UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOÃO JOSÉ BICHARA MIDLEJ

UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE PROPORCIONALIDADE E GEOMETRIA ATRAVÉS DO USO DE MAQUETES

ILHÉUS - BAHIA
2020

JOÃO JOSÉ BICHARA MIDLEJ

UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE PROPORCIONALIDADE E GEOMETRIA ATRAVÉS DO USO DE MAQUETES

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión

ILHÉUS - BAHIA

2020

M629 Midlej, João José Bichara.
Uma proposta para o estudo de proporcionalidade e geometria através do uso de maquetes / João José Bichara Midlej. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.
99 f.: il.

Orientador: Nestor Felipe Castañeda Centurión.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Oficinas. 4. Maquetes. I. Título.

CDD 510.07

JOÃO JOSÉ BICHARA MIDLEJ

UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE PROPORCIONALIDADE E GEOMETRIA ATRAVÉS DO USO DE MAQUETES

Dissertação submetida ao programa de Pós-Graduação PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho aprovado. Ilhéus, 09 de setembro de 2020. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT.

Castañeda

Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión (Orientador-UESC)

Carlos Luide Bião dos Reis

Prof. Me. Carlos Luide Bião dos Reis (UESC)

Prof. Dr. André Nagamine (UESB - Campus Vitória da Conquista)

A minha esposa, Mara, e meus filhos, Júlia e Pedro, por terem me incentivado durante esse curso de pós-graduação, tendo compreendido os dias que tive de escolher os estudos no lugar de ficar com eles.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa e meus dois filhos pela paciência e colaboração.

À gestão, período de 2017 a 2020, do Colégio Estadual Professor Fábio Araripe Goulart - CEPFAG, pela compreensão e não ter colocado obstáculos para a minha participação no curso.

Aos meus colegas e amigos de curso: Caju, Iasmim, Junot, Gilmar, Odair, Gilsão, Ivia, Taylan, Jackson, Fábios (Irmão e Salutar) pelos momentos de descontração, contribuição e amizade durante o curso e que levarei pelo resto da vida.

À coordenação e todos os professores do PROFMAT – UESC, os quais tive a honra de ser aluno. Meus sinceros agradecimentos ao meu orientador e professor de Geometria: Prof. Dr. Nestor Felipe Castañeda Centurión, pela seriedade, confiança, paciência e pelas inúmeras contribuições dadas ao longo do curso, fazendo possível a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora pela participação e contribuição na avaliação deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

"Educação é o que resta depois de ter esquecido tudo que se aprendeu na escola."

(Albert Einstein)

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos uma proposta de oficina de matemática que usa a construção de maquetes como ferramenta para abordar tópicos de proporcionalidade e geometria, tais como, razão, proporção, figuras planas, sólidos e cálculo de áreas e volumes. Cabe destacar que a proporcionalidade é um tema com aplicabilidade em todas as unidades temáticas propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio. A metodologia elaborada para a aplicação da oficina consiste em uma sequência de encontros com atividades lúdicas e contextualizadas que envolvem a participação direta dos alunos. Para avaliar a influência da proposta no desenvolvimento cognitivo dos participantes, é indicada a aplicação, antes e depois da oficina, de testes diagnósticos com questões do perfil do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb). Com relação ao registro das atividades, durante cada encontro os alunos terão à disposição formulários para coleta de informação matemática específica, e, no fim, usarão um diário de bordo para relatar suas ações e aprendizados. Dessa forma, a proposta constitui mais uma alternativa para o tratamento em sala de aula dos temas matemáticos propostos, priorizando a participação ativa dos alunos e motivando o papel de mediador do professor no planejamento e execução das atividades.

Palavras-chave: Oficina. Proporcionalidade. Maquete. Geometria.

