UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Viviane Fátima de Oliveira

Dinâmica de Funções Quadráticas: uma abordagem no Ensino Médio

Juiz de Fora
2020

Viviane Fátima de Oliveira

Dinâmica de Funções Quadráticas: uma abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Oliveira, Viviane Fátima de.
Dinâmica de Funções Quadráticas : uma abordagem no Ensino Médio / Viviane Fátima de Oliveira. – 2020.
99 f. : il.

Orientadora: Ana Tércia Monteiro Oliveira
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2020.

1. Família de Funções Quadráticas. 2. Ponto Fixo Atrator. 3. Ponto Fixo Repulsor. 4. Caos. I. Oliveira, Ana Tércia Monteiro , orient. II. Título.

Viviane Fátima de Oliveira

Dinâmica de Funções Quadráticas: uma abordagem no Ensino Médio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 28 de agosto de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Ana Tércia M. Oliveira

Prof^a. Dra. Ana Tércia Monteiro Oliveira - Orientadora
Universidade Federal de Juiz de Fora

Ana Tércia M. Oliveira

Prof. Dr. José Barbosa Gomes
Universidade Federal de Juiz de Fora

Ana Tércia M. Oliveira

Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro
Universidade Federal de Minas Gerais

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, por ter me concedido saúde, coragem, força e por ter me iluminado nas decisões mais difíceis.

Agradeço à minha orientadora, professora Drª. Ana Tércia Monteiro Oliveira, pelo incentivo, dedicação e paciência. Obrigada pela orientação e pelo apoio durante a realização deste trabalho. E aos demais professores do PROFMAT por todo conhecimento transmitido.

Aos amigos e colegas de classe pelo incentivo e pelo apoio, cada um à sua maneira me ajudaram a concluir esta etapa de minha caminhada. Em especial, à Bianca e Rosilene por tantas experiências trocadas, pelo convívio e, principalmente, pelo companheirismo e amizade.

Aos meus pais José Geraldo e Argentina, por toda dedicação, carinho, amor e por sempre apoiar todas as minhas decisões. Aos meus irmãos Wagner, Valéria e Vinicios que seja na distância ou no convívio diário, sempre me apoiaram e me deram força. E ao meu cunhado Leandro que tanto me ajudou durante esta caminhada.

A todos parentes e amigos por todo apoio e por compreenderem minha ausência em tantos momentos.

Às escolas que lecionei durante o período do curso agradeço pelo empenho em ajustar meus horários, sem este empenho não teria conseguido realizar este curso.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma exposição detalhada sobre a dinâmica de uma família de funções quadráticas indexada por um parâmetro μ. Mais especificamente, nosso objeto de estudo é a família de funções $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ com $\mu \in (1,3) \cup (4,+\infty)$. Abordaremos conceitos básicos da Teoria de Sistemas Dinâmicos, como: ponto fixo, atrator ou repulsor, pontos periódicos e órbitas de um ponto. O estudo será dividido em três casos, de acordo com a variação do parâmetro μ: (Caso I) $1 < \mu \leq 2$, (Caso II) $2 < \mu < 3$ e (Caso III) $\mu > 4$. Veremos a influência do parâmetro sobre o comportamento das órbitas que permanecem no intervalo $[0,1]$. Isto nos levará a concluir quão ricas e complexas podem ser as funções quadráticas na perspectiva dos Sistemas Dinâmicos. Por fim, trazemos como proposta pedagógica um Caderno de Atividades, direcionado ao estudante do $1^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio, que tem como objetivo abordar de forma investigativa essa família de funções quadráticas sob o olhar da dinâmica.

Palavras-chave: Família de Funções Quadráticas. Ponto Fixo Atrator. Ponto Fixo Repulsor. Caos.

ABSTRACT

In this work, we present a detailed exposition about the dynamics of a family of quadratic functions indexed by a parameter μ. More specifically, our object of study is the family of functions $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ with $\mu \in (1,3) \cup (4,+\infty)$. We will cover basic concepts of Dynamic Systems Theory, such as: fixed point, attractor or repulsor, periodic points and orbit of a point. The study will be divided into three cases, according to the variation of parameter μ: (Case l) $1 < \mu \leq 2$, (Case ll) $2 < \mu < 3$ and (Case lll) $\mu > 4$. We will see the influence of the parameter on the behavior of the orbits that remain in the range $[0.1]$. This will lead us to conclude how rich and complex quadratic functions can be from the perspective of Dynamic Systems. Finally, we bring as a pedagogical proposal a Notebook of Activities, aimed at the student of first year of High School, which aims to approach this family of quadratic functions in an investigative way from the perspective of dynamics.

Keywords: Family of Quadratic Functions. Attracting Fixed Point. Repelling Fixed Point. Chaos.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está por toda parte. Seja na arte, na arquitetura, na música ou na natureza, não importa para onde se olhe a Matemática estará lá. E ainda é uma ferramenta fundamental para diversas áreas como Economia, Física, Engenharia, Arquitetura e tantos outros ramos do conhecimento. Compreender a Matemática é compreender o mundo que nos rodeia.

Em termos educacionais fazer com que os alunos entendam o meio que nos cerca através da Matemática é um desafio diário para o professor, visto que muitos alunos não compreendem conceitos básicos da matemática que são importantes para essa visão mais aguçada.

Lamentavelmente, não faltam evidências que comprovem o resultado insatisfatório da educação brasileira nos últimos anos. Em 2018 o Nível de Proficiência em Matemática no Brasil foi avaliado pelo Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e o resultado foi preocupante. O Brasil caiu no *Ranking* e está entre os 10 piores desempenhos de Matemática do mundo.

Especificamente, observa-se que grande parte dos alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades em abstrair conteúdos referentes ao estudo de funções e se sentem desconfortáveis com a linguagem algébrica das mesmas. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p.122) ”os alunos mostram dificuldade em lidar eficazmente com a simbologia x, y, f (x). Por vezes, compreendem perfeitamente do que se está a falar quando se diz que ”a imagem de 5 é 3”mas não conseguem entender a expressão f (5) =3”.

Diversos fatores contribuem pra este cenário, como a falta de interesse dos alunos, a falta de estrutura adequada nas escolas, a família que não acompanha a vida escolar do aluno, a desvalorização do professor. Diante disso muitos professores entram na sala de aula desmotivados e não conseguem despertar o interesse dos alunos para o conteúdo.

Muitas vezes, as dificuldades presentes no Ensino Básico se estendem ao Ensino Superior gerando um processo de aprendizagem descompassado com muitas adversidades. Pensando em contribuir para um melhor preparo dos alunos no conteúdo de Funções do 2º grau, este trabalho é direcionado a Caracterização de Funções Quadráticas via Sistemas Dinâmicos. Trata-se de uma dissertação constituída por um Material Teórico, que tem como público alvo alunos do Ensino Superior e principalmente professores de Matemática da Educação Básica, e um Caderno de Atividades que pode servir como motivação ao Professor de Matemática para abordagem do estudo de tais funções de maneira diferenciada e atrativa aos seus alunos.

O Capítulo 2 traz alguns conteúdos básicos de Análise como Teorema do Valor Médio e o Teorema do Valor Intermediário que serão fundamentais para o entendimento do Capítulo 4.

No capítulo seguinte será relatado o desenvolvimento conceitual de função desde tempos remotos até a atualidade, assim como um pouco da história dos Sistemas Dinâmicos.

No capítulo 4 apresentamos o embasamento teórico, com detalhes da dinâmica de uma família de funções quadráticas, direcionado aos professores do Ensino Básico e aos alunos do Ensino Superior.

Finalmente, no Capítulo 5 trazemos uma proposta metodológica através de um Caderno de Atividades de cunho investigativo. E por fim, as considerações finais encerram todo trabalho desenvolvido.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo relembraremos alguns conceitos e resultados de Análise Real e Espaços Métricos que serão utilizados no Capítulo 4. Para demonstrações e maior aprofundamento consulte (LIMA, 2015) e (LIMA, 2019).

2.1 SUPREMO E ÍNFIMO

Definição 2.1 *Diz-se que um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente se existir um número real A tal que $x \leq A$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que A é uma cota superior para X.*

Definição 2.2 *Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado inferiormente se existir um número real a tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso, dizemos que a é uma cota inferior para X.*

Definição 2.3 *Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado se for limitado superiormente e limitado inferiormente.*

Proposição 2.1 *Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é limitado se, e somente se, existem $a,\ A \in \mathbb{R}$ tais que $X \subset [a, A]$.*

Prova. $(\Rightarrow)$ Se $X \subset \mathbb{R}$ é limitado, então, pelas Definições 2.1 e 2.2 existem $a,\ A \in \mathbb{R}$, tais que $x \leq A$ e $a \leq x\ \forall x \in X$. Daí, $a \leq x \leq A,\ \forall x \in X$, isto é, $X \subseteq [a, A]$.

$(\Leftarrow)$ Se existem $a, A \in \mathbb{R}$ tais que $X \subseteq [a, A]$ então $x \leq A$ e $a \leq x\ \forall x \in X$. Logo, X é limitado superiormente por A e inferiormente por a. Portanto X é limitado.

Axioma 2.1 *Se $X \subset \mathbb{R}$ é não vazio e limitado superiormente, então X possui uma menor cota superior.*

Definição 2.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. Diz-se que $A \in \mathbb{R}$ é o supremo do conjunto X se A for a menor das cotas superiores. Denotamos*

$$A = \sup X.$$

Não é difícil provar que A é supremo de X se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo $x \in X,\ x \leq A$;

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x > A - \epsilon$.

Definição 2.5 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente. Diz-se que $a \in \mathbb{R}$ é o ínfimo do conjunto X se a for a maior das cotas inferiores. Denotamos*

$$a = \inf X.$$

Da mesma forma, a é ínfimo de X se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:

(i) Para todo $x \in X,\ a \leq x$;

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \epsilon$.

2.2 SEQUÊNCIAS

Definição 2.6 *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, que associa cada* $n \in \mathbb{N}$ *a um número real designado por* x_n*. São usadas as notações* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(x_0,\ x_1,\ x_2, ..., x_n, ...)$ *ou* (x_n) *para indicar a sequência* x*.*

Definição 2.7 *Dizemos que uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para um número real* L*, ou tem limite* L *se, dado qualquer* $r > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < r.$$

Nesse caso diz-se que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e que L é o limite da sequência. Escreveremos $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$.

É um fato conhecido e importante que uma sequência não pode possuir dois limites distintos.

Teorema 2.1 *(Unicidade do limite) Se* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$ *então* $a = b$*.*

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Definição 2.8 *Uma sequência de números reais* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita*

(i) limitada quando o conjunto dos seus termos $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *é limitado;*

(ii) limitada superiormente quando o conjunto dos seus termos $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *é limitado superiormente e*

(iii) limitada inferiormente quando o conjunto dos seus termos $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ *é limitado inferiormente.*

Definição 2.9 *Diremos que uma sequência de números reais* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

(i) monótona crescente quando $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) monótona decrescente quando $x_{n+1} < x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) monótona não decrescente quando $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e*

(iv) monótona não crescente quando $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Outro resultado clássico que será bastante utilizado neste trabalho é

Teorema 2.2 *Toda sequência monótona limitada é convergente. Além disso,*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$*, se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for monótona crescente ou monótona não decrescente e*

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$*, se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for monótona decrescente ou monótona não crescente.*

Prova. Veja (LIMA, 2019).

2.3 FUNÇÕES

Consideraremos I um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$.

Definição 2.10 *Diremos que* $f : I \to \mathbb{R}$ *é contínua em* $a \in I$ *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $r > 0$ *tal que*

$$x \in I, |x - a| < r \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Além disso, f é dita contínua quando for contínua em todos os pontos de I.

Como consequência da teoria de limite de funções temos

Proposição 2.2 *Para que* $f : I \to \mathbb{R}$ *seja contínua em* $a \in I$ *é necessário e suficiente que* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$*.*

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Exemplo 2.1 *A função quadrática* $f : I \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $a, b, c \in \mathbb{R}$*,* $a \neq 0$*, é contínua.*

Proposição 2.3 *Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $g : J \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(I) \subseteq J$*. Se* f *é contínua em* a *e* g *é contínua em* $f(a)$ *então* $g \circ f$ *é contínua em* a*.*

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Teorema 2.3 *(Teorema do Valor Intermediário) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Se* $f(a) < d < f(b)$ *então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = d$*.*

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Definição 2.11 *Seja* $X \subset \mathbb{R}$*. Um número* $a \in \mathbb{R}$ *chama-se ponto de acumulação do conjunto* X *se para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $x \in X$ *tal que* $0 < |x - a| < \epsilon$*.*

Definição 2.12 *Diremos que* $f : I \to \mathbb{R}$ *é derivável em* $a \in I$, a *ponto de acumulação de* I, *quando existir o limite*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Além disso, f *é dita derivável quando for derivável em todos os pontos de acumulação de* I.

Exemplo 2.2 *A função quadrática* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, *é derivável e* $f'(x) = 2ax + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4 *(Regra da Cadeia) Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *e* $g : J \to \mathbb{R}$ *tais que* $f(I) \subseteq J$. *Se* f *e* g *são deriváveis então* $g \circ f$ *também o é. Além disso,* $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)).f'(x)$.

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Teorema 2.5 *(Teorema do Valor Médio) Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua. Se* f *é derivável em* (a, b), *existe* $c \in (a, b)$, *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Definição 2.13 *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ *chama-se*

(i) monótona crescente quando para todo $x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

(ii) monótona decrescente quando para todo $x, y \in I$

$$x < y \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Uma consequência clássica do Teorema do Valor Médio que utilizaremos é o seguinte

Corolário 2.1 *Seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *derivável no intervalo* I. *Tem-se*

(i) Se $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é monótona crescente em* I.

(ii) Se $f'(x) < 0$ *para todo* $x \in I$ *então* f *é monótona decrescente em* I.

Prova. Veja (LIMA, 2019).

Definição 2.14 *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ *possui* *(i)* *um máximo local em* $a \in I$ *quando existe* $r > 0$ *tal que*

$$x \in I \cap (a - r, a + r) \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

(ii) *um mínimo local em* $a \in I$ *quando existe* $r > 0$ *tal que*

$$x \in I \cap (a - r, a + r) \Rightarrow f(a) \leq f(x).$$

Finalmente, encerramos nosso apanhado sobre funções reais com o seguinte resultado

Proposição 2.4 *Se* $f : I \to \mathbb{R}$ *é derivável num ponto* $a \in I$ *e possui máximo ou mínimo local nesse ponto então* $f'(a) = 0$.

Prova. Veja (LIMA, 2019).

2.4 TOPOLOGIA DOS ESPAÇOS MÉTRICOS

Os conceitos e resultados a seguir são essenciais para o estudo detalhado da dinâmica das funções quadráticas abordadas no Caso III do Capítulo 4.

Definição 2.15 *Sejam* M *um conjunto não vazio e* $d : M \times M \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

(i) $d(x, y) \geq 0\ \forall x, y \in M$;

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(iii) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in M$;

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\ \forall x, y, z \in M$.

Nestas condições, diremos que d é uma métrica em M. Além disso, para cada par $(x, y) \in M \times M$, o número real $d(x, y)$ é chamado de distância de x a y.

Definição 2.16 *Um espaço métrico é um conjunto não vazio* M *munido de uma métrica* d.

Exemplo 2.3 *O conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$ *munido da métrica* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $d(x, y) = |x - y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *é um espaço métrico. Tal métrica* d *é conhecida como métrica usual de* $\mathbb{R}$.

Neste trabalho, $\mathbb{R}$ será visto como um espaço métrico munido da métrica usual.

Definição 2.17 *Considere* M *um espaço métrico munido de uma métrica* d *e* $A \subseteq M$. *O conjunto* A *é dito aberto quando para cada* $a \in A$ *existe* $r > 0$ *tal que*

$$\{x \in M; d(x, a) < r\} \subseteq A.$$

Observação. Costuma-se utilizar a seguinte notação $B(a,r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}$.

Exemplo 2.4 *Os intervalos da forma* $(c,d), (-\infty, d)$ *e* $(c, +\infty)$, $c, d \in \mathbb{R}$ *são exemplos de conjuntos abertos em* $\mathbb{R}$.

Proposição 2.5 *Se* $(A_\lambda)_\lambda$ *é uma família qualquer de conjuntos abertos, a reunião* $\cup_\lambda A_\lambda$ *é um conjunto aberto.*

Prova. Veja (LIMA, 2015).

Definição 2.18 *Sejam* M *um espaço métrico e* $F \subseteq M$. *O conjunto* F *é dito fechado quando seu complementar* $M - F$ *é aberto.*

Exemplo 2.5 *Os intervalos da forma* $[c,d], (-\infty, d]$ *e* $[c, +\infty)$, $c, d \in \mathbb{R}$ *são exemplos de conjuntos fechados em* $\mathbb{R}$.

Proposição 2.6 *Se* $(F_\lambda)_\lambda$ *é uma família qualquer de conjuntos fechados, a intersecção* $\cap_\lambda F_\lambda$ *é um conjunto fechado.*

Prova. Veja (LIMA, 2015).

Definição 2.19 *Sejam* M *um espaço métrico e* $C \subseteq M$. *O conjunto* C *é dito compacto quando é fechado e limitado.*

Exemplo 2.6 *Os intervalos da forma* $[c,d]$, $c, d \in \mathbb{R}$ *são exemplos de conjuntos compactos em* $\mathbb{R}$.

Teorema 2.6 *Dada uma sequência decrescente* $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset ... \supset X_n \supset ...$ *de conjuntos compactos não vazios em* $\mathbb{R}$, *existe pelo menos um número real que pertence a todos os* X_n.

Prova. Veja (LIMA, 2015).

Proposição 2.7 *Sejam* $X \subseteq \mathbb{R}$ *compacto e* $g : X \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então, existem* $x_0, x_1 \in X$ *tais que* $g(x_0) \leq g(x) \leq g(x_1)$ *para todo* $x \in X$.

Prova. Veja (LIMA, 2015).

Definição 2.20 *Diremos que um subconjunto* $X \subseteq \mathbb{R}$ *é totalmente desconexo quando* $\forall x, y \in X$, $[x,y] \nsubseteq X$.

Definição 2.21 *Considere* M *um espaço métrico,* $X \subset M$ *e* $p \in X$. *Diremos que* p *é um ponto isolado de* X *se existir* $r > 0$ *tal que*

$$B(p,r) \cap X = \varnothing.$$

Definição 2.22 *Num espaço métrico M, conjunto $D \subset M$ é denso em M se para todo $x \in M$ e para cada $r > 0$*

$$B(x, r) \cap D \neq \varnothing.$$

Finalmente, o conceito de função contínua entre espaços métricos é uma generalização do conceito de funções reais contínuas, conforme veremos a seguir.

Definição 2.23 *Sejam M_1 e M_2 espaços métricos munidos das métricas d_1 e d_2 respectivamente e $a \in M_1$. Diremos que a função $f : M_1 \to M_2$ é contínua em a quando $\forall \epsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que*

$$x \in M_1, d_1(x, a) < r \Rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

No caso em que f for contínua em cada $a \in M_1$, diremos que f é contínua.

Além disso, se f for uma função bijetora, contínua e com inversa f^{-1} contínua, chamamos f de homeomorfismo.

3 ASPECTOS HISTÓRICOS

3.1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE FUNÇÕES

O conceito de função é um dos mais importantes da matemática, nasceu da necessidade de filósofos e cientistas em buscar ferramentas que explicassem e previssem fenômenos da natureza. Tal conceito teve contribuições de diversas pessoas ligadas à Matemática e passou por evoluções e aperfeiçoamentos até chegar no formato que conhecemos hoje.

Não se sabe ao certo onde e quando surgiu o conceito de função. Mas sabe-se que noções primitivas já eram usadas desde tempos remotos. Segundo Sá, Souza e Silva (2003, p. 125):

> A ideia de funcionalidade de uma certa maneira não é recente na mente humana, por exemplo, quando o homem levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional.

