UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Felipe Ramos Costa

Sobre a boa docência matemática e o conceito de número: de um olhar natural para uma perspectiva real, com vislumbres de transcendência.

Juiz de Fora

2020

Felipe Ramos Costa

Sobre a boa docência matemática e o conceito de número: de um olhar natural para uma perspectiva real, com vislumbres de transcendência.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Jair Koiller

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Costa, Felipe Ramos.
Sobre a boa docência matemática e o conceito de número : de um olhar natural para uma perspectiva real, com vislumbres de transcendência. / Felipe Ramos Costa. – 2020.
99 f. : il.

Orientador: Jair Koiller
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2020.

1. Educação. 2. Docência 3. Conceituação. 4. Números. I. Koiller, Jair. Título.

Felipe Ramos Costa

Sobre a boa docência matemática e o conceito de número: de um olhar natural para uma perspectiva real, com vislumbres de transcendência.

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 13 de outubro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jair Koiller - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Eduard Toon
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Drª. Maria Helena Cautiero Horta Jardim
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Dedico este trabalho aos meus pais Agenor Alfredo de Andrade Costa e Marlene Ramos. Toda conquista “pessoal”, sempre será “nossa”.

AGRADECIMENTOS

Preliminarmente, considerando a possibilidade da existência de alguma inteligência suprema; metafísica e onipresente no Cosmos, vulgo Deus, para tal entidade direciono os primeiros agradecimentos uma vez que, nesse viés, há de existir relação de causalidade para com a virtude da vida e, especificamente, para com a consecução do presente trabalho. Em seguida, devo agradecer aos meus primeiros e mais marcantes Educadores: meus pais, Agenor Alfredo de Andrade Costa e Marlene Ramos. Grato por toda proteção; diretrizes Éticas e estímulos psicoafetivos que sustentam, e sustentarão, qualquer “ser” ou “vir a ser” em minha existência.

Num sentido mais amplo, devo estender meu agradecimento anterior à todos os Educadores, mentores inspiradores, que participaram, ou participam, do meu eterno ciclo dialético de formação. Seria inviável citar todos nominalmente. Focando no contexto do presente trabalho, agradeço a todos meus professores do PROFMAT, a todos meus professores do departamento de Matemática da UFJF.

Em especial, agradeço ao meu orientador prof. Dr. Jair Koiller pela integridade; carinhosa solicitude e empenho que empreendeu ao longo da minha orientação. Nossas relações dialógicas sempre foram muito agradáveis; significativas; acolhedoras e inspiradoras. Sempre disposto ao diálogo, sempre disposto a agregar, o professor Jair Koiller, em que pese a notória formação específica de Matemático profissional, também é um Educador Matemático nato pelo simples fato de, em suas interações, reunir as virtudes esperadas dos Educadores.

Devo explicitar também específicos agradecimentos ao Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann Júnior. Exímio Educador, inspirou minha formação docente desde a graduação em Matemática. Demonstrou-me em sua cotidiana *práxis*, a indispensável necessidade, e superioridade moral, de ter-se na docência um discurso Ético harmonizado para com a prática, com a ação. Agradeço também aos demais membros da insígne Banca Examinadora, prof. Dr. Eduard Toon e Profª. Drª. Maria Helena Cautiero Horta Jardim, pelo privilégio de poder submeter-me ao vosso juízo.

Agradecimentos especiais ao Professor Paulo José Bonfim Gomes Rodrigues, profundo conhecedor de LaTex, a quem devo reconhecer valiosas ajudas na formatação do presente trabalho.

Por fim, mas não menos importante, registro meus eternos agradecimentos para a prof.ª Maria das Graças de Oliveira Santana, diretora da unidade escolar em que estive lotado ao longo do PROFMAT. Sempre muito solícita para com minha estafante realidade laboral e de mestrando, a professora Maria das Graças nunca mediu esforços para ajudar-me na adequação de meus horários, viabilizando meu mestrado.

Finalizando, registro meus agradecimentos para a CAPES, a qual financiou este trabalho. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil(CAPES)- Código de Financiamento 001.

“Kronecker (...) É sua a famosa frase: “Deus criou os números inteiros, todo o resto é criação do homem”.(...)” (apud EVES, 2011, p.616)

RESUMO

O presente trabalho inicia propondo uma reflexão acerca das características de uma boa docência matemática. Assim, considerando fundamentalmente o pensamento de Elon Lages Lima e Ubiratan D' Ambrosio, aspectos técnicos - de natureza epistêmica - são firmados numa integração dialética com aspectos metatécnicos para, em seguida, sobre a ótica da componente da Conceituação, desenvolver uma digressão acerca do conceito de número. Nesse viés, parte-se dos números naturais e importantes teoremas e resultados estruturais são firmados. Em seguida, e sempre num espírito de contínuo ganho progressivo de complexidade dialética, discorre-se sobre os inteiros. Ato contínuo, a via da comensurabilidade, ou da incomensurabilidade, entre segmentos de reta é a chave conceitual para visualizar-se os reais: sendo o Teorema Fundamental da Aritmética um motor para tal chave e, dessa forma, alimenta-se um espírito de coesão entre os conceitos de números. Infinitos exemplos de números irracionais são fornecidos. Dois irracionais famosos, e e π, são analiticamente considerados. Por fim, discorre-se brevemente sobre números algébricos e transcendentes e cita-se o poderoso Teorema sobre Construções Geométricas.

Palavras-chave: Educação. Docência. Conceituação. Números.

ABSTRACT

The present work begins proposing a reflection about the characteristics of a good mathematical teaching. Thus, considering fundamentally the thought of Elon Lages Lima and Ubiratan D 'Ambrosio, technical aspects - of epistemic nature - are secured in a dialectic integration with metaepistemic aspects. Then, on the optics of the component one of the “Conceituação”, we develop a digression about the concept of number. So, we start from natural numbers and some of its important theorems and structural results are signed. Then, and always in a spirit of continuous progressive gain of dialectical complexity, we talk about the integers. Therefore, the path of commensurability, or incommensurability, between line segments is the conceptual key used to visualize the real numbers: the Fundamental Theorem of Arithmetic being an engine for such key and, in this way, it fosters a spirit of cohesion between the concepts of numbers. The work provides infinite examples of irrational numbers. Two famous irrationals, e and π, are analytically considered. Finally, we briefly discuss algebraic and transcendent numbers and mention the powerful Theorem on Geometric Constructions.

Keywords: Education. Teaching. Evaluation. Numbers.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Educação brasileira não é adequada. A Educação Básica está em profunda desarmonia com o desejável.

Tais afirmações categóricas são tão triviais, legítimos fatos notórios, para qualquer brasileiro da contemporaneidade, que constituem-se em premissas *erga omnes* acerca da apreensão do *ethos* educacional brasileiro. Apesar de nossos históricos avanços no sentido da universalização do acesso ao ensino, os desafios atuais são essencialmente de natureza qualitativa. Evidentemente, a Matemática, enquanto um específico ramo do saber, insere-se dentro desse contexto de caos qualitativo generalizado da realidade educacional. Tal caos é de natureza complexa, com múltiplas variáveis, que vão desde raízes sócio-políticas (*qual* e *como* tem sido a relação do Estado brasileiro para com a Educação?) até raízes técnicas, relativas aos objetos de ensino. A seara do presente trabalho, a delimitação aqui, portanto, será a de refletir sobre aspectos "técnicos".

Nesse viés, inicia-se, no capítulo 2, a reflexão sobre o significado da *boa* docência matemática e seus conexos predicados desejáveis. Valendo-se fundamentalmente da *intelligentsia* nacional, concepções de Elon Lages Lima e Ubiratan D'Ambrósio são invocadas como lentes fundamentais para visualizar-se as características genéricas desejáveis num bom professor de matemática. Mais que isso: as características gerais de um bom Educador, conceito que extrapola o de professor, são expostas.

Armado com tais considerações gerais, o trabalho encorpa delimitação mais técnica, no sentido de focar a digressão sobre objetos matemáticos e inicia-se, no capítulo 3, a reflexão sobre o conceito de "número".

No capítulo 4, o conceito de "número natural" é desenvolvido. "Pérolas" desse campo, tais como o Teorema Fundamental da Aritmética e o Teorema da Divisão Euclidiana são detidamente analisados.

O capítulo 5, dedicado aos "números inteiros", generaliza algumas de tais "pérolas" dos naturais para os inteiros dando uma noção de didática expansão conceitual, e progressivo ganho de complexidade dialética, do "conceito de número".

Nesse espírito, do progressivo ganho de complexidade, chega-se ao capítulo 6: dedicado aos números racionais, a via da comensurabilidade entre segmentos de reta é a chave conceitual utilizada. Valendo-se dessa poderosa noção geométrica, a "numerização" dos racionais é justificada, assim como suas canônicas operações aritméticas.

Mantendo sempre o espírito de progressivo ganho de complexidade, chega-se, no capítulo 7, à noção de "número irracional" enquanto antítese dos números racionais: ou seja, pela via da secular noção de incomensurabilidade entre segmentos de reta. Por fim, após infinitos exemplos de números irracionais, foca-se em dois irracionais famosos mas mal compreendidos no ensino: o número de Euler (e) e o número Pi (π). Seus conceitos e irracionalidade, tão banalizados no ensino nacional, são considerados detida e analiticamente. Termina-se tal capítulo expondo uma interessante demonstração para a irracionalidade de π, proporcionada pelo matemático canadense Ivan Niven (NIVEN, 1947).

O capítulo 8, trata brevemente de uma profícua categorização para os números: a divisão em números algébricos e transcendentes. O clássico argumento de Georg Cantor para a “altura” das equações algébricas, chave para a prova da existência não enumerável de números transcendentes, é adaptado para a moderna linguagem da Análise Real. O objetivo dessa digressão é citar o profundo, e altamente sofisticado, “Teorema sobre Construções Geométricas”. Assim, sinaliza-se a “chave de ouro” para a moderna resolução dos três clássicos e milenares problemas gregos de construtibilidade com régua e compasso (quais sejam, a trissecção de um ângulo; a duplicação do volume do cubo e a quadratura do círculo).

Por fim, duas considerações gerais acerca desse trabalho são essenciais.

A primeira consideração é sobre o estilo de escrita. Conforme dizia o célebre escritor francês George-Louis Leclerc, o conde de Buffon: “o estilo é o próprio homem”. O estilo do presente trabalho, profundamente dissertativo, é uma escolha consciente e reflete, como não poderia deixar de ser, inspirações e vivências do autor. Nessa linha, cita-se o clássico “What is mathematics?”(COURANT; ROBBINS, 2000) de Richard Courant e Herbert Robbins: um clássico internacional de divulgação matemática, com um formato profundamente dissertativo. Tal obra tem teor paradigmático para o autor da presente dissertação e, por isso, a busca pela conformação da natureza dissertativa. Notas de rodapé, para além da mera especificação bibliográfica, são estrategicamente utilizadas para complementar materialmente assuntos desenvolvidos.

A segunda consideração é quanto ao contexto de aplicação e receptor imaginado para o presente trabalho. Quanto ao teor matemático aqui desenvolvido - o conceito de número - acredita-se que ele é adequado, *com os devidos filtros*, para alunos do Ensino Médio. Mais especificamente, para alunos do primeiro ano do Ensino Médio, porquanto esse seja o momento em que tradicionalmente reflete-se sobre “conjuntos numéricos” antes de adentrar-se no terreno das funções. Porém, **em hipótese alguma**, o presente trabalho recomenda aplicação *ipsis litteris* do que desenvolve: cada sala de aula é *orgânica*. Qualquer normatização rígida de curso *a priori* só pode resultar em fracasso, uma vez que o organicismo dos contextos discentes invoque distintos interesses, vivências, habilidades e necessidades. O professor de matemática, do respectivo contexto discente em análise, é, e deve ser, a autoridade competente no caso concreto para *sentir* e *analisar* o ambiente discente, suas especificidades e necessidades. Assim, o receptor ideal, que o presente trabalho imagina, é o docente que lida com o ensino básico. Portanto, o docente, ao lidar com seus específicos alunos, é a autoridade competente para refletir o *quanto* e *como* aplicar das ideias aqui desenvolvidas.

2 REFLEXÕES SOBRE UMA IDEAL DOCÊNCIA MATEMÁTICA

Nesse capítulo, será feita uma reflexão acerca de aspectos genericamente entendidos, conforme alguns autores, como necessários para o bom processo de ensino e aprendizagem matemática.

Não há a pretensão de exaurir-se tais aspectos, mas sim a de expor - com lastro em pensadores consagrados nacionalmente - necessidades, o que não implica em suficiência, para a boa docência e discência matemática.

Nesse diapasão, inicia-se estabelecendo as considerações do matemático brasileiro Elon Lages Lima[1]. Continuamente, considera-se, numa perspectiva talvez um tanto quanto "dialética", ponderações educacionais do educador matemático brasileiro Ubiratan D' Ambrósio[2]. Ademais, agregou-se, pontualmente, uma perspectiva crítica do educador matemático europeu Ole Skovsmose[3].

Os pensamentos de Elon Lages Lima e de Ubiratan D' Ambrósio, constituem a essência do marco teórico pedagógico para o presente trabalho e tais pensadores foram selecionados pela reputação acadêmica que gozam perante a *intelligentsia* matemática e educacional brasileira.

Por fim, faz-se uma breve reflexão sobre o fenômeno da avaliação, conforme o pensamento do professor Mauro Rabelo[4].

2.1 MATEMÁTICA E ENSINO: PERSPECTIVAS DE ELON LAGES LIMA

Na obra "Matemática e Ensino"(LIMA,2007), temos uma profícua síntese da subjetiva perspectiva do matemático e professor Elon Lages Lima acerca dos aspectos necessários para um ensino *ideal* da Matemática.

Em que pese o grau de subjetivismo de tal perspectiva, expressa pelo qualificador *ideal*, o fato é que as ponderações do professor Elon buscam identificar aspectos tecnicamente necessários, mas sem pretensão de suficiência, para a boa docência matemática. Tal *modus operandi* dessas ponderações, evidencia-se reiteradamente não só ao longo da leitura sistemática e integrada da obra "Matemática e Ensino"(LIMA,2007), mas também por colocações expressas do autor

---

[1] Renomado matemático e pesquisador brasileiro. Dentre seus inúmeros feitos, nota-se seus esforços pessoais para consolidar, em parceria com a Sociedade Brasileira de Matemática, uma ampla e robusta bibliografia matemática nacional. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/ElonLagesLima.

[2] Renomado educador matemático e pesquisador brasileiro, destaca-se, dentre outros feitos, por suas contribuições à Etnomatemática. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/UbiratanD%27Ambrosio.

[3] Pesquisador dinamarquês com renomadas contribuições na construção do pensamento de uma Educação Matemática Crítica.
Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mathematics_pedagogy.

[4] Professor brasileiro com extensa experiência(RABELO,2013) em avaliações de larga escala, tais como ENEM e ENADE, e na coordenação e capacitação de elaboradores e revisores de itens para tais avaliações.

quando, por exemplo, faz-se uma cisão paradigmática entre os binômios “planejamento de curso” e “didática das aulas”.

> Quando se pensa em ensinar Matemática, dois aspectos que se complementam precisam ser considerados separadamente. Poderíamos chamá-los o global e o local, o genérico e o específico, o macro e o micro, a estratégia e a tática, o planejamento e a execução, a estrutura do curso e a didática das aulas. De didática não trataremos aqui.(LIMA, 2007, p.139)

Portanto, uma vez que o pensamento do professor Elon Lages Lima está deliberadamente focado em aspectos necessários - mais precisamente, aspectos *matematicamente* necessários - para o bom processo de ensino e aprendizagem matemática, qualquer crítica no sentido de incompletude para com uma “macro visão educacional”, não seria logicamente razoável: pois não há pretensão, no pensamento de Elon Lages Lima(LIMA,2007), de exaurimento na delimitação dos condicionantes da boa aprendizagem.

Para os que vivenciam - ou já vivenciaram - o âmbito das ciências exatas na docência do Ensino Básico, as considerações do professor Elon Lages Lima não causam nenhuma aversão[5]: a bem da verdade, as considerações soam perfeitamente razoáveis e sedutoras ao bom senso do *educador médio* e, portanto, demonstram-se dignas de apreensão e integração na *práxis* docente.

Na perspetiva do professor Elon Lages Lima (LIMA,2007), o ensino *ideal* da Matemática deve ser desenvolvido numa integração *adequada* de três ”componentes”, as quais ele denomina de: “Conceituação”, “Manipulação” e “Aplicações”.

O que se entende precisamente por cada uma dessas três componentes, é bem delimitado e estabelecido pelo autor. A seguir, expõe-se o sentido de cada uma dessas componentes.

2.1.1 A componente da conceituação

Para a componente “conceituação”, o professor Elon Lages Lima estabelece:

> A *conceituação* compreende a formulação correta e objetiva das definições matemáticas, o enunciado preciso das proposições, a prática do raciocínio dedutivo, a nítida conscientização de que conclusões sempre são provenientes de hipóteses que se admitem, a distinção entre uma afirmação e sua recíproca, o estabelecimento de conexões entre conceitos diversos, bem como a interpretação e a reformulação de ideias e fatos sob diferentes formas e termos. É importante ter em mente e destacar que a conceituação é indispensável para o bom resultado das aplicações. (LIMA, 2007, p.140)

[5] É necessário destacar que,nesse ponto do trabalho, estamos na mesma vibração mental do professor Elon: interessados em pensar na boa aprendizagem matemática somente pela perspectiva do objeto de ensino, da Matemática. O trabalho caminhará para uma “macro visão educacional” quando considerar os educadores matemáticos já citados.

Nota-se portanto, que no pensamento de Elon Lages Lima, a componente “conceituação” abrange diversos aspectos, possuindo um teor polissemântico: mais do que definições precisas dos objetos matemáticos, por “conceituação” também entende-se a prática do raciocínio dedutivo com seus aspectos interpretativos correlatos, a diferenciação entre hipótese e tese numa proposição matemática etc. Ademais, enfatiza-se que a “conceituação” é indispensável para o bom resultado das “aplicações”.

Mais especificamente, podemos afirmar que o professor Elon Lages Lima explicita aspectos da “Conceituação” que julga mais pertinentes: “A formulação correta e objetiva das definições matemáticas”(LIMA, 2007, p.178); “O emprego bem dosado do raciocínio dedutivo, deixando clara a distinção entre o que supõe (hipótese) e o que se quer provar (tese), diferenciando uma proposição de sua recíproca (...)”(LIMA, 2007, p.180) e “O entendimento e a percepção de que algumas noções e certas proposições podem ser reformuladas ou interpretadas de diferentes formas ou em diferentes termos, reconhecendo assim situações equivalentes (...)”(LIMA, 2007, p.180).

Aquele que já vivenciou o magistério brasileiro na Educação Básica, rápida e flagrantemente apreende o quão sistemática, reiterada e intensa é a carência do aspecto *Conceituação* no processo de Ensino e Aprendizagem Matemática.

Constitui fato público e notório - e o pensamento do professor Elon Lages Lima ratifica (LIMA,2007) - que no cotidiano da Educação Básica brasileira foca-se muito em “Manipulações” e eventualmente tenta-se “Aplicações” - essas duas componentes serão melhor significadas ao longo do trabalho - sem um devido cuidado com o aspecto conceitual: manipula-se e aplica-se, portanto, num vácuo ou fragilidade de ideias, conceitos. Compreensível, portanto, que o ensino matemático nacional, regra geral, não poderia ser tecnicamente próspero.

Aquele que vivencia o Ensino Básico, trivialmente sabe que se selecionarmos aleatoriamente e perguntarmos para um estudante do Ensino Básico, do Fundamental ou Médio, qual seria o conceito matemático de “área” - o que é “área”? - possivelmente, se alguma resposta vier para além de um atônito silêncio, tender-se-á a observar, na melhor das hipóteses, respostas do tipo “para retângulos, área é base vezes altura”. Dificilmente existe a apreensão abstrata, genérica, da “área” enquanto uma medida da “extensão de uma superfície”. O aluno que supostamente “aprendeu” sobre áreas, tende a pensar tal conceito em conexão restrita com formas geométricas e manipulações específicas. Tal tendência discente de responder já denuncia, por si, o quanto que a “Matemática” ensinada tende a ser focada em manipulações. Mais do que uma trivialidade empírica para Educadores do Ensino Básico, essa obsessão pelas Manipulações - e carência de Conceituação - é uma premissa diagnóstica do pensamento de Elon Lages Lima (LIMA,2007) acerca do ensino nacional de matemática.

A carência conceitual fica evidente mesmo diante dos objetos matemáticos mais elementares possíveis: O que é número? O que é um número racional? O que é um número irracional? Focos conceituais desse tipo, tendem a ser substituídos por obsessões algoritmizadas do tipo "como se opera aritmeticamente esses números" (ainda que não haja produção significativa de sentido para o que sejam os objetos a serem operados).

Porém, a vivência no Ensino Básico demonstra - e o pensamento do professor Elon Lages Lima ratifica (LIMA,2007) - o quão nociva é a ausência de uma precisa conceituação dos objetos matemáticos nas mentalidades discentes: gera insegurança, por vezes confusão mental, vácuo de ideias matemáticas significativas e a incongruente crença de que matemática se resume a um amontoado de regras, de algoritmos a serem esterilmente memorizados. Nesse viés, por exemplo, frequentemente alunos concluem o Ensino Médio sem sequer saber operar corretamente frações. Alguns poderiam ficar perplexos com tamanho "fracasso" do sistema educacional. Porém, parece uma tragédia bem coerente com a lei da causalidade: como se operar significativamente objetos que não se apreenderam a essência? Como manipular e aplicar satisfatoriamente sob vácuos de conceitos?

A crença no ensino "matemático" enquanto memorização estéril de um "amontoado de regras", fórmulas e algoritmos expressa o auge de sua tragédia nessas situações frustrantes onde o estudante, futuro cidadão, depara-se com dificuldades humilhantes em executar operações matemáticas elementares necessárias ao pleno exercício da cidadania. A tragédia pode ser maior se o estudante se aperceber do grau de atrofiamento intelectual, das potencialidades cognitivas, ao qual tal "matemática" estéril lhe submeteu.

A carência conceitual, para além dos conceitos matemáticos individualizados, também é flagrante, como seria logicamente de se esperar, na seara da conexão entre os conceitos. Nessa linha, temos os teoremas matemáticos que, no Ensino Básico, tendem a ser tratados como "legítimos axiomas" de validade sustentável tão somente pelo argumento de autoridade docente.

Consideremos, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. Pergunte para um aluno, preferencialmente que saiba manipular o teorema de Pitágoras, o "porquê" de sua validade. Provavelmente, o "porquê" será uma crença *a priori* na validade do teorema. Assim, o fundamento do teorema jaz na mente discente como um "axioma", distorcendo a proposição num mero algoritmo lastreado tão somente na autoridade docente.

Por que não se ensina uma fundamentação para o Teorema de Pitágoras que vá além da crença no argumento de autoridade? Existem diversas demonstrações para o Teorema de Pitágoras fundadas na noção de área[6], com forte apelo visual portanto, que são muito mais acessíveis e atraentes do que as fundadas no teorema de Tales.

Não é necessário, inclusive é inadequado, o rigoroso formalismo do matemático profissional no Ensino Básico. Mas combater a carência da "conceituação" não consiste em preenchê-la com tal formalismo, mas sim driblar as crenças no mero argumento de autoridade. As diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, fundadas na noção área, não são formalmente as mais rigorosas, porém são muito profícuas porquanto estimulem a criatividade e permitam um honesto

---

6 Muitas dessas demonstrações, para o Teorema de Pitágoras, estão bem registradas nas obras do professor Elon Lages Lima. Nessa linha, vide (LIMA,2006) e (LIMA,2007).

convencimento discente para além do mero argumento de autoridade docente: tais estímulos são salutares para sanar no Ensino Básico a carência da conceituação!

Seria então a "Conceituação" a solução para todos os males técnicos no ensino da matemática? Em hipótese alguma! Elon Lages Lima, jamais trata a componente da "Conceituação" como uma *panaceia* para o ensino. De fato, o autor (LIMA,2007) sempre reitera que a conceituação deve ser apreendida numa integração com as manipulações e aplicações. É justamente nesse viés, por exemplo, que Elon Lages Lima pondera acerca do fracasso pedagógico do "Movimento da Matemática Moderna" no Brasil como um exemplo paradigmático de um excesso destemperado e estéril da Conceituação, o qual deve ser evitado:

> Durante o período da chamada Matemática Moderna (décadas de 60 e 70), ocorreu no ensino uma forte predominância da conceituação em detrimento das duas outras componentes. Quase não havia lugar para as manipulações e muito menos para as aplicações. Por um lado, a Matemática que então se estudava nas escolas era pouco mais do que um vago e inútil exercício de generalidades, incapaz de suprir as necessidades das demais disciplinas científicas e mesmo do uso prático do dia-a-dia. (...) Um exemplo flagrante da falta de objetividade (...) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. (...) Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática. (LIMA, 2007, p.141)

Estabelecida a importância e extensão semântica da componente "Conceituação", e salvaguardada a tal integração com as "Manipulações" e "Aplicações", estaria Elon Lages Lima recomendando a aplicação do rigoroso método dedutivo axiomático - *o modus operandi* dos matemáticos profissionais - para o Ensino Básico? Definitivamente, não! Tal compreensão estaria profundamente equivocada, uma vez que o próprio autor explicitamente defende uma aplicação *moderada* de tal *o modus operandi*, do rigor matemático:

> Evidentemente as demonstrações pertencem à componente Conceituação. Elas devem ser apresentadas por serem parte essencial da natureza da Matemática e por seu valor educativo. A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade. Por esse motivo, não se deve demonstrar o que é intuitivamente evidente, o que todos aceitam sem hesitação. (Exemplo: que uma reta tem no máximo dois pontos em comum com uma circunferência dada.) Se demonstrar é uma forma de convencer por meio da razão, para que perder tempo provando algo do qual todos já estão convencidos? Também não se devem provar resultados que, embora não sejam de forma alguma óbvios, necessitam, para serem demonstrados, de argumentos e técnicas difíceis, fora do alcance dos alunos, como o Teorema Fundamental da Álgebra (...). Por outro lado, certos fatos matemáticos importantes não são intuitivamente evidentes mas possuem demonstrações fáceis e elegantes. Sem dúvida, o exemplo mais conhecido é o Teorema de Pitágoras, do qual devem ser dadas pelos menos duas das inúmeras demonstrações conhecidas. (LIMA,2007,p.143)

Foquemos no seguinte trecho: “A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade”(LIMA, 2007, p.143). Eis a essência da concepção do professor Elon Lages Lima acerca do “rigor” razoável para o Ensino Básico. Tal concepção será uma das premissas fundamentais do presente trabalho. Portanto, quanto ao rigor matemático, o que Elon Lages Lima defende expressamente é justamente a vedação ao simples “argumento de autoridade” como fundamento de validade para proposições, para ideias matemáticas. Não se trata, definitivamente, de uma nostalgia para com o rigor metodológico do Movimento da Matemática Moderna. Qualquer compreensão crítica ao professor Elon Lages Lima nesse sentido, não é, portanto, razoável.

A seguir, pensemos em algumas situações para melhor explicitar o que o presente trabalho - lastreado no pensamento de Elon Lages Lima (LIMA,2007)- entende por “rigor moderado”, rigor adequado ao Ensino Básico.

Partamos do conceito de “área”.

O que há de “matematicamente rigoroso” - no sentido do matemático profissional - em se dizer que “área é uma medida da extensão de uma superfície”? Tecnicamente, nada. Mas para fins de Ensino Básico, uma conceituação nestes termos é perfeitamente salutar e pragmaticamente adequada: infinitamente superior a uma argumentação fundada na simples autoridade. Tenhamos sempre em mente que “A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade” (LIMA, 2007, p.143).

E o conceito de número racional? Seria pertinente no Ensino Básico desenvolver - tal como os matemáticos profissionais - as adequadas noções de relações e classes de equivalência, sobre conjuntos dos inteiros, para chegar-se ao conceito purista de número racional? Não! Evidente que isto é absolutamente inadequado para o Ensino Básico: a noção de comensurabilidade entre segmentos, de forte apelo geométrico, é uma via conceitualmente adequada - a qual será tratada em momento oportuno neste trabalho.

E o conceito de número irracional? Um exposição intelectualmente honesta para o Ensino Básico necessita dos tais “cortes de Dedekind” ou das “sequências de Cauchy”? Novamente, evidente que não! Tais vias seriam absolutamente inadequadas. O famoso e secular problema grego clássico da incomensurabilidade entre lado e diagonal de um quadrado é um ponto de partida honesto e adequado para a conceituação dos números irracionais, a nível do Ensino Básico. Isso também será tratado oportunamente no presente trabalho.

Por fim, e o Teorema de Pitágoras? Porque insistir nas cansativas e enfadonhas tradicionais demonstrações, via Teorema de Tales, se existem tantas outras vias, com profundo apelo visual, geométrico, mais simples e elegantes? Vale a pena salvaguardar uma via cansativa e enfadonha em nome de uma pretensão de formalismo artificial? Penso que não. Mas o que, definitivamente, não tem valor algum é a fundamentação de verdades matemáticas em “argumentos de autoridade”.

Por vezes, existirão algumas situações nas quais o convencimento de algum resultado matemático possa ser um tanto quanto tecnicamente "inacessível" pelas mais diversas vias imagináveis, no nível elementar - nesse sentido, o professor Elon (LIMA, 2007) cita o Teorema Fundamental da Álgebra como um exemplo. Para esses casos extremos e pontuais, o uso da autoridade, como último recurso, pode ser "irresistível"[7].

O que deve ser tido como inaceitável, e isso deve ser interiorizado pelo bom educador matemático, é fazer do "argumento de autoridade" uma metodologia, um *modus operandi* de ensino, um recurso sistemático: pois isso perverte profundamente o caráter dedutivo da Matemática, distorcendo-a num amontoado de algoritmos estéreis de significância oca, vazia de sustentação epistêmica e embrutecedora da cognição matemática discente[8].

2.1.2 A componente da manipulação

Com relação a componente da "Manipulação", Elon Lages Lima conceitua:

> A *manipulação*, de caráter principalmente (mas não exclusivamente) algébrico está para o ensino e o aprendizado da Matemática assim como a prática dos exercícios e escalas musicais está para a música (ou mesmo como o repetido treinamento dos chamados "fundamentos"está para certos esportes, como o tênis e o voleibol). A habilidade e a destreza no manuseio das equações, fórmulas e construções geométricas elementares, o desenvolvimentos de atitudes mentais automáticas, verdadeiros reflexos condicionados, permite ao usuário da Matemática concentrar sua atenção consciente nos pontos realmente cruciais, poupando-lhe de perda de tempo e energia com detalhes secundários.(LIMA,2007,p.140)

Certamente, conforme cirurgicamente identificado pelo professor Elon Lages Lima, o desenvolvimento dessas "reflexos condicionados" constituem num dos aspectos necessários para a boa aprendizagem Matemática, porquanto esteja intimamente ligado com um dos atributos fundamentais da inteligência: a capacidade de distinguir o essencial do acessório, o "crucial" versus o "secundário".

Ademais, o aspecto da manipulação, por constituir-se numa exigência de observância a regramentos específicos, consubstanciando a "destreza", estimula bons hábitos mentais tais como a concentração, o foco, essenciais para a consecução de regramentos específicos.

Conforme já discorrido, aquele que vivencia o contexto do Ensino Básico, provavelmente, há de convir que a manipulação é o aspecto mais difundido no cotidiano do ensino e aprendizagem

[7] Mesmo assim, convém a busca por argumentar-se pela plausabilidade, ao menos, do resultado utilizado. No caso do Teorema Fundamental da Álgebra, por exemplo, há bibliografia nesse sentido (LIMA, et al, 2006), onde elegantemente, a nível elementar, é feita uma argumentação pela plausibilidade da validade do Teorema Fundamental da Álgebra.

[8] Tal percepção de Elon Lages Lima acerca do conceito de rigor para o ensino matemático é análoga à de muitos matemáticos com projeção internacional, inclusive. Como exemplo, têm-se o matemático russo Vladimir Igorevich Arnold. Em 1997, Arnold proferiu, no *Palais de la découverte* - Palácio da Descoberta, Paris - um clássico discurso acerca de aspectos conceituais e de rigor pertinentes ao ensino da matemática. Disponível em: https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/ munsteg/arnold.html.

matemática. Nesse sentido, harmônicas são as palavras do professor Elon Lages Lima ao afirmar que “A manipulação é, das três, a componente mais difundida nos livros-textos adotados em nossas escolas”(LIMA, 2007, p.142). Porém, tal constatação deve ser feita com pesar. Pois as manipulações, apesar de essenciais, podem se tornar tóxicas, para o bom ensino matemático, se usadas de forma desequilibrada para com as outras duas componentes (Conceituação e Aplicações). Nesse viés, alerta o professor Elon Lages Lima:

> abundam nas salas de aula, nas listas de exercícios e nos exames as operações com elaboradas frações numéricas ou algébricas, os cálculos de radicais, as equações com uma ou mais incógnitas, as identidades trigonométricas e vários outros tipos de questões que, embora necessárias para o adestramento dos alunos, não são motivadas, não provêm de problemas reais, não estão relacionadas com a vida atual, nem como as demais ciências e nem mesmo com outras áreas da Matemática. (LIMA,2007,p.142)

Para aquele que vivencia o cotidiano do magistério básico, as colocações do professor Elon firmam-se com altíssimo grau de lucidez e pertinência. Infelizmente, o excesso de “Manipulação”, as manipulações estéreis, ainda é a componente mais difundida no cotidiano escolar: basta abrir um típico livro didático, qualquer que esteja disponível numa biblioteca escolar, para se verificar centenas e centenas de exercícios matemáticos repetitivos, que exigem pouca ou nenhuma criatividade, que flagrantemente “exercitam” tão somente uma operacionalização simbólica algoritmizada dos conceitos matemáticos. Conceitos os quais, frequentemente, os alunos não apreenderam de forma significativa. Conceitos os quais, frequentemente, estão lastreados no “argumento de autoridade” docente.

