



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**ONDE ESTÁ O CONE CUJAS SEÇÕES SÃO AS
ÓRBITAS PLANETÁRIAS?**

Gilsânia Abreu Lopes Ribeiro

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana
Agosto de 2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**ONDE ESTÁ O CONE CUJAS SEÇÕES SÃO AS
ÓRBITAS PLANETÁRIAS?**

Gilsânia Abreu Lopes Ribeiro

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Ficha catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado - UEFS

Ribeiro, Gilsânia Abreu Lopes
R369o Onde está o cone cujas seções são orbitas planetárias?/ Gilsânia
Abreu Lopes Ribeiro. - 2020.
51f. : il.

Orientador: Jean Fernandes Barros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de Santana.
Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional - PROFMAT, 2020.

1. Seções cônicas (matemática). 2. Cones (matemática). 3.
Ensino médio. I. Barros, Jean Fernandes, orient. II. Universidade
Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 514.174



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE GILSÂNIA
ABREU LOPES RIBEIRO DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE
SANTANA

Aos quinze dias do mês de outubro de dois mil e vinte às 14:00 horas, ocorreu a defesa pública não presencial, através da plataforma Google Meet, link: meet.google.com/qjq-bhgf-wuj, da dissertação apresentada sob o título “**ONDE ESTÁ O CONE CUJAS SEÇÕES SÃO AS ÓRBITAS PLANETÁRIAS?**”, da discente **Gilsânia Abreu Lopes Ribeiro**, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Diego Catalano Ferraioli (IME/UFBA) e Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT.

Feira de Santana, 15 de outubro de 2020.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)

Orientador

Prof. Dr. Diego Catalano Ferraioli (IME/UFBA)

Prof.^a Dra. Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS)

Visto do Coordenador:

Dedico a minha família e amigos, em especial a meu esposo por me apoiar e estar presente nessa etapa da minha formação profissional, a todos que acreditaram e confiaram em mim dedico-lhes mais essa conquista.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu Deus, por me dar tudo o que desejo no momento certo, por ter me dado a vida com saúde; uma família amável, um bom trabalho, um lar, um esposo maravilhoso, amigos companheiros, por ter me dado a oportunidade de ingressar nesse mestrado, por está sempre me guiando e ajudando a superar as dificuldades.

Aos meus familiares e amigos, que sempre torceram para que eu realizasse meus sonhos. Em especial ao meu esposo que sempre me encorajou dizendo: “Esse mestrado é seu, meu amor!”. Ao meu pai, que mesmo não estando mais aqui, sempre vou lembrar e ama-lo muito. A minha mãe que tem sempre as palavras certas para tranquilizar meu coração.

A minha vó por fazer de mim a mulher que sou hoje. Aos meus irmãos, principalmente Anne, pois sempre esteve comigo quando eu precisava.

Aos professores do PROFMAT, obrigado por nos ensinar e apoiar. Principalmente ao prezado professor Jean, pelo qual tenho uma enorme admiração, pela orientação, por compartilhar um pouco do seu conhecimento e por acreditar que eu era capaz de desenvolver e concluir este Trabalho de Conclusão de Curso.

À Banca Examinadora por toda ajuda e comprometimento. Agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Enfim, muito obrigada aos meus amigos do PROFMAT, pela parceria nos estudos e por serem não apenas colegas de turma, mas sim amigos para a vida toda.

“ presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001”

*“As leis da Natureza nada mais são que
pensamentos matemáticos de Deus.”*

Johannes Kepler

Resumo

Neste trabalho responderemos a pergunta feita no título “Onde está o cone cujas seções são as órbitas planetárias?”, visto que temos como objetivo mostrar que existe a necessidade de outras abordagens, para trabalhar Seções Cônicas no ensino médio, basta recorrer a um material complementar que contribua para o Ensino-aprendizagem do conteúdo.

Iniciamos com um resumo do contexto histórico, mostrando a origem dos estudos de cônicas e apresentando um pouco sobre a história de alguns dos matemáticos responsáveis pela fundamentação dessa teoria, como o alemão Johannes Kepler que formulou as três leis do movimento planetário. Posteriormente, fazemos uma explanação sobre as fundamentações teóricas dos conceitos de seções cônicas sob distintos pontos de vista, com a intenção de despertar no aluno a vontade de saber um pouco mais sobre seções cônicas. Finalmente, apresentamos a análise de alguns livros didáticos, para poder fazer um comparativo com o que é proposto hoje nas escolas, com o intuito de mostrar a necessidade de um material de apoio, que poderia ser acessado por professores e alunos (não somente da educação básica ou da área de matemática, mas também de outras áreas).

Abstract

In this work we will answer the question asked in the title “ Where is the cone whose sections are the planetary orbits? ”, Since we aim to show that there is a need for other approaches, to work Conical Sections in high school, just use a material that contributes to the teaching-learning of the content.

We begin with a summary of the historical context, showing the origin of the studies of conics and presenting a little about the history of some of the mathematicians responsible for the foundation of this theory, such as the German Johannes Kepler who formulated the three laws of planetary motion. Subsequently, we make an explanation about the theoretical foundations of the concepts of conic sections under different points of view, with the intention of arousing in the student the desire to know a little more about conic sections. Finally, we present the analysis of some textbooks, in order to make a comparison with what is proposed today in schools, in order to show the need for support material, which could be accessed by teachers and students (not only education basic education or mathematics, but also from other areas).

Sumário

Dedicatória	2
Agradecimentos	4
Epígrafe	5
Resumo	6
Abstract	7
Sumário	9
Lista de Figuras	8
Introdução	9
1 As Seções Cônicas e o seu Contexto Histórico	11
1.1 O Começo	11
1.2 Johannes Kepler e suas Leis Planetárias	11
1.2.1 A Primeira Lei de Kepler	12
1.2.2 A Segunda Lei de Kepler	12
1.2.3 A Terceira Lei de Kepler	13
1.3 Germinal Pierre Dandelin	13
2 A Elipse, a Hipérbole e a Parábola	15
2.1 A Elipse	15
2.2 A Hipérbole	20
2.3 A Parábola	23
3 As Leis de Kepler	27
3.1 A Conservação do Momento Angular	27
3.2 A Segunda Lei de Kepler	27
3.3 As Seções Cônicas e a Excentricidade	28
3.4 A Primeira Lei de Kepler por Diferenciação	28
4 As Esferas de Dandelin e as Seções Cônicas	31
5 O Parabolóide de Revolução e as Seções Cônicas	35

6	Terceira Lei de Kepler	38
7	A Energia Total do Problema de Kepler	41
8	As Sessões Cônicas e sua Abordagem no Ensino Básico	43
8.1	Análise dos Livros Didáticos	43
	Referências Bibliográficas	48

Lista de Figuras

1.1	Johannes Kepler	11
1.2	A Primeira Lei de Kepler	12
1.3	A Segunda Lei de Kepler	13
1.4	Germinal Pierre Dandelin	14
2.1	A Construção de uma Elipse	15
2.2	Coordenadas Polares Relativas a \vec{e}	17
2.3	A Excentricidade e os Semieixos	18
2.4	A Reta Diretriz	18
2.5	A Construção da Hipérbole	20
2.6	O Ramo Principal de uma Hipérbole e as Coordenadas Polares	21
2.7	A Amplitude do Ângulo f	22
2.8	A Construção de uma Parábola	23
2.9	A Prova da Proposição 2.3.1	24
3.1	O Foco, Diretriz e Excentricidade de uma Cônica	28
3.2	O Momento Angular Fictício	29
4.1	Elipse	32
4.2	Parábola	33
4.3	Hipérbole	34
5.1	Órbita Elíptica	36
5.2	Órbita Hiperbólica	37
6.1	Seção Axial do Cone	38
6.2	A Elipse de Semieixos a e b , com $a > b$	39

Introdução

O presente trabalho propõe uma discussão teórica que tem como finalidade responder à pergunta: “Onde está o cone cujas seções são as órbitas planetárias?” Mas, para entendermos a necessidade desse questionamento, e de procurarmos por sua resposta, teremos que fazer uma pequena viagem no tempo.

Sendo assim iniciaremos fazendo uma viagem à Grécia, pois foi onde começou os estudos de seções cônicas, à Alemanha, país onde nasceu Johannes Kepler, à Bélgica, por ser o país de Germinal Pierre Dandelin. E por fim ao Brasil, para retratar como é abordado o tema das seções cônicas nas escolas.

O conteúdo de seções cônicas é pouco abordado na educação básica, para não ser radical ao dizer quase nunca é abordado. Quando é ensinado, dedica-se um curto tempo na última unidade, do último ano do ensino médio, mas isso se dá por se tratar de um tema mais complexo. O mesmo ocorre com os livros didáticos, que só dedicam um capítulo nas últimas sessões.

Daí percebemos a necessidade de um material, além dos livros didáticos, que dê um suporte maior, e seja pensado numa maneira mais prática e chamativa para abordar este conteúdo. Embora pareça difícil, isto é possível.

Se observarmos, estamos todo o tempo rodeados de situações que fazem necessário o uso de cônicas, um exemplo importante é aquele do movimento planetário, que trazemos como nosso tema principal. Este exemplo nos leva a pensar sobre a importância do estudo do tema, e o como é necessário o seu ensino ainda na educação básica.

Com este trabalho não temos a pretensão de dizer como se deve trabalhar este assunto, queremos apenas, apresentar um material complementar que possa convenientemente ser utilizado por professores e alunos.

Apresentamos as definições das Cônicas como lugar geométrico, demonstramos que realmente as mesmas são a interseções de um cone com um plano. Mostramos quais foram as três leis de Kepler e suas relações com o tema, a criativa demonstração com as esferas de Dandelin e com as importantes propriedades de um parabolóide de revolução. Abordamos as definições e propriedades dessas curvas separadamente e de diferentes maneiras. Para posteriormente analisar o que os livros didáticos adotados nas nossas escolas de ensino básico trazem como proposta de ensino sobre o tema.

Se observarmos a parábola é a única cônica vista de forma mais aprofundada, mas não mais importante, sendo deixada de lado as demais. Os livros didáticos na sua maioria, abordam somente definições básicas das cônicas e o esboço das figuras, o que dificulta o aprendizado significativo do assunto. Muitos deles deixam de fazer uma contextualização histórica, e de sugerir o uso de tecnologias como aliado, algo que melhoraria muito o ensino-aprendizagem de seções cônicas.

O objetivo desse trabalho é mostrar que existe a necessidade de um material complementar, para trabalhar esse conteúdo no ensino médio, mas também em cursos de graduações, sendo usado tanto por professores como por alunos. Pois, sabemos o quão importante é para diversas áreas, foi de

fundamental importância para o desenvolvimento da astronomia, tem papel importante em vários domínios da física, a engenharia e em muitas outras situações.

Capítulo 1

As Seções Cônicas e o seu Contexto Histórico

Neste capítulo, mencionaremos alguns aspectos da história do estudo das seções cônicas, com a finalidade de termos uma certa contextualização do tema, que é importante para o processo de Ensino-aprendizagem.

1.1 O Começo

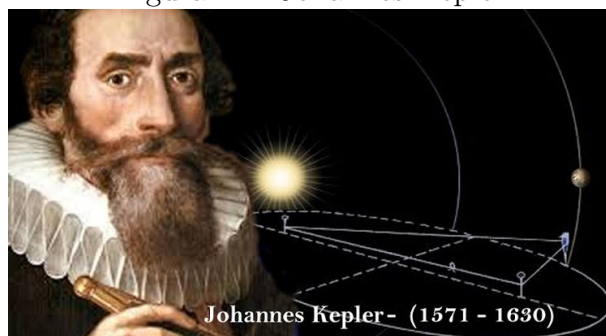
Teve início na Grécia o estudo das seções cônicas e das suas propriedades geométricas, limitando-se à definição inicial referente ao cone reto de revolução.

Foi nos trabalhos de Arquimedes que apareceram os primeiros teoremas sobre as seções cônicas. Mas, foi Apolônio que descobriu, generalizou e provou teoremas. Inclusive, foi ele que descobriu que é possível obter cônicas a partir de qualquer seção em qualquer cone.