Muitas civilizações antigas usavam, mesmo de forma intuitiva, conceitos de funcionalidade. Por exemplo, são conhecidas as tábuas de argilas construídas pelos Babilônios por volta de 2000 a.C., com tabelas sexagesimais de quadrados e raízes quadradas, normalmente usadas na astronomia pelo povo daquele tempo. Podemos entender que essas tabelas representavam, de forma vaga, noções de funções pois associavam grandezas de forma biunívoca.

Outra civilização que contribuiu de forma significativa com o desenvolvimento da Matemática foram os Egípcios. Em registros deixados por escribas, em documentos como o famoso papiro de Rhind, haviam problemas do cotidiano que envolviam cálculos de áreas de terras e volumes de grãos. Na resolução de tais problemas já haviam evidências de funcionalidade, que recaíam em funções polinomiais de 1º grau.

Dentre os Gregos, destacaram-se as contribuições dos Pitagóricos e de Ptolomeu. Pitágoras desenvolveu estudos relacionados à acústica, comparando a altura dos sons com o comprimento das cordas vibratórias. Já Ptolomeu, fez descobertas relacionadas à astronomia, construiu tabelas para os comprimentos de cordas de arco x de um círculo. Em ambos os casos podemos notar uma relação de dependência entre grandezas.

Embora a definição de função não tenha sido percebida pelos povos da antiguidade, eles a usavam nos estudos das ciências, nos casos em que ocorriam dependência entre duas grandezas. Já na Idade Média, percebe-se, com frequência, noções de funções em representações gráficas ou verbais. Destacamos os estudos realizados pelo Bispo Nicolau de Oresme (1323 - 1382) e por Galilei Galileu (1564 - 1642).

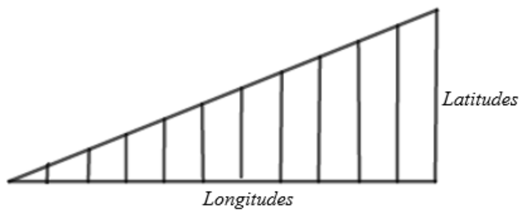
Segundo Oliveira, Rosa e Viana (2014, p. 53), ”para Oresme, a mensurabilidade podia ser representada de maneira contínua, traçando um gráfico de velocidade versus tempo, caso a aceleração fosse mantida constante". Para Boyer (1996), Oresme foi pioneiro ao fazer uso de tal representação gráfica que ficou conhecida como *Latitude das Formas*.

Oresme descreveu graficamente a dependência entre a velocidade e o tempo da seguinte forma:

> Ao longo de uma reta horizontal ele marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), e para cada instante ele traçou perpendicularmente à reta de longitudes um segmento de reta (latitude) cujo comprimento representava a velocidade (BOYER, 1996, p. 181).

Os termos designados por Oresme, Longitude e Latitude correspondem, respectivamente, à abcissas e ordenadas que usamos atualmente. Ainda de acordo com Boyer (1996, p. 181), "Parece que ele percebeu o princípio fundamental de se poder representar uma função de uma variável como uma curva, mas não soube usar eficazmente essa observação a não ser no caso de função linear".

Figura 1 – Representação gráfica usada por Oresme



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Galileu Galilei, mesmo sem ter usado explicitamente a palavra função, também fez uso de conceitos relacionados às funções, em seus trabalhos sobre a queda dos corpos. Galileu conhecia as obras de Oresme, e por diversas vezes fez uso de diagramas semelhantes aos gráficos de Oresme.

Percebe-se que os estudos relacionados ao movimento possibilitou o surgimento do conceito de função ou a relação entre duas grandezas. Porém, ainda faltavam ferramentas algébricas adequadas que auxiliariam na definição formal do conceito de função. No século XVI o matemático francês François Viète contribuiu de forma significativa para o avanço da simbologia algébrica.

Viète fez a distinção entre aritmética e álgebra e, segundo Elves (2004), introduziu a prática de usar vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes. Mas a prática de usar as últimas letras do alfabeto para indicar incógnitas e as primeiras para constantes originou-se de René Descartes (1596 - 1650).

A maior contribuição de Descartes para a matemática foi o desenvolvimento da geometria analítica. Ele associou curvas às equações algébricas e fez uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis. Segundo Baumgart (1992, p.83), citado por Sá, Souza e Silva (2003), Descartes chegou a definir função como qualquer potencia de x, como x^2, x^3, ...

Em 1673, Gottfried Leibniz (1642 - 1727) utilizou o termo Função pela primeira vez, para designar quantidades que dependiam uma da outra, em sua obra intitulada *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*.

Há divergências sobre quem foi o primeiro matemático a utilizar a notação f para denominar uma função. Para Cajori (1993), citado por Oliveira, Rosa e Viana (2014), Leibniz foi o primeiro a utilizar a termologia $f(x)$. Segundo as palavras de Sá, Souza e Silva (2003), Leonhard Euler (1707 - 1783) foi quem introduziu o símbolo $f(x)$ e definiu função no sentido analítico, no qual uma função não necessitava unicamente de uma expressão para representá-la.

3.1.1 **Conceito de Função**

De acordo com Oliveira, Rosa e Viana (2014), Johann Bernoulli iniciou a tentativa de encontrar uma definição acadêmica para o conceito de função, definindo-a da seguinte forma: ”função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável por constantes”(SÁ, SOUZA e SILVA, 2003, p. 128). A partir deste momento, vários matemáticos definiram o conceito de função. Dentre eles destacaremos as contribuições dadas por Lagrange, Fourier, Cauchy e Dirichlet, que é a mais próxima da utilizada atualmente.

Alguns problemas impulsionaram o estudo de funções e levaram a reformulação da definição. Por exemplo, o problema da corda vibrante que consistia em determinar uma função que descrevia o formato de uma corda elástica em qualquer instante de tempo, considerando seus extremos fixos. Tal problema demorou anos para ser resolvido e desafiou vários matemáticos entre eles Joseph - Louis Lagrange (1736 - 1813) que encontrou uma solução para o problema e definiu função da seguinte forma:

> Chama-se função de uma ou várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas. (MENDES, 1994, p. 37).

Outro problema importante que também contribuiu com o estudo de funções foi o estudo de séries trigonométricas feitas por Jean Joseph Fourier (1768 - 1830). Fourier ao estudar a propagação do calor afirmou que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica infinita da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} \right]$$

onde

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}dt \text{ e } b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{l}dt.$$

Este estudo levou Fourier a estudar a integrabilidade das funções e devido isso deu uma definição mais abrangente para função. Eis a definição dada por ele

> Acima de tudo deve ser destacado que a função $f(x)$, para a qual esta prova se aplica, é inteiramente arbitrária, e não sujeita a uma lei de continuidade... Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores que são dados à abcissa x, e existe um número igual de ordenada $f(x)$... Nós não supomos estas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de qualquer maneira que seja, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única. (MENDES, 1994, p. 40).

As ideias de Fourier não foram bem aceitas na época, pois eram confusas e não havia uma formalização matemática. Mesmo assim seu trabalho foi reconhecido. Em 1821, Cauchy também deu sua contribuição para a formalização do conceito de função:

> Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável. (SÁ; SOUZA; SILVA, 2013, p. 133).

As definições de funções ainda eram restritas, até que Gustav Lejune Dirichlet (1805 - 1859), ao estudar as Série de Fourier, surpreendeu a todos com uma definição muito improvável. Em 1829, Dirichlet definiu uma função descontinua em todos os seus pontos, não integrável e que não tinha representação gráfica . Essa função ficou conhecida como ”função de Dirichlet”

$$f(x) = \begin{cases} c, & se\ x\ \ racional \\ d, & se\ x\ \ irracional \end{cases}$$

Dirichlet conhecia os estudos de Cauchy e segundo Sá, Souza e Silva (2003), Dirichlet demonstrou que nem toda função poderia ser escrita pela série de Fourier, apenas as que possuíam algumas característica específicas. Citando Boyer (1996), Dirichlet definiu função de uma forma bem mais ampla:

> Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de y, então se diz que y é função da variável independente x. (BOYER, 1996, p. 352).

Com Dirichlet o conceito de função evoluiu de forma significativa e é a que mais se aproxima da definição usada hoje. Dirichlet trocou o conceito de grandezas por números e a ideia de que toda função precisava ser escrita de forma analítica. Ele acreditava que sua função não poderia ser escrita de tal forma, posteriormente os matemáticos provaram o contrário e escreveram sua função de forma analítica.

Percebe-se que o conceito de função foi sendo construído ao longo de muitos anos. Surgiram várias formalizações para a definição de função até chegar na que conhecemos hoje. Muitas delas relacionavam variáveis dependentes e independentes. Oliveira (1997, p.22), citado por Darronqui (2014), afirma que "é necessário deixar claro na função as suas componentes de variação, dependência e correspondência".

3.2 BREVE HISTÓRICO DOS SISTEMAS DINÂMICOS

Sistemas Dinâmicos são sistemas caracterizados por mudarem de estado no decorrer do tempo, ou seja, sistemas que evoluem segundo uma regra que relaciona o estado presente aos estados futuros. Vivemos rodeados por tais sistemas: o mercado das ações, as condições climáticas, o crescimento de uma população, o movimento das estrelas e planetas, o balanço de um pêndulo, a formação de uma nuvem, as reações químicas e tantos outros exemplos. Por isso a Teoria de Sistemas Dinâmicos tem aplicações em diversas áreas como Engenharia, Economia, Física, Medicina e Ciências Sociais.

O que os cientistas se perguntam a respeito destes fenômenos é sobre qual seria seu estado no futuro. Seria possível prever com precisão a precipitação da chuva daqui a um mês conhecendo com exatidão todos os agentes que influenciam a formação das nuvens como temperatura, ventos, evaporação da água, umidade, pressão e tantos outros? E o valor das ações na bolsa de valores daqui uma semana? E a população de um microrganismo, coronavírus, por exemplo, no decorrer do tempo? Veremos que nem sempre é possível.

Alguns sistemas dinâmicos são previsíveis e outros imprevisíveis. Inclusive sistemas que possuem lei de evolução bem definida ou dependem de poucos fatores podem ser imprevisíveis. Este é o caso das funções quadráticas, objeto de estudo deste trabalho.

Vale ressaltar que a área de Sistemas Dinâmicos é relativamente nova na matemática e os trabalhos de Isaac Newton foram fundamentais para o desenvolvimento desta área. Newton fez importantes estudos sobre Mecânica Celeste, provando que se desprezarmos a influencia gravitacional entre os planetas, os mesmos se moveriam em órbitas elípticas com o sol sendo um dos focos. Ao modelar este sistema Newton usou equações diferenciais não lineares, porém, grande maioria das equações não podiam ser resolvidas analiticamente.

O matemático francês Henri Poincaré é considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos. Poincaré não se preocupou em encontrar soluções analíticas de certas equações diferenciais não lineares, e sim com o estudo qualitativo das soluções.

Poincaré estudou o movimento dos planetas. Ele queria entender matematicamente o que acontecia ao acrescentar um corpo de massa gravitacional a um sistema com dois corpos. Este problema ficou conhecido como problema restrito dos três corpos. Ao fazer um estudo qualitativo Poincaré descobriu que ao invés de existirem órbitas regulares e equilibradas ocorriam órbitas irregulares, desequilibradas e imprevisíveis. Poincaré ficou assustado com o resultado e mesmo sem saber acabava de descobrir o que hoje chamamos de *dinâmica caótica*.

A *Teoria do Caos* estuda sistemas que possuem sensibilidade às condições iniciais, ou seja, pequenas alterações nas condições iniciais podem ocasionar consequências enormes e imprevisíveis. É o que acontece, por exemplo, com e evolução do clima e o Problema dos Três Corpos.

O matemático Verhulst, em 1845, fez estudos para entender o crescimento populacional de sistemas ecológicos. Para compreender melhor tal estudo, considere uma população de espécie que habita determinado território. Suponha P_0 o número inicial desta população, P_n o número da população n anos depois e k a taxa de crescimento da população, dada por

$$k = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} \Rightarrow P_{n+1} = P_n(1+k).$$

Desta forma, é possível calcular a quantidade da população de cada ano conhecendo a população inicial e a taxa de crescimento. Assim,

$$\begin{aligned} P_0 &= x_0 \\ P_1 &= (1+k)x_0 = (1+k)P_0 \\ P_2 &= (1+k)P_1 = (1+k)^2P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= P_0(1+k)^n. \end{aligned}$$

Porém, há um problema. O modelo acima sugere que a população cresça infinitamente, o que não é coerente à realidade, pois se uma população cresce indiscriminadamente então os alimentos tendem a escassez e a população começa a diminuir. Para tornar seu modelo mais realístico Verhulst precisou usar o seguinte modelo

$$P_{n+1} = \lambda P_n(1 - P_n) + P_n.$$

Neste caso, $0 \leq P_n \leq 1$ e λ é um valor que depende das condições de cada sistema ecológico.

Verhulst variou os valores de λ para simular diferentes tipos de ecossistemas. Mas algo improvável aconteceu! O matemático observou que se $\lambda = 1,5$, a população estabilizava em 1,000, enquanto para $\lambda = 2,2$ haveria uma oscilação ente 0,74624 e 1,16284. Mas o que mais surpreendeu foi quando $\lambda = 3$. Para este caso foi verificado o caos no crescimento da população e a ausência de qualquer padrão ou equilíbrio. Desta forma, para que o modelo representasse a realidade, λ não poderia assumir qualquer valor. A função $f(x) = \lambda x(1-x)$ ficou conhecida como função logística e neste trabalho faremos um estudo detalhado de sua dinâmica.

4 CARACTERIZAÇÃO E DINÂMICA DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Há várias definições do que é um sistema dinâmico. Neste capítulo abordaremos um modelo de dinâmica com tempo discreto. Assim, um sistema dinâmico discreto é uma função $f : M \to M$ em algum espaço métrico M. Neste caso, a cada estado $x \in M$ do sistema é associado o estado $f(x) \in M$ em que x se encontrará uma unidade de tempo depois.

Sistemas dinâmicos caóticos são objeto de estudo em vários ramos das Ciências Exatas. Muitos problemas da Biologia, Economia, Engenharia, Física entre outras são referenciados como de comportamento caótico, muitas vezes de uma maneira informal, baseado em alguma propriedade manifestada pelo sistema. A seguir veremos um estudo de uma família de funções quadráticas na perspectiva dos sistemas dinâmicos e apresentaremos conceitos e propriedades que envolvem a definição de aplicação caótica dada por Devaney.

Definição 4.1 *Sejam $f : M \to M$ e $x \in M$. Considere*

$$f^0(x) = x,\ f^1(x) = f(x),\ f^2(x) = f(f^1(x)), ..., f^n(x) = f(f^{n-1}(x)),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

A sequência $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é chamada de órbita de x por f.

Um dos objetos do estudo de sistemas dinâmicos é descrever o comportamento das órbitas, analisar se cada órbita tem limite, ou descrever seus pontos de acumulação.

Exemplo 4.1 *Considere $f(x) = 2x(1-x)$.*
A órbita de $x_0 = 0,2$ por f é

$$(0,2,\ 0,32,\ 0,4352,\ 0,4916,\ 0,4998,\ 0,4999,\ ...).$$

A órbita de $x_1 = 0$ por f é

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...).$$

A órbita de $x_2 = 1$ por f é

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ ...).$$

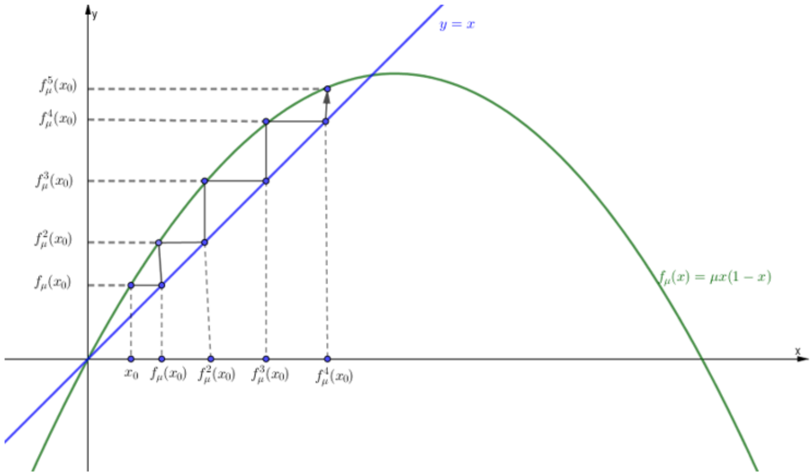
Podemos observar que para $x_0,\ x_1,\ x_2 \in [0,1]$ distintos obtemos órbitas com comportamentos diferenciados.

No caso das funções quadráticas podemos recorrer à sua representação gráfica para melhor compreender o comportamento das órbitas.

Com os gráficos das funções $y = x$ e $y = f_\mu(x)$, a órbita de cada x_0 pode ser representada no eixo X através da projeção dos pontos:

$$(x_0, x_0),\ (x_0, f_\mu(x_0)),\ (f_\mu(x_0), f_\mu(x_0)),\ (f_\mu(x_0), f_\mu^2(x_0)),\ (f_\mu^2(x_0), f_\mu^2(x_0)), ...$$

Figura 2 – Órbita de x_0



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

4.1 PONTOS FIXOS

Definição 4.2 *Um ponto x_0 é dito ponto fixo de f se satisfaz a igualdade $f(x_0) = x_0$.*

Observe que neste caso tem-se $f(x_0) = x_0,\ f^2(x_0) = x_0,\ f^3(x_0) = x_0, ..., f^n(x_0) = x_0$. E portanto, a órbita do ponto fixo é a sequência $(x_0,\ x_0,\ x_0, ...)$.

Proposição 4.1 *Seja $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Então, f_μ possui dois pontos fixos.*

De fato,

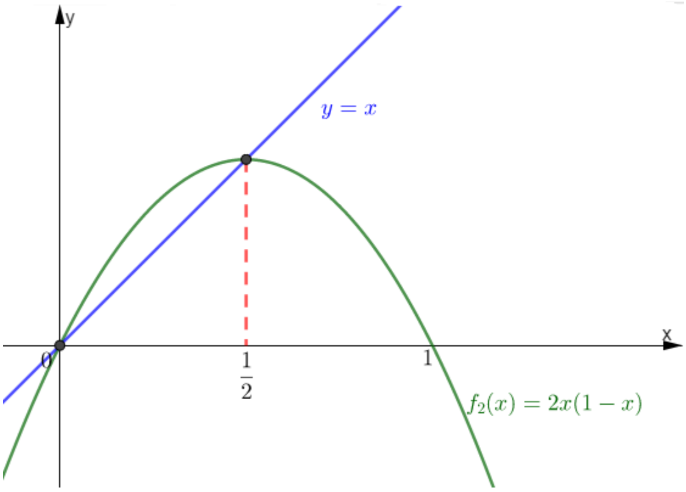
$$\begin{aligned}
f_\mu(x) &= x \\
\Leftrightarrow \mu x(1-x) &= x \\
\Leftrightarrow \mu x(1-x) - x &= 0 \\
\Leftrightarrow x[\mu(1-x) - 1] &= 0 \\
\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \mu(1-x) - 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad \mu - \mu x - 1 &= 0 \\
\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x &= \frac{\mu - 1}{\mu}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, f_μ tem dois pontos fixo: 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$.

■

Graficamente, os pontos fixos de uma função são obtidos da intersecção do gráfico da função com o gráfico de $y = x$. A Figura 3 ilustra o caso $\mu = 2$.