A presença do excesso de manipulações é tão flagrante na realidade do magistério que, para além de sua materialização em exercícios repetitivos dos livros didáticos, ela também expressa-se no senso comum da consciência coletiva. Que educador matemático nunca ouviu assertivas populares do tipo “Se Fulano é bom em matemática, então fulano é bom em fazer contas”?. Talvez, essa seja a evidência trivial mais cabal do excesso de manipulações na realidade nacional do ensino matemático.

A consciência coletiva, o senso comum, tende a associar habilidades matemáticas à destreza na consecução de algoritmos. E isso diz muito sobre o tipo de ensino matemático que temos. Nesse viés, as considerações do professor Elon são, mais uma vez, harmônicas com a realidade:

> A presença da manipulação é tão marcante em nosso ensino que, para o público em geral (e até mesmo para muitos professores e alunos), é como se a Matemática se resumisse a ela. Isto tem bastante a ver com o fato de que o manuseio eficiente de expressões numéricas e símbolos algébricos impõe a formação de hábitos mentais de atenção, ordem e exatidão porém não exige criatividade, imaginação ou capacidade de raciocinar abstratamente. (LIMA, 2007, p.142)

Por fim, é necessário enfatizar que o teor crítico aqui discorrido não se trata, definitivamente, de estigmatizar as "manipulações em si". Trata-se, a bem da verdade, de uma crítica quanto ao excesso, uma crítica às "manipulações demais". O professor Elon Lages Lima explicita isso quando afirma que "Deve ficar bem claro que os exercícios de manipulação são imprescindíveis mas precisam ser comedidos, simples, elegantes e, sempre que possível, úteis para o emprego posterior"(LIMA,2007,p.143).

2.1.3 A componente das aplicações

Por fim, chegamos na terceira componente necessária para o bom processo de ensino e aprendizagem Matemática conforme o pensamento do professor ELon Lages Lima: Aplicações. A componente das "Aplicações" também é explicitamente bem definida pelo autor:

> As *aplicações* são empregos das noções e teorias da Matemática para obter resultados, conclusões e previsões em situações que vão desde problemas triviais do dia-a-dia a questões mais sutis que surgem noutras áreas, quer científicas, quer tecnológicas, quer mesmo sociais. As aplicações constituem a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e necessário, desde os primórdios da civilização até os dias de hoje e certamente cada vez mais no futuro.(LIMA, 2007, p.140)

Portanto, as aplicações seriam empregos de conceitos e técnicas - manipulações - matemáticas. Sendo tal emprego **sempre** marcado por uma finalidade de resolução de problemas: seja de natureza pragmática, seja de natureza científica.

O hábito da resolução de problemas matemáticos extrapola a conquista imediatista da solução e possui significância pedagógica complexa, porquanto estimule a criatividade e auto-estima. Nesse sentido, afirma o professor Elon Lages Lima:

> Como as entendemos, as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender. (LIMA, 2007, p.140)

Assim como nas outras componentes, as "Aplicações" devem ser calibradas numa integração trinomial equilibrada com as "Conceituações" e "Manipulações". Evidentemente, a busca por tal equilíbrio, constitui-se num legítimo desafio docente cujo o específico balanceamento, inevitavelmente, deve ser dado em função do contexto discente subjetivo em análise, depende do caso concreto. É sempre importante salientar que, no pensamento de Elon Lages Lima, nenhuma dessas três componentes será, por si, uma *panaceia* pro ensino de matemática. Nesse sentido, temos o conceito de "aplicações significativas", ou "aplicações adequadas", do professor Elon:

> As aplicações constituem para muitos alunos de nossas escolas, a parte mais atraente (ou menos cansativa) da Matemática que estudam. (...) Encontrar aplicações significativas para a matéria que está expondo é um desafio e deveria ser uma preocupação constante do professor (...)

> Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai começar a ser ensinada. É muito importante que o enunciado do problema não contenha palavras que digam respeito ao assunto que vai ser estudado naquele capítulo. (LIMA, 2007, p.144)

Foquemos a reflexão sobre a diretiva que estipula que “Cada novo capítulo do curso deveria começar com um problema cuja solução requeresse o uso da matéria que vai começar a ser ensinada”(LIMA, 2007, p.144).

Quantos docentes da matemática, considerando a realidade do magistério nacional, exercitam tal condunção, tal *modus operandi*? É fato notório, para aquele que lida com a Educação Básica, que, infelizmente, a realidade contemporânea ainda é a de se tratar o ensino matemático como uma tentativa de mera transmissão de informações, de conhecimento. Mais grave ainda: tentativa de mera transmissão *desmotivada* de informações, porquanto não haja o exercício generalizado do *modus operandi* supracitado.

Nesse sentido, interpretando tal realidade do magistério com base no pensamento de Elon Lages Lima, ela ganha contornos mais trágicos: qual o tipo de conhecimento que se busca transmitir? Em geral, a manipulação de objetos matemáticos, de algoritmos, tudo imerso em muita pobreza conceitual e uma ausência sistêmica de aplicações significativas.

A priori, não causa espanto a ausência sistêmica de aplicações significativas no ensino básico, porquanto exista uma carência sistêmica da componente conceituação: afinal, como se aplica o que não se apreende?

Há uma nítida relação de causalidade entre a carência sistêmica das aplicações para com a carência das conceituações. Nessa linha, aduz o professor Elon Lages Lima ao ponderar sobre aplicações significativas:

> Para resolver problemas dessa natureza é preciso estar bem familiarizado com a conceituação dos objetos matemáticos (além, naturalmente, de saber fazer as contas pertinentes). Por isso é que dissemos no início que a conceituação é fundamental nas aplicações. A falta de aplicações para os temas estudados em classe é o defeito mais gritante do ensino da Matemática em todas as séries escolares. Ele não poderá ser sanado sem que a conceituação seja bem reforçada. (LIMA, 2007, p.144)

Foquemos na assertiva de que “A falta de aplicações para os temas estudados em classe é o defeito mais gritante do ensino da Matemática em todas as séries escolares.”(LIMA, 2007, p.144). Isoladamente, tal assertiva pode causar alguma perplexidade uma vez que, numa leitura sistemática e global da obra do professor Elon Lages Lima (LIMA,2007), a carência da componente “conceituação” pareceria ser o “defeito mais gritante” do Ensino Básico.

O presente trabalho, com a devida vênia ao ilustre professor Elon Lages Lima, alinha-se com a premissa - induzida na leitura sistêmica do autor(LIMA,2007)- de que a falta de conceituações, e não a de aplicações, é o defeito “mais gritante” do ensino da Matemática em todas as séries: pois a pobreza das aplicações possui conexão, uma certa relação de causalidade, para com pobreza das conceituações. Mais especificamente, a pobreza das conceituações implica numa pobreza das aplicações.

Não há como existir aplicações significativas, sem as devidas conceituações. Mas a recíproca, não é necessariamente verdadeira: é possível existir conceituação adequada, sem aplicações significativas (basta considerar, por exemplo, o próprio movimento da Matemática Moderna).

2.2 UBIRATAN D'AMBROSIO: DO PROFESSOR AO EDUCADOR

A obra "Educação Matemática: da teoria à prática" (D'AMBROSIO,2007) é um clássico da literatura nacional em Educação Matemática. Fundado num viés crítico, ressignifica ultrapassadas concepções educacionais - apesar de muitas dessas ainda serem fortemente presentes no senso comum - questionando o desgastado paradigma do ensino-aprendizagem fundado numa simples relação técnica de causalidade.

Isso significa, mais especificamente, a exata apreensão de que, numa perspectiva global, o fenômeno do "ensino-aprendizagem" possui condicionantes *metatécnicos*, condicionantes *extracurriculares*: aulas, cursos tecnicamente "perfeitos" não são suficientes, por si, para uma relação de "ensino-aprendizagem" significativa, agregadora, bem-sucedida.

No complexo fenômeno de Ensino e Aprendizagem, numa perspectiva global, existem variáveis de ordens psíquicas, afetivas, sociais, políticas... e, inclusive, as técnicas. Ademais, a "intensidade" de cada uma dessas variáveis é absolutamente subjetiva, o que confere imensa complexidade e organicismo à apreensão do fenômeno de ensino-aprendizagem.

Nesse diapasão, temos no pensamento de Ubiratan D'Ambrosio o conceito de "Educador", que expande a noção de "professor": um bom educador é necessariamente um bom professor, mas a recíproca não é necessariamente verdadeira.

No pensamento de Ubiratan D'Ambrosio (D'AMBROSIO,2007), conforme veremos adiante, o conceito de "Educador" está fundado na integração equilibrada de três categorias de virtudes: afetiva, política e epistemológica. Nota-se, portanto, que o aspecto técnico (epistemologia) é apenas um dos eixos de um "tripé" de virtudes.

Ao bom educador é necessária essa perspectiva orgânica, global, multifacetada do fenômeno de ensino-aprendizagem, reconhecendo não só seus condicionantes epistemológicos, mas também seus condicionantes políticos e afetivos. Pois, caso se feche para essa visão maior das naturezas das forças envolvidas, um eventual fracasso numa prática educativa poderá ser equivocadamente entendido apenas como uma limitação circunscrita num universo totalmente técnico, cognitivo.

2.2.1 A importância da motivação

Ao ponderar sobre a natureza da Matemática e seu ensino, o educador Ubiratan D'Ambrosio (D'AMBROSIO,2007), tem como um dos enfoques primários o aspecto motivacional que permeia a relação de ensino e aprendizagem:

> É muito difícil motivar com fatos e situações do mundo atual uma ciência que foi criada e desenvolvida em outros tempos em virtude dos problemas de então, de uma realidade, de percepções, necessidades e urgências que nos são estranhas. Do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta. (...) Interessa à criança, ao jovem e ao aprendiz em geral aquilo que tem apelo às suas percepções materiais e intelectuais mais imediatas. Por isso é que proponho um enfoque ligado a situações imediatas. (D'AMBROSIO, 2007, p.31)

Reiteradamente, conforme sustenta o educador Ubiratan D'Ambrosio, aquele que vivencia o magistério rapidamente apreende que a motivação é, de fato, um elemento subjetivo crítico para um bom processo de ensino e aprendizagem. Quem lida com o Ensino Básico, por vezes é surpreendido, em especial os professores iniciantes, com demonstrações profundas de apatia intelectual dos alunos, mesmo perante a crença docente das aulas terem sido técnica e didaticamente bem estruturadas.

Por vezes, tais professores ficam perplexos com tal apatia e, buscando apreender seus significados e suas origens, desenvolvem perspectivas estigmatizadoras, levias, opacas que se resumem em polêmicas máximas tais como: "o aluno não tem interesse por ser preguiçoso", "o aluno não tem interesse por não valorizar a educação" ou então, o clássico olhar estigmatizante do "o aluno não tem interesse por lhe faltar capacidade cognitiva, por ser burro".

Frequentemente, numa análise mais criteriosa(D'AMBROSIO,2007), tais perspectivas estigmatizadoras demonstram-se precoces, levianas e opacas porquanto estejam alinhadas com um desejo, por vezes inconsciente, da manutenção de uma certa zona de conforto do docente. Adiante, será melhor explicitado o sentido dessa última assertiva.

Quando um professor vai para uma sala de aula, mesmo aquele professor que pouco reflete sobre sua *práxis*, ele carrega uma expectativa do quê deve ser apreendido, interiorizado e assimilado.

Tal expectativa, constitui-se num modelo ideal de aluno: aqueles que se enquadram nesse modelo são rotulados de "bons" alunos. Por outro lado, os que não se enquadram no modelo seriam os "maus" alunos.

Dessa forma, qual postura é mais "cômoda" para o professor diante de um "mau" aluno? Estigmatizá-lo com seus rótulos classificatórios absolutistas e seguir adiante com sua pedagogia ou refletir criticamente sobre a própria práxis, estando sempre sensível para a possibilidade de revisitar metodologias, pressupostos e considerar no caso concreto os diversos condicionantes do processo de ensino e aprendizagem?

A segunda postura é flagrantemente mais desgastante, menos confortável: exige mais energias do docente, energias mentais inclusive, requisitando o constante exercício das virtudes da humildade e empatia. Adotando tal postura, o processo de ensino e aprendizagem se torna mais rico, complexo e, portanto, trata-se de postura necessária ao Educador.

Ademais, a segunda postura é certamente uma via para ampliar o efeito docente significativo nas mentalidades em formação e rastrear com mais sabedoria, e acurácia, os eventuais bloqueios discentes num específico caso concreto. Definitivamente, estar alerta aos fatores motivacionais não se trata de uma panaceia pedagógica, mas sim da necessidade de evitar crenças estigmatizantes a priori e de estar sensível ao processo de ensino e aprendizagem como um todo: isso implica em abandonar veementemente zonas de conforto e refletir constantemente sobre a própria práxis.

A apatia intelectual pode ter causas que vão desde um ambiente familiar desestruturado e de uma vida de poucas perspectivas - afinal, quem tem que pensar na sobrevivência diária, sobrevivência psicológica inclusive, possui prioridades pragmáticas - até mesmo a um desestímulo pela ausência de verdadeiros desafios intelectuais nas aulas.

A ausência sistêmica de verdadeiros desafios intelectuais nas aulas já é deduzível do diagnóstico contido no pensamento do professor Elon Lages Lima (LIMA,2007), acerca do ensino de Matemática que predomina na realidade nacional: afinal, que estímulo intelectual pode proporcionar uma ambiente conceitualmente pobre, focado em manipulações simbólicas de algoritmos (que não se apreendem) e, portanto, de aplicações significativas inexistentes?

O professor não precisa e nem deve - a bem da verdade, nem seria possível - ser um messias solucionador de todos os problemas socioeconômicos e psico afetivos do estudante: a esfera de ação individual é sempre de eficácia limitada.

Porém, no que diz respeito à ausência de verdadeiros desafios intelectuais nas aulas… a resolução desse problema está plenamente no alcance da esfera de ação docente! Nessa perspectiva, harmônicas sãos as palavras de Ubiratan D’ Ambrósio:

> Por isso é que proponho um enfoque ligado a situações mais imediatas. A última sentença deve ter causado estranheza a muitos. Atenção! Quando digo “mais imediatas” não estou ,e referindo apenas ao utilitário. Mas, igualmente, e acho isso importante, ao desafio intelectual. Mas, desafio intelectual para o intelecto de hoje – que para alguns até pode significar uma visão do passado. (D’AMBROSIO,2007,p.31)

Desse modo, no pensamento do educador Ubiratan D’ Ambrosio a atenção ao aspecto motivacional discente, ao longo do processo de ensino e aprendizagem matemática, consiste prioritariamente em identificar desafios intelectuais pertinentes para o específico contexto subjetivo em análise. Nesse sentido, é fundamental observar que “desafio intelectual” não é aqui tratado como um termo de conteúdo estático, padronizado, universal. Tal olhar estaria profundamente equivocado. Devemos entender “desafio intelectual” como um conceito orgânico, cujo teor é dinamicamente estabelecido em função de um contexto específico, sobre mentalidades discentes específicas. Nesse diapasão, o educador Ubiratan D' Ambrosio é categórico:

> Para um aprendiz com vistas numa tarefa, um enfoque imediatista é essencial. Mas obviamente a educação matemática não se esgota aí. É quando se apela para o histórico, cultural que provavelmente não interessará ao aprendiz com objetivos mais imediatos. Assim como a matemática utilitária não interessará ao aprendiz com desafio intelectual. Está claro que é fundamental tal equilíbrio entre esses dois aspectos. Esse equilíbrio não significa metade de um e metade do outro para todos os alunos. Será, sim, a respostas ao tipo de aluno -o indivíduo com quem estamos lidando. É possível individualizar a instrução e essa é uma das melhores estratégias para recuperar a importância e o interesse na educação matemática. (D'AMBROSIO, 2007, p.31-32)

Preparar aulas motivacionais, instigantes, desafiadoras intelectualmente e que atendam idealmente a totalidade de subjetividades individuais em sala de aula soa altamente complexo e até um tanto quanto utópico. Eis um dos desafios do Educador em sala de aula: bem temperar um núcleo comum motivacional, desafiador intelectualmente, que maximize a conexão para com as diversas individualidades presentes em sala. Isso é muito desafiador! Por vezes, se torna uma tarefa hercúlea! Dificilmente obtenho, em minha vivência no magistério, tal tempero conforme idealmente gostaria. Porém, estou absolutamente convencido pela prática que, somente por verdadeiramente tentar tal tempero, obtenho mais almas motivadas do que obteria por outros meios.

Mas em termos práticos, como o professor de matemática pode gerar aulas desafiadoras intelectualmente? "Quê" fazer, na prática? Utilizar-se de puzzels matemáticos em sala de aula? Valer-se de jogos matemáticos? Valer-se da informática? temperar aulas com História da Matemática? Estimular participação, treinos em olimpíadas matemáticas? Depende. É impossível uma resposta taxativa, uma solução *a priori*.

É necessário sempre lembrar: o significado de "desafio intelectual" não é estático, mas sim dinâmico, orgânico e e dado em função de um contexto discente. O significado depende de indivíduos específicos, imersos em contextos específicos. Penso que devemos, enquanto educadores matemáticos, oferecer o máximo de oportunidades de auto conhecimento possível para os alunos. O tempero das aulas, os meios motivacionais a serem recorridos, se calibram na caminhada pedagógica, através de uma relação dialógica de mútuo auto-conhecimento. No entanto, em que pese as múltiplas formas de se desafiar intelectualmente, penso que a mínima a ser utilizada, e que pode estar presente em todas as incursões educacionais, já foi bem elucidada pelo professor Elon Lages Lima, ao discorrer sobre a componente das "Aplicações" no ensino de Matemática.

A propósito, é interessante notar a convergência entre o professor Elon Lages Lima e o educador Ubiratan D'Ambrosio quanto à relevância atribuída ao aspecto das "Aplicações". Evidentemente, ambos pensadores possuem seus respectivos marcos teóricos, enfoques teórico-metodológicos e específicas "gramáticas" para seus conceitos. Porém, analisando o conteúdo material das assertivas expressas em suas obras, a convergência quanto a dignidade das "Aplicações", como possível mecanismo de estímulo intelectual, é notável.

De fato, ao refletir sobre a prática em sala de aula e matemática experimental, o educador Ubiratan D'Ambrosio afirma:

> Praticamente tudo o que se nota na realidade dá oportunidade de ser tratado criticamente com um instrumental matemático. Como um exemplo temos os jornais, que todos os dias trazem muitos assuntos que podem ser explorados matematicamente. o que se pede aos professores é que tenham coragem de enveredar por projetos. Um projeto favorito com as primeiras séries do 1º grau é contar as folhinhas em um gramado. Outro projeto interessante começa com um estudo comparativo de alturas e tamanhos de pé numa classe. Será que quem é mais alto tem pé maior? Correlacionar dimensões é muito importante(...)Outro projeto é fazer um mapa do trajeto de casa para a escola (...)Depende de como o professor vê a motivação da classe. (D'AMBROSIO,2007,p.98-99)

Explícita, portanto, é a congruência dos pensamentos entre Elon Lages Lima e Ubiratan D' Ambrosio, quanto a atribuição de importância para a componente "Aplicações", conforme linguagem do professor Elon, para com a execução do que o professor Ubiratan denomina de "projetos", na seara da matemática experimental: em essência, as "Aplicações" do professor Elon constituem-se como metodologia de "desafio intelectual" assim como, como a mesma função, os "projetos" do professor Ubiratan D' Ambrosio.

Ademais, importante salientar que os exemplos de projetos do professor Ubiratan são meramente exemplificativos, não se tratando de rol taxativo.

2.2.2 Modelo do bom professor: o educador

Ao refletir sobre o significado de um "bom" professor, um professor "completo" - o qual é denominado genericamente de "Educador" - Ubiratan D'Ambrosio estabelece três categorias de virtudes essenciais que integram o conceito de "Educador": afetiva, política e epistemológica.

> Para se dizer se um professor é bom, há testes, critérios, regras e tanto mais. Tem havido muita pesquisa sobre isso. Eu sintetizo as qualidades de um professor em três categorias: 1. emocional/afetiva; 2. política; 3. conhecimentos (D'AMBROSIO, 2007, p.84)

Preliminarmente, é interessante notar a compatibilidade para com as ideias já expostas pelo professor Elon Lages Lima (LIMA, 2007) de modo que, num certo sentido, pode-se dizer que a visão do educador Ubiratan complementa a perspectiva do professor Elon.

De fato, e valendo-se da "gramática" do educador Ubiratan D' Ambrosio - da linguagem - pode-se inferir que o professor Elon Lages Lima, ao analisar as virtudes necessárias de um "bom" professor, discorreu focadamente sobre o campo do *conhecimento*. Tal foco do professor

Elon Lages Lima, após leitura sistêmica das obras, não poderia ser apreendido no sentido de uma perspectiva educacional qualitativamente inferior, porquanto tratou-se de foco pontual expressamente consciente: ponderar sobre aspectos necessários para a boa aprendizagem (logicamente, isto não implica num dever por completude, não implica em necessidade e suficiência).

Nesse diapasão, verifica-se que os professores Elon Lages Lima e Ubiratan D' Ambrosio possuem estreita harmonia quanto a eleição do "conhecimento" enquanto virtude necessária para o bom professor. A diferenciação entres esses pensadores não está, portanto, num conflito de teses: mas sim, num grau de extensão das reflexões.

O pensamento do educador Ubiratan D' Ambrosio possui a pretensão expressa de reflexão sobre condicionantes do processo educativo para além da seara estritamente epistemológica. Nesse sentido, podemos afirmar que sua análise é mais complexa e, portanto, complementa a perspectiva do professor Elon Lages Lima.

Assim sendo, foquemos, portanto, nas virtudes "afetivas" e "políticas" fundamentais para o "bom" professor, segundo pensamento do educador Ubiratan D'Ambrosio.

A qualidade afetiva está relacionada ao necessário exercício da empatia, da alteridade, no exercício do magistério. Isso significa não somente estar sensível para a apreensão das tensões educacionais inerentes ao sujeito do processo educativo, mas também para o contexto psicossocial em que este sujeito está imerso. Esse exercício amplo da empatia, genericamente entendido - no pensamento de Ubiratan D' Ambrosio - como *amor*, inegavelmente constitui numa virtude essencial.

> Ninguém poderá ser um bom professor sem dedicação, preocupação com o próximo, sem amor num sentido amplo. O professor passa ao próximo aquilo que ninguém pode tirar de alguém, que é o conhecimento. Conhecimento só pode ser passado adiante por meio de uma doação. O verdadeiro professor passa o que sabe não em troca de um salário (pois se assim fosse melhor seria ficar calado 49 minutos!), mas somente porque quer ensinar, quer mostrar os truques e macetes que conhece. (D'AMBROSIO, 2007, p.84)

Essa virtude do amor no exercício do magistério, não se trata de uma postura altruística ou de uma Ética missionária. Infelizmente, por vezes, aquele que vivencia o magistério sabe que alguns sujeitos empreendem críticas nesse tom depreciativo às virtudes afetivas. Não se trata de um agir ético messiânico, definitivamente. Mas sim, trata-se da busca de apreensão dos condicionantes psíquicos mais profundos do processo de aprendizagem e, sob tal perspectiva, a virtude afetiva reluz sua significância.

Quem não conhece o estereótipo da "burrice" para aquele que não aprende determinado assunto? Quem não conhece o estereótipo do "fulano é capaz, mas preguiçoso" para aprender?

Novamente, urge salientar, nenhum aspecto necessário para a boa aprendizagem deve ser entendido, por si, como uma *panaceia*. Assim há de ser, portanto, para com a virtude afetiva, inclusive. Porém, aquele que vivencia o magistério na Educação Básica e busca constantemente tal exercício de alteridade, certamente maximiza seu efeito educador e sua visão para com os inúmeros condicionantes psicossociais discentes que inevitavelmente deságuam em sala de aula: que motivação pode se esperar de um estudante, para refletir sobre objetos abstratos da matemática, quando esse luta pela sobrevivência psíquica e material imediata? Que motivação se pode esperar de um estudante marginalizado e de periferia que está imerso num contexto familiar - se é que tem família! - tóxico, abusivo e destrutivo?

Por vezes, o aluno "não aprende", "não está motivado" por existir sobre ele um jugo deletério: de origem material, psíquica, familiar. Ao bom professor, cabe estar sensível aos sinais de tais influências para, além de ponderar sobre encaminhamento necessário - pedagógico, assistência social etc- buscar maximizar a influência de suas aulas sobre os estudantes, conforme especificidades do caso concreto. O caminho docente para isso, passa pela pavimentação da virtude afetiva. Eventualmente, há de existir aqueles que, mesmo diante da mais sincera virtude afetiva no magistério, não se permitirão influenciar conforme gostaríamos... Porém, inclusive pela empiria de minha vivência docente, estou absolutamente convencido que se obtém melhor adesão de almas com o exercício do amor, do que sem tal virtude.

Vivenciar o milagroso fenômeno de um estudante reconhecer, autonomamente, que seus estigmas para com a Matemática foram superados é de uma satisfação ímpar e, eventualmente, o exercício do amor nos presenteia com tal recompensa.

O professor que cultiva a virtude do amor, estará sempre aberto ao diálogo; para mudanças de estratégias metodológicas e adequações curriculares. Nesse sentido, surge a conexão com a virtude política do professor: estar atento ao currículo, estar atento às metodologias matemáticas possui conexão direta com a "educação matemática crítica", sobre a qual se refletirá adiante. Por hora, foquemos atenção na virtude política do "bom" professor.

Existe conexão entre Matemática e Política?

Mais especificamente, entre Educação Matemática e Política? Frequentemente, o senso comum tende a considerar a Educação, em especial na seara da Ciências Exatas, como desconexa das influências políticas.

Alguns, com um veemente preconceito, brandam firmes de que no ensino das exatas nada há de político ou, por outra perspectiva preconceituosa, porém equivalente, que uma educação "neutra", puramente técnica, seria possível e um dever da escola. Nesse viés, há aqueles que, e isso é fato notório da contemporaneidade, tem repudiado a dimensão política associando-a como doutrinação ideológica. Não é disso que se trata aqui, ao ponderar-se sobre "política".

No pensamento do educador Ubiratan D' Ambrosio (D'AMBROSIO,2007), a virtude política consiste na percepção docente clara de que a boa educação, inclusive a educação matemática, será aquela que pavimente um pleno exercício da cidadania. De fato, salutar são as considerações do educador Ubiratan D' Ambrosio:

> Educação é um ato político. Se algum professor julga que sua ação é politicamente neutra, não entendeu nada de sua profissão. Tudo o

> que fazemos, o nosso comportamento, as nossas opiniões e atitudes são registrados e gravados pelos alunos e entrarão naquele caldeirão que fará a sopa de sua consciência. Maior ou menor tempero político é nossa responsabilidade. Daí se falar tanto em educação para a cidadania. (D'AMBROSIO, 2007, p.85)

A conexão entre Política e Matemática fica mais translúcida quando considera-se a chamada "Educação Matemática Crítica" (SKOVSMOSE, 2004). O professor Marcelo C. Borba, ao prefaciar a obra do notável educador Ole Skovsmose (SKOVSMOSE,2004), bem sintetiza o espírito de tal corrente:

> Na década de 1980, surge na educação matemática o movimento da educação matemática crítica. Esse movimento se preocupa fundamentalmente com os aspectos políticos da educação matemática. Em outras palavras, traz para o centro do debate da educação matemática questões ligadas ao tema *poder*. Perguntas como: a quem interessa que a educação matemática seja organizada dessa maneira? Para quem a educação matemática deve estar voltada? Como evitar preconceitos nos processos analisados pela educação matemática que sejam nefastos para grupos de oprimidos como trabalhadores, negros "índios" e mulheres? (SKOVSMOSE, 2004, p.7)

Nessa perspectiva, o professor Ole Skovsmose (SKOVSMOSE, 2004) pondera sobre processos educacionais numa perspectiva crítica, sendo isso entendido pela consideração crítica dos conteúdos, conexamente aos sujeitos envolvidos, e seus condicionantes externos, de natureza política. Esse viés está sintetizado no rol exemplificativos de questionamentos que, todo currículo, com pretensão de ser crítico, deve exercitar reflexa e continuamente:

> Questões relacionadas com um currículo crítico ligam-se ao seguinte: 1) A aplicabilidade do assunto: quem o usa? Onde é usado? Que tipo de qualificação são desenvolvidas na Educação Matemática?; 2) Os interesses por detrás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto? 3) Os pressupostos por detrás do assunto: que questões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na matemática? Que contextos têm promovido e controlado o desenvolvimento?; 4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderia ter o assunto? Essa questão não se remete primariamente às aplicações possíveis, mas à função implícita de uma Educação Matemática nas atitudes relacionadas a questões tecnológicas, nas atitudes dos estudantes em relação a suas próprias capacidades etc. e 5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância? (SKOVSMOSE, 2004, p.19)

Somente nessa visão orgânica dos condicionantes dos processos educacionais, políticos inclusive, é que o professor, elevado na qualidade de Educador, poderá melhor contribuir para a formação cidadã dos discentes. Nesse sentido, temos o valor da "educação para a cidania", de teor político, que na visão do professor Ubiratan D' Ambrosio é um dos grandes objetivos da Educação:

> A educação para cidadania, que é um dos grandes objetivos da educação de hoje, exige uma “apreciação” do conhecimento moderno, impregnado de ciência e tecnologia. Assim, o papel do professor de matemática é particularmente importante para ajudar o aluno nessa apreciação, assim como para destacar alguns dos importantes princípios éticos a ela associados. (D’AMBROSIO, 2007, p.87)

O professor que integra essas três virtudes - afetiva, política e epistemológica - é elevado, na visão do professor Ubiratan, à condição de Educador: um professor mais completo e desejável.

Mais completo por transcender o mero campo epistemológico.

Desejável pois, na medida em que transcende afetiva e politicamente o campo epistemológico, maior a apreensão dos condicionantes da aprendizagem é adquirida, gerando maior valor agregado para a prática docente.

O bom professor, portanto, é aquele que eleva-se para a condição de Educador.

2.3 PROCESSO AVALIATIVO: COMPLEXIDADE E LIMITES

Aquele que exerce o magistério na Educação Básica, certamente se defronta com a necessidade de integrar sua prática com certos mecanismos, institucionais inclusive, que possuem as *polêmicas pretensões* de diagnosticar, mensurar e modular a aprendizagem: as avaliações.

Trata-se de tema polêmico, muito complexo e que pode ser explorado sobre diversas perspectivas: pedagógicas, filosóficas, sociológicas etc.

Assim sendo, para fixar um horizonte de perspectiva, o presente trabalho estabelece - como marco teórico para o fenômeno do processo avaliativo - as reflexões do professor Mauro Rabelo (RABELO,2013), com o objetivo de fazer uma breve digressão acerca da complexidade inerente ao ato de avaliar.

A exata apreensão dessa complexidade inerente ao ato de avaliar, constitui-se numa habilidade essencial para o bom professor, ou seja, para o Educador.

A complexidade do ato de avaliar, possui conexão direta para com os valores e perspectivas pedagógicas do avaliador acerca do que constitui, e como deve se desenvolver, o processo educacional.

Dessa forma, é na dialogicidade dessa pluralidade de valores e perspectivas pedagógicas que compreende-se a polêmica da temática, assim como suas conexas conflituosidades. Nesse sentido, harmônicas são as considerações do professor Mauro Rabelo:

> A tarefa que é deixada ao professor, o qual, muitas vezes acaba assumindo o papel de juiz, com o poder de absolver ou de condenar, de aprovar ou reprovar, de posse de um instrumento poderoso - a prova -, traz em si uma série de contradições. Essas decorrem, principalmente, de visões diferentes do que seja o ato de ensinar. (RABELO, 2013, p.224)

Com relação as diferentes visões do que seja o ato de ensinar, o professor Mauro Rabelo didaticamente mapeia e elenca algumas dessas visões em quatro grandes categorias: a tecnicista; a afetiva; a política e a socioconstrutivista.