ABSTRACT

In this dissertation we present a proposal for a mathematics workshop that uses the construction of models as a tool to address topics of proportionality and geometry, such as, ratio, proportion, flat figures, solids and calculation of areas and volumes. It is worth mentioning that proportionality is a theme with applicability in all the thematic units proposed by the Common National Curriculum Basis (BNCC) of Mathematics for Elementary and High School. The methodology developed for the application of the workshop consists of a sequence of meetings with playful and contextualized activities that involve the direct participation of students. To assess the influence of the proposal on the participants' cognitive development, the application, before and after the workshop, of diagnostic tests with questions from the Basic Education Assessment System (Saeb) profile is indicated. Regarding the registration of activities, during each meeting students will have at their disposal forms to collect specific mathematical information, and, in the end, they will use a logbook to report their actions and learnings. Thus, the proposal constitutes another alternative for the treatment in the classroom of the proposed mathematical themes, prioritizing the active participation of students and motivating the role of teacher mediator in the planning and execution of activities.

Keywords: Workshop. Proportionality. Model. Geometry.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

No processo de construção do próprio conhecimento, o aprendizado é particular para cada pessoa. Alguns indivíduos aprendem de forma mais autônoma enquanto outros, mais ou menos dependentes de alguém que os ensine, precisam de apoio e incentivo externo para que se sintam motivados para o estudo. Fato é que, quando existe interesse, curiosidade ou estratégias de aprendizagem mais envolventes tudo parece mais simples. Diante desta constatação muitos professores buscam, constantemente, propostas pedagógicas diferenciadas, com o intuito de envolver os alunos, atualizando-se em relação às suas práticas e animando-se a criar e a experimentar estratégias mais dinâmicas.

Exerço a profissão de professor de matemática desde 1988, tendo iniciado no ensino básico e no decorrer dos anos também no ensino técnico e superior. E sempre quando houve necessidade da escola, ministrei as disciplinas de Física ou Química. Trabalhei tanto em escolas públicas quanto em privadas e desde 2011 sou lotado no Colégio Estadual Professor Fabio Araripe Goulart, situado no bairro Teotônio Vilela em Ilhéus-BA. Tenho como papel orientar e motivar os alunos através de novas experiências que façam elo entre a vivência deles e o conteúdo. Meu interesse sempre foi ir além, não quero apenas apresentar conceitos e, sim, aproximar o conteúdo abordado com a prática.

No ano letivo de 2016, fui convidado pela direção do colégio, ao qual sou lotado como professor de Matemática, para ministrar aulas de Química nas três séries do Ensino Médio. Levando em consideração que além de Matemática, tenho apreço pela Química e Física, aceitei o desafio.

No decorrer do ano letivo, propus aos alunos do terceiro ano, turma única do matutino, uma atividade sobre petróleo (plataformas de prospecção, refinarias e reservatórios). Então, eles optaram em construir maquetes, isto é, cenário construído em tamanho reduzido afim de retratar alguns ambientes, para ilustrar a teoria que estava sendo abordada em sala de aula.

Como já tinha observado anteriormente em feiras de ciências e gincanas, onde fizeram o uso de maquetes nas apresentações, esse trabalho não foi diferente. Tivemos trabalhos interessantes, mas com o mesmo problema: desproporcionalidade. Isto é, não havia conformidade (igualdade de duas razões) de uma parte com o todo ou de elementos relacionados entre si.

No início do ano letivo de 2020, aplicamos uma avaliação diagnóstica para a 2ª série do ensino médio, promovida pelo SABE (Sistema de Avaliação Baiano de Educação), isto é, uma atividade com o objetivo de identificar conteúdos e habilidades que o aluno já desenvolveu nas séries anteriores, em relação a Língua Portuguesa, Matemática e Ciências. A partir dessa identificação, os professores definem os conteúdos que precisam ser retomados, reforçados ou aprofundados para que o estudante progrida nos seus estudos durante o ano letivo.