Outras duas personalidades não menos importante são Johannes Kepler e Germinal Pierre Dandelin, mas para contar um pouco das suas contribuições, dedicaremos as próximas duas seções.

1.2 Johannes Kepler e suas Leis Planetárias

Figura 1.1: Johannes Kepler



Fonte: <https://portaldoastronomo.org/2018/12/27-dezembro-2018/>

Johannes Kepler (ver figura 1.1) nasceu prematuramente numa cidade do sul da Alemanha, conhecida como Weil, no dia 27 de dezembro de 1571. Johannes era uma criança doentia, aos 4 anos de idade ele quase morreu de varíola, que o deixou com uma deficiência na visão e nas mãos, entre

os 14 e 15 anos sofreu de constantes feridas na pele, aos 16 anos sofria de terríveis dores de cabeça, mas nada o impediu de ser um bom estudante.

Com o objetivo de estudar Teologia, após concluir a escola primária e o curso que fazia de Latim, conseguiu ingressar no seminário. Devido ao seu empenho e inteligência ganhou uma bolsa de estudo na Universidade de Tübingen, para realizar o curso de astronomia.

Naquela época só existiam três opções para quem concluía o curso de astronomia: a carreira eclesiástica, ser astrônomo numa corte ou ser escolhido para lecionar numa universidade. Ao concluir o curso, sua escolha foi a carreira religiosa, o que era de se esperar, pois, caso contrário, era preciso encontrar um protetor.

Sua paixão pela matemática e astronomia o fez desistir de ministrar uma igreja. Aceitou aos 23 anos o convite para lecionar Astronomia na Universidade de Graz. Ele se tornou um perito na elaboração de horóscopo.

Naquele período, tinha-se a ideia de que o Sol e os demais planetas giravam em torno da Terra. Este Modelo Geocêntrico, defendido por Ptolomeu, foi estudado por muitos anos. No entanto, verificou-se que o modelo tinha muitas falhas.

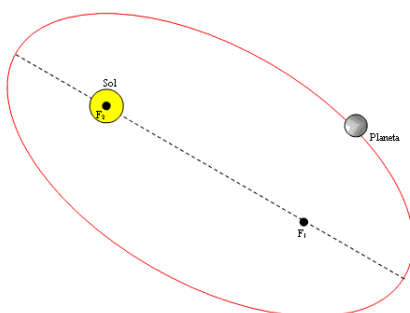
No século XVI, o astrônomo polonês Nicolau Copérnico apresentou sua visão, a de que o Sol estava no centro do universo, e os planetas descreviam órbitas circulares ao seu redor, que foi chamada de modelo Heliocêntrico. Esta idéia fez Kepler avaliar suas vantagens matemáticas em relação ao modelo Geocêntrico.

Por volta do século XVII, Johanes Kepler enunciou as leis que regem o movimento planetário, tendo como base as anotações do astrônomo Tycho Brahe, que ficaram conhecidas como Leis de Kepler.

1.2.1 A Primeira Lei de Kepler

A primeira Lei de Kepler, também conhecida como Lei das Órbitas, afirma que os planetas descrevem órbitas elípticas em torno do Sol, que ocupa um dos focos da elipse, como mostra a figura 1.2.

Figura 1.2: A Primeira Lei de Kepler

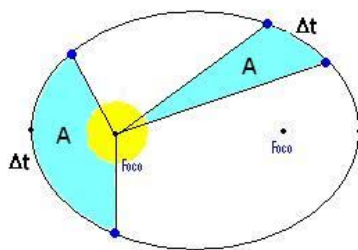


Fonte: <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversal/lk.php>

1.2.2 A Segunda Lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, também chamada de lei das áreas, afirma que o segmento que une o centro do Sol ao centro de um planeta, varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais, como mostra a figura 1.3.

Figura 1.3: A Segunda Lei de Kepler



Fonte: <https://voupassar.club/segunda-lei-de-kepler-o-que-determina/>

Ao perceber que a velocidade não era constante, Kepler percebeu que a órbita dos planetas não eram círculos.

1.2.3 A Terceira Lei de Kepler

A terceira lei de Kepler, também conhecida como a Lei dos Períodos. Foi formulada uma década após a segunda lei de Kepler. Ela diz que *os quadrados dos períodos de revolução dos planetas ao redor do Sol são diretamente proporcionais aos cubos dos raios médios de suas órbitas*. Vejamos uma demonstração para órbitas circulares.

Demonstração. Seja um planeta de massa m que orbita ao redor do Sol com velocidade angular ω , cujo raio da órbita é r , que é a distância entre o Sol e o planeta. Sendo assim, a força que atua sobre o planeta é a força centrípeta, cuja intensidade F_c é dada por $m\omega^2 r$. Como a velocidade angular é dada por $\omega = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o período de revolução do planeta, temos que

$$F_c = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r = m \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$

Seja F a intensidade da força de atração gravitacional entre o Sol e o planeta. Considerando M a massa do Sol, pela lei da gravitação universal, temos que

$$m \frac{4\pi^2}{T^2} r = G \frac{M m}{r^2},$$

onde G é a constante de gravitação universal. Donde, $T^2 = h r^3$, onde $h = \frac{4\pi^2}{G.M}$, que é uma constante. \square

1.3 Germinal Pierre Dandelin

Germinal Pierre Dandelin (ver figura 1.4) nasceu na França, no dia 12 de abril de 1794. Ele era um matemático, soldado e professor de Engenharia na Bélgica. Dandelin foi o filho mais velho de uma belga com um administrador francês, e tinha cinco irmãos, quatro meninos e uma menina.

Mudou-se para Ghent, na Bélgica, ainda criança. Ele era notável em Ciências. Por estudar numa escola de natureza militar, foi nomeado Sargento Major, e depois Sargento na Escola Nacional da Guarda.

Figura 1.4: Germinal Pierre Dandelin



Fonte: https://mg.wikipedia.org/wiki/Germinal_Pierre_Dandelin

Ao concluir os estudos, ele recebeu em 1813, o Primeiro Prêmio em Matemática, que o fez dar início aos seus estudos em Matemática. Mas, teve que abandonar devido a problemas políticos.

Segundo [2], enquanto seguia a carreira militar em Namur, na Bélgica, ele publicou soluções de problemas de geometria elementar. Em 1821, escreveu outro trabalho notável sobre as propriedades do foco da parábola. Trabalhou na projeção estereográfica de uma esfera sob um plano, e teve uma importante contribuição na área de projeções geométricas. E também, foi responsável por uma demonstração, bastante criativa, de que a elipse, a hipérbole e a parábola são seções cônicas, ver capítulo 4.

Capítulo 2

A Elipse, a Hipérbole e a Parábola

Neste capítulo, definiremos as elipses, as hipérbolas e as parábolas como lugares geométricos no plano. No final do capítulo, estabeleceremos as mesmas como seções planas de um cone definido por

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}.$$

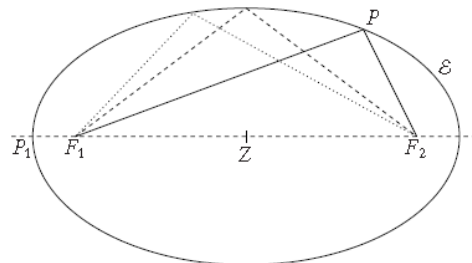
Veremos ilustrações de como construir com materiais concretos objetos cujas bordas têm a forma de uma seção cônica. Antes precisaremos de algumas definições preliminares que serão de suma importância para o entendimento, são elas:

- Cone: é o conjunto de todos os segmentos de reta que ligam os pontos de um círculo a um ponto que não pertence ao plano em que ele está contido;
- Cone reto: é um cone com eixo perpendicular ao plano da base;
- Geratriz: são segmentos de reta com extremidades no vértice e no círculo da base do cone.

2.1 A Elipse

Para o que se segue, nós denotaremos por $|PQ|$ a distância entre os pontos $P, Q \in \mathbb{R}^2$, que é o mesmo que o comprimento do segmento de reta determinado pelos pontos P e Q .

Figura 2.1: A Construção de uma Elipse



Fonte: [4]

Para que um marceneiro construa uma mesa de madeira com o tampo no formato de uma elipse, ver figura 2.1, ele procede da seguinte maneira: Fixa sobre o pedaço de madeira (que será recortado para fazer o tampão da mesa) dois pregos pequenos, um em F_1 e outro em F_2 , com um pedaço de

barbante de comprimento maior que $|F_1F_2|$, amarra suas extremidades nos pregos e com a ajuda de um lápis desenha uma elipse ao redor dos dois pregos, mantendo o barbante totalmente esticado.

Agora, passemos a formalização do tema.

Definição 2.1.1 *Sejam F_1, F_2 dois pontos no plano euclidiano \mathbb{R}^2 , não necessariamente distintos, e escolha um número real $a > \frac{1}{2}|F_1F_2|$. A elipse de focos F_1 e F_2 e semieixo maior a é o conjunto*

$$\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF_1| + |PF_2| = 2a\}.$$

Seja Z o centro da elipse, como o centro da elipse é definido como sendo o ponto médio do segmento F_1F_2 . Sendo assim, Z é o ponto médio do segmento F_1F_2 . No caso em que $F_1 = F_2 = Z$, temos que \mathcal{E} é um círculo de centro Z e de raio a . Sejam $F_1 \neq F_2$ e P_1 o ponto de \mathcal{E} , situado na reta que passa pelos focos, no lado esquerdo de F_1 , como mostra a figura 2.1.

Definindo $d_i = |F_iP_1|$, $i = 1, 2$, temos que

$$|ZP_1| = \frac{|F_2P_1| - |F_1P_1|}{2} + |F_1P_1| = \frac{d_2 - d_1}{2} + d_1 = \frac{d_1 + d_2}{2} = a.$$

Isto mostra que o ponto P_1 está na interseção do círculo centrado em Z de raio a e a elipse \mathcal{E} . De fato, existem exatamente dois pontos nesta situação, P_1 , o mais próximo de F_1 , e P_2 , sobre a mesma reta que passa pelos focos, o mais próximo de F_2 .

Para a próxima proposição, denotamos o produto interno canônico em \mathbb{R}^2 por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Além disso, a norma de um vetor \vec{v} será denotada por v , isto é, $v = |\vec{v}| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$. Alternativamente, denotamos $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ por v^2 . E r é o raio da elipse.

Proposição 2.1.1 *A elipse de focos A e 0 , onde 0 é a origem de \mathbb{R}^2 , e semieixo maior a , é dada pela equação*

$$r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = a(1 - e^2),$$

onde $\vec{e} := -\frac{1}{2a} \overrightarrow{0A}$.

Antes da demonstração, observemos que $2a > |\overrightarrow{0A}|$. Sendo assim, $0 \leq e < 1$. O número e é chamado de excentricidade da elipse, e o vetor \vec{e} é o vetor excentricidade. No caso em que $e = 0$, a elipse degenera-se no círculo cujo centro é o ponto médio do segmento $A0$ e raio a .