Tal esquema tipológico do professor Mauro Rabelo possui a lucidez de abarcar razoavelmente todas as perspectivas avaliativas que observamos, em especial, no cenário nacional. De fato, vejamos o significado específico de cada categoria:

> Para muitos, o ensino é concebido como uma técnica: é suficiente combinar, de modo eficaz, os meios e os fins, sendo estes considerados evidentes e naturais. Outros destacam muito mais os componentes afetivos, assimilando o ensino a um processo de desenvolvimento pessoal ou mesmo a uma *terapia*. Alguns privilegiam uma visão do ensino como uma ação ética ou política. O ensino também é definido como uma interação social e necessita, por exemplo, de um processo de coconstrução da realidade pelos professores e alunos - trata-se do enfoque socioconstrutivista. (RABELO, 2013, p.224)

Sobre a natureza do ensino, e o significado do ato de ensinar, o presente trabalho já ponderou no sentido de refutar o ato de ensinar enquanto mera técnica. Nesse sentido, ao considerar-se o trabalho do professor Ubiratan D"Ambrosio (D'AMBROSIO,2007) demonstrou-se que, para além dos conhecimentos, o aspecto afetivo e político também seriam duas outras categorias essenciais ao bom professor e, conexamente, ao bom ato de ensinar.

Infelizmente, aquele que vivencia o magistério na educação matemática básica há de convir que - e isso é um fato notório - a presença da visão estritamente tecnicista ainda é intensa no meio docente contemporâneo.

Evidentemente, como não poderia deixar de ser, tal perfil ideológico acaba se refletindo no estilo das avaliações escolares, constituindo um padrão do ato de avaliar. Nessa linha, precisas são as colocações do professor Mauro Rabelo:

> Além disso, não é exagero dizer que, em geral, os instrumentos de *verificação* da aprendizagem apresentam uma diversidade de insuficiências e problemas. A maioria encoraja a aprendizagem mecânica e superficial, estimulando a repetição de procedimentos rotineiros e algorítmicos, apesar de muitos professores acreditarem que seus testes avaliam aprendizagens profundas. O que se observa, de fato, é que, muitas vezes, não há clareza sobre o que de fato se pretende com o instrumento de avaliação utilizado, além de as questões e métodos utilizados não serem criticamente analisados em relação ao que realmente avaliam. (RABELO, 2013, p.226)

É interessante notar a conexão entre a "aprendizagem mecânica e superficial", estimulando a repetição de procedimentos "rotineiros e algorítimizados" presente na generalidade dos instrumentos avaliativos, segundo o professor Mauro Rabelo, para com o diagnóstico crítico do professor Elon Lages Lima (LIMA,2007) acerca do excesso de "manipulações" na educação matemática básica: conforme já visto, o professor Elon Lages Lima critica veementemente tal ensino algoritmizado.

Ademais, também há de se notar a conexão entre tal percepção do professor Mauro Rabelo para com as considerações epistemológicas do educador Ubiratan D' Ambrosio (D'AMBROSIO,2007): no pensamento do educador Ubiratan D' Ambrosio, não é digno um ensino sem "desafios intelectuais".

Dessa forma, conjugando o pensamento de todos os autores já citados, pode-se afirmar que não há como existir "aprendizagem profunda", significativa, num ensino algoritmizado. Tal "aprendizagem profunda", conforme visão do professor Elon Lages Lima (LIMA,2007), só pode ocorrer numa adequada integração entre a tríade "Conceituação", "Manipulação" e "Aplicação". Já no pensamento do professor Ubiratan D' Ambrosio (D'AMBROSIO,2007), para além do adequado tempero do eixo epistemológico, há de se considerar os eixos afetivos e políticos para uma aprendizagem significativa.

Assim sendo, integrando dialeticamente as ponderações de Mauro Rabelo com as de Elon Lages Lima e Ubiratan D' Ambrosio, estabelece-se o seguinte questionamento: o quê, no geral, os instrumentos avaliativos comuns "avaliam" para além do campo das "manipulações" no ensino matemático? Regra geral, nada. Eis a pobreza de um ensino matemático "algoritmizado" - sem desafios intelectuais - e essa pobreza pedagógica, como não poderia deixar de ser, reflete-se nas conexas avaliações.

Definitivamente, há de se convir que esse quadro trágico é ofensivo para os anseios dos progressistas educadores matemáticos e, até mesmo, para os matemáticos: afinal, pouca matemática há na reprodução mecânica de um algoritmo de fundamento misterioso.

O corolário dessa trágica visão do ato de ensinar enquanto "aprendizagem algoritmizada", e da trágica visão de se avaliar lastreando-se em tal concepção educacional, expressa-se também na obsessão pelo conceito de "nota".

> Na avaliação tradicional, há uma ênfase na atribuição de notas em detrimento da orientação para a aprendizagem, os alunos são comparados uns com os outros, gerando mais competição do que desenvolvimento individual, e não se favorece a aprendizagem colaborativa. O *feedback* para os alunos de baixo rendimento é que lhes falta capacidade de aprender. (RABELO,2013,p.227)

Pelas ponderações feitas, o *feedback* íntegro que o baixo rendimento, em tais avaliações, deveria dar era o de lhes faltar a capacidade de "reproduzir mecanicamente algoritmos de fundamentação acrítica". A princípio, isso, em si, não parece tão ruim. Num viés progressista, poderia ser inclusive uma virtude.

As avaliações tradicionais deveria ser banidas? Um alerta deve ser feito. O presente trabalho não está fazendo uma apologia veemente pela exclusão da avaliação tradicional da práxis docente. Trata-se, na verdade, de uma apologia pela necessidade de compreensão das limitações pedagógicas inerentes de tal instrumento; da necessidade de ter-se a ciência dos fins almejados e da necessidade de exata percepção do contexto discente sobre o qual ocupa-se o ato de avaliar. Tal alerta é expressivo no pensamento do professor Mauro Rabelo (RABELO,2013).

Certamente existem contextos, no qual a mecanização de algoritmos pode ter um valor expressivo. Basta considerar, por exemplo, o ambiente de "cursinhos para concursos".

Ademais, uma vez que as "Manipulações" constituem-se num dos eixos do bom ensino matemática - conforme pensamento de Elon Lages Lima(LIMA,2007)- infere-se que há de existir sempre alguma pertinência para as avaliações tradicionais no ambiente escolar.

No entanto, e isto deve se destacado, ao refletirmos criticamente sobre a natureza do ato de ensinar - conforme pensamentos de Ubiratan D'Ambrosio (D'AMBROSIO,2007) e Ole Skovsmose (SKOVSMOSE,2004) - problematiza-se complexamente as forças que permeiam o ambiente escolar, integrando na formação técnica o aspecto afetivo e político (esse último, é bom enfatizar, no sentido da necessária criticidade para o pleno exercício da cidadania).

Portanto, considerada essa complexidade do ato de ensinar, conexamente há sempre de se considerar - como um natural desdobramento - a complexidade inerente no ato de avaliar e, nesse sentido, a estrita avaliação tradicional demonstra-se insuficiente porquanto fundada exclusivamente no eixo tecnicista da aprendizagem.

Tal insuficiência, ainda que consideremos tão somente o eixo tecnicista da aprendizagem, tende a ser mais crítica ainda no ensino matemático nacional: afinal, tradicionalmente, avalia-se "manipulações", a reprodução de algoritmos. Porém, lembremos que - conforme pensamento do professor Elon Lages Lima(LIMA,2007) - o eixo tecnicista da aprendizagem só pode ser bem sucedido numa integração dialética ótima entre "Conceituação", "Manipulação" e "Aplicações". Portanto, o foco em somente uma dessas componentes é insustentável até mesmo para uma perspectiva pedagógica estritamente tecnicista.

Concentremos mais um pouco nessa última reflexão. As avaliações tradicionais consideram de forma pertinente os campos "Conceituação" e "Aplicação"? Considerando as obras do professor Elon(LIMA,2007) e do professor Mauro Rabello(RABELO,2013), a resposta só pode ser negativa. Dessa forma, tradicionalmente, o aluno com "boa" formação técnica, com boas notas segundo as avaliações tradicionais, tende a ser tão somente um bom reprodutor de algoritmos. Certamente não é essa e educação matemática que nenhum Educador aspira. A bem da verdade, reitera-se, nem os matemáticos profissionais dignificariam tal formação: o que há de genuinamente matemático na reprodução acrítica de algoritmos, cuja apreensão e validade são fundamentalmente obscuras?

Essas são, portanto, as críticas às avaliações tradicionais com as quais o presente trabalho se alinha.

Não se trata de uma apologia para a absoluta negação do tradicional: mas tão somente de uma reflexão quanto a suas limitações e possíveis inadequações contextuais. Isso posto, a dúvida mais natural que se segue seria: “como” avaliar então?

O professor Mauro Rabelo fornece sugestões metodológicas, exemplos para o “como” avaliar. Antes, reforça que o ato de avaliar - quando empreendido de forma adequada - é capaz de dar importante *feedbacks* ao docente e, visando futura exposição das exposições metodológicas, o professor Mauro Rabelo explicita o que um “bom” instrumento avaliativo deve ser capaz de aferir:

> No que tange especificamente à matemática, além de fornecer aos professores informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem dos estudantes em relação à aquisição de saberes, ao desenvolvimento do raciocínio e ao domínio de certas estratégias, a avaliação deve também dar pistas acerca do grau de envolvimento do aluno no processo de resolução de problemas, considerando as estratégias utilizadas, a capacidade de crítica sobre as respostas obtidas, a clareza na exposição das ideias e a capacidade de fazer questionamentos. (RABELO,2013,p.229)

Nesse espírito, e buscando responder a questão do “como” avaliar, temos o basilar conceito de “reinvenção da avaliação formativa” da avaliação do professor Mauro Rabello, no qual estabelece-se que “Reinventar a avaliação formativa significa entender a que ela se destina, a que tipo de trabalho pedagógico se vincula e, a partir disso, formular como ela pode ser posta em prática.” (RABELO,2013,p.229).

Desse modo, considerado o conceito de “reinvenção da avaliação formativa” chegamos na resposta do “como” avaliar: não existe forma única, a priori, porquanto diversos possam ser o perfil discente; o contexto discente; os fins do trabalho pedagógico em tela etc

Isso posto, têm-se que as mais diversas estratégias metodológicas podem ser adequadas, uma vez que haja ciência do propósito do “quê” está se avaliando e das limitações inerentes às mais diversas metodologias - tais como resolução de problemas, diário de bordo, autoavaliação etc. O presente trabalho, não adentrará especificamente numa digressão acerca de como são tais metodologias, pois isto fugiria do escopo do trabalho. O leitor interessado em maiores detalhes metodológicos específicos, pode consultar a obra do professor Mauro Rabelo (RABELO,2013).

Dessa forma, reitera-se, que para o presente trabalho, o objetivo essencial sobre o tema avaliativo é tão somente o de apreender a complexidade do ato de avaliar e a inexistência de um caminho metodológico avaliativo universal, que possa ser bem definido *a priori*, em desconexão com um contexto discente específico. Toda metodologia avaliativa, quando há ciência acerca de seus fins e limitações, constitui-se numa ferramenta que, a depender do contexto, pode bem servir ao docente. Cabe ao educador, no caso concreto, escolher as melhores ferramentas. Nesse sentido, harmônicas são as reflexões do professor Mauro Rabelo:

> Sejam quais forem as escolhas de instrumentos ou estratégias avaliativas feitas pelo docente, isso deve ser sempre feito com *intencionalidade* na ação, pois mostra comprometimento e conhecimento das influências que a avaliação pode exercer no processo de desenvolvimento humano dos estudantes. Para que utilizar determinado instrumento? Para classificar

> e excluir ou para intervir e mudar? Que perfil de estudante queremos formar, de acordo com o projeto pedagógico da escola? Assim, o *olhar avaliativo* deve ser reflexivo, subentendendo a verdadeira intenção de colocar em dúvida parâmetros fixos de julgamento, refletindo constantemente sobre o que se observa e tomando decisões. (RABELO,2013,p.232)

É necessário ratificar: toda metodologia avaliativa, inclusive as tradicionais avaliações, constituem-se em ferramentas disponíveis ao docente. Portanto, toda metodologia há de ter o seu valor, a depender do contexto. O que não é razoável, e deve ser veementemente combatido pelos Educadores, é o uso inadequado das metodologias avaliativas: seja pelo desconhecimento das limitações inerentes a cada método, seja pelo desconhecimento docente do que o "olhar avaliativo", conforme palavras do professor Mauro, deseja aferir.

3 O CONCEITO DE NÚMERO SOB DUAS DIRETRIZES

Inicia-se, agora, a segunda parte do trabalho. Será feito uma digressão acerca do conceito de "número" no ensino básico. Porém, antes dessa exposição matemática, convém destacar algumas diretrizes pedagógicas, as quais guiarão toda a exposição.

Nesse sentido, destaca-se que tal digressão estará fortemente fundada em duas premissas de Elon Lages Lima, duas diretrizes, para o ensino da matemática: a necessidade da conceituação e a necessidade de rigor adequado.

Preliminarmente, convém destacar a perspectiva essencial de Elon Lages Lima (LIMA, 2007) acerca do "bom" ensino de matemática: é fundamental encontrar uma integração ótima entre "Conceituação", "Manipulação" e "Aplicação". Nesse viés, o professor Elon Lages Lima, ao ponderar acerca da realidade do ensino matemático nacional, explicita que o ensino matemático é marcado por uma ênfase obsessiva nas "Manipulações" baseada, conexamente, numa pobreza sistêmica para com a "Conceituação" e "Aplicações".

A presente dissertação alinha-se com a premissa de que, em tal pobreza sistêmica do ensino matemático nacional, seria mais crítica a componente da "Conceituação". Afinal, as "Aplicações" dependem de conceitos bem estabelecidos (LIMA, 2007).

Dessa forma, o presente trabalho adota e ratifica a tal primeira premissa de Elon Lages Lima: de agora em diante, quando tratarmos de algum objeto matemático, nosso enfoque estará na componente da "Conceituação". Justamente, por acolher-se a tese de que essa é componente institucionalmente mais crítica no ensino básico.

Em seguia, igualmente reitera-se e ratifica-se a segunda premissa, qual seja, a da necessidade de rigor adequado. Tal perspetiva estará presente em especial quando refletir-se acerca de uma demonstração matemática. Conforme assevera Elon Lages Lima, é necessário lembrar que "A nível escolar, demonstrar é uma forma de convencer com base na razão, em vez da autoridade"(LIMA, 2007, p.143). Portanto, eventualmente, uma demonstração matemática poderá, no presente trabalho, não ter todo o rigor purista que um matemático formalista esperaria. No ensino básico, é necessário calibrar honestidade intelectual com conveniência pedagógica.

Bem estabelecido o alerta acerca das diretrizes pedagógicas, inicia-se as considerações acerca do conceito de "número".

Os números, objetos fundamentais da Matemática, permeiam todo o ensino básico. Porém, para aquele que possui alguma vivência no magistério nacional, há de se convir o quanto que a "conceituação" desses objetos tende a ser duvidosa nas mentalidades discentes, ao longo de todo o processo educativo básico.

A apreensão conceitual dos números naturais, fundamentalmente associada à noção de "contagem", não tende a ser problemática. Mais geralmente, os inteiros também são tradicionalmente bem apreendidos. No entanto, teoremas "elementares" acerca dos inteiros não são vistos ou, quando muito, tendem a ser apresentados como regras válidas *a priori* de modo a focar-se na manipulação.

A nebulosidade conceitual começa a densificar-se com os números racionais, sendo a incompreensão dos números irracionais um corolário da sistêmica desarticulação de produção conceitual significativa.

Considerando as perspectivas pedagógicas do professor Elon (LIMA,2007) uma primeira aproximação conceitual para o objeto "número" pode ser ser encontrada no primeiro volume da obra "A Matemática do Ensino Médio":

> Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza. Os compêndios tradicionais dizem o seguinte:"Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se uma *contagem* e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma *medição* e o resultado é um número real". Nos padrões atuais de rigor matemático, o trecho acima não pode ser considerado como uma definição matemática (...) Entretanto, todas as palavras que nela aparecem possuem um sentido bastante claro na linguagem do dia-a-dia (...) tem o grande mérito de nos revelar para que servem e por qual motivo foram inventados os números. (LIMA et al, 2006, p.25)

Nota-se, portanto, que quando pensa-se em "número", estamos refletindo acerca de um objeto abstrato que possui, em essência, a função de contar (afinal, a noção de medida, conforme será visto, é reduzida à noção de contagem). Essa mesma perspectiva também está presente em autores de clássicos internacionais:

> Os números são a base da Matemática moderna. Mas, o que é número?(...) Aprendemos na escola a mecânica de lidar com frações e números negativos; mas para uma verdadeira compreensão do sistema numérico, devemos retornar a elementos mais simples.(...) Criados pela mente humana para contar objetos em coleções diversas, os números não contém qualquer referências às características individuais dos objetos contados(...) Felizmente, os matemáticos não têm que se ocupar com a natureza filosófica envolvendo a transição de objetos concretos ao conceito de número abstrato. Devemos, portanto, aceitar os números naturais como dados, juntamente com as duas operações fundamentais -adição e multiplicação - por meio das quais podem ser combinados (COURANT;ROBBINS, 2000, p.1)

Dessa forma, para uma digressão conceitual dos números, será adotado como ponto de partida a perspectiva de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000). Ou seja: aceita-se a existência dos números naturais e suas operações fundamentais de adição e multiplicação. É um ponto de partida intelectualmente honesto, uma vez que tal conhecimento não é problemático no ensino básico.

Por fim, o presente trabalho destaca que a digressão matemática a ser feita é coerente, com os devidos filtros do docente conforme caso concreto, com o contexto discente a partir do primeiro ano do ensino médio. Tradicionalmente, no ensino nacional, estuda-se “teoria dos conjuntos” no primeiro ano do ensino médio, antes de adentrar-se no conceito de “funções”. O presente trabalho estabelece, portanto, sua adequação na seara dos “conjuntos numéricos”.

4 NÚMEROS NATURAIS: A ESSENCIALIDADE CONCEITUAL

Os números naturais, também chamados de *inteiros positivos*, constituem a classe mais primitiva de números e estão fundados, conforme já explicitado, na imemoriável necessidade pragmática de *contagem*. Ao longo da história da civilização humana, consolidou-se o sistema numérico “hindu-arábico”: uma sofisticada metodologia de contagem que, valendo-se de apenas 10 símbolos, permite representar qualquer grandeza contável necessitando, para tanto, enfileirar “convenientemente” tais símbolos. É por isso que, a bem da verdade, tal sistema numérico também é conhecido por sistema numeral decimal posicional. Não é interesse do presente trabalho tecer maior comentários acerca desses fatos históricos de modo que, para o leitor interessado, recomenda-se considerar a obra de Howard Eves (EVES,2011).

Assim, os números naturais seriam os seguintes:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \text{etc.}$$

Um interessante questionamento ingênuo, que volta e meia aparece no ensino básico sob diferentes formas, é: se os símbolos acima isoladamente representam números naturais e, juntamente com o 0 (leia-se: “zero”, símbolo para quantidade nula), compõem-se todo tipo de número natural... Seria o zero um número natural?

Matematicamente, conforme irá se explicitar melhor ao final deste tópico, esta discussão é irrelevante e de solução arbitrária. Zero poderia ser considerado como um “natural”. Porém, historicamente (EVES,2011), apreende-se que o surgimento do símbolo “0” foi mais tardio na humanidade. O sentido disso é bem razoável: sendo os números naturais objetos fundados na necessidade pragmática de contagem, somente num posterior estágio de maturação intelectual é que existe a pertinência de contar-se uma “não quantidade”, uma “quantidade nula”. Portanto, histórica e pedagogicamente, o presente trabalho alinha-se com a conveniência de deixar o zero para os inteiros.

Superada a conceituação histórica dos objetos, o presente trabalho adota a perspetiva de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000) para uma maior digressão acerca dos naturais. Dessa forma, convém expor as leis essenciais que a “adição” e a “multipliação” respeitam, as **leis fundamentais da Aritmética.**

Sejam a, b e c números naturais. A adição e a multiplicação respeitam as seguintes leis: Lei comutativa da adição ($a + b = b + a$); Lei comutativa da multiplicação ($ab = ba$); Elemento neutro multiplicativo ($a * 1 = a$); Lei associativa da adição: ($a + (b + c) = (a + b) + c$); Lei associativa da multiplicação ($a(bc) = (ab)c$) e Lei distributiva: ($a(b + c) = ab + ac$).

O teor dessas leis é bem aceito no ensino básico, embora nem sempre a consciência da nomenclatura exista (essencialmente, isso é irrelevante). Geralmente, os alunos são convencidos dessas leis mediante verificação de muitos exemplos particulares. Tem-se, portanto, o desafio pedagógico de convencer os discentes acerca da generalidade dessas leis. Evidentemente, não seria adequado para o ensino básico uma exposição purista que suprimisse casos particulares como ponto de partida. Na improvável hipótese de dificuldade discente na apreensão de algumas dessas "leis essenciais da Aritmética", Richard Courant e Herbert Robbins discorrem no primeiro capítulo de sua obra (COURANT;ROBBINS, 2000), acerca de um interessante modelo geométrico para a verificação dessas leis. Tal modelo não será tratado aqui pois, no fundo, não difere essencialmente dos exemplos algébricos particulares tendo como diferencial, tão somente, um certo apelo geométrico. Para o leitor interessado nessa metodologia, convém a consulta da citada obra.

Bem entendida a adição nos naturais, define-se a relação de *desigualdade*. Dados dois naturais "a" e "b", define-se a < b (leia-se, "a é menor que b") ou, equivalentemente, b > a (leia-se, "b maior que a"), quando o número "b" puder ser obtido do número "a" mediante adição de um terceiro natural "c", de modo que $b = a + c$. É pela noção da desigualdade, fundada na idéia de adição, que define-se a noção de "subtração". Nos termos acima, dados tais "a" e "b", com b>a, podemos escrever:

$$c = b - a \text{ (leia-se, "b menos a")}$$

Essa simbologia, $b - a$, estaria tão somente indicando o natural c tal que $b = a + c$. Nota-se, portanto, que a operação de subtração é derivada da operação de soma. Mais que isso: também diz-se que a subtração e adição são *operações inversas*. O sentido disso é o seguinte: se do natural "a", somar-se o natural "b" e, em seguida, subtrair-se o natural "b", o resultado será "a":

$$(a + b) - b = a$$

De fato, a+b é, evidentemente, maior que b. Portanto, conforme definido nos naturais, faz sentido pensar no natural (a+b)-b. Tal natural seria, por definição, aquele que, somado com b, resultaria em a+b. Esse natural só pode ser o a, ponto de partida de todo o processo. Daí a inversão.

A noção da subtração como consequência da operação de adição, e como operação inversa dessa, é análoga em todos os conjuntos numéricos. Há ajustes e adequações meramente pontuais, sem afetar a essencialidade das ideias. Portanto, essa conexão não será mais objeto de apreciação nesse trabalho. O leitor interessado em maiores detalhes, pode consultar a obra (COURANT;ROBBINS, 2000) ou (HEFEZ,2016).

Acerca da divisão nos naturais, convém destacar a noção geral de tal operação que, por definição, pode ser compreendida como uma derivação da noção de "multiplicação". De fato, dados "a" e "b" dois números naturais quaisquer; se existir um terceiro número natural c, tal que b=ac, então diz-se que "a" *divide* "b". Simbolicamente, expressa-se tal fato por $a \mid b$. Por outro lado, se não existir um natural c tal que b=ac, então "a"não divide "b" e, simbolicamente, expressa-se isso por $a \nmid b$.

Quando ocorre $a \mid b$, também é comum, na linguagem usual, dizer-se que "a" é um divisor de "b" ou, analogamente, que "a" é um fator de "b". Equivalentemente, também diz-se que, quando $a \mid b$, "b" é um múltiplo de "a". Enfim, há vários recursos linguísticos para expressar uma mesma ideia.

Dessa forma, assim como a subtração é definida como uma derivação da noção de adição, constituindo operação inversa dessa; algo análogo ocorre com noção da divisão: divisão pode ser compreendida como uma derivação da noção de multiplicação. Ademais, divisão e multiplicação também são operações inversas (no sentido análogo de quando discorreu-se sobre inversão da subtração e adição). Essa conexão entre as noções de divisão e multiplicação, também é análoga em todos os conjuntos numéricos. Também há ajustes e adequações meramente pontuais, sem afetar a essencialidade das ideias. Portanto, essa conexão não será mais objeto de maiores apreciações nesse trabalho. O leitor interessado em maiores detalhes formalistas, deve sempre consultar Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000) ou a obra de Abramo Hefez (HEFEZ,2016).

Portanto, são as considerações do último parágrafo que explicitam a legitimidade de se considerar tão somente a "adição" e a "multiplicação" como "operações fundamentais".

Convém destacar um comentário acerca das operações aritméticas. Notemos que da noção de adição, derivamos a noção de desigualdade e de subtração. Da noção de multiplicação, derivou-se a noção de divisão. Essas relações matemáticas gozam de diversas propriedades operatórias, úteis nas mecânicas dos cálculos, que são derivadas diretamente de suas respectivas conceituações (por exemplo, dados a,b e c naturais, com a > b, tem-se sempre que a + c > b+ c). Não iremos expor todas essas propriedades operatórias, para não se fazer deste trabalho uma tediosa exposição formal acerca de fatos que não são problemáticos no ensino básico. Quer-se concentrar em verdadeiros nós conceituais, em pontos realmente relevantes. Lembremos sempre da perspectiva de Elon Lages Lima quanto ao tipo de rigor pertinente para o ensino básico. O leitor interessado em esmiuçar maiores detalhes formalistas, deve sempre consultar Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000) ou a obra de Abramo Hefez (HEFEZ,2016).

Por fim, a título de complemento para o docente, seguem algumas relevantes e pertinentes considerações formais acerca da natureza números naturais. Na digressão feita adotou-se, conforme supracitado, a perspectiva de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000) de modo a aceitar, como ponto de partida, os números naturais e suas operações fundamentais como objetos dados. O presente trabalho alinha-se com essa perspectiva pedagógica, para fins de ensino básico. Porém, tal perspectiva não é a mais usual entre os matemáticos. Usualmente, a perspectiva matemática é feita por algumas regras conhecidas como "axiomas de Peano":

> $\mathbb{N}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados *números naturais*. A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na palavra "sucessor". Intuitivamente, quando n,$n' \in \mathbb{N}$, dizer que n' é o sucessor de n significa que n'

> vem logo depois de n, não havendo outros números naturais entre n e n'. Evidentemente, esta explicação apenas substitui "sucessor" por "logo depois", portanto não é uma definição. O termo primitivo "sucessor" não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo enumeradas:
>
> a) Todo número natural tem um único sucessor;
>
> b)Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
>
> c)Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
>
> d) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.
>
> As afirmações a), b), c) e d) acima são conhecidas como os *axiomas de Peano*. Tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas. (LIMA et al, 2006, p.30)

Nessa metodologia formal, as operações de "adição" e "multiplicação" são adequadamente construídas encima da noção de "função sucessor". Não se explicitará isso aqui, por fugir do escopo do presente trabalho. O leitor interessado em tais detalhes, pode consultar a obra (LIMA et al, 2006). Porém, convém destacar a "regra c)" dos axiomas supracitados: é justamente ela que, formalmente, estabelece quem é o "primeiro número natural" e, portanto, formalmente responde aquele questionamento inicial se o zero seria, ou não, um número natural.

Por se tratar de um "axioma", a "regra c" é arbitrária e, tem sua significância em aspectos de conveniência. Portanto, zero poderia ser estabelecido como o "único natural que não é sucessor de nenhum outro". Porém, surge uma questão: isso seria conveniente? Depende da perspectiva teórica. Nesse sentido, há interessantes considerações do professor Elon Lages Lima em sua obra "Meu Professor de Matemática e outras histórias":

> (...)Incluir ou não o número 0 no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência.(...)Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$.
>
> Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo interesse é o estudo das operações, considere zero como um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença x-y seja uma operação com valores em $\mathbb{N}$ não somente quanto x>y mas também se x=y. Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.
>
> Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito frequentemente como índices de termos numa sequencia.(...) mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ (LIMA, 2006, p.150-151)

Enfim, é necessário reiterar que o presente trabalho milita pela inconveniência de se considerar "zero" como um número natural, no ensino básico, devido a aspectos históricos e pedagógicos. Porém, formalmente, tal escolha ou sua negação é arbitrária e artificiosa, conforme buscou-se explanar.

Convém destacar, também em especial para o docente, o "axioma d" dentre os "axiomas de peano". Tal axioma, conhecido como "axioma da indução", é certamente o mais relevante. Constituindo-se num poderoso método de demonstração acerca de proposições envolvendo números naturais, conhecido como "princípio da indução matemática". A essência de tal método será exposta.

De fato, seja P(n) qualquer tipo de proposição matemática acerca do natural "n" (uma sentença, desigualdade, fórmula... enfim, qualquer tipo de proposição matemática). Considere X o conjunto dos números naturais tais que P(n) é verdadeiro. Caso P(1) seja verdadeiro, teremos $1 \in X$ e, portanto, X será um subconjunto não vazio dos números naturais. Em seguida, vem o passo mais crucial da indução, conhecido como "hipótese de indução": se da *hipótese* de supor-se P(n) verdadeiro, puder ser deduzível que P(n+1) deverá ser igualmente verdadeiro então, em termos de conjuntos, estará sendo estabelecido que $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$. Assim, pelo "axioma da indução", configura-se que $X = \mathbb{N}$ e, portanto, P(n) será verdadeiro para qualquer número natural.

Diversos exemplos concretos e aplicações interessantes da indução matemática podem ser obtidos nas obras (LIMA et al, 2006); (COURANT;ROBBINS,2000) e (HEFEZ,2016). Ademais, consultando igualmente tais obras, verifica-se que o "axioma da indução matemática" é o equivalente lógico do "Princípio da Boa Ordenação"(PBO), sobre o qual se falará mais adiante.

A apreensão dos números naturais enquanto objetos para *contagem*, e a de suas operações aritméticas fundamentais, não é pedagogicamente problemática no ensino básico. Porém, tende a ser polêmico o que se constrói (ou melhor dizendo, não se constrói) depois dessa apreensão inicial dos números naturais. Nesse sentido, importantes propriedades dos números naturais tendem a ser "esquecidas" ou, quando muito, deficientemente apresentadas por, e isso é grave, não existir uma devida preocupação conceitual. Nessa linha tem-se,por exemplo, teoremas de "validade" estabelecida mediante a verificação de alguns casos particulares ou, o que talvez seja pior, mediante tão somente o argumento de autoridade docente. Nesse sentido, pode-se citar o "Teorema Fundamental da Aritmética" e o "Teorema da Divisão Euclidiana" como duas pérolas teóricas acerca dos naturais que, infelizmente, não tendem a ser adequadamente tratadas no ensino básico. Tais pérolas serão expostas.

Antes, porém, convém fazer uma digressão sobre o conceito de "números primos".

4.1 NÚMEROS PRIMOS: OS “ÁTOMOS” NATURAIS.

O conceito de número primo pressupõe a noção de divisibilidade, sendo, portanto, uma extensão do desenvolvimento conceitual das noções de operações fundamentais sobre os naturais. A dignidade imediata do conceito de número primo é sentida quando estuda-se o Teorema Fundamental da Aritmética (TFA), que será visto adiante. Pelo TFA, verifica-se que, num certo sentido que será visto, todo número natural pode ser expresso como produto de primos e, portanto, tais números seriam, metaforicamente falando, os “átomos” constitutivos dos números naturais.

Foquemos, portanto, no conceito de número primo.

Um número primo é um natural “p”, diferente de um, que tem como **únicos** *fatores* ele mesmo (o próprio p) e a unidade (Lembre-se que um inteiro a é um fator ou divisor de um inteiro b, se houver algum inteiro c, tal que b=ac). Quando um certo número natural não é primo, também diz-se que ele é um número *composto*.

Desse modo, segue que um número A será composto (não primo), se puder ser escrito na forma $A = p_1p_2$, onde p_1 e p_2 são naturais tais que 1<p_1<A e 1<p_2<A. Isso é tão somente uma implicação lógica da condição de um natural “não ser número primo”.

Após esse conceito, uma dúvida comum para as mentalidades discentes é: existem números primos? É fácil verificar experimentalmente a “primalidade” para números naturais “pequenos”. Rapidamente, as mentalidades discentes constatam experimentalmente que “2”, “3”, “5”, “7”, “11”... são números primos.

Quando as mentalidades discentes apreendem a existência de diversos números primos, uma posterior indagação natural seria: quantos números primos existem? Seriam poucos? Seriam muitos? Como se sabe, desde os tempos de Euclides, a resposta é: existem infinitos números primos.

A demonstração desse fato é um clássico exemplo de uma poderosa técnica de demonstração de teoremas conhecida por “redução ao absurdo” e, tradicionalmente, pressupõe o uso do TFA:

> A prova da infinidade da classe dos primos conforme fornecida por Euclides, permanece como um modelo de raciocínio matemático. Ela utiliza o “método indireto”. Partimos da hipótese de que o teorema é falso. Isto significa que haveria apenas um número finito de primos, talvez uma quantidade muito grande - cerca de um bilhão - ou, expresso de um modo geral e vago, n. Utilizando a notação de subscrito, podemos representar estes primos por $p_1, p_2, ..., p_n$. Qualquer outro número será composto, e deve ser divisível por pelo menos um dos primos $p_1, p_2, ..., p_n$. Chegaremos agora a uma contradição construindo um número A que difere de cada um dos primos $p_1, p_2, ..., p_n$ por ser maior do que qualquer um deles, e que no entanto não é divisível por qualquer deles. Este número é: $A = p_1p_2...p_n + 1$ (...) A é maior do que qualquer dos p e, portanto, deve ser composto. Porém, A dividido por p_1 ou por p_2, etc., sempre deixará o resto 1; portanto, A não tem qualquer dos p como

> divisor. Uma vez que nossa hipótese inicial de que existe apenas um número de primos leva a essa contradição, percebemos que a hipótese é absurda, e portanto seu contrário deve ser verdadeiro. Isto prova o teorema. (COURANT;ROBBINS, 2000, p.26-27)

A bem da verdade,a belíssima prova anterior possui uma leve incoerência com a linha adotada no presente texto. Não se falou ainda sobre "divisão com resto". Portanto, o que seria "A deixar resto 1"? Ademais, note que a demonstração parece pressupor o TFA, sobre o qual ainda não se analisou. Isso é mais "grave" com a linha discursiva aqui adotada.