Após a aplicação dessa avaliação, resolvi usar as questões de Matemática como exercícios de revisão para a turma do 3º ano do ensino médio, comentando cada uma delas. Atentei de imediato um "esquecimento" geral no assunto proporção, nas questões que exigiam uma aplicação deste para chegar ao resultado, bem como no entendimento da proporcionalidade.

Constatei então que o problema de desproporcionalidade já era recorrente, uma coisa simples, um problema de caráter matemático. Os alunos tem contato com o assunto razões especiais, mais precisamente *escala*, no sétimo ano do ensino fundamental, mas, frequentemente, não sabem aplicar quando precisam.

O conceito de proporcionalidade é muito importante devido ao seu uso fundamental para o entendimento de vários assuntos relacionados à Matemática e também para a compreensão de várias relações quantitativas existentes nas demais ciências. Além disso, na própria Matemática, o estudo desse assunto percorre as unidades temáticas propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de Matemática para o Ensino Fundamental, tais como: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística; e para o Ensino Médio: Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística.

A proporcionalidade aparece na maioria dessas unidades temáticas da BNCC, basta verificar sua aplicabilidade em todas elas. Em Números, temos como exemplo a regra de três; em Grandezas e Medidas, a escala; em Geometria, problemas relacionados à ampliação e redução; em Probabilidade e Estatística, a construção de gráfico e em Algebra, o estudo da função linear.

Paralelamente a isso, nas minhas horas vagas, dedico atenção para um *hobby* que é a construção de miniaturas, mais especificamente, miniaturas de ônibus. Tenho atualmente uma frota de mais ou menos 300 (trezentos) ônibus que representam modelos das décadas de 70 até a atualidade. Consequentemente, construo garagens e rodoviárias, usando cartolina, capa de livro, pasta de plástico, tudo em suas devidas proporções.

Nesse cenário, tive a ideia de levar esse meu jeito de brincar para sala de aula, na forma de uma oficina de matemática.

Conforme os resultados divulgados pelo Inep (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) relativos ao Saeb 2017 (Sistema de Avaliação da Educação Básica), isto é, um conjunto de avaliações externas em larga escala que permite ao Inep realizar um diagnóstico da educação básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante, verificamos que a proficiência média em Matemática para os 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3ª série do ensino médio no estado da Bahia ficou abaixo da média Brasil (Veja Figuras 1, 2 e 3).

Esse conjunto de avaliações externas são compostas de 10 questões de Língua Portuguesa e 10 questões de Matemática. A partir de 2019 houve um acréscimo de mais 10 questões de Ciências, a serem aplicadas nas 1ª e 2ª séries do Ensino Médio. A prova de Matemática é formatada para atender os seguintes descritores: espaço e forma; grandezas e medidas; números e operações/álgebra e funções e tratamento da informação.

Proficiência média em Matemática – 5º ano do ensino fundamental por unidade da federação e Brasil – Saeb 2017

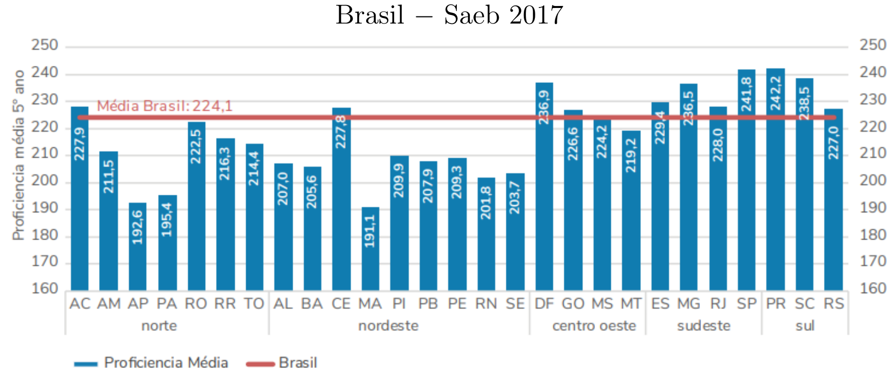


Figura 1: Proficiência 5º ano

Fonte: Relatório Saeb - Brasília: Inep, 2019

Proficiência média em Matemática – 9º ano do ensino fundamental por unidade da federação e Brasil – Saeb 2017

