes, indicando possibilidades de avanços a partir deles.

Sendo assim, a instituição acredita que pode ajudar os professores no seu trabalho diário, dando a eles suporte, sugestões e novas ferramentas para trabalhar as competências e habilidades que a Base Nacional Comum Curricular espera que os alunos desenvolvam. Com isso, a academia também acredita que pode,

> [...] tornar-se uma referência para pesquisa de conteúdo e material de apoio para as aulas, trazendo uma inovação dos antigos conteúdos e novas formas de serem trabalhados, ressaltando inclusive as relações existentes entre conteúdos de um componente curricular e deste com os demais componentes (KHAN, 2013, p. 1).

Na Figura 3, é apresentada uma síntese de como a plataforma pode ajudar os professores no desenvolvimento de suas aulas e após, uma breve descrição.

Figura 3 – Resumo dos tipos de ajuda que a Khan Academy oferece aos professores

Fonte: (KHAN, 2020). Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/khan-for-educators/recursos-para-professores-v2/khan-academy-para-educadores/bncc-khan-1/bncc-khan/a/khan-academy-e-bncc-alinhamento-curricular?modal=1> Acesso em: 14 maio 2020.

A plataforma Khan Academy oportuniza aos professores,

- Inovar nas aulas utilizando tecnologia: através da oferta de aprendizagens que agregam tecnologia e diversão a propostas de ensino de Matemática.
- Material de apoio e fonte de pesquisa para planos de aula disponibilizando gratuitamente exercícios, artigos e vídeos sobre diversos conteúdos, para várias necessidades e alinhados a BNCC, além da capacitação para o uso da plataforma.
- Gameficação e aprendizado como uma maneira divertida, pois possui uma estrutura divertida, atrativa e motivadora, que se assemelha a um jogo, no qual o aluno como um jogador é premiado com recompensas sendo elas pontos de energia e medalhas e as fases do jogo são as missões que o aluno precisa completar (ARAÚJO; MOLINA; NANTES, 2020).

- Identificar as dificuldades dos alunos: o site tem um sistema que reconhece quais habilidades o aluno domina e quais ele ainda precisa praticar que permite em parceria com o professor direcionar o aluno para um ensino personalizado.
- Trabalhar com a defasagem de conteúdos e trilha de aprendizagem individual para o aluno: o professor cria uma turma virtual e acompanha em tempo real o desempenho de cada estudante permitindo-lhe adotar caminhos alternativos guiando o aluno ao acesso de informações específicas para cada situação apresentada.

Os materiais da plataforma foram planejados de modo que o aluno possa acessar qualquer conteúdo e quando quiser, removendo todas as barreiras para se aprender. Por isso, cada conteúdo é estruturado com sequências didáticas divididas em unidades. Cada unidade é composta por várias lições que incluem conteúdos teóricos e práticos de modo que os alunos que utilizam a plataforma de forma independente desenvolvam habilidades e competências esperadas para educação básica, e alinhadas com a BNCC usando para isto, vídeos, artigos, imagens, gráficos interativos e exercícios para ensinar os alunos a ler e interpretar dados com diversos tipos de perguntas (KHAN AKADEMY, 2020).

Menegais (2015, p. 48), afirma que a plataforma permite aos alunos trabalhar individualmente, e ao professor, monitorar, em tempo real, o desempenho de cada estudante, “orientando-o quando necessário, identificando as principais dificuldades e reforçando assuntos específicos”.

A plataforma oferece também a correção instantânea dos exercícios permitindo que os alunos que não conseguem avançar em determinado problema possam receber ajuda com vídeos, artigos relacionados, dicas estratégias de resolução e justificativas que explicam por que uma resposta específica é correta ou incorreta. Esta correção é seguida de incentivo que corresponde a uma mensagem dizendo que o importante é o esforço tanto quando o aluno acerta uma resposta como quando erra.

Dessa forma, a academia acredita que não há desculpas para não tentar aprender, pois além da plataforma ser fácil de usar, estimula a capacidade de raciocínio nos alunos, e mais, afirma que passar por esse processo permite que o aluno descubra o melhor momento de usar cada uma destas estratégias, ou seja, estimula a autonomia.

Para Khan Academy (2020), o mínimo de autonomia que um aluno precisa ter para iniciar os estudos na plataforma, é o suficiente para perceber se está no caminho certo para completar as tarefas, se precisa de ajuda ou em qual ordem deve fazer as tarefas. No entanto, espera que ao adquirir maturidade, seja capaz de controlar mais seu processo de aprendizagem e tomar decisões maiores, que correspondem a traçar metas semanais, mensais e para o ano letivo de modo que, ao perceber a importância dos estudos escolha por si só explorar outros conteúdos mesmo não sendo obrigatórios e daí a experiência de aprendizagem na plataforma irá variar de aluno para aluno. Considera também que a melhor forma do aluno desfrutar dos benefícios da plataforma consiste em estabelecer uma meta de estudos, pois assim a cada acesso o aluno pode ver seu progresso em direção a meta, personalizar o suporte teórico, prático e testes de unidades, equilibrar as relações entre o professor na indicação de conteúdos e a autonomia do aluno na tomada de decisão em seu processo de aprendizagem. Para Menegais (2015, p. 48):

> [...] a metodologia proposta por Khan não tem como objetivo substituir as aulas presenciais, nem mesmo o professor: o que o software, em verdade, proporciona, é um auxílio ao estudante que precisa se adequar àquilo que está aprendendo ou deixando de aprender.

Sendo assim, em nosso estudo propomos a utilização dos recursos da plataforma Khan Academy para desenvolvimento de tarefas nas três etapas da sala de aula invertida, em particular, com maior concentração nas propostas na Pré-aula, na qual os alunos adquirem, de modo individual, os conhecimentos para posteriormente qualificar, analisar e discutir, em grupos, na etapa Aula.

A proposta foi elaborada de modo que na Pré-aula os alunos assistem a vídeos e resolvem atividades práticas ofertadas na plataforma e previamente selecionadas pelo docente. Os alunos dentro de um prazo pré-estabelecido pela professora, tem autonomia para desenvolver as atividades no ritmo, local e tempo por eles escolhido e ainda podem assistir várias vezes os vídeos e refazer as tarefas até que haja entendimento do conteúdo.

Em particular, nos estudos desta proposta, transformações geométricas, parte das atividades práticas são compostas por construções dinâmicas e interativas, nas quais o aluno pode realizar as transformações geométricas arrastando pontos num sistema de eixos ortogonais. A esse tema, geometria dinâmica, destinamos a próxima seção.

2.3 GEOMETRIA DINÂMICA E GEOGEBRA

Os softwares de geometria dinâmica são ferramentas que possibilitam a construção de figuras geométricas a partir de suas propriedades e com o recurso de movimento. Segundo Gravina et al. (2012) ao aplicar movimentos aos pontos, que dão início à construção, a figura se transforma mantendo as propriedades geométricas que foram utilizadas no processo de construção. Esses programas nos permitem realizar investigações sobre propriedades geométricas que dificilmente conseguiríamos observar utilizando apenas o quadro e o giz. Os softwares de geometria dinâmica são definidos como:

> [...] aqueles capazes de construir e manipular objetos geométricos na tela do computador. Além disso, o que diferencia um software de Geometria Dinâmica dos demais é a possibilidade de "arrastar" a figura construída utilizando o mouse. Esse procedimento permite a transformação da figura em tempo real (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1070).

Dentre os diferentes softwares de geometria dinâmica, o GeoGebra, disponível em: https://www.geogebra.org, destaca-se por oferecer um menu consistente e interessante para se trabalhar geometria euclidiana. Para o desenvolvimento desse software o Instituto GeoGebra conta com colaboradores que agregam professores, estudantes, desenvolvedores de software e pesquisadores de universidades e organizações sem fins lucrativos, ou seja, é "compartilhado na comunidade de pessoas que têm interesse no assunto e, assim sendo, o seu uso é livre e não depende de aquisição de licença. Dessa forma, pode ser disponibilizado em qualquer ambiente escolar" (GRAVINA et al., 2012, p. 37). O GeoGebra é

> [...] um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de usar. O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (GEOGEBRA, 2020).

O software GeoGebra está disponível em vários idiomas, oferece interface fácil de se usar, ferramentas de desenvolvimento para criação de materiais didáticos como páginas web interativas, geometria e planilhas de cálculo interconectadas e totalmente dinâmicas, ou seja, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si (GRAVINA; BARRETO, 2009).

Silva e Penteado (2009, p. 1073), afirmam que com o GeoGebra é possível fazer construções de maneira bastante simples, pois oferece uma interface com duas janelas de trabalho: a janela geométrica e a de álgebra.

> A janela geométrica, de cor branca, é o local em que os objetos são construídos. Nela, é possível colorir os objetos, aumentar a espessura das linhas, medir os ângulos, medir a distância entre dois pontos, etc. Além disso, é possível habilitar as coordenadas cartesianas e polares. Na janela de álgebra é possível visualizar a representação algébrica de todo objeto construído na janela geométrica. Essa dupla representação de objetos é a mais notável característica do GeoGebra.

Além disso, o software apresenta, “um campo de entrada de texto, onde é possível escrever coordenadas, equações, funções e comandos de tal forma que, pressionando a tecla enter, eles são mostrados imediatamente na janela geométrica” (SILVA; PENTEADO, 2009, p. 1074).

O ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, permite criar cenários de investigação, no qual o aluno pode verificar propriedades de uma figura em um processo muito rápido, transformando a sala de aula em um ambiente de aprendizagem em que o aluno é levado a um processo de exploração e explicação, que pode contribuir para que eles entendam a necessidade das argumentações dedutivas importantes para o estudo de matemática, em particular da Geometria (GRAVINA, 2012; SILVA; PENTEADO, 2009).

Em nosso estudo propomos a utilização do GeoGebra para realizar tarefas de experimentação em grupos, que consistem em construir figuras, realizar transformações geométricas e analisá-las. Nelas os estudantes podem escolher as ferramentas do software mais apropriadas para realizar as construções e as transformações, os caminhos para resolução dos problemas propostos, e ainda, checar se o que foi feito está correto, buscando a validação da resolução por eles apresentada.

3 TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E MATRIZES

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos da matemática envolvida na construção das atividades propostas neste trabalho. Abordamos os conceitos de geometria das coordenadas, matrizes, transformações lineares e a geometria das transformações. Para isso, usamos como principais referenciais as obras de Dante (2017), Hefez e Fernandes (2016), Boldrini et al. (1980) e Lima (2002).

3.1 GEOMETRIA DAS COORDENADAS

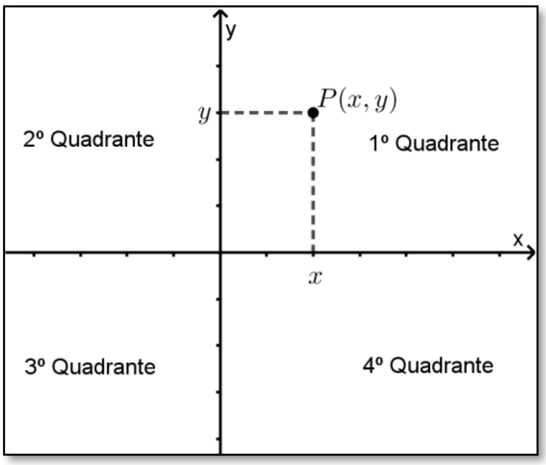
A representação por coordenadas no plano geralmente é abordada no Ensino Médio na representação gráfica de funções e em estudos de Geometria Analítica. Geralmente o plano é denominado de plano cartesiano, em homenagem a René Descartes (1596 -1650).

O plano cartesiano ou sistema de eixos ortogonais num plano:

> [...] é um par de eixos, eixo OX e OY, com unidade medida de igual comprimento, que se intersectam perpendicularmente na origem comum O. Por convenção o eixo OX é denominado **eixo horizontal** e o eixo OY, **eixo vertical** (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2017, p. 5).

Os eixos ortogonais dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas quadrantes na ordem indicada conforme é mostrado na Figura 4.

Figura 4 – Plano Cartesiano



Fonte: (DANTE, 2017, p. 52).

Esse sistema permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais do conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$.

A um ponto P no plano fazemos corresponder o par ordenado (x, y), em que x é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OX e y é a coordenada do pé da perpendicular ao eixo OY que passam por P (Figura 4). Reciprocamente, a cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano dado pela intersecção da perpendicular ao eixo OX que passa pelo ponto desse eixo de coordenada x com a coordenada perpendicular ao eixo OY que passa pelo ponto desse eixo de coordenada y.

Lembremos que (x, y) é chamado par pois é composto por dois valores, e dito ordenado, pois a ordem desses valores é importante, ou seja, $(x, y) = (x', y')$ se e somente se $x = x'$ e $y = y'$ e portanto, por exemplo, $(2,3) \neq (3,2)$.

3.2 MATRIZES

Nesta seção apresentamos a definição de matriz, os tipos matrizes e suas operações com base na obra de Hefez e Fernandes (2016).

Dados dois números naturais m e n, uma matriz m por n, ou de ordem $m \times n$, é uma tabela formada por números distribuídos em m linhas e n colunas.

Podemos indicar as entradas de uma matriz arbitrária A pelos símbolos A_{ij}, ou $a_{ij,}$ onde os índices i e j indicam, respectivamente, a linha e a coluna onde o elemento se encontra. Assim, uma matriz é usualmente representada por $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ou

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

3.2.1 Tipos de matrizes

Algumas matrizes são classificadas de acordo com a quantidade de linhas e colunas. Denominamos matriz linha, a matrizes formadas por uma única linha, matriz coluna, a matrizes formadas por uma única coluna e matriz quadrada a matrizes com o mesmo número de linhas e colunas. Na Figura 5, estão ilustrados exemplos destas matrizes.

Figura 5 – Exemplos de matriz linha, matriz coluna e matriz quadrada.

Matriz linha de ordem 1×5.	$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
Matriz coluna de ordem 3×1.	$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
Matriz quadrada de ordem 3.	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Fonte: Adaptação de Hefez e Fernandes (2016).

Uma matriz quadrada de ordem n em que os elementos que não pertencem a diagonal principal, nome dado aos elementos a_{ii} de uma matriz quadrada, são iguais a zero é chamada de matriz diagonal. Um exemplo deste tipo de matriz é a matriz identidade, denotada usualmente por I_n, cujas entradas da diagonal principal são iguais ao número 1.

Outros exemplos especiais de matriz quadrada são as matrizes triangular superior, em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, e as matrizes triangular inferior em que todos elementos acima da diagonal principal são iguais a zero.

Na Figura 6 estão ilustrados exemplos destas matrizes quadradas que apresentam características peculiares, e por isso recebem nomes especiais e também de uma matriz $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero; esta matriz é chamada de matriz nula.

Figura 6 – Exemplos de matriz diagonal, triangular superior, triangular inferior e nula.

Matriz diagonal de ordem 3	$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Matriz identidade de ordem 2.	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Matriz triangular superior de ordem 3	$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Matriz triangular inferior de ordem 3	$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
Matriz nula de ordem 2×3.	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Fonte: Adaptação de Hefez e Fernandes (2016).

3.2.2 Operações com matrizes

3.2.2.1 Igualdade

Duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, de mesma ordem, são iguais e escrevemos $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e para todo $1 \le j \le n$.

Por exemplo, se x e y denotam números reais, temos que as matrizes $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ são iguais quando $x = -3$ e $y = 2$.

3.2.2.2 Adição

A adição de duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, de mesma ordem $m \times n$, denotada $A + B$, é definida como a matriz $\left[C_{ij}\right]_{m\times n}$ de ordem $m \times n$ obtida adicionando-se os termos correspondentes de A e B. Isto é,

$$C = \left[C_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Define-se a matriz oposta de A, como a matriz $-A = \left[-a_{ij}\right]$. Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

E, podemos dizer que $A = -B$, ou seja, as matrizes A e B são opostas.

3.2.2.3 Multiplicação por escalar

Dada a matriz $[a_{ij}]_{m\times n}$, definimos o produto de A pelo número real k, como sendo a matriz $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$, ou seja,

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, $-3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3.2.2.4 Produto de matrizes

O produto de duas matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, é definido por $AB = [c_{ij}]_{m\times p}$, onde $[c_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq p$, ou seja, o produto de matrizes só poderá ser realizado se o número de colunas da primeira matriz for igual ao número de linhas da segunda, e cada elemento da matriz-produto é obtido, multiplicando-se os elementos da i-$ésima$ linha da primeira matriz pelos elementos da j-$ésima$ coluna da segunda matriz, e somando-se estes produtos.

Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-1)+4(1) & 2(1)+4(-1) \\ 0(-1)+0(1) & 0(1)+0(-1) \\ -1(-1)+3(1) & -1(1)+3(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

3.3 TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Um dos primeiros estudos sobre a álgebra de matrizes foi realizado por Arthur Cayley (1821-1895) em 1858, a partir de uma memória sobre a teoria das transformações e com o objetivo de simplificar a notação de uma transformação linear (BOYER, 1999).

Para Eves (2004, p. 552):

> [...] as matrizes surgiram para Cayley ligadas a transformações lineares do tipo $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ onde, a, b, c, d são números reais, e que podem ser imaginados como aplicações que levam o ponto (x, y) no ponto (x', y'). Obviamente a matriz precedente fica completamente determinada pelos quatro coeficientes a, b, c, d de modo que ela pode ser simbolizada pelo quadro $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ao qual chamamos de matriz (quadrada de ordem 2).

A origem da multiplicação de matrizes é narrada na obra Boyer (1999), como derivada da aplicação sucessiva de duas transformações de modo que se pode pensar nas definições das operações sobre matrizes como nas de uma "álgebra".

Uma transformação linear de V em W, sendo V e W subespaços vetoriais, é uma função $T: V \to W$ que preserva as operações de adição de vetores e de multiplicação de um vetor por um escalar, ou seja, $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ e $T(\alpha v) = \alpha T(v)$, para quaisquer v_1, v_2 e v em V e α em $\mathbb{R}$.

Em particular, “uma transformação linear bijetora é chamada isomorfismo. Dois espaços vetoriais que possuem um isomorfismo entre eles serão ditos isomorfos, o que em grego, significa que possuem a mesma forma” (HEFEZ; FERNANDES, 2016, p. 121).

Uma transformação linear entre espaços de dimensão finita e bases fixadas pode ser representada por uma matriz e desta forma, muitos problemas associados a transformação podem ser resolvidos com esta teoria.

Assim, seja $T: V \to W$ uma transformação linear em que V e W são espaços vetoriais de dimensões n e m, respectivamente. Considere também $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V e $\beta = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ base de W, vamos definir a matriz desta transformação, denotada por $[T(v)]_\beta^\alpha$:

> [...] como β é base de W, podemos determinar de modo único números reais a_{ij}, com $1 \le i \le n$ e $1 \le j \le m$, tais que $T(v_i) = a_{1i}w_1 + \dots + a_{ji}w_j + \dots + a_{mi}w_m$ (1).Tomemos agora v em V. Temos que $v = k_1v_1 + \dots + k_nv_n$, em que $k_i \in \mathbb{R}$ para $1 \le i \le n$. Pela linearidade de T e por (1), segue que $T(v) = k_1T(v_1) + \dots + k_nT(v_n) = k_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{mi}w_m) + \dots k_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m) = (a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n)w_1 + \dots + (a_{m1}k_1 + \dots + a_{mn}k_n)w_m$.
> Logo,
> $[T(v)]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11}k_1 + & \cdots & +a_{1n}k_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}k_1 + & \cdots & +a_{mn}k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = [T(v)]_\beta^\alpha . [v]_\alpha$,
> onde definimos $[T(v)]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ (HEFEZ e FERNANDES, 2016, p. 134).