Felizmente, a belíssima prova acima pode ser levemente adaptada para harmonizar com a linha discursiva do presente trabalho, ficando imaculada. De fato, basta observar que após a conclusão de $A = p_1p_2...p_n + 1$ como um número composto... Afirmou-se que existiria algum fator p_k, de A, tal que $p_k \in \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Ora, não analisou-se ainda o TFA. Assim, vamos nos convencer da existência de tal fator primo p_k, sem falar no Teorema Fundamental da Aritmética.

Se A é composto, então $A = p_1p_2$, com 1<p_2<A. Se p_2 for primo, então achamos um fator primo. Se p_2 não for primo, **repete-se a definição de composto** sobre p_2 e tem-se, que: $p_2 = p_{21}p_{22}$, com 1< p_{22} < p_2 < A=$p_1p_{21}p_{22}$. Se p_{22} for primo, então achamos um fator primo. Se p_{22} não for primo, **repete-se a definição de composto** sobre p_{22} e tem-se, que: $p_{22} = p_{221}p_{222}$, com 1<p_{222}< p_{22} < p_2 < A=$p_1p_{21}p_{221}p_{222}$. Agora reflete-se sobre a primalidade de p_{222} e... Ora, em algum momento, esse algoritmo irá retornar um fator primo. Pois, caso contrário, obteríamos uma sequência infinita de desigualdades encaixadas da forma 1<...<$p_{2..22}$<...<p_{222}< p_{22} < p_2 < A. Isso seria um absurdo porque, entre 1 e A, existe uma quantidade finita,um número fixo, de números naturais. Portanto, se A for composto, então **A deve ter algum fator primo** p_k. Portanto, $p_k \mid A$, ou seja, $A = p_kc$. (Um sutil alerta deve ser feito. A princípio, se o raciocínio desse parágrafo fosse reproduzido para todo fator composto de A, isso pareceria levar ao TFA. Trata-se de uma sutil cilada! De fato, é possível demonstrar que o uso reiterado desse raciocínio sob os sucessivos $\frac{A}{p_1..pk}$, onde cada p_k é um fator primo de A, levam a **alguma** fatoração de A em primos. Mas a unicidade da fatoração não é garantida por esse procedimento, forçando-nos a recair nas demonstrações clássicas do TFA. A unicidade da decomposição é, conforme será visto ao tratar-se dos irracionais, a característica mais relevante do TFA).

Voltando na construção de A, tem-se que:

$p_1p_2...p_n + 1 = p_kc \Rightarrow p_kc - p_1p_2...p_n = 1 \Rightarrow p_k(c - j) = 1$, onde j seria o inteiro "$p_1p_2...p_n$ dividido por p_k. Ou seja, $p_k \mid 1$. Dessa forma, obtêm-se um absurdo com o conceito de primo. Qual foi a causa desse absurdo? Supor a finitude de números primos. Está definitivamente estabelecido, portanto, que números primos são infinitos.

Uma observação merece ser feita. A prova euclidiana da infinitude de primos, conforme (COURANT;ROBBINS, 2000) alerta, faz mais do que demonstrar a infinitude. Sutilmente, a argumentação esconde mais: ela fornece um método para obter-se números primos. De fato, suponhamos que somente n números primos sejam conhecidos. Em seguida, monte a lista

$\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ que contenha **todos** os n números primos conhecidos. Construído o natural $A = p_1 p_2 ... p_n + 1$, pergunta-se: tal número poderia ser composto? Se fosse composto, ele deveria ter um fator primo. Porém, tal fator primo não poderia ser um dos “primos conhecidos” (pois, se fosse, algum “primo conhecido” deveria dividir a unidade. Um absurdo.). Portanto, no caso de A ser composto, ele deverá ter algum fator primo distinto dos “primos inicialmente conhecidos” ou ser, ele mesmo, um novo número primo. De qualquer forma, têm-se a certeza que, buscando-se os fatores de A, sempre se obterá pelo menos um “novo número primo”.

Mas conforme se pode verificar na prática, tal procedimento para se obter primos é pouquíssimo eficiente conforme se aumenta a quantidade de números primos “conhecidos”. De fato, conforme tal quantidade aumenta, o número construtível $A = p_1 p_2 ... p_n + 1$ torna-se “muito grande”, dificultando a fatoração.

Existiria, portanto, outra forma sistemática para se obter números primos? O método mais rudimentar e famoso, é o bem divulgado “crivo de Eratóstenes”, também um legado dos antigos gregos:

> Uma lista de todos os primos até qualquer inteiro N dado pode ser elaborada escrevendo-se na ordem todos os inteiros menores do que N, assinalando todos os múltiplos de 2, depois todos os restantes múltiplos de 3, e assim por diante até que todos os múltiplos tenham sido eliminados. Este processo, conhecido como “crivo de Eratóstenes” reterá em suas malhas os primos até N. (COURANT; ROBBINS, 2000, p.30)

Nesse ponto, eis uma questão que não costuma ser debatida no ensino básico: por que o “crivo de Erastóstenes” funciona? A validade é usualmente apreendida diretamente pelo Teorema Fundamental da Aritmética(TFA), sobre o qual se falará na próxima seção. Somente a título de curiosidade, será exposto rapidamente como fazer tal conexão. Uma consequência do TFA é que todo número composto possui algum fator primo (a bem da verdade, conforme demonstrou-se, não é necessário o TFA para extrair tão somente um fator primo). Pela definição da relação de divisão, tal fator primo sempre será, evidentemente, menor que o próprio número composto. Esses fatos bastam pra entender a validade do Crivo de Eratóstenes. De fato, suponhamos que, após a correta execução do procedimento de Eratóstenes, restasse algum número composto P na malha, não assinalado. Logo, P teria algum fator primo menor que P. Digamos que tal fator seja “a”. Como 1<a<P<N, segue que “a” estaria na lista inicial dos naturais entre 1 e N e, portanto, já era pro “P ter sido assinalado”, quando se executou o algoritmo de Eratóstenes para o natural “a” (Pois P é múltiplo de a). Logo, não é possível supor a existência de tal P composto, retido na malha (ou seja, não assinalado), após execução correta do crivo de Eratóstenes. Isso garante a funcionalidade do algoritmo de Eratóstenes.

O Crivo de Eratóstenes, embora seja um elementar método para obter-se sistematicamente números primos, torna-se cansativo e progressivamente pouco eficiente conforme o natural N aumenta. Na busca por números primos, outra natural indagação pode surgir: existiria alguma fórmula matemática **simples** que desse como resultado todos os números primos? Até hoje, não há resposta para tal indagação. Na história da Matemática, tal dúvida constituiu-se numa verdadeira obsessão. Muitas mentes de primeira grandeza buscaram resolver tal problema. Porém, sem sucesso. O grande matemático Carl Friedrich Gauss estabeleceu, por volta do século XVIII, uma importante ruptura de paradigma para com tal obsessão:

> Na busca de uma lei que governasse a distribuição dos primos, o passo decisivo foi dado quando os matemáticos desistiram das tentativas inúteis de encontrar uma fórmula matemática simples que produzisse todos os primos ou fornecesse o número exato de primos contidos entre os n primeiros inteiros, e procurassem ao invés disso informações relativas à distribuição média dos primos entre os inteiros. (COURANT;ROBBINS, 2000, p.32)

Essa mudança de paradigma conduziu Gauss ao "teorema dos números primos", sobre o qual faremos apenas uma breve citação a título de curiosidade (em especial, curiosidade docente) pois, seu teor, extrapola em muito o foco pedagógico do presente trabalho.

Para qualquer natural n, chamamos de A_n a quantidade exata de números primos que existem entre os inteiros 1,2,3,...,n. Assim, a título de exemplo, temos que $A_1 = 0$, $A_2 = 1$ e $A_3 = A_4 = 2$

Em seguida, Gauss começou a ponderar acerca dos números $\frac{A_n}{n}$ (a "densidade dos primos"). Dessa forma, através de estudos essencialmente empíricos, observando padrões, e considerando o conceito de "logaritmo natural", Carl Friedrich Gauss observou que:

$\frac{A_n}{n} \sim \frac{1}{\ln n}$, à medida que n aumenta. Ou seja, quanto maior for o n, mais a razão $\frac{\frac{A_n}{n}}{\frac{1}{\ln n}}$ fica cada vez mais próxima do número 1. Dessa forma, para valores grandes de n, podemos, por exemplo, ter excelentes estimativas para A_n.

Pois, $\frac{A_n}{n} \sim \frac{1}{\ln n} \Rightarrow A_n \sim \frac{n}{\ln n}$

Somente no final do século XIX que a conjectura de Gauss foi rigorosamente validada, fazendo do "teorema" dos números primos um genuíno teorema. Apesar de modernas simplificações em demonstrações desse teorema, ainda assim elas persistem como extremamente complexas e sofisticadas. Para o leitor interessado em maiores detalhes, convém consultar o trabalho de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000).

4.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Esse tópico versará detalhadamente sobre uma importante pérola da Teoria dos Números: o basilar Teorema Fundamental da Aritmética (TFA). Para fins do presente trabalho, a dignidade do TFA será especialmente sentida quando discorrer-se acerca da incomensurabilidade entre certos segmentos de reta: o Teorema Fundamental da Aritmética será a chave para a conceituação dos números irracionais.

Preliminarmente, o presente trabalho destaca que a clássica demonstração do TFA, a qual será feita, pressupõe essencialmente a noção do "Princípio da Boa Ordenação(PBO)". Tal princípio, vinculado ao conceito dos números naturais, afirma que todo subconjunto não vazio de números naturais admite um menor elemento. Isso ecoa como uma tediosa trivialidade para o discente do ensino básico e, portanto, o presente trabalho irá utilizar o PBO sem maiores pudores formalistas. Não deseja-se recair num formalismo estéril para o ensino básico. O leitor interessado em detalhes formais, poderá constatar que o PBO é equivalente ao axioma da indução, dentre os axiomas de Peano, consultando as obras “Aritmética” (HEFEZ, 2006) e o primeiro volume da “Matemática do Ensino Médio”(LIMA et al, 2006).

Após essa observação preliminar, pertinente para a docência, parte-se para uma clássica demonstração do TFA. A exposição será essencialmente conforme as clássicas obras de Ivan Niven (NIVEN, 2012) e, em especial, a de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000). Porém, será feito, pelo presente trabalho, uma sutil proposta de acréscimo argumentativo nessas clássicas demonstrações.

O Teorema Fundamental da Aritmética(TFA) afirma que: “**Todo número natural, diferente de 1, pode ser escrito como um produto de números primos de modo único, exceto pela ordem dos fatores. (Ou seja, pode ser decomposto em fatores primos de modo único, a menos da ordem dos fatores).**”

Quando esse enunciado é apresentado para as mentalidades discentes, convém estabelecer duas considerações. A primeira é que, dado um número primo, subtende-se que ele já está “decomposto em fatores primos”. Assim, por exemplo, dado o natural 11, subentende-se que tal número já está decomposto em “fatores primos”. A segunda consideração seria quanto a unicidade da decomposição: através de exemplos particulares de decomposição em fatores e relembrando a comutatividade e associatividade da multiplicação, convém destacar que a “ordem dos fatores não altera o produto”. É nesse sentido que entende-se decomposição de “modo único”, decomposição em primos “essencialmente única”. O docente deve explorar muitos exemplos particulares nesse linha.

Após a exposição de muitos casos particulares de validade do TFA, deve-se iniciar o pensamento generalista e, portanto, a demonstração do teorema. A prova será feita por redução ao absurdo. Nega-se o TFA e obtêm-se alguma contradição. O que significa, pelo método da redução ao absurdo, negar a validade do TFA?

Negar a validade do TFA, significa que deve ocorrer o “caso i” ou o “caso ii”:

i) Deveria existir algum natural que não admitisse decomposição em primos;

ii) Deveria existir algum natural capaz de duas decomposições em primos essencialmente diferentes (ou seja, duas decomposições com primos distintos ou quantidade de primos distinta).

Interessante notar que as obras clássicas de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000) e Ivan Niven (NIVEN,2012) somente desenvolvem o caso “ii”, aparentemente pressupondo o caso “i” como uma trivialidade (ou será que não observou-se a sutileza da existência do caso “i”?):

> Ofereceremos uma prova mais atualizada, até certo ponto mais abreviada e talvez mais sofisticada que a de Euclides. É um exemplo típico de prova indireta. Devemos supor a existência de um inteiro capaz de duas decomposições em primos essencialmente diferentes, e a partir dessa hipótese deduzir uma contradição. Esta contradição mostrará que a hipótese de que existe um inteiro com duas decomposições em primos essencialmente diferentes é insustentável, e portanto, de que a decomposição em primos de qualquer inteiro é única. (COURANT;ROBBINS, 2000, p.27-28)

E nessa linha, verifica-se que Richard Courant e Herbert Robbins desenvolvem, tão somente, o caso "ii". Quanto ao clássico de Ivan Niven, têm-se a mesma perspectiva. Após consideração de casos particulares de validade do TFA, estabelece-se a estratégia análoga:

> Precisaremos recorrer a um argumento matemático. Fizemos uma lista dos números de 2 até 10, cada um com sua decomposição única em fatores primos. Ou essa lista pode ser estendida indefinidamente de modo que, para todo número natural, haja uma decomposição única em fatores primos, ou então, em algum lugar da listagem, a propriedade da decomposição única irá falhar. Essas são as duas únicas possibilidades. Queremos demonstrar a primeira dessas duas possibilidades e vamos fazê-lo usando um argumento indireto. (NIVEN, 2010, p.144)

Na literatura nacional, o matemático brasileiro Abramo Hefez (HEFEZ,2016) demostra explícita preocupação com o "caso i" e, a bem da verdade, aproximadamente metade de sua demonstração para o TFA está focada em estabelecer que, para todo inteiro, existe alguma decomposição em primos. Em seguida, demonstra-se a unicidade da escrita. Porém, a via adotada por Abramo Hefez é a de se utilizar integralmente a "segunda forma do Princípio da Indução" (uma equivalência do axioma da indução de Peano). Nota-se, portanto, que o recurso é inadequado para o ensino básico. Porém, conclui-se pela plausibilidade da dignidade de preocupação para com o "caso i". Afinal, o insígne matemático brasileiro Abramo Hefez (HEFEZ, 2016) considera a pertinência do "caso i".

A presente dissertação propõe uma demonstração para "caso i" pela via do PBO, coerente com o ensino básico. De fato, suponha a existência de algum natural que não admita nenhuma decomposição em primos. Considere o conjunto que contenha todos números que não admitam decomposição em primos. Assim, pelo PBO, seja n o menor natural que não admita decomposição em primos. Logo, tal natural deve ser um número composto (lembre-se que convencionou-se "ser primo" como "estar decomposto em fatores primos"). Dessa forma, sendo n composto, teremos que $n = n_1n_2$, com 1<n_1<n e 1<n_2<n. Assim, pelo PBO em n, temos que tanto n_1, quanto n_2 admitem decomposição em primos e, portanto, substituindo tais decomposições na equação $n = n_1n_2$, chega-se numa decomposição em primos para n. Contradição com a definição de n. Logo, é inaceitável supor a ocorrência do "caso i".

Assim, qualquer que seja o número natural, existirá uma decomposição em primos para tal número. Resta agora resolver o seguinte dilema: algum número natural poderia ter duas decomposições distintas em primos, excetuando-se a ordem dos fatores? Isso leva ao enfrentamento do caso "ii". Para tal, será reproduzida a demonstração de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000).

Suponhamos a existência de um natural capaz de duas decomposições em primos essencialmente distintas. Logo, pelo PBO, existirá o **menor** natural com tal propriedade. Seja m tal inteiro. Logo, tem-se que:

(1) $m = p_1p_2...p_r$ e $m = q_1q_2...q_s$, onde os p e os q são primos.

Reordenando os p e os q se necessário, podemos estabelecer que: $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_r$, $q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_s$. Ademais, observemos que não é possível ter-se $p_1 = q_1$. Pois, se ocorresse tal igualdade, substituindo $p_1 = q_1 = q$ na equação (1), teríamos que $\frac{m}{p_1} = p_2...p_r = q_2...q_s$ com $\frac{m}{p_1}$ sendo, portanto, um inteiro menor que m e com duas decomposições em primos essencialmente distintas (contradição com a definição de m pelo PBO!).

Logo, deve-se ter ou $p_1 < q_1$, ou $p_1 > q_1$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $p_1 < q_1$ (o outro caso será exatamente análogo).

Em seguida, constrói-se o seguinte natural:

(2) $m' = m - (p_1q_2q_3...q_s)$.

Substituindo em m as duas expressões da equação (1) podemos obter mais duas equações para a escrita de m':

(3) $m' = (p_1p_2...p_r) - (p_1q_2...q_s) = p_1(p_2...p_r - q_2...q_s)$

(4) $m' = (q_1q_2...q_s) - (p_1q_2...q_s) = (q_1 - p_1)(q_2...q_s)$

Agora, basta interpretar as novas equações. Extrair todas as implicações pertinentes.

Como $p_1 < q_1$, seque-se por (4) que m' é um número natural, pois $(q_1 - p_1) > 0$. Ademais, pela equação (2), tem-se que m' é menor que m. Portanto, pela definição de m, segue que a decomposição em primos de m' **deve ser essencialmente única**.

Por outro lado, a equação (3) demonstra claramente que p_1 é fator primo de m'. Portanto, sendo a decomposição em primos de m' essencialmente única, têm-se, pela equação (4), que p_1 é fator $(q_1 - p_1)$ ou de $(q_2...q_s)$. (isso é decorrência da unicidade de decomposição em primos de m'). Porém, note que é impossível p_1 ser fator primo de $(q_2...q_s)$, pois todos os fatores q são maiores do que p_1. Portanto, p_1 deve ser fator de $(q_1 - p_1)$. Ou seja, existe um inteiro a tal que $(q_1 - p_1) = ap_1$. Equivalentemente, a última equação significa que $q_1 = p_1(a + 1)$. Ou seja, p_1 seria deveria ser um fator de q_1. Absurdo! Pois q_1 foi suposto primo.

Está completa a clássica demonstração do TFA.

Esse importante teorema, conforme já dito, será a "chave de ouro" para reconhecer a existência de números irracionais. Em termos pragmáticos, existem diversas aplicações imediatas interessantes do TFA tais como, por exemplo, cálculo de MDC e MMC entre inteiros e a determinação da quantidade de divisores de um inteiro. O leitor interessado nesses aspectos, deve consultar (COURRANT; ROBBINS, 2000) ou (HEFEZ,2016).

4.3 TEOREMA DA DIVISÃO EUCLIDIANA

A demonstração que será feita utilizará fundamentalmente o Princípio da Boa Ordenação (PBO), sobre a qual já se discorreu, e uma propriedade das desigualdades nos inteiros conhecida como “Propriedade Arquimediana”.

Sobre a Propriedade Arquimediana, para os números naturais, trata-se do seguinte: dados dois naturais “c” e “d”, existiria algum natural “n” tal que nc > d. De fato, basta tomar n como sendo igual a d.

O Teorema da Divisão Euclidiana para números naturais afirma o seguinte: **Sejam “a” e “b” números naturais. Então, existirão únicos naturais q e r tais que** $a = bq + r$**, onde r satisfaz a desigualdade** $0 \leq r$**< b.**

Preliminarmente, deve-se estimular as mentalidades discentes a apreender que somente o caso a>b é interessante. Sendo os outros, triviais. Trata-se de focar no caso mais interessantes. Em seguida, seguem duas observações.

A primeira observação é somente para os docentes. A rigor, considerando a linha discursiva adotada nesse trabalho, não se falou do número zero como natural e, mais ainda, a relação de desigualdade foi definida tão somente entre os naturais. Isso é um problema para puristas. Mantendo a linha discursiva do trabalho, isso pode ser facilmente contornado reescrevendo o Teorema como “(...) Então, ou a será múltiplo de b ou existirão únicos q e r tais que $a = bq + r$, com r satisfazendo a desigualdade $1 \leq r$< b.”. Evidentemente, essa celeuma é, ao menos num primeiro momento, completamente descabida no ensino básico. O zero será usado sem maiores pudores.

A segunda observação é sobre a estratégia a ser adotada para a demonstração do teorema. **Trata-se de um teorema de existência e unicidade.** Ou seja, convém primeiro demonstrar a existência e, em seguida, a unicidade dos números “q” e “r”. Para demonstrar a existência, a intuição geométrica é um poderoso farol, se imaginamos os números naturais sobre a reta numérica. Nessa linha, temos a leitura estratégica de Richard Courant e Herbert Robbins:

> (...)precisamos apenas observar que qualquer inteiro a é um múltiplo de b, a=bq, ou está situado entre dois múltiplos sucessivos de b, bq<a<b(q+1)=bq+b. No primeiro caso, a equação (...) é válida com r=0. No segundo caso temos, a partir da primeira das desigualdades acima, $a - bq = r > 0$, enquanto que a partir da segunda desigualdade temos $a - bq = r < r$, de modo que 0<r<b conforme requirido(...). (COURRANT;ROBBINS, 2000, p.50-51)

Nesse sentido estratégico, pode ser didaticamente interessante o docente trabalhar preliminarmente muitos casos geométricos particulares da divisão euclidiana e, inclusive, valendo-se para tal de softwares tais como o Geogebra. Tudo isso para bem convencer as mentalidades discentes acerca da conveniência estratégica a ser adotada no pensamento generalista, que estabelecerá o teorema. Afinal, uma das maiores tragédias pedagógicas, na demonstração de um Teorema, é passar para o receptor a impressão de "inspiração obscura". Isso empobrece muito o pensamento matemático e estimula visões distorcidas acerca da natureza da Matemática. O docente deve evitar ao máximo tal obscuridade.

Foquemos, enfim, na demonstração.

4.3.1 Componente da existência

Preliminarmente, considerando a relação entre "a" e "b", vamos eliminar os casos triviais. Note que se a=b, então temos q=1 e r=0. Ademais, se fosse a < b, então teríamos a = 0b + a. Assim, q=0 e 0<a=r<b. Portanto, deve-se focar no caso mais interessante, qual seja, aquele em que a>b.

Dessa forma, temos duas possibilidades lógicas mutuamente exclusivas: ou "a" é múltiplo de "b" (caso i), ou "a" NÃO é múltiplo de "b" (caso ii).

Caso i) $\Rightarrow$

Sendo a múltiplo de b, existirá, por definição "múltiplo", um natural q tal que a = bq. Nesse caso, basta tomar r=0. **Isso finaliza, para o caso i, a parte da existência do Teorema.**

Caso ii) $\Rightarrow$

Pela Propriedade Arquimediana, existirá algum natural "n" tal que bn > a. Ou seja, existe algum múltiplo de b maior que a. Pelo PBO, pensando no conjunto de todos os múltiplos de b maiores que a, existirá um **menor** número com tal propriedade. Seja bk tal número. Logo, pela construção via PBO, o número natural b(k-1) deve ser menor ou igual a "a". A igualdade está descartada, pois recairia-se no "caso i".
Assim, tem-se:
$b(k-1) < a < bk$. Definindo q=(k-1), segue que existe um natural q tal que $bq < a < b(q+1)$ (Note que certamente q é natural. Pois, se fosse nulo, k seria 1. De modo que teríamos, pela construção via PBO, bk=b.1>a. Absurdo com a hipótese inicial de a>b).

Basta concentrar-se agora na desigualdade $bq < a < b(q+1)$ (1).

De fato, por $bq < a$ segue que, pela definição de relação de desigualdade, existe um natural r tal que $a = bq + r$. (2)

Suponhamos, por redução ao absurdo, que $r \geq b$.

O caso $r = b$ está imediatamente descartado, pois implicaria em $a = bq + b = b(q+1)$ e, portanto, recair-se-ia no "caso i".

Se fosse $r > b$, seguiria, pela definição da relação de desigualdade, que existiria "c" natural tal que $r = b + c$. Portanto, substituindo na equação (2), seguiria que

$a = bq + (b + c) = b(q + 1) + c \Rightarrow a > b(q + 1)$. Mas isso seria uma contradição com a segunda parte da desigualdade em (1).

Portanto, é insustentável supor $r \geq b$ e, desse modo, o r da equação (2) deve ser tal que $0 < r \leq b$.

Isso finaliza, para o caso ii, a parte da existência do Teorema e, portanto, tudo acerca da existência dos naturais q e r desejados.

4.3.2 Componente da unicidade

Deseja-se agora mostrar que os números “q” e “r”, de existência demonstrada anteriormente, são únicos para a escrita $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. A estratégia será a de supor duas escritas e demonstrar que, na realidade, elas devem ser iguais entre si. Haverá, portanto, somente uma escrita.

Suponha a existência de duas escritas. Ou seja:

(1) $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$

(2) $a = b'q + r'$, com $0 \leq r' < b$

Igualando (1) e (2), segue que:

$bq + r = bq' + r'$, onde podemos supor $r \neq r'$. Pois, caso tivéssemos $r = r'$, isso implicaria em $bq = bq'$ e, portanto, que $q = q'$, finalizando a prova.

Admita, sem perda de generalidade, que $r' > r$ (o caso contrário é análogo, simétrico).

Assim, têm-se que:

$bq + r = bq' + r' \Rightarrow b(q - q') = r' - r \Rightarrow b \mid (r' - r) \Rightarrow (r' - r) = bk$, para algum natural $k \geq 1$.$\Rightarrow r' = bk + r \Rightarrow r' \geq b$, pois $k \geq 1$. Mas a conclusão $r' \geq b$ é uma contradição com a equação (2). Qual foi a causa dessa conclusão contraditória? Supor que $r \neq r'$. Deve-se ter, portanto, sempre $r = r'$ e assim, conforme já analisado, isso implicará em $q = q'$. $\square$

5 NÚMEROS INTEIROS

Os números inteiros, que atual e formalmente são vistos como a primeira extensão "óbvia" dos números naturais, possuem, a bem da verdade, na história do pensamento matemático, uma existência mais recente até mesmo que a dos números racionais. Nesse sentido, alinha-se o matemático Ivan Niven (NIVEN, 2012) quando identifica o surgimento consistente dos inteiros negativos com pragmáticas necessidades modernas de algebristas italianos.

O professor Abramo Hefez também expressa tal perspectiva, ressaltando o aspecto pragmático na gênese do conceito de "número negativo":

> O conceito de número inteiro originou-se do conceito bem mais antigo de número natural, cuja criação objetivava resolver problemas de contagem. Os números negativos têm sido considerados esporadicamente desde a antiguidade, mas sempre com muita desconfiança por parte dos matemáticos até que, a partir do desenvolvimento das atividades mercantis que ocorriam na Europa no final da Idade Média, sentiu-se a necessidade de considerar os inteiros relativos e com eles efetuar operações. O matemático da Bolonha, Rafael Bombelli (...) A evolução da noção intuitiva de número inteiro para um conceito mais elaborado foi muito lenta. Só no final do século XIX, quando os fundamentos de toda a matemática foram questionados e intensamente repensados, é que a noção de número passou a ser baseada em conceitos da teoria dos conjuntos, considerados mais primitivos. (HEFEZ, 2016, p.2)

Não serão feitos maiores comentários históricos acerca dos inteiros. O leitor interessado em mais detalhes nessa perspectiva, pode sempre consultar a obra de Howard Eves (EVES,2011).

Tal como no caso dos números naturais, uma premissa adotada pelo presente trabalho é que a existência dos números inteiros e a de suas duas operações aritméticas fundamentais - a adição e multiplicação - não são, por si, aspectos problemáticos no ensino básico brasileiro. A problemática estaria, portanto, no que se faz com tais noções fundamentais e, assim sendo, tais noções fundamentais serão estabelecidas como marco inicial da digressão sobre inteiros, sem maiores pudores. Assim sendo, os números inteiros são os seguintes:

$$...-4, -3,-2,-1, 0 , 1, 2, 3, 4...$$

Tais números gozam de duas operações aritméticas fundamentais trivialmente conhecidas por "adição" e "multiplicação". Tais operações sobre os Inteiros, assim como nos naturais, gozam de uma série de regras fundamentais. Trata-se das "leis fundamentais da aritmética", as quais as mentalidades discentes pacificamente apreendem mediante verificação de muitos casos particulares. Porém, nem sempre há a ciência da nomenclatura de tais regras (isso é, por si, algo completamente irrelevante. O essencial é a apreensão material das ideias).

Sejam a, b e c números inteiros. A adição e a multiplicação respeitam as seguintes leis: Lei comutativa da adição ($a + b = b + a$); Lei comutativa da multiplicação ($ab = ba$); Elemento neutro multiplicativo ($a * 1 = a$); Lei associativa da adição ($a + (b + c) = (a + b) + c$); Lei associativa da multiplicação ($a(bc) = (ab)c$); Lei distributiva ($a(b + c) = ab + ac$); Existência de elemento neutro aditivo ($a + 0 = a$); Existência de elementos simétricos para a adição (ou seja, para todo $a \in \mathbb{Z}$, existe inteiro $d = -a$ tal que $a + d = 0$) e Tricotomia (que significa o seguinte: Uma, e apenas uma, das seguintes possibilidades sempre é verificada: i) $a = b$; ii) $b - a \in \mathbb{N}$ ou iii) $-(b - a) = a - b \in \mathbb{N}$)

Embora a listagem de regras acima possa parecer um tanto quanto tediosa, em especial para as mentalidades discentes, fato é que as seis primeiras são absolutamente idênticas às dos números naturais. Poder-se-ia focar, portanto, tão somente nos regramentos 7, 8 e 9.

Na construção de conceitos matemáticos, o firme estabelecimento dos marcos iniciais é de fundamental relevância. Nesse sentido, sempre convém relembrar a perspectiva de Elon Lages Lima: "(...)Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir uns tantos outros fatos conhecidos. Esta é a natureza da Matemática(...)"(LIMA, 2006, p. 152).

Conceitualmente, conforme será visto, a noção de "Tricotomia" nos inteiros tem significância para desenvolver-se a noção de "ordem", ou seja, a relação de desigualdade. A Tricotomia, tal como foi expressa, é uma genérica versão de Abramo Hefez (HEFEZ, 2016). A via mais usual é expressar a noção de tricotomia quando, dado um inteiro "b", considera-se o "a" como sendo nulo. Assim, utilizando a versão de Hefez, seguiria que: ou b seria zero, ou b seria positivo ou b seria negativo (onde "ser negativo" é, tão somente, uma nomenclatura para expressar a situação de "-b" ser um número natural).

O interesse do presente trabalho está no uso inteligente desses marcos iniciais que legitimam, por exemplo, a famosa "regra dos sinais" na operação aritmética da multiplicação. Aquele que perguntar, para a mentalidade discente média, a causa de "menos vezes menos ser mais"... Possivelmente obterá um "ensurdecedor silêncio". São em problemáticas dessa natureza que o presente trabalho está focado.

Enfim, a essencialidade conceitual das noções de subtração, ordem e divisão serão brevemente explicitadas e, para o leitor interessado em maiores detalhes, será indicada bibliografia para o aprofundamento.

Bem apreendida a noção de "adição" e a regra da existência de "elementos simétricos" para a adição, surge a formal noção de *subtração* em $\mathbb{Z}$: subtrair é somar o inverso aditivo. Ou seja, dados inteiros "a" e "b", define-se o número a *menos* b, denotado por $a - b$, como sendo "a" somado com "$-b$". Portanto, $a - b = a + (-b)$.

Quanto a noção de ordenação nos Inteiros, a relação de desigualdade, ela é construída, conforme já explicitou-se, pela via da noção de tricotomia. De fato, dados "a" e "b" inteiros, pode ocorrer, pela noção de tricotomia, que $b - a \in \mathbb{N}$. Quando isso ocorrer, define-se a<b (leia-se, "a é menor do que b" ou, equivalentemente, "b é maior que a"). Interessante notar que *somente* isso basta para bem definir a relação de ordem. Pois, sendo "a" e "b" distintos, caso

fosse $b - a \notin \mathbb{N}$, necessariamente ter-se-ia $-(b-a) = a - b \in \mathbb{N}$. Portanto, pela noção de ordem já estabelecida, seguiria que b<a. A relação de desigualdade, goza de uma série propriedades manipulatórias que são bem conhecidas na cotidiana mecânica aritmética escolar. Por exemplo, tal relação é transitiva; compatível e cancelativa com a adição etc. Todas essas propriedades são provadas considerando as leis fundamentais da aritméticas dos inteiros e, em especial, a tricotomia. O presente trabalho não fará maiores considerações acerca disso. O leitor interessado em maiores detalhes demonstrativos, pode consultar (HEFEZ,2016).