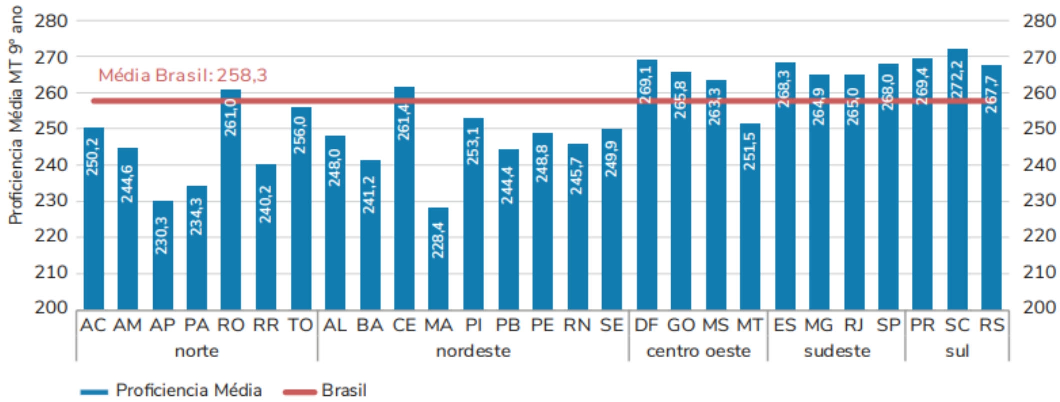


Figura 2: Proficiência 9º ano

Fonte: Relatório Saeb - Brasília: Inep, 2019

Proficiência média em Matemática – 3ª série do ensino médio por unidade da federação e Brasil – Saeb 2017

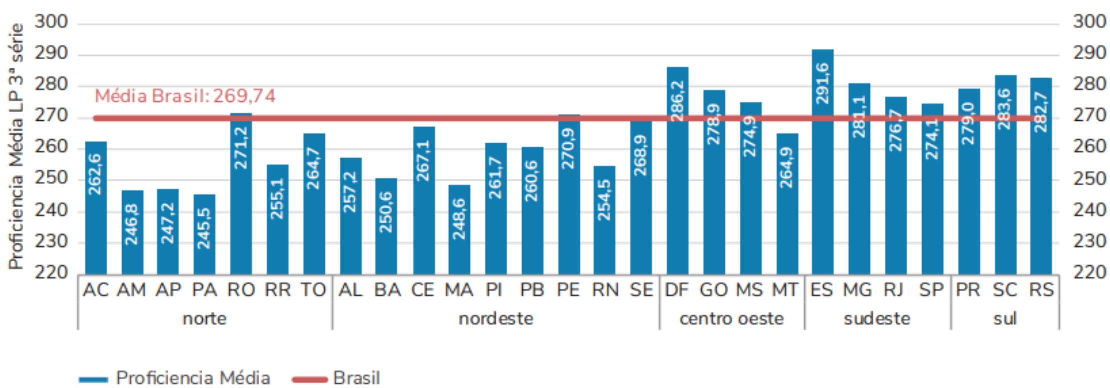


Figura 3: Proficiência 3ª série do ensino médio

Fonte: Relatório Saeb - Brasília: Inep, 2019

Por outro lado, a variação das proficiências médias de matemática na 3ª série do ensino médio, entre 2015 e 2017, foi de -0,5, ou seja, houve retrocesso.