Demonstração. Da definição 2.1.1 e da figura 2.2, para um ponto P qualquer em \mathcal{E} , temos que

$$\begin{aligned} |P0| + |PA| &= 2a \\ r + |\overrightarrow{0A} - \vec{r}| &= 2a \\ |\overrightarrow{0A} - \vec{r}| &= 2a - r. \end{aligned}$$

E então,

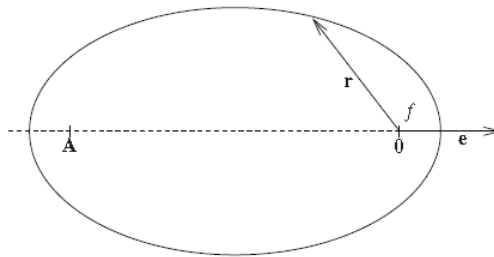
$$\begin{aligned} |\vec{0\dot{A}} - \vec{r}|^2 &= (2a - r)^2 \\ |\vec{0\dot{A}}|^2 + r^2 - 2\langle \vec{0\dot{A}}, \vec{r} \rangle &= 4a^2 + r^2 - 4ar \\ 4ar - 2\langle \vec{0\dot{A}}, \vec{r} \rangle &= 4a^2 - |\vec{0\dot{A}}|^2 \\ r - \frac{\langle \vec{0\dot{A}}, \vec{r} \rangle}{2a} &= a - \frac{|\vec{0\dot{A}}|^2}{4a} \\ r - \left\langle \frac{\vec{0\dot{A}}}{2a}, \vec{r} \right\rangle &= a - \frac{|\vec{0\dot{A}}|^2}{4a} \\ r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle &= a(1 - e^2). \end{aligned}$$

Fazendo o caminho inverso, mostra-se que o lugar geométrico dos pontos que satisfaz a equação $r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = a(1 - e^2)$ é uma elipse. Vejamos, fazendo o caminho inverso, chegamos à equação $|\vec{0\dot{A}} - \vec{r}|^2 = (2a - r)^2$. Tomando raiz quadrada, obtemos $|\vec{0\dot{A}} - \vec{r}| = \pm(2a - r)$. Como

$$r - 2a < r - |\vec{0\dot{A}}| \leq |\vec{0\dot{A}} - \vec{r}|,$$

temos que a equação $|\vec{0\dot{A}} - \vec{r}| = r - 2a$ não pode ocorrer. Desta forma, a única equação possível é $|\vec{0\dot{A}} - \vec{r}| = 2a - r$. E assim, obtemos a definição 2.1.1. \square

Figura 2.2: Coordenadas Polares Relativas a \vec{e}



Fonte: [4]

Considerando $f = f(\vec{r})$ como o ângulo entre \vec{e} e \vec{r} , ver a figura 2.2, reescrevendo a proposição anterior em coordenadas polares, obtemos

Corolário 2.1.1 *Nas coordenadas polares (r, f) , relativas ao eixo definido pelo vetor excentricidade \vec{e} , a equação*

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

descreve a elipse com um foco na origem e semieixo maior a .

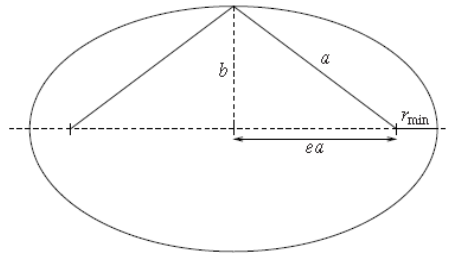
Segue-se que r atingirá seus valores extremos

$$r_{\min} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e), \text{ se } f \text{ é um múltiplo par de } \pi,$$

e

$$r_{\max} = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e), \text{ se } f \text{ é um múltiplo ímpar de } \pi.$$

Figura 2.3: A Excentricidade e os Semieixos



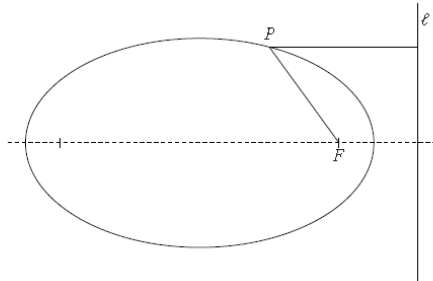
Fonte: [4]

Sendo assim, a distância do centro da elipse a um dos focos, como mostra a figura 2.3, será igual a ea . De fato, esta distância é $\frac{r_{\max} - r_{\min}}{2}$.

Considerando b , a distância entre o centro da elipse e os focos imaginários (que são os vértices do semieixo menor), que é o semieixo menor, pelo teorema de Pitágoras, conforme a figura 2.3, temos que $b = a\sqrt{1 - e^2}$. As próximas proposições completam o estudo da elipse.

Proposição 2.1.2 Em \mathbb{R}^2 , considere uma reta l e F um ponto que não pertence a l . Escolha um número real $0 < e < 1$. Então, o lugar geométrico dos pontos $P \in \mathbb{R}^2$ tais que $|PF| = e \text{ dist}(P, l)$ é a elipse de foco F , vetor excentricidade \vec{e} , que é o vetor ortogonal a l de comprimento e , apontando de F para l , e semieixo maior $a = \frac{e \text{ dist}(F, l)}{1 - e^2}$. A reta l é denominada a diretriz da elipse, ver figura 2.4.

Figura 2.4: A Reta Diretriz



Fonte: [4]

Demonstração. Sem nenhum prejuízo, podemos assumir que F está na origem. Sendo assim, $|PF| = r$. Como $0 < e < 1$, temos que $|PF| < \text{dist}(P, l)$. Isto implica que P e F estão do mesmo lado relativo a l . Observemos que a distância de P a l é igual a soma da distância de F a l e do comprimento da projeção ortogonal do vetor \vec{r} sobre a reta que passa por F cuja direção é dada por \vec{e} , ver figura 2.4, isto é,

$$\begin{aligned} \text{dist}(P, l) &= \text{dist}(F, l) + \left| \frac{\langle \vec{r}, \vec{e} \rangle}{e^2} \vec{e} \right| \\ &= \text{dist}(F, l) - \frac{1}{e} \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \\ &= \frac{a(1 - e^2)}{e} - \frac{1}{e} \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \\ &= \frac{1}{e} [a(1 - e^2) - \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle]. \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned} r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle &= a(1 - e^2) \\ |PF| + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle &= a(1 - e^2) \\ |PF| &= a(1 - e^2) - \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle \\ |PF| &= e \operatorname{dist}(P, l), \end{aligned}$$

que é a equação vetorial de uma elipse. \square

Para o que se segue, precisamos de uma definição. Em \mathbb{R}^n , para $n \geq 2$, dizemos que X aplica-se isometricamente sobre Y se, existe uma aplicação $T : X \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $T(X) = Y$ e T preserva distâncias, isto é, para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, tem-se que

$$|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Uma tal T é dita uma *isometria de X sobre Y* ou um *movimento rígido de X sobre Y* . Sabe-se, da Álgebra Linear, que T é a restrição de um operador ortogonal seguido de uma translação.

Proposição 2.1.3 *Seja \mathcal{E} uma elipse com semi-eixo maior a e excentricidade e . A menos de uma isometria, podemos assumir que \mathcal{E} está centrado na origem, e os focos são*

$$F_1 = (-ea, 0) \quad e \quad F_2 = (ea, 0).$$

Então,

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

onde $b = a\sqrt{1 - e^2}$.

Demonstração. No caso em que $e = 0$ é imediato, já que a equação é a do círculo centrado na origem de raio a . Consideremos o caso em que $0 < e < 1$. Pela proposição anterior, temos que \mathcal{E} pode ser descrito por $|PF| = e \operatorname{dist}(P, l)$, onde $F = F_2 = (ea, 0)$, e l a reta vertical dada por

$$x = ea + \operatorname{dist}(F, l) = ea + \frac{a(1 - e^2)}{e} = \frac{a}{e}.$$

Escrevendo $|PF| = e \operatorname{dist}(P, l)$ em coordenadas cartesianas, temos que

$$(x - ea)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \frac{a}{e} \right)^2.$$

Segue-se que

$$x^2 - 2eax + e^2a^2 + y^2 = e^2x^2 - 2eax + a^2,$$

o que implica em

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = (1 - e^2)a^2.$$

Dividindo ambos os membros por $(1 - e^2)a^2$, temos que

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(1 - e^2)a^2} = 1.$$

Considerando $b = a\sqrt{1 - e^2}$, temos que

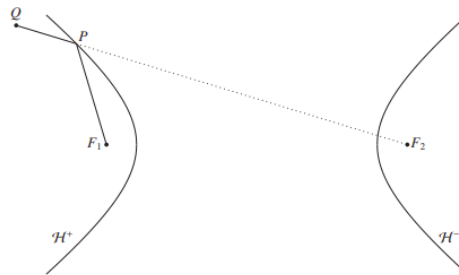
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

□

2.2 A Hipérbole

De forma análoga, para definição da hipérbole, nós supomos a construção do marceneiro, veja a figura 2.5.

Figura 2.5: A Construção da Hipérbole



Fonte: [4]

Para que o marceneiro construa uma mesa de madeira com tampo no formato de uma hipérbole, seguirá o seguinte procedimento: Fixa sobre o pedaço de madeira (que será recortado para fazer o tampão da mesa) dois pregos pequenos, um em F_1 e outro em F_2 , com uma haste de comprimento L , e um pedaço de barbante de comprimento l , onde $L - l = 2a$. Faz um furo em uma das extremidades da haste, e na outra amarra o barbante (chamaremos de Q está extremidade). Considera F_2 como um pivô sobre o qual a haste gira. A outra ponta do barbante amarra em F_1 , percorre com um lápis o barbante esticado na direção da haste, deixando-o encostado na mesma (na direção de Q até algum ponto P). Forma assim uma reta de P a F_1 . E então, tem-se que

$$|PF_2| - |PF_1| = |QF_2| - |QP| - |PF_1| = L - l = 2a.$$

De forma análoga, mas agora com F_1 como pivô sobre o qual a haste gira, podemos obter o outro ramo da hipérbole.

A rigor, temos a seguinte definição

Definição 2.2.1 *Sejam F_1 e F_2 dois pontos no plano euclidiano \mathbb{R}^2 e a um número real positivo tal que $2a < |F_1F_2|$. A hipérbole de focos F_1 e F_2 e semieixo real a é o conjunto*

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF_2| - |PF_1| = \pm 2a\}.$$

Analogamente à proposição 2.1.1, temos que

Proposição 2.2.1 *A hipérbole com os focos O e A e semieixo real a é dada pela equação*

$$r \pm \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = \pm a(e^2 - 1),$$

onde $\vec{e} := \frac{1}{2a} \vec{0\dot{A}}$.

Obeservemos que $2a < |\vec{0\dot{A}}|$, logo para hipérboles temos que $e > 1$.

Demonstração. A definição 2.2.1 e a figura 2.5 garante-nos que

$$\begin{aligned} |PA| - |P0| &= \pm 2a \\ |\vec{0\dot{A}} - \vec{r}| - r &= \pm 2a \\ |\vec{0\dot{A}} - \vec{r}| &= r \pm 2a. \end{aligned}$$

Para o caso da adição no membro direito, segue que

$$\begin{aligned} |\vec{0\dot{A}} - \vec{r}|^2 &= (r + 2a)^2 \\ |\vec{0\dot{A}}|^2 + r^2 - 2\langle \vec{0\dot{A}}, \vec{r} \rangle &= r^2 + 4a^2 + 4ar \\ \frac{|\vec{0\dot{A}}|^2}{4a} - \left\langle \frac{\vec{0\dot{A}}}{2a}, \vec{r} \right\rangle &= a + r \\ r + \left\langle \frac{\vec{0\dot{A}}}{2a}, \vec{r} \right\rangle &= \frac{|\vec{0\dot{A}}|^2}{4a} - a \\ r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle &= a(e^2 - 1). \end{aligned}$$

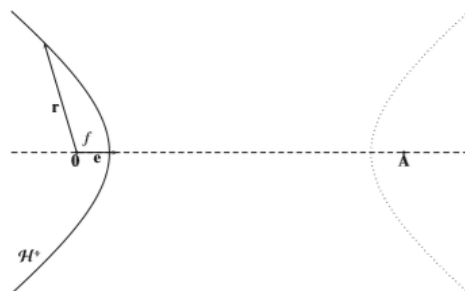
Agora, para o caso da subtração no membro direito, temos que

$$\begin{aligned} |\vec{0\dot{A}} - \vec{r}|^2 &= (r - 2a)^2 \\ |\vec{0\dot{A}}|^2 + r^2 - 2\langle \vec{0\dot{A}}, \vec{r} \rangle &= r^2 + 4a^2 - 4ar \\ \frac{|\vec{0\dot{A}}|^2}{4a} - \left\langle \frac{\vec{0\dot{A}}}{2a}, \vec{r} \right\rangle &= a - r \\ r - \left\langle \frac{\vec{0\dot{A}}}{2a}, \vec{r} \right\rangle &= a - \frac{|\vec{0\dot{A}}|^2}{4a} \\ r - \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle &= -a(e^2 - 1). \end{aligned}$$

Portanto, $r \pm \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = \pm a(e^2 - 1)$. □

Definição 2.2.2 A parte da hipérbole descrita em 2.2.1, usando o sinal de adição, ou seja, aqueles pontos mais próximos de 0 do que de A, será chamada de ramo principal da hipérbole em relação ao foco 0, e denotado por \mathcal{H}^+ , vê figura 2.6.