Figura 3 – Pontos fixos de f_2



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Note que os pontos de intersecção dos gráficos ocorrem em $x = 0$ e $x = p_\mu = \frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

Definição 4.3 *Um ponto x_0 é dito periódico de período n da função f se $f^n(x_0) = x_0$ e $f^k(x_0) \neq x_0 \; \forall \; 0 < k < n$. Neste caso, a órbita de x_0 é a sequência*

$$(x_0,\; f(x_0),\; f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0),\; x_0,\; f(x_0),\; f^2(x_0), ..., f^{n-1}(x_0),\; x_0, ...).$$

Definição 4.4 *Sejam $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \to M$ uma função derivável e p um ponto fixo de f. Dizemos que p é um ponto fixo hiperbólico se, $|f'(p)| \neq 1$. Se $|f'(p)| < 1$ dizemos que p é um ponto fixo atrator; se $|f'(p)| > 1$, p é um ponto fixo repulsor.*

Proposição 4.2 *Sejam $f_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $\forall \, x \in \mathbb{R}$, 0 e p_μ seus pontos fixos. Então,*

(a) 0 é ponto fixo atrator se, e somente se, $-1 < \mu < 1$.

(b) p_μ é ponto fixo atrator se, e somente se, $1 < \mu < 3$.

(c) 0 é ponto fixo repulsor se, e somente se, $\mu < -1$ ou $\mu > 1$.

(d) p_μ é ponto fixo repulsor se, e somente se, $\mu > 3$ ou $\mu < 1$.

Prova. A derivada de f_μ é dada por $f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$, $\forall \, x \in \mathbb{R}$. Assim,

(a) 0 é ponto fixo atrator $\Leftrightarrow |f'_\mu(0)| = |\mu| < 1 \Leftrightarrow -1 < \mu < 1$.

(b) Como $f'_\mu(p_\mu) = \mu - 2\mu p_\mu = \mu - 2\mu \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right) = -\mu + 2$, p_μ é um ponto fixo atrator $\Leftrightarrow |f'_\mu(p_\mu)| = |-\mu + 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < -\mu + 2 < 1 \Leftrightarrow -3 < -\mu < -1 \Leftrightarrow$ $1 < \mu < 3$.

(c) 0 é um ponto fixo repulsor $\Leftrightarrow |f'_\mu(0)| = |\mu| > 1 \Leftrightarrow \mu < -1$ ou $\mu > 1$.

(d) p_μ é um ponto fixo repulsor $\Leftrightarrow$ $|f'_\mu(p_\mu)| = |-\mu + 2| > 1 \Leftrightarrow -\mu + 2 < -1$ ou $-\mu + 2 > 1 \Leftrightarrow \mu > 3 \quad$ ou $\quad \mu < 1$.

■

Proposição 4.3 *Sejam $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \to M$ derivável com função derivada contínua e p um ponto fixo atrator de f. Então existe um intervalo aberto I contendo p tal que se $x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = p$.*

Prova. Como p é um ponto fixo atrator, existe $A > 0$, tal que $|f'(p)| < A < 1$. Além disso, pela continuidade de f', existe $r > 0$ tal que

$$|f'(x)| < A < 1, \forall\, x \in (p - r, p + r).$$

Afirmação. $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = p,\ \forall\, x \in (p - r, p + r)$.

De fato, seja $x_0 \in (p-r, p+r)$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $p_0 \in (p-r, p+r)$ tal que

$$f'(p_0) = \frac{f(x_0) - f(p)}{x_o - p} = \frac{f(x_0) - p}{x_0 - p}.$$

Assim,

$$|f(x_0) - p| = |f'(p_0)||x_0 - p| < A|x_0 - p|$$

$$\Rightarrow |f(x_0) - p| < A|x_0 - p| < |x_0 - p| < r.$$

Em particular, $f(x_0) \in (p - r, p + r)$.

Repetindo o processo para $f(x_0)$, temos

$$|f(f(x_0)) - p| < A|f(x_0) - p| < A^2|x_0 - p| < r$$

$$\Rightarrow |f^2(x_0) - p| < A^2|x_0 - p| < r \Rightarrow f^2(x_0) \in (p - r, p + r).$$

Por indução, obtemos,

$$|f^n(x_0) - p| < A^n|x_0 - p|, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^n(x_0) \in (p - r, p + r), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, como $A < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = 0$, e consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} |f^n(x_0) - p| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f^n(x_0) = p.$$

Portanto $I = (p - r, p + r)$ é o intervalo que satisfaz a proposição.

■

4.2 A DINÂMICA DAS FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Nesta seção iremos estudar os sistemas dinâmicos $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ para os diferentes valores do parâmetro μ.

Proposição 4.4 *Seja* $f_\mu(x) = \mu x(1-x)\ \forall\, x\ \in \mathbb{R}$. *Se* $\mu \in (1,4]$, *então* $f_\mu([0,1]) \subset [0,1]$.

Prova. Como $f'_\mu(x) = -2x\mu + \mu = \mu(-2x+1)$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f'_\mu(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Assim, $x = \frac{1}{2}$ é ponto crítico de f_μ.

Além disso,

$$f'_\mu(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, \frac{1}{2})$$

e

$$f'_\mu(x) < 0 \text{ para todo } x \in (\frac{1}{2}, +\infty).$$

Consequentemente,

$$f_\mu \text{ é monótona crescente em } (-\infty, \frac{1}{2})$$

e

$$f_\mu \text{ é monótona decrescente em } (\frac{1}{2}, +\infty),$$

e portanto, f_μ assume valor máximo em $x = \dfrac{1}{2}$.

Assim, se $x \in [0,1]$ então $x \in [0, \frac{1}{2}] \cup (\frac{1}{2}, 1]$, e portanto,

$$x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow 0 = f_\mu(0) \leq f_\mu(x) \leq f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} \leq 1$$

e

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow 0 = f_\mu(1) \leq f_\mu(x) \leq f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} \leq 1.$$

Logo, $f_\mu([0,1]) \subset [0,1]$.

■

A partir de agora estudaremos os sistemas dinâmicos $f_\mu : [0,1] \to [0,1]$ para $\mu \in (1,3)$.

4.2.1 Caso I - $1 < \mu \leq 2$

Proposição 4.5 *Sejam* $1 < \mu \leq 2$ *e* $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ *para todo* $x \in [0,1]$. *Se* $x \in (0,1)$ *então* $\lim\limits_{n \to +\infty} f^n_\mu(x) = p_\mu$.

Prova. Para facilitar a compreensão desmembramos a demonstração nas etapas a seguir.

(i) $p_\mu \leq \frac{1}{2}$.

De fato, $p_\mu = f_\mu(p_\mu) \leq f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

(ii) f_μ é monótona crescente em $(0, p_\mu)$.

Vimos que f_μ é monótona crescente em $(-\infty, \frac{1}{2})$. Por (i), $(-\infty, p_\mu) \subseteq (-\infty, \frac{1}{2})$. Além disso, $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} > 0$, pois $1 < \mu \leq 2$. Logo, f_μ é monótona crescente em $(0, p_\mu)$.

(iii) A função $g(x) = f_\mu(x) - x$ é tal que $g(x) > 0 \; \forall \; x \; \in (0, p_\mu)$.

Com efeito, note que $g'(x) = (-2\mu)x + (\mu - 1)$.
Assim,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -2\mu x + \mu - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu - 1}{2\mu} = \frac{1}{2}p_\mu.$$

Estudando o sinal de g' obtemos

$$g'(x) > 0 \text{ para todo } x \in (0, \frac{1}{2}p_\mu)$$

e

$$g'(x) < 0 \text{ para todo } x \in (\frac{1}{2}p_\mu, p_\mu).$$

Daí,

$$g \text{ é monótona crescente em } (0, \frac{1}{2}p_\mu)$$

e

$$g \text{ é monótona decrescente em } (\frac{1}{2}p_\mu, p_\mu).$$

Como g é contínua e $g(0) = g(p_\mu) = 0$, concluímos que $g(x) > 0, \; \forall \; x \in (0, p_\mu)$.

(iv) Se $x \in (0, p_\mu)$ então $f_\mu(x) \in (0, p_\mu)$.

Seja $x \in (0, p_\mu)$. De (iii), $0 < x < f_\mu(x)$. Como f_μ é monótona crescente em $(0, p_\mu)$, $x < p_\mu$ implica em $f_\mu(x) < f_\mu(p_\mu) = p_\mu$. Logo, $0 < x < f_\mu(x) < p_\mu$.

(v) A sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente $\forall \; x \in (0, p_\mu)$.

Seja $x \in (0, p_\mu)$. Por (iv), $f_\mu^n(x) \in (0, p_\mu) \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.
Por (iii),

$$f_\mu(x) - x > 0 \Rightarrow x < f_\mu(x).$$

Como f_μ é monótona crescente em $(0, p_\mu)$,

$$f_\mu(x) < f_\mu^2(x).$$

Suponhamos $f_\mu^k(x) < f_\mu^{k+1}(x)$ para k inteiro positivo. Como f_μ é monótona crescente em $(0, p_\mu)$, segue que $f_\mu(f_\mu^k(x)) < f_\mu(f_\mu^{k+1}(x))$, isto é, $f_\mu^{k+1}(x) < f_\mu^{k+2}(x)$. Logo, pelo Princípio de Indução Finita, para todo $x \in (0, p_\mu)$ a sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente, isto é,

$$0 < x < f_\mu(x) < f_\mu^2(x) < f_\mu^3(x) < ... < f_\mu^n(x) < f_\mu^{n+1}(x) < ... < p_\mu, \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(vi) $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$ para cada $x \in (0, p_\mu)$.

Seja $x \in (0, p_\mu)$.

A sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente pois $f_\mu^n(x) \in (0, p_\mu)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e, por (v), é monótona crescente. Assim, existe $c \in [0, p_\mu]$, $c = \sup_{n\in\mathbb{N}}(f_\mu^n(x))$ e

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = c.$$

Como $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ é uma função contínua,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu(f_\mu^n(x)) = f_\mu(c)$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+1}(x) = f_\mu(c).$$

Pela unicidade do limite

$$c = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+1}(x) = f_\mu(c),$$

e portanto, c é um ponto fixo de f_μ.

Visto que 0 e p_μ são os únicos pontos fixos de f_μ e que

$$0 < x < \ldots < f_\mu^n(x) < f_\mu^{n+1}(x) < \ldots < p_\mu,\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

temos $c = p_\mu$.

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

(vii) A função $g(x) = f_\mu(x) - x$ é tal que $g(x) < 0\ \forall\, x\ \in (p_\mu, \frac{1}{2})$.

Como $g'(x) = (-2\mu)x + (\mu - 1)$,

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu - 1}{2\mu} = \frac{1}{2}p_\mu.$$

Assim,

$$g'(x) > 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, \frac{1}{2}p_\mu)$$

e

$$g'(x) < 0 \text{ para todo } x \in (\frac{1}{2}p_\mu, +\infty).$$

Daí,

$$g \text{ é monótona crescente em } (-\infty, \frac{1}{2}p_\mu)$$

e

$$g \text{ é monótona decrescente em } (\frac{1}{2}p_\mu, +\infty).$$

Em particular,

$$g \text{ é monótona decrescente em } (p_\mu, \frac{1}{2}).$$

Como g é contínua e $g(p_\mu) = 0$, concluímos que $g(x) < 0, \ \forall\, x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$.

(viii) Se $x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$ então $f_\mu(x) \in (p_\mu, \frac{1}{2})$.

Seja $x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$. Então, por (vii), $f_\mu(x) < x$.
Vimos que f_μ é monótona crescente em $(-\infty, \frac{1}{2})$, e portanto

$$0 = f_\mu(0) < f_\mu(p_\mu) < f_\mu(x) < x$$

$$\Rightarrow 0 < p_\mu < f_\mu(x) < x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_\mu(x) \in (p_\mu, \frac{1}{2}).$$

(ix) A sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente para todo $x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$.

Seja $x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$. De (viii), $f_\mu^n(x) \in (p_\mu, \frac{1}{2})\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Utilizando (vii) sucessivamente,

$$f_\mu(x) < x$$

e

$$f_\mu^2(x) < f_\mu(x).$$

Suponhamos $(f_\mu)^{k+1}(x) < (f_\mu)^k(x)$ para k inteiro positivo. Segue de (vii) que $(f_\mu)((f_\mu)^{k+1}(x)) < (f_\mu)^{k+1}(x)$, isto é, $(f_\mu)^{k+2}(x) < (f_\mu)^{k+1}(x)$. Logo, pelo Princípio de Indução Finita, para todo $x \in (p_\mu, \frac{1}{2}),\ (f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

(x) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$ para cada $x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$.

Seja $x \in (p_\mu, \frac{1}{2})$.
A sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente pois $f_\mu^n(x) \in (p_\mu, \frac{1}{2})\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, e, por (ix), é monótona decrescente. Assim existe $d \in [p_\mu, \frac{1}{2}]$, $d = \inf_{n\in\mathbb{N}}(f_\mu^n(x))$ e

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = d.$$

Visto que $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ é uma função contínua,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu(f_\mu^n(x)) = f_\mu(d)$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+1}(x) = f_\mu(d).$$

Pela unicidade do limite

$$d = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+1}(x) = f_\mu(d),$$

e portanto, d é um ponto fixo de f_μ.

Como 0 e p_μ são os únicos pontos fixos de f_μ e

$$p_\mu < ... < f_\mu^{n+1}(x) < f_\mu^n(x) < ... < x < \frac{1}{2}, \; \forall\, n \in \mathbb{N},$$

temos $d = p_\mu$.

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

(xi) $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$ para cada $x \in (0, \frac{1}{2})$.

Por (vi) e (x), $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$ para cada $x \in (0, p_\mu) \cup (p_\mu, \frac{1}{2})$.
Além disso, para $x = p_\mu$ temos

$$f_\mu^n(x) = p_\mu \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu \text{ para cada } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

(xii) Se $x \in (\frac{1}{2}, 1)$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$.

Seja $x \in (\frac{1}{2}, 1)$.
Como f_μ é monótona decrescente em $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

$$0 = f_\mu(1) < f_\mu(x) < f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} \leq \frac{1}{2}.$$

Por (xi),

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(z) = p_\mu \text{ para todo } z \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Consequentemente,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(f_\mu(x)) = p_\mu \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

■

4.2.2 Caso II - 2 < μ < 3

Proposição 4.6 *Sejam $2 < \mu < 3$ e $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ para todo $x \in (0,1)$. Se $x \in (0,1)$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu$.*

Prova. Para facilitar a compreensão desmembraremos novamente a demonstração.

(i) Para cada $2 < \mu < 3,\ p_\mu \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Com efeito, $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} = 1 - \frac{1}{\mu}$.

Assim,

$$2<\mu<3 \Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{\mu}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}<-\frac{1}{\mu}<-\frac{1}{3} \Rightarrow 1-\frac{1}{2}<1-\frac{1}{\mu}<1-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}<p_\mu<\frac{2}{3}<1.$$

(ii) Existe $q_\mu \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f_\mu(q_\mu) = p_\mu$.

Tome $q_\mu = 1 - p_\mu$.
Como $\frac{1}{2} < p_\mu < 1$, temos $1 - 1 < 1 - p_\mu < 1 - \frac{1}{2}$ o que implica em $0 < q_\mu < \frac{1}{2}$.
Além disso,

$$f_\mu(q_\mu) = \mu q_\mu(1-q_\mu) = \mu(1-p_\mu)(1-(1-p_\mu)) = \mu p_\mu(1-p_\mu) = f_\mu(p_\mu) = p_\mu.$$

(iii) Se $x \in (q_\mu, p_\mu)$ então $f_\mu(x) \in (p_\mu, \frac{\mu}{4}]$.

Observe que $(q_\mu, p_\mu) = (q_\mu, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, p_\mu)$.
Suponhamos que $x \in (q_\mu, \frac{1}{2}]$. Já que f_μ é monótona crescente em $(-\infty, \frac{1}{2})$,

$$q_\mu < x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow p_\mu < f_\mu(x) \leq f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}.$$

Como f_μ é monótona decrescente em $(\frac{1}{2}, +\infty)$, se $x \in [\frac{1}{2}, p_\mu)$ então

$$p_\mu < f_\mu(x) \leq f_\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4}.$$

Logo,

$$f_\mu(x) \in \left(p_\mu, \frac{\mu}{4}\right] \text{ para todo } x \in (q_\mu, p_\mu).$$

(iv) Se $x \in (q_\mu, p_\mu)$ então $f_\mu^2(x) \in (q_\mu, p_\mu)$.

De fato, se $x \in (q_\mu, p_\mu)$,

$$p_\mu < f_\mu(x) \leq \frac{\mu}{4}.$$

Como f_μ é monótona decrescente em $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

$$f_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right) \leq f_\mu^2(x) < f_\mu(p_\mu) = p_\mu.$$

Por outro lado, $2 < \mu < 3$ implica

$$(\mu-2)(\mu^2-2\mu-4) < 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} < f_\mu\left(\frac{\mu}{4}\right).$$

Portanto,

$$q_\mu < \frac{1}{2} < f_\mu^2(x) < p_\mu.$$

(v) Os únicos pontos fixos de f_μ^2 são 0 e p_μ.

Com efeito, x é ponto fixo de f_μ^2 se, e somente se,

$$\begin{aligned} f_\mu^2(x) &= x \\ \Leftrightarrow \mu f_\mu(x)(1 - f_\mu(x)) &= x \\ \Leftrightarrow -\mu^3x^4 + 2\mu^3x^3 + (-\mu^2 - \mu^3)x^2 + (\mu^2 - 1)x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(-\mu^3x^3 + 2\mu^3x^2 + (-\mu^2 - \mu^3)x + (\mu^2 - 1)) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -\mu^3x^3 + 2\mu^3x^2 + (-\mu^2 - \mu^3)x + (\mu^2 - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = p_\mu. \end{aligned}$$

(vi) A função $h(x) = f_\mu^2(x) - x$ é tal que $h(x) > 0 \; \forall x \in (q_\mu, p_\mu)$.

Em (iv), temos

$$q_\mu < \frac{1}{2} < f_\mu^2(x) < p_\mu \; \forall x \in (q_\mu, p_\mu).$$

Em particular,

$$\frac{1}{2} < f_\mu^2\left(\frac{1}{2}\right), \text{ isto é, } h\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$$

Suponha que exista $x_0 \in (q_\mu, p_\mu)$ tal que $h(x_0) < 0$.

Sem perda de generalidade, considere $x_0 < \frac{1}{2}$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_1 \in (x_0, \frac{1}{2})$ tal que $h(x_1) = 0$, isto é, $f_\mu^2(x_1) = x_1$. Absurdo pois $0 < x_0 < x_1 < p_\mu$ e os únicos pontos fixos de f_μ^2 são 0 e p_μ.

Logo, $h(x) > 0$ para todo $x \in (q_\mu, p_\mu)$.

(vii) A sequência $((f_\mu^2)^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona crescente $\forall x \in (q_\mu, p_\mu)$.

Por (vi),

$$x < f_\mu^2(x), \; \forall x \in (q_\mu, p_\mu).$$

Além disso, por (iv), para cada $x \in (q_\mu, p_\mu)$,

$$(f_\mu^2)^n(x) \in (q_\mu, p_\mu), \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$(f_\mu^2)^n(x) < (f_\mu^2)^{n+1}(x), \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, para todo $x \in (q_\mu, p_\mu)$ temos

$$q_\mu < x < f_\mu^2(x) < f_\mu^4(x) < ... < f_\mu^{2n}(x) < ... < p_\mu \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

(viii) $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n}(x) = p_\mu$ para cada $x \in (q_\mu, p_\mu)$.

Seja $x \in (q_\mu, p_\mu)$.

A sequência $(f_\mu^{2n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada superiormente pois $f_\mu^{2n}(x) \in (q_\mu, p_\mu)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, e por (vii), é monótona crescente. Assim, existe $c \in [q_\mu, p_\mu]$, $c = \sup_{n\in\mathbb{N}}(f_\mu^{2n}(x))$ e

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n}(x) = c.$$

Como f_μ^2 é uma função contínua,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^2(f_\mu^{2n}(x)) = f_\mu^2(c)$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+2}(x) = f_\mu^2(c).$$

Pela unicidade do limite

$$c = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+2}(x) = f_\mu^2(c),$$

e portanto, c é um ponto fixo de f_μ^2.