Variação das proficiências médias no Saeb entre 2015 e 2017 – Matemática – 3ª série do ensino médio, por unidade da federação

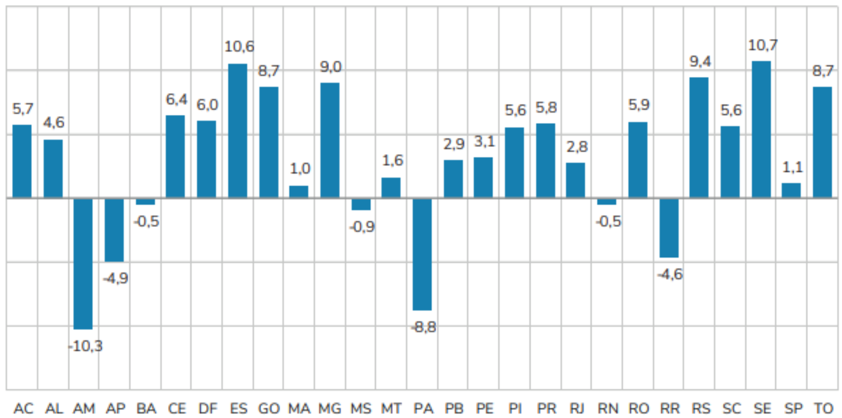


Figura 4: Variação das proficiências

Fonte: Relatório Saeb - Brasília: Inep, 2019

A Figura 5 mostra que não houve ganho de aprendizagem em matemática na 3ª série do ensino médio nos períodos de 2011 a 2017.

Ganho de aprendizagem por estado de 2011 a 2017

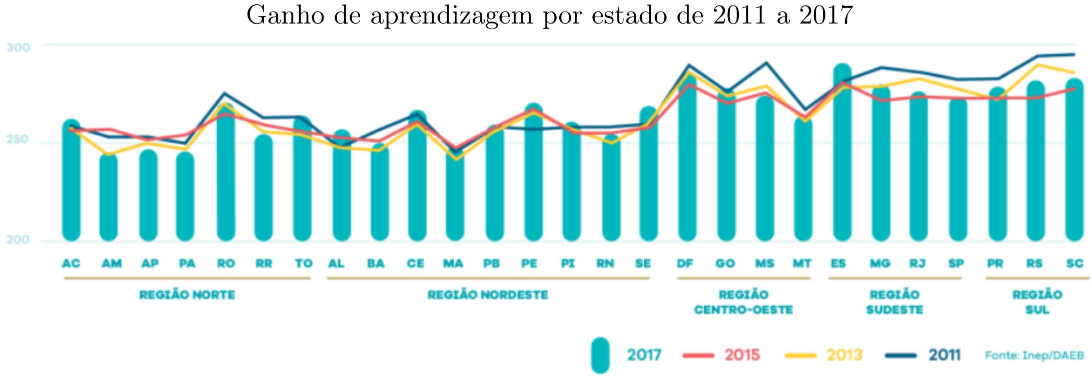


Figura 5: Ganho de aprendizagem

Fonte: https://medium.com/@inep/resultados-do-saeb-2017-f471ec72168d
último acesso: 11/07/2020

O gráfico da Figura 5 nos mostra que o estado do Espírito Santo teve uma melhora significativa em 2017 comparado com os anos anteriores.

> A rede estadual de educação do Espírito Santo é um ótimo exemplo para o Brasil. O Estado vem demonstrando um crescimento constante ao longo das últimas edições do Saeb. Em 2017, eles se destacaram em todas as etapas avaliadas e obtiveram os maiores índices de desempenho do Brasil no Ensino Médio. O sucesso se explica principalmente pela capacidade que a gestão do ES teve em olhar para o restante do Brasil e se inspirar em outras experiências, como Ceará, Pernambuco e Goiás. A trajetória do Espírito Santo pode nos mostrar que para conseguir bons resultados "não é preciso reinventar a roda" (INEP, 2017).