Figura 2.6: O Ramo Principal de uma Hipérbole e as Coordenadas Polares



Fonte: [4]

O ramo principal da hipérbole é relevante ao se tratar das forças newtonianas atrativas, relativas ao foco 0.

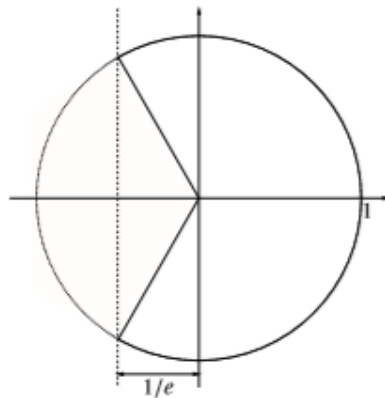
Analogamente ao que fizemos à elipse, ver corolário 2.1.1 e proposições 2.1.2 e 2.1.3, temos os resultados abaixo.

Corolário 2.2.1 *Nas coordenadas polares (r, f) , relativas ao eixo definido pelo vetor de excentricidade \vec{e} , a equação do ramo principal em relação ao foco 0 e semieixo real a é*

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos f},$$

onde o ângulo f variando em $\left(-\arccos \frac{-1}{e}, \arccos \frac{-1}{e}\right) \subset (-\pi, \pi)$, como mostra a figura 2.7.

Figura 2.7: A Amplitude do Ângulo f



Fonte: [4]

Segue-se que r atingirá seu valor mínimo em

$$r_{\min} = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e} = a(e - 1), \text{ se } f = 0.$$

Proposição 2.2.2 *Sejam uma reta l em \mathbb{R}^2 , um ponto $F \in \mathbb{R}^2$ que não esteja em l e um número real $e > 1$. Então, o conjunto de pontos que satisfaz*

$$|PF| = e \text{ dist}(P, l)$$

é a hipérbole de foco F , vetor excentricidade \vec{e} igual ao vetor ortogonal a l de comprimento e , que aponta de F para l , e semieixo real

$$a = \frac{e \text{ dist}(F, l)}{e^2 - 1}.$$

O ramo principal relativo a F é o conjunto dos pontos P que se encontram do mesmo lado de F , relativo a l . Nós chamamos a reta l de *a diretriz do ramo principal*.

Proposição 2.2.3 *Seja \mathcal{H} uma hipérbole de semieixo a e excentricidade e . A menos de uma isometria, podemos assumir que \mathcal{H} está centrado na origem, e os focos são*

$$F_1 = (-ea, 0) \text{ e } F_2 = (ea, 0).$$

Então,

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\},$$

onde $b = a\sqrt{e^2 - 1}$.

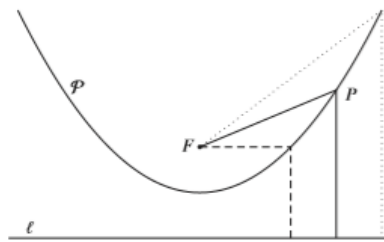
As retas $y = \pm \frac{b}{a}x$ são as assíntotas da hipérbole, isto é,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x = 0.$$

2.3 A Parábola

Até aqui, nós vimos as descrições de elipses e hipérbolas, resta-nos descrever o caso em que $e = 1$, ou seja, as parábolas. Nesse caso, podemos também descrever a construção do marceneiro, veja a figura 2.8.

Figura 2.8: A Construção de uma Parábola



Fonte: [4]

Desta vez, o marceneiro deseja construir uma mesa de madeira com tampo no formato de uma parábola. Para isso, ele seguirá o seguinte procedimento: Fixa sobre o pedaço de madeira (que será recortado para fazer o tampão da mesa) um prego pequeno, em um ponto F que será o foco da parábola. Coloca uma haste sobre a madeira a uma distância d do ponto F . Coloca sobre a haste um esquadro de tal forma que sua hipotenusa fique do lado oposto ao ponto F . Faz um furo na extremidade superior do esquadro, e amarra a ponta de um barbante com o comprimento igual ao comprimento do cateto maior do esquadro. A outra ponta do barbante amarra no prego, usando a ponta de um lápis para manter o barbante esticado, e deslizando o esquadro sobre a haste, a ponta do lápis descreve uma parábola.

Formalmente,

Definição 2.3.1 *Sejam l uma reta em \mathbb{R}^2 e um ponto $F \in \mathbb{R}^2$ que não pertence a l . A parábola de foco F e diretriz l é o conjunto*

$$\mathcal{P} = \{P \in \mathbb{R}^2 : |PF| = \text{dist}(P, l)\}.$$

Analogamente às proposições 2.1.1 e 2.2.1, temos que

Proposição 2.3.1 *A parábola com foco 0 e diretriz l , a uma distância d de 0 , é dada pela equação*

$$r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = d,$$

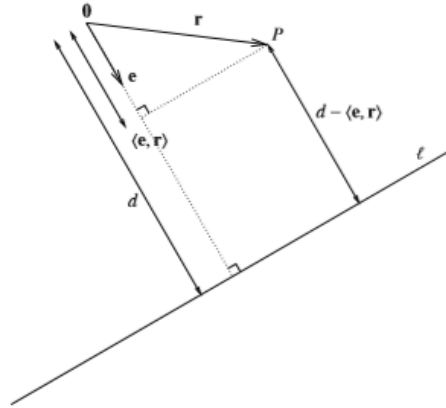
onde \vec{e} é o vetor unitário ortogonal a l , direcionado de O a l .

Demonstração. Como $|OP| = \text{dist}(P, l)$, é fácil ver que

$$r + \langle \vec{e}, \vec{r} \rangle = d,$$

vê a figura 2.9. □

Figura 2.9: A Prova da Proposição 2.3.1



Fonte: [4]

Em coordenadas polares, temos que

Corolário 2.3.1 Nas coordenadas polares (r, f) , relativas ao eixo definido pelo vetor de excentricidade \vec{e} , a equação da parábola com foco na origem e diretriz l , a uma distância d de O , na direção de \vec{e} , é

$$r = \frac{d}{1 + \cos f},$$

onde f pode variar no intervalo aberto $(-\pi, \pi)$.

Analogamente às proposições 2.1.3 e 2.3.1, temos a proposição a seguir.

Proposição 2.3.2 A parábola \mathcal{P} de foco $F = (0, p)$ e diretriz l , de equação $y = -p$, é o conjunto

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 4py\}.$$

Demonstração. Como $|PF|^2 = x^2 + (y - p)^2$ e $\text{dist}^2(P, l) = (y + p)^2$, para cada $P = (x, y) \in \mathcal{P}$. Sendo assim, definição 2.3.1 traduz-se na equação dada na proposição. □

A próxima proposição descreve a elipse, a hipérbole e a parábola como seções cônicas.

Proposição 2.3.3 A curva \mathbb{P} dada pela interseção do cone

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\},$$

com o plano afim

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = my + c\},$$

onde $c > 0$,

1. é uma elipse, se $0 \leq m < 1$.
2. é uma parábola, se $m = 1$.
3. é uma hipérbole, se $m > 1$.

Demonstração. Substituindo $z = my + c$ em $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, chegamos a

$$(1 - m^2)y^2 - 2mcy + x^2 - c^2 = 0.$$

1. Para $m = 0$, temos que \mathbb{P} é a curva $x^2 + y^2 = c^2$, que é um círculo no plano $z = c$. Projetando esta curva ortogonalmente sobre o plano $z = 0$, obtemos o mesmo círculo, centrado em $(0, 0, 0)$ e de raio $c > 0$.
2. Para $0 < m < 1$, obtemos

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2} + \frac{mc}{1 - m^2}}$$

e

$$z = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2} + \frac{c}{1 - m^2}},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq \frac{c}{\sqrt{1 - m^2}}$.

Considerando a translação $(x, y, z) \mapsto \left(x, y - \frac{mc}{1 - m^2}, z - \frac{c}{1 - m^2}\right)$ e a rotação, em torno do eixo dos x , $(x, y, z) \xrightarrow{R_m} \left(x, \frac{y + mz}{\sqrt{1 + m^2}}, \frac{z - my}{\sqrt{1 + m^2}}\right)$, temos que a curva

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(x, \pm \frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2} + \frac{mc}{1 - m^2}}, \pm \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}} \sqrt{-x^2 + \frac{c^2}{1 - m^2} + \frac{c}{1 - m^2}} \right) : |x| \leq \frac{c}{\sqrt{1 - m^2}} \right\}$$

aplica-se isometricamente sobre a elipse

$$\frac{y^2}{\frac{1 + m^2}{(1 - m^2)^2} c^2} + \frac{x^2}{\frac{c^2}{1 - m^2}} = 1.$$

3. Para $m = 1$, obtemos

$$y = \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}.$$

E conseqüentemente,

$$z = \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}.$$

E assim, considerando a translação $(x, y, z) \mapsto \left(x, y + \frac{c}{2}, z - \frac{c}{2}\right)$, seguida da rotação, sobre o eixo x , $(x, y, z) \xrightarrow{R_1} \left(x, \frac{y + z}{\sqrt{2}}, \frac{z - y}{\sqrt{2}}\right)$, temos que a curva

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{2c} - \frac{c}{2}, \frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

aplica-se isometricamente sobre a parábola

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{2}c}.$$

4. Para $m > 1$, obtemos

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2 - 1}} + \frac{mc}{1 - m^2}$$

e

$$z = \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2 - 1}} + \frac{c}{1 - m^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considerando a translação $(x, y, z) \mapsto \left(x, y - \frac{mc}{1 - m^2}, z - \frac{c}{1 - m^2}\right)$ e a rotação, em torno do eixo dos x , $(x, y, z) \xrightarrow{R_m} \left(x, \frac{y + mz}{\sqrt{1 + m^2}}, \frac{z - my}{\sqrt{1 + m^2}}\right)$, temos que a curva

$$\mathbb{P} = \left\{ \left(x, \pm \frac{1}{\sqrt{m^2 - 1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2 - 1}} + \frac{mc}{1 - m^2}, \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \sqrt{x^2 + \frac{c^2}{m^2 - 1}} + \frac{c}{1 - m^2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}$$

aplica-se isometricamente sobre a hipérbole

$$\frac{y^2}{\frac{m^2 + 1}{(m^2 - 1)^2} c^2} - \frac{x^2}{m^2 - 1} = 1.$$

□

Finalizando o capítulo, tudo o que vimos acima, permite-nos concluir que

Teorema 2.3.1 *As elipses, as hipérbolas e as parábolas são curvas planas simples, isto é, sem autointerseções, e contínuas, que podem ser fechadas, no caso das elipses, e abertas, no caso das hipérbolas e das parábolas.*

Capítulo 3

As Leis de Kepler

Neste capítulo, nós apresentaremos a relação entre a primeira e a segunda leis de Kepler e as seções cônicas. A geometria do problema de Kepler é compreendida pelo levantamento do movimento do (x, y) -plano para o cone $r^2 = x^2 + y^2$.

3.1 A Conservação do Momento Angular

A segunda lei de Kepler é uma consequência da conservação do momento angular. Por definição, o *vetor momento angular* é dado por

$$\vec{M} = m (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}),$$

onde m é a massa do planeta e r é o raio-vetor do planeta relativo ao centro de movimento. Consideramos o *problema de campo de força central*, isto é, $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$, onde o campo vetorial \vec{F} é proporcional ao raio-vetor \vec{r} . Sendo assim, derivando relativamente à variável temporal, obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\vec{M}} &= m [\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}] \\ &= \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) \\ &= \vec{0},\end{aligned}$$

já que \vec{F} é proporcional ao raio vetor. Isto significa que o vetor momento angular é conservado. Além disso, mostra-nos que, num campo de força central, a trajetória do planeta é planar.