Por fim, considera-se brevemente a essencialidade conceitual da noção de divisibilidade nos inteiros. Trata-se de noção análoga a dos naturais. Porém, conforme Ivan Niven (NIVEN,2012) destaca, deve-se pedir unicidade na definição do quociente da divisão, tendo em vista a existência do elemento neutro aditivo. De fato, sejam "a" e "b" dois números inteiros quaisquer. Se existir um *único* número inteiro "c", tal que b=ac, então diz-se que "a" *divide* "b". Simbolicamente, expressa-se tal fato por $a \mid b$. Por outro lado, se não existir um único c tal que b=ac, então "a"não divide "b" e, simbolicamente, expressa-se isso por $a \nmid b$.

Essa forma de conceber a divisão nos inteiros, possibilita "blindagem" para certas situações formais potencialmente "desconcertantes". Vejamos uma clássica situação dessa: porque não é possível dividir-se por zero? Ora, pela *definição de dividibilidade nos inteiros*, se fosse possível $0 \mid a$, para algum inteiro "a", então existiria um único inteiro c tal que $a = c.0$. Analisando a última equação, percebe-se que a igualdade fica prejudicada caso "a" seja não nulo, pois c.0 sempre será nulo, qualquer que seja "c". Mas e se "a" fosse zero? Nesse caso, a igualdade seguiria para *qualquer* inteiro "c", não existiria *unicidade* de tal inteiro. Portanto, de qualquer forma, compreende-se a impossibilidade da divisão por zero. Mais que isso: a argumentação feita no parágrafo anterior, quando analisou-se o caso "a=0", também explicitou o fato de "$0/0$" ser uma "indeterminação" (pois $0 = c.0$, para qualquer inteiro c).

5.1 PBO E PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA

Tal como nos naturais, nos inteiros continua valendo o PBO (Princípio da Boa Ordenação). Porém, devido a existência dos números negativos, é necessário fazer uma leve adequação nas hipóteses do PBO: exigir que os os conjuntos sejam limitados inferiormente.

E o quê significa um conjunto de inteiros ser limitado inferiormente? Formalmente, um subconjunto X de $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, se existir $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \leq x$, para todo $x \in$X.

A bem da verdade, uma vez que os naturais estão contidos nos inteiros, uma perspetiva sagaz acerca do PBO consiste em vê-lo como uma propriedade distintiva dos inteiros. Nessa linha, temos as ponderações de Abramo Hefez que, além de **revelarem o que se entende por PBO**, demonstram sua significância nos inteiros:

> As propriedades dos números inteiores e de suas operações que descrevemos até o momento não bastam para caracterizá-los. (...) há uma propriedade adicional que só os inteiros possuem, que é o *Princípio da Boa*

> *Ordenação*, que passamos a descrever(...) *Princípio da Boa Ordenação*: Se S é um subconjunto não vazio de $\mathbb{Z}$ e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.(...) Na realidade, este é o único axioma que faltava para caracterizar os números inteiros. Qualquer propriedade dos números inteiros pode ser deduzida por meio desses(...)axiomas. (HEFEZ, 2016, p.10)

Dessa forma, Abramo Hefez (HEFEZ,2016) demonstra a importância do PBO ao utilizá-lo para demonstrar a inexistência de números inteiros maiores que zero e menores que um. Um corolário disso é, de forma mais geral, a inexistência de números inteiros entre um inteiro qualquer e seu respectivo sucessor. Ademais, conforme o professor Abramo Hefez (HEFEZ, 2016) sustenta, tal propriedade é o seguro fundamento para a propriedade arquimediana nos inteiros.

Mas a importância do PBO vai além e,nesse trabalho, será ressaltada inclusive quando se tratar da irracionalidade de alguns números. De fato, algumas demonstrações sobre irracionalidade de certos números possuem, conforme será visto, a seguinte mecânica: supõe-se, por redução ao absurdo, que o número seja racional. Então, após uma série de implicações lógicas legítimas, obtêm-se um inteiro maior que zero e menor que a unidade. Ora, como o PBO garante a impossibilidade da existência de tal inteiro, conclui-se pelo absurdo e,portanto, pela irracionalidade do número em questão. Vejamos, portanto, as duas aplicações imediatas do PBO nos inteiros segundo o professor Abramo Hefez (HEFEZ, 2016). As demonstrações serão essencialmente uma breve reprodução da argumentação desse insígne professor e, para o leitor interessado em maiores detalhes, recomenda-se consultar a obra (HEFEZ,2016).

1) Não existe nenhum número inteiro n tal que $0<n<1$. Ademais, dado um inteiro a qualquer, não existe nenhum número inteiro m tal que $a<m<a+1$

Suponha, por redução ao absurdo, que exista n inteiro tal que $0<n<1$. Defina X como o conjunto que contenha todos os inteiros maiores que zero e menores que um. Segue que $n \in$X e, pela construção de X, tal conjunto é limitado inferiormente por zero. Logo, pelo PBO, existe $c \in$X de modo que c é o menor elemento. Note que $0<c<1$ e, pelas propriedades operatórias da relação de desigualdade, têm-se que $0<c^2<c<1$. Ou seja: obteu-se um inteiro (c^2) maior que zero, menor que um e menor que o c. Absurdo, uma vez que c, pelo PBO, deveria ser o menor inteiro maior que zero e menor que a unidade.

Portanto, não existe inteiro n tal que $0<n<1$. Isso demonstra a primeira parte. Agora, dado um inteiro a, suponhamos por redução ao absurdo, que exista m tal que $a<m<a+1$. Logo, pelas propriedades operatórias da relação desigualdade, segue que $0=a-a<m-a<(a+1)-a=1$ e, portanto, obtêm-se um inteiro da forma (m-a) maior que zero e menor que um. Absurdo.

2) PROPRIEDADE ARQUIMEDIANA: Sejam a,b $\in \mathbb{Z}$, com b $\neq 0$. Então existe n $\in \mathbb{Z}$ tal que $nb>a$.

Preliminarmente, para facilitar o algebrismo da demonstração, convém usar o conceito de módulo. Dado $a \in \mathbb{Z}$, define-se $|a|$ (leia-se, "módulo de a") como sedo o próprio "a", caso tenhamos $a \geq 0$. Caso $a < 0$, então, define-se $|a| = -a$. Duas consequências imediatas da definição de módulo é que $|a| \geq a$ e $|a| \geq 0$, para todo a$\in \mathbb{Z}$. Isso será usado.

Foquemos, agora, na propriedade arquimediana. Como $b \neq 0$, têm-se que $|b| \geq 1$ (pois, $|b|$ é um inteiro maior que zero e, conforme demonstrou-se pelo PBO, não há inteiro maior que zero e menor que a unidade). Logo, pelas propriedades operatórias da relação de desigualdade, têm-se:

$$|b| \geq 1 \Rightarrow (|a|+1)|b| \geq (|a|+1) > |a| \geq a \Rightarrow (|a|+1)|b| \geq a.$$

E a propriedade arquimediana segue da última desigualdade acima. Basta tomar $n = |a| + 1$, se b>0 e $n = -(|a|+1)$, se b<0.

5.2 A REGRA DOS SINAIS NA MULTIPLICAÇÃO

Se fosse estabelecido uma lista com conceitos de fundamentação obscura no ensino básico, provavelmente a "regra dos sinais" deveria constar nela. Mecanicamente, as mentalidades discentes são estimuladas e memorizar verdadeiros "mantras" tais como: "menos vezes menos dá mais"; "menos vezes mais dá menos"; "mais vezes menos dá menos" ou "mais vezes mais dá mais". Ou então, memoriza-se mantras como "sinais contrários dá menos; sinais iguais dá mais".

Qual a significância pedagógica dessa perspectiva arbitrária acerca das "regras dos sinais"? Não seria melhor, até mesmo para a formação das mentalidades discentes, justificar tais regras ao invés de estabelecê-las arbitrariamente? Nessa linha de ponderação, há a excelente obra do professor Elon Lages Lima (LIMA, 2006) no qual dedica-se um tópico para tratar de uma honesta fundamentação para a "regra dos sinais". Assim, será usada a perspectiva de Elon Lages Lima (LIMA, 2006) para a "regra dos sinais".

A regra dos sinais é implicação lógica das "leis fundamentais da aritmética" dos inteiros: em especial, implicação da Lei distributiva, a qual conecta as operações de multiplicação com a da adição.

Preliminarmente, lembremos que dado a$\in \mathbb{Z}$, tem-se que $(-a)$ é,por definição, o **simétrico aditivo** de a, ou seja, $a + (-a) = 0$. O uso do artigo definido "o" em "o **simétrico aditivo**" é semanticamente adequado: pois o simétrico aditivo é sempre único[9].

Isso posto, deve-se observar primeiramente que, para qualquer inteiro "a", têm-se: $-(-a) = a$. De fato, pela lei do **simétrico aditivo**:

$-a + a = 0 \Rightarrow a = -(-a)$. Ou seja, o simétrico de "-a" é "a".

Em seguida, deve-se estabelecer que $a.0 = 0$ para todo inteiro a. Isso pode soar como uma evidente trivialidade para as mentalidades discentes. Se for o caso, convém não demonstrar

[9] De fato, sejam x,y dois simétricos aditivos para o inteiro a. Logo, $a + x = 0 = a + y$. Somando $-a$ em ambos os lados e valendo-se da associatividade e simetria aditiva, segue que $x = y$.

isso. Porém, a título de completude, será feita a demonstração. Trata-se, em especial, de uma consequência da lei distributiva. De fato, têm-se, pelas leis fundamentais da aritmética em $\mathbb{Z}$:

$$a + a.0 = a.1 + a.0 = a(1 + 0) = a.1 = a = a + 0 \Rightarrow a + a.0 = a + 0 = a$$

Ou seja, $a + a.0 = a$. Agora, usando a lei do simétrico, comutatividade e associatividade temos[10]:

$(a + a.0) = a \Rightarrow (a + a.0) + (-a) = a + (-a) \Rightarrow (a.0 + a) + (-a) = a + (-a) \Rightarrow a.0 + (a + (-a)) = 0 \Rightarrow a.0 + 0 = 0 \Rightarrow a.0 = 0$

E qual a importância da apreensão de $a.0 = 0$? A importância é que tal assertiva é fundamental para estabelecer que $(-1)a = -a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$. Com efeito, pela lei do elemento neutro multiplicativo e lei distributiva, segue que:

$a + (-1).a = 1.a + (-1)a = [1 + (-1)].a = 0.a = 0$. Ou seja, $a + (-1).a = 0$. Assim, usando a unicidade do simétrico aditivo, segue que o resultado da operação $(-1)a$ deve ser necessariamente igual "$-a$", o simétrico aditivo de a. Esse fato é a essencialidade da regra dos sinais.

Em particular, para a=-1, têm-se que (-1)(-1)=-(-1)=1.

Assim, revisitando os quatro casos clássicos dos "mantras" supracitados, têm-se:

1) "menos vezes menos dá mais"(ou seja, $(-a)(-b) = (ab)$): De fato, $(-a)(-b) = (-1).a.(-1).b = (-1).(-1).a.b = 1.a.b = ab$

2) "menos vezes mais dá menos"(ou seja, $(-a)(+b) = (-ab)$): De fato, $(-a)(+b) = (-1).a.b = (-1).a.b = (-ab)$

3) "mais vezes menos dá menos"(ou seja, $(a)(-b) = (-ab)$): De fato, $(a)(-b) = a.(-1).b = (-1).a.b = (-ab)$

4) "menos vezes menos dá mais"(ou seja, $(-a)(-b) = (ab)$): De fato, $(-a)(-b) = (-1).a.(-1).b = (-1).(-1).a.b = (+1).a.b = ab$

5.3 TFA E TEOREMA DA DIVISÃO EUCLIDIANA

O Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) também permanece válido em $\mathbb{Z}$. Trata-se de assertiva bem trivial de ser verificada. Em termos pragmáticos, basta trabalhar com o módulo de números inteiros e, dessa forma, aproveitar o TFA já desenvolvido sobre $\mathbb{N}$.

De fato, tendo cuidado quanto ao zero, pode-se enunciar que: **"Todo número inteiro,não nulo,pode ser decomposto em produto de primos essencialmente único"**. Assim, seja $a \in \mathbb{Z}$. Como $a \neq 0$, pela propriedade da tricotomia segue que: ou $a > 0$ ou $a < 0$. O primeiro caso, não interessa: pois é tão somente a redução do problema a $\mathbb{N}$. No caso $a < 0$, basta observar que,

[10] Note, que o resultado desejado seria imediato se contássemos com a unicidade do elemento neutro aditivo. Sutilmente, é isso que está sendo estabelecido: suponha que x seja um elemento neutro aditivo. Logo, por argumentação análoga para $a.0$, seguirá $x = 0$.

pelo conceito de módulo, $a = -|a|$, tal que $|a| \geq 0$ e, portanto, $|a| \in \mathbb{N}$. Novamente, portanto, reduz-se o problema a $\mathbb{N}$ seguindo que $|a|$ admite decomposição em primos essencialmente única e, uma vez que existe a igualdade $a = -|a|$, segue que “a” admite decomposição em primos essencialmente única.

Questão mais interessante é a de discorrer-se sobre o Teorema da Divisão Euclidiana em $\mathbb{Z}$. Com as devidas adaptações, a validade da Divisão Euclidiana em $\mathbb{Z}$ pode ser logicamente estabelecida pela validade da Divisão Euclidiana em $\mathbb{N}$. Para tal, conforme será demonstrado, basta um simples algebrismo e, portanto, a divisão euclidiana em $\mathbb{N}$, a qual já está bem definida, implica na divisão euclidiana em $\mathbb{Z}$.

DIVISÃO EUCLIDIANA EM $\mathbb{Z}$: Sejam a,b inteiros com $b \neq 0$. Existem únicos inteiros q e r tais que a=bq+r, com $0 \leq r < |b|$

Com relação aos inteiros “a” e “b”, podemos estabelecer o seguinte roteiro estratégico:

Caso i) $a > 0$ e $b > 0$;

Casso ii) $a < 0$ e $b > 0$;

Caso iii) $a > 0$ e $b < 0$ e

Caso iv) $a < 0$ e $b < 0$.

EXISTÊNCIA

Caso i) $\Rightarrow$ Imediato. Mera redução dos inteiros ao conjunto $\mathbb{N}$.

Caso ii) $\Rightarrow$ -a e b são números naturais. Logo, pela divisão euclidiana em $\mathbb{N}$, segue que: $-a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Se fosse r=0, então teríamos que $-a = bq \Rightarrow a = b(-q) + 0$ e o resultado segue.

Caso fosse $0 < r < b$, então tería-se que $-a = bq+r, 0 < r < b \Rightarrow a = b(-q)-r, -b < -r < 0 \Rightarrow a = b(-q-1) + (b-r), 0 < b-r < b$ e, portanto, o resultado segue com quociente igual a (-q-1) e resto igual (b-r). Ambos inteiros que satisfazem o buscado.

Caso iii) $\Rightarrow$ a e -b são números naturais. Logo, pela divisão euclidiana em $\mathbb{N}$, segue que: $a = -bq + r$, com $0 \leq r < b$. Se fosse r=0, então teríamos que $a = -bq \Rightarrow a = b(-q) + 0$ e o resultado segue.

Caso fosse $0 < r < b$, então tería-se que $a = -bq + r, 0 < r < -b = |b| \Rightarrow a = b(-q) + r, 0 < r < -b = |b| \Rightarrow$ e, portanto, o resultado segue com quociente igual a (-q) e resto igual (r). Ambos inteiros que satisfazem o buscado.

Caso iv) $\Rightarrow$ -a e -b são números naturais. Logo, pela divisão euclidiana em $\mathbb{N}$, segue que: $-a = -bq+r$, com $0 \leq r < -b = |b|$. Se fosse r=0, então teríamos que $-a = -bq \Rightarrow a = bq+0$ e o resultado segue.

Caso fosse $0 < r < -b$, então tería-se que $-a = -bq + r, 0 < r < -b = |b| \Rightarrow a = bq - r, -|b| < -r < 0 \Rightarrow a = bq - |b| + |b| + (-r), 0 < |b| - r < |b| \Rightarrow a =$

$bq - (-b) + |b| + (-r), 0 < |b| - r < |b| \Rightarrow a = b(q+1) + (|b| - r), 0 < |b| - r < |b|$ e, portanto, o resultado segue com quociente igual a (q+1) e resto igual ($|b| - r$). Ambos inteiros que satisfazem o buscado.

UNICIDADE

Nota-se que a unicidade do quociente e do resto está bem estabelecida na divisão euclidiana em $\mathbb{N}$. Portanto, uma via para a unicidade de tais números em $\mathbb{Z}$, acerca dos quais já provou-se a existência, seria a de, em cada caso acima(i ao iv), supor, por redução ao absurdo, ausência da unicidade dos quocientes ou resto em $\mathbb{Z}$ e, fazendo o adequando algebrismo, contrariar a unicidade dos quocientes e do resto em $\mathbb{N}$ e, desse modo, obter contradições. Essa seria uma via adequada. Porém, será dado um argumento geral para a unicidade que está fundado no PBO sobre $\mathbb{Z}$.

Suponhamos, por redução ao absurdo, as seguintes escritas:

(I) $a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < |b|$

(II) $a = bq_2 + r_2, 0 \leq r_2 < |b|$

Logo, igualando (I) e (II) segue que: $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2 \Rightarrow b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Mas note que $0 \leq r_1 < |b| \Rightarrow -|b| < -r_1 \leq 0 \Rightarrow -|b| < r_2 - r_1 < |b|$. Portanto, pode-se escrever:

$-|b| < b(q_1 - q_2) < |b|$. “Dividindo” toda a desigualdade por $|b|$, segue que: $-1 < \frac{b(q_1-q_2)}{|b|} < 1$, onde $\frac{b(q_1-q_2)}{|b|} \in \mathbb{Z}$ (Pois, $\frac{b}{|b|}$ será, tão somente, 1 ou -1). Lembremos que o PBO não permite inteiro n tal que $0 < n < 1$. Analogamente, não existe inteiro m tal que $-1 < m < 0$ (Pois, se tal inteiro existisse, teria-se $0 < -m < 1$, com -m inteiro). Portanto, uma vez que $\frac{b(q_1-q_2)}{|b|} \in \mathbb{Z}$ e $-1 < \frac{b(q_1-q_2)}{|b|} < 1$ segue que, pelo PBO, necessariamente deve-se ter $\frac{b(q_1-q_2)}{|b|} = 0$. Como $b \neq 0$, isso implica em $q_1 = q_2$ e portanto, por (I) e (II), segue que $r_1 = r_2$.

Assim, fica estabelecida a unicidade uma vez que duas escritas para uma divisão euclidiana em $\mathbb{Z}$ deverão ser, na realidade, idênticas entre si.

6 NÚMEROS RACIONAIS

No ensino básico, os números racionais tendem a ser apresentados numa perspectiva algébrica. Nessa linha, número racional é estabelecido como um "ente" da forma "$\frac{a}{b}$, sendo a e b inteiros. Porém, com $b \neq 0$". Assim, conceitualmente tais entidades da forma "$\frac{a}{b}$" são definidas, via argumento de autoridade, como "legítimos números" que possuiriam tal formato. Essa é uma via conceitual algébrica e, dentro da Matemática Moderna, possui toda uma significância própria[11].

Porém, tal moderna perspectiva para número racional é historicamente desconexa com sua gênese conceitual, a qual está intimamente associada à pragmática noção de *medida*. Nesse sentido, tem-se a profícua síntese:

> Os inteiros são abstrações do processo de contar coleções finitas de objetos. Porém, na vida diária, precisamos não apenas contar *objetos* individuais, mas também *medir quantidades* tais como comprimentos, áreas, pesos e tempos. Se desejamos operar livremente com as medidas destas quantidades, que são capazes de subdivisões arbitrariamente pequenas, é necessário ampliar o domínio da Aritmética para além dos números inteiros. O primeiro passo consiste em *reduzir o problema de medir ao problema de contar.* (COURANT, ROBBINS, 2000, p.62)

Portanto, o presente trabalho alinha-se com a premissa de que a salutar exposição conceitual para os racionais,no ensino básico, deve ser aquela que alicerça-se pela noção de *medida reduzida à contagem*: dessa forma, para as mentalidades discentes, a conexão entre inteiros e racionais fica mais palpável e,portanto, mais robusta torna-se a produção de significado para frações, para números racionais. Nessa linha de exposição conceitual, são as obras: (LIMA et al, 2006); (NIVEN,2012) e (COURANT;ROBBINS,2000). Para o leitor especialmente interessado em aspectos históricos dessa perspectiva, também poderá consultar Howard Eves(EVES,2011).

Em especial, destaca-se que o teor do presente capítulo estará fundamentalmente alinhado ao trabalho de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000), o qual desenvolve de forma primorosa e matematicamente completa a discussão acerca da comensurabilidade e incomensurabilidade entre segmentos de retas. Tal discussão, fundada justamente na noção de *medida reduzida à contagem*, é a perspectiva historicamente coerente com a gênese conceitual dos números reais e será desenvolvida no presente trabalho.

6.1 A NOÇÃO DE COMENSURABILIDADE: MEDIR "É" CONTAR

Como o problema de medir é reduzido ao problema de contar?

[11] Tal significância está bem sintetizada na discussão algébrica acerca da "necessidade intrínseca dos números racionais", feita por Richard Courant e Herbert Robbins(COURANT;ROBBINS,2000) no capítulo referente ao "sistema numérico da Matemática".

Em essência, isso é feito da seguinte forma: dada uma grandeza (comprimento, massa, tempo etc), estabelece-se *a priori*,e de forma *arbitrária*, uma magnitude que é parametrizada como “a unidade” da respectiva grandeza e, portanto, convencionada com o “valor 1”.

Em seguida, verifica-se *“quantas vezes”* um ente, que é o objeto do procedimento de medida, comporta, em si, a “unidade”. Tal “quantidade de vezes” é a “medida”: que origina-se sempre na comparação com a unidade e está intimamente associada à noção de contagem.

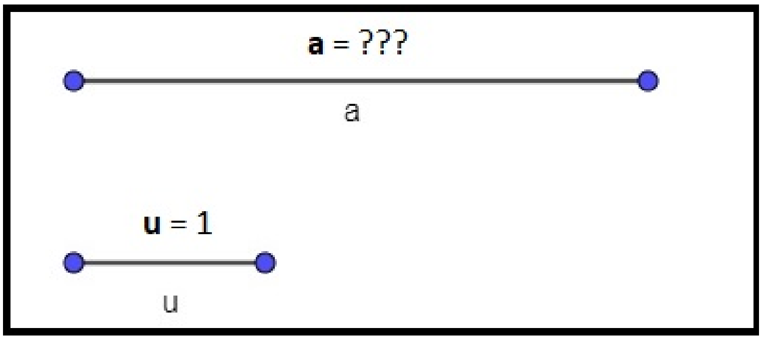
Para melhor explicitar tal procedimento, que leva ao conceito de número racional, a via clássica é considerar a noção de distância, ou seja, a grandeza física “comprimento”. Mais especificamente, para fins matemáticos, foca-se em comprimentos de segmentos de reta.

Deve-se enfatizar que a natureza da grandeza física em si é, para fins matemáticos, completamente irrelevante. Tudo o que será explicitado com relação ao “comprimento” poderia ser analogamente reproduzido com qualquer outra grandeza física (tempo ou massa, por exemplo).

Assim sendo, foquemos na noção de “comprimento” de segmentos de reta[12]. O que é o comprimento de um segmento de reta? Ou seja: o quê significa *medir* um segmento de reta?

Sempre que falar-se em “*medir*”, deve-se, em primeiro lugar, estabelecer uma unidade de medida (ou então, tal unidade já está subentendida no contexto). Dessa forma, preliminarmente, observar-se que há um segmento de reta, digamos “u”, cujo comprimento foi convencionado, arbitrária e convenientemente, como “a unidade”, ou seja, o comprimento do segmento “u” é unitário (**u**=1). Portanto, *medir* um dado segmento de reta “a” significa verificar “quantas vezes” o segmento “u” cabe, de forma justaposta, no segmento “a”.

Figura 1 – O significado de medir

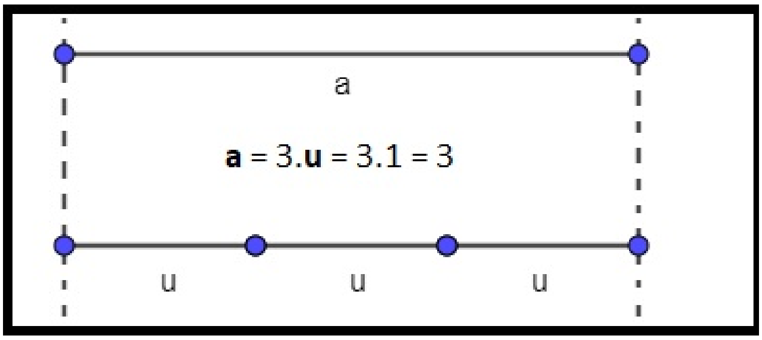


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Nesse procedimento de *medida*, poderia acontecer, a princípio, do segmento “a” ter comprimento igual a uma quantidade inteira, digamos k, de segmentos unitários justapostos “u” e, nesse caso, escreveríamos a equação **a**=k.**u** e, como **u**=1, seguiria que **a**=k.1=k e, portanto, o segmento “a” teria medida igual a k.

[12] Neste capítulo e no seguinte, será adotada a seguinte convenção: para um “segmento de reta a”, o objeto geométrico, será usada a notação “a”. Para o comprimento de “a”, será usada a notação **a**. Ou seja, **a**=comprimento do segmento “a”.

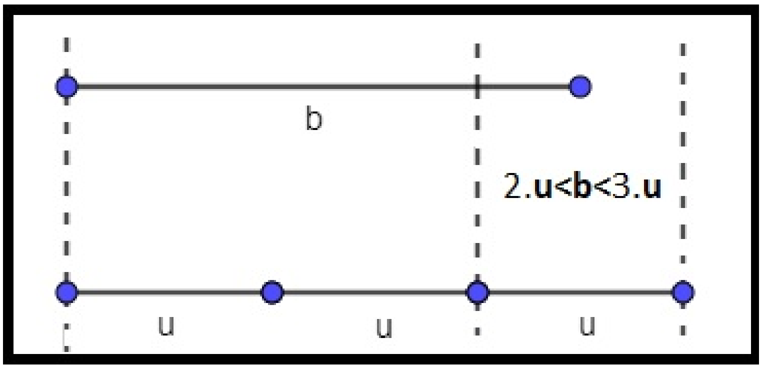
Figura 2 – Exemplo para k=3



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Porém, conforme nota-se pelo empirismo das medições, pode ocorrer de não caber uma quantidade inteira de segmentos unitários num dado segmento “b”, ou seja, pode ocorrer de “b” não ter um comprimento que seja um múltiplo inteiro da unidade. De fato, nesse caso, verifica-se que o comprimento buscado situa-se entre dois inteiros sucessivos (Digamos, k e k+1, por exemplo. Ou seja, k<**b**<k+1).

Figura 3 – Exemplo em “b” para k=2



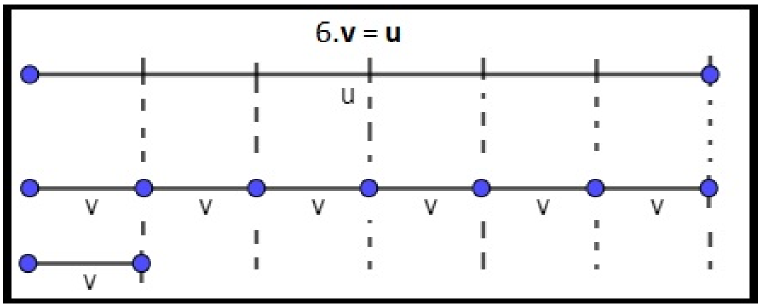
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Buscando maior precisão no procedimento de mensuração, esse fenômeno nos leva a subdividir a unidade de medida em porções menores. Dessa forma, suponhamos que o segmento “u” seja particionado em n subsegmentos congruentes e justapostos “v”: assim, como “v” existe, ele há de ter um comprimento e, matematicamente, simboliza-se[13] tal comprimento por $\frac{1}{n}$.

Ou seja, **v**=$\frac{1}{n}$.

[13] Essa simbologia é bem significativa. Ela vem do fato que, por definição, n.**v**=1. Ou seja, **v** seria o inverso multiplicativo de n. No contexto dos racionais, conforme será melhor explicitado ao falar-se sobre operações, tal número é justamente a “n-ésima parte” da unidade.

Figura 4 – Ampliação em “u” e n=6

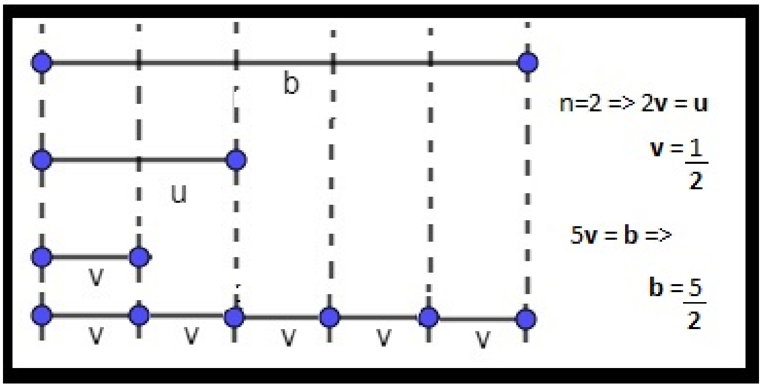


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Pode ocorrer que, após uma conveniente subdivisão da unidade e construção do segmento “v”, tenhamos que “v” “caiba” uma quantidade inteira de m vezes no segmento “b”.[14]

Logo, se “v” “cabe” uma quantidade inteira de m vezes no segmento “b”, ter-se-ia que: **b**=m.**v** e, portanto, **b**=m.$\frac{1}{n}$. Simbolicamente, também expressa-se tal situação dizendo que a medida do segmento “b” seria $\frac{m}{n}$ e tal símbolo significaria, reitera-se, que o comprimento de “b” é igual a m vezes o comprimento do segmento “v”, o qual, por sua vez, tem por comprimento a “n-ésima parte” da unidade.[15].

Figura 5 – Caso n=2 e m=5



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em termos de nomenclatura, sempre que existir um segmento “v” que “caiba” um número inteiro de vezes no segmento unitário “u” e um número inteiro de vezes num segmento dado “b”, diz-se que o segmento unitário “u” e o segmento “b” são “comensuráveis”.[16].

[14] Quando isso não ocorre, para nenhum valor de n, somos levados ao conceito de incomensurabilidade. Isso só será analisado na seção seguinte.

[15] Há uma sutileza conceitual aqui. Note que, a princípio, não há nada que autorize pensar que a “barra” que está entre m e n seja o símbolo de divisão entre tais números. De fato, poderíamos desenvolver tudo o que foi dito usando outras simbologias tais como, por exemplo, $\frac{m}{n}$=F(m,n). A barra entre m e n remeterá à ideia de divisão quando definir-se a multiplicação canônica nos racionais e que a/a=1. Isso será melhor explicitado no tópico sobre operações nos racionais.

[16] A etimologia desse termo é muito apropriada. Ela significa algo como “mensuráveis em companhia, em

De uma forma mais geral, e uma vez que o estabelecimento da unidade de medida é arbitrário, podemos entender a comensurabilidade entre segmentos da seguinte forma: dados dois segmentos de reta “a” e “b”, diz-se que **tais segmentos são comensuráveis** se, e somente se, $\mathbf{b}=\frac{m}{n}\mathbf{a}$.[17] Note que, tal noção genérica de comensurabilidade, reduz-se à anterior quando considera-se o segmento “a” como o segmento unitário “u”.

O presente trabalho alinha-se, portanto, com as obras já citadas para militar, em algum momento, com essa produção de significado nas mentalidades discentes para o símbolo $\frac{m}{n}$, com m e n inteiros, e o qual batiza-se de “número racional”. Nessa perspectiva, portanto, **número racional seria a medida do comprimento de um segmento comensurável com o segmento unitário**. Mais geralmente, **número racional seria a medida de uma grandeza comensurável com sua respectiva unidade**.

A propósito, a etimologia “racional” também é bem significativa. Conforme Ivan Niven (NIVEN,2012), Elon (LIMA et al, 2006) e Richard Courant (COURANT; ROBBINS, 2000) asseveram, os antigos gregos não viam os “racionais” como “legítimos números” mas, tão somente, como a razão (daí o termo “racional”) entre dois inteiros: o inteiro “n” expressando a quantidade de vezes em que subdividiu-se a unidade para constituir a subunidade de medida e, o outro, o inteiro “m”, expressando a quantidade de vezes quantidade de vezes que a subunidade cabe na grandeza que é objeto do procedimento de medida.

Tal percepção para os racionais nos leva à noção de “forma fracionária” dos racionais. Tal representação será o foco de análise do presente trabalho. O leitor interessado numa análise da “representação decimal”, para os racionais, pode consultar (NIVEN, 2012); (COURANT; ROBBINS, 2000) ou (LIMA et al, 2006).