Visto que 0 e p_μ são os únicos pontos fixos de f_μ^2 e que

$$0 < x < ... < f_\mu^{2n}(x) < f_\mu^{2n+2}(x) < ... < p_\mu, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

temos $c = p_\mu$.

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n}(x) = p_\mu.$$

(ix) $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+1}(x) = p_\mu, \ \forall x \in (q_\mu, p_\mu)$.

Vimos que, se $x \in (q_\mu, p_\mu)$,

$$\frac{1}{2} < f_\mu^2(x) < f_\mu^4(x) < ... < f_\mu^{2n}(x) < ... < p_\mu \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $f_\mu(\left(\frac{1}{2}, p_\mu\right)) \subset (p_\mu, \frac{\mu}{4})$ e f_μ é decrescente em $(\frac{1}{2}, +\infty)$,

$$(*) \qquad p_\mu < ... < f_\mu^{2n+1}(x) < ... < f_\mu^5(x) < f_\mu^3(x) < \frac{\mu}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $(f_\mu^{2n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada inferiormente e decrescente, e consequentemente, existe

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+1}(x) = d.$$

Pela continuidade de f_μ^2,

$$f_\mu^2(d) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+3}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+1}(x) = d.$$

Logo, $d = 0$ ou $d = p_\mu$, e por $(*)$

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^{2n+1}(x) = p_\mu, \ \forall x \in (q_\mu, p_\mu).$$

(x) $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu, \forall x \in (q_\mu, p_\mu)$.

É consequência direta de (viii) e (ix).

(xi) Se $x \in (0, q_\mu)$ então $f_\mu(x) \in (0, p_\mu)$.

Seja $x \in (0, q_\mu)$. Como $q_\mu < \frac{1}{2}$ e f_μ é monótona crescente em $(-\infty, \frac{1}{2})$,

$$0 = f_\mu(0) < f_\mu(x) < f_\mu(q_\mu) = p_\mu.$$

Logo, $f_\mu(x) \in (0, p_\mu)$.

(xii) $\forall x \in (0, q_\mu),\ f_\mu(x) > x$.

Considere $g(x) = f_\mu(x) - x$ e suponha que existe $x_0 \in (0, q_\mu)$ tal que $g(x_0) < 0$. Como $g(q_\mu) = p_\mu - q_\mu > 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário, $\exists\, x_1 \in (x_0, q_\mu) \subset (0, p_\mu)$ tal que $g(x_1) = 0$, isto é, $f_\mu(x_1) = x_1$. Absurdo, pois 0 e p_μ são os únicos pontos fixos de f_μ.

(xiii) Para $x \in (0, q_\mu)$ existe k inteiro positivo tal que $f_\mu^k(x) \in [q_\mu, p_\mu)$ e, portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

Seja $x \in (0, q_\mu)$. Então,

$$f_\mu(x) \in (0, p_\mu) = (0, q_\mu) \cup [q_\mu, p_\mu)$$

$$\Rightarrow f_\mu(x) \in (0, q_\mu) \text{ ou } f_\mu(x) \in [q_\mu, p_\mu).$$

Suponha $f_\mu^k(x) \in (0, q_\mu)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Por (xii),

$$0 < x < f_\mu(x) < f_\mu^2(x) < ... < f_\mu^n(x) < f_\mu^{n+1}(x) < ... < q_\mu,$$

isto é, a sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e limitada superiormente, e portanto, converge para $L \in (0, q_\mu]$.
Pela continuidade de f_μ,

$$L = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) \Rightarrow f_\mu(L) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+1}(x) \Rightarrow f_\mu(L) = L \Rightarrow L = p_\mu \in (0, q_\mu].$$

Absurdo, pois $q_\mu < p_\mu$.
Logo, existe k inteiro positivo tal que $f_\mu^k(x) \in [q_\mu, p_\mu)$.
Consequentemente, por (x),

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(f_\mu^k(x)) = p_\mu, \forall x \in (0, q_\mu).$$

(xiv) Se $x \in (p_\mu, 1)$ então $f_\mu(x) \in (0, p_\mu)$. Logo, para todo $x \in (p_\mu, 1)$,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu.$$

Seja $x \in (p_\mu, 1)$. Como f_μ é monótona decrescente em $(\frac{1}{2}, +\infty)$, temos

$$0 = f_\mu(1) < f_\mu(x) < f_\mu(p_\mu) = p_\mu.$$

Logo, $f_\mu(x) \in (0, p_\mu)$ para todo $x \in (p_\mu, 1)$. Sabendo que $f_\mu(q_\mu) = p_\mu$, por (x) e (xiii),

$$\lim_{n \to +\infty} f_\mu^n(x) = p_\mu \text{ para todo } x \in (p_\mu, 1).$$

■

Concluímos que para $1 < \mu < 3$, f_μ tem apenas dois pontos fixos no intervalo $[0, 1]$: 0 e p_μ. Pela Proposição 4.2, p_μ é um ponto fixo atrator e 0 é um ponto fixo repulsor. Além disso, para qualquer $x \in (0, 1)$, sua órbita converge para p_μ.

4.2.3 Caso III - μ > 4

Nosso próximo passo é apresentar um sistema dinâmico com características mais ricas e diferente dos casos estudados anteriormente. A seguir, faremos uma exposição dos sistemas dinâmicos f_μ com parâmetro $\mu > 4$.

Proposição 4.7 *Se $\mu > 4$ então $f_\mu((0, 1)) = (0, \frac{\mu}{4}]$. Além disso, f_μ assume valor máximo $\frac{\mu}{4} > 1$.*

Prova. Vimos na demonstração da Proposição 4.4 que $f_\mu((0, 1)) \subseteq (0, \frac{\mu}{4}]$. Além disso, f_μ assume valor máximo em $x = \frac{1}{2}$ com $f_\mu(\frac{1}{2}) = \frac{\mu}{4}$.

Por outro lado, seja $z \in (0, \frac{\mu}{4})$. Então, $f_\mu(0) = 0 < z < \frac{\mu}{4} = f_\mu(\frac{1}{2})$. Como f_μ é contínua, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x \in (0, \frac{1}{2})$ tal que $f_\mu(x) = z$. Logo, $z \in f_\mu((0, 1))$.

Portanto, $f_\mu((0, 1)) = (0, \frac{\mu}{4}]$.

■

Proposição 4.8 *Considere $A_0 = \{x \in (0, 1); f_\mu(x) > 1\}$. Então, A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$.*

Prova. Temos $x \in A_0$ se, e somente se, $-\mu x^2 + \mu x - 1 > 0$. Porém,

$$-\mu x^2 + \mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - r \text{ ou } x = \frac{1}{2} + r$$

com $r = \frac{\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu}$, $\mu > 4$. Note que $r < \frac{\sqrt{\mu^2}}{2\mu} = \frac{1}{2}$.
Como $-\mu < 0$,

$$-\mu x^2 + \mu x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right).$$

Logo, $A_0 = (\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r)$.

■

Proposição 4.9 *Se $x \in A_0$ então* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = -\infty$.

Prova. Desmembraremos a demonstração nas etapas a seguir:

(i) Se $x \in A_0$ então $f_\mu^2(x) < 0$.

De fato, $f_\mu^2(x) < 0$ se, e somente se, $\mu f_\mu(x)(1 - f_\mu(x)) < 0$. Assim, se $x \in A_0$ temos $f_\mu(x) > 1$, e portanto, $(1 - f_\mu(x)) < 0$. Logo, $f_\mu^2(x) < 0$.

(ii) Se $x \in (-\infty, 0)$ então $f_\mu(x) \in (-\infty, 0)$.

Sabemos que as raízes da função quadrática $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ são $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Como $\mu > 0$, segue que

$$f_\mu(x) > 0 \; \forall x \in (0,1)$$

e

$$f_\mu(x) < 0 \; \forall \; x \; \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Logo, $f_\mu(x) < 0 \; \forall \; x \in (-\infty, 0)$.

(iii) A função $g(x) = f_\mu(x) - x$ é tal que $g(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0)$.

Temos

$$g'(x) = 0 \iff -2\mu x + \mu - 1 = 0 \iff x = \frac{\mu - 1}{2\mu} = \frac{1}{2} p_\mu.$$

Estudando o sinal de g' obtemos

$$g'(x) > 0 \text{ para todo } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}p_\mu\right)$$

e

$$g'(x) < 0 \text{ para todo } x \in \left(\frac{1}{2}p_\mu, +\infty\right).$$

Daí,

$$g \text{ é monótona crescente em } \left(-\infty, \frac{1}{2}p_\mu\right)$$

e

$$g \text{ é monótona decrescente em } \left(\frac{1}{2}p_\mu, +\infty\right).$$

Em particular, g é monótona crescente em $(-\infty, 0)$. Como g é contínua e $g(0) = 0$, concluímos que $g(x) < 0, \; \forall \; x \in (-\infty, 0)$.

(iv) A sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente para todo $x \in (-\infty, 0)$.

Seja $x \in (-\infty, 0)$. De (ii), $f_\mu^n(x) \in (-\infty, 0) \; \forall \; n \in \mathbb{N}$.

Utilizando (iii),

$$(f_\mu)^{n+1}(x) < (f_\mu)^n(x).$$

Logo, para todo $x \in (-\infty, 0)$ a sequência $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente, isto é,

$$0 > x > f_\mu(x) > f_\mu^2(x) > ... > f_\mu^n(x) > f_\mu^{n+1}(x) > ...$$

(v) $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = -\infty$ para cada $x \in (-\infty, 0)$.

Seja $x \in (-\infty, 0)$. Note que $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente. Caso contrário, como $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente, teríamos $z \in (-\infty, 0)$, $z = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x)$. E por continuidade de f_μ,

$$f_\mu(z) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+1}(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = z,$$

ou seja, z seria um ponto fixo de f_μ em $(-\infty, 0)$. Absurdo, pois os únicos pontos fixos de f_μ são 0 e $p_\mu > 0$.

Como $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é ilimitada inferiormente, dado $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_\mu^{n_0}(x) < -M.$$

Consequentemente,

$$f_\mu^n(x) < f_\mu^{n_0}(x) < -M, \ \forall\, n > n_0.$$

Logo, $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = -\infty$.

Finalmente, se $x \in A_0$ então $f_\mu^2(x) < 0$. Assim, por (v),

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(f_\mu^2(x)) = -\infty.$$

■

Proposição 4.10 *Considere* $A_1 = \{x \in (0,1); f_\mu(x) \in A_0\}$. *Se* $x \in A_1$ *então*

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = -\infty.$$

Prova. Se $x \in A_1$, então $f_\mu(x) \in A_0$. E portanto, é consequência direta da Proposição 4.9.

■

A fim de generalizar o raciocínio considere o conjunto

$$A_n = \{x \in (0,1); f_\mu^n(x) \in A_0\}.$$

Proposição 4.11 A_k *é aberto* $\forall\, k = 0, 1, 2, 3, 4, ...$.

Prova. De fato, pela Proposição 4.8, A_0 é um intervalo aberto. Para cada $k = 1, 2, 3, 4, ...$, f_μ^k é contínua, e consequentemente, $(f_\mu^k)^{-1}(A_0)$ é aberto. Note que $A_k = \{x \in (0,1); f_\mu^k(x) \in A_0\} = (f_\mu^k)^{-1}(A_0) \cap (0,1)$, e portanto, A_k é aberto $\forall\, k = 1, 2, 3, 4, ...$

■

Proposição 4.12 *Se $x \in A_k$ então* $\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = -\infty$.

Prova. De fato, se $x \in A_k$, $f_\mu^k(x) \in A_0$. Assim, pela Proposição 4.9,

$$\lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(f_\mu^k(x)) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_\mu^{n+k}(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_\mu^n(x) = -\infty.$$

■

Proposição 4.13 $A_k = \{x \in [0,1]; f_\mu^n(x) \in [0,1]\ \forall n \leq k, f_\mu^n(x) \notin [0,1], \forall n > k\}$*, ou seja, A_k é o conjunto dos pontos em $[0,1]$, cujos k primeiros iterados permanecem em $[0,1]$ e cujos iterados maiores do que k não pertencem a $[0,1]$.*

Prova. Considere $C_k = \{x \in [0,1]; f_\mu^n(x) \in [0,1]\ \forall n \leq k,\ f_\mu^n(x) \notin [0,1], \forall n > k\}$.
$(A_k \subseteq C_k)$
Seja $x \in A_k$. Então $x \in (0,1)$ e $f_\mu^{k+1}(x) > 1$. Além disso, pela Proposição 4.9, (i) e (ii), $f_\mu^{k+2}(x) < 0$ e $f_\mu^{k+2+n}(x) < 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.

Logo, $f_\mu^n(x) \notin I, \forall\ n > k$.

Por outro, se $f_\mu^n(x) \notin [0,1]$, para algum $n \leq k$, então $f_\mu^n(x) < 0$ ou $f_\mu^n(x) > 1$.

Neste caso, pela Proposição 4.9,

$f_\mu^n(x) < 0$ ou $f_\mu^n(x) > 1 \Rightarrow f_\mu^{n+1}(x) < 0 \Rightarrow f_\mu^{k+1}(x) < 0 < 1$. Absurdo, pois $x \in A_k$.

Logo, $f_\mu^n(x) \in [0,1]\ \forall n \leq k$.

Portanto, $x \in C_k$.

$(C_k \subseteq A_k)$
Seja $x \in C_k$. Então,

$$x \in [0,1], f_\mu^n(x) \in [0,1]\ \forall n \leq k \text{ e } f_\mu^n(x) \notin [0,1]\ \forall n > k.$$

Daí, $x \neq 0$ e $x \neq 1$, isto é, $x \in (0,1)$.
Afirmação. $f_\mu^k(x) \in A_0$.
$f_\mu^k(x) \in (0,1)$:
Sabemos que $f_\mu^k(x) \in [0,1]$. Como $f_\mu^n(x) \notin [0,1]\ \forall n > k$ e $f_\mu^n(0) = f_\mu^n(1) = 0\ \forall n \geq 1$,

$$f_\mu^k(x) \in (0,1).$$

$f_\mu^{k+1}(x) > 1$:
Por hipótese, $f_\mu^n(x) \notin [0,1]\ \forall n > k$. Daí,

$$f_\mu^{k+1}(x) < 0 \text{ ou } f_\mu^{k+1}(x) > 1.$$

Se $f_\mu^{k+1}(x) < 0$ então, uma vez que $f_\mu(z) < 0$ somente quando $z \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$,

$$f_\mu^{k}(x) < 0 \text{ ou } f_\mu^{k}(x) > 1.$$

Visto que $f_\mu(x) \in [0,1]$, concluímos $f_\mu^{k+1}(x) > 1$.
Portanto, $f_\mu^k(x) \in A_0$, e consequentemente, $x \in A_k$.
Logo, $A_k = C_k$.

$\blacksquare$

Até o momento, sobre a dinâmica de $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $\mu > 4$, concluímos que

I) Se $x \in (-\infty, 0)$ então sua órbita $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tem um comportamento decrescente e tende a $-\infty$.

II) Se $x \in (1, +\infty)$ então $f_\mu(x) < 0$, e portanto, sua órbita $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tem um comportamento decrescente e tende a $-\infty$.

III) Se $x = 0$ então $f_\mu(x) = 0$, ou seja, 0 é um ponto fixo.

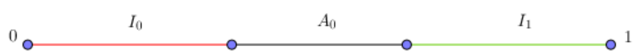
IV) Se $x = 1$ então $f_\mu(x) = 0$, e portanto, sua órbita é $(1, 0, 0, 0, 0, 0, ...)$.

V) Se $x \in A_k$ para algum k, sua órbita $(f_\mu^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tende a $-\infty$.

Para concluirmos nossa análise sobre a dinâmica de $f_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ resta-nos estudar o comportamento das órbitas dos pontos do conjunto $\Delta = \{x \in [0,1];\ f_\mu^n(x) \in [0,1]\ \forall n \in \mathbb{N}\}$, dos pontos em $[0,1]$ cujas órbitas permanecem em $[0,1]$. Note que $\Delta = [0,1] - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$.

Pela Proposição 4.8, $A_0 = (\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r) \subset [0,1]$, e portanto, $\Delta_0 = [0,1] - A_0 = I_0 \cup I_1$ sendo $I_0 = [0, \frac{1}{2} - r]$ e $I_1 = [\frac{1}{2} + r, 1]$ intervalos fechados à esquerda e à direita de A_0 respectivamente.

Figura 4 – Intervalos A_0, I_0 e I_1



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Na prova da Proposição 4.4 vimos que f_μ é crescente em $(-\infty, \frac{1}{2})$ e decrescente em $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Além disso, pela demonstração da Proposição 4.8, $f_\mu(\frac{1}{2} - r) = f_\mu(\frac{1}{2} + r) = 1$. Consequentemente, $f_\mu(I_0) = f_\mu(I_1) = [0, 1]$.

Assim, existem B_0, B_1, intervalos abertos tais que:

I. $B_0 \subset I_0$

II. $B_1 \subset I_1$

III. $f_\mu(B_0) = A_0$ e $f_\mu(B_1) = A_0$

IV. $B_0 \cup B_1 = A_1$

Portanto, $\Delta_1 = [0, 1] - (A_0 \cup A_1)$ consiste da união de 2^2 intervalos fechados disjuntos, I_2, I_3, I_4, $I_5 \subset [0, 1]$ tais que:

V. $f_\mu(I_2) = I_0$ e $f_\mu(I_4) = I_0$

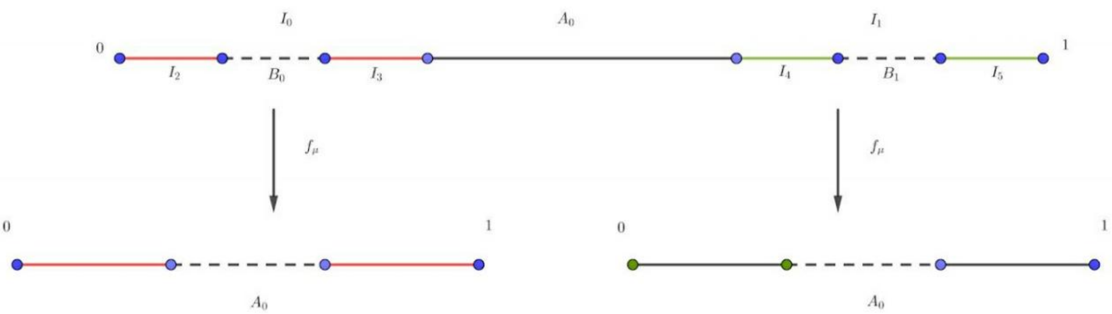
VI. $f_\mu(I_3) = I_1$ e $f_\mu(I_5) = I_1$

VII. $f_\mu^2(I_k) = [0, 1], k = 2, 3, 4, 5$

VIII. f_μ^2 é crescente em I_2 e I_5

IX. f_μ^2 é decrescente em I_3 e I_4

Figura 5 – Intervalos I_2, I_3, I_4 e I_5



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Proposição 4.14 *Sejam $I = [a, b]$, $J = [c, d]$ intervalos em $\mathbb{R}$ tais que $I \subset J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $g(I) \supset J$ então g tem um ponto fixo em I.*

Prova. Trata-se de uma consequência direta do Teorema do Valor Intermediário. Vide (MENDONÇA, 1999).