3.2 A Segunda Lei de Kepler

Já mencionamos a Segunda Lei de Kepler, na subseção 1.2.2. O que significa que a velocidade setorial é constante. Em um campo de força central, a conservação do momento angular mostra-nos que seu comprimento, que é dado por $\mu := m |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|$, é conservado. Sendo assim, a velocidade setorial, dada por $\frac{|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|}{2} = \frac{\mu}{2m}$, é conservada.

3.3 As Seções Cônicas e a Excentricidade

Conforme vimos nas proposições 2.1.2 e 2.2.1, e pela definição 2.3.1, podemos definir as seções cônicas como segue.

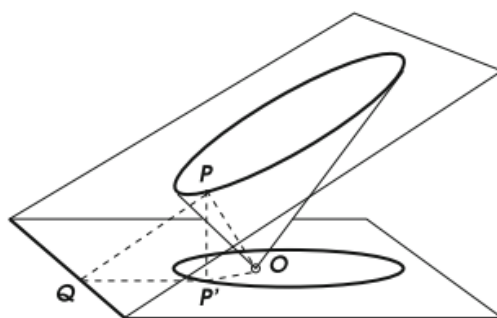
Definição 3.3.1 *O lugar geométrico dos pontos no plano com razão de proporcionalidade fixa, denominada de excentricidade, e denotada por e , entre as distâncias a um dado ponto, denominado de foco, e a uma dada reta, denominada de diretriz, é uma curva quadrática denominada de elipse, se $0 < e < 1$, de parábola, se $e = 1$ e de hipérbole, se $e > 1$.*

O caso em que $e = 0$, é o caso em que a elipse degenera-se num círculo, cuja diretriz *localiza-se no infinito*, conforme a equação da reta diretriz na proposição 2.1.3.

A seguir, vemos uma reformulação da primeira lei de Kepler em termos puramente geométricos. No espaço tridimensional, com coordenadas (x, y, r) , consideramos o cone de equação $r^2 = x^2 + y^2$.

Teorema 3.3.1 *A projeção de uma seção cônica no (x, y) -plano é uma curva quadrática, cujo um dos focos é o vértice do cone, a diretriz é a reta de intersecção do plano cortante com o plano $r = 0$ e a excentricidade é igual à tangente do ângulo entre os planos.*

Figura 3.1: O Foco, Diretriz e Excentricidade de uma Cônica



Fonte: [5]

Demonstração. Como a geratriz PO do cone $r^2 = x^2 + y^2$ faz 45° com o plano $r = 0$, ver figura 3.1, a distância de um ponto P do cone à sua projeção ortogonal P' no (x, y) -plano é igual à distância de P' ao vértice do cone O , isto é, $|PP'| = |OP'|$. Para pontos na mesma seção plana, conforme figura 3.1, a distância do ponto P' à reta diretriz, que é $|QP'|$, é proporcional ao comprimento do segmento $|OP'|$, cuja razão de proporcionalidade é $\tan \angle PQP'$, já que

$$|OP'| = |PP'| = \tan \angle PQP' \cdot |QP'|,$$

isto é, $|OP'| = e \cdot |QP'|$, onde $e = \tan \angle PQP'$, como queríamos. \square

3.4 A Primeira Lei de Kepler por Diferenciação

Seja um ponto movendo-se sobre a superfície do cone $r^2 = x^2 + y^2$ de tal forma que a projeção do mesmo no plano obedece à equação de movimento

$$\ddot{\vec{r}} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

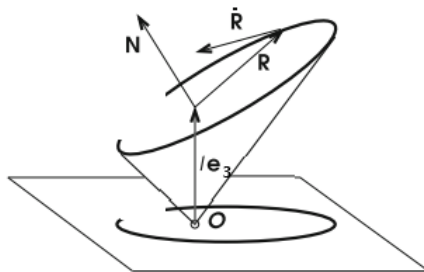
Este é o *problema de Kepler*. As soluções da equação do movimento do problema de Kepler são conhecidas como *as trajetórias keplerianas*. Observamos que o problema de Kepler é um problema de campo de força central, já que $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$. Sendo assim, o momento angular é conservado.

Levantando o vértice do cone de l unidades ao longo do eixo do cone, cuja direção é dada pelo vetor $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, e considerando \vec{R} a posição do ponto sobre o cone relativa ao extremo final do vetor $l\vec{e}_3$, conforme a figura 3.2, temos que

$$\vec{R} := \vec{r} + |\vec{r}| \vec{e}_3 - l \vec{e}_3.$$

Escolhendo o valor da velocidade setorial dado pela relação $l = \frac{\mu^2}{k m^2}$, temos, pela conservação do momento angular, que o mesmo l serve para todos os pontos cuja trajetória é dada por \vec{R} .

Figura 3.2: O Momento Angular Fictício



Fonte: [5]

Proposição 3.4.1 *No problema de Kepler no plano, cada trajetória, para o dado valor da velocidade setorial, quando levantada ao cone $r^2 = x^2 + y^2$, obedece à equação de movimento*

$$\ddot{\vec{R}} = -k \frac{\vec{R}}{|\vec{r}|^3}.$$

Demonstração. Derivando \vec{R} com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}} + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \vec{e}_3.$$

Derivando mais uma vez, chegamos a

$$\ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{r}} + \frac{\langle \ddot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|} \vec{e}_3 + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle}{|\vec{r}|} \vec{e}_3 - \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle^2}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_3.$$

Como a projeção obedece à equação $\ddot{\vec{r}} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, temos que

$$\ddot{\vec{R}} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{k}{|\vec{r}|^2} \vec{e}_3 + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle - \langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle^2}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_3.$$

Observando que

$$\langle \dot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \rangle \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle - \langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle^2 = |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}|^2 = \frac{\mu^2}{m^2} = kl,$$

temos que

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{k}{|\vec{r}|^2} \vec{e}_3 + \frac{kl}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_3 \\ &= -k \frac{\vec{r} + |\vec{r}| \vec{e}_3 - l \vec{e}_3}{|\vec{r}|^3} \\ &= -k \frac{\vec{R}}{|\vec{r}|^3}. \end{aligned}$$

□

Corolário 3.4.1 *O momento angular fictício $\vec{N} := m (\vec{R} \times \dot{\vec{R}})$ é conservado.*

Demonstração. Vejamos,

$$\dot{\vec{N}} = m (\dot{\vec{R}} \times \dot{\vec{R}}) + m (\vec{R} \times \ddot{\vec{R}}) = 0,$$

pois $\ddot{\vec{R}}$ é proporcional a \vec{R} . □

Em particular, a direção do vetor \vec{N} é conservada. Sendo assim, a trajetória está na seção do cone pelo plano que passa pelo ponto $l\vec{e}$ e é gerado pelos vetores \vec{R} e $\dot{\vec{R}}$ no plano $z = 0$.

Como uma primeira consequência da conservação do momento angular acima, obtemos a primeira lei de Kepler.

Corolário 3.4.2 *Quando levantado do plano para o cone, trajetórias keplerianas tornam-se seções planas do cone.*

Uma outra consequência é

Corolário 3.4.3 *As trajetórias Keplerianas com um valor fixo de velocidade setorial correspondem às seções do cone por planos que passam pelo mesmo ponto $l\vec{e}$ sobre o eixo do cone, onde $l = \mu^2/km^2$.*

Capítulo 4

As Esferas de Dandelin e as Seções Cônicas

Neste capítulo, nós daremos uma outra demonstração de que a interseção de um plano com um cone, de duas folhas, ou é uma elipse ou é uma parábola ou é uma hipérbole. Esta demonstração é devida ao matemático Dandelin, ver capítulo 1, seção 1.3.

Inicialmente, vejamos como construir a(s) *esfera(s) de Dandelin*, que são uma ou duas esferas que tangenciam simultaneamente o cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e o plano $z = my + c$, para cada $m > 0$ e $c > 0$. Para tanto, devido ao comportamento simétrico, basta considerarmos a folha do cone no semiespaço superior, isto é, para $z \geq 0$. Parece-nos bastante intuitiva a verificação de que sempre podemos obter as esferas de Dandelin. Vejamos, para $0 < m < 1$, inscrevemos duas esferas no cone, uma acima e a outra abaixo do plano. E então, ajustamos continuamente os raios das esferas até que elas tangenciem o plano. O tratamento para o caso em que $m \geq 1$, é totalmente análogo. Neste caso, temos apenas uma esfera, abaixo do plano $z = my + c$. Com isso, pelo menos intuitivamente, podemos garantir a construção das esferas de Dandelin.

Agora, passamos a descrever analiticamente as esferas de Dandelin. Inicialmente, observemos que, dado $\delta > 0$, a família de esferas $x^2 + y^2 + (z - \delta)^2 = \frac{\delta^2}{2}$ interceptam o cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ nos círculos $x^2 + y^2 = \frac{\delta^2}{16}$. Agora, para cada $m > 0$ e $c > 0$, vemos que

- Para $0 < m < 1$,

– Para $\delta_+ = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2} + \sqrt{1+m^2}}$, a esfera $x^2 + y^2 + (z - \delta_+)^2 = \frac{\delta_+^2}{2}$ tangencia o plano $z = my + c$, por baixo, no ponto $\left(0, -\frac{\delta_+ m}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}, \delta_+ \frac{1 + \sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}\right)$.

– Para $\delta_- = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2} - \sqrt{1+m^2}}$, a esfera $x^2 + y^2 + (z - \delta_-)^2 = \frac{\delta_-^2}{2}$ tangencia o plano $z = my + c$, por cima, no ponto $\left(0, \frac{\delta_- m}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}, \delta_- \frac{-1 + \sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}\right)$.

- Para $m \geq 1$, tomando $\delta = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{2} + \sqrt{1+m^2}}$, a esfera $x^2 + y^2 + (z - \delta)^2 = \frac{\delta^2}{2}$ tangencia o plano $z = my + c$, por baixo, no ponto $\left(0, -\frac{\delta m}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}, \delta \frac{1 + \sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}{\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}}\right)$.

Bem, a partir de agora, iremos utilizar as esferas de Dandelin, sem maiores detalhes.

Teorema 4.0.1 *Sejam \mathcal{C} um cone e α um plano que secciona \mathcal{C} . Então, a seção correspondente é*

(a) *Uma elipse, se α só intersecte uma folha de \mathcal{C} e não é paralelo a uma geratriz.*

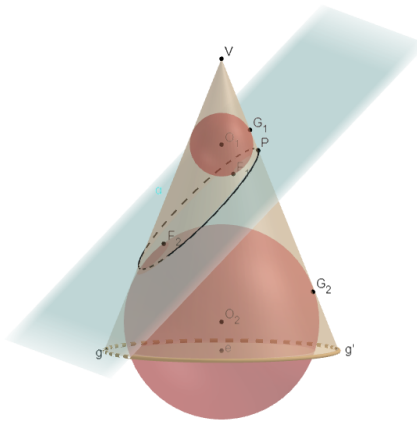
(b) *Uma parábola, se α só intersecte uma folha de \mathcal{C} e é paralelo a uma geratriz.*

(c) *Uma hipérbole, se α intersecte ambas as folhas de \mathcal{C} , mas não passa pelo vértice.*

Demonstração. Mostremos o primeiro item. Para $j = 1, 2$, consideremos $\Sigma_j = \Sigma_j(O_j, R_j)$ uma esfera de centro em O_j e de raio R_j , tangente ao plano α em F_j e à folha do cone, que α intersecta, em G_j (é o ponto de interseção da geratriz que passa por P com o círculo C_j), que pertencem a círculos C_j , digamos, de centros O'_j e de raios R'_j . Seja P um ponto da seção plana que é a interseção do plano α com o cone \mathcal{C} . Observando que PF_1 e PF_2 são tangentes às esferas Σ_1 e Σ_2 , respectivamente, como mostra a figura 4.1, temos que $|PG_j| = |PF_j|$. Sendo assim,

$$|PF_2| + |PF_1| = |PG_2| + |PG_1| = |G_1G_2|.$$

Figura 4.1: Elipse



Fonte: Autoria Própria

Observemos que o comprimento do segmento G_1G_2 não depende do ponto P sobre a seção cônica. Isto mostra que $|PF_2| + |PF_1|$ é constante. E assim, a seção cônica é uma elipse.