6.2 OS RACIONAIS COMO “LEGÍTIMOS” NÚMEROS.

A “numerização” dos racionais foi um processo historicamente lento que materializou-se com o desenvolvimento de uma aritmética própria. Trata-se de um considerável salto conceitual, repleto de sutilizas significativas, o qual será desenvolvido nesse tópico.

Nesse sentido, destaca-se a seguinte consideração:

> O passo seguinte e decisivo foi dado conscientemente somente após séculos de tentativas: o símbolo $\frac{m}{n}$ foi despojado de sua referência concreta ao processo de medir e às quantidades medidas e, ao invés disso, considerado como um puro *número*, uma entidade em si própria, no mesmo nível dos números naturais. Quando m e n são números naturais, o símbolo $\frac{m}{n}$ é denominado de *número racional*. A utilização da palavra número (originariamente significando apenas número natural)

concomitância, em simultaneidade. E é justamente disso que se trata: dois segmentos são comensuráveis se existe um terceiro segmento que “cabe” uma quantidade inteira de vezes em ambos

[17] Ou seja, se e somente se, após subdividir-se o segmento “a” em n subsegmentos congruentes justapostos “$\frac{a}{n}$”, tal subsegmento couber m vezes no segmento “b”.

> para estes novos símbolos é justificada pelo fato de que a adição e a multiplicação destes símbolos obedecem às mesmas leis que orientam as operações com números naturais. Para que isto possa ser mostrado, deve-se primeiro definir adição, multiplicação e igualdade de números racionais. (COURANT;ROBBINS, 2000, p.63)

Desse modo, somos naturalmente levados para as clássicas definições fundamentais acerca das operações sobre racionais. De fato, dados a, b, c e d **números inteiros** quaisquer, define-se: $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = cb$ (Definição de igualdade entre números racionais); $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ (Definição de soma entre racionais) e $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ (Definição de multiplicação entre racionais).

Essas definições merecem detidas reflexões.

Primeiramente, deve-se ponderar acerca da legitimidade e conveniência de utilizar-se tais definições as quais, num primeiro contato, podem soar bem esotéricas no aspecto motivacional, para as mentalidades discentes: Por que define-se as operações sobre os racionais como feito acima? Qual a motivação de fazer-se dessa forma e não de outra?

A resposta para tais indagações, essencialmente repousa num certo utilitarismo o qual Richard Courant e Hebert Robbins elucidam magistralmente o caminho a ser perquirido:

> Precisamente estas definições são impostas a nós se quisermos utilizar os números racionais como medidas de comprimento, área etc. Porém, estritamente falando, estas regras para a adição, multiplicação e igualdade de nossos símbolos são estabelecidas por nossa própria definição, e não nos são impostas por outras necessidades que não sejam as de consistência e utilidade para as aplicações.(...) deve-se enfatizar mais uma vez (...) as regras são impostas por nossa vontade. Podemos, por capricho, decretar uma outra regra para a adição, como $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, que, em particular,forneceria $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, um resultado absurdo do ponto de vista de medida. Regras desse tipo, embora logicamente permitidas, tornariam a aritmética de nossos símbolos um jogo sem sentido. O livre exercício do intelecto é orientado aqui pela necessidade de criar um instrumento adequado para lidar com medidas.
>
> (COURANT;ROBBINS, 2000, p.64-65)

Porém, curioso notar que apesar de Richard Courant e Herbert Robbins bem ressaltarem a motivação pragmática para as definições canônicas das operações sobre os racionais, os autores não explicitam que, a bem da verdade, a noção de racional pela via da comensurabilidade inspira tais definições operatórias canônicas. Mais que isso: no caso de m e n naturais, tais definições operatórias são uma **implicação lógica** da noção de comensurabilidade. Portanto, o nexo entre tais definições e o conceito de racional é bem mais do que meramente pragmático. Há conexões lógicas e, sobre isso, dedica-se a subseção seguinte.

6.2.1 Sobre a razoabilidade das definições operatórias

De fato, analisemos a necessidade e razoabilidade das definições, na ordem em que cada uma foi feita.

Começa-se, portanto, por: $\frac{a}{a} = 1$. Trata-se da definição mais imediatamente inspirada pela noção de comensurabilidade. Quando $a \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{a}$ significaria, pela noção de comensurabilidade, que subdividiu-se a unidade em "a subsegmentos unitários" e, em seguida, enfileirou-se, de forma justaposta, "a vezes" tais subsegmentos. Evidentemente, tal procedimento resulta no segmento unitário. Portanto, quando $a \in \mathbb{N}$, a noção de comensurabilidade implica que $\frac{a}{a} = 1$. Razoável, portanto, estender isso para os inteiros, por força de definição.

Foca-se agora na definição da igualdade entre racionais. Ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = cb$. Por que disso? Qual seria a motivação disso pela noção de comensurabilidade? Novamente, pensemos com números naturais. Nessa linha, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ representam medidas de segmentos comensuráveis com a unidade. Portanto, é natural definir $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, somente se, $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são medidas para um mesmo segmento de reta. Mas $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são medidas de um mesmo segmento de reta se, e somente se, **a**.$\frac{1}{b}$= **c**.$\frac{1}{d}$.

Assim, **a**.$\frac{1}{b}$= **c**.$\frac{1}{d}$ $\Leftrightarrow$ **b.a**.$\frac{1}{b}$= **b.c**.$\frac{1}{d}$ $\Leftrightarrow$ **d.b.a**.$\frac{1}{b}$= **d.b.c**.$\frac{1}{d}$ $\Leftrightarrow$ **d.a.(b.**$\frac{1}{b}$**)= b.c.(d.**$\frac{1}{d}$**)** $\Leftrightarrow$ **d.a.(1)= b.c.(1)** $\Leftrightarrow$ **d.a. = b.c.**

Portanto, a definição de igualdade entre racionais, que é uma **implicação lógica** quando lidamos com naturais, é perfeitamente razoável e natural para o contexto mais amplo, ou seja, quando a,b,c e d são inteiros (reitera-se que, quando tais números são naturais, a definição de igualdade é, conforme demonstrou-se, uma **implicação lógica** do conceito de comensurabilidade).

Ademais, convém destacar que a definição de igualdade entre os racionais é a responsável pela noção de "frações equivalentes". De fato, dados a,b e k inteiros têm-se que a.k.b = b.k.a e, portanto, pela definição de igualdade, $\frac{a.k}{b.k} = \frac{a}{b}$ e diz-se, por convenção de nomenclatura, que $\frac{a.k}{b.k}$ é equivalente a $\frac{a}{b}$.

A noção de fração equivalente, também leva ao conceito de "fração irredutível". De fato, dado $\frac{a}{b}$ pode correr que, pelo TFA, a e b tenham algum fator primo em comum: digamos que k seja tal fator. Logo, $a = k.a_1$ e $b = k.b_1$ e, pela noção de fração equivalente, $\frac{a}{b} = \frac{k.a_1}{k.b_1} = \frac{a_1}{b_1}$. Novamente, pelo TFA, investiga-se os fatores primos comuns entre a_1 e b_1 e aplicando-se, reiteradamente, o procedimento descrito, têm-se: $\frac{a}{b} = \frac{k.a_1}{k.b_1} = \frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n}$, onde a_n e b_n não possuem mais fatores primos em comum. Nesses termos, $\frac{a_n}{bn}$ é dito, por convenção de nomenclatura, a forma irredutível, ou a "fração irredutível" de $\frac{a}{b}$.

Foca-se agora na razoabilidade da definição da soma de racionais. No primeiro contato formal, a definição de soma nos racionais tende a soar, nas mentalidades discentes, como uma fórmula altamente esotérica, obscura. Qual seria o estímulo para definir-se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ como sendo exatamente $\frac{ad+cb}{bd}$? Na maioria das vezes, responde-se isso pela via do argumento de autoridade.[18]

Para alcançar a compreensão da motivação para a definição da soma, também parte-se de a,b,c e d como sendo números naturais e da noção de comensurabilidade. Nesse sentido, o passo crucial é trabalhar com “frações equivalentes”. De fato, dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, tem-se, pela noção de equivalência (a qual foi introduzida pela noção de igualdade entre frações) que:

$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ e $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db} = \frac{cb}{bd}$. Basta focar, portanto, nas frações $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{cb}{bd}$: pela noção de comensurabilidade, o quê elas significam?

$\frac{ad}{bd}$ significa a medida de um segmento que tem, por comprimento, “a.d vezes” o comprimento do subsegmento “$\frac{1}{bd}$”. Por sua vez, $\frac{cb}{bd}$ significa a medida de um outro segmento que tem, por comprimento, “c.b vezes” o comprimento do subsegmento “$\frac{1}{bd}$”. Portanto, é natural associar a soma dessas frações à soma dos comprimentos de seus respectivos segmentos e,nesse sentido, teremos, justapondo os dois segmentos, “a.d + c.b” vezes o comprimento do subsegmento “$\frac{1}{bd}$”. Logo, para números naturais e considerando o conceito de comensurabilidade,$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$ é uma **implicação lógica** da noção de comensurabilidade. Assim, é razoável a definição para extensão em a,b,c e d números inteiros.

Por fim, foca-se na razoabilidade da definição de multiplicação. Trata-se de apreensão mais sutil e que estende a noção de comensurabilidade para duas dimensões. Vejamos: Qual seria a inspiração para definir-se $\frac{a}{b} * \frac{c}{d}$ como sendo igual a $\frac{ac}{bd}$?

Tal como no caso da adição, parte-se das frações equivalentes sobre um mesmo denominador: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ e $\frac{c}{d} = \frac{cb}{bd}$. Portanto, $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} * \frac{cb}{bd}$. E, pela noção de comensurabilidade, o quê deveria significar $\frac{ad}{bd} * \frac{cb}{bd}$, para a,b,c e d naturais? Conforme o professor Elon Lages Lima (LIMA,2009) demonstra, a multiplicação entre dois comprimentos remente, geometricamente, à noção de área. [19]

Portanto, a comensurabilidade, deve ser pensada num contexto maior, de duas dimensões. Isso pode ser feito da seguinte forma: dados os segmentos de medidas $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{cb}{bd}$, podemos associar o primeiro à base de um retângulo e o segundo, à altura do conforme esquema adiante (vide Figura 6).

Dessa forma, $\frac{ad}{bd} * \frac{cb}{bd}$ seria a área do retângulo a seguir. Porém, a área do retângulo acima pode ser compreendida como a soma da área de “ad.cb” quadrados de lados “$\frac{1}{bd}$”.

No entanto, conforme o professor Elon Lages Lima (LIMA,2009) demonstra, a área de um quadrado de lado $\frac{1}{bd}$ deve ser a “$(bd)^2$ ésima parte” da área de um quadrado de lado unitário, a qual é, na grandeza física “área”, definida como a unidade de medida. Ou seja, a área de um quadrado de lado $\frac{1}{bd}$ deve ser igual a $\frac{1}{(bd)^2}$. Logo, para a,b,c e d naturais, deve-se necessariamente ter: $\frac{ad}{bd} * \frac{cb}{bd} = \frac{ad(cb)}{(bd)^2} = \frac{ac.(bd)}{bd.(bd)}$

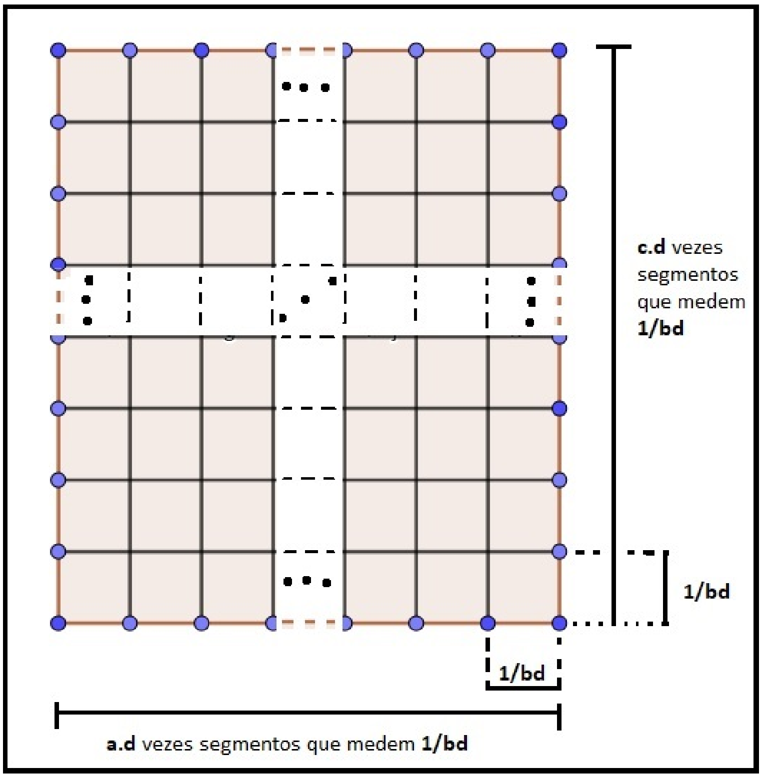
[18] Evidente que estímulos reiterados dessa natureza não poderia alimentar outro cenário, senão o da pobreza intelectual no ensino e o desprazer generalizado pela Matemática.

[19] A leitura de tal obra (LIMA,2009), inspirou o autor da presente dissertação na correta apreensão da razoabilidade para a definição, tal como feita, de multiplicação de racionais.

Mas, pela noção de "fração equivalente", segue que:

$\frac{ac.(bd)}{bd.(bd)} = \frac{ac}{bd}$. Logo, $\frac{ad}{bd} * \frac{cb}{bd} = \frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} * \frac{c}{d}$ sendo, portanto, razoável a definição para a extensão de a,b,c e d inteiros.

Figura 6 – Geometria da multiplicação



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

6.2.2 Implicações das definições operatórias

Justificada a razoabilidade das definições operatórias, urge refletir sobre algumas significativas implicações.

A implicação mais imediata, e trivial, é que tais definições resultam em "operações fechadas" sobre os racionais: com isso, quer-se dizer que somar ou multiplicar racionais sempre resultará em racionais.

A implicação mais sutil foi a responsável pela "numerização" dos racionais e será o foco dessa seção. Conforme já mencionado, as definições das operações nos racionais são feitas de tal forma que todas as leis fundamentais da Aritmética válidas para os inteiros continuam válidas, com exceção do PBO, no campo dos números racionais (comutatividade e associatividade da soma e multiplicação; existência de elementos neutros para adição e multiplicação; existência de simétrico aditivo e lei distributiva). Para verificar tais fatos imediatos, basta aplicar convenientemente as definições e utilizar-se das leis fundamentais da Aritmética dos inteiros. O leitor que tiver alguma dificuldade nesse sentido e quiser maiores detalhes, pode consultar a obra

(COURANT; ROBBINS, 2000). Tão somente a título de exemplo, será explicitada a validade da "lei distributiva" (o caso mais interessante).

Quanto a Lei distributiva, parte-se de $\frac{a}{b}(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})$. O quê significa isso? Pela definição de soma nos racionais, segue que: $(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{cf+ed}{df})$. Logo, utilizando definição de multiplicação dos racionais, segue que: $\frac{a}{b}(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{a}{b}(\frac{cf+ed}{df})=\frac{a(cf+ed)}{bdf}$. Porém, pela distributividade dos inteiros, temos que $a(cf+ed)=acf+aed$. Assim, $\frac{a(cf+ed)}{bdf}=\frac{acf+aed}{bdf}$. Ou seja, $\frac{a}{b}(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{acf+aed}{bdf}$. Foca-se, agora, no sentido de $(\frac{a}{b}*\frac{c}{d})+(\frac{a}{b}*\frac{e}{f})$. O que seria tal expressão? Aplicando-se primeiramente a definição de multiplicação e, em seguida, a soma tem-se que:

$(\frac{a}{b}*\frac{c}{d})+(\frac{a}{b}*\frac{e}{f})=\frac{ac}{bd}+\frac{ae}{bf}=\frac{ac(bf)+ae(bd)}{(bd)(bf)}=\frac{b(acf+aed)}{b(bdf)}$. Mas $\frac{b(acf+aed)}{b(bdf)}=\frac{acf+aed}{bdf}$, pois são frações equivalentes.

Logo, $\frac{a}{b}(\frac{c}{d}+\frac{e}{f})=\frac{acf+aed}{bdf}=(\frac{a}{b}*\frac{c}{d})+(\frac{a}{b}*\frac{e}{f})$ e, portanto, vale nos racionais a "lei distributiva".

Portanto, uma vez que as leis fundamentais da Aritmética dos inteiros continuam válidas nos racionais, esses podem ser operados analogamente à aqueles e, conforme já dito, foi esse fato o responsável pela "numerização" dos racionais ao longo da evolução do pensamento matemático: os racionais, inicialmente pensados tão somente como razão entre inteiros(comensurabilidade entre segmentos), foram progressivamente abstraídos para a condição de "legítimos" números (Assim, por exemplo, vale nos racionais, por argumentos totalmente análogos, a tal "regra dos sinais", vista para inteiros. Mais geralmente, toda propriedade operatória dos inteiros que seja consequência de suas "leis fundamentais da aritmética", continuam válidas nos racionais.).

Ademais, pela forma como definiu-se a multiplicação, surge também, nos racionais não nulos, uma novidade: a existência de simétrico multiplicativo (Pois, $\frac{m}{n}\neq 0 \Rightarrow \frac{n}{m}\neq 0$. Logo, $\frac{m}{n}*\frac{n}{m}=\frac{mn}{nm}=1$ e, portanto, $\frac{n}{m}$ é o simétrico multiplicativo, também conhecido como *inverso multiplicativo*, de $\frac{m}{n}$).

Quanto a não validade do PBO nos racionais, basta considerar, como contra exemplo, o conjuntos dos racionais positivos da forma $\frac{1}{n}$: é não vazio, limitado inferiormente por zero e não admite menor elemento pois, se tal elemento existisse, seria possível obter um número da forma $\frac{1}{n}$ menor ainda, bastando considerar n suficientemente grande. Eis o motivo de não termos análogos ao TFA e ao Teorema da Divisão Euclidiana nos racionais: tais resultados necessitam essencialmente do PBO, conforme demonstrou-se.

Por fim, mas não menos importante, convém explicitar o sentido que as definições operatórias produzem para racionais da forma $\frac{-m}{n}$, $\frac{m}{-n}$ ou $\frac{-m}{-n}$ com m e n naturais: trata-se de um sentido algébrico, fundado nas leis fundamentais da aritmética que os racionais gozam. Vejamos tal "sentido algébrico".

As frações $\frac{-m}{n}$ e $\frac{m}{-n}$ *necessariamente* devem ser compreendidas como o simétrico aditivo de $\frac{m}{n}$. Pois, pela definição de soma, tem-se:

$\frac{m}{n}+\frac{-m}{n}=\frac{mn+(-mn)}{nn}=\frac{0}{nn}=0$ e $\frac{m}{n}+\frac{m}{-n}=\frac{m(-n)+(mn)}{n(-n)}=\frac{0}{n(-n)}=0$. Porém, ocorre que as leis fundamentais da aritmética implicam que o simétrico aditivo deve ser *único*.[20] Portanto, segue que $\frac{-m}{n} = \frac{m}{-n} = -(\frac{m}{n}) = -\frac{m}{n}$. Onde $-\frac{m}{n}$ é um símbolo, amplamente utilizado, para exprimir a ideia do simétrico aditivo de $\frac{m}{n}$, o qual é único.

E quanto à expressão $\frac{-m}{-n}$? Trata-se de símbolo que deve ser, necessariamente, entendido como o simétrico aditivo de $-\frac{m}{n}$. Pois:

$$\frac{-m}{-n} + (-\frac{m}{n}) = \frac{-m}{-n} + \frac{-m}{n} = \frac{-mn+(-m(-n))}{n(-n)} = \frac{-mn+mn}{-nn} = \frac{0}{-nn} = 0.$$

Porém, conforme explicitado, o simétrico aditivo é sempre *único*. Logo, como $\frac{m}{n}$ é o simétrico aditivo de $-\frac{m}{n}$, segue pela unicidade que: $\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}$.

[20] De fato, suponha que $\frac{c}{d} = v$ e $\frac{e}{f} = v'$ são simétricos aditivos de $\frac{a}{b} = u$. Logo, $u + v = 0 = u + v' \Rightarrow v + (u + v) = v + (u + v') \Rightarrow (v + u) + v = (v + u) + v' \Rightarrow 0 + v = 0 + v' \Rightarrow v = v'$.

7 NÚMEROS IRRACIONAIS: UM SALTO PARADIGMÁTICO.

Inicia-se e desenvolve-se o presente capítulo, reforçando a análise do procedimento de medir, de forma essencialmente análoga à Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000).

Independentemente da natureza da grandeza física a ser medida, a abstração matemática reduz o problema de medir ao seguinte problema equivalente: Dados um **arbitrário** segmento de reta - o segmento “x” - e um segmento unitário, - o segmento “u” - qual seria a *medida* de “x”? Ou seja, como encontrar o valor **x**?

O procedimento de medir, conforme já desenvolvido, é o seguinte: particiona-se o segmento unitário em n subsegmentos congruentes - os subsegmentos “$\frac{u}{n}$” - e, em seguida, alinha-se, de forma justaposta, tantos desses subsegmentos quanto for necessário para exprimir-se a magnitude do segmento “x”.

Nessa linha, *seria* plausível, intuitivamente, conjecturar o seguinte: se n for **suficientemente** grande, o subsegmento “$\frac{u}{n}$” pode ser tão “pequeno” que *seria* razoável, *a priori*, imaginar que ele caberia uma quantidade inteira, m vezes, em “x”.

Essa conjectura, que é perfeitamente coerente com a intuição geométrica, é equivalente a intuir que qualquer segmento de reta *seria* comensurável com a unidade. Ou seja, de forma mais abstrata, qualquer grandeza (tempo, massa, área etc) *seria* comensurável com sua respectiva unidade: *bastaria* tão somente “refinar” convenientemente a partição da respectiva unidade, fazendo n “suficientemente grande”.

Considerando a reta numérica, tal intuição da *“eterna comensurabilidade”*, é matematicamente equivalente ao seguinte: dado um ponto da reta, o ponto X, o segmento com extremidades na origem e no ponto X é tal que *seria* comensurável com o segmento unitário. Logo, **todo ponto da reta real *estaria* associado a um único número racional.**

Essa intuição é, num primeiro momento, tão plausível que justamente a antiga matemática grega (EVES,2011) trabalhou com ela. Em especial, os Pitagóricos. Porém, **trata-se de uma intuição inválida! A apreensão dessa invalidade, é a via para a compreensão do conceito de número “irracional”**: por mais não intuitivo que possa parecer, existem segmentos de reta que não são comensuráveis com a unidade![21] Em termos de reta numérica, isso é equivalente ao fato de que, se considerarmos **somente a existência dos números racionais**, então existirão pontos da reta que não estarão associados a nenhum número: ou seja, a reta numérica teria “furos”!.

Na evolução do pensamento matemático, conforme Howard Eves exprime (EVES,2011), a descoberta da existência de segmentos incomensuráveis e, portanto, de medidas que não poderiam ser expressas por números racionais, constituiu-se num profundo conflito paradigmático

[21] Mais genericamente, uma vez que a unidade de medida é arbitrária, existem segmentos de reta que não são comensuráveis entre si.

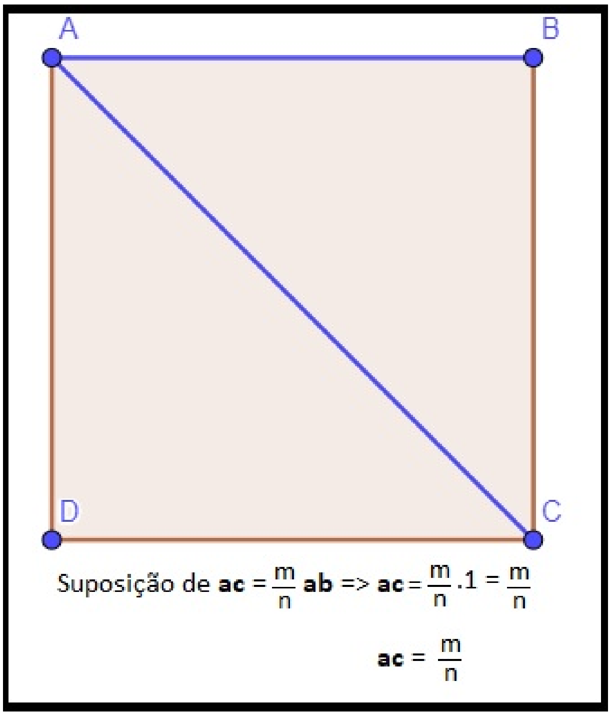
e numa grave crise a ser superada:

> A descoberta da irracionalidade (...) provocou alguma consternação nos meios pitagóricos. Pois não só ela parecia perturbar a suposição básica da escola, de que tudo dependia dos números inteiros, como também porque a definição pitagórica de proporção, assumindo como comensuráveis duas grandezas quaisquer similares, fazia com que todas as proposições da teoria pitagórica das proporções se limitassem a grandezas comensuráveis, invalidando sua teoria geral das figuras semelhantes. Tão grande foi o "escândalo lógico" que por algum tempo se fizeram esforços para manter a questão em sigilo(...) (EVES, 2011, p.106-107)

Por que a intuição pitagórica - a de que dois segmentos de reta quaisquer seriam sempre comensuráveis - não está correta? O argumento clássico, conforme Howard Eves (EVES,2011) demonstra, passa pela reflexão sobre a diagonal e o lado de um quadrado.

De fato, dado o quadrado ABCD abaixo, com lado unitário, suponhamos, por redução ao absurdo, que a diagonal AC seja comensurável com o lado AB.

Figura 7 – Uma suposição absurda



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Logo, têm-se que:

(1) **ac**=$\frac{m}{n}$**ab**=$\frac{m}{n}$.1=$\frac{m}{n}$

Porém, pelo teorema do Pitágoras aplicado no triângulo ACB, segue que:

(2) $(ac)^2 = (ab)^2 + (ab)^2 = (1)^2 + (1)^2 = 2$

Assim, substituindo (1) em (2), segue:

(3) $(\frac{m}{n})^2 = 2$, ou seja, o suposto racional $\frac{m}{n}$ deveria ser um número tal que, ao quadrado, resultaria em dois.[22]

Pelas leis da aritmética sobre os racionais, a equação (3) é equivalente à:

(4) $(m)^2 = 2(n)^2$, onde m e n são inteiros.

Porém, a equação (4) expressa uma relação insustentável com o Teorema Fundamental da Aritmética. De fato, uma vez que 2 é primo, basta refletir na decomposição em primos dos inteiros m e n.

Preliminarmente, note que, se "a" é um inteiro qualquer, então ou "a" possui "fatores 2" na decomposição ou "a" não possui "fatores 2" na decomposição. De qualquer forma, pelo TFA, poderemos sempre escrever $a = 2^k c$ onde k expressa a quantidade máxima de fatores primos "2", com $k \geq 0$ (k=0 se, e somente se, "a" não possuir fator primo 2 na decomposição). Assim, **sempre**, teremos que $(a)^2 = 2^{2k}c^2$ e, portanto, (a^2) **sempre** possuirá uma quantidade par de "fatores primos 2" em sua decomposição em primos (Lembre-se que 0 é par, para o caso k=0). Isso é suficiente para bem compreender a inconsistência da equação (4).

De fato, pela argumentação anterior, sabe-se que, pelo TFA, $(m)^2$ e $(n)^2$ devem ter uma quantidade par de fatores "primos 2" em suas fatorações.

Porém, a relação $(m)^2 = 2(n)^2$ implica que, devido ao fator 2 que multiplica o termo $(n)^2$, a quantidade máxima de fatores "primos 2" em $(m)^2$ seria uma unidade maior que a quantidade máxima de fatores "primos 2" em $(n)^2$. Ou seja, teríamos um quantidade ímpar de fatores "primos 2" em $(m)^2$. Isso é um absurdo para com o TFA. Qual foi a origem desse absurdo? Supor que a diagonal do quadrado - o segmento "ac" - seria comensurável com seu lado, o segmento "ab".

Podemos transportar o segmento "ac" para a reta numérica, de forma que o ponto A coincida com a origem da reta numérica e o ponto C esteja "à direita" da origem, na reta numérica. [23].

Assim, existirá um ponto da reta numérica - o ponto C' - de modo que o comprimento do segmento OC' não será comensurável com o segmento unitário. Portanto, considerando somente os racionais, o ponto C', a princípio, levaria a um "buraco" na reta numérica: no sentido de que tal ponto C', pensado enquanto objeto geométrico, não pode ser associado a nenhum racional.

Desejamos uma reta numérica "completa". Sem "buracos". Associa-se, portanto, o ponto C' ao "número" $\sqrt{2}$ entendendo-se por isso que $\sqrt{2}$ expressa o comprimento de um segmento que não é comensurável com a unidade.

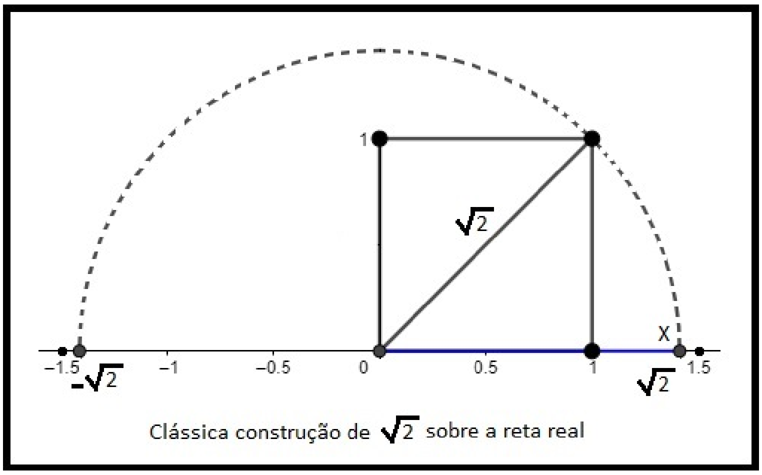
---

[22] Simbolicamente, expressa-se isso pelo símbolo $\sqrt{2}$ e, lê-se, "raiz quadrada de dois": ou seja, $\sqrt{2}$ seria o número tal que $(\sqrt{2})^2 = 2$

[23] Concretamente, na Geometria Euclidiana, isso é feito pelas clássicas construções com régua e compasso. Em termos abstratos, tais construções são tão somente "isometrias" no plano. Ou seja, transformações que preservam distâncias.

Nosso conceito de número irracional, portanto, irá expressar comprimentos - distâncias - que não comensuráveis com a unidade. **Mais geralmente, número irracional expressa a medida de uma grandeza não comensurável com sua respectiva unidade.**

Figura 8 – Um irracional clássico



Fonte: Elaborado pelo autor (2020), inspirado em (NIVEN,2012).

Com a inclusão da noção de "irracional", nossa reta numérica torna-se "completa". Sem nenhum "furo". Vejamos. Dada uma reta, estabelecemos um ponto para ser a "origem". Tal ponto, está associado, conforme já vimos, ao número 0. À direita da origem, escolhemos um ponto para ser associado ao número 1. Isso estabelece uma unidade de medida, o segmento unitário "u". Agora, tome um **ponto qualquer** da reta - o ponto X - que esteja à direita[24] da origem e reflita sobre o *comprimento* cujas extremidades são a origem e o ponto X (o segmento "x"): Só existem duas possibilidade lógicas mutualmente excludentes. Ou o segmento "x" será comensurável com a unidade ou o segmento x não será comensurável com a unidade. No primeiro caso, associamos o ponto X ao racional que expressa o comprimento do segmento "x". No segundo caso, associamos o ponto X a um número irracional, entendo por isso o comprimento do segmento "x". Não há mais furos na reta numérica: ela está "completa".

Por fim, convém fazer uma observação muito pertinente para fins pragmáticos da utilização dos números: qualquer irracional pode ser aproximado por racionais no nível de precisão que desejar-se.

De fato, consideremos, por exemplo, o irracional $\sqrt{2}$. Uma vez que os racionais são **densos** na reta, isso implica que se tomarmos um intervalo aberto na reta que contenha $\sqrt{2}$, teremos racionais nesse intervalo e, portanto, tomando comprimentos "tão pequenos quanto se queira" para tais intervalos, obteremos números racionais tão próximos de $\sqrt{2}$ quando o desejado. Geometricamente, na reta numérica, isso significa que: dado um segmento incomensurável com

[24] Assim como na reta numérica dos racionais, pontos "à esquerda" da origem são entendidos algebricamente: simétricos aditivos dos pontos que estão à "direita" da origem.

a unidade, podemos sempre obter segmentos comensuráveis com a unidade que tenham comprimentos "tão próximos quanto o desejado" quanto do segmento incomensurável. É justamente por isso que os números racionais são suficientes para os fins pragmáticos das medições. O leitor que desejar maiores detalhes acerca da aproximação de irracionais por racionais, pode consultar (NIVEN, 2012); (COURANT;ROBBINS, 2000) ou (LIMA et al, 2006).

7.1 EXEMPLOS DE IRRACIONAIS E O CONJUNTO DOS REAIS

Na seção anterior, fora dito que caso considerássemos somente os números racionais na reta numérica, então essa teria diversos "furos": sendo cada "furo", por sua vez, entendido como um "número irracional".