■

Corolário 4.1 *f_μ^2 tem pelo menos 2^2 pontos fixos. Em particular, f_μ tem pelo menos 2 pontos periódicos de período 2.*

Repetindo o processo sucessivamente, concluímos que $\Delta_n = [0,1] - (A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_n)$ é a união de 2^{n+1} intervalos fechados que por f_μ^{n+1} tem imagem $[0,1]$. Além disso, f_μ^{n+1} restrita a cada intervalo é crescente ou decrescente, levando em consideração os intervalos de crescimento e decrescimento de f_μ. Consequentemente, temos os seguintes resultados:

Proposição 4.15 *$\Delta_n = [0,1] - (A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_n)$ é um conjunto fechado.*

Proposição 4.16 *f_μ^{n+1} tem pelos menos 2^{n+1} pontos fixos.*

Proposição 4.17 *$\Delta = [0,1] - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ é um conjunto fechado.*

Prova. De fato, como A_i é aberto $\forall i$, então $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ é aberto, e portanto, $\mathbb{R} - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ é fechado. Logo, $\Delta = [0,1] - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i = [0,1] \cap (\mathbb{R} - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i)$ é fechado.

■

Proposição 4.18 *$\Delta = [0,1] - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ é um conjunto compacto.*

Prova. Como $\Delta \subset [0,1]$, Δ é um conjunto limitado. Portanto, visto que Δ é fechado, Δ é compacto.

■

Proposição 4.19 *Para $\mu > 2+\sqrt{5}$ e $r = \dfrac{\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu}$, se $x \in \left(0, \frac{1}{2} - r\right)$ então $f_\mu'(x) > 1$.*

Prova. Se $x \in \left(0, \frac{1}{2} - r\right)$ então

$$0 < x < \frac{1}{2} - r \Rightarrow$$

$$0 < x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu} \Rightarrow$$

$$-\mu + \sqrt{\mu(\mu-4)} < -2\mu x < 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{\mu(\mu-4)} < \mu - 2\mu x < \mu \Rightarrow$$

$$\sqrt{\mu(\mu-4)} < f'_\mu(x) < \mu.$$

Além disso, para $\mu > 2+\sqrt{5}$,

$$\mu(\mu-4) > 1,$$

e portanto,

$$1 < \sqrt{\mu(\mu-4)} < f'_\mu(x).$$

■

Proposição 4.20 *Para $\mu > 2+\sqrt{5}$ e $r = \dfrac{\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu}$, se $x \in \left(\frac{1}{2}+r, 1\right)$ então $f'_\mu(x) < -1$.*

Prova. Se $x \in \left(\frac{1}{2}+r, 1\right)$ então

$$\frac{1}{2}+r < x < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{\mu(\mu-4)}}{2\mu} < x < 1 \Rightarrow$$

$$-2\mu < -2\mu x < -\mu - \sqrt{\mu(\mu-4)} \Rightarrow$$

$$-\mu < f'_\mu(x) < -\sqrt{\mu(\mu-4)}.$$

Além disso, para $\mu > 2+\sqrt{5}$,

$$\mu(\mu-4) > 1,$$

e portanto,

$$f'_\mu(x) < -\sqrt{\mu(\mu-4)} < -1.$$

■

Proposição 4.21 *Para $\mu > 2+\sqrt{5}$, se $x \in \Delta_0$ então $|f'_\mu(x)| > 1$.*

Prova. De fato, se $x \in \Delta_0 = [0,1] - A_0$ então $x \in \left[0, \frac{1}{2}-r\right] \cup \left[\frac{1}{2}+r, 1\right]$.
Como $f'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$, temos

$$f'_\mu(0) = \mu > 2+\sqrt{5} > 1,$$

$$f'_\mu\left(\frac{1}{2}-r\right) = \mu - 2\mu\left(\frac{1}{2}-r\right) = \sqrt{\mu(\mu-4)} > 1,$$

$$f'_\mu\left(\frac{1}{2}+r\right) = \mu - 2\mu\left(\frac{1}{2}+r\right) = -\sqrt{\mu(\mu-4)} < -1 \text{ e}$$

$$f'_\mu(1) = -\mu < -1.$$

Assim, juntamente com as Proposições 4.19 e 4.20, concluímos

$$|f'_\mu(x)| > 1, \forall x \in \Delta_0.$$

■

Proposição 4.22 *Para* $\mu > 2+\sqrt{5}$*, existe* $\lambda > 1$ *tal que* $|f'_\mu(x)| > \lambda > 1, \forall x \in \Delta_0$.

Prova. Como Δ_0 é um conjunto fechado contido em $[0,1]$, Δ_0 é compacto. Além disso, a função $g_\mu(x) = |f'_\mu(x)|$ é contínua, e portanto, existe $x_0 \in \Delta_0$ tal que $|f'_\mu(x)| \geq |f'_\mu(x_0)|$, $\forall x \in \Delta_0$. Tome λ tal que $|f'_\mu(x_0)| > \lambda > 1$. Logo, $|f'_\mu(x)| > \lambda > 1, \forall x \in \Delta_0$.

■

Proposição 4.23 *Para* $\mu > 2+\sqrt{5}$*, existe* $\lambda > 1$ *tal que* $|f'_\mu(x)| > \lambda > 1, \forall x \in \Delta$.

Prova.Visto que $\Delta \subset \Delta_0$, o resultado é aplicação direta da Proposição 4.22.

■

Proposição 4.24 *Para* $\mu > 2+\sqrt{5}$*, existe* $\lambda > 1$ *tal que* $|(f^n_\mu)'(x)| > \lambda^n > 1, \forall x \in \Delta$.

Prova. Pela Proposição 4.23, garantimos a existência de λ no caso $n = 1$. Suponhamos que a desigualdade seja verdadeira para $n = k$. Pela Regra da Cadeia, $(f^{k+1}_\mu)'(x) = (f^k_\mu)'(f_\mu(x)).f'_\mu(x)$. Assim, como $f_\mu(x) \in \Delta, \forall x \in \Delta$,

$$|(f^{k+1}_\mu)'(x)| = |(f^k_\mu)'(f_\mu(x)).f'_\mu(x)| = |(f^k_\mu)'(f_\mu(x))|.|f'_\mu(x)| > \lambda^k.\lambda = \lambda^{k+1}.$$

Logo, pelo Princípio de Indução Finita, $|(f^n_\mu)'(x)| > \lambda^n > 1, \forall x \in \Delta$.

■

Proposição 4.25 *Para* $\mu > 2+\sqrt{5}$*,* $\Delta = [0,1] - \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ *é um conjunto totalmente desconexo.*

Prova. Sejam $x, y \in \Delta$. Suponhamos que $[x,y] \subseteq \Delta$. Então, $|(f^n_\mu)'(z)| > \lambda^n, \forall z \in [x,y]$.

Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^n|x-y| > 1$. Pelo Teorema do Valor Médio, $\exists\, z_0 \in [x,y]$ tal que

$$|f^n_\mu(x) - f^n_\mu(y)| = |(f^n_\mu)'(z_0).(x-y)| = |(f^n_\mu)'(z_0)|.|x-y| > \lambda^n|x-y| > 1.$$

Absurdo, pois $f^n_\mu(x),\ f^n_\mu(y) \in \Delta \subset [0,1]$, para quaisquer $x, y \in \Delta$. Logo, $[x,y] \not\subset \Delta$ e portando, Δ é totalmente desconexo.

■

Proposição 4.26 $\Delta = [0,1] - \displaystyle\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ *não tem pontos isolados.*

Prova. Suponhamos que existe $p \in \Delta$, ponto isolado. Analisaremos primeiro o caso em que $p \in (0,1)$. Neste caso, existe $\delta > 0$ tal que

$$[p-\delta, p+\delta] \subset [0,1] \text{ e}$$

$$([p-\delta,p+\delta]-\{p\})\cap\Delta=\varnothing,\ \text{isto é, } ([p-\delta,p+\delta]-\{p\})\subset\cup_{i=0}^{\infty}A_i.$$

Sabemos que, por construção, $A_i\cap A_j=\varnothing$ sempre que $i\neq j$. Então,

$$p-\delta\in A_k \text{ para um único } k.$$

Afirmação. $[p-\delta,p)\subset A_k$.

De fato, como A_k é aberto, existe $r>0$ tal que $[p-\delta,p-\delta+r)\subset A_k$. Lembrando que $A_k\subset[0,1]$, tome $s=\sup\{r>0;\ [p-\delta,p-\delta+r)\subset A_k\}$. Note que $s\geq\delta$. Caso contrário,

$$[p-\delta,p-\delta+s)\subset[p-\delta,p),\ p-\delta+s\in\cup_{i=0}^{\infty}A_i \text{ e } p-\delta+s\notin A_k.$$

Assim, $p-\delta+s\in A_l$ para algum $l\neq k$. Novamente, como A_l é aberto, existe $\epsilon>0$ tal que $(p-\delta+s-\epsilon,p-\delta+s+\epsilon)\subset A_l$. Daí,

$$A_k\cap A_l\neq\varnothing.\text{ Absurdo. Logo, } s\geq\delta,\ \text{ e portanto } [p-\delta,p)\subset A_k.$$

Analogamente, $p+\delta\in A_m$ para um único m, e consequentemente, $(p,p+\delta]\subset A_m$.

Assim, temos duas possibilidades:

(i) $k\neq m$.

Tome $n_0=\max\{k,m\}$. Sabemos que p é um ponto de acumulação de A_{n_0}. Daí, $f_\mu^{n_0+2}(p)\leq 0$.
Como $p\in\Delta,\ f_\mu^{n_0+2}(p)=0$ e $f_\mu^n(p)=0,\ \forall n>n_0+2$. Por continuidade de $f_\mu^{n_0+2}$, existe $\delta_0<\delta$ tal que

$$f_\mu^{n_0+2}(x)<\frac{1}{2},\ \forall x\in(p-\delta_0,p+\delta_0).$$

Visto que

$$(p-\delta_0,p)\subset(p-\delta,p)\subset A_k \text{ e } (p,p+\delta_0)\subset(p,p+\delta)\subset A_m,$$

$$f_\mu^{n_0+2}(x)<0,\ \forall x\in(p-\delta_0,p+\delta_0)-\{p\}.$$

Daí, $f_\mu^{n_0+2}$ assume máximo local em p, e por isso $(f_\mu^{n_0+2})'(p)=0$. Pela Regra da Cadeia, $f'_\mu(f_\mu^i(p))=0$ para algum $i<n_0+2$, e portanto $f_\mu^i(p)=\frac{1}{2},\ f_\mu^{i+1}(p)\notin[0,1]$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}f_\mu^n(p)=-\infty$. Contradição, pois $f_\mu^n(p)=0,\ \forall n>n_0+2$.

(ii) $k=m$.

Neste caso, p é um ponto de acumulação de A_k. Daí, $f_\mu^{k+2}(p)\leq 0$. Como $p\in\Delta,\ f_\mu^{k+2}(p)=0$ e $f_\mu^n(p)=0,\ \forall n>k+2$. Por continuidade de f_μ^{k+2}, existe $\delta_0<\delta$ tal que

$$f_\mu^{k+2}(x)<\frac{1}{2},\ \forall x\in(p-\delta_0,p+\delta_0).$$

Visto que $(p-\delta_0, p+\delta_0) - \{p\} \subset (p-\delta, p+\delta) - \{p\} \subset A_k$,

$$f_\mu^{k+2}(x) < 0,\ \forall x \in (p-\delta_0, p+\delta_0) - \{p\}.$$

Daí, f_μ^{k+2} assume máximo local em p, e por isso $(f_\mu^{k+2})'(p) = 0$. Pela Regra da Cadeia, $f_\mu'(f_\mu^i(p)) = 0$ para algum $i < k+2$, e portanto $f_\mu^i(p) = \frac{1}{2},\ f_\mu^{i+1}(p) \notin [0,1]$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f_\mu^n(p) = -\infty$. Contradição, pois $f_\mu^n(p) = 0,\ \forall n > k+2$.

No caso $p = 0$, tome $\delta > 0$ tal que $[0,\delta] \subset [0,1]$, $(0,\delta] \cap \Delta = \varnothing$. Assim,

$$(0,\delta] \subset \cup_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \delta \in A_k \text{ para um único } k.$$

Afirmação. $(0,\delta] \subset A_k$.
De fato, A_k é aberto, e por isso, existe $0 < r \leq \delta$ tal que $(\delta - r, \delta] \subset A_k$. Tome

$$s = \sup\{r;\ 0 < r \leq \delta, (\delta - r, \delta] \subset A_k\}.$$

Note que $s \leq \delta, (\delta - s, \delta] \subset A_k$ e $\delta - s \notin A_k$. Se $s < \delta$, então $\delta - s \in A_l$ para um único $l \neq k$. Lembrando que A_l é aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $(\delta - s, \delta - s + \epsilon) \subset A_l$. Assim, $A_k \cap A_l \neq \varnothing$.
Absurdo. Logo, $s = \delta$ e $(0,\delta] \subset A_k$.

Como consequência da afirmação,

$$f_\mu^{k+2}(x) < 0\ \forall x \in (-\delta, \delta) - \{0\}.$$

Como $f_\mu^{k+2}(0) = 0$, f_μ^{k+2} assume valor máximo em 0, e portanto, $(f_\mu^{k+2})'(0) = 0$. Pela Regra da Cadeia, $f_\mu'(f_\mu^i(0)) = 0$ para algum $i < k+2$, e portanto $f_\mu^i(0) = \frac{1}{2}$. Absurdo, pois $f_\mu^n(0) = 0\ \forall n$.
O caso $p = 1$ é análogo.

■

Definição 4.5 *Um conjunto K é dito um conjunto de Cantor se, e somente se, K satisfaz as seguintes condições:*

(i) K é compacto.

(ii) K é totalmente desconexo.

(iii) K não tem pontos isolados.

Proposição 4.27 *Se $\mu > 2 + \sqrt{5}$, então $\Delta = [0,1] - \cup_{i=0}^{\infty} A_i$ é um conjunto de Cantor.*

Prova. De fato, é consequência imediata das Proposições 4.18, 4.25 e 4.26.

■

4.2.4 A Dinâmica de f_μ em Δ

Nesta seção damos uma breve apresentação da rica dinâmica de f_μ em Δ.

Definição 4.6 *Denotaremos por S o conjunto das sequências com termos 0 ou 1,*

$$S = \{s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3...); s_i = 0 \text{ ou } s_i = 1\ \ \forall i = 0, 1, 2, ...\}.$$

Considere $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3...),\ t = (t_0\ t_1\ t_2\ t_3...)\ \in S$ e $d : S\ X\ S \to \mathbb{R}$ dada por

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Proposição 4.28 *d está bem definida.*

Prova. De fato, $\dfrac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \dfrac{1}{2^i}\ \forall\ i = 0, 1, 2, ...$

Como a série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ converge para 2, então, pelo Critério de Comparação, a série $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$ converge.

Logo, d está bem definida.

$\blacksquare$

Proposição 4.29 *d é uma métrica.*

Prova. Consideraremos $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3...),\ t = (t_0\ t_1\ t_2\ t_3...),\ u = (u_0\ u_1\ u_2\ u_3...)\ \in S.$

(1) $d(s,t) \geq 0$ para quaisquer $s, t\ \in S$.

Com efeito, seja $d_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{|s_i - t_i|}{2^i}$.

Como $d_n \geq 0$, então $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n \geq 0$. Logo, $d(s,t) \geq 0$.

(2) $d(s,t) = 0$ se, e somente se, $s = t$.

($\Leftarrow$) Se $s = t$ é imediato que $d(s,t) = 0$.

($\Rightarrow$) Se $s \neq t$ então existe n_0 tal que $|s_{n_0} - t_{n_0}| = 1 > 0$. Assim,

$$d_{n_0} = \sum_{i=0}^{n_0} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} > 0, \text{ e portanto, } d_n > 0\ \forall\ n \geq n_0.$$

Além disso, $d_n = \sum_{i=0}^{n} \dfrac{|s_i - t_i|}{2^i}$ é uma sequência crescente e limitada superiormente por 2. Portanto,

$$d(s,t) = \lim_{n \to +\infty} d_n = sup_{n \geq 0} d_n \geq d_{n_0} > 0.$$

Logo, $d(s,t) \neq 0$.

(3) $d(s,t) = d(t,s)$ para quaisquer $s, t \in S$.

A igualdade é consequência direta da igualdade $\frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \frac{|t_i - s_i|}{2^i}$ para todo $i = 0, 1, 2, ...$

(4) $d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t)$ para quaisquer $s, t, u \in S$.

Pela desigualdade triangular, para cada i,

$$\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \frac{|s_i - u_i|}{2^i} + \frac{|u_i - t_i|}{2^i}.$$

Assim,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - u_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{n} \frac{|u_i - t_i|}{2^i}.$$

Portanto, tomando o limite quando $n \to +\infty$,

$$d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t).$$

$\blacksquare$

Como consequência da proposição anterior temos

Proposição 4.30 (S, d) *é um espaço métrico.*

Definição 4.7 *Chamaremos de aplicação shift a função* $x : S \to S$ *dada por*

$$x((s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...)) = (s_1\ s_2\ s_3\ ...).$$

Proposição 4.31 x *é uma função contínua.*

Prova. Sejam $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...) \in S$ e $\epsilon > 0$. Tome $\delta = \epsilon$. Assim, para $t = (t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ ...) \in S$,

$$d(s,t) < \delta \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} < \delta \Rightarrow sup_{n \geq 0} \sum_{i=0}^{n} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} < \delta$$

$$\Rightarrow d_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \leq sup_{n \geq 0} d_n < \epsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \leq d_n \leq sup_{n \geq 0} d_n < \epsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \leq sup_{n \geq 0} d_n < \epsilon$$

$$\Rightarrow d(x(t), x(s)) < \epsilon.$$

Logo, x é contínua em s para todo $s \in S$.

■

Proposição 4.32 *x^n tem 2^n pontos fixos, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Prova. De fato, para $n = 1$, as sequências constantes $(0\ 0\ 0\ 0...)$ e $(1\ 1\ 1\ 1\ ...) \in S$ são os pontos fixos de x. Logo, x tem 2 pontos fixos.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ qualquer e $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...) \in S$ ponto fixo de x^n.
Então,

$$x^n(s) = s.$$

Note que

$$x^n(s) = s \Leftrightarrow (s_n\ s_{n+1}\ s_{n+2}\ s_{n+3}\ ...) = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...)$$

$$\Leftrightarrow s_i = s_{i+n}\ \forall i = 0, 1, 2, 3, ...$$

Consequentemente, s é uma sequência periódica de período n com termos 0 ou 1, isto é, s é uma sequência formada por um bloco inicial com n termos, $s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}$, tais que $s_i = 0$ ou 1, que se repete sucessivamente.

Assim, como s é da forma

$$s = (s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ ...),$$

basta analisarmos as possibilidades de $s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}$ para concluirmos quantos são os pontos fixos de x^n.

Finalmente, visto que $s_i = 0$ ou $1\ \forall i$, temos 2 possibilidades para cada termo, e portanto, 2^n pontos fixos de x^n.

■

Proposição 4.33 *O conjunto dos pontos periódicos de x é denso em S.*

Prova. Sejam $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...) \in S$ e $r > 0$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < r$. Considere

$$t = (s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ s_0\ s_1\ s_2\ ...\ s_{n-1}\ ...)\ \in S.$$

Conforme visto na proposição anterior, t é um ponto periódico de x de período n. Além disso, representando por t_{i-1} o i -ésimo termo da sequência t, temos

$$d(s,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n}^{k} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \right)$$

$$\Rightarrow d(s,t) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=n}^{k} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=n}^{k} \frac{1}{2^i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < r.$$

Logo, o conjunto dos pontos periódicos de x é denso em S.

■

Proposição 4.34 *x tem uma órbita densa em S.*

Prova. De fato, tome $s \in S$ formada por todos os blocos de $0's$ e $1's$ de tamanho 1, seguidos por todos os blocos de $0's$ e $1's$ de tamanho 2, seguidos por todos os blocos de $0's$ e $1's$ de tamanho 3, ..., em seguida por todos os blocos de $0's$ e $1's$ de tamanho n, e assim sucessivamente,

$$s = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\ 010\ 011\ 100\ 101\ 110\ 111\ \ldots).$$

Afirmação. A órbita de s é densa em S.