Consideremos o exemplo em que $V = W = \mathbb{R}^2$, $\alpha = \beta = \{(1,0); (0,1)\}$ e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma reflexão em torno do eixo OX, ou seja, $T(x, y) = (x, -y)$. Como, $T(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$ e $T(0,1) = (0, -1) = 0\,(1,0) - 1(0,1)$, podemos concluir que a matriz que representa a reflexão em torno do eixo OX é $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

3.4 GEOMETRIA DAS TRANFORMAÇÕES NO PLANO

Nos textos desta seção apresentamos definições, exemplos e ilustrações das transformações geométricas rígidas e a transformação por escala. São chamadas transformações geométricas rígidas, as translações, reflexões e rotações, pois ao aplicar esses tipos de transformações a uma figura, a imagem da figura transformada manterá a forma e as dimensões.

Em alguns livros do Ensino Médio as transformações geométricas são abordadas como aplicação do conceito de matriz. Este é o caso de Dante (2017) e Paiva (2015) que apresentam as transformações geométricas como sendo quatro: rotação, reflexão, escala e translação e referem-se a elas, como funções matemáticas que realizam alterações em uma imagem processada por computador ou através da teoria de matrizes.

Segundo Dante (2017, p. 86):

> Quando um programa gráfico altera a posição, reflete, rotaciona ou muda a escala de uma imagem, na verdade está mudando a posição dos pixels que a formam. Em computação gráfica isso tudo é feito por operações de matrizes; é o que se chama de transformações geométricas.

As alterações em uma imagem no plano são realizadas por meio de funções matemáticas bijetoras chamadas isometrias, de modo que, a partir de uma figura geométrica original, se forma outra congruente ou semelhante a primeira.

Lima (2002), define uma transformação T no plano Π como uma função $T: \Pi \to \Pi$, ou seja, é "uma correspondência que associa a cada ponto P do plano outro ponto do mesmo plano $P' = T(P)$, chamado de imagem por T" (p. 137). E chama de isometria a uma transformação que preserva as distâncias entre pontos e a amplitude dos ângulos, ou seja, a distância entre dois pontos P e Q, no plano Π, é a mesma que as distâncias entre os pontos P' e Q', imagens de P e Q pela aplicação da transformação.

Assim, quando se fixa um sistema de eixos ortogonais OXY, uma isometria qualquer do plano transforma o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = T(P) = (x', y')$, no mesmo plano, ou em planos distintos.

São exemplos de isometrias as translações, reflexões e rotações, ou seja, são transformações geométricas no plano que convertem uma figura original em outra congruente, preservando as distâncias entre pontos e as amplitudes dos ângulos.

Existem transformações geométricas do plano que não preservam a distância entre os pontos. Essas transformações são chamadas por Dante (2017) de transformação escala, que consiste em ampliar ou reduzir figuras horizontalmente ou verticalmente. Lima (2002) chama algumas dessas transformações de semelhanças; nelas os ângulos respectivos da figura de origem e da figura transformada são iguais, enquanto que as distâncias entre a figura de origem e a figura transformada são proporcionais. Em outras palavras, duas figuras no plano são semelhantes quando uma é a imagem da outra por meio de uma transformação de semelhança.

3.4.1 Translação

A translação consiste em realizar o deslocamento de uma figura, conservando a forma, o tamanho, a direção e o sentido da figura original.

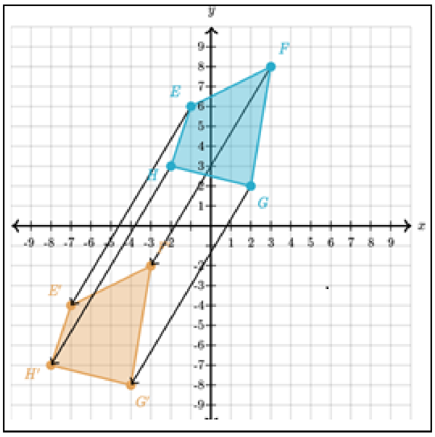
De modo formal, para Lima (2002), num dado sistema de eixos ortogonais, para cada ponto $P = (x, y)$, tem-se o ponto $P' = Tv(P) = (x + \alpha, y + \beta)$, que é resultado da adição dos valores α e β, respectivamente, a abscissa e a ordenada do P, onde $Tv: \Pi \to \Pi$ é a transformação translação e (α, β), coordenadas do vetor de translação v, que indica a direção e o sentido do deslocamento, ou seja,

> [...] a translação Tv, transforma toda figura F numa figura $Tv(F) = F'$ cujos pontos $P + v$, são obtidos transladando-se os pontos P de F pelo mesmo vetor v. Em particular, uma reta r é transformada na reta $Tv(r) = r + v = \{P + v;\ Pr\}$ que é paralela a v. (LIMA, 2002, p. 141).

Escrevendo o ponto $P = (x, y)$ e o vetor de translação $v = (\alpha, \beta)$, na forma de matriz coluna, isto é, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$, para Dante (2017), podemos “transladar esse ponto $P = (x, y)$, de α unidades para a direita e β unidades para cima, efetuando a adição: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{bmatrix}$.

Na Figura 7, está ilustrado um exemplo da translação de um quadrilátero.

Figura 7 – Exemplo de translação de um quadrilátero.



Fonte: Khan Academy. Disponível em: < https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/geo-translations/a/translating-shapes?modal=1> Acesso em: 16 abr. 2020.

Observamos que o quadrilátero $EFGH$ sofreu uma translação de 6 unidades para esquerda e 10 unidades para baixo, dando origem ao quadrilátero $E'F'G'H'$ e portanto, para cada ponto da figura foi diminuído 6 unidades da abscissa e 10 unidades da ordenada, ou seja, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + (-6) \\ y + (-10) \end{bmatrix}$ ou $T(x, y) = (x, y) + (-6, -10) = (x - 6, y - 10)$.

Em particular, aplicando essa transformação aos vértices do quadrilátero obtemos:

(-1,6) $\longmapsto$ (-7,-3), pois $E = (-1,6) \longmapsto E' = T(-1,6) = (-1,6) + (-6,-10) = (-7,-3)$,

$(3,8) \longmapsto (-3,-2)$, pois $F = (3,8) \longmapsto F' = T(3,8) = (3,8) + (-6,-10) = (-3,-2)$

$(2,2) \longmapsto (-4,-8)$, pois $G = (2,2) \longmapsto G' = T(2,2) = (2,2) + (-6,-10) = (-4,-8)$ e

$(-2,3) \mapsto (-8,-7)$, pois $H = (-2,3) \mapsto H' = T(-2,3) = (-2,3) + (-6,-10) = (-8,-7)$.

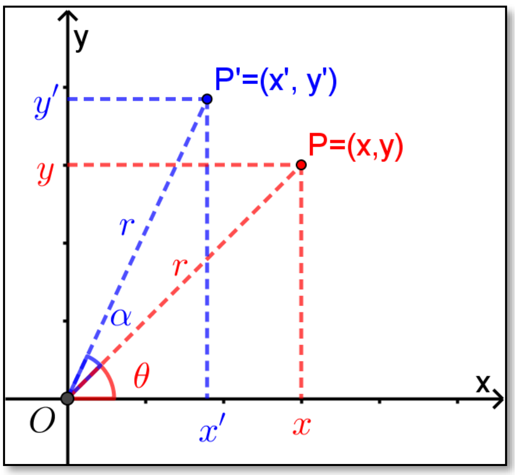
3.4.2 Rotação

Uma rotação consiste em girar cada ponto de uma figura em determinado número de graus em torno de um determinado ponto referencial. A rotação pode ser positiva se o giro for no sentido anti-horário, e negativa, se o giro for horário.

Para Lima (2002), uma rotação de centro na origem e ângulo α, em um sistema de eixos ortogonais no plano OXY, transforma o ponto $P = (x, y)$, no ponto $P' = T(P) = (x', y')$, com $x' = x\,cos\alpha - y\,sen\alpha$ e $y' = x\,sen\alpha + y\,cos\alpha$.

Considerando r a distância do ponto P a origem O, demonstramos esta afirmação com base na Figura 8.

Figura 8 – Rotação do ponto P



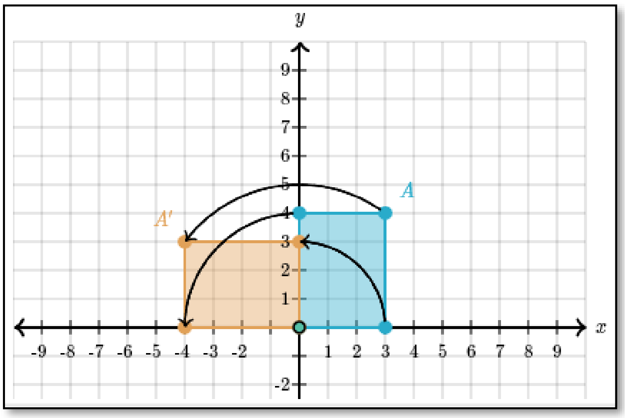
Fonte: Adaptado de Boldrini et al. (1980).

Notamos que "$x' = r\,cos(\alpha+\theta) = r\,cos\alpha\,cos\theta - r\,sen\alpha\,sen\theta$. Mas, $rcos\theta = x$ e $r\,sen\theta = y$. Então, $x' = x\,cos\alpha - y\,sen\alpha$. Analogamente, $y' = r\,sen(\alpha+\theta) = r(sen\alpha\,cos\theta + cos\alpha\,sen\theta) = y\,cos\alpha + x\,sen\alpha$" (BOLDRINI et al., 1980, p. 149). Assim, $P' = T(x,y) = (x\,cos\alpha - y\,sen\alpha, y\,cos\alpha + x\,sen\alpha)$ ou, na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} x\,cos\alpha - y\,sen\alpha \\ y\,cos\alpha + x\,sen\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Na Figura 9, ilustramos a rotação de um retângulo, considerando o caso particular onde $\alpha = 90°$, no sentido anti-horário e em torno da origem $(0,0)$.

Figura 9 – Exemplo de rotação de um quadrilátero



Fonte: Khan Academy. Disponível em:< https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/geo-rotations/a/rotating-shapes?modal=1> Acesso em: 16 abr. 2020.

Observamos que, $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 3\,cos\ 90° - 4\,sen90° \\ 4\,cos90° + 3\,sen90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(0) & -4(1) \\ 4(0) & 3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, ou seja, $A \longmapsto A'$. O mesmo ocorre com os outros pontos, $(0,4) \longmapsto (-4,0)$, $(0,0) \longmapsto (0,0)$ e $(3,0) \longmapsto (0,3)$.

3.4.3 Reflexão

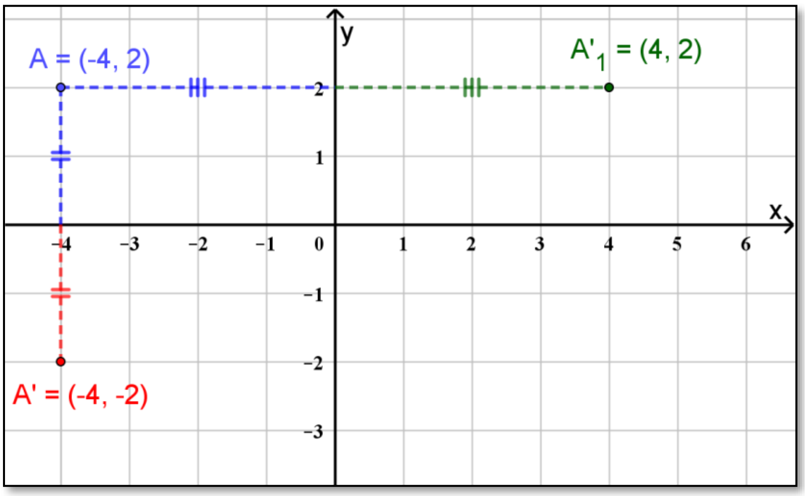
Uma reflexão é um tipo de transformação que reflete cada ponto de uma figura sobre uma reta, ou seja, cada ponto da figura original e o ponto que corresponde a sua imagem refletida estão sobre uma reta perpendicular ao eixo de reflexão e a mesma distância desse eixo.

De modo formal, para Lima (2002), "uma reflexão em torno de uma reta r, é a transformação T que faz corresponder a cada ponto P do plano o ponto $P' = T(P)$, simétrico de P em relação a r" (p. 150). Em particular, "tomando um sistema de eixos ortogonais OXY, no qual o eixo OX coincida com a reta r em torno da qual se dá a reflexão T, para cada ponto $P(x, y)$ tem-se $P' = T(P) = (x, -y)$" (LIMA, 2002, p. 151).

Na forma matricial, essa reflexão pode ser obtida pela multiplicação, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$, onde $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ representa a matriz de reflexão em relação ao eixo OX.

Na Figura 10 está apresentada a reflexão do ponto $A = (-4,2)$ em torno do eixo OX e, em torno do eixo OY.

Figura 10 – Reflexão do ponto A



Fonte: Elaborado pela autora.

Notamos que, a reflexão do ponto A em torno do eixo OX, transforma $(-4, 2) \mapsto A' = (-4, -2)$, ou seja, $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. E a reflexão deste mesmo ponto em torno do eixo OY, transforma $(-4, 2) \mapsto A'_1 = (4,2)$, ou seja, $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, onde $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, são respectivamente, as matrizes de reflexão em relação aos eixos OX e OY.

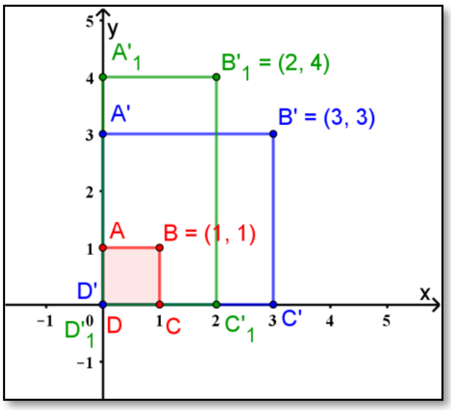
3.4.4 Escala

Para Paiva (2015), quando dilatamos uma figura, horizontalmente ou verticalmente, estamos efetuando uma transformação escala, que consiste em multiplicar abscissa e ordenada de um ponto $P = (x, y)$ pelos números reais a e b, respectivamente, obtendo o ponto $P' = T(P) = (ax, by)$, resultado da transformação de escala no ponto P, pelos fatores a e b, nas direções de OX e OY, respectivamente.

Na forma matricial, a transformação pode ser representada pela multiplicação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$, ou simplesmente, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto a \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ ay \end{bmatrix}$, no caso em que os fatores de dilatação horizontal e vertical sejam iguais. Lima (2002) chama esse caso particular de transformação de semelhança ou homotetia.

Na Figura 11 está ilustrada a dilatação do quadrilátero $ABCD$ de centro na origem $(0,0)$ e fator de dilatação $a = b = 3$ e com fatores de dilatação horizontal $a = 2$ e vertical $b = 4$.

Figura 11 – Exemplos de transformação escala



Fonte: Adaptação de Boldrini et al. (1980).

Observamos que, a dilatação do quadrilátero $ABCD$, transforma $(1,1) \longmapsto B' = 3(1,1) = (3,3)$, analogamente, $(0,0) \longmapsto D' = (0,0)$; $(1,0) \longmapsto C' = (3,0)$ e $(0,1) \longmapsto A' = (0,3)$, onde obtemos o quadrilátero $A'B'C'D'$.

Já, a transformação escala com fatores de dilatação horizontal, $a = 2$ e vertical, $b = 4$ transforma, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 4y \end{bmatrix}$, para todas os pontos pertencentes ao quadrilátero $ABCD$, como por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, ou seja, $B = (1,1) \longmapsto B_1' = \big(2(1), 4(1)\big) = (2,4)$. Com esta transformação escala, obtemos o quadrilátero $A_1'B_1'C_1'D_1'$.

4 PROPOSTA DA SEQUÊNCIA DE ENSINO

Neste capítulo apresentamos a proposta de ensino composta por 22 atividades sobre transformações geométricas e matrizes, elaborada para ser desenvolvida com estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Este trabalho foi realizado por meio de uma pesquisa bibliográfica, do tipo estudo documental, com base em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio e Superior, artigos científicos e acesso a plataforma Khan Academy e ao software GeoGebra.

4.1 METODOLOGIA DA PROPOSTA

As atividades aqui propostas consistem na construção, exploração e análise de algumas transformações geométricas planas, a saber, translação, reflexão, rotação e escala e a sua relação com matrizes.

De modo geral, as transformações geométricas não são estudadas no Ensino Médio e temos a pretensão de propor o estudo delas como uma forma de aplicar o conteúdo de matrizes, normalmente estudadas no segundo ano do Ensino Médio, estabelecendo um vínculo entre Geometria e Álgebra.

A ideia geral das atividades é que pretendemos, a partir de uma interpretação das transformações geométricas, obter sua representação algébrica em forma de matrizes. Isto será realizado com a representação de transformações no plano cartesiano e com a análise da relação entre coordenadas dos vértices das figuras transformadas. Esta forma de interpretar algebricamente as transformações geométricas levam em consideração algumas propriedades geométricas que permitem estudar as operações entre matrizes.

A proposta foi planejada para ocorrer em seis encontros presenciais, sendo o primeiro destinado a divulgação, a investigação sobre os interesses dos estudantes e de seus conhecimentos prévios, além, de informar as orientações para primeira aula. O último será destinado a apresentação de situações, como por exemplo, de protótipos e painéis de pintura, que podem ser criados pelos estudantes, com base nas aprendizagens adquiridas e que tenham alguma função social na comunidade a qual os estudantes pertençam.

Os outros encontros foram planejados com base na concepção de sala de aula invertida, ou seja, foram divididas em três etapas denominadas Pré-aula, Aula e Pós-aula. As atividades planejadas para Pré-aula devem ser realizadas individualmente e no tempo que antecede o encontro presencial. Estas atividades constituem pesquisa livre e estudos na plataforma educacional e digital Khan Academy, a partir de vídeos, artigos e testes recomendados pela professora. Os estudantes acessam esses materiais quando se inscrevem na turma, utilizando um código, previamente cadastrado e fornecido pela professora. Esse cadastro permite que a professora acompanhe a frequência dos estudantes e fornece índices de desempenho individuais e coletivos. Esses índices devem ser utilizados para avaliação diagnóstica, ajustes no planejamento e criação de critérios para organização de grupos de estudos.

A Aula (encontro presencial) também será organizada em três etapas: Na primeira etapa deve ser fornecido o feedback do desempenho da Pré-aula, dando maior ênfase aos aspectos positivos e orientando os alunos a refletir sobre a aplicação dos conteúdos estudados. É importante também apresentar os objetivos, deixar claro como os alunos serão avaliados e registrar no quadro um roteiro da proposta, para que os estudantes possam se organizar no tempo disponível. É nesse momento também que a professora compõe os grupos, levando em consideração alguns critérios tais como: disponibilidade de recursos tecnológicos, acesso à internet e desempenho nas atividades recomendadas na plataforma Khan Academy, durante a Pré-aula.