Porém, demonstrou-se como exemplo de número irracional, tão somente $\sqrt{2}$. Ou seja, demonstrou-se, a priori, apenas "um furo" na reta numérica racional. Onde estariam os "potenciais furos"? Convém observar que, uma vez que os racionais são algebricamente fechados, um exemplo de irracional basta para deduzir a existência de diversos irracionais.

De fato, no caso de $\sqrt{2}$, podemos pensar geometricamente na reta numérica da seguinte forma: dado o seguimento de reta com comprimento $\sqrt{2}$, divida-o em n partes iguais e, em seguida, enfileire, de forma justaposta, m de tais subsegmentos. Tal procedimento, resultaria no segmento com comprimento $\frac{m}{n}\sqrt{2}$. Um número dessa forma só pode ser irracional. Pois, se não fosse, ao multiplicá-lo por $\frac{n}{m}$ obteríamos, pelo fato dos racionais serem algebricamente fechados, a contradição de que $\sqrt{2}$ seria um número racional.

Uma vez que $\frac{m}{n}\sqrt{2}$ possui significado para quaisquer m e n inteiros, segue que existem infinitos irracionais.[25]

O conjunto de todos os racionais ($\mathbb{Q}$) unido com o conjunto de todos os irracionais ($\mathbb{I}$) é denominado de conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. O modelo geométrico do conjunto dos reais é a reta numérica "sem furos", ou seja, a reta numérica que considera a existência de comprimentos incomensuráveis com a unidade, os números irracionais.[26]

Foca-se, agora, em obter exemplos de irracionais para além dos "gerados por $\sqrt{2}$". Nesse ponto, uma questão interessante para as mentalidades discentes é lembrar que 2 é primo e conjecturar se $\sqrt{p}$, com p primo, seria igualmente um número irracional[27]. A demonstração

[25] A bem da verdade, a infinitude dos irracionais é "maior" que a infinitude dos racionais uma vez que esses são enumeráveis e, aqueles, não enumeráveis. Para uma apreensão do conceito de enumerabilidade, o leitor pode consultar (COURANT; ROBBINS,2000) ou qualquer livro de Análise Real.

[26] Em $\mathbb{R}$, valem todas as leis fundamentais da aritmética em $\mathbb{Q}$ assim como a relação de ordem e suas propriedades. Isso não será desenvolvido para não torná-lo uma exposição de formalidades impertinentes com o fim do trabalho. Ao leitor interessado, basta consultar qualquer livro de Análise Real.

[27] O quê garante a existência do número real $\sqrt{p}$? A garantia está na sobrejetividade da função quadrática. Nessa linha, remete-se o leitor para (LIMA et al, 2006). Para uma perspectiva geométrica, observa-se que $\sqrt{p}$ é um comprimento construtível com régua e compasso e, nesse sentido, o leitor interessado pode consultar (COURANT; ROBBINS, 2000).

dessa questão, nada mais é do que a generalização do argumento para a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

I) Dado um número primo p, $\sqrt{p}$ é irracional.

Suponhamos, por redução ao absurdo, que $\sqrt{p}$ seja racional. Ou seja, $\sqrt{p} = \frac{m}{n}$, onde tal fração é irredutível. Logo, pelas leis da aritmética sobre os racionais, segue que: $(m)^2 = p(n)^2$, onde m e n são inteiros.

No entanto, sabe-se pelo TFA que os inteiros $(m)^2$ e $(n)^2$ devem ter uma quantidade par de fatores "primos p" em suas fatorações.

Porém, a relação $(m)^2 = p(n)^2$ implica que, devido ao fator p que multiplica o termo $(n)^2$, a quantidade máxima de fatores "primos p" em $(m)^2$ seria uma unidade maior que a quantidade máxima de fatores "primos p" em $(n)^2$. Ou seja, teríamos um quantidade ímpar de fatores "primos p" em $(m)^2$. Absurdo para com o TFA.

Portanto, é insustentável imaginar que $\sqrt{p}$, com p primo, possa ser um número racional. $\square$

Fica estabelecido, portanto, e pelo fechamento aritmético de $\mathbb{Q}$, que números da forma **a +b$\sqrt{p}$, com p primo e a,b racionais** são números irracionais.

Podemos continuar usando a força do TFA para obter, via argumentos de inspiração análoga, mais exemplos interessantes de números irracionais. Vejamos:

II) Dado um conjunto com n números primos, a raiz quadrada do produto de tais primos ($\sqrt{p_1 ... p_n}$) é um números irracional.

Suponha, por redução ao absurdo, que $\sqrt{p_1 ... p_n} = \frac{m}{n}$.

Logo, têm-se equação $m^2 = (p_1 ... p_n)n^2$.

Pelo TFA, a quantidade máxima de cada fator primo p_k, com $1 \leq k \leq n$, deve ser par nos inteiros m^2 e n^2 (lembre que 0 é par). No entanto, a equação acima implica que a quantidade máxima de qualquer fator primo p_k, com $1 \leq k \leq n$, em m^2 será uma unidade maior que a quantidade máxima desses respectivos fatores em n^2. Portanto, m^2 teria uma quantidade ímpar de fatores primos p_k em sua decomposição.

Absurdo com o TFA. $\square$

Fica estabelecido, portanto, e pelo fechamento aritmético de $\mathbb{Q}$, que números da forma **a + b**$\sqrt{p_1 ... p_n}$, com p_1, ... , p_n n primos distintos entre si e a,b racionais são números irracionais.

Por fim, questão interessante para desenvolver com os discentes é ponderar se, tal como os racionais, ocorreria "fechamento aritmético" para $\mathbb{I}$: ou seja, somar e/ou multiplicar irracionais resulta **sempre** em irracionais? A resposta é negativa. Ou seja, somar e/ou multiplicar irracionais poderá ora resultar em irracionais, ora em racionais. Vejamos alguns exemplos, aproveitando o que desenvolveu-se.

De fato, comecemos pela soma. $\sqrt{5}$ e $\sqrt{7}$ seriam, pelo caso I acima, números irracionais. Poderia $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ ser racional? Se tal soma fosse racional, teríamos:

$\sqrt{5}+\sqrt{7}=\frac{m}{n}\Rightarrow(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=(\frac{m}{n})^2\Rightarrow 5+\sqrt{5.7}+7=(\frac{m}{n})^2\Rightarrow\sqrt{5.7}=(\frac{m}{n})^2-5-7.$ Ou seja, uma vez que o lado direito da última equação é claramente racional, isso implicaria que $\sqrt{5.7}$ deveria ser racional. Absurdo, uma vez que trata-se de raiz quadrada do produto de primos distintos (caso II) visto acima. Logo, $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ seria um exemplo de dois irracionais que, quando somados, resultam num irracional.

E quanto a soma dos irracionais (2-$\sqrt{2}$) e (2+$\sqrt{2}$)? Claramente, tal soma resultaria no inteiro 4. Trata-se, portanto, de exemplo de irracionais cuja soma resulta em racional.

Quanto a multiplicação, cita-se os triviais exemplos pontuais: $\sqrt{2}.\sqrt{3}$=$\sqrt{2.3}$=$\sqrt{6}$ (Produto de irracionais resultando em número irracional) e $\sqrt{2}.\sqrt{2}$=2 (produto de irracionais resultando em número racional).

Bem estabelecidos e compreendidos esses diversos exemplos de números irracionais “imediatos”, o presente trabalho passa a se concentrar em dois números irracionais “famosos”: o “número de Euler” (simbolizado por e) e o “número pi” (simbolizado por π).

7.2 NÚMERO DE EULER: IMPORTÂNCIA E IRRACIONALIDADE

No ensino básico, o “número de Euler” (e) tradicionalmente surge no estudo dos logarítmos e tende a ser, junto com o π, uma espécie de número “místico” para os discentes: pois sua importância e irracionalidade são estabelecidas via argumentos de autoridade, via “axiomas”.

Desse modo, as mentalidades discentes são estimuladas a nutrirem um certo sentimento de “esoterismo” para com tal número[28].

Os logaritmos que possuem o “obscuro número de Euler” como base tendem a ser, no ensino básico, denominados como “logaritmos neperianos”. E a “importância” de e tende a não ir muito além dessa banal denominação, dessa imposição semântica. Porém, conforme o professor Elon Lages Lima (LIMA, 2006) demonstra, até essa denominação é inadequada. Mais precisamente, a denominação é equivocada e desprovida de conteúdo significativo:

> Os logaritmos que têm bases e são às vezes impropriamente chamados de “logaritmos neperianos”. Na realidade, os logaritmos originalmente introduzidos por Napier tinham por base o número $a=(1-10^{-7})^7$. Aliás, para sermos mais exatos, o verdadeiro “logaritmo neperiano” do número x era igual a $10^7\log_a\frac{x}{10^7}$ (LIMA,2006,p.175)

A verdade é que o “número de Euler” é resultado de uma longa maturação intelectual na

[28] Ainda mais porque $e=2,718281...$ (o impacto nas mentalidades discentes é inevitável: como pode um número tão “esquisito”, ser importante?).

história do pensamento matemático (MAOR, 1994) e, talvez justamente por isso, seu significativo teor tenda a ser evitado no ensino básico.

Portanto, o objetivo da presente seção é fazer uma breve digressão acerca da importância de e, conceituando-o pela via de significativos problemas elementares - e dando, portanto, um honesto vislumbre de sua real importância - conforme as obras do professor Elon Lages Lima (LIMA, 2010); (LIMA, 2006) e de Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000). Em seguida, será demonstrada a irracionalidade de e conforme o livro do professor Djairo Guedes de Figueiredo (FIGUEIREDO, 2002).

Para o leitor interessado numa analítica digressão acerca de e, sugere-se a obra "e: The story of a number" de Eli Maor (MAOR, 1994), a qual pode ser compreendida, metaforicamente falando, como uma densa "biografia" do número e.

Na busca por uma curta resposta acerca da importância de e, a percepção do professor Elon Lages Lima é digna de destaque:

> Talvez a resposta mais concisa seja que o número e é importante porque é inevitável. Surge espontaneamente em várias questões básicas. Uma das razões pelas quais a Matemática é útil às Ciências em geral está no Cálculo (Diferencial e Integral), que estuda a variação das grandezas. E um tipo de variação dos mais simples e comumente encontrados é aquele em que o crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros, crescimento populacional (de pessoas ou bactérias), desintegração radioativa, etc. Em todos os fenômenos dessa natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível. (LIMA, 2006, p.174)

Assim, apreende-se, por ora via autoridade, que o número e seria importante por ser *inevitável* no tratamento de grandezas cuja variação seja, em cada instante, proporcional à quantidade da gradeza no mesmo instante. Isso é um fato trivial nos cursos de Cálculo Diferencial e, mais especificamente, na resolução das mais simples equações diferenciais de 1ª Ordem (GUIDORIZZI, 2019). Porém, como tratar o e de forma intelectualmente honesta, no ensino básico? Para essa celeuma, o professor Elon (LIMA, 2006) desenvolve uma elegante via elementar para tratar-se de e, via o conceito de *juros contínuos*.

O presente trabalho reproduzirá tal via, com algumas adaptações, e alinha-se com o professor Elon Lages Lima ao entender que tal forma de proceder, na exposição de e, é a ideal para o ensino básico: o problema dos "juros contínuos" é uma interessante via docente para introduzir, nas mentalidades discentes, o conceito de e e, ao mesmo tempo, demonstrar a dignidade de tal número.

Para tal empreitada, os conceitos básicos da Matemática Financeira - Montante, Capital, Juros, Capitalização em períodos distintos do período nominal da taxa de juros etc - serão utilizados sem maiores formalidades. Para o leitor que desejar uma análise de tais conceitos, sugere-se a obra “Progressões e Matemática Financeira” (MORGADO;WAGNER;ZANI, 2001).

7.2.1 O problema dos juros contínuos e da desintegração radioativa.

O PROBLEMA DOS JUROS CONTÍNUOS.

Suponhamos que um sujeito aplique 1 real a juros de 100% ao ano. Após um ano, ao capitalizar a taxa de juros, o montante seria: $(1 + (100\%)(1)) = 1 + (1)(1) = 2$ reais. Nesse ponto, é necessário destacar que a capitalização dos juros foi **anual**.

Agora, lança-se a seguinte questão: qual seria o montante se, ao invés de capitalização anual, **a taxa nominal de 100% ao ano fosse capitalizada semestralmente?** Ou seja: qual seria o montante se a capitalização fosse semestral? Nesse caso, dividiu-se a ano em duas partes iguais de modo que, embora a taxa de juros anual seja de $100\% = 1$, a taxa de juros a ser capitalizada semestralmente deverá ser (MORGADO;WAGNER;ZANI, 2001) de $\frac{100\%}{2} = \frac{1}{2}$.

Assim, no primeiro semestre, teria-se $(1 + (\frac{1}{2})(1)) = (1 + \frac{1}{2})$ e, no segundo semestre, teria-se o montante obtido ao término do primeiro semestre mais $\frac{1}{2}$ de juros sobre tal quantia. Ou seja: $(1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2})[1 + (\frac{1}{2})] = (1 + \frac{1}{2})^2$

Ato contínuo, lança-se a seguinte questão: qual seria o montante se, ao invés de capitalização semestral, **a taxa nominal de 100% ao ano fosse capitalizada quadrimestralmente?**. Nesse caso, dividiu-se a ano em três partes iguais de modo que, embora a taxa de juros anual seja de $100\% = 1$, a taxa de juros a ser capitalizada quadrimestralmente deverá ser (MORGADO;WAGNER;ZANI, 2001) de $\frac{100\%}{3} = \frac{1}{3}$.

Portanto, no primeira terça parte do ano, teria-se $(1 + (\frac{1}{3})(1)) = (1 + \frac{1}{3})$. Na segunda terça parte do ano, teria-se o montante obtido ao término da primeira parte mais $\frac{1}{3}$ de juros sobre tal quantia. Ou seja: $(1 + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3}) = (1 + \frac{1}{3})[1 + (\frac{1}{3})] = (1 + \frac{1}{3})^2$. Por fim, na terceira e última parte do ano, teria-se o montante até então obtido mais $\frac{1}{3}$ de juros sobre tal quantia. Ou seja: $(1 + \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})^2 = (1 + \frac{1}{3})^2[1 + (\frac{1}{3})] = (1 + \frac{1}{3})^3$.

Enfim, generalizando os procedimentos acima, foca-se na questão de real interesse: qual seria o montante se o ano fosse dividido em n partes iguais e, portanto,**a taxa nominal de 100% ao ano fosse capitalizada a cada n-ésimo intervalo do ano?**. Nesse caso, dividiu-se a ano em n partes iguais de modo que, embora a taxa de juros anual seja de $100\% = 1$, a taxa de juros a ser capitalizada em cada intervalo deverá ser (MORGADO;WAGNER;ZANI, 2001) de $\frac{100\%}{n} = \frac{1}{n}$.

Dessa forma, na primeira n-ésima parte do ano, teria-se $(1 + (\frac{1}{n})(1)) = (1 + \frac{1}{n})$. Na segunda n-ésima parte do ano, teria-se o montante obtido ao término da primeira parte mais $\frac{1}{n}$ de juros sobre tal quantia. Ou seja: $(1 + \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})[1 + (\frac{1}{n})] = (1 + \frac{1}{n})^2$. Avançando nos procedimentos de capitalização ao longo dos n-ésimos intervalos, conclui-se que, por fim, na última n-ésima parte do ano, teria-se o montante até então obtido mais $\frac{1}{n}$ de juros sobre tal quantia. Ou seja: $(1 + \frac{1}{n})^{n-1} + (\frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n})^{n-1} = (1 + \frac{1}{n})^{n-1}[1 + (\frac{1}{n})] = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Nesse ponto, uma detida reflexão deve ser feita. Convém observar a sutileza de que, nesse procedimento de ir capitalizando ao longo dos n-ésimos intervalos, sempre quando passa-se de um intervalo k (dentre os n-ésimos intervalos), para a capitalização no intervalo k+1, ocorrerá que a variação do montante a ser obtido em k+1 dependerá da quantidade já desenvolvida no intervalo k. Desse modo, pensando-se num intervalo k "infinitesimalmente pequeno"(o que corresponde a n "suficientemente grande"), **intui-se** que a variação da grandeza (Montante) será proporcional à quantidade presente da grandeza num dado instante (Montante até então capitalizado). Essa reflexão é interessante pois, tal característica das variações, conforme explicitado por Elon (LIMA, 2006), tem conexão estrita com e a qual será exposta a seguir.

Chegou-se, enfim, no **problema dos juros contínuos**: dado um capital inicial de 1 real e uma taxa de juros nominal de 100% ao ano, qual seria o montante a obter-se, após 1 ano, se os juros forem capitalizados **continuamente?**.

Por "capitalização contínua", entende-se tomar $(1+\frac{1}{n})^n$ e considerar n "indefinidamente grande". Recai-se, portanto, inevitavelmente no conceito de **limite de sequências** e têm-se aí, inclusive, uma salutar via docente para trabalhar-se tal conceito com as mentalidades discentes. Para tal, recomenda-se duas obras as quais, com os devidos filtros pedagógicos docentes, são suficientes para uma exata noção do conceito de limite: Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT;ROBBINS, 2000) e Hamilton Luiz Guidorizzi (GUIDORIZZI,2019). Para um estudo mais profundo acerca do conceito de limites de funções reais recai-se, inevitavelmente, na Análise Real e, nessa linha, recomenda-se o "Introdução à Análise Matemática na Reta" do professor Claus I. Doering (DOERING,2017).

Ocorre que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe[29] e, conforme bibliografia supracitada, trata-se justamente do "número de Euler" (e). Ou seja: $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Portanto, em nosso problema dos juros contínuos, o montante após um ano deverá ser de e reais.

A título de curiosidade, observa-se que o problema dos juros contínuos pode ser facilmente generalizado para qualquer capital inicial "C" e taxa anual de juros de "b$\%$=a" ao ano. De fato, por argumentos inteiramente análogos, e utilizando-se das propriedades operatórias dos limites(DOERING,2017), após subdividirmos o ano em n partes iguais e pensarmos no limite, obteríamos, após t anos, o seguinte montante:

$$\lim_{n\to\infty} C\left(1+\frac{at}{n}\right)^n = C\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{at}{n}\right)^n = C\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{at}}\right)^{at(\frac{n}{at})} =$$

[29] Basta notar que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é limitada superiormente e é crescente. Todas sequências nesses termos, conforme bibliografia citada, convergem. Para ver a limitação superior e o crescimento monótono, uma via é utilizar-se convenientemente o binômio de Newton e progressões geométricas, conforme é feito pelo professor Guidorizzi (GUIDORIZZI,2019). Uma vez que tal sequência é limitada superiormente, ela admitirá supremo. O limite será tal supremo(DOERING,2017). De fato, tomando um aberto em torno de tal supremo segue que, pela definição de supremo, algum elemento da sequência deverá estar em tal aberto. Uma vez que a sequência é crescente, todos os termos seguintes da sequência também estarão contidos em tal aberto: isso prova rigorosamente que o limite da sequência existe e é justamente o supremo.

$$C\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{at}}\right)^{\left(\frac{n}{at}\right)}\right)^{at} = C\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{(x)}\right)^{at} = C(e)^{at}.$$

O PROBLEMA DA DESINTEGRAÇÃO RADIOATIVA.

O problema dos juros contínuos é um exemplo de crescimento contínuo, portanto variação contínua, de uma grandeza de modo que, a cada instante, a taxa de variação da grandeza é proporcional ao valor dessa grandeza no mesmo instante (LIMA,2010). Bem entendido o problema dos juros contínuos, podemos, de forma absolutamente análoga, partir para problemas semelhantes de **perdas contínuas** e, portanto, de decrescimento contínuo.

Nessa linha, seleciona-se clássico modelo para a "desintegração radioativa", conforme a perspectiva do professor Elon Lages Lima:

> Os átomos de uma substância radioativa (como o rádio ou o urânio) possuem uma tendência natural a se desintegrarem, emitindo partículas e transformando-se em outra substância não radioativa. Assim sendo, com o passar do tempo, a quantidade de substância original diminui(aumentando, consequentemente, a massa da nova substância transformada). Isto é feito de tal maneira que, num determinado instante, a quantidade de matéria que se desintegra de um corpo radioativo é proporcional à massa de substância original presente no corpo naquele instante. A constante de proporcionalidade α é determinada experimentalmente. Cada substância radioativa tem sua constante e desintegração α. Consideremos um corpo de massa M_0, formado por uma substância radioativa cuja taxa de desintegração é α. Se a desintegração se processasse instantaneamente(...) (LIMA, 2010, p.120)

Desse modo, dado um intervalo de tempo t, podemos subdividi-lo em n pates iguais, de modo que, depois de transcorrido a primeira fração $\frac{t}{n}$ de tempo, a massa do corpo se reduziria a $M_0 - (\frac{t\alpha}{n})M_0 = M_0(1 - \frac{t\alpha}{n})$. Por argumentação análogo ao caso dos juros contínuos, ao fim dos n intervalos de tempo, teríamos de massa restante $M_0\left(1-\frac{t\alpha}{n}\right)^n$. Ou seja, $M(t) = M_0\left(1-\frac{t\alpha}{n}\right)^n$. Porém, estamos interessados num **processo contínuo**, logo, devemos pensar em valores "indefinidamente grandes" para n. Em termos matemáticos, isso significa refletir-se sobre: $\lim\limits_{n\to\infty} M_0\left(1-\frac{t\alpha}{n}\right)^n$. Será que tal limite existe? Teria relação com o número de Euler? Convém fazer alguns ajustes algébricos, utilizando-se das propriedades dos limites (DOERING,2017).

Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} M_0\left(1-\frac{t\alpha}{n}\right)^n = M_0\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t\alpha}{n}\right)^n = M_0\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n}{t\alpha}}\right)^{t\alpha\left(\frac{n}{t\alpha}\right)}$$

$$= M_0\left(\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n}{t\alpha}}\right)^{\left(\frac{n}{t\alpha}\right)}\right)^{t\alpha} = M_0\left(\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(x)}\right)^{t\alpha}.$$

A questão essencial, portanto, está no cálculo do limite $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(x)}$. Tal limite pode ser obtido sabendo-se que $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{(x)}$.

De fato, basta observar que:

$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(x)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{(x)}=\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{x}=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{(x)}.$

Ou seja, têm-se que:

$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(x)}=\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{(x)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{(x)}}$. Onde, claramente[30], $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{(x)}=1$ e $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{(x)}$. Dessa forma, pelas propriedades operatórias de limites(DOERING,2017), segue que:

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(x)}=\frac{1}{e}$

Portanto, têm-se finalmente que:

$M(t)=\lim_{n\to\infty}M_0\left(1-\frac{t\alpha}{n}\right)^{n}=M_0e^{-t\alpha}.$

7.2.2 Relevância na teoria dos logaritmos

O número de Euler (e) também possui um certo destaque conceitual (MAOR,1994) na teoria dos logaritmos. Porém, a nitidez de tal destaque depende da forma como aborda-se a teoria dos logaritmos (LIMA,2010).

De fato, no ensino básico, tende-se a expor o conceito de logaritmo - mais geralmente, o conceito de função logarítmica - pensando-se na inversibilidade da função exponencial. Tal via possui uma série de inconvenientes, bem compilados e expostos pelo professor Elon Lages Lima (LIMA,2010), mas, no contexto da digressão aqui feita, o inconveniente mais relevante seria: a dificuldade de apreender-se o significado de e na teoria de logaritmos, conforme vulgarmente exposta no ensino básico. Tradicionalmente, no ensino básico, o significado de e seria tão somente o de ser a base de certos tipos de logaritmos semântica e arbitrariamente definidos como "logaritmos naturais"[31].

Por outro lado, a relevância de e nos logaritmos torna-se mais "natural" quando desenvolve-se a teoria de logaritmos via a noção de áreas sob faixas de hipérbole equilátera(MAOR,1994). Tal forma procedimental, mais do que representar explícita significância para e, resulta em outros notáveis ganhos teóricos(LIMA,2010): imensa facilidade para demonstrar-se certas desigualdades (como, por exemplo, $\frac{x}{1+x}<ln(1+x)<x$); contorno da dificuldade de estabelecer o significado de potências com expoentes irracionais (pois, quando o logaritmo é pensado pela via da inversibilidade da função exponencial, pressupõe-se o exaurimento do estudo de potências) etc.

De fato, pensar nos logaritmos pela via da área sob hipérbole é uma perspectiva tão profícua que, a bem da verdade, ninguém menos que Leonhard Euler cultivava tal perspectiva denominando os tais "logaritmos naturais" de "logaritmos hiperbólicos"(LIMA,2006). A gênese

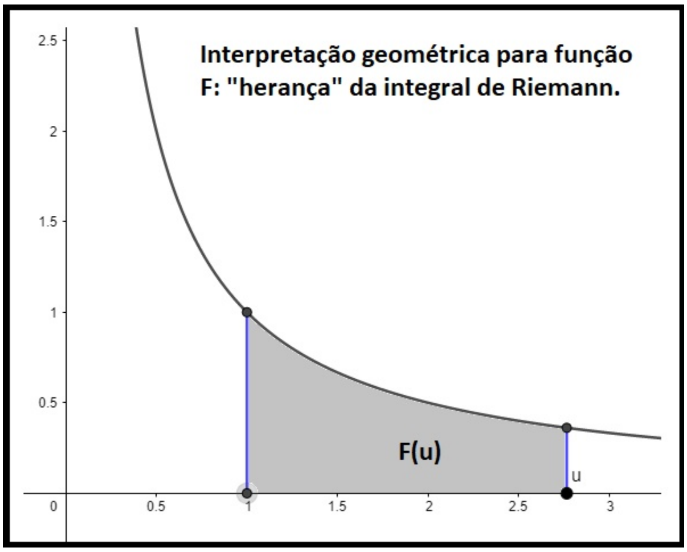
30 De fato, note que $\frac{1}{x}\to 0$, para x suficientemente grande. Logo, $\frac{1}{x^2}\to 0$, para x grande e, assim, $(1-\frac{1}{x^2})\to 1$, para x grande. Desse modo, multiplicando limites reiteradas vezes, têm-se $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{(x)}\to 1$

31 Talvez, a nomenclatura mais honesta deveria ser "logaritmos obscuros" ou, conforme sugestão de um certo aluno, "logaritmos bizarros": afinal, qual seria a relevância de pensar-se numa base tão "esquisita" para logaritmos? Isso só estimula confusão mental nos discentes e o sentimento de esoterismo para com e, alimentando uma visão profundamente irracional da Matemática. Poderia um ensino assim ir bem? Evidente que não.

conceitual de tal perspectiva é a seguinte: dada a função $f(x) = \frac{1}{x}$, definida no domínio dos reais positivos, define-se, também no domínio dos reais positivos, a função $F(u) = \int_1^u f(x)dx$. Ou seja, $F(u) = \int_1^u \frac{1}{x}dx$.

Geometricamente, portanto, $F(u)$ expressa a noção da área da faixa de hipérbole compreendida entre as abscissas 1 e u. Mais especificamente, expressa uma noção de "área orientada" uma vez que têm-se $F(u) < 0$ para $0 < u < 1$ e $F(u) = 0$, quando $u = 1$: tudo isso deriva imediatamente das propriedades da Integral de Riemann(GUIDORIZZI,2019) presentes em F, por construção. Convém ratificar: aquele que quiser uma exposição a nível de matemática elementar para tais fatos, pode consultar Elon Lages Lima (LIMA,2010). Em termos de docência no ensino básico é evidente que a via do professor Elon (LIMA, 2010) é a mais adequada: no fundo, trata-se de falar de áreas sob faixas de hipérbole sem recorrer-se explicitamente ao arcabouço teórico do Cálculo Diferencial e Integral. Isso é possível, mas resulta, como não poderia deixar de ser, num caminho mais longo. A figura a seguir expressa a interpretação geométrica de F:

Figura 9 – Logaritmos hiperbólicos



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O mais interessante, e talvez surpreendente, é que a função F acima **possui a propriedade de transformar produtos em somas**(COURANT; ROBBINS, 2000), ou seja, $F(xy) = F(x) + F(y)$ sinalizando, portanto, ser uma via adequada para uma teoria dos logaritmos. Não há o objetivo de desenvolver-se aqui a teoria dos logaritmos via áreas, pois isso nos afastaria do escopo do presente trabalho. O leitor interessado nas especificidades de tal desenvolvimento, e nas suas profícuas implicações, pode consultar, a nível de matemática elementar, a obra "Logaritmos" (LIMA,2010) ou, a nível do Cálculo Diferencial e Integral, a obra (COURANT;ROBBINS,2000).

Assim, nessa perspectiva teórica dos logaritmos, a função F é definida como "o logaritmo natural" (ou hiperbólico, segundo Euler). A relevância de e, nessa perspectiva, surge quando reflete-se sobre a base de F: ou seja, qual seria o valor u tal que F(u)=1? Como F é sobrejetiva

(COURANT; ROBBINS,2000), tal valor existe[32]. Digamos que "a" seja esse valor. Assim, F(a)=1. Nesses termos, usando-se do Cálculo Diferencial e da noção de função exponencial é possível demonstrar (COURANT; ROBBINS, 2000) que tal contexto implicará em: $a^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, sendo x qualquer real.

Assim, quando $x = 1$, segue que $a = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Portanto, a base do "logaritmo natural"(definido pela noção de áreas), seria justamente o número de euler[33]! Ademais, uma vez que $a = e$, note que seguirá que $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$**: essa relação é poderosa, voltaremos nela no próximo tópico do trabalho.**

Nesse ponto, portanto, uma vez que entende-se a base de F como e, pode-se fazer a readequação para a notação usual[34] do logaritmo natural, ou seja: $ln(x) = F(x)$.

Feitas todas essas considerações, estamos aptos para expor o destaque que os logaritmos na base e possuem. Nessa linha, analisa-se uma célebre frase atribuída a Leonhard Euler, segundo leitura do professor Elon Lages Lima: **"O logaritmo hiperbólico pode ser caracterizado pela igualdade log(1+x)=x, para todo número infinitamente pequeno x. Esta frase é de Euler."**(LIMA, 2006, p.176). Uma observação deve ser feita: o contexto dessa citação é considerar log(x) como o F(x) definido acima ou, usando notações mais usuais, log(x)=$ln(x)$. O professor Elon Lages Lima, também oferece uma análise para tal citação, a qual está sintetizada a seguir:

> Evidentemente, na teoria habitual dos números reais, não há números infinitamente pequenos. O que Euler quis dizer é que log(1+x) e x são "infinitésimos equivalentes" ou, de modo mais preciso, que
> $\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x} = 1.$
> Esta igualdade só é verdadeira quando a base do sistema de logaritmos é o número e. Se tomarmos logaritmos numa base a teremos
> $\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x} = c,$
> onde c é o logaritmo natural de a.
>
> Na verdade, esta fórmula é um caso particular do fato de que a derivada da função log(x) é igual a $\frac{c}{x}$. Aqui tomamos log(x) numa base a qualquer. Se a base for e então a derivada de log(x) será $\frac{1}{x}$. (No caso geral, c=log_ea.) (LIMA, 2006, p.176)

De fato, basta observar que a análise feita pelo professor Elon Lages Lima interpreta o limite $\lim_{x\to 0}\frac{log(1+x)}{x}$ como a *derivada* de log(x) **no ponto x=1.**.

32 Intuitivamente, pela interpretação geométrica de F, isso é bem razoável de ser aceito: assim como a continuidade de F.

33 Por questões didáticas, tal conexão foi feita no sentido inverso da História. A bem da verdade, Euler definia(COURANT; ROBBINS, 2000), *a priori*, e como sendo a base de F. Em seguida, desse fato, concluía que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

34 Também está sendo pressuposto que F é inversível com inversa dada por e^x. Conforme já dito, esses detalhes teóricos estão bem desenvolvidos em (COURANT; ROBBINS, 2000).

7.2.3 Irracionalidade

Bem entendida a existência e significado de e, é natural refletir sobre sua categorização dentro dos números reais: seria e um número racional ou irracional? Nesse tópico, será reproduzida uma clássica demonstração para a irracionalidade de e. O pré-requisito é a aceitação de uma certa série para e, Sobre isso, vamos refletir preliminarmente.

No tópico anterior, argumentou-se pela relação $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, válida para todo x real. Após demonstrar essa relação, Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000) explicitam como ela "inspira" uma famosa série para e^x. De fato, basta utilizar convenientemente o binômio de Newton para a expansão de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ e, em seguida, repensar o limite para $n \to \infty$. Vejamos.

Pelo binômio de Newton, têm-se:

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{x^3}{n^3} + ... + \frac{x^n}{n^n}$

Reescrevendo convenientemente cada termo da soma, segue:

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{x^3}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... + \frac{x^n}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-2}{n})(1-\frac{n-1}{n})$

Assim, considerando "n suficientemente grande", têm-se $(1-\frac{k}{n}) \to 1$, para todo k natural tal que $k \leq n$. Dessa forma, considerando propriedades operatórias dos limites (DOERING, 2017), é razoável considerar que:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

De fato, tal série, clássica e canônica na teoria do Cálculo Diferencial e Integral, está correta e detalhes rigorosos podem ser obtidos em (DOERING,2017); (COURANT; ROBBINS, 2000) e (GRUIDORIZZI, 2019).