Com efeito, sejam $t = (t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ \ldots) \in S$ e $r > 0$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n-1}} < r$. Visto que s é formada por todos os blocos de $0's$ e $1's$ de tamanho n, considere $l \in \mathbb{N}$ tal que $x^l(s)$ inicie com o bloco de tamanho n $(t_0\ t_1\ t_2\ \ldots\ t_{n-1})$. Assim, representando o i- ésimo termo de $x^l(s)$ por $x^l(s)_{i-1}$, temos

$$d(x^l(s), t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x^l(s)_i - t_i|}{2^i} = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{|x^l(s)_i - t_i|}{2^i}$$

$$\Rightarrow d(x^l(s), t) = \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|(x^l(s)_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n}^{k} \frac{|(x^l(s)_i - t_i|}{2^i} \right)$$

$$\Rightarrow d(x^l(s), t) = \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{|t_i - t_i|}{2^i} + \sum_{i=n}^{k} \frac{|(x^l(s)_i - t_i|}{2^i} \right)$$

$$\Rightarrow d(x^l(s), t) = \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{i=n}^{k} \frac{|x^l(s)_i - t_i|}{2^i} \right) \leq \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{i=n}^{k} \frac{1}{2^i} \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} < r.$$

Logo, a órbita de s é densa em S.

■

Considere $\mu > 2 + \sqrt{5}$ e $h : \Delta \to S$ dada por

$$h(p) = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ \ldots) \text{ onde } s_i = 0 \text{ se } f_\mu^i(p) \in I_0 \text{ e } s_i = 1 \text{ se } f_\mu^i(p) \in I_1.$$

Teorema 4.1 *h é um homeomorfismo.*

Prova.

(1) h é injetora.

De fato, sejam $x, y \in \Delta,\ x \neq y$ tais que $h(x) = h(y)$. Então, para cada $i = 0, 1, 2, 3, ...$ existe $j \in \{0, 1\}$ tal que

$$f_\mu^i(x) \in I_j \text{ e } f_\mu^i(y) \in I_j.$$

Assim, para cada $i = 0, 1, 2, 3, ...$ existe um intervalo $I_j, j \in \{0, 1\}$, tal que

$$(*) \qquad [f_\mu^i(x), f_\mu^i(y)] \subset I_j \subset [0, 1] \text{ ou } [f_\mu^i(y), f_\mu^i(x)] \subset I_j \subset [0, 1].$$

Assim, como f_μ é monótona em I_0 e monótona em I_1 temos

$$z \in [x, y] \Rightarrow f_\mu(z) \in [f_\mu(x), f_\mu(y)] \text{ ou } f_\mu(z) \in [f_\mu(y), f_\mu(x)]$$

$$\Rightarrow f_\mu^2(z) \in [f_\mu^2(x), f_\mu^2(y)] \text{ ou } f_\mu^2(z) \in [f_\mu^2(y), f_\mu^2(x)]$$

$$...$$

$$\Rightarrow f_\mu^n(z) \in [f_\mu^n(x), f_\mu^n(y)] \text{ ou } f_\mu^n(z) \in [f_\mu^n(y), f_\mu^n(x)]\ \forall n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Daí, por $(*)$, para cada $n = 0, 1, 2, 3, ...$, se $z \in [x, y]$,

$$f_\mu^n(z) \in I_j \subset [0, 1] \text{ para algum } j \in \{0, 1\}.$$

Logo, $[x, y] \subset \Delta$. Absurdo pois Δ é totalmente desconexo.

Portanto, $h(x) \neq h(y)$, e consequentemente, h é injetora.

(2) h é sobrejetora.

Seja $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...) \in S$.
Para $j, k = 0, 1, 2, ...$, chamaremos de $(k+1)-$ intersecção os conjuntos da forma

$$I_{s_j s_{j+1} ... s_{j+k}} = I_{s_j} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_{j+1}}) \cap ... \cap f_\mu^{-k}(I_{s_{j+k}}).$$

Note que

$$I_{s_0 s_1 ... s_n} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap ... \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n})$$

e

$$I_{s_1 s_2 ... s_n} = I_{s_1} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap ... \cap f_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n})$$

são $(n+1)$ e $(n)-$ intersecções respectivamente.

Afirmação 1. $I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$.

$I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subseteq I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$:

Se $x \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ então $x \in I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n})$. Daí,

$$x \in I_{s_0} \text{ e } f_\mu(x) \in I_{s_1},\ f_\mu^2(x) \in I_{s_2}, \dots, f_\mu^n(x) \in I_{s_n}.$$

Assim,

$$x \in I_{s_0} \text{ e } f_\mu(x) \in I_{s_1} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap f_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n}),$$

isto é, $x \in I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$.

$I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n}) \subseteq I_{s_0 s_1 \dots s_n}$:

Seja $x \in I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_n})$. Então,

$$x \in I_{s_0} \text{ e } x \in f_\mu^{-1}(I_{s_1\ s_2 \dots s_n}).$$

Daí,

$$x \in I_{s_0} \text{ e } f_\mu(x) \in I_{s_1} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_2}) \cap \dots \cap f_\mu^{-(n-1)}(I_{s_n})$$

$$\Rightarrow x \in I_{s_0} \text{ e } f_\mu(x) \in I_{s_1}, f_\mu^2(x) \in I_{s_2}, \dots, f_\mu^n(x) \in I_{s_n}$$

$$\Rightarrow x \in I_{s_0 s_1 \dots s_n}.$$

Afirmação 2. Para cada $n = 0, 1, 2, 3, \dots, I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é um intervalo fechado não vazio.

De fato, para $n = 0, I_{s_0} = I_0$ ou $I_{s_0} = I_1$ é um intervalo fechado não vazio.

Suponha que o resultado seja verdadeiro para $k-$ intersecções. Então $I_{s_1 s_2 \dots s_k}$ é um intervalo fechado não vazio contido em $[0, 1]$.

Lembrando que, para cada $l \in \{0, 1\}$, $f_{\mu_{|I_l}}$ é monótona e $f_\mu(I_l) = [0, 1]$ temos $f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_k}) \cap I_l$ é um intervalo fechado não vazio.

Portanto, $I_{s_0 s_1 \dots s_k} = I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1 s_2 \dots s_k})$ é um intervalo fechado não vazio. Logo, pelo Princípio de Indução, segue a afirmação.

Afirmação 3. $(I_{s_0 s_1 \dots s_n})_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos compactos não vazios encaixados.

Com efeito, para cada n, $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é um intervalo fechado não vazio. Como $I_{s_0 s_1 \dots s_n} \subset [0, 1]$, $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é um intervalo compacto não vazio. Além disso,

$$(I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-(n-1)}(I_{s_{n-1}}) \cap f_\mu^{-n}(I_{s_n})) \subset (I_{s_0} \cap f_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap f_\mu^{-(n-1)}(I_{s_{n-1}}))$$

$$\Rightarrow I_{s_0\ s_1 \dots s_n} \subset I_{s_0\ s_1 \dots s_{n-1}},$$

o que conclui a prova da afirmação.

Finalmente, pela Afirmação 3, $\cap_{n\geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ é não vazio. Além disso,

$$x \in \cap_{n\geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n} \text{ é tal que } h(x) = s.$$

Logo, h é sobrejetora.

(3) h é contínua.
Sejam $x_0 \in \Delta$ e $\epsilon > 0$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$. Considere $h(x_0) = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ \dots)$.
Assim, $f_\mu^i(x_0) \in I_{s_i}$, para cada $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.
Como f_μ é contínua, existem $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n > 0$ tais que, para cada $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$,

$$x \in \Delta, |x - x_0| < \delta_i \Rightarrow f_\mu^i(x) \in I_{s_i}.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$. Sejam $x \in \Delta$ e $h(x) = (t_0\ t_1\ t_2\ t_3 \dots)$.
Assim,

$$|x - x_0| < \delta$$

$$\Rightarrow |x - x_0| < \delta_i \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Rightarrow f_\mu^i(x) \in I_{s_i} \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Rightarrow t_i = s_i \text{ para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Rightarrow d(h(x), h(x_0)) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{|t_i - s_i|}{2^i}$$

$$\Rightarrow d(h(x), h(x_0)) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{k} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \right)$$

$$\Rightarrow d(h(x), h(x_0)) = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{k} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \right) \leq \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=n+1}^{k} \frac{1}{2^i} \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n < \epsilon.$$

Logo, h é contínua em x_0, e portanto, h é contínua.

(4) h^{-1} é contínua.
Sejam $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ \dots) \in S$ e $\epsilon > 0$. Vimos que $h^{-1}(s) = x \in \cap_{n\geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$.

Como $(I_{s_0 s_1 \dots s_n})_{n\geq 0}$ é uma sequência de intervalos compactos encaixados, tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $\sup\{|z - w|; z, w \in I_{s_0 s_1 \dots s_m}\} < \epsilon$. Escolha $\delta = \frac{1}{2^m}$.

Assim, para $t = (t_0\ t_1\ t_2\ t_3\ \dots) \in S$,

$$d(t, s) < \delta \Rightarrow d(t, s) < \frac{1}{2^m}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} < \frac{1}{2^m}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=m+1}^{k} \frac{|t_i - s_i|}{2^i} \right) < \frac{1}{2^m}$$

$$\Rightarrow t_i = s_i \text{ para } i \leq m.$$

Além disso, $h^{-1}(t) = y \in \cap_{n\geq 0} I_{t_0 t_1 \ldots t_n}$. Em particular, $y \in I_{t_0 t_1 \ldots t_m} = I_{s_0 s_1 \ldots s_m}$.

Daí,

$$|h^{-1}(t) - h^{-1}(s)| = |y - x| \leq \sup\{|z - w|; z, w \in I_{s_0 s_1 \ldots s_m}\} < \epsilon.$$

Logo, h^{-1} é contínua em s, e portanto, h^{-1} é contínua.

■

Teorema 4.2 *$x(h(p)) = h(f_\mu(p))$ para todo $p \in \Delta$, em que x é a aplicação "shift".*

Prova. Sejam $p \in \Delta$ e $h(p) = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3 \ldots)$. Então,

$$p \in I_{s_0}, f_\mu(p) \in I_{s_1}, f_\mu^2(p) \in I_{s_2}, f_\mu^3(p) \in I_{s_3}, \ldots$$

$$\Rightarrow f_\mu(p) \in I_{s_1}, f_\mu^2(p) \in I_{s_2}, f_\mu^3(p) \in I_{s_3}, \ldots$$

$$\Rightarrow h(f_\mu(p)) = (s_1\ s_2\ s_3 \ldots).$$

Por outro lado, $x(h(p)) = x(s_0\ s_1\ s_2\ s_3 \ldots) = (s_1\ s_2\ s_3 \ldots)$.

Logo, $x(h(p)) = h(f_\mu(p))$ para todo $p \in \Delta$.

■

Teorema 4.3 *Para $\mu > 2 + \sqrt{5}$,*

- *f_μ^n tem 2^n pontos fixos em Δ, para cada $n \in \mathbb{N}$.*
- *O conjunto dos pontos periódicos de f_μ é denso em Δ.*
- *f_μ tem uma órbita densa em Δ.*

Prova.

- f_μ^n tem 2^n pontos fixos em Δ, para cada $n \in \mathbb{N}$.

  Seja $s \in S$ ponto fixo de x^n. Então,

$$x^n(s) = s.$$

Tome $p \in \Delta$ tal que $h(p) = s$. Assim, pelo teorema anterior,

$$f_\mu^n(p) = h^{-1} \circ x^n \circ h(p)$$

$$\Rightarrow f_\mu^n(p) = h^{-1}(x^n(h(p)))$$

$$\Rightarrow f_\mu^n(p) = h^{-1}(x^n(s))$$

$$\Rightarrow f_\mu^n(p) = h^{-1}(s) = p.$$

Logo, como x^n tem 2^n pontos fixos em S, para cada $n \in \mathbb{N},\ f_\mu^n$ tem 2^n pontos fixos em Δ.

Analogamente, pelo Teorema 4.2, a recíproca é verdadeira, isto é, se f_μ^n tem 2^n pontos fixos em Δ então x^n tem 2^n pontos fixos em S.

- O conjunto dos pontos periódicos de f_μ é denso em Δ.

  Seja A um conjunto aberto em Δ. Como h é um homeomorfismo de Δ em S, então $h(A)$ é um conjunto aberto em S. Pela Proposição 4.33, existe $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...) \in h(A)$ ponto periódico de x. Note que $h^{-1}(s) \in A$. Além disso, pela prova do item anterior, $h^{-1}(s)$ é um ponto periódico de f_μ. Logo, o conjunto dos pontos periódicos de f_μ é denso em Δ.

- f_μ tem uma órbita densa em Δ.

  De fato, pela Proposição 4.34, x tem uma órbita densa em S. Suponha que a órbita de $s = (s_0\ s_1\ s_2\ s_3\ ...) \in S$ por x é densa em S.
  Provaremos que a órbita de $h^{-1}(s)$ por f_μ é densa em Δ.
  Seja A um conjunto aberto em Δ. Como h é um homeomorfismo de Δ em S, então $h(A)$ é um conjunto aberto em S. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n(s) \in h(A)$. Daí, $h^{-1}(x^n(s)) \in A$, e portanto, $f_\mu^n(h^{-1}(s)) \in A$.
  Logo, a órbita de $h^{-1}(s)$ por f_μ é densa em Δ.

5 PROPOSTA METODOLÓGICA

Trazemos como proposta metodológica um Caderno de Atividades, apresentado no Apêndice, com o fim de amenizar as dificuldades, incentivar o interesse pela investigação e melhorar o desempenho dos alunos em relação ao conteúdo de funções polinomiais do 2º grau. Neste caderno, o professor encontrará 8 atividades, a maioria de cunho investigativo, a serem aplicados em sala de aula. O nosso propósito é familiarizar os alunos com as representações algébricas e gráficas, instigá-los a reconhecer padrões e analisar diferentes situações.

No Caderno de Atividades, abordamos, a nível de Ensino Médio, todo ferramental matemático apresentado no Capítulo 4 dessa dissertação. As atividades, que trazemos no Caderno, abordam os três casos de sistemas dinâmicos quadráticos estudados. Algumas atividades seguem o direcionamento dado às demonstrações de algumas proposições do Capítulo 4. Dessa forma, o aluno tem a possibilidade de analisar e comparar as dinâmicas conforme variação do parâmetro μ. Deste modo, desenvolvemos com o aluno do Ensino Médio conceitos básicos de Sistemas Dinâmicos de forma intuitiva.

Vale ressaltar que as atividades aqui apresentadas buscam atender à demanda expressa na Base Nacional Curricular e no Currículo Referência de Minas Gerais.

6 CONCLUSÃO

Nesta dissertação apresentamos um estudo detalhado sobre a dinâmica da família de funções quadráticas $f_\mu(x) = \mu x(1-x)$ para $\mu \in (1,3) \cup (4,+\infty)$. Para cada parâmetro μ, encontramos os pontos fixos de f_μ, a saber, 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$. De posse dos pontos fixos, o estudo foi dividido em três casos:

- Caso I: $1 < \mu \leq 2$
- Caso II: $2 < \mu < 3$
- Caso III: $4 < \mu$

No primeiro caso, nos dedicamos à dinâmica de $f_\mu : [0,1] \to [0,1]$. Claramente, as órbitas de 0 e 1 são, respectivamente, $(0,0,0,0,...)$ e $(1,0,0,0,...)$. Entretanto, para cada $x \in (0,1)$,

► se $x \in (0, p_\mu)$, sua órbita é monótona crescente e converge para p_μ.

► se $x \in \left(p_\mu, \frac{1}{2}\right)$, sua órbita é monótona decrescente e converge para p_μ.

► se $x = p_\mu$, sua órbita é $(p_\mu, p_\mu, p_\mu, p_\mu, ...)$, e claramente converge para p_μ.

► se $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $f_\mu(x) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, e consequentemente sua órbita também converge para p_μ.

► se $x = \frac{1}{2}$, $f_\mu(x) = \frac{\mu}{4} \leq \frac{1}{2}$ e sua órbita converge para p_μ.

No segundo caso, também trabalhamos com $f_\mu : [0,1] \to [0,1]$. Neste caso, $p_\mu \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e $q_\mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ é tal que $f_\mu(q_\mu) = p_\mu$. Assim, para cada $x \in (0,1)$,

► se $x \in (q_\mu, p_\mu)$, sua órbita por f_μ^2 é monótona crescente e converge para p_μ.

► se $x \in (q_\mu, p_\mu)$ então $f_\mu(x) > p_\mu$, a órbita de $f_\mu(x)$ por f_μ^2 é monótona decrescente e converge para p_μ.

► se $x \in (q_\mu, p_\mu)$, sua órbita por f_μ converge para p_μ.

► se $x \in (0, q_\mu)$, algum iterado $f_\mu^k(x) \in (q_\mu, p_\mu)$, e consequentemente sua órbita converge para p_μ.

► se $x = q_\mu$, sua órbita é $(q_\mu, p_\mu, p_\mu, p_\mu, ...)$, e claramente converge para p_μ.

► se $x = p_\mu$, sua órbita é $(p_\mu, p_\mu, p_\mu, p_\mu, ...)$, e também claramente converge para p_μ.

► se $x \in (p_\mu, 1)$, $f_\mu(x) \in (0, p_\mu)$, e consequentemente sua órbita converge para p_μ.

Portanto, nos dois primeiros casos, a órbita de cada $x \in (0,1)$ permanece no intervalo $(0,1)$ e converge para o ponto fixo atrator p_μ.

Diferente dos Casos I e II, no terceiro caso, existem valores de x no intervalo $(0,1)$ com algum iterado $f_\mu^k(x) \in (-\infty, 0)$, e consequentemente com órbita divergindo a $-\infty$. Ainda neste caso, existem valores de $x \in (0,1)$, cujas órbitas permanecem no intervalo $(0,1)$. Mais especificamente, tais órbitas permanecem num Conjunto de Cantor $\Delta \subset (0,1)$, f_μ - invariante. Além disso, a dinâmica de f_μ restrita a Δ é o que chamamos de caótica com propriedades como:

- a existência de pontos periódicos de todos os períodos e
- a existência de uma órbita densa em Δ.

Nesta abordagem, apresentamos um referencial teórico com o objetivo de contribuir com a formação do professor de Matemática do Ensino Médio e do aluno do Curso de Licenciatura em Matemática. Na perspectiva dos sistemas dinâmicos, propomos ao educador, através do Caderno de Atividades, componente deste trabalho, um novo estímulo ao estudo de funções quadráticas, direcionando o aluno do Ensino Médio na construção do próprio conhecimento de forma investigativa.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl. B. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a base. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.

DARROQUI, Luciene Cristina. **Elementos da história da matemática como estratégia pedagógica no ensino da função polinomial do primeiro grau**. Paraná, 2014.

DEVANEY, Robert L'. **A first Couse in Chaotic Dynamical Systems**: and experiment. Boca Raton: Chapman and Hall, 1992.

DEVANEY, Robert L. **An Introdution to Chaotic Dynamical Systems**. 2. ed. Boca Raton: Westview Press, 1989.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: UNICAMP, 2004.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**, v.1, 15. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

LIMA, Elon Lages. **Espaços Métricos**, 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O conceito de função:** aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. 1994. (Dissertação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

MENDONÇA, María de Gracia. Puntos Periódicos de Funciones Continuas. **Revista de Educación Matemática**, v.14, n.3, p.26-34, 1999.

OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo; ROSA, Milton; VIANA, Marger da Conceição Ventura. De Oresme a Dirichlet: Um breve histórico do desenvolvimento das Funções. **Revista brasileira de História da Matemática**, v. 14, n. 28, p. 47 - 61, 2014.

PACHECO, Tânia Sofia Beijocas. **Caracterizações e dinâmica das Funções Quadráticas. Planificação da subunidade Funções Quadráticas**. 2012. (Dissertação em Ensino da Matemática) - Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2012.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Issac Dayan Bastos de. **A Construção do Conceito de Função**: Alguns Dados Históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, p. 123 - 140, 2003.