Na etapa seguinte, os estudantes realizam as atividades da Aula em grupos, utilizando a plataforma Khan Academy e o software GeoGebra, livros didáticos e solicitando auxílio à professora, quando necessário, e por fim, cada grupo deverá apresentar as aprendizagens aos demais grupos, de acordo com as combinações do início da aula. Na última etapa os alunos receberão as orientações sobre as atividades que devem ser realizadas antes do próximo encontro e realizarão uma avaliação coletiva do desempenho da turma apresentando sugestões para contribuir com os ajustes da proposta.

Entendemos que o professor deve atuar como mentor, mediando as relações dos estudantes em cada grupo e entre os grupos ofertando recursos para o desenvolvimento das tarefas, dando suporte quanto aos recursos tecnológicos, fazendo ajustes nas propostas quando necessário e principalmente levando-os a reflexões, de modo que sejam responsáveis pela própria aprendizagem, ou seja, o aluno aprende sozinho ou com a troca entre colegas, assim como é preconizado nas metodologias ativas.

4.2 ATIVIDADES PROPOSTAS

No texto que segue apresentamos as atividades elaboradas para implementação desta pesquisa, divididas em seis aulas, sendo a primeira destinada a apresentação da proposta, organização das aulas e motivações para aprendizagem e as outras cinco, para o desenvolvimento dos conteúdos, contendo a descrição das atividades planejadas.

No Quadro 1 está apresentado uma síntese de como as aulas foram organizadas para o desenvolvimento da sequência didática.

Quadro 1 – Organização das aulas

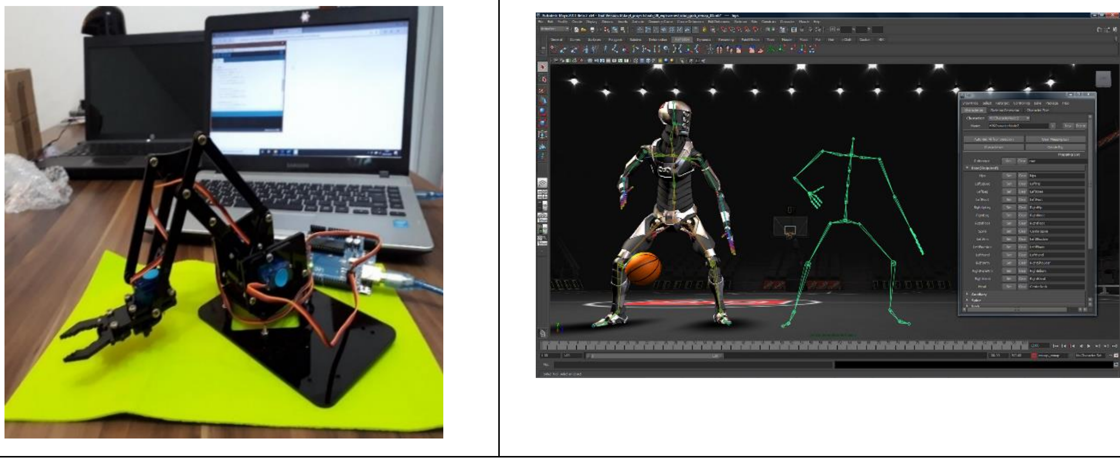
AULAS	TÓPICOS	ATIVIDADES
Aula 0	Apresentação da proposta, organização e motivação.	-
Aula 1	Geometria de coordenadas e matrizes	1, 2, 3, 4 e 5
Aula 2	Translação e adição de matrizes	6, 7, 8 e 9
Aula 3	Reflexão, rotação e multiplicação de matrizes	10, 11, 12 ,13, 14 e 15
Aula 4	Escala	16, 17, 18 e 19
Aula 5	Aplicando aprendizagens	20, 21 e 22

As atividades na íntegra encontram-se no Apêndice A.

4.2.1 Aula 0: Apresentação da proposta, organização e motivação

Acreditamos que no primeiro encontro chamado de Aula 0, precisamos gerar nos estudantes entusiasmo e interesse em aprender. Neste sentido iniciaremos com a apresentação de um robô, que executa movimentos e serão exibidas algumas imagens de computação gráfica, que exemplificam aplicações das transformações geométricas (Figura 12).

Figura 12 – Robô e imagens de computação gráfica



Fonte: Arquivo pessoal da autora; Disponível em:< https://nelsantana.blogspot.com/2010/07/computacao-grafica.html > Acesso em: 8 abr. 2020.

Neste encontro é importante destacar a utilização de metodologias ativas para a aprendizagem, apresentando os conteúdos, a aplicação da sala de aula invertida, a avaliação, os objetivos e as metas para execução da proposta. Em particular, é importante fazer uma sondagem sobre os interesses, rotina de estudos e os recursos que os alunos dispõem, pois será necessário o uso do celular com acesso à internet para realizar a maioria das atividades.

Antes de iniciar a aplicação da proposta, os alunos devem realizar o cadastro individual na plataforma Khan Academy, se inscreverem nas aulas da turma através do código que será fornecido pela professora e instalarem o aplicativo GeoGebra no celular.

Na Aula 0, será solicitado que os alunos realizem em casa a Atividade 1, a qual consiste em pesquisar e registrar no caderno o significado de matrizes, geometria de coordenadas e geometria das transformações no contexto matemático (Figura 13). Esta atividade corresponde ao primeiro momento da sala de aula invertida, PRÉ-AULA.

Figura 13 – Atividade 1/Aula 1.

PRÉ-AULA

Atividade 1: Pesquise e registre no caderno o significado dos seguintes conteúdos no contexto matemático:

- Matrizes
- Geometria de coordenadas
- Transformações geométricas

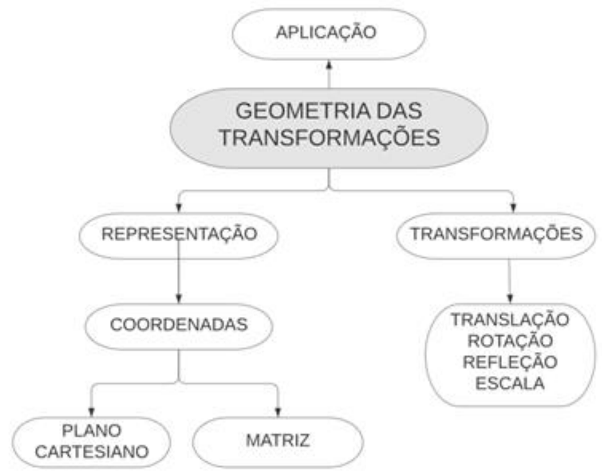
Fonte: Elaborado ela autora.

4.2.2 Aula 1: Geometria de coordenadas e matrizes

Ao iniciar o segundo momento da sala de aula invertida, a AULA, a professora, por meio de questionamentos aos alunos, pode desenhar no quadro, uma estrutura de mapa conceitual preenchendo os dados com os resultados da pesquisa realizada pelos estudantes na Atividade 1. O mapa conceitual ajuda a organizar ideias, conceitos e informações de modo esquematizado, a fim de que os estudantes obtenham uma visão geral dos conteúdos a serem estudados. A partir de indagações sobre o mapa conceitual pretende-se avaliar os conhecimentos prévios dos alunos com a intenção de ajustar as propostas da aula e estabelecer critérios para formação de grupos.

Na Figura 14, está ilustrado um tipo de mapa conceitual que poderá ser elaborado com as informações obtidas na pesquisa realizada pelos alunos no momento da PRÉ-AULA.

Figura 14 – Mapa conceitual: Geometria de coordenadas e matrizes



Fonte: Elaborado pela autora.

Após, a professora deverá organizar a turma em grupos de quatro alunos, de modo que cada grupo contemple os requisitos, comentados na seção 4.1, para a execução das atividades. A atividade desta aula consiste na construção de polígonos no plano cartesiano com o software GeoGebra, descrição dos vértices por pares ordenados, escrita dos pares ordenados em colunas, formando matrizes, resolução de exercícios e aquisição de noções básicas sobre transformações geométricas a partir de vídeos, artigos, exercícios e interações recomendados na plataforma Khan Academy. As atividades para este momento estão indicadas na Figura 15.

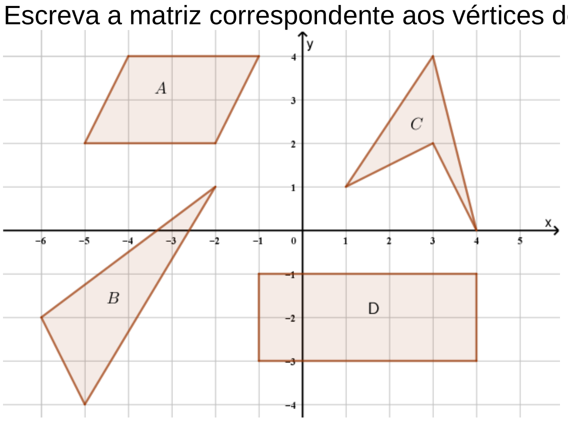
Figura 15 – Atividades 2, 3 e 4/Aula 1

AULA

Atividade 2: Em duplas, construir um polígono, com software de geometria dinâmica GeoGebra, descrever os vértices por pares ordenados e pensar em uma forma de representar o polígono por meio de uma matriz.

Atividade 3: Resolva os exercícios

1- Escreva a matriz correspondente aos vértices de cada polígono a seguir.



2- Use papel quadriculado para construir um plano cartesiano e represente nele os polígonos correspondentes as seguintes matrizes:

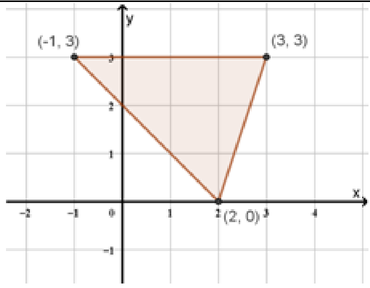
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Atividade 4: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Introdução a transformações rígidas: Aprender e Praticar.

Fonte: Elaborado pela autora.

Para a Atividade 2, espera-se que os estudantes escolham um polígono e representem os pares ordenados em colunas ou linhas com os pontos dos vértices formando uma matriz como o exemplo ilustrado na Figura 16.

Figura 16 – Exemplo de resolução da Atividade 2

Figura	Representação
	$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Fonte: Elaborado pela autora.

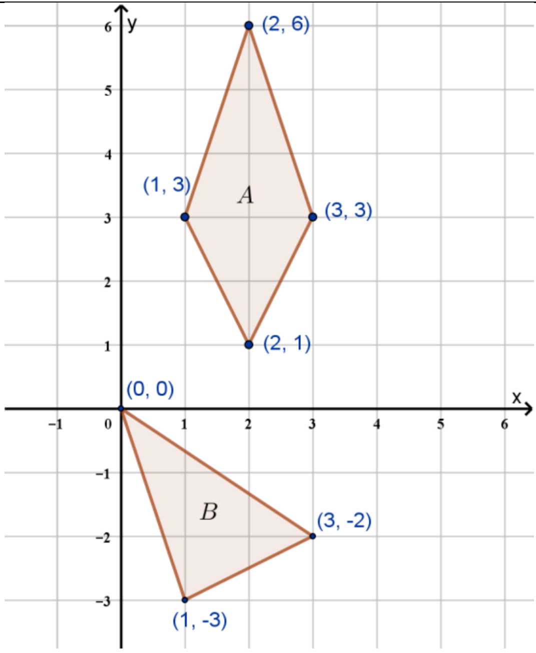
Observemos que neste exemplo os pares ordenados, correspondentes aos vértices $(-1,3)$, $(3,3)$ e $(2,0)$ do polígono, foram inseridos nas colunas e linhas das matrizes seguindo o sentido horário.

Para a Atividade 3, no exercício 1, é necessário que o aluno observe quais são as coordenadas de cada vértice correspondentes a cada polígono. Ou seja, que os vértices de cada polígono têm como coordenadas: $(-5,2)$, $(-4,4)$, $(-1,4)$ e $(-2,2)$ para o polígono A; $(-2,1)$, $(-5,-4)$ e $(-6,-2)$ para o polígono B; $(4,0)$, $(3,2)$, $(1,1)$ e $(3,4)$ para o polígono C e, $(4,-1)$, $(4,-3)$, $(-1,-3)$ e $(-1,-1)$ para o polígono D. Assim, escrevendo as coordenadas de cada polígono como colunas das matrizes, obtém-se, respectivamente:

$A = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -6 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

Já no exercício 2, é necessário fazer o inverso, ou seja, é necessário que o aluno observe que as colunas da matriz A, representam as coordenadas dos vértices do polígono A, e as colunas da matriz B representam as coordenadas dos vértices do polígono B e em seguida construir os polígonos como ilustrado na Figura 17.

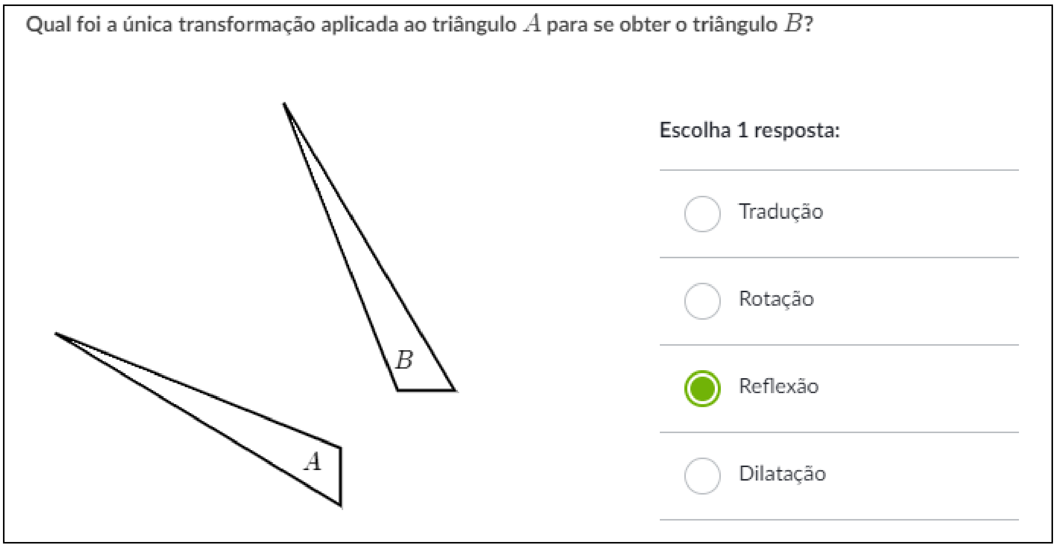
Figura 17 – Resolução da Atividade 3/Exercício 2

Coordenadas dos vértices	Construção
Polígono A: $(2{,}1), (3{,}3), (2{,}6), (1{,}3)$. Polígono B: $(3,-2), (1,-3), (0{,}0)$	

Fonte: Elaborado pela autora.

Para a Atividade 4, o aluno poderá, estudar inicialmente os tópicos: Introdução as transformações rígidas, Introdução às translações e Introdução às rotações em Aprender e após, em Praticar, deverá identificar a transformação aplicada ao polígono escolhendo entre as alternativas: translação, rotação reflexão e dilatação conforme um dos exemplos que está ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – Atividade 4/Aula 1



Fonte: Khan Academy. Disponível em:< https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/rigid-transformations-intro/e/identify-transformations > Acesso em: 31 mar. 2020.

Neste exemplo a transformação aplicada ao triângulo A para se obter o triângulo B é uma reflexão.

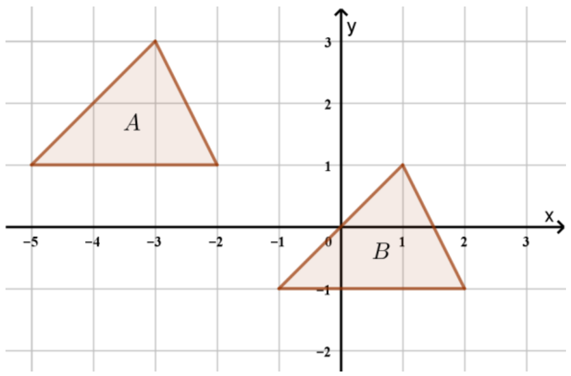
Após o desenvolvimento das atividades 1, 2, 3 e 4 os estudantes deverão fazer uma autoavaliação e em conjunto apontar aspectos positivos observados na resolução das atividades, sugestões de melhorias e refletir a respeito delas; essa prática se repetirá ao final de cada encontro presencial, conforme descrito na seção 4.1.

Ao finalizar o segundo momento da Aula 1, será solicitado que os estudantes realizem a Atividade 5 (Figura 19), a qual faz parte do terceiro momento, chamado de PÓS-AULA e que deverá ser entregue no próximo encontro.

Figura 19 – Atividade 5/Aula 1

PÓS-AULA

Atividade 5: Resolva o exercício.
Observe os triângulos A e B no plano cartesiano abaixo e:



i) escreva os pares ordenados que descrevem os vértices de cada polígono;

ii) escreva a matriz 2 x 3 de cada polígono;

iii) identifique a transformação aplicada no triângulo A para obter o triângulo B;

iv) compare os pares ordenados e as matrizes desses triângulos e descreva propriedades observadas.

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Atividade 5, espera-se que os alunos percebam que a figura B é uma translação da figura A, que identifiquem os vértices do triângulo A pelas coordenadas $(-3{,}3)$, $(-5{,}1)$ e $(-2{,}1)$ e os vértices do triângulo B, pelas coordenadas $(1{,}1)$, $(-1,-1)$, $(2,-1)$, que escrevam as matrizes $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ para representar respectivamente os polígonos A e B e, por fim, percebam que a figura A foi deslocada em 4 unidades para à direita e 2 unidades para baixo, e portanto, a cada abscissa dos pares ordenados que compõem os vértices do triângulo A foram adicionadas 4 unidades, enquanto que a cada ordenada foram diminuídas 2 unidades.

Com o desenvolvimento desta aula, tendo por base a abordagem da sala de aula invertida, espera-se que os estudantes cumpram os objetivos da aula de forma autônoma a partir de consultas bibliográficas e outros materiais sem que haja a necessidade de explicações da professora.