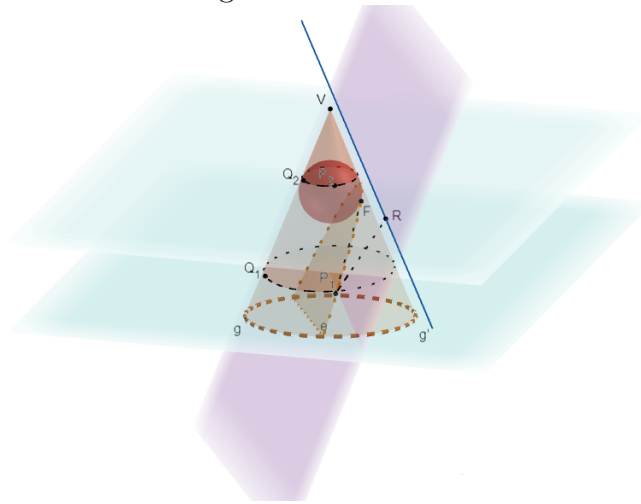
Vejamos o segundo item. Seja g a geratriz de \mathcal{C} em relação à qual α é paralelo. Consideremos $\Sigma(O, R)$ a esfera centrada sobre o eixo e , em O , tangente a α em F e à folha do cone que α intersecta, ver figura 4.2.

Sejam Γ_2 o círculo de interseção de Σ e \mathcal{C} , β_2 o plano que contém Γ_2 e d a reta de interseção de α e β_2 . Onde F é o foco e d é a diretriz da parábola de interseção de α e \mathcal{C} . Para ver isso, tomemos um ponto P_1 em $\alpha \cap \mathcal{C}$ e marque o ponto P_2 em que $\overleftrightarrow{VP_1}$ intersecta Σ , de sorte que $P_2 \in \beta_2$. Trace, por P_1 , o plano β_1 , paralelo a β_2 , e seja Γ_1 o círculo de interseção de β_1 e \mathcal{C} . Marquemos os pontos Q_1 e Q_2 , respectivamente, de interseção de β_1 e β_2 com g .

Como P_1P_2 e P_1F são tangentes a Σ , traçadas a partir de P_1 , temos que $|P_1F| = |P_1P_2|$. Por outro lado, sendo O_1 e O_2 , respectivamente, os centros de Γ_1 e Γ_2 , as congruências dos triângulos retângulos $VO_1P_1 \equiv VO_1Q_1$ e $VO_2P_2 \equiv VO_2Q_2$ garantem-nos que

$$|P_1P_2| = |P_1V| - |P_2V| = |Q_1V| - |Q_2V| = |Q_1Q_2|.$$

Figura 4.2: Parábola



Fonte: Autoria Própria

Agora, uma vez que α só intersecta uma folha de \mathcal{C} , e é paralelo a g , segue-se que $\alpha \perp (g, e)$. Mostremos este fato. Se α fosse paralelo a duas geratrizes distintas, digamos g_1 e g_2 , qualquer outra geratriz distinta destas intersectaria α . Traçamos um plano β perpendicular ao eixo do cone, e , que não passa pelo vértice do cone, V , que intersecta g_1 e g_2 , digamos em G_1 e G_2 , respectivamente. Considerando o círculo $\Gamma = \beta \cap \mathcal{C}$, escolhemos os pontos A_1 e A_2 em Γ distintos de G_1 e G_2 tais que as cordas A_1A_2 e G_1G_2 intersectam-se. Segue-se que as retas $\overleftrightarrow{A_1V}$ e $\overleftrightarrow{A_2V}$ intersectam o plano α em folhas distintas. Agora, consideremos γ o plano perpendicular ao plano α que contém o eixo e , e θ o plano paralelo a α que contém a geratriz g . Desta forma, $\gamma \perp \theta$. Se γ não contém g , tomamos g' a geratriz simétrica de g em $\gamma \cap \theta$. E então, α seria um plano paralelo às geratrizes distintas g e g' . E assim, como vimos acima, α intersectaria as duas folhas do cone, o que contraria a hipótese de que α intersecta somente uma folha do cone. Logo, γ contém g , e $(g, e) = \gamma \perp \alpha$, como queríamos demonstrar. Seguidamente, como também temos $\beta_2 \perp (g, e)$, segue que $d \perp (g, e)$. Por fim, tracemos por P_1 a paralela a g contida em α , o que é possível, uma vez que $\alpha \parallel g$, e seja R seu ponto de interseção com d . Como $d \perp g$, temos $\overrightarrow{P_1R} \perp d$. Ademais, como $\overrightarrow{Q_1Q_2} = g // \overrightarrow{P_1R}$, $P_1, Q_1 \in \beta_1$ e $R, Q_2 \in \beta_2$, temos que $|Q_1Q_2| = |P_1R|$. Assim, temos finalmente

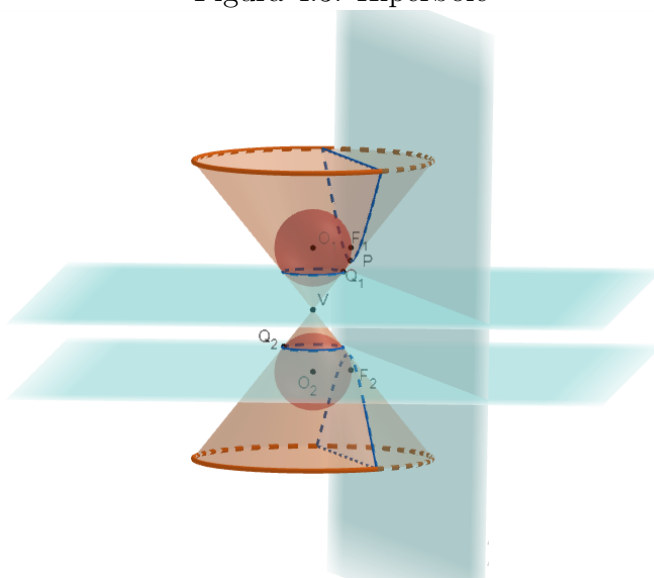
$$|P_1F| = |P_1P_2| = |Q_1Q_2| = |P_1R| = \text{distância de } P_1 \text{ a } d,$$

como queríamos demonstrar.

Mostremos o último item. Suponhamos um cone de duas folhas \mathcal{C} e um plano α interceptando \mathcal{C} em ambas as folhas. Para $j = 1, 2$, sejam $\sum_j(O_j; R_j)$ as esferas centradas em e , inscritas no cone \mathcal{C} , uma em cada uma das folhas. Consideremos F_j os pontos de interseção de α com cada uma das esferas. Como as esferas são tangentes a \mathcal{C} , elas interceptam \mathcal{C} em círculos, digamos, C_j , de centros O'_j e de raios R'_j . Seja P um ponto da seção plana, que é a interseção de α com o cone \mathcal{C} . Seja Q_1 e Q_2 os pontos de interseção da geratriz que passa por P com os círculos C_1 e C_2 , respectivamente. Como $\overrightarrow{PQ_1}$ e $\overrightarrow{PF_1}$ são tangentes a \sum_1 , temos que $|PQ_1| = |PF_1|$. Analogamente, concluímos que $|PQ_2| = |PF_2|$.

Sejam α_1 e α_2 planos paralelos que contém os círculos C_1 e C_2 , respectivamente, como mostra a figura 4.3. Desta forma, quaisquer dois pontos, um em C_1 e outro em C_2 , que estão ao longo da mesma geratriz, o segmento determinado por eles terá o mesmo comprimento do segmento que une Q_1 a Q_2 .

Figura 4.3: Hipérbole



Fote: Autoria Própria

Portanto, $||PF_1| - |PF_2|| = ||PQ_1| - |PQ_2|| = |Q_1Q_2| = \text{constante}$. Logo, a curva é uma hipérbole.

□

Capítulo 5

O Parabolóide de Revolução e as Seções Cônicas

Usaremos as definições de elipses e hipérbolas para localizar o segundo foco de uma órbita kepleriana. Inicialmente, relembremos alguns resultados sobre os parabolóides de revolução. Como sabemos um parabolóide de revolução é o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de seu foco, que está sobre o eixo de revolução, e do plano diretriz perpendicular ao mesmo eixo. Consequentemente, *o plano tangente ao parabolóide num determinado ponto é o lugar dos pontos equidistantes do foco e do pé da perpendicular baixada do ponto de tangência*. Para justificar essa afirmação, consideremos o plano de todos os pontos equidistantes do foco e do pé da perpendicular baixada do ponto de tangência. Qualquer outro ponto deste plano está mais distante do pé, e consequentemente do foco, do que da diretriz. E assim, não pertence ao parabolóide. Sendo assim, o plano tem apenas um ponto em comum com o parabolóide. Decorre dessa caracterização de plano tangente a um parabolóide de revolução uma propriedade famosa da óptica geométrica para espelhos parabólicos, que é: *os raios que incidem no espelho parabólico paralelos ao eixo de revolução refletem-se no foco*. De fato, como *o plano tangente ao parabolóide num dado ponto é o plano mediador do segmento que une o foco ao pé da perpendicular baixada do dado ponto*, segue-se que a direção normal ao plano tangente, que é a direção da reta suporte do segmento que une o foco ao pé da perpendicular baixada do ponto de tangência, faz ângulos iguais com a direção do foco e a direção do eixo.

E ainda, é imediato que a família de parabolóides de revolução dada por $z = \frac{1}{4\alpha}(x^2 + y^2) + \alpha$, de parâmetro $\alpha > 0$, é tangente à folha do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no semiespaço $z \geq 0$, na família de círculos $x^2 + y^2 = 4\alpha^2$. E mais, considerando o plano $z = my + c$, para $0 < m \neq 1$, com $c \neq 0$, tomando $\alpha = \frac{c}{1 - m^2}$, temos que o parabolóide de revolução

$$z = \frac{1 - m^2}{4c}(x^2 + y^2) + \frac{c}{1 - m^2}$$

tangencia o cone no círculo $x^2 + y^2 = \frac{4c^2}{(1 - m^2)^2}$ e o plano $z = my + c$ no ponto $\left(0, \frac{2mc}{1 - m^2}, \frac{1 + m^2}{1 - m^2}c\right)$.

Com isso, concluímos que

Proposição 5.0.1 *Dados $c \neq 0$ e $0 < m \neq 1$, existe um único parabolóide de revolução que tangencia à folha do cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ no semiespaço $z \geq 0$ e o plano $z = my + c$.*

O próximo resultado será fundamental na demonstração do teorema sobre órbitas keplerianas

elípticas e hiperbólicas.

Lema 5.0.1 *Os Parabolóides de revolução inscritos no cone $z^2 = x^2 + y^2$ têm o plano $z = 0$ como diretriz e o centro do círculo de tangência como foco.*

Demonstração. No círculo de tangência os planos tangentes fazem 45° com a direção do eixo. E assim, o centro do círculo é o foco, e o plano $z = 0$ é o plano diretriz. \square

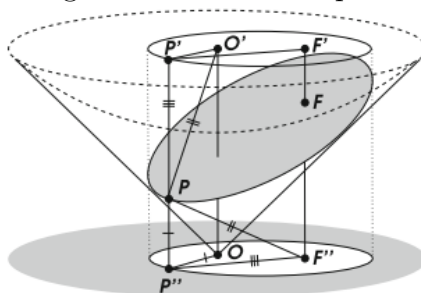
O próximo resultado é fundamental para a descrição das órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas, como veremos mais adiante.