SILVA, Rodolfo Sabino Vicente da. **Um estudo sobre alguns tópicos em sistemas dinâmicos unidimensionais e aplicações ao cálculo de raízes de uma equação**. 2018. (Dissertação em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

APÊNDICE A – Caderno de Atividades

FUNÇÕES QUADRÁTICAS VIA SISTEMAS DINÂMICOS

CADERNO DE ATIVIDADES

APRESENTAÇÃO

Este Caderno de Atividades surgiu a partir da dissertação de mestrado, intitulada “Dinâmica de Funções Quadráticas: uma abordagem no Ensino Médio”. Na dissertação foi realizado um estudo teórico sobre uma família de funções quadráticas na perspectiva dos sistemas dinâmicos. Vimos o quão ricas são as funções quadráticas quando analisadas desta forma. Foram realizados estudos sobre as órbitas, os pontos periódicos e os pontos fixos, o que contribuiu para a construção deste Produto Educacional. Ao leitor que se sentir atraído pelo assunto sugiro a leitura da dissertação.

Este material visa propor atividades sobre funções polinomiais do 2º grau que poderão auxiliar a prática pedagógica de professores do 1º ano do Ensino Médio. As atividades exploram, de forma indireta, conceitos relacionados à dinâmica das funções quadráticas. Algumas atividades são de cunho investigativo, o que faz com que a Matemática deixe de ser uma disciplina de caráter unicamente mecânico, composta de regras que muitas vezes não fazem sentido para o aprendiz. Segundo Braumann (2002) citado por Teodoro (2013, p.1)

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (BRAUMANN, 2002, p.5).

De acordo com BRASIL (1998) a sociedade atual carece de cidadãos pensantes, pró-ativos, com espírito investigativo e capazes de solucionar problemas, intervindo de forma autônoma e crítica em situações adversas. A investigação é uma tendência no ensino de matemática que vem ganhando espaço justamente por contribuir para que tal carência seja suprida.

As investigações matemáticas contribuem de forma significativa para a aprendizagem dos alunos, pois os discentes se tornam os protagonistas no processo de aprendizagem. Citando Teodoro (2013)

> Ao se considerar novas formas de pensamentos e envolvimentos com a matemática em sala de aula, as investigações matemáticas tem obtido destaque por proporcionarem ao aluno uma oportunidade de criar e consolidar seu conhecimento matemático, desenvolvendo sua capacidade, criatividade e tornando-o sujeito de sua própria aprendizagem. (TEODORO, 2013, p.1).

Vale salientar que as atividades aqui propostas levam em consideração a demanda expressa na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e no Parâmetro Curricular Nacional (PCN). Segundo o primeiro documento, até o 9º ano

> Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações. (BRASIL, 2018, p.517).

Segundo a BNCC, a área da Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio têm a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já adquirido pelos discentes, ampliar e aprofundar as aprendizagens desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental, e integrar a Matemática à realidade dos alunos.

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p.519).

O professor perceberá que além das atividades contribuírem para o desenvolvimento do espírito investigativo, elas também familiarizam os discentes com representações algébricas, gráficos de funções de segundo grau e o reconhecimento de padrões. A BNCC define alguns conjuntos de ideias que são importantes para o ensino matemático. Entre essas ideias destacamos “Variação e constância envolve observar, imaginar, abstrair, discernir e reconhecer características comuns e diferentes ou o que mudou e o que permaneceu invariante, expressar e representar (ou descrever) padrões, generalizando-os” (BRASIL, 2018, p.520).

É notório o quanto atividades de cunho investigativo podem contribuir para o processo de aprendizagem. Esperamos que este trabalho possa contribuir de forma significativa com o processo de ensino-aprendizagem.

CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES

Na elaboração das atividades nosso foco foi desenvolver no aluno o interesse pelo processo investigativo de funções. Através deste processo o aluno deverá observar padrões, levantar conjecturas e tirar conclusões sobre cada problema proposto.

Vale salientar que as atividades propostas servirão de apoio para as aulas de matemática e não como recurso único para aquisição de conhecimentos. Por este motivo, antes de aplicar as atividades, o professor já deve ter trabalhado com os alunos o conceito de função polinomial do 2º grau. Destacaremos as habilidades presentes na BNCC que serão desenvolvidas nas atividades que propomos.

UNIDADE: FUNÇÕES POLINNOMIAIS DE 1º E 2 GRAUS	
CÓDIGO DA HABILIDADE	**HABILIDADE**
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau para representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.
EM13MAT510	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando tecnologias da informação, e, se apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.
EM13MAT302	Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais.

A seguir apresentamos o plano de cada atividade, com os objetivos, os conteúdos que serão trabalhados e as habilidades segundo a BNCC.

ATIVIDADE 1	
OBJETIVOS	Identificar padrões; Estimular a capacidade investigativa; Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.
HABILIDADES	EM13MAT302; EM13MAT510.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -ax^2 + ax$.

ATIVIDADE 2	
OBJETIVOS	Identificar padrões; Estimular a capacidade investigativa; Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.
HABILIDADES	EM13MAT302; EM13MAT510.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -ax^2 + ax$; Composição de funções; Equações do 2º grau.

ATIVIDADE 3	
OBJETIVOS	Interpretar e utilizar representações gráficas e algébricas relacionadas a funções; Relacionar o conceito de ponto fixo de uma função f com a interseção entre o gráfico de f e a reta $y = x$; Investigar iterados sucessivos de pontos especiais.
HABILIDADES	EM13MAT401; EM13MAT510; EM13MAT502; EM13MAT402.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -ax^2 + ax$; Composição de funções; Equações do 2º grau; Gráfico de funções.

ATIVIDADE 4	
OBJETIVOS	Interpretar e utilizar representações gráficas e algébricas relacionadas a funções; Relacionar o conceito de ponto fixo de uma função f com a interseção entre o gráfico de f e a reta $y = x$; Investigar iterados sucessivos de pontos especiais.
HABILIDADES	EM13MAT401; EM13MAT510; EM13MAT502; EM13MAT402.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -\,ax^2 + ax$; Composição de funções; Gráfico de funções.

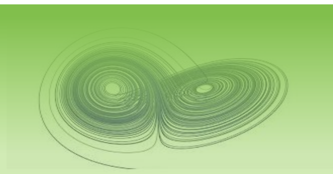
ATIVIDADE 5	
OBJETIVOS	Investigar iterados sucessivos de pontos especiais; Identificar padrões; Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.
HABILIDADES	EM13MAT510; EM13MAT302.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -ax^2 + ax$.

ATIVIDADE 6	
OBJETIVOS	Investigar iterados sucessivos de pontos especiais; Identificar padrões; Interpretar e utilizar representações algébricas relacionadas a funções.
HABILIDADES	EM13MAT510; EM13MAT302.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -ax^2 + ax$.

ATIVIDADE 7	
OBJETIVOS	Estimular a capacidade investigativa; Interpretar e utilizar representações gráficas e algébricas relacionadas a funções; Investigar iterados sucessivos de pontos especiais.
HABILIDADES	EM13MAT401; EM13MAT510; EM13MAT302; EM13MAT402.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -\,ax^2 + ax$; Composição de funções; Gráfico de funções.

ATIVIDADE 8	
OBJETIVOS	Estimular a capacidade investigativa; Interpretar e utilizar representações gráficas e algébricas relacionadas a funções; Investigar iterados sucessivos de pontos especiais.
HABILIDADES	EM13MAT401; EM13MAT510; EM13MAT302; EM13MAT402.
CONTEÚDOS EXPLORADOS	Funções quadráticas com leis da forma $f(x) = -ax^2 + ax$; Composição de funções; Gráfico de funções.

ATIVIDADE 1



Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x^2 + 2x$. Preencha a tabela abaixo de acordo com o valor inicial x_0 dado.

$f(x) = -2x^2 + 2x$		
	$x_0 = 0{,}1$	$x_0 = -0{,}1$
$x_1 = f(x_0)$		
$x_2 = f(x_1)$		
$x_3 = f(x_2)$		
$x_4 = f(x_3)$		
$x_5 = f(x_4)$		
$x_6 = f(x_5)$		
$x_7 = f(x_6)$		
$x_8 = f(x_7)$		

ATENÇÃO

Para essa atividade você irá precisar de uma calculadora.

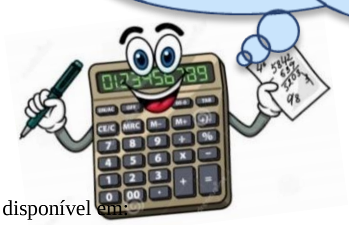


Imagem disponível em:
https://www.istockphoto.com/br/vetor/desenhos-com-caneta-calculadora-e-observe-gm485097782-71870275

1. O que você observou sobre a sequência de valores encontrados a partir do valor inicial $x_0 = 0{,}1$?

____

____

____

2. O que você observou sobre a sequência de valores encontrados a partir do valor inicial $x_0 = -0,1$?

3. O valor inicial x_0 influencia nos valores finais obtidos na tabela acima? Justifique sua resposta.

4. Determine o valor de $x_{100} = f(x_{99})$ sabendo que $x_0 = 0,1$. Justifique sua resposta.

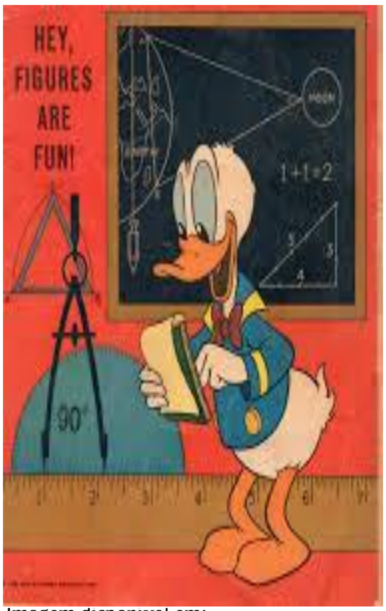
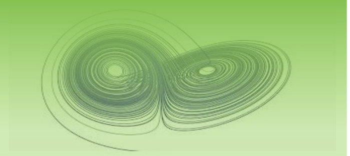


Imagem disponível em: https://otrecocerto.com/2015/09/25/donald-no-pais-da-matematica/

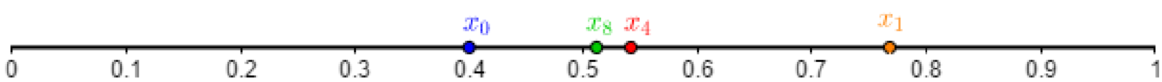
ATIVIDADE 2



Considere a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3,2x^2 + 3,2x$. Preencha a tabela abaixo considerando $x_0 = 0,4$.

x	$f(x) = -3,2x^2 + 3,2x$
$x_1 = f(x_0)$	
$x_2 = f(x_1)$	
$x_3 = f(x_2)$	
$x_4 = f(x_3)$	
$x_5 = f(x_4)$	
$x_6 = f(x_5)$	
$x_7 = f(x_6)$	
$x_8 = f(x_7)$	
$x_9 = f(x_8)$	
$x_{10} = f(x_9)$	
$x_{11} = f(x_{10})$	
$x_{12} = f(x_{11})$	
$x_{13} = f(x_{12})$	

Marque os pontos x_2, x_3, x_4,..., x_{13} no intervalo (0,1) abaixo.



Agora responda as questões abaixo.

1. Há valores encontrados que se repetem? Há cada quantos passos?

2. Qual é o valor de $x_{63} = f(x_{62})$? Justifique sua resposta.

Imagem disponível em:
http://professorjbatista.com/meusite.html

3. Na Atividade 1 obtivemos duas sequências, uma iniciando por $x_0 = 0{,}1$ e outra iniciando por $x_0 = -0{,}1$. Na Atividade 2 mudamos a função quadrática e obtivemos uma sequência iniciando por $x_0 = 0{,}4$.

   Compare as três sequências no que diz respeito à repetição de valores encontrados e os períodos de repetição.

4. Encontre x_0 tal que

   a) $f(x_0) = x_0$

b) $f(x_1) = x_0$

Lembre que $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$, e assim sucessivamente!

Imagem disponível em: https://www.pngegg.com/pt/png-zurvp

CURIOSIDADE

Dada uma função f e um valor inicial x_0 chamamos a sequência $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ de órbita de x_0 com respeito a função f, ou simplesmente, órbita de x_0.

5. Determine a órbita de cada x_0 encontrado no exercício 4.

ATIVIDADE 3

Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

(i) Determine as soluções da equação $f(x) = x$.

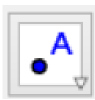
(ii) Com o software/aplicativo Geogebra, faça no mesmo plano cartesiano o gráfico da função f e a reta $y = x$.

DICA

Digite na Caixa de Entrada:

- *f(x) = - (3/2) x^2 + (3/2)x e aperte Enter.*
- *y = x e aperte Enter.*

(iii) Ainda com o Geogebra, use o comando



e marque os pontos de intersecção entre o gráfico de f e a reta $y = x$.

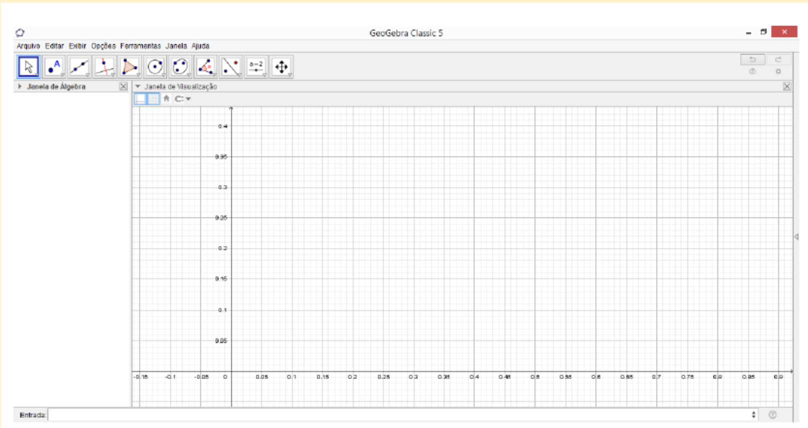
(iv) Consulte a Janela de Álgebra no Geogebra e determine a relação entre as soluções encontradas no item (i) e os pontos de intersecção marcados no item (iii).

____

____

DICA

A Janela de Álgebra costuma ser exibida no lado esquerdo da tela. Caso não esteja visível, basta selecionar o menu Exibir na parte superior da tela e optar por exibi-la.



NOVIDADE

Imagem disponível em: https://www.pngwing.com/pt/free-png-nxurw

Dada uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dizemos que um ponto $p \in \mathbb{R}$ é ponto fixo de f quando p for solução da equação $f(x) = x$.

(v) Quantos pontos fixos tem a função $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$?______________________

(vi) Escolha um número real maior do que 0 e menor do que o ponto fixo de f diferente de 0.

$x_0 =$

(vii) Preencha a tabela abaixo

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

	$\boldsymbol{x_0 =}$
$\boldsymbol{a = f(x_0)}$	$\boldsymbol{a =}$
$\boldsymbol{b = f(a)}$	$\boldsymbol{b =}$
$\boldsymbol{c = f(b)}$	$\boldsymbol{c =}$
$\boldsymbol{d = f(c)}$	$\boldsymbol{d =}$
$\boldsymbol{e = f(d)}$	$\boldsymbol{e =}$
$\boldsymbol{h = f(e)}$	$\boldsymbol{h =}$
$\boldsymbol{i = f(h)}$	$\boldsymbol{i =}$
$\boldsymbol{j = f(i)}$	$\boldsymbol{j =}$
$\boldsymbol{k = f(j)}$	$\boldsymbol{k =}$

A sequência de valores, nessa ordem, $a - b - c - d - e - h - i - j - k$ é

( ) crescente.

( ) decrescente.

( ) constante.

(viii) Novamente com o Geogebra, num arquivo novo, faça o que se pede:

1º O gráfico de $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

2º A reta $y = x$.

3º Marque o ponto de intersecção entre o gráfico de f e a reta $y = x$, diferente do (0,0).

4º Na Caixa de Entrada insira $f(x_0)$ e aperte Enter. Lembre que x_0 é o número que você escolheu no item (vi). 5º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $a =$________. 6º Insira na Caixa de Entrada o comando $(a, f(a))$ e aperte Enter. O que você obteve no plano cartesiano?
7º Na Caixa de Entrada insira $f(a)$ e aperte Enter. 8º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $b =$________. 9º Insira na Caixa de Entrada o comando $(b, f(b))$ e aperte Enter. O que você obteve no plano cartesiano?
10º Na Caixa de Entrada insira $f(b)$ e aperte Enter. 11º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $c =$________. 12º Insira na Caixa de Entrada o comando $(c, f(c))$ e aperte Enter. O que você obteve no plano cartesiano?
13º Na Caixa de Entrada insira $f(c)$ e aperte Enter. 14º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $d =$________. 15º Insira na Caixa de Entrada o comando $(d, f(d))$ e aperte Enter. O que você obteve no plano cartesiano?
Repita o processo, seguindo a sequência para e, h, i, j, k.
... Assim, finalmente, Na Caixa de Entrada insira $f(j)$ e aperte Enter. O valor encontrado na Janela de Álgebra é $k =$________. Insira na Caixa de Entrada o comando $(k, f(k))$ e aperte Enter. O que você obteve no plano cartesiano?

(ix) Observe a sequência de valores obtida no item (vii)

$$a - b - c - d - e - h - i - j - k$$

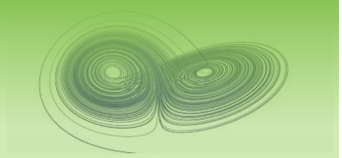
e a sequência de pontos obtidos no gráfico de f no item (viii).

Se continuássemos o processo do item (vii), a sequência de valores

$$a - b - c - d - e - h - i - j - k \ldots$$

se aproxima de algum valor específico? Qual? ______________________________

ATIVIDADE 4



Nessa atividade continuaremos com nossos experimentos com

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x.$$

(i) Escolha um número real maior do que o ponto fixo de f diferente de 0 e menor do que $\frac{1}{2}$.

$x_0 =$

(ii) Preencha a tabela abaixo

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

	$\boldsymbol{x_0 =}$
$\boldsymbol{a = f(x_0)}$	$\boldsymbol{a =}$
$\boldsymbol{b = f(a)}$	$\boldsymbol{b =}$
$\boldsymbol{c = f(b)}$	$\boldsymbol{c =}$
$\boldsymbol{d = f(c)}$	$\boldsymbol{d =}$
$\boldsymbol{e = f(d)}$	$\boldsymbol{e =}$
$\boldsymbol{h = f(e)}$	$\boldsymbol{h =}$
$\boldsymbol{i = f(h)}$	$\boldsymbol{i =}$
$\boldsymbol{j = f(i)}$	$\boldsymbol{j =}$
$\boldsymbol{k = f(j)}$	$\boldsymbol{k =}$

A sequência de valores, nessa ordem, $a - b - c - d - e - h - i - j - k$ é

( ) crescente.

( ) decrescente.

( ) constante.

(iii) Novamente com o Geogebra, num arquivo novo, faça o que se pede:

1º O gráfico de $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$.

2º A reta $y = x$.

3º Marque o ponto de intersecção entre o gráfico de f e a reta $y = x$, diferente do $(0,0)$.

4º Na Caixa de Entrada insira $f(x_0)$ e aperte Enter.
Lembre que x_0 é o número que você escolheu no item (i).

5º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $a =$________.

6º Insira na Caixa de Entrada o comando $(a, f(a))$ e aperte Enter.
O que você obteve no plano cartesiano?

7º Na Caixa de Entrada insira $f(a)$ e aperte Enter.

8º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $b =$________.

9º Insira na Caixa de Entrada o comando $(b, f(b))$ e aperte Enter.
O que você obteve no plano cartesiano?

10º Na Caixa de Entrada insira $f(b)$ e aperte Enter.

11º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $c =$________.