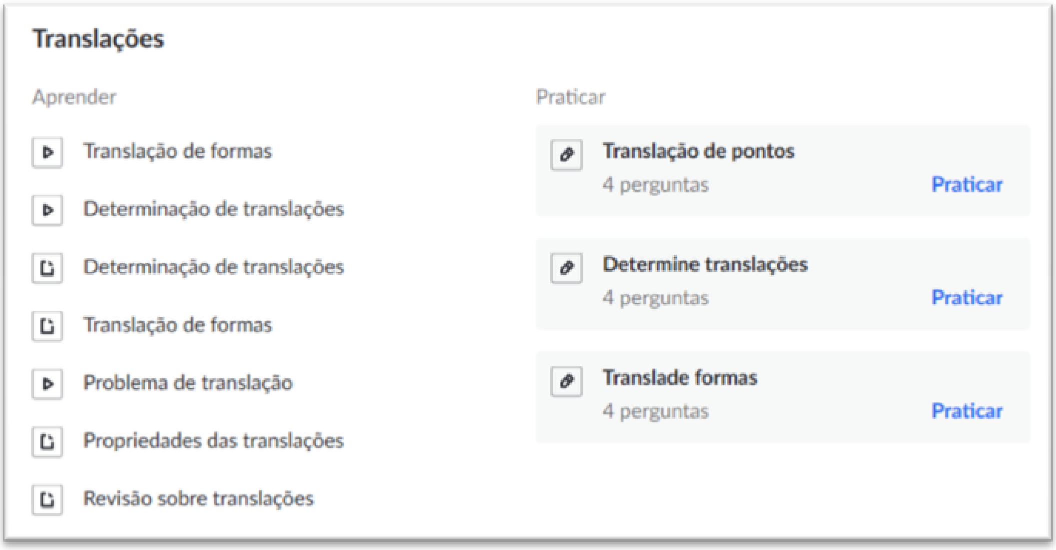
4.2.3 Aula 2: Translações e adição de matrizes

No momento inicial dessa aula, os alunos serão convidados a socializar os resultados da Atividade 5, realizada individualmente na PÓS-AULA, pois esta apresenta uma síntese das aprendizagens da Aula 1. Após, serão organizados em grupos de quatro participantes, de acordo com o desempenho na Atividade 5 (Figura 19) e na Atividade 6 (Figura 20) que serão solicitadas no final da Aula 1. O desempenho dos alunos, na Atividade 6 pode ser consultado a partir de relatórios de aprendizagens, ofertados pela Khan Academy, que ficam armazenados na conta do professor.

Figura 20 – Atividade 6/Aula 2

PRÉ-AULA

Atividade 6: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Translações: Aprender e Praticar.



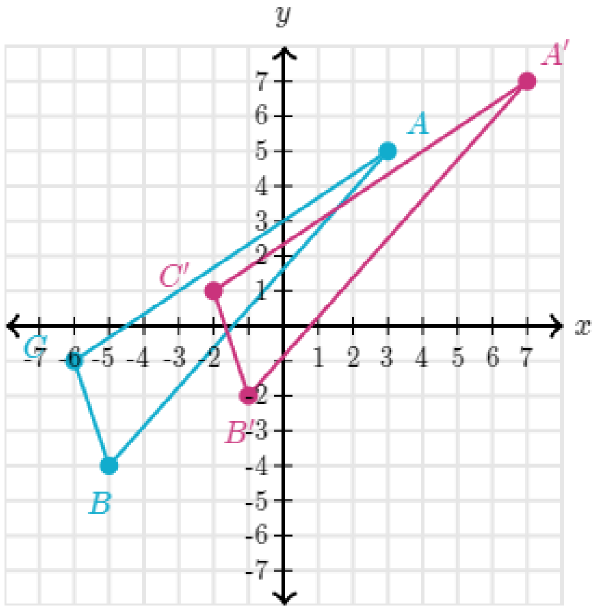
Fonte: Khan Academy. Disponível em:< https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations > Acesso em: 31 mar. 2020.

A seguir os alunos serão orientados a refazer a parte Praticar, dessa atividade a partir das dificuldades apresentadas ou do exercício em que pararam, caso não tenham concluído a atividade antes desse encontro, dessa vez com a cooperação dos colegas do grupo. Esses exercícios consistem em transladar pontos e formas e determinar translações conforme exemplos na Figura 21.

Figura 21 – Exemplos de questões da Atividade 6/Aula 2

Exemplo1

O triângulo $\triangle A'B'C'$ é a imagem de $\triangle ABC$ após uma translação.



Determine a translação.

Use números não negativos.

Uma translação de 4 unidades para a direita e 2 unidades para cima

Exemplo 2

O ponto $B'(6, -5)$ é a imagem de $B(-5, -2)$ após uma translação.

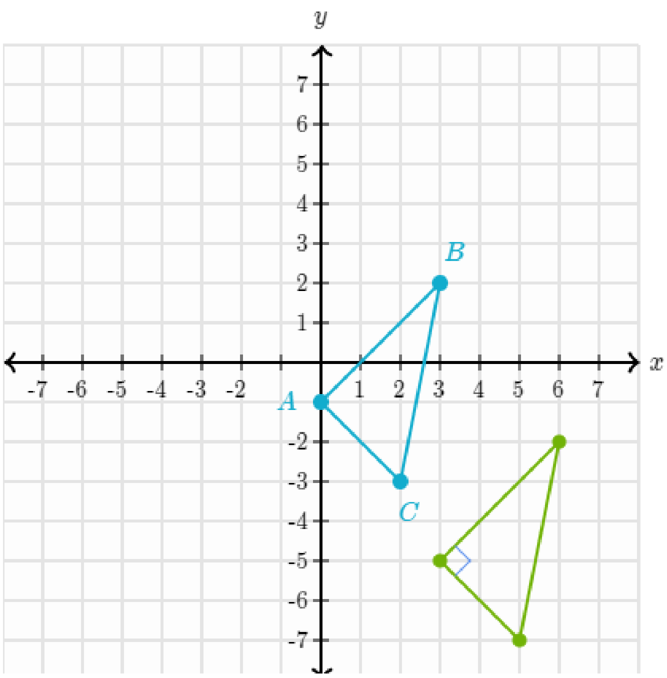
Determine a translação.

Use números não negativos.

Uma translação de 11 unidades para a direita e 3 unidades para baixo

Exemplo 3

Trace a imagem de $\triangle ABC$ após uma translação de 3 unidades para a direita e 4 unidades para baixo.



Fonte: Khan Academy. Disponível em:< https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-transformations-congruence/basic-geometry-translations/e/defining-translations > Acesso em: 31 mar. 2020.

Para realizar exercícios, como os apresentados nos exemplos da Figura 21, por um lado o aluno deve perceber que deslocar um ponto para direita ou para cima, significa acrescentar uma quantidade positiva, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto inicial. Analogamente, deslocar um ponto para esquerda ou para baixo, significa diminuir uma quantidade positiva, respectivamente, da abscissa e da ordenada do ponto de partida. Por outro lado, para realizar a translação de um polígono é necessário arrastar cada vértice a mesma quantidade de unidades para direita ou para esquerda e a mesma quantidade de unidades para cima ou para baixo.

Assim, para realizar o exercício apresentado no Exemplo 1 da Figura 21, o aluno deve perceber que cada vértice do triângulo A’B’C’ está deslocado 2 unidades para acima e 4 unidades para a direita do triângulo ABC, ou seja, ABC sofreu uma translação de 2 unidades para cima e 4 unidades para direita.

Analogamente, no exercício apresentado no Exemplo 2, a abscissa do ponto B passou de -5 para 6, ou seja, sofreu um deslocamento de 11 unidades para direita e a ordenada de 3 unidades para baixo passando de -2 para -5. Assim, o aluno deve entender que foi acrescentado 11 unidades a abscissa e foi diminuído 3 unidades da ordenada do ponto B, ou seja, $B(-5,-2) \to B'(-5+11,-2-3) = (6,-5)$.

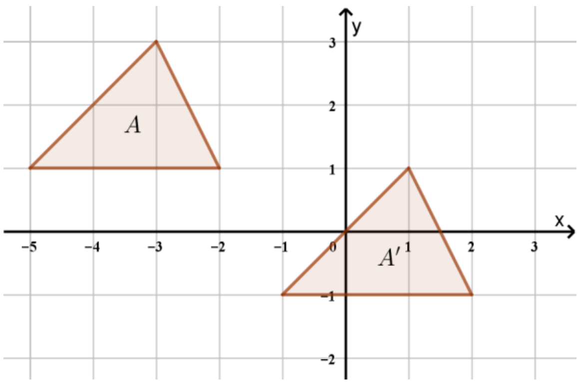
Finalmente, no exercício apresentado no Exemplo 3, cada vértice do triângulo verde deve ser arrastado horizontalmente ao longo do eixo x, e verticalmente ao longo do eixo y, de modo que sua posição final corresponda a imagem do triângulo azul após um deslocamento de 3 unidades para direita e 4 unidades para baixo. Dessa forma os vértices do triângulo verde deverão ocupar as posições $(3, -5)$, $(6, -2\,)$ e $(5, -7)$. Para obter essas coordenadas o aluno deve entender que foi acrescentado 3 unidades a abscissa e foi diminuído 4 unidades da ordenada de cada um dos vértices do triângulo azul.

Na Figura 22, estão apresentadas atividades 7, 8 e 9 que deverão ser realizadas no segundo e terceiro momento desta aula. Para realizá-las, os alunos devem estabelecer a relação entre a matriz de um polígono de origem e a matriz desse polígono após a translação, e com auxílio de textos do livro didático Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017), concluir que, de modo geral, para transladar um ponto $P(x, y)$ de a unidades para a direita e b unidades para cima, efetuamos a adição de matrizes: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix}$.

Figura 22 – Atividades 7, 8 e 9/Aula 2

AULA

Atividade 7: Na figura abaixo o triângulo A sofreu uma translação dando origem ao triângulo A'.



i) Descreva a translação;

ii) Represente a translação por uma matriz coluna.

iii) Escreva as matrizes correspondentes aos triângulos A e A';

iv) Compare as matrizes dos triângulos A e A' e escreva as propriedades observadas.

Atividade 8: Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 87), estabeleça a relação entre a translação e a adição de matrizes.

PÓS-AULA

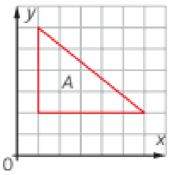
Atividade 9: Resolva os exercícios 49 e 50 do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 88). Para o exercício 50, use malha quadriculada ou GeoGebra.

Exercícios

49. Escreva o que significa cada uma das translações dada pelas matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

50. Copie o diagrama abaixo em uma malha quadriculada. Translade o triângulo *A* de acordo com cada matriz coluna dada e desenhe o triângulo transladado.



a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *B*.

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *C*.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *D*.

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *E*.

e) Em cada caso, escreva a adição de matrizes correspondentes.

Fonte: Elaborado pela autora.

Ao realizar a Atividade 7 espera-se que os estudantes descrevam a translação pela matriz coluna $\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, sendo 4 as unidades de movimento para direita e 2 as unidades de movimento para baixo. Ao descrever as matrizes relacionadas a figura, pretende-se que eles percebam que as colunas da matriz $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ são resultados da adição das matrizes coluna da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ com a matriz que representa a translação, ou seja, $\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Para avaliação da Aula 2, os alunos deverão realizar individualmente a Atividade 9, inserida na Figura 22 e entregá-la no próximo encontro.

As orientações das atividades da PRÉ-AULA correspondente a Aula 3, ilustradas na Figura 23 e consistem em dividir a turma em dois grupos, de modo que cada componente do Grupo 1 ficará responsável pela realização da Atividade 10, enquanto que cada componente do Grupo 2 deverá realizar a Atividade 11. As Atividades 10 e 11 da Aula 3 estão ilustradas na Figura 23.

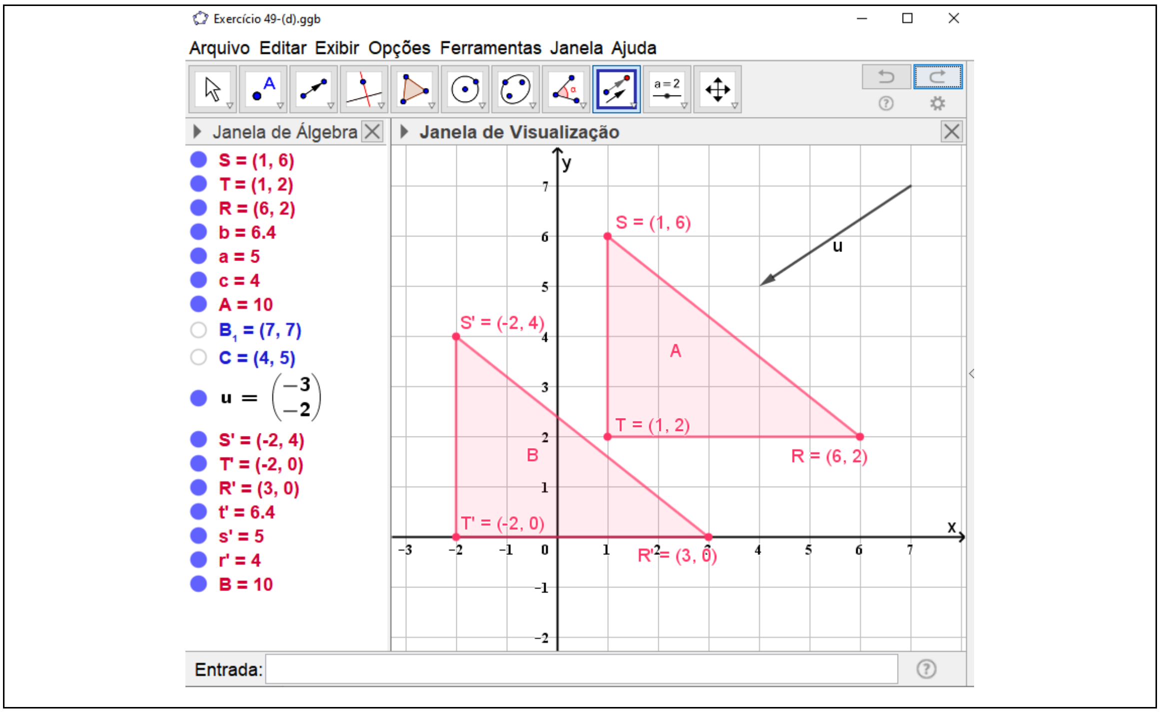
Ao final desse encontro aspira-se que os estudantes, tendo por base as atividades que foram realizadas em grupos com consultas bibliográficas e utilização de recursos tecnológicos tenham compreendido que translação é um tipo de transformação que desliza cada ponto de uma figura na mesma distância e na mesma direção e que esse movimento pode ser representado através da adição de matrizes.

Na resolução da Atividade 9, exercício 48, o aluno deve concluir, por exemplo, em (a) e (c), que as matrizes $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ indicam a translação de um ponto $P(x, y)$, respectivamente, de duas unidades para a direita e três unidades para cima e, de duas unidades para a esquerda e uma unidade para baixo.

Para resolver o exercício 49, com o software GeoGebra, iniciamos exibindo, na janela de visualização, os eixos cartesianos e a malha quadriculada, em seguida, com a ferramenta polígono, construímos o triângulo A e exibimos as coordenadas de cada um de seus vértices. Com a ferramenta vetor, construímos o vetor de translação de acordo com a matriz coluna indicada em cada item do exercício. Em seguida, ao selecionar a ferramenta translação por um vetor, clicamos no objeto a ser transladado, triângulo A, e no vetor de translação e assim, estará pronto o exercício.

Apresentamos, na Figura 6, a resolução do item (d) do exercício 49. O vetor de translação indica um deslocamento de três unidades para esquerda e duas unidades para baixo.

Figura 23 – Resolução do exercício 49/(d)/Aula2



Fonte: Elaborado pela autora no software GeoGebra.

Podemos observar, na resolução apresentada na Figura 23, que os vértices R', S' e T' do triângulo B foram obtidos por meio de uma translação de três unidades à esquerda e duas unidades para baixo, a partir, respectivamente, dos vértices R, S e T do triângulo A. Algebricamente, a transformação geométrica realizada pode ser expressa na forma: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$ sendo $\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$ a matriz que representa a translação indicada em (d).

4.2.4 Aula 3: Rotação, reflexão e multiplicação de matrizes

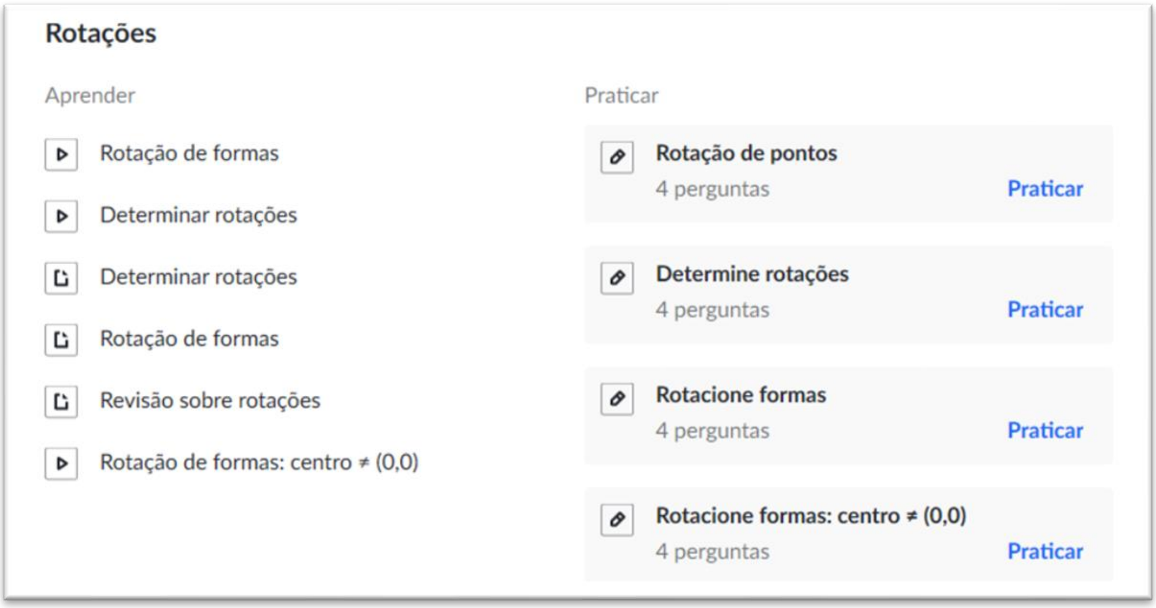
Para qualificar as aprendizagens individuais adquiridas na PRÉ-AULA (Figura 24), no início deste encontro, a professora irá solicitar que os alunos do Grupo 1, se organizem em grupos menores com quatro participantes e preparem a apresentação de um dos exercícios da Atividade 10. De modo análogo, os alunos dos subgrupos do Grupo 2, organizarão a apresentação de um exercício da Atividade 11.

A duração de cada apresentação deverá ser de aproximadamente 15 minutos; os alunos poderão escolher os recursos que irão utilizar e os exercícios serão indicados pela professora.