Teorema 5.0.1 *Seja o parabolóide de revolução inscrito no cone que tangencia um dado plano secante ao cone. Então, a projeção ortogonal do ponto de tangência no plano horizontal é o segundo foco da seção cônica projetada, onde o vértice do cone é o primeiro foco.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos o caso em que o plano secante ao cone é dado por $z = my + c$, com $c > 0$ e $0 < m < 1$, que é o caso ilustrado pela figura 5.1. Observemos que o círculo de interseção do parabolóide com o cone está acima da seção plana, já que $(1 + m^2)\alpha < 2\alpha$, para $\alpha = \frac{c}{1 - m^2} > 0$. Seja P um ponto da seção do cone pelo plano tangente ao parabolóide no ponto F . Consideremos P' e P'' as projeções de P nos planos horizontais através do foco O' do parabolóide e do vértice O do cone. Analogamente, F' e F'' são as projeções do ponto F . Como $|PO'| = |PF''|$ e $|P'O'| = |P''O| = |P''P|$, temos que os triângulos retângulos $PP'O'$ e $F''P''P$ são congruentes, pelo caso de congruência cateto-hipotenusa. Como $|P''F''| = |P'P|$, temos que

$$|P''O| + |P''F''| = |P''P| + |P'P| = |P'P''| = |O'O|.$$

Figura 5.1: Órbita Elíptica



Fonte: [5]

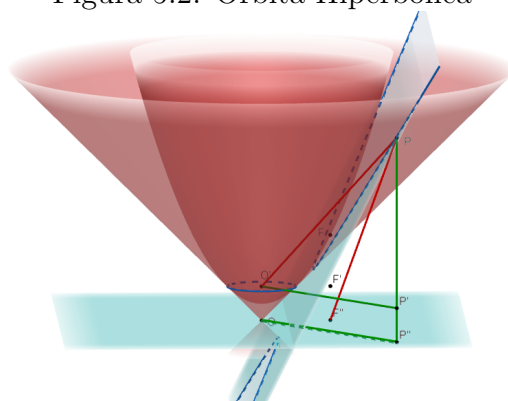
E isso mostra que a seção cônica é uma elipse, que no plano $z = 0$ tem focos O e F'' .

A demonstração para o caso em que $c < 0$ e $m > 1$ é completamente análoga à anterior, observando que o círculo de interseção do parabolóide com o cone está abaixo da seção plana (como mostra a figura 5.2), já que $(1 + m^2)\alpha > 2\alpha$, para $\alpha = -\frac{c}{m^2 - 1} > 0$. \square

Como consequências imediatas do teorema acima, descrevemos completamente as órbitas keplerianas elípticas e hiperbólicas, localizando os seus segundos focos.

Corolário 5.0.1 *Órbitas keplerianas elípticas com comprimento fixo de seu eixo maior correspondem às seções do cone por planos tangentes ao mesmo parabolóide de revolução inscrito no cone, cujo comprimento é igual à distância do foco do parabolóide ao plano diretriz.*

Figura 5.2: Órbita Hiperbólica



Fonte: Autoria Própria

De forma análoga, temos que

Corolário 5.0.2 *Órbitas keplerianas hiperbólicas com comprimento fixo de seu eixo real correspondem às seções do cone por planos tangentes ao mesmo parabolóide de revolução inscrito no cone, cujo comprimento é igual à distância do foco do parabolóide ao plano diretriz.*

Capítulo 6

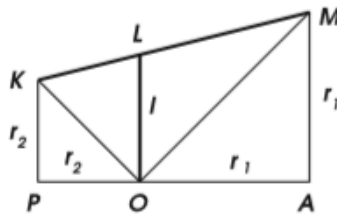
Terceira Lei de Kepler

O período T de revolução é descrito como a razão da área delimitada pela órbita e pela velocidade setorial. Já vimos que a velocidade setorial é dada por $\frac{\mu}{2m}$, que elevada ao quadrado dá-nos $\frac{\mu^2}{4m^2}$, que por sua vez é o mesmo que $\frac{kl}{4}$, já que $l = \frac{\mu^2}{km^2}$. Também, sabemos que a área de uma elipse com semieixos a e b , com $a > b$, é igual a πab . Com essas informações podemos obter o quadrado do período da seguinte maneira

$$T^2 = \frac{A^2}{\frac{\mu^2}{4m^2}} = \frac{A^2}{\frac{kl}{4}} = \frac{(\pi ab)^2}{\frac{kl}{4}} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{kl} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{k l}.$$

O ponto da órbita em que o planeta está mais afastado do Sol é chamado de *afélio*, e aquele em que está mais próximo é dito *periélio*. Sejam r_1 e r_2 as respectivas distâncias destes pontos ao Sol. Na figura 6.1, vemos a seção axial do cone sobre o eixo principal de uma órbita elíptica.

Figura 6.1: Seção Axial do Cone



Fonte: [5]

A proposição a seguir descreve as relações aritmético-geométricas entre os números a , b e l e as distâncias r_1 e r_2 , conforme figura 6.1.

Proposição 6.0.1 *Os semieixos maior e menor, que são a e b , respectivamente, de uma órbita elíptica e a altitude do plano de secção correspondente sobre o vértice do cone, denotado por l , são, na mesma ordem, a média aritmética, a média geométrica e a média harmônica entre r_1 e r_2 , isto é*

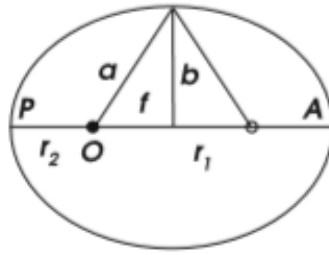
$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}, \quad b = \sqrt{r_1 r_2} \quad e \quad l = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Demonstração. A primeira média segue diretamente do fato de que $r_1 + r_2 = 2a$, já que o afélio e o periélio estão sobre a órbita. Para a segunda, usando o teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + f^2$,

ver figura 6.2. E assim, observando que $f = \frac{r_1 - r_2}{2}$, segue-se que $a^2 = b^2 + \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2$. Donde

$$\begin{aligned} 0 < b &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Figura 6.2: A Elipse de Semieixos a e b , com $a > b$



Fonte: [5]

Por último, observando novamente a figura 6.1, temos que a área do triângulo retângulo KOM é igual a área do trapézio $KPAM$ menos a soma das áreas dos triângulos retângulos KPO e OAM , ou seja, a área do triângulo retângulo KOM é igual a

$$\frac{(r_1 + r_2)^2}{2} - \left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}\right) = r_1 r_2.$$

Além disso, usando semelhança de triângulos, tem-se que

$$r_1 r_2 = \frac{l}{2} (r_1 + r_2).$$

De fato, basta observar que

$$\frac{|QA|}{r_1} = \frac{|QA| + r_1}{l} = \frac{|QA| + r_1 + r_2}{r_2},$$

onde Q é o ponto de interseção das retas suportes dos segmentos KM e PA . E isso, implica que

$$\frac{r_1}{l - r_1} = \frac{r_2}{r_2 - l}.$$

E então, temos que

$$l = \frac{2 r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}},$$

como queríamos. \square

Decorre da proposição a interessante relação $al = b^2$, significando que a média geométrica entre dois valores é igual a média geométrica entre sua média aritmética e a sua média harmônica. Sendo

assim,

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \frac{a^2 b^2}{l} = \frac{4\pi^2}{k} a^3.$$

E assim, estabelecemos a terceira lei de Kepler, que diz *o quadrado do período de revolução do planeta é diretamente proporcional ao cubo do semieixo maior de sua órbita.*

Capítulo 7

A Energia Total do Problema de Kepler

A energia total, que é a soma da energia cinética e da energia potencial, é dada por

$$E := m \frac{|\dot{\vec{r}}|^2}{2} - \frac{m k}{|\vec{r}|}.$$

Afirmamos que a energia total do problema de kepler é conservada. Isto significa que $\dot{E} = \frac{dE}{dt} = 0$. Vejamos,

$$\begin{aligned}\dot{E} &= m \left(\langle \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}} \rangle + k \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^3} \right) \\ &= m k \left(- \left\langle \dot{\vec{r}}, \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right\rangle + \frac{\langle \dot{\vec{r}}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^3} \right) \\ &= 0,\end{aligned}$$

como queríamos.

Como no afélio e no periélio o vetor velocidade $\dot{\vec{r}}$ é perpendicular ao vetor posição \vec{r} , pela conservação da velocidade setorial, concluímos que $|\vec{r}'| |\dot{\vec{r}}| = |\vec{r}' \times \dot{\vec{r}}| = \frac{\mu}{m}$. Donde

$$\begin{aligned}\frac{m}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 - m k \frac{1}{|\vec{r}|} - E &= 0 \\ \frac{m}{2} \left(\frac{\mu}{|\vec{r}'| m} \right)^2 - m k \frac{1}{|\vec{r}|} - E &= 0 \\ \frac{\mu^2}{2m} \left(\frac{1}{|\vec{r}'|} \right)^2 - m k \left(\frac{1}{|\vec{r}|} \right) - E &= 0\end{aligned}$$

Sendo assim, as distâncias $r = r_1$ e $r = r_2$, relativas ao afélio e ao periélio, são soluções da equação quadrática

$$\frac{\mu^2}{2m} \left(\frac{1}{r} \right)^2 - m k \left(\frac{1}{r} \right) - E = 0.$$

Usando as fórmulas de Viète, que relacionam os coeficientes de um polinômio às raízes da equação correspondente, temos que

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2m^2 k}{\mu^2} \text{ e } \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} = -\frac{2m E}{\mu^2}.$$

E assim,

$$\frac{2}{l} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2m^2 k}{\mu^2} \quad \text{e} \quad r_1 + r_2 = -\frac{mk}{E}.$$

A primeira igualdade mostra o que já sabemos, que para um valor fixo da velocidade setorial, o plano secante acerta o eixo do cone no mesmo ponto. Enquanto a segunda igualdade mostra que as órbitas elípticas têm energia total negativa, e que o valor de $\frac{E}{m}$ é determinado pelo semieixo maior da órbita.

Corolário 7.0.1 *Órbitas com valor fixo de energia total, bem como órbitas com período de revolução fixo, correspondem a seções do cone por planos tangentes ao mesmo parabolóide de revolução inscrito no cone.*

Capítulo 8

As Sessões Cônicas e sua Abordagem no Ensino Básico

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) [15]:

A Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Seguindo esta linha de pensamento, é que se faz necessário a busca por novas técnicas de ensino e aprendizagem, que despertem o interesse do educando. Com esse intuito, é que nesse trabalho viajamos nas curvas traçadas pelas órbitas planetárias, tão estudadas por Johannes Kepler.

Se questionarmos a um estudante recém concluinte do ensino médio: o que você sabe sobre as Seções Cônicas? É muito provável que as respostas sejam incompletas, cheias de dúvidas, ou não teríamos resposta, pois temos como base a maneira como é abordado esse conteúdo atualmente no Ensino Básico. Isso fica perceptível ao analisarmos os livros didáticos aprovados pelo MEC no Guia do Livro Didático, PNLD, 2018 [6]. Como o livro didático é o mecanismo de pesquisa mais usado pelo aluno e representa um norteador para o professor, foi por essa razão, que analisamos os livros citados no Guia de Livros Didáticos 2018. É importante frisar que tais análises não têm como objetivo apontar as falhas dos livros, mas acrescentar possibilidades de termos um material complementar para o ensino e aprendizagem de Seções Cônicas no Ensino Básico.

Podemos observar que o conteúdo Seções Cônicas só aparece no final do último ano do Ensino Médio. Suspeitamos que seja esse um dos motivos para que esse assunto sequer seja abordado na sala de aula. Provavelmente por essa razão, os alunos não dão o devido valor ao tema. Mas, os estudos apontam que nem sempre as questões em torno das Seções Cônicas foram pouco abordadas. Já houve tempos em que era muito mais aprofundado, onde se buscava explorar todos os aspectos do assunto.