12º Insira na Caixa de Entrada o comando $(c, f(c))$ e aperte Enter.
O que você obteve no plano cartesiano?

13º Na Caixa de Entrada insira $f(c)$ e aperte Enter.

14º O valor encontrado na Janela de Álgebra é $d =$________.

15º Insira na Caixa de Entrada o comando $(d, f(d))$ e aperte Enter.
O que você obteve no plano cartesiano?

Repita o processo, seguindo a sequência para e, h, i, j, k.

...

Finalmente,

Na Caixa de Entrada insira $f(j)$ e aperte Enter.

O valor encontrado na Janela de Álgebra é $k =$________.

Insira na Caixa de Entrada o comando $(k, f(k))$ e aperte Enter.
O que você obteve no plano cartesiano?

(iv) Observe a sequência de valores obtida no item (ii)

$$a - b - c - d - e - h - i - j - k$$

e a sequência de pontos obtidos no gráfico de f no item (iii).

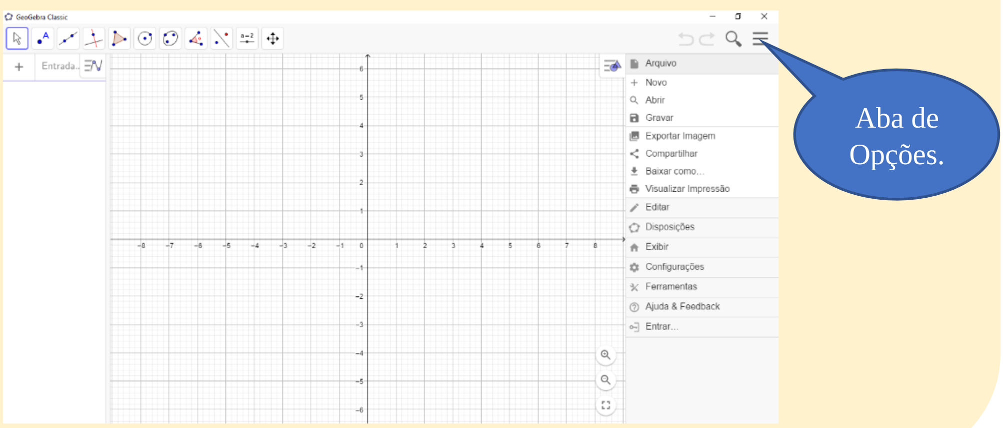
Se continuássemos o processo do item (ii), a sequência de valores

$$a - b - c - d - e - h - i - j - k \ldots$$

se aproxima de algum valor específico? Qual? ______________________________

DICA

Para melhor precisão dos resultados configure o Geogebra da seguinte forma: Acesse a aba de Opções → Configurações → Arredondamento → Selecione a opção "4 Casas Decimais".



DESAFIO

Comparando as Atividades 3 e 4 acima, a partir de escolhas distintas para x_0*, chegamos à sequências com comportamentos diferentes.*

Aponte uma diferença entre as sequências.

Descubra o que as sequências têm em comum.

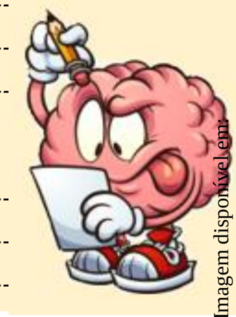


Imagem disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/cerebro-pensando_4373695.htm

ATIVIDADE 5

Com o propósito de entender o crescimento de uma certa população biológica, o matemático belga Pierre François Verhulst precisava entender a dinâmica da função

$$f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x, \forall\, x \in [0,1].$$

Figura 1 – Pierre François Verhulst

Fonte – Imagem disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fran%C3%A7ois_Verhulst

Para entender essa dinâmica, seguiremos o procedimento abaixo.

1. Calcule $f(p)$, sabendo que $p = \frac{6}{10}$.

Note que p é um ponto fixo!

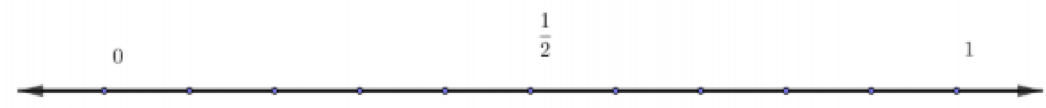
2. Encontre $f(q)$, sabendo que $q = 1 - p$.

3. Escolha um número x_0 maior do que q e menor do que p.

Combine com seu colega de classe de escolher um número diferente do seu! No final, você entenderá o porquê.

$x_0 =$

4. Marque na reta abaixo os pontos q, x_0 e p.



5. Descreva a trajetória de x_0 através de f, conforme a tabela abaixo.

Use uma calculadora para auxiliar nos cálculos!

$f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$		
x_0		Posição inicial
$x_1 = f(x_0)$		Posição de x_0 1 unidade de tempo depois
$x_2 = f(x_1)$		Posição de x_0 2 unidades de tempo depois
$x_3 = f(x_2)$		Posição de x_0 3 unidades de tempo depois
$x_4 = f(x_3)$		Posição de x_0 4 unidades de tempo depois
$x_5 = f(x_4)$		Posição de x_0 5 unidades de tempo depois
$x_6 = f(x_5)$		Posição de x_0 6 unidades de tempo depois
$x_7 = f(x_6)$		Posição de x_0 7 unidades de tempo depois

$x_8 = f(x_7)$		Posição de x_0 8 unidades de tempo depois
$x_9 = f(x_8)$		Posição de x_0 9 unidades de tempo depois
$x_{10} = f(x_9)$		Posição de x_0 10 unidades de tempo depois

Se preferir, você pode continuar seus cálculos até chegar em x_{20} ou em x_{30}!!! Quanto maior for sua sequência de cálculos, mais facilmente você chegará às conclusões!

6. Separe os dados da tabela anterior de acordo com a tabela abaixo.

Sequência nos tempos pares	**Sequência nos tempos ímpares**
$x_0 =$	$x_1 =$
$x_2 =$	$x_3 =$
$x_4 =$	$x_5 =$
$x_6 =$	$x_7 =$
$x_8 =$	$x_9 =$
$x_{10} =$	$x_{11} =$
$x_{12} =$	$x_{13} =$
$x_{14} =$	$x_{15} =$
$x_{16} =$	$x_{17} =$
$x_{18} =$	$x_{19} =$
$x_{20} =$	$x_{21} =$

Com a tabela devidamente preenchida, podemos responder as seguintes questões.

7. A sequência nos tempos pares assume valores de forma crescente, decrescente ou constante? ____

8. A sequência nos tempos ímpares assume valores de forma crescente, decrescente ou constante? ____

9. Conforme calculamos mais termos da sequência nos tempos pares aproximamos de algum valor específico? Quais suas suspeitas? ________________________________

10. Conforme calculamos mais termos da sequência nos tempos ímpares aproximamos de algum valor específico? Qual? ____

Compare suas respostas das perguntas 7, 8, 9 e 10 com as de seu colega! Lembre que as escolhas de vocês para x_0 foram distintas!

CURIOSIDADE

Se cada aluno da turma, no início da Atividade, escolheu um número x_0 diferente, e efetuou seus cálculos cuidadosamente, então conseguiremos observar que independente da escolha de cada um, a sequência de tempos pares tem seus valores se aproximando de $p = \frac{6}{10}$.

Da mesma forma, a sequência de tempos ímpares também tem seus valores se aproximando de $p = \frac{6}{10}$.

Neste caso, chamamos p de ponto fixo atrator!

ATIVIDADE 6

Continuaremos nossa pesquisa com

$$f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x, \forall\, x \in [0,1].$$

1. Lembrando que $p = \frac{6}{10}$ e $q = 1 - p$, considere o número x_0 maior do que 0 e menor do que q.

$$x_0 = \frac{1}{10}$$

2. Descreva a trajetória de x_0 através de f, conforme a tabela abaixo.

$f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x$		
x_0	$\frac{1}{10}$	Posição inicial
$x_1 = f(x_0)$		Posição de x_0 1 unidade de tempo depois
$x_2 = f(x_1)$		Posição de x_0 2 unidades de tempo depois
$x_3 = f(x_2)$		Posição de x_0 3 unidades de tempo depois
$x_4 = f(x_3)$		Posição de x_0 4 unidades de tempo depois
$x_5 = f(x_4)$		Posição de x_0 5 unidades de tempo depois
$x_6 = f(x_5)$		Posição de x_0 6 unidades de tempo depois
$x_7 = f(x_6)$		Posição de x_0 7 unidades de tempo depois
$x_8 = f(x_7)$		Posição de x_0 8 unidades de tempo depois
$x_9 = f(x_8)$		Posição de x_0 9 unidades de tempo depois
$x_{10} = f(x_9)$		Posição de x_0 10 unidades de tempo depois

3. Há alguma unidade de tempo na qual a posição de x_0 seja maior ou igual a q e menor do que p? Qual?____

4. Agora, escolha um número x_0 maior do que 0 e menor do que q de sua preferência.

$x_0 =$

5. Preencha a tabela a seguir e encontre alguma unidade de tempo t na qual a posição de x_0 seja maior ou igual a $q = \frac{4}{10}$ e menor do que $p = \frac{6}{10}$.

$\boldsymbol{f(x) = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x}$		
$\boldsymbol{x_0}$		Posição inicial
$\boldsymbol{x_1 = f(x_0)}$		Posição de x_0 1 unidade de tempo depois
$\boldsymbol{x_2 = f(x_1)}$		Posição de x_0 2 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_3 = f(x_2)}$		Posição de x_0 3 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_4 = f(x_3)}$		Posição de x_0 4 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_5 = f(x_4)}$		Posição de x_0 5 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_6 = f(x_5)}$		Posição de x_0 6 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_7 = f(x_6)}$		Posição de x_0 7 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_8 = f(x_7)}$		Posição de x_0 8 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_9 = f(x_8)}$		Posição de x_0 9 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_{10} = f(x_9)}$		Posição de x_0 10 unidades de tempo depois

Caso não tenha encontrado, em uma folha separada continue os cálculos de x_{11}, x_{12}, x_{13} ... até encontrar!!!

$t =$

A partir desse tempo t, o que podemos concluir sobre a sequência de tempos pares? Essa sequência se aproxima de algum valor? Responda sem fazer contas!

Dica. Lembre da Atividade 5!

A partir desse tempo t, o que podemos concluir sobre a sequência de tempos ímpares? Essa sequência se aproxima de algum valor? Responda sem fazer contas!

Dica. Lembre da Atividade 5!

CONCLUSÃO

Iniciamos com um número x_0, maior que 0 e menor do que q, de nossa preferência. Em seguida, percebemos que em algum instante t na trajetória de x_0, sua posição é maior ou igual a $q = \frac{4}{10}$ e menor do que $p = \frac{6}{10}$. Finalmente, concluímos que ao continuarmos os cálculos da trajetória, a partir desse instante t, as sequências de tempos pares e as sequências de tempos ímpares se aproximam de p, o nosso ponto fixo atrator.

ATIVIDADE 7

Nossa próxima experiência será com a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -5x^2 + 5x$.

Veremos que há diferenças interessantes entre o comportamento dessa função e o comportamento das funções estudadas nas atividades anteriores.

1. Com o auxílio do software Geogebra, faça o que se pede.

   a) Obtenha o gráfico de f.

   Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

   \+ $f(x) = -5x\text{^}2 + 5x$

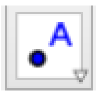
b) Obtenha a reta $y = 1$.

   Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

   \+ $y = 1$

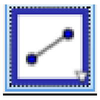
c) Marque os pontos de intersecção entre o gráfico de f e a reta $y = 1$.

   Dica. Use a seguinte ferramenta.



d) Marque no eixo x o segmento que representa os valores de x tais que $f(x) > 1$.

   Dica. Use a ferramenta a seguir.



e) Determine o intervalo no eixo x cujos valores de x satisfazem $f(x) > 1$.

A Janela de Álgebra pode te ajudar!!!

____

f) $x_0 = \frac{1}{2}$ pertence ao intervalo determinado no item e)? ______________________

Calcule $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

g) Descreva a trajetória de $x_0 = \frac{1}{2}$ através de f, conforme a tabela abaixo.

Use uma calculadora para auxiliar nos cálculos!

$\boldsymbol{f(x) = -5x^2 + 5x}$		
$\boldsymbol{x_0}$	$\frac{1}{2}$	Posição inicial
$\boldsymbol{x_1 = f(x_0)}$		Posição de x_0 1 unidade de tempo depois
$\boldsymbol{x_2 = f(x_1)}$		Posição de x_0 2 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_3 = f(x_2)}$		Posição de x_0 3 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_4 = f(x_3)}$		Posição de x_0 4 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_5 = f(x_4)}$		Posição de x_0 5 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_6 = f(x_5)}$		Posição de x_0 6 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_7 = f(x_6)}$		Posição de x_0 7 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_8 = f(x_7)}$		Posição de x_0 8 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_9 = f(x_8)}$		Posição de x_0 9 unidades de tempo depois
$\boldsymbol{x_{10} = f(x_9)}$		Posição de x_0 10 unidades de tempo depois

Se preferir, você pode continuar seus cálculos até chegar em x_{15} ou em x_{20} ou ...!!! Quanto maior for sua sequência de cálculos, mais facilmente você chegará às conclusões!

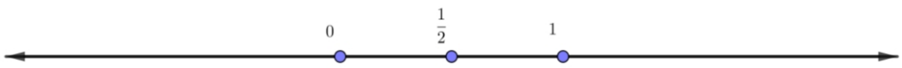
h) Em alguma unidade de tempo os termos da sequência começam a assumir valores negativos? Em que instante esse evento começa?

____

i) A sequência acima assume valores de forma crescente, decrescente ou constante?

____

j) Marque na reta abaixo os 10 primeiros valores da sequência, trajetória de x_0.



k) Se você fosse um pesquisador matemático como escreveria suas conclusões sobre a trajetória de $x_0 = \frac{1}{2}$? Escreva!

____

____

____

____

PESQUISA EM CASA

Escolha um novo x_0. Porém, esse x_0 deverá estar no intervalo

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right).$$

$x_0 =$

Combine com um colega de classe de escolherem x_0 diferentes.

Use uma calculadora para descrever a trajetória de x_0, através de f, na tabela abaixo.

$f(x) = -5x^2 + 5x$		
x_0		Posição inicial
$x_1 = f(x_0)$		Posição de x_0 1 unidade de tempo depois
$x_2 = f(x_1)$		Posição de x_0 2 unidades de tempo depois
$x_3 = f(x_2)$		Posição de x_0 3 unidades de tempo depois
$x_4 = f(x_3)$		Posição de x_0 4 unidades de tempo depois
$x_5 = f(x_4)$		Posição de x_0 5 unidades de tempo depois
$x_6 = f(x_5)$		Posição de x_0 6 unidades de tempo depois
$x_7 = f(x_6)$		Posição de x_0 7 unidades de tempo depois
$x_8 = f(x_7)$		Posição de x_0 8 unidades de tempo depois
$x_9 = f(x_8)$		Posição de x_0 9 unidades de tempo depois
$x_{10} = f(x_9)$		Posição de x_0 10 unidades de tempo depois

Faça um relatório de suas conclusões sobre a trajetória de x_0.

____

____

____

____

____

____

____

Compare com as conclusões de seu colega e descubra aspectos em comum.

____

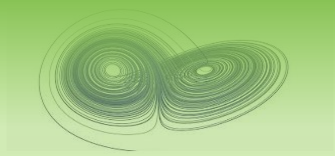
____

____

____

____

ATIVIDADE 8



Vamos continuar nossa experiência com a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -5x^2 + 5x$. Preencha a tabela abaixo de acordo com cada valor inicial x_0 dado.

$\boldsymbol{f(x) = -5x^2 + 5x}$			
	$x_0 = 0.2500$	$x_0 = 0.2530$	$x_0 = 0.2536$
$\boldsymbol{x_1 = f(x_0)}$			
$\boldsymbol{x_2 = f(x_1)}$			
$\boldsymbol{x_3 = f(x_2)}$			
$\boldsymbol{x_4 = f(x_3)}$			
$\boldsymbol{x_5 = f(x_4)}$			
$\boldsymbol{x_6 = f(x_5)}$			
$\boldsymbol{x_7 = f(x_6)}$			
$\boldsymbol{x_8 = f(x_7)}$			
$\boldsymbol{x_9 = f(x_8)}$			
$\boldsymbol{x_{10} = f(x_9)}$			

1. Descreva suas observações sobre as sequências de valores encontradas a partir de cada valor inicial x_0, retratando as diferenças entre tais sequências.

CURIOSIDADE

Se você efetuou os cálculos devidamente, deve ter notado que a órbita de $x_0 = 0.2536$ *por* f *é uma sequência de números que alterna entre* 0.2536 *e* 0.9464. *Neste caso, dizemos que* x_0 *é ponto periódico de período 2 função* f.

De forma geral, dizemos que x *é um ponto periódico de período* n *de* f *se* $f^n(x) = x$ *e* $f^k(x) \neq x \;\forall\; 0 < k < n$.

Lembre que $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, $f^4(x) = f\left(f(f(f(x)))\right)$, …,

$$f^n(x) = \underbrace{f\left(f(f \dots (f(x)))\right)}_{n\ composições}$$

2. Verifique se $x_0 = 0,0576$ é ponto periódico de f.

3. Com o auxílio do software Geogebra, faça o que se pede.

   (i) Obtenha o gráfico de f.

   Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

   + $f(x) = -5x\text{^}2 + 5x$

(ii) Obtenha a reta $y = x$.

Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

\+ $y = x$

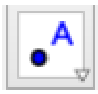
(iii) Obtenha o gráfico de f^2.

Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

\+ $f(f(x))$

(iv) Marque os pontos de intersecção entre o gráfico de f^2 e a reta $y = x$.

Dica. Use a seguinte ferramenta.



(v) f tem pontos periódicos de período 2? Quantos? Justifique sua resposta.

____

____

____

____

4. Agora, em um novo arquivo, faça o que se pede.

(i) Obtenha o gráfico de f.

Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

\+ $f(x) = -5x\^2 + 5x$

(ii) Obtenha a reta $y = x$.

Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

\+ $y = x$

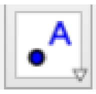
(iii) Obtenha o gráfico de f^3.

Dica. Insira na Caixa de Entrada o comando abaixo e tecle Enter.

\+ $f(f(f(x)))$

(iv) Marque os pontos de intersecção entre o gráfico de f^3 e a reta $y = x$.

Dica. Use a seguinte ferramenta.



(v) f tem pontos periódicos de período 3? Quantos? Justifique sua resposta.

(vi) Há pontos de intersecção entre o gráfico de f e a reta $y = x$?

(vii) Sem fazer contas, determine as soluções da equação $f(x) = x$.

(viii) Sem fazer contas, determine as soluções da equação $f^3(x) = x$.

DESAFIO

Pesquise sobre os pontos periódicos de período 4 da função f. Com o auxílio do Geogebra, descubra quantos pontos periódicos de período 4 a função f tem e quais são esses pontos periódicos.

Imagem disponível em: https://br.freepik.com/vetores-premium/cerebro-pensando_4373695.htm

REFERÊNCIAS

BRASIL, Secretaria de Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Matemática – Ensino Médio. Brasília (DF): MEC/SEF, 2018.

BRASIL, Secretaria de Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática – ensino de quinta a oitava série. Brasília (DF): MEC/SEF, 1998.

TEODORO, Flávia Pollyany. **Investigação matemática em sala de aula na Educação Básica:** um estudo com alunos do 3º ano do Ensino Médio. VII Encontro de Produção Científica e Tecnológica, 2013. Disponível em: < http://www.fecilcam.br/nupem/anais_viii_epct/PDF/TRABALHOS-COMPLETO/Anais-CET/MATEMATICA/fpteodorotrabalhocompleto.pdf> Acesso em: 02 de junho de 2020.

OLIVEIRA, Viviane Fátima de. **Dinâmica de Funções Quadráticas**: uma abordagem no Ensino Médio. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2020.