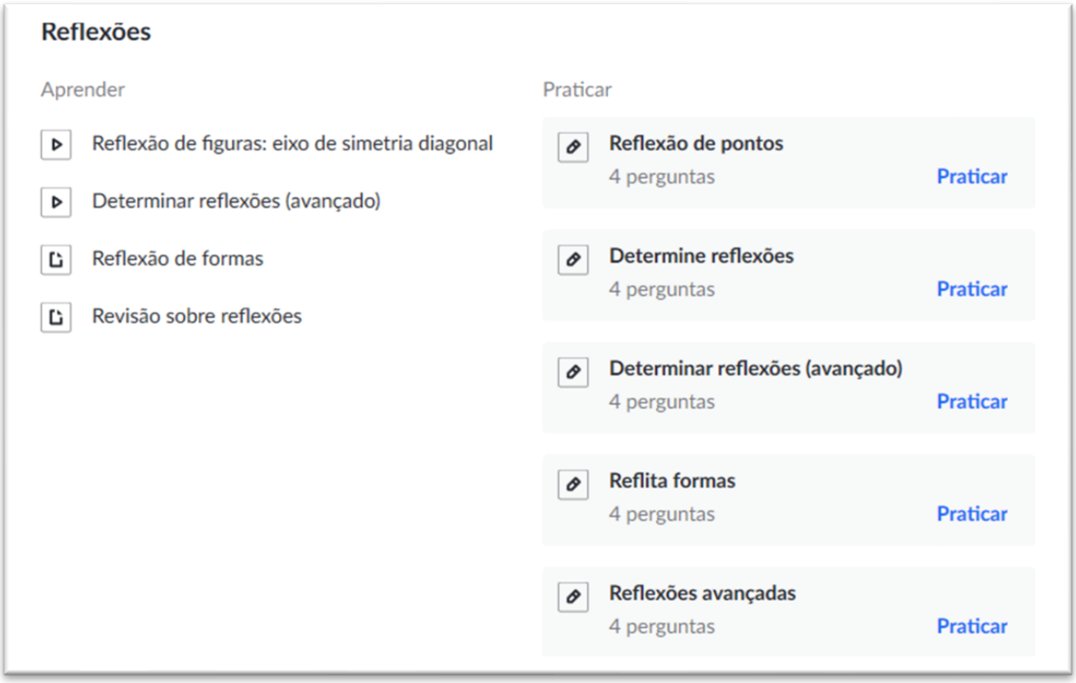
Figura 24 – Atividades 10 e 11/Aula 3

PRÉ-AULA

Atividade 10: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Rotações: Aprender e Praticar.



Atividade 11: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Reflexões: Aprender e Praticar.

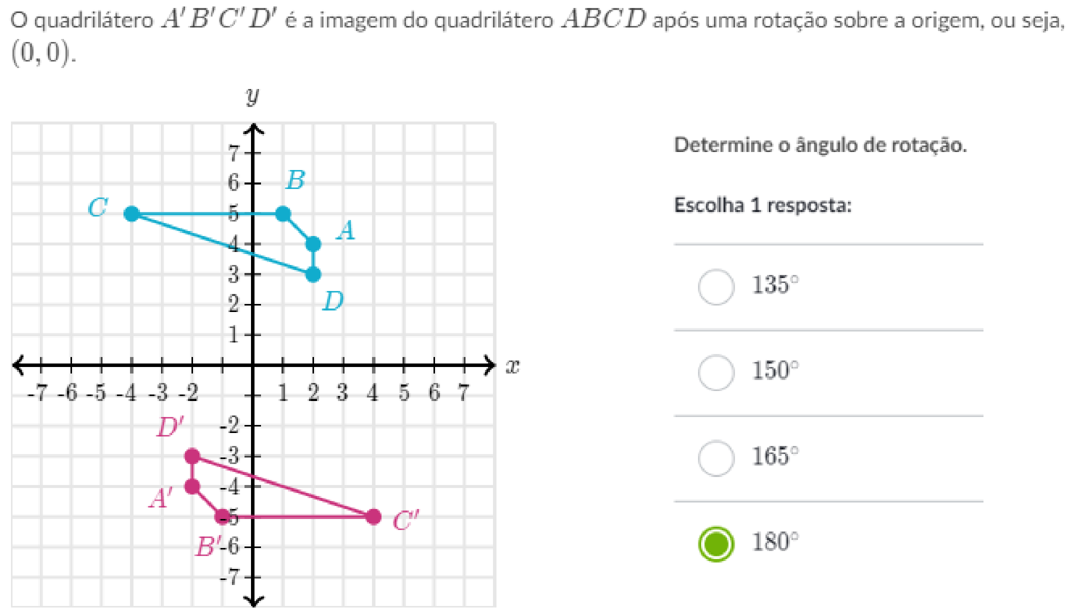


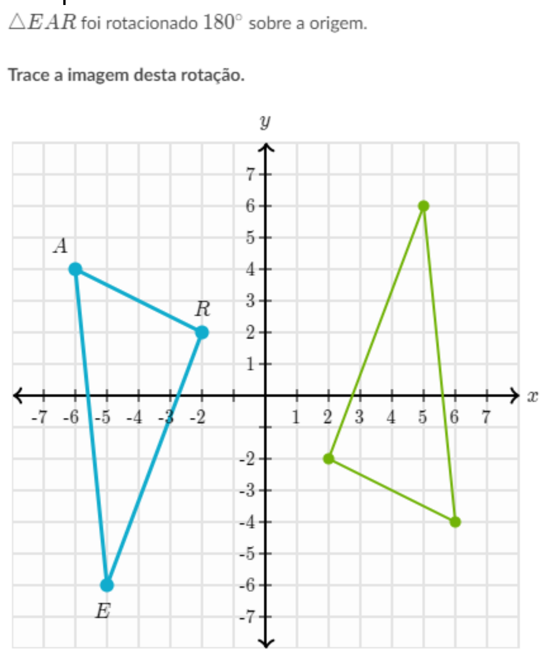
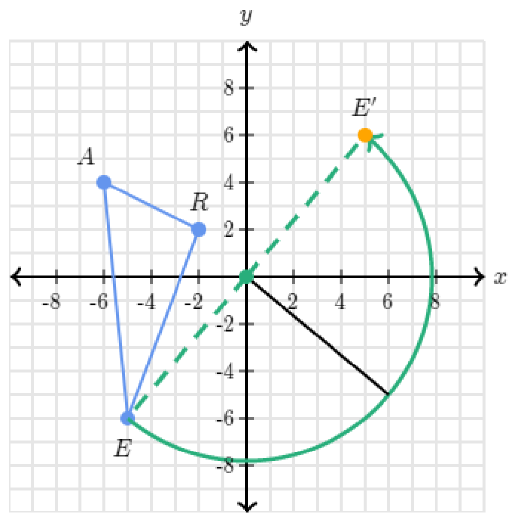
Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 25 estão apresentados exemplos de exercícios relativos à Atividade 10 que abrangem a determinação do ângulo de rotação, a realização da rotação de cada ponto de uma figura em um determinado número de graus em torno de um determinado ponto.

Figura 25 – Exemplos de exercícios da Atividade 10/Aula 3

Exemplo1



Exemplo 2	Rotação do ponto E em 180° sobre a origem
	

Fonte: Khan Academy. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/geo-rotations/v/points-after-rotation > Acesso em: 09 abr. 2020.

Para resolver exercícios como o apresentado no Exemplo 1, o aluno poderá analisar a rotação de um único ponto. Isso dirá qual é o ângulo de rotação, pois todos os outros sofreram a mesma rotação.

Ao analisar a rotação, por exemplo, do ponto A, no Exemplo 1, podemos imaginar um círculo que passa pelo ponto A, com o centro na origem e assim observar que o ponto A deve rotacionar $\frac{1}{2}$ do círculo para se obter a imagem A', ou seja, 180° no sentido horário ou no anti-horário.

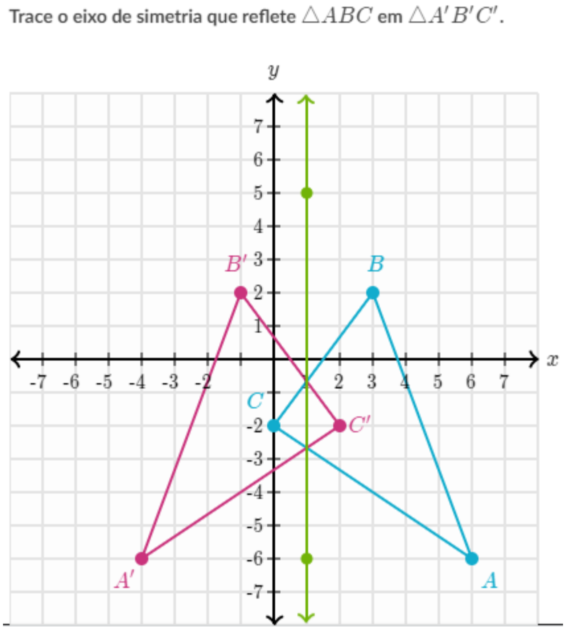
Analogamente, para resolver exercícios como o apresentado no Exemplo 2, podemos imaginar um círculo que passe pelo ponto E, com centro na origem e obter a imagem E' fazendo um giro de $\frac{1}{2}$ círculo no sentido anti-horário, Figura 24/ Exemplo 2, repetindo o processo para os dois outros vértices.

A outra alternativa seria perceber um padrão. Neste caso ao analisar as rotações de 180° em torno da origem o aluno deve perceber que, todos os pontos (x, y) da figura são mapeados para o ponto $(-x, -y)$.

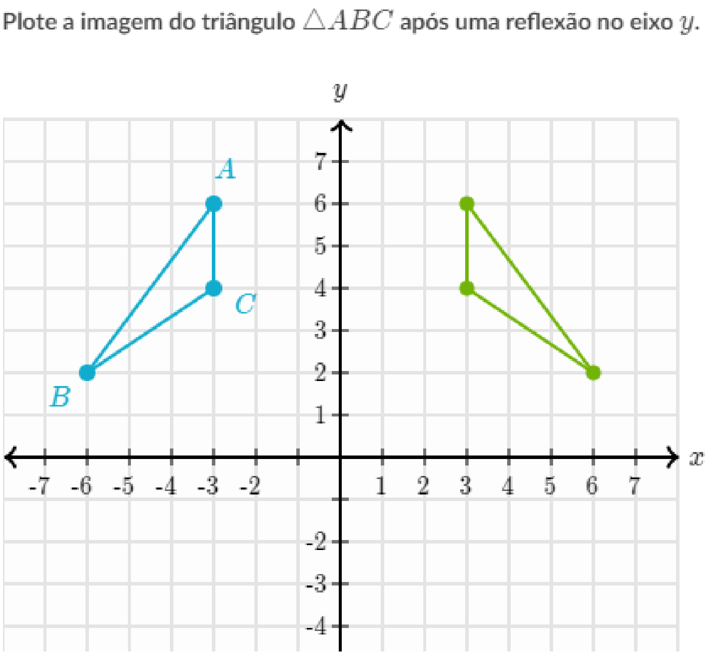
Na Figura 26 estão apresentados exemplos de exercícios da Atividade 11, que consistem em plotar reflexões e traçar o eixo de reflexão de modo que cada ponto na figura inicial esteja à mesma distância e perpendicular do eixo de reflexão, do que o ponto correspondente, na imagem.

Figura 26 – Exemplos de exercícios da Atividade 11/Aula 3

Exemplo 1.



Exemplo 2



Fonte: Khan Academy. Disponível em:< https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/geo-reflections/v/reflecting-segments-over-line > Acesso em: 09 abr. 2020.

Para resolver exercícios como o apresentado no Exemplo 1, o estudante deverá posicionar a reta verde de modo que ela contenha os pontos centrais entre os pontos correspondentes do triângulo ABC e sua imagem $A'B'C'$.

Para encontrar os pontos centrais, do Exemplo 1, podemos calcular o ponto de médio de dois dos segmentos de extremos no triângulo azul e seu correspondente no triângulo rosa, ou seja, $A(-4,-6)$ e $A'(6,-6)$, $B(3,2)$ e $B'(-1,2)$, $C(0,-2)$ e $C'(2,-2)$. Neste exemplo, o eixo de simetria passa por $(1,2)$ e $(1,-2)$, ou seja, o eixo de simetria é a reta $x = 1$.

Ao resolver o Exemplo 2, o aluno deverá arrastar os vértices do triângulo verde horizontalmente de modo que fiquem a mesma distância, em relação ao eixo y, que o vértice correspondente no triângulo azul, ou seja, A' e B' estarão 3 unidades a direita do eixo y e C' estará a direita do eixo y em 6 unidades.

Após a apresentação dos exercícios, os alunos deverão realizar as Atividades 12, 13 e 14 ilustradas na Figura 27, em grupos de quatro participantes e reorganizados pela professora de modo que, dois deles tenham estudado rotações e os outros, reflexões.

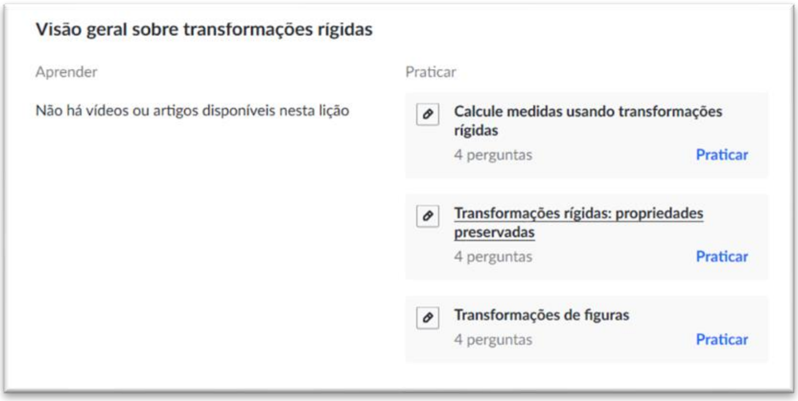
Figura 27 – Atividades 12, 13 e 14/Aula 3

AULA

Atividade 12:
i) Construa, com GeoGebra, um polígono no primeiro quadrante do plano cartesiano e faça a rotação de 180º no sentido anti-horário em torno da origem (0,0).
ii) Escreva as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
iii) Repita os itens i) e ii) mudando apenas o ângulo de rotação.
iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 89-90), estabeleça a relação entre a rotação e a multiplicação de matrizes.

Atividade 13:
i) Construa, com GeoGebra, um polígono no plano cartesiano e faça a reflexão dele em torno do eixo y.
ii) Escreva as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
iii) Repita os itens i) e ii) refletindo o polígono em torno do eixo x.
iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 88-89), estabeleça a relação entre a reflexão e a multiplicação de matrizes.

Atividade 14: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o Visão geral sobre transformações rígidas: Praticar.



Fonte: Elaborado pela autora.

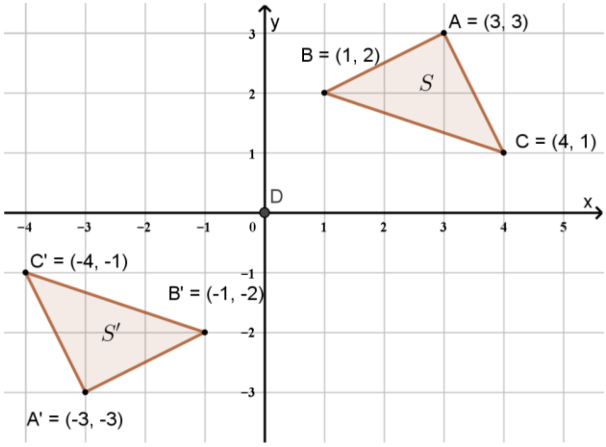
Ao realizar a Atividade 12, aspira-se que os alunos construam um polígono, façam rotações em torno da origem mudando apenas o ângulo e descrevam as propriedades das matrizes associadas a cada imagem concluindo que para se obter uma rotação de ângulo α no sentido anti-horário em torno do ponto (0,0), basta multiplicar a matriz $\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\ \alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ pela matriz associada a figura de origem.

Do mesmo modo, para realizar a Atividade 13, espera-se que os alunos escolham um polígono, façam a reflexão dele em torno dos eixos x e y e descrevam as propriedades das matrizes associadas a cada figura concluindo com auxílio dos textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017), que "de modo geral, para se obter a reflexão em relação ao eixo y de uma figura cuja matriz associada é dada, por $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$, basta efetuar a multiplicação: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$" (p. 89).

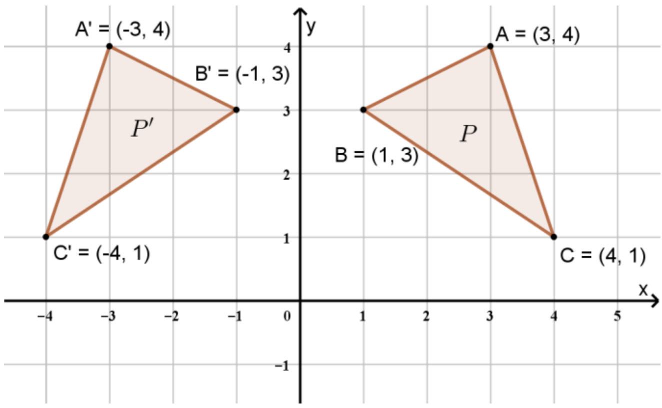
Analogamente, para se obter a reflexão em torno do eixo x basta efetuar a multiplicação: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$.

Apresentamos exemplos destas atividades na Figura 28.

Figura 28 - Exemplos para as Atividades 12 e 13/Aula 3

<table>
<tr><th>ROTAÇÃO</th><th>REPRESENTAÇÃO</th></tr>
<tr><td>Exemplo 1


</td><td>$S = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$S' = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$</td></tr>
<tr><th>REFLEXÃO</th><th>REPRESENTAÇÃO</th></tr>
<tr><td>Exemplo 2


</td><td>$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

$P' = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$</td></tr>
</table>

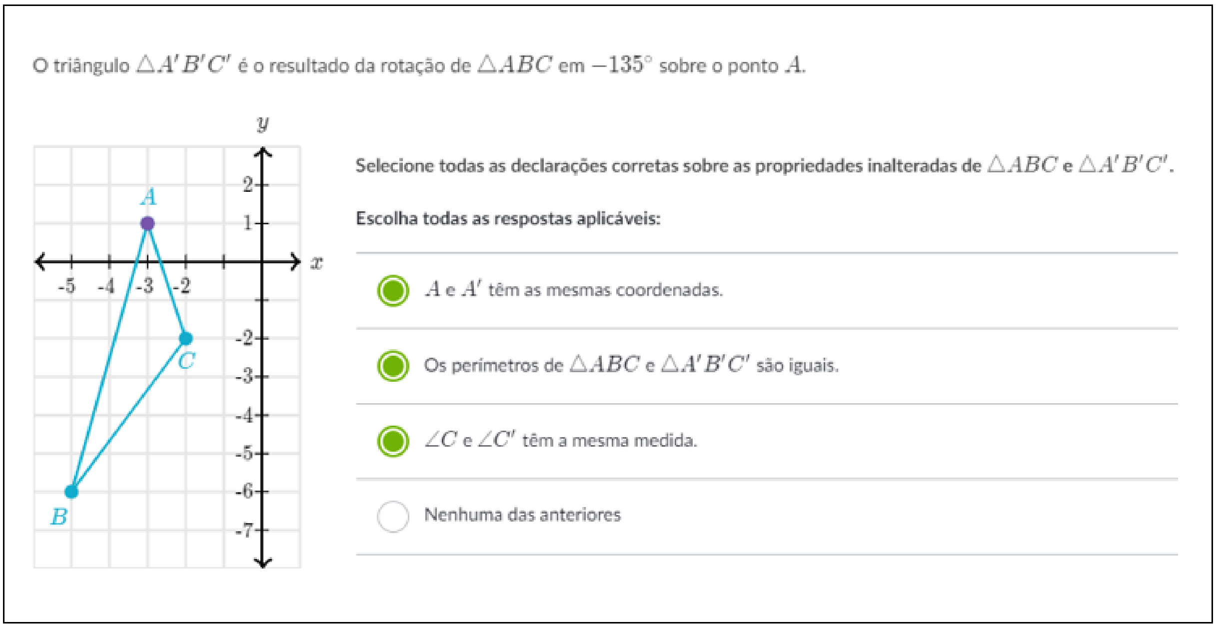
Fonte: Elaborado pela autora.