8.1 Análise dos Livros Didáticos

1. **Matemática: ciência e aplicações.** **Autores:** *Gelson Iezzi, David Degenszajn, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périco*, ver [8].

No livro de volume 3, no capítulo 4, os autores começam apresentando as cônicas como seções do cone. A partir daí, analisam separadamente cada uma delas. Primeiramente, com exemplos do cotidiano que nos remetem a cada cônica, suas definições focais, seus traçados, feitos com o uso de um barbante, seus elementos principais e a dedução de suas equações reduzidas.

Posteriormente, através da translação de eixos, são deduzidas as equações das cônicas que possuem eixos paralelos aos eixos coordenados e centro fora da origem. O livro traz uma seção de aplicações, na qual foi dedicada a elipse, com o título “As órbitas dos planetas”, onde aborda de forma resumida o contexto histórico do modelo heliocêntrico e define a excentricidade. Para por fim, tratar superficialmente da história das órbitas elípticas.

2. **Matemática: Interação e Tecnologia.** **Autor:** *Rodrigo Balestri*, ver [1].

As cônicas são apresentadas no capítulo 6, do Volume 3. O autor inicia o capítulo resumindo, em um parágrafo, um pouco da história das seções cônicas. Depois, dedica-se a circunferência, para por fim tratar das cônicas, apresentando-as como as diferentes formas da sombra de uma bola iluminada por uma lanterna, em um local pouco iluminado.

Mais adiante, o autor afirma que as cônicas podem ser obtidas a partir da intersecção de um plano α com a superfície de um cone reto. Daí, aborda cada uma separadamente, como no livro anterior, trazendo as suas definições focais, como construí-las usando um barbante, os seus elementos principais, e define excentricidade, diferente da abordagem feita no livro 1, que consta na seção de aplicações. E então, deduz as equações reduzidas, com o centro na origem ou fora dela.

Em seguida, o autor sugere suas construções no programa GeoGebraPrim, mostrando o passo a passo. E fecha o capítulo com um texto informativo sobre o telescópio refletor.

3. **#Contato Matemática.** **Autores:** *Jacqueline Garcia e Joamir de Souza*, ver [17].

No livro do 3º ano, as cônicas são tratadas dentro do capítulo 3. Os autores começam abordando de forma superficial a sua história, citam rapidamente que são obtidas a partir de seções da superfície de um cone duplo. Depois, tratam cada uma separadamente, com uma ligeira definição, uma construção com o barbante, os seus elementos, e as suas equações são deduzidas. E finalmente, numa das questões, os autores fazem menção ao cometa Halley, em que são mencionadas as leis de Kepler.

4. **Matemática para compreender o mundo.** **Autores:** *Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz*, ver [16].

No capítulo 7, da unidade 2, as cônicas são apresentadas pela definição de Apolônio. E depois, cada uma é estudada separadamente. Na oportunidade, são dadas as definições focais, os seus elementos principais, a relação fundamental, a excentricidade e as equações reduzidas. Os autores trazem em um texto complementar a construção com um fio. A elipse e a hipérbole são consideradas com eixos contidos nos eixos coordenados e centro na origem. No caso da parábola, supõe-se eixos paralelos aos eixos coordenados com centro fora da origem. No tópico “Uma hipérbole especial”, demonstra-se que uma hipérbole representa o gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, para todo $x \neq 0$.

5. **Matemática: contexto e aplicações.** **Autor:** *Luiz Roberto Dante*, ver [3].

O capítulo sobre seções cônicas, no terceiro volume, unidade 3, capítulo 6, o autor inicia relacionando as curvas com as seções cônicas. Diferente dos livros anteriores, primeiramente aborda as parábolas. Em seguida, aborda as outras cônicas, dando as definições focais, o seus elementos principais, e deduzindo as suas equações reduzidas. No tópico “Matemática e tecnologia”, mostra como construir a parábola e a elipse, utilizando o Geogebra. O autor faz uma observação quando define uma hipérbole equilátera, destacando como curiosidade uma dessas curvas, como famosa, por descrever a relação entre a pressão e o volume de um gás perfeito à temperatura constante, que é a lei de Boyle. Para fechar o capítulo, usa um texto muito interessante, intitulado “Kepler, a elipse e as proporções”, onde expõe as três leis de Kepler e a excentricidade.

6. **Matemática - Paiva.** **Autor:** *Manoel Paiva*, ver [14].

As cônicas são apresentadas na segunda parte do terceiro volume como seções do cone. O autor faz menção ao exemplo da iluminação do fecho de luz de uma lanterna na parede. Depois de dadas as definições focais e seus elementos principais, as equações reduzidas são deduzidas. O autor também aborda a construção com a ajuda de um barbante. Em seguida, estuda-se os casos em que os eixos da cônica são paralelos aos eixos coordenados do sistema cartesiano, com o centro fora da origem. Ao definir parábola, o autor relembra que no volume 1, a curva foi estudada como gráfico da função quadrática. Mas, agora será feito um estudo mais aprofundado dessa cônica.

7. **Conexões com a Matemática.** **Autor:** *Fabio Martins de Leonardo*, ver [11].

No sétimo capítulo, do Volume 3, o autor dá alguns exemplos de aplicações das cônicas. Depois, apresenta o exemplo da sombra de uma bola iluminada por uma lanterna, num ambiente escuro, para mostrar as diferentes curvas. As cônicas são apresentadas como seções do cone, e cada uma é estudada separadamente, pela definição focal, os seus elementos, a excentricidade e a dedução da equação reduzida de cada uma, com centro na origem e eixos sobre os eixos coordenados. O autor define parábola antes de hipérbole. No final do capítulo, traz um texto sobre “O fogão solar”, permitindo a interdisciplinaridade com a física.

Dos livros citados no Guia de Livros Didáticos 2018, o único que não conseguimos obter para fazer sua análise, foi o livro **Quadrante - Matemática**, dos autores *Diego Prestes e Eduardo Chavante*.

É importante salientar que o conteúdo sobre seções cônicas não é incluído em alguns currículos de ensino médio, ou quando incluídos não são abordados em sala de aula. Com isso, pode-se perder a oportunidade de levar ao conhecimento dos alunos um conteúdo matemático clássico, com tantas importantes aplicações. Por isso, a importância desse trabalho, para ser utilizado como um material complementar, no qual respondemos algumas perguntas sobre o tema, tais como: *Porque chamamos de seções cônicas? Onde está o cone das seções cônicas? O que é excentricidade?*. Dentre outros questionamentos que são tão importante para um significativo entendimento das seções cônicas.

Além de utilizar o software Geogebra nas nossas figuras, com o intuito de mostrar que podemos utilizar a tecnologia como suporte para o ensino, contribuindo para aumentar a motivação dos alunos para a aprendizagem. O Geogebra é um software que combina a geometria e a álgebra com simétrica

importância. Sabemos que infelizmente não é todo mundo que sabe utiliza-lo, mas é fácil conseguir na internet um tutorial, pois foge do nosso objetivo ensinar como usá-lo.

O material que elaboramos, vai além da escola básica e das aulas de Matemática. Ele pode ser um apoio para o professor, servir de consulta para os alunos, tanto no ensino médio como no ensino superior, nos cursos de Matemática, de Física, de Astronomia e de Engenharia. Por ser vasta a utilidade e a importância do tema, é que fomos motivados a elaborar esse trabalho.

Conclusão

No Ensino Médio, o ensino das seções cônicas pode se tornar mais prazeroso para os estudantes, se enriquecida com atividades mais concretas e/ou investigativas, que estimulem o senso crítico do alunado.

Foi possível perceber que a abordagem do conteúdo em questão, quando ocorre, na maioria das vezes, nada mais é que decorar fórmulas para manuseá-las em atividades, seguindo o raciocínio dos exemplos em sala.

Vimos também que a maioria dos livros didáticos abordam o assunto sempre de maneira semelhante.

Com nosso trabalho, nos faz pensar que todo conteúdo a ser ensinado em sala de aula, se for devidamente contextualizado, torna o ambiente de aprendizagem mais enriquecedor, e faz com que o educando tenha uma aprendizagem mais significativa, e que com isso veja com outros olhos a necessidade do Ensino de Matemática.

Outro fator importante é transparecer para o aluno que o seu professor tem domínio, não só no conteúdo abordado pela sua disciplina, mas também de fatos históricos e aplicações do cotidiano. Pois, nós educadores devemos nos preparar a todo momento para cada novo conteúdo ministrado em sala. Isto significa que um bom professor deve sempre saber além do que ensina.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, “aprender Matemática no Ensino Médio deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência, e que a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática, e de um saber pensar matemático”. Isso fica exemplificado ao ser observado o conteúdo de seções cônicas, pois seu ensino isolado não permite uma ampla exploração. Deixando de lado ligações importantes com a Física, a Astronomia, dentre outras áreas do conhecimento.

Durante a realização deste trabalho, pudemos perceber que ao buscarmos uma maneira de motivar o nosso alunado, encontraremos fatos históricos, pessoas, recursos e informações que podem enriquecer uma aula sobre um determinado tema. Por isso, preparamos este material complementar para o ensino das Seções Cônicas, que tem como objetivo tornar o ensino-aprendizagem do tema algo mais atrativo. Esperamos ter instigado o leitor a refletir sobre sua prática didática e sobre a importância de incrementá-la. Vale frisar que isto exigirá um tempo considerável no começo por parte do educador, mas que com o tempo será recompensado. E assim, terá a sensação de dever cumprido, pois conseguirá uma aprendizagem mais efetiva e significativa.

Portanto, que esse trabalho seja usado de forma proveitosa por professores em suas salas de aula, e por alunos que buscam ampliar seu conhecimento, não só de Matemática, mas também de Física, de Astronomia, dentre outros.

Referências Bibliográficas

- [1] BALESTRI, Rodrigo. *Matemática: interação e tecnologia*: Volume 3, 2ª edição. São Paulo: Leya, 2016.
- [2] BRISOLA, Danielle Frozi. *Teorema de Dandelin*. Disponível em: < https://sca.proformat-sbm.org.br/sca.v2/get_tcc3.php?id=94334 >. Acesso em: 04 jan. 2020.
- [3] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto & aplicações*: 3ª edição. São Paulo: Atica, 2016.
- [4] GEIGES, Hanjorg. *The Geometry of Celestial Mechanics*. Cambridge University Press: University of Cologne, 2016.
- [5] GIVENTAL, Alexander. *Kepler's Laws and Conic Sections*. Nova York: IMS, 2015.
- [6] GUIA DIGITAL. Disponível em: < <http://www.fnde.gov.br/pnld-2018/> >. Acesso em: 27 mai.2020.
- [7] HISTÓRIA DAS CÔNICAS. Disponível em: < <https://curvasearquitectura.wordpress.com/historia-das-conicas/> >. Acesso em: 03 jan. 2020.
- [8] IEZZI, Gelson... et. al. *Matemática: ciências e aplicações*: Volume 3, 9ª edição. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [9] LEIS DE KEPLER. Disponível em: < https://pt.wikipedia.org/wiki/Leis_de_Kepler >. Acesso em: 27 out. 2019.
- [10] LEIS DE KEPLER. Disponível em: < <https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/GravitacaoUniversitaria/> >. Acesso em: 28 out. 2019.
- [11] LEONARDO, Fabio Martins de. *Conexões com a matemática*: 3ª edição. São Paulo: Moderna, 2016.
- [12] MOURÃO, Ronaldo Rogério de Freitas. *Kepler. A descoberta das Leis do Movimento Planetário*: Coleção Imortais da Ciência. São Paulo: Ed. Odysseus, 2003.
- [13] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*: Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [14] PAIVA, Manoel Rodrigues. *Matemática: Paiva*: 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2010.
- [15] PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> >. Acesso em: 26 mai. 2020.

- [16] SMOLE, Kátia Stocco. . . et. al. *Matemática para compreender o mundo 3*: 1^a edição. São Paulo: Saraiva, 2016.
- [17] SOUZA, Joamir Roberto de. . . et. al. *#Contato Matemática*: 3^o ano, 1^a edição. São Paulo: FTD, 2016.