No caso de x=1, segue que:

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$

Esse será nosso ponto de partida para argumentar-se pela irracionalidade de e. O argumento será totalmente análogo ao que consta na obra do professor Djairo Guedes Figueiredo (FIGUEIREDO, 2002). A prova consiste numa redução ao absurdo que conflite com o PBO nos inteiros.

Suponha, por redução ao absurdo, que e seja um número racional. Logo, podemos escrever $e = \frac{p}{q}$, de modo que tal fração seja irredutível.

Considerando $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$,

segue que:

(1) $\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Mas, $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + ...\right) < \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + ...\right)$

No entanto, note que a expressão entre parênteses no último membro é uma progressão geométrica da forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$, sendo $0 < r = \frac{1}{q+1} < 1$. Tais progressões, bem conhecidas do ensino elementar, possuem soma igual a $\frac{r}{(1-r)} = \frac{\frac{1}{q+1}}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}$. Assim, segue que:

(2) $\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$. Substituindo tal informação em (1), resulta que:

$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$

Multiplicando por $q!$, toda a desigualdade:

$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}$

Chegou-se no absurdo. De fato, basta notar que o termo do meio, na desigualdade anterior, certamente é um número inteiro (pois $q!$ cancela todos os denominadores de frações ali presentes). Porém, tal inteiro seria maior que zero e menor que $\frac{1}{q}$: ou seja, **construiu-se um inteiro entre 0 e 1. Absurdo com o PBO!**

Logo, e certamente é irracional.

7.3 O NÚMERO Pi: CONCEITO E BOA DEFINIÇÃO.

A significância do número π, no ensino básico, tende a ser tão obscura quanto a do número de Euler (e). Assim, o conceito e natureza irracional de π também tendem a ser estabelecidos "esquizofrênicamente", fundado-se em argumentos de autoridade.

Tradicionalmente, e isso é um fato notório, π é definido como a razão entre o perímetro de uma circunferência por seu diâmetro. O que não é bem estabelecido, porém, é a questão da *invariância* de tal definição: o quê garante, na Geometria Euclidiana, que π estará bem definido? Ou seja, o quê sustenta, na Geometria Euclidiana, que ao modificarmos as circunferências (e, portanto, seus respectivos perímetros e diâmetros), obteremos **sempre** um mesmo número, uma constante?

Tal reflexão é o problema da "boa definição" de π. Evidente que, por uma questão lógica, é fundamental a certeza de tal invariância pois, caso contrário, "existiriam tantos Pi's, quantos distintos círculos" não podendo-se falar em "o" número π.

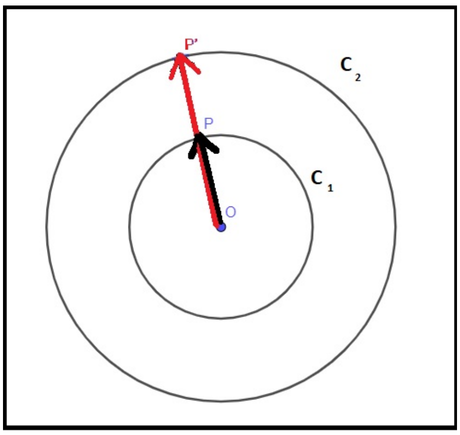
Seguramente, a humanidade começou apreender-se dessa invariância pela via experimental (BECKMANN, 1971) debruçando-se sobre muitos exemplos concretos de circunferências. Assim, pela via experimental, muitas culturas conjecturaram tal invariância e, a depender do nível de precisão de seus métodos de medida e de cálculo numérico, distintos valores para π foram expressos ao longo da História. O leitor que desejar fazer tal imersão acerca da evolução histórica e matemática de π, pode consultar a obra de Petr Beckmann (BECKMANN, 1971). Sem dúvidas, inferências empíricas, conjecturas, possuem alto potencial de valor agregado matemático: mas não podem constituir precisas definições matemáticas, na acepção moderna do termo, desenvolvida, por exemplo, ao longo da reformulação do rigor matemático no século XIX

(EVES, 2011).

Foquemos então na abstrata questão da "boa definição" de π: que resultados, da Geometria Euclidiana, garantem a invariância do resultado ao dividir-se perímetro de circunferência por seu diâmetro? A garantia está na noção de semelhança, fundada na noção de congruência (LIMA,2009). De fato, uma moderna e rigorosa exposição dessa questão da invariância, nos remete ao estudo das Homotetias. Não é pertinente desenvolver tal teoria aqui, pois fugiria do escopo do presente trabalho. O leitor interessado na apreensão analítica dessa teoria, deve consultar (LIMA, 2009). Objetiva-se aqui, tão somente, mostrar como a solução da questão da invariância ocorre pela via das homotetias. Em seguida, pensando-se nas mentalidades discentes, será dado um argumento mais elementar ainda para tal questão.

Para a Geometria Euclidiana Plana, Homotetias são funções do plano euclidiano para o plano euclidiano, ou seja, transformações no Plano Euclidiano que são definidas da seguinte forma (LIMA, 2009): dados um ponto O do plano e um número real positivo k, a Homotetia $H_{O,k}$ é a função que associa o vetor $\overrightarrow{OP}$ ao vetor $k.\overrightarrow{OP}$, onde P é um ponto qualquer do plano euclidiano. Ou seja: $H_{O,k}(P) = k.\overrightarrow{OP}$. No fundo, a homotetia no plano corresponde à formalização matemática da noção de "ampliação"(quando k > 1) ou "redução"(quando k < 1) de figuras; corresponde à formalização da ideia intuitiva de "zoom". **Um poderoso resultado da teoria das homotetias, é que Homotetias aplicadas sobre "figuras" resultam em "figuras" semelhantes**, e o fundamento disso é a noção de semelhança entre triângulos(LIMA, 2009). Assim, dadas duas circunferências distintas, C_1 e C_2, com $r_1 < r_2$, nota-se que existirá uma homotetia trivial entre tais figuras. De fato, basta centrá-las num mesmo ponto O e, em seguida, considerar a Homotetia $H_{O,k}$ com $k = \frac{r_2}{r_1}$. A figura a seguir expressa tal procedimento, de modo que $P' = H_{O,k}(P)$ e os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OP'}$ são colineares, uma vez que $\overrightarrow{OP'} = k.\overrightarrow{OP}$. Porém, para fins estéticos de visualização gráfica, destacou-se os vetores com distintas cores e direções ligeiramente distintas:

Figura 10 – Uma Homotetia trivial



Fonte: Elaborado pelo autor (2020), conforme (ELON,2009).

Dessa forma, segue que "Dois círculos quaisquer são figuras semelhantes e a razão de semelhança é a razão entre seus raios." (LIMA, 2009, p.46). Desse fato segue imediatamente que $\frac{C_2}{r_2} = \frac{C_1}{r_1}$ e, portanto, a boa definição, a invariância, para π.

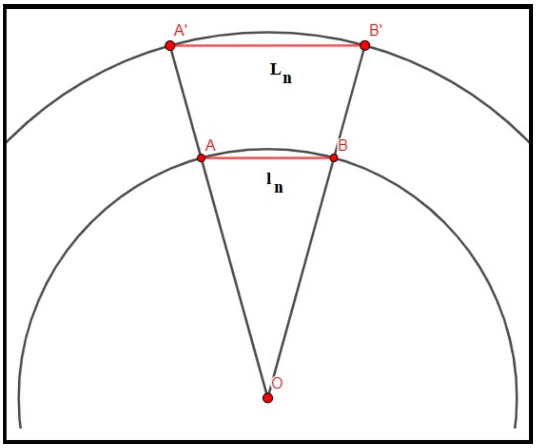
A argumentação da boa definição de π pela via das homotetias, tem o valor de bem estabelecer tal número. Porém, há o evidente "custo" de desenvolver-se o conceito de tais transformações no plano euclidiano: em si, isso é pertinente no Ensino Básico e pode ser uma interessante oportunidade docente para desenvolver-se aplicações da Geometria Analítica Plana nas mentalidades discentes. Nesse sentido, conforme já sinalizado, remete-se o leitor para a obra de Elon Lages Lima (LIMA, 2009).

Porém, uma argumento mais elementar para a semelhança de circunferências pode ser extraído da simples noção de semelhanças de triângulos: na realidade, esse é o ponto de partida para a justificação de muitas propriedades homotéticas (LIMA, 2009).

Usemos, portanto, explicitamente a semelhança entre triângulos para dar uma rápida e plausível argumentação plea semelhança de circunferências.

Dadas duas circunferências distintas, centramos ambas numa mesma origem; em seguida, inscreve-se um polígono regular na circunferência(C_1) de menor raio e, prolongando tal raio(r_1), obtêm-se um polígono regular "análogo" inscrito na circunferência(C_2) de raio maior(r_2). A figura a seguir expressa tal procedimento, porém, ela explicita apenas um dos lados desses tais polígonos regulares (pois é o essencialmente relevante):

Figura 11 – Invariância de π



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Dessa forma, pelo clássico caso de semelhança *Lado-Ângulo-Lado(LAL)* os triângulos AOB e A'OB' são semelhantes. Assim, $\frac{L_n}{l_n} = \frac{OA'}{OA} = \frac{r_2}{r_1}$. Porém, a fração $\frac{L_n}{l_n}$ é equivalente à $\frac{n(L_n)}{n(l_n)} = \frac{P_n}{p_n}$, onde P_n expressa o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência maior e p_n expressa o perímetro do polígono regular inscrito na circunferência menor. Portanto, seguirá que $\frac{P_n}{p_n} = \frac{r_2}{r_1}$. Agora, imaginando n "suficientemente grande", é razoável considerar que

$P_n \to C_2$ e $p_n \to C_1$. Assim, chegamos em $\frac{C_2}{C_1} = \frac{r_2}{r_1}$ ou, equivalentemente, que $\frac{C_2}{r_2} = \frac{C_1}{r_1}$ e, portanto, $\frac{C_2}{2r_2} = \frac{C_1}{2r_1} = \pi$.

7.3.1 Uma interessante demonstração da irracionalidade de Pi

Uma vez que π é um número real bem definido, surge uma natural dúvida: seria π racional ou irracional?[35]

A resposta para tal indagação necessitou de séculos de reflexão e resistiu(BECKMANN, 1971), inclusive, à investidas de matemáticos do calibre de Carl Friedrich Gauss e Leonhard Euler. Apesar desses gigantes da matemática não resolverem a questão, desenvolveram, em especial Euler, técnicas que futuramente serviriam para certas provas da irracionalidade de π (BECKMANN, 1971).

Pra histórica da Matemática (EVES, 2011), a primeira demonstração para a irracionalidade de π está no século XVIII, sob o mérito do matemático Johann Heinrich Lambert. De fato, Lambert conseguiu tal proeza utilizando-se da técnica das "frações contínuas". Porém, a argumentação tinha algumas brechas as quais, posteriormente, foram melhor blindadas por Legendre (BECKMANN, 1971). Desde então, outras demonstrações surgiram, em especial pela via do conceito de transcendência[36]. Nessa linha, destacam-se, conforme demonstra Petr Beckmann (BECKMANN, 1971), os matemáticos Charles Hermite e F. Lindemann os quais, e valendo-se das contribuições de Euler, criaram todo um arcabouço teórico que bem fixou a transcendência de π e, portanto, a irracionalidade de π. Assim, nota-se que demonstrações para a irracionalidade de π são, tradicionalmente, complexas e sofisticadas. O leitor interessado numa imersão nesse sentido, pode consultar Beckmann (BECKMANN, 1971).

É no mínimo notável, portanto, a contribuição de Ivan Niven, matemático canadense, dada em seu surpreendente artigo "a simple proof that π is irrational" (NIVEN, 1947): uma elegante demonstração para a irracionalidade de π, em apenas uma página!

Da leitura do professor Djairo Figueiredo(FIGUEIREDO, 2002), descobrimos a inspiração de Ivan Niven: Niven percebeu que um método desenvolvido por Hermite, para provar a transcendência de e, poderia ser adaptado para provar a irracionalidade de π. Evidentemente,

---

[35] Outra questão natural, mais preliminar, seria: quanto "vale" o π? Que número seria esse? O valor de tal constante pode ser recursivamente estimando por distintos métodos (COURANT; ROBBINS, 2000). Talvez, o método mais famoso, e bem difundido, para o cálculo de π seja o milenar "método da exaustão" de Arquimedes: a ideia essencial é inscrever, e circunscrever, polígonos regulares numa circunferência. Assim, imaginando uma circunferência com diâmetro unitário, seguirá que $p_n < C = 1.\pi < P_n \Rightarrow p_n < \pi < P_n$ onde P_n expressa o perímetro do polígono circunscrito de n lados e p_n expressa o perímetro do polígono inscrito de n lados. Tais perímetros são fáceis de calcular em função dos lados de seus respectivos polígonos e, portanto, fazendo-se n "suficientemente grande", π é obtido com quantas casas decimais exatas forem desejadas. Para maiores informações acerca desse método, remete-se o leitor para (COURANT; ROBBINS, 2000).

[36] O último capítulo da presente dissertação explicita brevemente o significado dos números transcendentes. Todo número transcendente é irracional.

isso não reduz nem um pouco o brilho da originalidade de Niven, mas nos lembra o quanto que o conhecimento matemático é colaborativo, desenvolvendo-se dialeticamente ao longo da história.

Vamos expor a elegante demonstração de Niven (NIVEN, 1947), exatamente como feita.

Antes, porém, algumas observações preliminares: visando maior "democratização" na apreensão da demonstração, notas de rodapé serão inseridas para melhor explicitar algumas passagens; em termos de pré-requisitos, a demonstração de Niven é uma elegante aplicação do Cálculo Diferencial e Integral para funções de uma variável real (mais especificamente, utiliza-se do conceito de derivação e o Teorema Fundamental do Cálculo); a estratégia da demonstração é pela via da redução ao absurdo. Supõe-se que π seja racional e mostra-se que derivação e integração, convenientemente aplicadas sobre certas funções, resultarão na existência de um inteiro entre 0 e 1. Mas isso é um absurdo com o PBO e, portanto, é inaceitável imaginar racionalidade para π.

A elegante demonstração de Niven para irracionalidade de π

Suponhamos, por redução ao absurdo, que π seja racional.

Logo, podemos escrever $\pi = \frac{a}{b}$, sendo tal fração irredutível. Em seguida, define-se[37] os seguintes polinômios:

(1) $f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$

(2) $F(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) - ... + (-1)^{(n)} f^{(2n)}(x)$, sendo o inteiro n especificado depois.[38]

Notemos que $n!f(x)$ é uma soma de monômios com coeficientes inteiros em x, de grau não menor que n.[39].

Portanto, $f(x)$ e suas derivadas $f^{(i)}(x)$ geram **valores inteiros** para $x = 0$.[40] O mesmo

[37] Conforme já dito, isso é inspirado no trabalho de Hermite (FIGUEIREDO, 2002).

[38] Conforme será visto, o argumento é invariante para n. Ao final, notar-se-á que, para n suficientemente grande, será possível extrair um inteiro entre 0 e 1, resultando no absurdo. Note que f(x) é, por construção, um polinômio de grau 2n e que o menor monômio de f tem grau n. Ademais, reitera-se que a notação $f^{(k)}(x)$, que aparece na construção de F(x), significa a k-ésima derivada de f em x: sempre existirá, pois função polinomial sempre é diferenciável tantas vezes quanto desejar-se (GUIDORIZZI, 2019).

[39] Basta considerar a expansão de $(a - bx)^n$, sendo o binômio de Newton uma via, e notar que ao multiplicar tal expansão por x^n, o grau de cada monômio aumentará em n. Desse modo, obter-se-á um polinômio de grau 2n cujo monômio de menor grau terá potência n em x.

[40] Imediato para $f(0)$. No caso das derivadas de f, basta observar que, pelas regras de diferenciabilidade, $(n!f(x))' = n!f'(x)$ e que, aplicando isso recursivamente, têm-se $(n!f(x))^{(k)} = n!f^{(k)}(x) \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(x^n(a-bx)^n)^{(k)}}{n!}$. Assim, pensar na derivação de f é, essencialmente, pensar na derivação k-ésima de $(x^n(a-bx)^n)^{(k)}$. Como $x^n(a-bx)^n$ é um polinômio de grau 2n, com n sendo o grau do monômio de menor grau, evidente que para 1<k<n e k>2n teremos o anulamento de $f^{(k)}(0)$. Pois, para 1<k<n $f^{(k)}$ sempre terá termos em x e, para k>2n, $f^{(k)}$ é o polinômio nulo. A delicadeza recai no caso $n \leq k \leq 2n$. Nesse contexto, usando o Binômio de Newton, nota-se que o (k-n+1) ésimo termo de $(x^n(a-bx)^n)^{(k)}$ será múltiplo de n! e, portanto, $\frac{((a-b0)^n)^{(k)}}{n!} = f^{(k)}(0)$ resultará em algum inteiro.

ocorrerá para $x = \pi = \frac{a}{b}$. Pois, $f(x) = f(\frac{a}{b} - x)$. [41] Ou seja, $f(\pi)$ e $f^{(i)}(\pi)$ geram **números inteiros**.

Utilizando-se das regras do Cálculo Diferencial, temos a seguinte relação:

$\frac{d}{dx}(F'(x)sen(x) - F(x)cos(x)) = \frac{d}{dx}(F'(x)sen(x)) - \frac{d}{dx}(F(x)cos(x)) =$

$F''(x)sen(x) + F'(x)cos(x) - F'(x)cos(x) + F(x)sen(x) =$

$F''(x)sen(x) + F(x)sen(x) = f(x)sen(x)$ (Onde a última igualdade foi obtida pela aplicação de (2) e de sua derivação dupla).

Portanto, uma vez que $\frac{d}{dx}(F'(x)sen(x) - F(x)cos(x)) = f(x)sen(x)$, seguirá, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, que:

$\int_0^\pi f(x)sen(x)dx = (F'(\pi)sen(\pi) - F(\pi)cos(\pi)) - (F'(0)sen(0) - F(0)cos(0)) =$

$= (0 + F(\pi)) - (0 - F(0)) = F(\pi) + F(0)$.

Note que, pela definição de (2), seguirá que $F(\pi) + F(0)$ será um número inteiro, pois $f(x)$, e suas derivadas $f^{(i)}(x)$, geram **valores inteiros** para $x = 0$ e $x = \pi$. Portanto, $\int_0^\pi f(x)sen(x)dx$ é um número inteiro.

No entanto, observemos que:

$0 < f(x)sen(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$, é uma relação válida[42] para todo $0 < x < \pi$. Portanto, integrando ao longo da desigualdade anterior, observamos que a integral definida $\int_0^\pi f(x)sen(x)dx$, *um inteiro positivo*, é arbitrariamente pequena para n suficientemente grande.[43]

Desse modo, para n suficientemente grande, todo o raciocínio aqui feito implica na na existência de inteiros positivos entre 0 e 1. Isso é um absurdo para com o PBO e a origem de tal vício foi supor que π pudesse ser racional.

Portanto, seguramente, π **é um número irracional.**

41 Essa igualdade nota-se por mera manipulação algébrica em (1)

42 De fato, $0 < x < \pi = \frac{a}{b} \Rightarrow bx < a \Rightarrow -a < -bx \Rightarrow 0 < a - bx < a \Rightarrow (a - bx)^n < a^n$. Ademais, notemos como 0 < x <π, segue que $x^n < \pi^n$. Logo, $x^n(a - bx)^n < \pi^n a^n$ e, portanto, $f(x) < \frac{\pi^n a^n}{n!}$. Uma vez que, para 0 < x < π, tem-se $0 < sen(x) < 1$, seguirá a desigualdade buscada.

43 Isso segue do fato, bem conhecido da Análise Real(DOERING,2017), de que a função $n!$ cresce muito mais rápido do que a função exponencial c^n, onde c>1. Ou seja, $\frac{n!}{c^n}$ vai para "mais infinito", pra n suficientemente grande e, portanto, $\frac{c^n}{n!}$ converge para zero.

8 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Quando refletiu-se sobre o conceito do conjunto dos “números reais”, entendeu-se tal conjunto como uma união disjunta entre “números racionais” e “números irracionais”. Tal categorização, na perspectiva desenvolvida nesse trabalho, está fundada no fato de que um número real ou é “comensurável com a unidade” ou “não é comensurável com a unidade”. Mais especificamente, em termos de lógica matemática(FILHO,2002), o que sustenta isso é o fato de usarmos uma lógica “binária” - e fundada no “princípio do terceiro excluído” - quando pensa-se na proposição “ser comensurável com unidade”(racional). Dessa forma, a negação de “ser comensurável com a unidade” automaticamente estabelece uma classe disjunta - os irracionais - a qual nos permite particionar os reais numa união disjunta: um número real ou será racional ou será “não racional”(ou seja, irracional).

Ocorre que podemos categorizar, particionar, os reais de muitas outras formas. No presente capítulo, uma interessante categorização dos reais será brevemente considerada: números algébricos e números transcendentes(“não algébricos”).

Para o conceito de números algébricos, têm-se: ”um número algébrico é qualquer número, (...), que satisfaz alguma equação algébrica da forma $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ ($n \geq 1$ e $a_n \neq 0$) onde os coeficientes a_k são inteiros.”(COURANT; ROBBINS, 2000, p.124). Desse modo, por negação lógica, número “não algébrico” é denominado de “transcendente”.

Assim, com o conceito de número algébrico, rapidamente reconhece-se a existência de diversos “reais algébricos”: os racionais, por exemplo. **Todo** racional, número irredutível $\frac{p}{q}$, é evidentemente raiz de $qx - p = 0$ e, portanto, um número algébrico. Por mera tentativa e erro, também verifica-se **“muitos”** irracionais que são algébricos: números da forma $\sqrt{p}$, com p primo, são irracionais[44] algébricos. Pois são, evidentemente, raízes das equações algébricas da forma $x^2 - p = 0$.

Será que todo número real seria algébrico?

Ou seja, equivalentemente, seria o conjunto dos números transcendentes vazio? A resposta é negativa e, a fundamentação aqui exposta, pressupõe essencialmente o conceito de enumerabilidade da Análise Real (DOERING, 2017).

De fato, uma elegante prova para a existência de números transcendentes foi fornecida pelo próprio Georg Cantor (COURANT; ROBBINS, 2000), valendo-se do seu conceito de enumerabilidade[45].

---

[44] Sobre a irracionalidade de $\sqrt{p}$, com p primo, já demonstrou-se em tópico apropriado com base no TFA.

[45] Um conjunto é enumerável, ou listável, quando existe uma função bijetora entre tal conjunto e o conjunto dos naturais. Trata-se da formalização matemática da ideia de “poder listar os elementos de um conjunto infinito” (DOERING, 2017). O conceito de enumerabilidade revolucionou o pensamento matemático acerca da natureza do “infinito”, ao expor que existem infinitudes “maiores” que a dos naturais. Uma exposição elementar completa e elegante acerca da enumerabilidade também pode ser

Usando de sua elegante e bem difundida **técnica da diagonalização** (COURANT; ROBBINS, 2000) Cantor demonstrou que o conjunto dos números reais não é enumerável. Por outro lado, Cantor, desenvolveu o conceito de **altura de equações algébricas** e, valendo-se do Teorema Fundamental da Álgebra, demonstrou (COURANT; ROBBINS, 2000) que o conjunto dos números algébricos deve ser enumerável. Logo, uma vez que os reais, não enumeráveis, podem ser compreendidos como a união disjunta de "algébricos", enumeráveis, com os "transcendentes"... segue que o conjunto dos números transcendentes deve ser "não enumerável" e, portanto, não pode ser vazio. Dessa forma, a demonstração de Cantor resulta numa surpresa: sendo o conjunto dos números transcendentes "não enumerável" e os algébricos enumeráveis... Existem "muito mais" números transcendentes do que algébricos!

Todas essas conclusões, conforme já dito, dependem essencialmente do fato do conjunto dos números algébricos ser enumerável. Vamos esmiuçar isso, atualizando a prova de Cantor, conforme exposta por Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000), para a moderna linguagem da Análise Real (DOERING, 2017).

Seja EA_n o conjunto de todas as equações algébricas de grau n. Note que existe uma bijeção trivial entre EA_n e $\mathbb{Z}^{n+1}$ (O produto cartesiano de $\mathbb{Z}$ por ele mesmo, n+1 vezes). Basta associar a cada $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$ à (n+1)-upla $(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0)$.No entanto, o produto cartesiano de uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis é enumerável (DOERING, 2017). Logo, uma vez que $\mathbb{Z}$ é enumerável(DOERING, 2017), seguirá que $\mathbb{Z}^{n+1}$ será enumerável e, pela bijeção trivial aludida, EA_n é um conjunto enumerável. Sendo EA_n um conjunto enumerável, seus elementos são *listáveis*.

Listemos, portanto, os elementos de EA_n. Tomando o primeiro elemento de EA_n e igualando a zero obteremos, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, um conjunto finito de soluções para tal equação algébrica (no máximo n soluções); Repete-se recursivamente o raciocínio anterior para o segundo, terceiro, quarto... n-ésimo elemento de EA_n: este procedimento gera, assim, uma união enumerável de conjuntos finitos que contém "todos os possíveis números algébricos de grau n", ou seja, "todos os possíveis números algébricos que são solução de algum elemento de EA_n".

Ocorre que uma união enumerável de conjuntos finitos, resulta num conjunto enumerável (DOERING, 2017). Assim, denotando por SEA_n o conjunto de todos os "números algébricos de grau n", têm-se que $\bigcup_{i=1}^{\infty} SEA_n$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e, portanto, enumerável (DOERING, 2017). Porém, note que $\bigcup_{i=1}^{\infty} SEA_n$ expressa justamente a totalidade de todos os números algébricos possíveis.

Logo, o conjunto de números algébricos é enumerável. Portanto, **reitera-se, uma vez que o conjunto dos números reais é não enumerável, seguirá que o conjunto dos números transcendentes é não enumerável.**. Fica, portanto, o conjunto dos números reais bem particionado numa união disjunta do "conjunto dos números algébricos" com o "conjunto dos números

encontrada em Richard Courant e Herbert Robbins (COURANT; ROBBINS, 2000).

transcendetes", ambos não vazios.

Dois exemplos particulares de números transcendentes famosos são: e e π. Tais números, portanto, mais do que irracionais, são transcendentes. Não é objetivo do presente trabalho demonstrar isso. O leitor interessado em tais demonstrações, poderá encontrá-las plenamente no livro do professor Djairo Guedes de Figueiredo (FIGUEIREDO,2002).

Qual a relevância da categorização em números algébricos ou transcendentes?

A nível de matemática elementar, a teoria dos números algébricos e transcendentes possui uma interessante e maravilhosa aplicação: é a chave para resolver os três seculares e clássicos problemas gregos da construtibilidade com régua e compasso (quais sejam, a quadratura do círculo; duplicação do cubo e trissecção do ângulo). Para uma exposição acerca desses três famosos problemas, que estamos supondo plenamente conhecidos, remetemos o leitor às obras (COURANT; ROBBINS, 2000); (NIVEN, 2012) e (EVES, 2011).

Nesse contexto de reflexão, há algo de "especial" nos números não algébricos de modo que, até mesmo a etimologia, foi bem considerada por Leonhard Euler: "estes números são chamados de *transcendentes*, porque, como afirmou Euler, eles *transcendem o poder dos métodos algébricos*" (COURANT; ROBBINS, 2000,p.124). Nessa linha, o *poder dos métodos algébricos* é expresso pelo robusto, e profundo, **Teorema sobre Construções Geométricas**:

> "Começando com um segmento de comprimento unitário, qualquer comprimento que possa ser construído com régua e compasso é um número algébrico de grau 1, ou 2, ou 4, ou 8,..., isto é, um número algébrico de grau igual a uma potência de 2."(NIVEN, 2012, p.93).

Refletir sobre a validade de tal teorema extrapolaria o escopo do presente trabalho e, portanto, o leitor interessado nessa reflexão deve consultar (NIVEN, 2012). O interesse é em algumas de suas implicações. Nesse sentido, temos a impossibilidade da quadratura do círculo:

> Dado um círculo qualquer, podemos considerar seu raio como unidade de comprimento. Com essa unidade, a área do círculo será π unidades de área. Um quadrado de mesmo tamanho teria lado de comprimento $\sqrt{\pi}$. Portanto, o problema da quadratura do círculo consiste em construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ a partir de um comprimento unitário dado. Na teoria das construções geométricas é bem conhecido que se pode construir um segmento de comprimento a^2 a partir do segmento de comprimento 1 e a. Portanto, se fosse possível construir um segmento de comprimento $\sqrt{\pi}$ também seria possível construir um segmento de comprimento π(...) O Teorema Sobre Construções Geométricas diz ser impossível a construção de um segmento de comprimento π. Portanto, a construção necessária para a "quadratura do círculo" é impossível. (NIVEN, 2012, p.95)

Para a análise dos outros dois problemas gregos clássicos, remete-se o leitor à (NIVEN, 2012) e (COURRANT; ROBBINS, 2000). A essência, a chave de ouro, igualmente é o Teorema sobre Construções Geométricas e análise da algebricidade, ou não, de certos números.

9 CONCLUSÃO

As conclusões do presente trabalho estão fundadas num preciso desenho para uma boa docência matemática. Valendo-se fundamentalmente do pensamento de Elon Lages Lima e de Ubiratan D' Ambrosio, relembrou-se o conceito de Educador entendendo-o numa conjunção de virtudes técnicas e metatécnicas.

Quanto ao aspecto técnico, objeto do presente trabalho, desenvolveu-se que a boa docência matemática deve fundamentalmente considerar uma integração adequada entre as componentes da Conceituação, Manipulação e Aplicações.

Dessa forma, considerou-se uma carência especial para a componente da Conceituação e, nesse viés, selecionou-se o "conceito de número" como um contexto de reflexão, o qual foi desenvolvido abstratamente, mas fundado numa reconhecida bibliografia que, fato notório, expressa um respeitável conjunto de autores dentro da *intelligentsia* matemática.

Nesse diapasão, desenvolveu-se analítica e dialeticamente o "conceito de número": dos naturais, para os inteiros. Dos inteiros, para os racionais e, desses, para os irracionais. Por fim, discutiu-se brevemente acerca da categorização dos reais em algébricos versus transcendentes, objetivando expor o Teorema sobre Construções Geométricas.

Todo esse movimento conceitual dialético, desenvolveu-se não só expondo as precisas delimitações semânticas e ontológicas para os objetos em si, mas também alguns importantes resultados, teoremas essenciais, conexos aos respectivos objetos numéricos mas que, infelizmente, tendem a não ser tratados no ensino básico ou, quando tratados, tendem a ser feitos de forma banalizada, ou seja, fundada em imprecisões técnicas ou em argumentos de autoridade.

Há um antigo provérbio de autoria incerta, mas frequente atribuído a Confúcio, de que "a palavra convence, mas o exemplo arrasta". Num sentido abstrato, isso foi uma diretriz Ética implícita no presente trabalho ao longo de todo seu desenvolvimento: ao concretamente desenvolver-se, de forma *exemplificada*, analítica e dialética o "conceito de número", o presente trabalho almeja arrastar a esperança, para a superfície do cognoscível, de que a educação brasileira tem solução; de que podemos concluir, ainda que o problema educacional seja complexo e com múltiplas variáveis metatécnicas, que é possível atingir os níveis qualitativos que nosso povo tanto merece, deseja e necessita.

REFERÊNCIAS

ARNOLD, Vladimir Igorevich. **On teaching mathematics**. [S. l.: s. n.], 1997. Disponível em: https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/ munsteg/arnold.html. Acesso em: 19 de ago. de 2020.

BECKMANN, Petr. **A story of π (PI)**. New York: ST. MARTIN'S PRESS, 1971.

COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática:** da teoria à prática. São Paulo: Papirus Editora, 2007.

DOERING, Claus I. **Introdução à análise matemática na reta**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Campinas, 2011.

FILHO, Edgard de Alencar. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de.**Números irracionais e transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz.**Um curso de cálculo:** volume 1. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

HEFEZ, Abramo.**Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

LIMA, Elon Lages; et al. **A matemática do ensino médio**: Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

MAOR, Eli. **e:** The story of a number. United Kingdom: Princeton UniversityPress, 1994.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo e ZANI, Sheila C. **Progressões e Matemática financeira**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

NIVEN, Ivan. **Números: racionais e irracionais**. Rio de Janeiro: SBM,2012.

NIVEN, Ivan. A simple proof that π is irrational. **Bulletin of the American Mathematical Society**. Rhode Island, USA. vol.53, 1947, p.509.

RABELO, Mauro. **Avaliação educacional:** fundamentos, metodologia e aplicações no contexto brasileiro. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** a questão da democracia. São Paulo: Papirus Editora, 2004.

WIKIPEDIA. **Elon Lages Lima**. [S. l.: s. n.], 2020[A]. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/ElonLagesLima. Acesso em: 13 de ago. de 2020.

WIKIPEDIA. **Ubiratan D'Ambrosio**. [S. l.: s. n.], 2020[B]. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/UbiratanD%27Ambrosio. Acesso em: 13 de ago. de 2020.

WIKIPEDIA. **Critical mathematics pedagogy**. [S. l.: s. n.], 2020[C]. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Critical_mathematics_pedagogy. Acesso em: 13 de ago. de 2020.