Observamos no Exemplo 1, que a figura S sofreu uma rotação de 180° no sentido anti-horário em torno da origem (0,0), dando origem a figura S' e que a matriz associada a figura S' corresponde ao produto da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, que corresponde a matriz $\begin{bmatrix} \cos 180° & -sen\ 180° \\ sen\ 180° & \cos 180° \end{bmatrix}$, pela matriz associada a figura S, ou seja, $\begin{bmatrix} \cos 180° & -sen\ 180° \\ sen\ 180° & \cos 180° \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

No Exemplo 2, a figura P' representa a reflexão da figura P em torno do eixo y e a matriz associada a figura P' corresponde ao produto da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pela matriz associada a figura P, ou seja, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

Para realizar os exercícios da Atividade 14 (Figura 27), os estudantes devem compreender que as transformações estudadas preservam distâncias e formas, identificando, como no exemplo ilustrado na Figura 29, quais propriedades ficam inalteradas após a aplicação das transformações rígidas.

Figura 29 – Exemplo da Atividade 14/ Aula 3



Fonte: Khan Academy. Disponível em: < https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/geo-rigid-transformations-overview/e/transformation-preserved-properties?modal=1 > Acesso em: 09 abr. 2020.

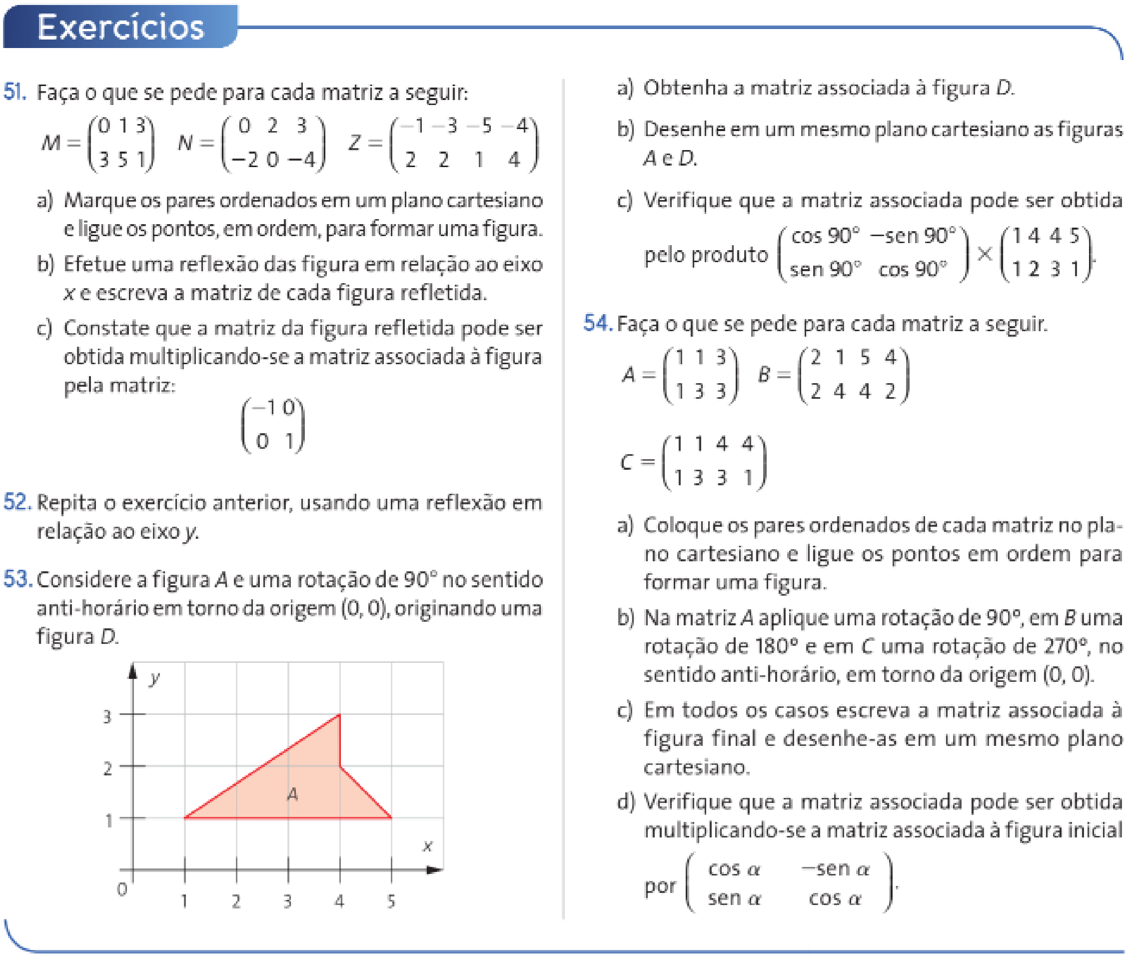
Para finalizar este encontro, após o encaminhamento da Atividade 15 para a PÓS-AULA (Figura 30), a turma será convidada a refletir sobre os desafios vividos durante a apresentação dos trabalhos, no início desta aula, a adaptação aos diferentes grupos de trabalho e a necessidade de aprimorar habilidades referentes a cooperação, respeito às diferenças e tomada de decisões em grupo.

Ao final desta aula esperamos que os estudantes tenham se apropriado de aprendizagens sobre rotações e reflexões, tenham observado que as transformações rígidas estudadas preservam distâncias e formas e que tenham fortalecido relacionamentos com respeito às diferenças.

Figura 30 – Atividade 15/Aula 3

PÓS-AULA

Atividade 15: Faça os exercícios 51 a 54 com GeoGebra ou com uma malha quadriculada.



Exercícios

51. Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Marque os pares ordenados em um plano cartesiano e ligue os pontos, em ordem, para formar uma figura.

b) Efetue uma reflexão das figura em relação ao eixo x e escreva a matriz de cada figura refletida.

c) Constate que a matriz da figura refletida pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura pela matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

52. Repita o exercício anterior, usando uma reflexão em relação ao eixo y.

53. Considere a figura A e uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem (0, 0), originando uma figura D.

a) Obtenha a matriz associada à figura D.

b) Desenhe em um mesmo plano cartesiano as figuras A e D.

c) Verifique que a matriz associada pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

54. Faça o que se pede para cada matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Coloque os pares ordenados de cada matriz no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para formar uma figura.

b) Na matriz A aplique uma rotação de 90°, em B uma rotação de 180° e em C uma rotação de 270°, no sentido anti-horário, em torno da origem (0, 0).

c) Em todos os casos escreva a matriz associada à figura final e desenhe-as em um mesmo plano cartesiano.

d) Verifique que a matriz associada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Fonte: (DANTE, 2017, p. 90).

Na Atividade 15 estão propostos exercícios semelhantes aos desenvolvidos nas Atividades 12 e 13 (Figura 27). O desenvolvimento destes exercícios será utilizado para a avaliação individual dos conhecimentos adquiridos na Aula 3 e poderão ser resolvidos com o software GeoGebra.

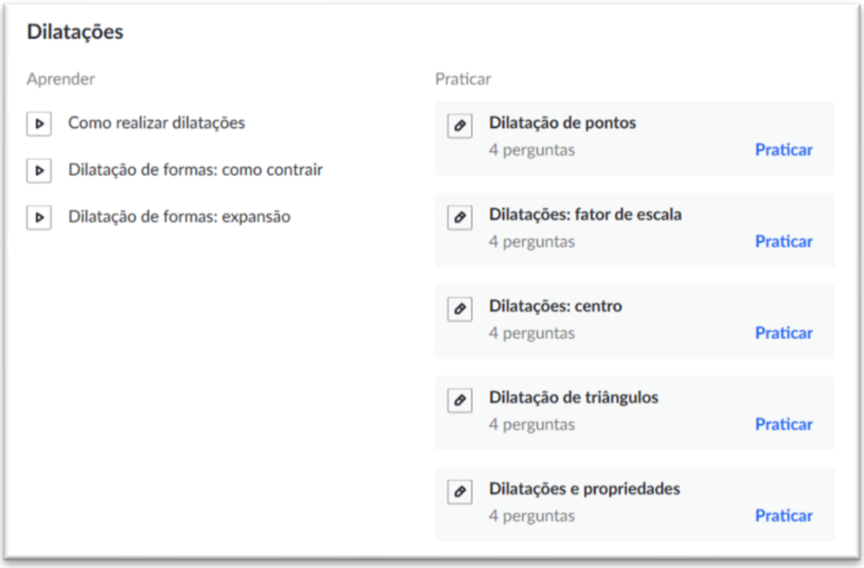
4.2.5 Aula 4: Escala

Ao desenvolver as atividades planejadas para a PRÉ-AULA, Atividade 16 (Figura 31), que envolvem a compreensão de como realizar dilatações e de como identificar fator de escala e ponto de dilatação, pretende-se que os alunos percebam que diferente das transformações rígidas, as dilatações não preservam distâncias.

Figura 31 – Atividade 16/Aula 4

PRÉ-AULA

Atividade 16: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre Dilatação: Aprender e Praticar.

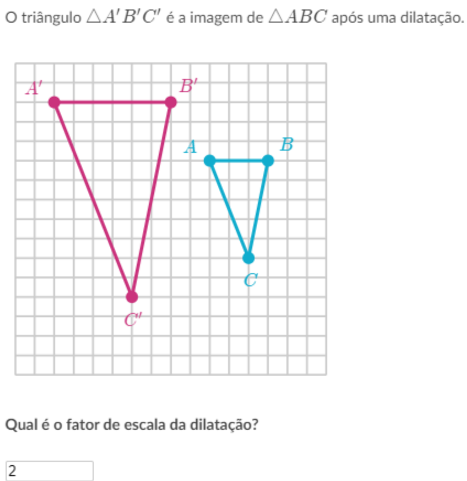


Fonte: Elaborado pela autora.

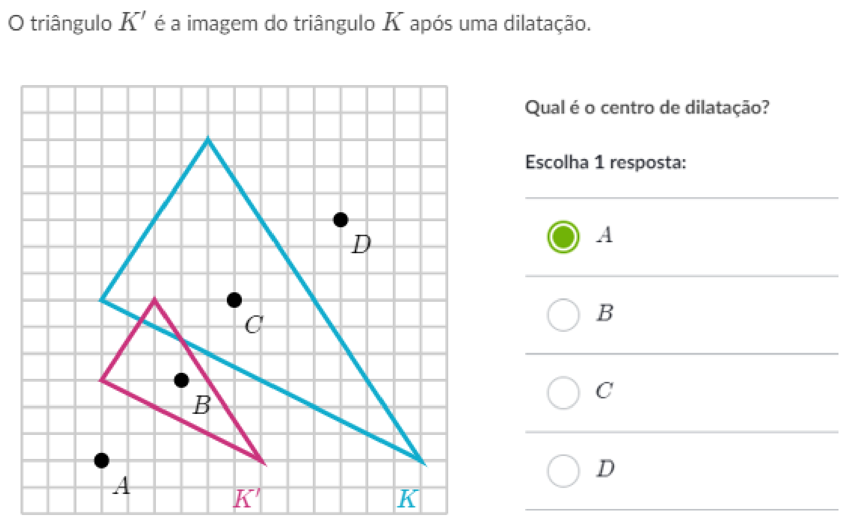
Na Figura 32, estão ilustrados exemplos dessas atividades.

Figura 32 - Exemplos da Atividade 16/Aula 4

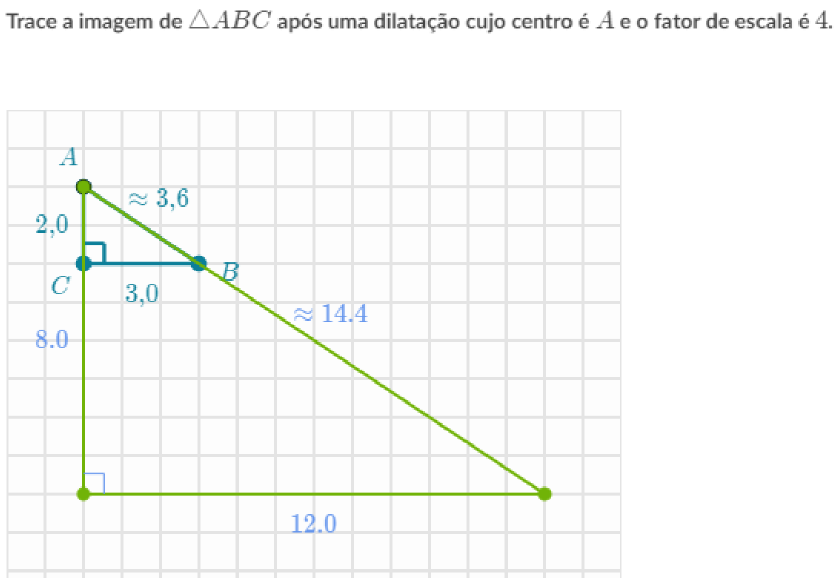
Exemplo1



Exemplo 2



Exemplo 3



Fonte: Khan Academy.Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations/dilations-scaling/e/defining-dilations > Acesso em: 9 abr. 2020.

Para resolver exercícios como os apresentados no Exemplo1 (Figura 32), o aluno deverá perceber que o fator dilatação muda todas as medidas de comprimento da figura e também a distância de todos os pontos a partir do centro de dilatação.

Para resolver o Exemplo 1 podemos comparar, por exemplo, os comprimentos dos segmentos AB e $A'B'$, para perceber que o segmento $A'B'$corresponde ao dobro do segmento AB.

No Exemplo 2, para encontrar o centro de dilatação, podemos imaginar as retas que passam pelos vértices correspondentes dos triângulos azul e rosa. O ponto onde estas retas se cruzam é o centro de dilatação, ou seja, o ponto A.

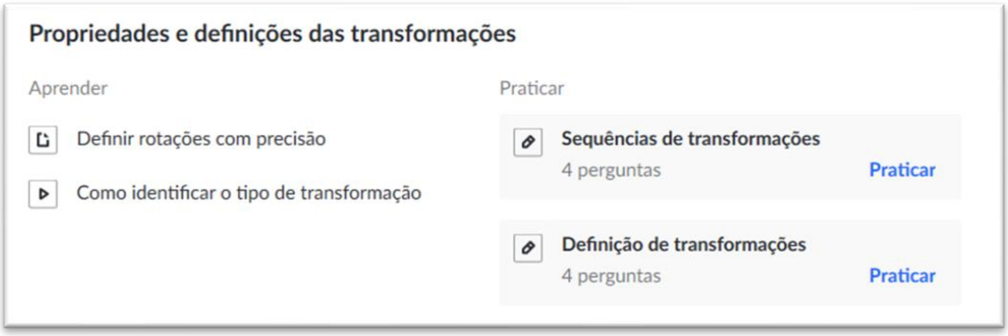
Para construir a imagem do triângulo ABC devemos arrastar os vétices do triângulo verde e posicioná-los de modo que quadriplique a medida do lado do triângulo azul a partir do centro de dilatação A.

Em grupos de quatro participantes, os alunos irão desenvolver as Atividades 17 e 18 (Figura 33) e organizar a apresentação de um exercício previamente sorteado. A apresentação desse exercício ficará a cargo de um dos componentes do grupo, indicado aleatoriamente pela professora. Todos os estudantes do grupo devem se comprometer com as aprendizagens da aula e estarem preparados para esse período que ocorrerá no final desse encontro.

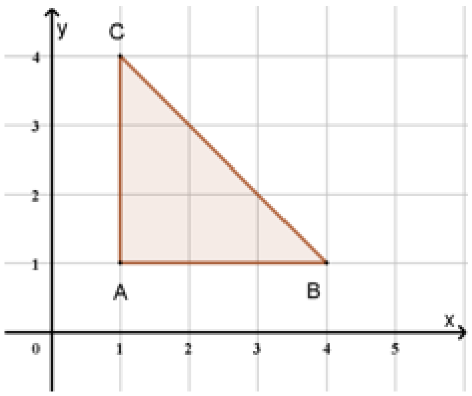
Figura 33 – Atividades 17 e 18/Aula 4

AULA

Atividade 17: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre Propriedades e definições das transformações: Aprender e Praticar.



Atividade 18: Considere o triângulo ABC, a seguir.



i) Aplique nele uma dilatação de centro em A e escala 2. Repita mudando a escala.

ii) Aplique nele uma transformação de centro em A e escala segundo fatores os 1 e 2 nas direções dos eixos OX e OY, respectivamente. Repita, mudando apenas a escala na direção do eixo OY.

iii) Descreva as mudanças observadas.

iv) Qual é a relação entre a área do triângulo inicial e a área dos triângulos após as transformações

Fonte: Elaborado pela autora.

Na Atividade 17 (Figura 33), os alunos devem identificar propriedades preservadas a partir da descrição de uma sequência de transformações, ou identificar uma transformação que descreve uma propriedade, como nos exemplos apresentados na Figura 34.

Figura 34 – Exemplos – Atividade 17/Aula 4

Exemplo 1

Uma sequência de transformações é descrita abaixo.

- Uma reflexão sobre uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$
- Uma rotação sobre o ponto P
- Outra reflexão sobre $\overleftrightarrow{PQ}$
- Uma rotação ao redor do ponto Q

Qual das opções a seguir deve ser preservada depois dessa sequência de transformações?

Escolha 1 resposta:

- ( ) Apenas as medidas dos ângulos
- ( ) Apenas os comprimentos dos segmentos
- (●) As medidas dos ângulos e os comprimentos dos segmentos
- ( ) Nem as medidas dos ângulos nem os comprimentos dos segmentos

Exemplo 2

Um determinado mapeamento no plano xy tem as propriedades a seguir:

- Todo ponto se desloca m unidades na horizontal e n unidades na vertical.
- Se m for positivo, o ponto se desloca para a direita. Se m for negativo, o ponto se desloca para a esquerda.
- Se n for positivo, o ponto se desloca para cima. Se n for negativo, o pnto se desloca para baixo.

Qual transformação o mapeamento define?

Escolha 1 resposta:

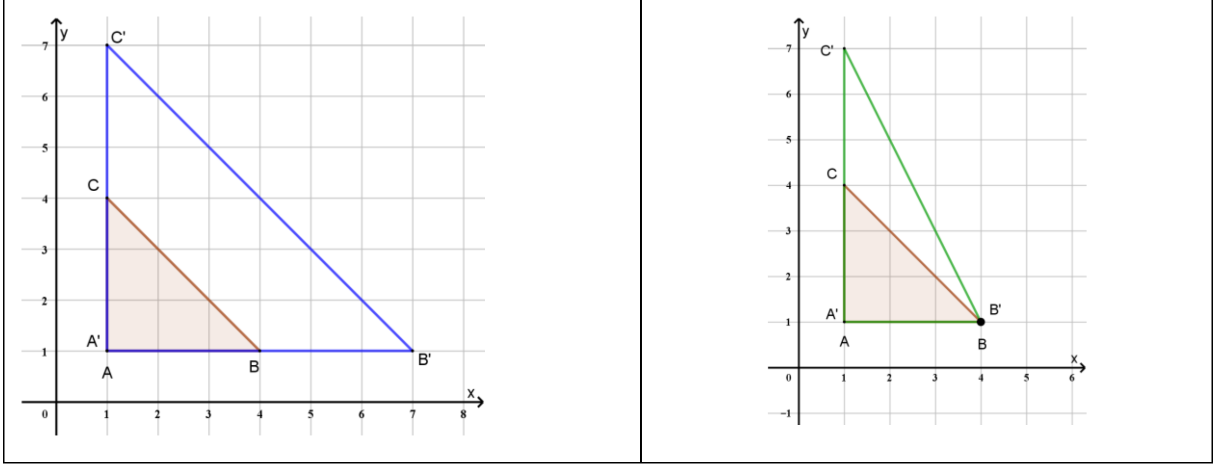
- (●) Uma translação
- ( ) Uma reflexão
- ( ) Uma rotação

Fonte: Khan Academy. Disponível em: < https://pt.khanacademy.org/math/geometry/hs-geo-transformations/hs-geo-transformations-definitions > Acesso em: 9 abr. 2020.

Para a Atividade 18, espera-se que os estudantes realizem as transformações indicadas, como no exemplo da Figura 35 e percebam que ao aplicar a transformação, com o fator de escala 2, o triângulo imagem preservou a medida dos ângulos, dobrou as distâncias entre as coordenadas e quadruplicou a área, enquanto que, ao aplicar a transformação com fatores de escala diferentes para os eixos OX e OY a forma e a distância entre as coordenadas da figura transformada mudaram e a área é t vezes a área da figura inicial.

Figura 35 – Exemplo – Atividade 18/Aula 4

Dilatação	**Escala**



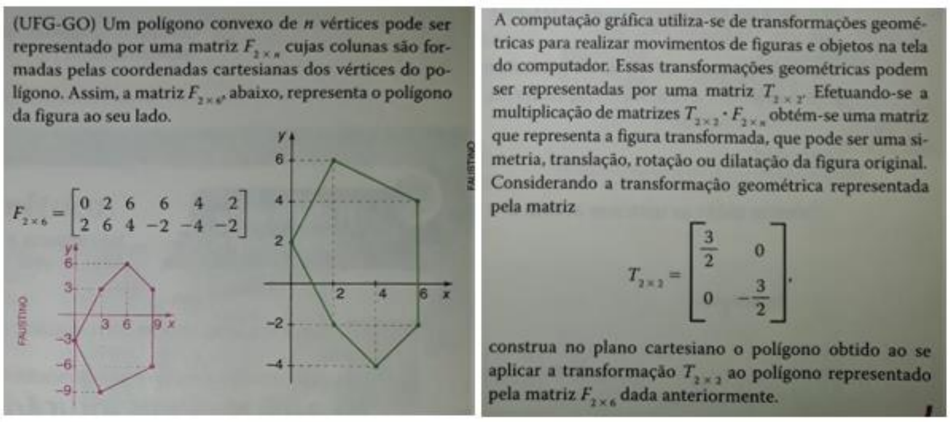
Fonte: Elaborado pela autora.

Na Figura 36 está apresentada a Atividade 19 que faz parte da PÓS-AULA e deverá ser realizada individualmente e entregue no próximo encontro.

Figura 36 – Atividade 19/Aula 4

PÓS-AULA

Atividade 19



(UFG-GO) Um polígono convexo de n vértices pode ser representado por uma matriz $F_{2\times n}$ cujas colunas são formadas pelas coordenadas cartesianas dos vértices do polígono. Assim, a matriz $F_{2\times 6}$, abaixo, representa o polígono da figura ao seu lado.

$$F_{2\times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

A computação gráfica utiliza-se de transformações geométricas para realizar movimentos de figuras e objetos na tela do computador. Essas transformações geométricas podem ser representadas por uma matriz $T_{2\times 2}$. Efetuando-se a multiplicação de matrizes $T_{2\times 2} \cdot F_{2\times n}$ obtém-se uma matriz que representa a figura transformada, que pode ser uma simetria, translação, rotação ou dilatação da figura original. Considerando a transformação geométrica representada pela matriz

$$T_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

construa no plano cartesiano o polígono obtido ao se aplicar a transformação $T_{2\times 2}$ ao polígono representado pela matriz $F_{2\times 6}$ dada anteriormente.

Fonte: (Paiva, 2015, p. 77).

Pretende-se ao final deste encontro que os alunos distingam as transformações aplicadas as figuras a partir das propriedades observadas.

4.2.6 Aula 5: Aplicando aprendizagens

Para esta aula, será solicitado que os alunos pesquisem em sites aplicações do uso das transformações geométricas e que indiquem situações que podem ser resolvidas com o uso dos conhecimentos adquiridos sobre a geometria das transformações, conforme indicado na Figura 37, nas atividades 20 e 21.

Figura 37 – Atividade 20 e 21/Aula 5

PRÉ-AULA

Atividade 20: Pesquise sobre objetos que possam ser construídos aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.
Sugestões:

- Escher (obras): https://www.youtube.com/watch?v=uOrMnL8l1hU
- Escher e a Geometria – Nova Escola: https://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY
- Desvendando a técnica de Escher: https://www.youtube.com/watch?v=zZ2wrNdYchw
- Simetrizador: http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/simetrizador.htm
- Braço robótico hidráulico: https://www.youtube.com/watch?v=-rNVURoYUms
- Máquina de agarrar bichinhos de pelúcia: https://www.youtube.com/watch?v=xfCb8MRvVu0

Atividade 21: Pesquise e liste problemas comunitários ou particulares que possam ser solucionados aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.

Fonte: Elaborado pela autora.

A partir dos resultados da pesquisa solicitada na Atividade 20 (Figura 37) e dos conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações, os estudantes deverão planejar uma atividade que sirva para solucionar algum dos problemas comunitários ou particulares por eles apontados na Atividade 21.

Destaca-se aqui, exemplos de resultados obtidos em atividades semelhantes as Atividades 20 e 21 (Figura 38), desenvolvidas no ano de 2019, com estudantes em um projeto sobre robótica de uma escola pública da cidade de Esteio (RS).

Figura 38 – Resposta de estudantes sobre a utilização dos conceitos de Geometria das Transformações em 2019

Preocupações dos estudantes de uma comunidade escolar de Esteio – RS	Objetos que podem ser construídos
• Alimentação de cães comunitários. • Materiais recicláveis espalhados ao lado de containers de coleta. • Implementação da horta e da coleta seletiva de eletrônicos na escola. • Revitalização de área de convivência da escola.	• ***Alimentador de cães*** programado para liberar alimentos em diferentes horários. • ***Braço robótico*** que pegue, erga e coloque objetos recicláveis dentro do container. • ***Equipamento de irrigação*** com temporizador • Pintura de **painel**

Fonte: Dados de uma entrevista realizada pela autora em 21 out. 2019.

Como podemos observar, na Figura 38, uma das preocupações citadas pelos estudantes é a revitalização da área de convivência da escola. Sendo assim uma última atividade proposta neste trabalho é a criação de um modelo de painel para embelezar o saguão da escola, utilizando os conceitos tratados no estudo da geometria das transformações (Figura 39).

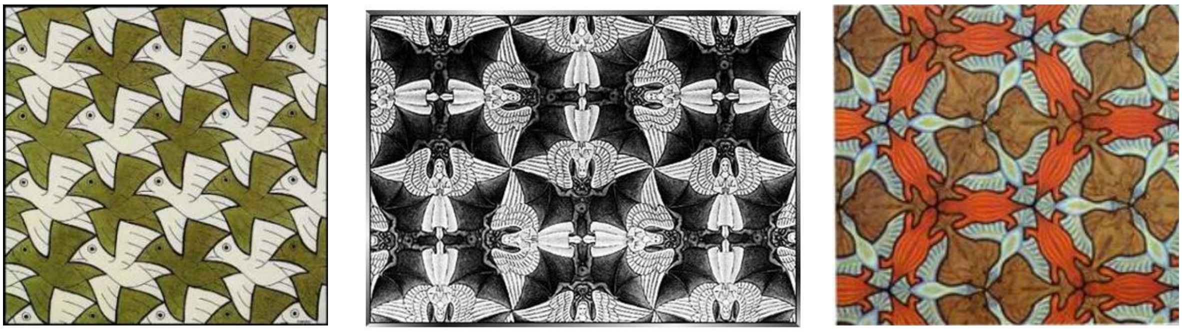
Figura 39 – Atividade 22/Aula 5

AULA
Atividade 22: Crie um modelo de painel, em seguida afira as medidas do local onde será pintado e calcule o fator de escala. Sugestão: Use o software Shapari, Ilustrator ou GeoGebra.

Fonte: Elaborado pela autora.

Com esta atividade os alunos estariam engajados em projetos para a melhoria do ambiente escolar. As obras de Escher podem servir de inspiração para a criação do painel, pois apresentam em sua construção conceitos da geometria das transformações conforme podemos observar na Figura 40.

Figura 40 – Obras de Escher



Fonte: Disponível em: https://www.wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher Acesso em: 29 maio 2020.

Os modelos elaborados, que podem ser desenhados em papel ou construídos com o auxílio de softwares, podem ser apresentados a direção da escola como proposta para pintura do painel no ambiente escolar. Para isso, os alunos deverão aferir as medidas do local onde se pretende pintar o painel e calcular os gastos para execução. Ao final desta aula cada grupo deve expor para turma o modelo de painel criado.

4.3 RESULTADOS ESPERADOS

Com a proposta de atividades sobre as transformações geométricas associadas ao estudo de matrizes, espera-se que os estudantes se interessem mais pelo estudo da matemática se engajando nas propostas de aula e nos projetos escolares, superando medos e metas, além disso, almeja-se que desenvolvam autonomia, reflitam sobre os problemas sociais da comunidade e percebam as possibilidades de aplicar as aprendizagens adquiridas na vida cotidiana e nos seus projetos de vida.

Destacamos que nas atividades elaboradas para esta proposta de ensino foram levados em conta os momentos da sala de aula invertida e o uso de recursos tecnológicos como os da plataforma Khan Academy e do software GeoGebra. Tendo por base os resultados obtidos por outras pesquisas acreditamos que esta proposta de ensino possibilita a participação ativa dos estudantes na construção de seu próprio conhecimento, interagindo com os colegas e com o professor de modo que se sintam confortáveis para expor o que sabem ou aprenderam, assumindo uma postura questionadora, mantendo o entusiasmo, o respeito as diferentes opiniões e tomando decisões em conjunto.

Além disso, esperamos que as atividades finais desta proposta (Atividades 21 e 22), possibilite aos estudantes enxergar a aplicação prática e a utilidade do conteúdo estudado no seu dia a dia, permitindo-lhes analisar a realidade e tomar consciência dela, promovendo assim uma aproximação crítica e reflexiva da realidade.

Esperamos também, que os estudantes desenvolvam habilidades para ler uma informação independentemente da maneira como ela está sendo oferecida, seja por gráficos, tabelas, planilhas, representações numéricas ou mesmo simulações, além disso, contamos com o desenvolvimento de habilidades de interações por meio das ferramentas tecnológicas ofertadas bem como a ampliação conhecimentos e destreza no trato com as tecnologias midiáticas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por objetivo apresentar uma proposta de ensino de transformações geométricas associadas ao estudo de matrizes, com a intenção de oportunizar aos alunos a participação ativa na construção do conhecimento e promover aprendizagens voltadas para a aplicação que permitam aos alunos a possibilidade de perceber a importância desse conhecimento para o desenvolvimento tecnológico.

A proposta permite que o aluno se engaje nas aprendizagens de forma interessada e autônoma com o desenvolvimento de atividades elaboradas a partir da concepção de sala de aula invertida de modo que o estudante possa desenvolver competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e em espaços físicos e virtuais.

No primeiro capítulo, justificamos a proposta e apresentamos de forma resumida o resultado de alguns estudos correlatos. Em seguida, no capítulo dois apresentamos as abordagens teóricas que foram adotadas para elaboração deste estudo, dissertando sobre as metodologias ativas, com ênfase na sala de aula invertida e as ferramentas tecnológicas Khan Academy e GeoGebra. No capítulo seguinte, exploramos os conhecimentos matemáticos abordados nesta proposta dedicando seções ao estudo de matrizes, transformações lineares e ao tema principal deste estudo, transformações geométricas.

Após, no Capítulo 4, apresentamos as atividades elaboradas para o desenvolvimento desta proposta juntamente com a descrição do que esperamos dos estudantes ao desenvolvê-las. Destacamos neste capítulo, a organização das aulas nos tempos Pré-aula, Aula e Pós-aula mesclando momentos de interação em ambientes virtuais de modo individual e em espaços físicos, com a troca entre colegas, primeiramente em grupos pequenos e posteriormente no grande grupo. Tivemos também, a preocupação em criar atividades que auxiliem os alunos a desenvolver a compreensão dos conceitos e procedimentos utilizados no estudo das transformações geométricas e matrizes de modo que eles sejam capazes em participar ativamente do processo de construção do conhecimento.

Ressaltamos que desde o início da elaboração desta proposta ocorreram acontecimentos dos quais foram necessários reajustar a rota para priorizar a aplicação da proposta. De início, pretendíamos desenvolver o tema escolhido, transformações geométricas, associado a robótica educacional. Decidimos modificar a proposta devido a reformas nos espaços físicos da escola que impossibilitariam a sua aplicação a sua prática.

Resolvemos então desenvolver esse mesmo tema, mas desta vez com foco na sala de aula invertida e uso de tecnologias. As ferramentas midiáticas seriam acessadas pelo celular dos alunos com a possibilidade de acesso à internet disponível na escola ou no trabalho.

Com as medidas de isolamento social, impostas em função da disseminação do vírus, COVID 19, as aulas presenciais foram suspensas restando assim, apenas a possibilidade de desenvolver a proposta em espaços virtuais. Esta situação dificultou a comunicação dos professores com os alunos sendo necessário tempo de adequação. Mesmo assim, as atividades iniciais foram encaminhadas aos alunos, alvo da pesquisa com a sincera tentativa de aplicar a proposta, no entanto, não obtivemos adesão significativa deles, pois estes relataram que foi necessário a substituição do acesso à internet de banda larga pelos dados móveis devido à redução da renda provocada por demissões ou cancelamentos de contratos de estágios devido as consequências da pandemia. Além disso, foi antecipado e ampliado o recesso escolar previsto para o mês de julho, interrompendo os estudos durante o mês de maio.

Diante desse cenário destaco o sucesso e entusiasmo dos poucos alunos que tiveram oportunidade de realizar a primeira atividade (adaptada), que relataram aspectos positivos usando a plataforma Khan Academy, tais como, a possibilidade de assistir os vídeos explicativos muitas vezes, diferente da sala de aula “normal” na qual o aluno pode contar apenas com a memória e as notas de aula. Relatam também, que se sentiram desafiados a continuar realizando os exercícios, pois estes são corrigidos de imediato, e em caso de erro dispunham em cada exercício de dicas ou roteiros para uma nova tentativa. Além disso, comentam que a sensação de insegurança inicial causada pela “saída da zona de conforto” é substituída aos poucos pela “alegria” ao perceber que podem aprender e exercer a autonomia, pois o fato de não estarem na presença dos colegas ou professora, é permitido o erro e assim num encontro presencial não teriam receio de compartilhar aprendizagens com os colegas.

Embora não tenhamos dados suficientes para uma análise da aplicação da proposta, esses depoimentos dos alunos sinalizam uma possibilidade exitosa para o ensino de matemática com aplicação da sala de aula invertida.

Acreditamos que a sequência didática apresentada neste trabalho possa ser desenvolvida em outro momento e deve possibilitar aos estudantes uma participação ativa no estudo de matrizes associado as transformações geométricas.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. E. B.; VALENTE, J. A. Integração currículo e tecnologias e a produção de narrativas digitais. **Currículo sem Fronteiras**, v. 12, n. 3, p. 57 – 82, 2012.

ARAÚJO, V. S.; MOLINA, L. P. P.; NANTES, E. A. S. Khan Academy: uma possibilidade para as aulas de matemática. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, n. 1, p. 01 – 19, 2020.

BACICH, L.; MORAN, J. Aprender e ensinar com foco na educação híbrida. **Revista Pátio**. v. 17, n. 25, p. 45 – 47, 2015.

BACICH, L.; MORAN, J. **Metodologias para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOLDRINI, J.L. et al. **Álgebra linear.** 3. ed. São Paulo: Harbra,1980.

BONWELL, C.C.; EISON, J. A. Active Learning: Creating Excitement in the Classroom. **ERIC Digests**, Washington, p. 1-5, 1991. Disponível em: <http://documents.manchester.ac.uk/display.aspx?DocID=19800> Acesso em: 11 maio 2020.

BOYER, C. B. **História de Matemática.** 2. ed. Trad. Elsa Gomide. São Paulo: Edgard Blucher Ltda, 1999.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC.** Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc> Acesso em: 15 abr. 2020.

COSTA, C. G. **Utilização de matrizes no estudo de orientação e posição de um braço robótico por meio das coordenadas de Denavit-Hartenberg.** 2014. 97 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2014.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto & Aplicações**. v. 2. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DIESEL, A.; BALDEZ A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. **Revista Thema**. v. 14, n. 1, p. 268 – 288, 2017.

ELMÔR FILHO, G. et al. **Uma nova sala de aula é possível**: aprendizagem ativa na educação em engenharia. 1. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

ESQUERDO, C. A. S. **Transformações geométricas no plano: uma abordagem inspirada em Escher**. Londrina, 2018. 123 p. Dissertação. (Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, SC, 2018.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.

FLN. **Flipped Learning Network**. The Four Pillars of F-L-I-P™, 2014. Disponível em: <www.flippedlearning.org/definition> Acesso em: 11 maio 2020.

GEOGEBRA. **Portal GeoGebra**, 2020. Disponível em: <www.geogebra.mat.br>. Acesso em: 12 maio 2020.

GOMES, J.; VELHO, L. **Fundamentos da Computação Gráfica**. São Paulo: Série de Computação e Matemática, 2003.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001, 277 p. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, 2001.

GRAVINA, M. A. et al. **Matemática, Mídias Digitais e Didática**: tripé para formação do professor de Matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.

GRAVINA, M. A.; BARRETO, M. **Mídias Digitais I:** material didático***.*** Porto Alegre. UAB/IM/UFRGS, 2009. Disponível em: <www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/> Acesso em: 12 maio 2020.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

KHAN ACADEMY. Brasil, 2020. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/khan-for-educators> Acesso em: 12 maio 2020.

KHAN, S. **Um mundo, uma escola: a educação reinventada.** Tradução de George Schlesinger. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2013. Disponível em: <https://mundonativodigital.files.wordpress.com/2016/04/um-mundo-uma-escolasalman-khan.pdf> Acesso em: 12 maio 2020

LIMA, E. L. **Coordenadas do plano**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

MENEGAIS, D. A. F. N. **A Formação Continuada do Professor de Matemática:** Uma inserção tecnológica da plataforma Khan Academy na prática docente. 2015. 201 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

MENEGAIS, D. A. F. N.; FAGUNDES, L. C.; SAUER, L. Z. A análise do impacto da integração da plataforma Khan Academy na prática docente de professores de matemática. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, Porto Alegre, v. 13, n. 1, p. 1 – 11, 2015.

MORAN, J. **Novos modelos de sala de aula**, 2013. Disponível em: <http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/modelos_aula.pdf>. Acesso em: 23 maio 2020.

MORAN, J. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, C. A.; MORALES, O. E. T. (Orgs). **Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania**: aproximações jovens. v. 2. Ponta Grossa: PROEX/UEPG, 2015a, p. 15 – 33.

MORAN, J. Educação híbrida: Um conceito-chave para a educação, hoje. In: BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. de M. (Orgs.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na Educação**. Porto Alegre: Penso, 2015b.

PAIVA, M. **Matemática Paiva**. v. 3. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015

SILVA, G. H. G.; PENTEADO, M. G. O trabalho com Geometria Dinâmica em uma perspectiva investigativa. In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia-SINTEC, 2009, Ponta Grossa (PR). **Anais.** Ponta Grossa. 2009, p. 1066 – 1079.

STORMOWSKI, V. **Estudando matrizes a partir de transformações geométricas**. 2008. 144 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

APÊNDICE A – ATIVIDADES

AULA 1 - Geometria de coordenadas e matrizes

PRÉ-AULA

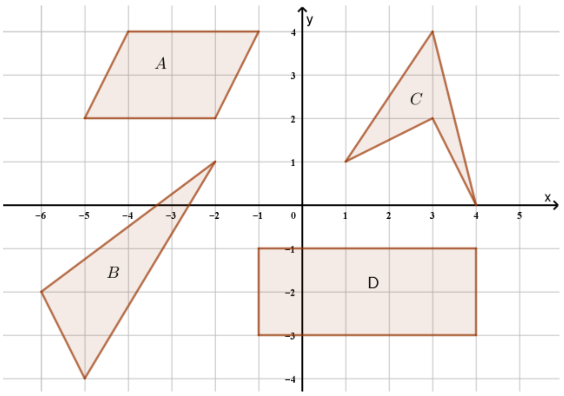
Atividade 1: Pesquise e registrar no caderno o significado dos seguintes conteúdos no contexto matemático.

- Matrizes:
- Geometria de coordenadas:
- Transformações geométricas:

AULA

Atividade 2: Construa um polígono, com software GeoGebra, descreva os vértices por pares ordenados e represente os vértices do polígono por meio de uma matriz.

Atividade 3: Resolva os exercícios:
1- Escreva a matriz correspondente aos vértices de cada polígono a seguir.



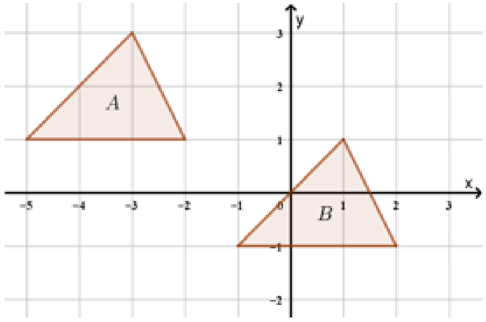
2 - Use papel quadriculado para construir um plano cartesiano e represente nele os polígonos correspondentes as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Atividade 4: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Introdução a transformações rígidas, Aprender e Praticar.

PÓS-AULA

Atividade 5: Resolva o exercício.
Observe os triângulos A e B no plano cartesiano abaixo e:



i) escreva os pares ordenados que descrevem os vértices de cada polígono;

ii) escreva a matriz 2 x 3 de cada polígono;

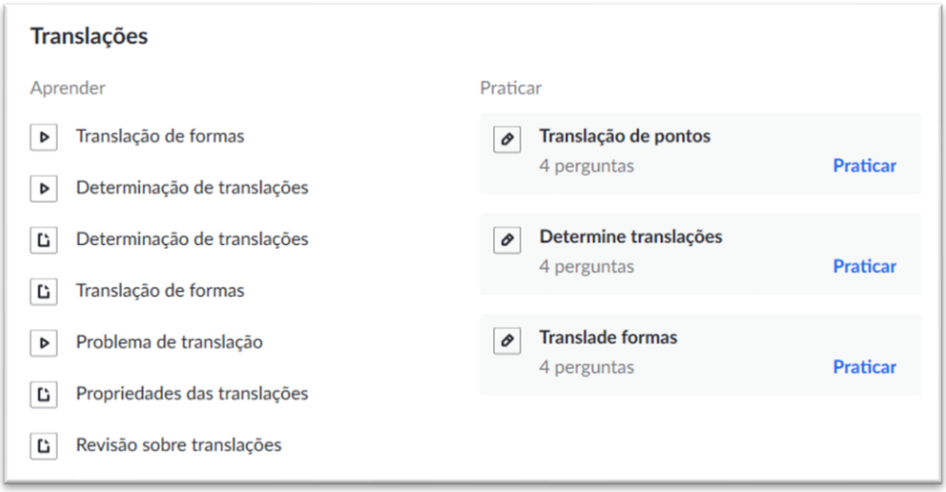
iii) identifique a transformação aplicada no triângulo A para obter o triângulo B;

iv) compare os pares ordenados e as matrizes desses triângulos e descreva as propriedades observados.

AULA 2 – Translação e adição de matrizes

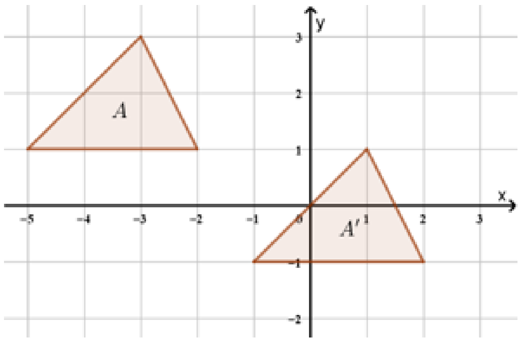
PRÉ-AULA

Atividade 6: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Translações: Aprender e Praticar.



AULA

Atividade 7: Na figura abaixo o triângulo A sofreu uma translação dando origem ao triângulo A'.



i) Descreva a translação.

ii) Represente a translação por uma matriz coluna.

iii) Escreva as matrizes correspondentes aos triângulos A e A'.

iv) Compare as matrizes dos triângulos A e A' e escreva as propriedades observadas.

Atividade 8: Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 87), estabeleça a relação entre a translação e a adição de matrizes.

PÓS-AULA

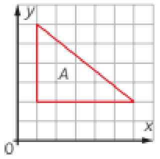
Atividade 9: Resolva os exercícios 49 e 50 do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 88). Para o exercício 50, use malha quadriculada ou GeoGebra.

Exercícios

49. Escreva o que significa cada uma das translações dada pelas matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

50. Copie o diagrama abaixo em uma malha quadriculada. Translade o triângulo *A* de acordo com cada matriz coluna dada e desenhe o triângulo transladado.



a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *B*.

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *C*.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *D*.

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo *E*.

e) Em cada caso, escreva a adição de matrizes correspondentes.

AULA 3 – Reflexão, rotação e multiplicação de matrizes

PRÉ-AULA

Atividade 10: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Reflexões: Aprender e Praticar.

Reflexões

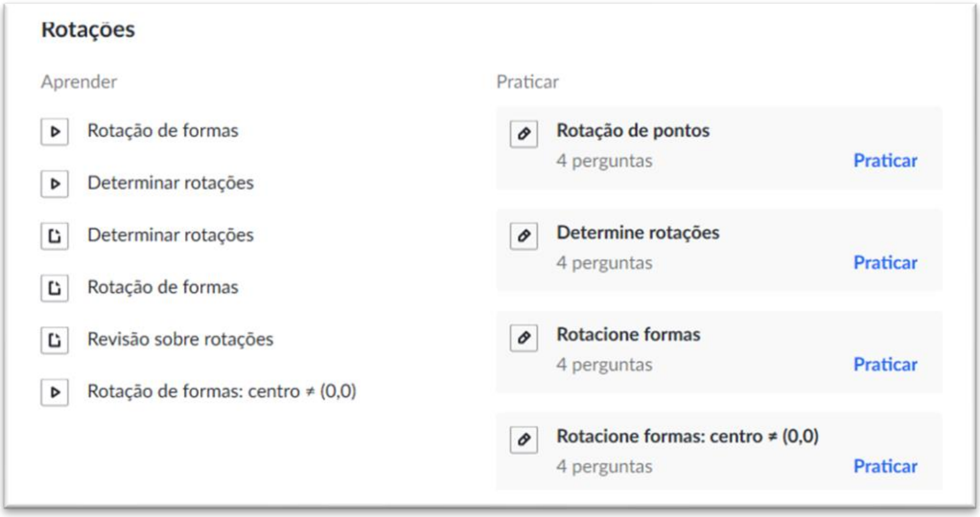
Aprender

- Reflexão de figuras: eixo de simetria diagonal
- Determinar reflexões (avançado)
- Reflexão de formas
- Revisão sobre reflexões

Praticar

- **Reflexão de pontos** — 4 perguntas — Praticar
- **Determine reflexões** — 4 perguntas — Praticar
- **Determinar reflexões (avançado)** — 4 perguntas — Praticar
- **Reflita formas** — 4 perguntas — Praticar
- **Reflexões avançadas** — 4 perguntas — Praticar

Atividade 11: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o título Rotações: Aprender e Praticar.

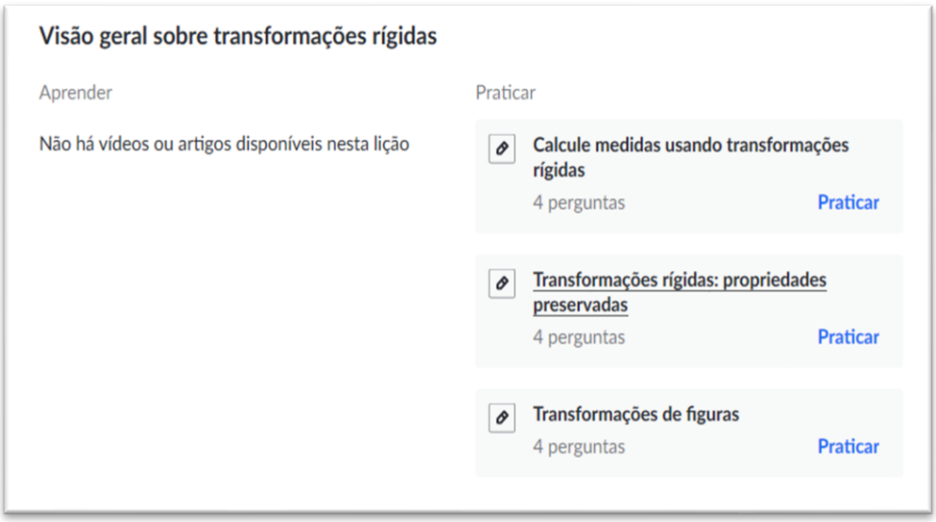


AULA

Atividade 12:
i) Construa, com GeoGebra, um polígono no plano cartesiano e faça a reflexão dele em torno do eixo y.
ii) Escrever as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
iii) Repita os itens i) e ii) refletindo o polígono em torno do eixo x.
iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações p. 88 e 89, estabeleça a relação entre a reflexão e a multiplicação de matrizes.

Atividade 13:
i) Construa, com GeoGebra, um polígono no primeiro quadrante do plano cartesiano e faça a rotação de 180º no sentido anti-horário em torno da origem (0,0).
ii) Escrever as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
iii) Repita os itens i) e ii) mudando apenas o ângulo de rotação.
iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações p. 89 e 90, estabeleça a relação entre a rotação e a multiplicação de matrizes.

Atividade14: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre o Visão geral sobre transformações rígidas: Praticar.



PÓS-AULA

Atividade 15: Faça os exercícios 50 a 53 com GeoGebra ou com uma malha quadriculada.

Exercícios

51. Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Marque os pares ordenados em um plano cartesiano e ligue os pontos, em ordem, para formar uma figura.

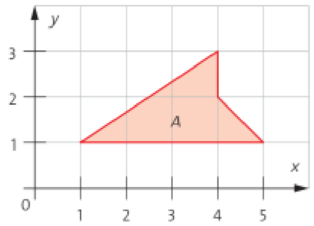
b) Efetue uma reflexão das figura em relação ao eixo x e escreva a matriz de cada figura refletida.

c) Constate que a matriz da figura refletida pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura pela matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

52. Repita o exercício anterior, usando uma reflexão em relação ao eixo y.

53. Considere a figura A e uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem (0, 0), originando uma figura D.



a) Obtenha a matriz associada à figura D.

b) Desenhe em um mesmo plano cartesiano as figuras A e D.

c) Verifique que a matriz associada pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} \cos 90° & -\text{sen } 90° \\ \text{sen } 90° & \cos 90° \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

54. Faça o que se pede para cada matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Coloque os pares ordenados de cada matriz no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para formar uma figura.

b) Na matriz A aplique uma rotação de 90°, em B uma rotação de 180° e em C uma rotação de 270°, no sentido anti-horário, em torno da origem (0, 0).

c) Em todos os casos escreva a matriz associada à figura final e desenhe-as em um mesmo plano cartesiano.

d) Verifique que a matriz associada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Fonte: (Dante, 2017, p. 90).

AULA 4 – Escala

PRÉ-AULA

Atividade 16: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre Dilatação: Aprender e Praticar.

Dilatações

Aprender

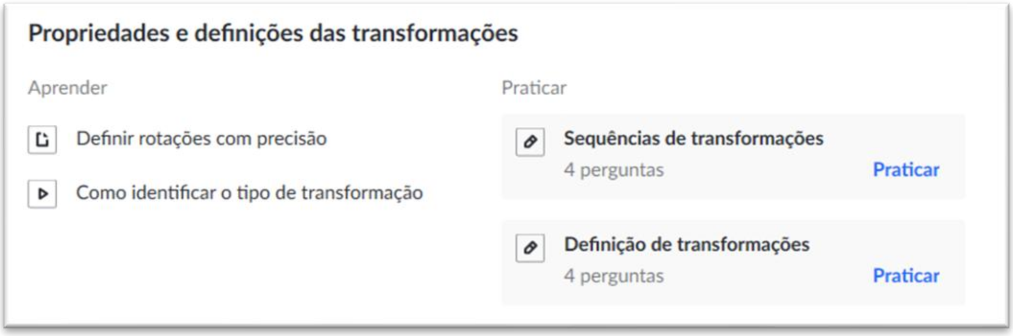
- Como realizar dilatações
- Dilatação de formas: como contrair
- Dilatação de formas: expansão

Praticar

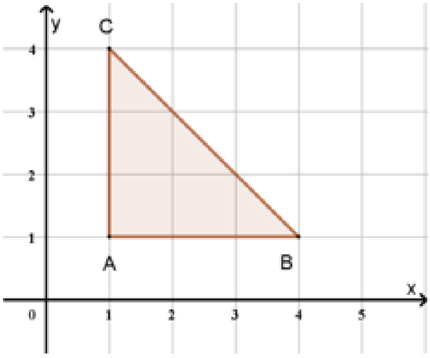
- **Dilatação de pontos** — 4 perguntas — Praticar
- **Dilatações: fator de escala** — 4 perguntas — Praticar
- **Dilatações: centro** — 4 perguntas — Praticar
- **Dilatação de triângulos** — 4 perguntas — Praticar
- **Dilatações e propriedades** — 4 perguntas — Praticar

AULA

Atividade 17: Acesse o endereço https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations e faça as atividades sobre Propriedades e definições das transformações: Aprender e Praticar.



Atividade 18: Considere o triângulo ABC, a seguir.



i) Aplique nele uma dilatação de centro em A e escala 2. Repita mudando a escala.

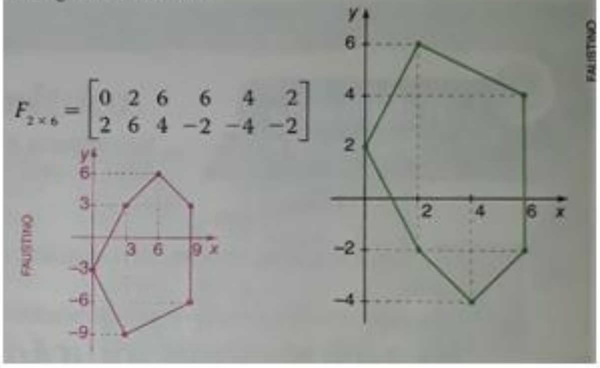
ii) Aplique nele uma transformação de centro em A e escala segundo fatores os 1 e 2 nas direções dos eixos OX e OY, respectivamente. Repita, mudando apenas a escala na direção do eixo OY.

iii) Descreva as mudanças observadas.

iv) Qual é a relação entre a área do triângulo inicial e a área dos triângulos após as transformações

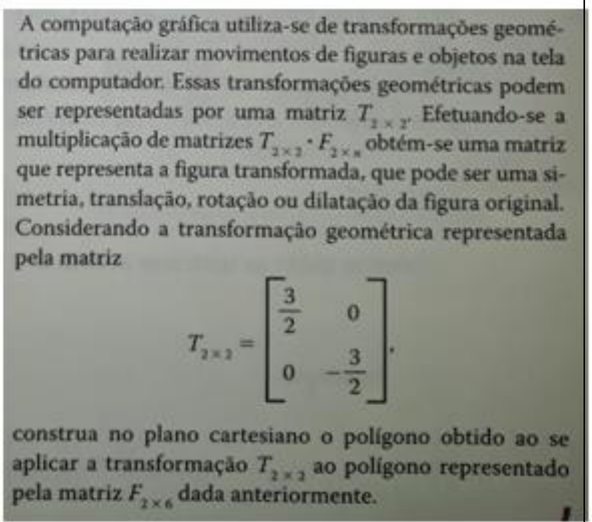
PÓS-AULA

Atividade 19:



(UFG-GO) Um polígono convexo de n vértices pode ser representado por uma matriz $F_{2\times n}$ cujas colunas são formadas pelas coordenadas cartesianas dos vértices do polígono. Assim, a matriz $F_{2\times 6}$, abaixo, representa o polígono da figura ao seu lado.

$$F_{2\times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$



A computação gráfica utiliza-se de transformações geométricas para realizar movimentos de figuras e objetos na tela do computador. Essas transformações geométricas podem ser representadas por uma matriz $T_{2\times 2}$. Efetuando-se a multiplicação de matrizes $T_{2\times 2} \cdot F_{2\times n}$ obtém-se uma matriz que representa a figura transformada, que pode ser uma simetria, translação, rotação ou dilatação da figura original. Considerando a transformação geométrica representada pela matriz

$$T_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

construa no plano cartesiano o polígono obtido ao se aplicar a transformação $T_{2\times 2}$ ao polígono representado pela matriz $F_{2\times 6}$ dada anteriormente.

Fonte: (PAIVA, 2015, p. 77).

AULA 5 – Aplicando aprendizagens

PRÉ-AULA

Atividade 20: Pesquise sobre objetos que possam ser construídos aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.
Sugestões:
Escher (obras): https://www.youtube.com/watch?v=uOrMnL8l1hU
Escher e a Geometria – Nova Escola: https://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY
Desvendando a técnica de Escher: https://www.youtube.com/watch?v=zZ2wrNdYchw
Simetrizador: http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/simetrizador.htm
Braço robótico hidráulico; https://www.youtube.com/watch?v=-rNVURoYUms
Máquina de agarrar bichinhos de pelúcia: https://www.youtube.com/watch?v=xfCb8MRvVu0

Atividade 21: Pesquise e liste problemas comunitários ou particulares que possam ser solucionados aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.

AULA

Atividade 22: Crie um modelo de painel, em seguida afira as medidas do local onde será pintado e calcule o fator de escala.
Sugestão: Use o software Shapari, Ilustrator ou GeoGebra.