Com o intuito de melhorar a qualidade e consequentemente o rendimento em matemática, esperamos que a aplicação das atividades propostas nesta dissertação no ensino de matemática no (CEPFAG) sirvam de auxílio no processo de aprendizagem de uma forma lúdica, com atividades diferenciadas. Com isso, a partir do conhecimento das suas dificuldades e limitações, esperamos contribuir para que os nossos alunos as superem, incentivando-os a aprender cada vez mais e a tomar gosto pela Matemática.

Como esse trabalho implica numa oficina de matemática, onde os alunos irão trabalhar com medidas, proporções, cálculo de área ou volume, teremos como proposta a realização de um estudo, onde valorizaremos atividades em grupo, construções de modelos associando a teoria com a prática. Asssim, podendo sugerir, com a sua aplicação, vislumbrar os efeitos desse trabalho sobre a aprendizagem dos alunos acerca dos conhecimentos citados.

A proposta de oficina de Matemática visa proporcionar aos alunos uma visão empírica dos temas, fazendo com que a aprendizagem se faça através das conclusões alcançadas no decorrer das intervenções. Para isso, esses alunos serão os protagonistas do processo e o professor um mediador motivando-os e estimulando a criatividade deles.

> Sendo assim, fica evidente o papel de um mediador nesse processo, pois cabe ao professor não apenas auxiliar os alunos com a assimilação de conteúdos, como também motivá-los, fazendo com que os educandos possam ter prazer em estudar e aprender tais conteúdos (OTAVIANO; ALENCAR; FUKUDA, 2012).

Em 17 de março de 2020, seguindo o planejado na proposta de aplicação da oficina, onde contemplava os assuntos: razão; proporção; cálculo de áreas e volumes, aplicamos um pré-teste (ver Figura 3.2), constando de 10 questões assim distribuídas: 2 sobre razão; 2 de proporção; 4 que envolviam cálulo de área e mais duas contemplando o cálculo de volumes. Esse teste fazia parte do 1º encontro da oficina. A porcentagem de acerto da turma foi de 25%, configurando-se da seguinte forma: razão 50%; proporção 18%; cálculo de área 21% e cálculo de volume 16%.

O resultado acima foi desanimador, pois se tratava de uma turma do 3º ano do ensino médio, em que acreditamos ter um amadurecimento melhor acerca dos assuntos primeiramente vistos no ensino fundamental e repetidamente abordados ao longo do ensino médio. Esse pré-teste só fez reforçar a ideia de que precisavamos retomar esses conteúdos de uma forma diferente, devido ao princípio de estarmos sempre em busca de uma melhoria.

Independente do rendimento do pré-teste ser satisfatório ou não, ainda assim recomendo a aplicação da oficina, pois ela se apresenta como uma excelente alternativa para sair da rotina da sala de aula, diversificando o método de aprendizagem convencional, além de ser uma boa oportunidade para reforçar os conceitos aprendidos durante as aulas.

Vale ressaltar que o plano original seria a aplicação de uma Oficina de Matemática - Construindo Maquetes, em que dos oito encontros previstos, só realizamos o primeiro, devido a suspensão das aulas em 18 de março de 2020, através de um decreto governamental, em consequência da pandemia COVID-19. Sem uma previsão de retorno das aulas, tomamos a decisão de suspender a aplicação da oficina e análise de seus resultados para nos concentrarmos no aprimoramento da proposta, apresentando também uma variante dela (ver Capítulo 4).

O objetivo geral deste trabalho é propor uma oficina a fim de melhorar a aprendizagem dos alunos na matéria de matemática. Especificamente, pretendemos:

- Levantar dados sobre o rendimento dos alunos acerca dos temas propostos;
- Promover o envolvimento de toda a turma;
- Aplicar métodos práticos em conformidade com os aspectos teóricos;
- Monitorar os resultados obtidos até o final da execução da proposta.

Nesta dissertação apresentamos uma proposta de estudo, na forma de uma oficina de matemática, que pode ser aplicada em qualquer série do ensino médio que aborde assuntos do ensino fundamental, revisando-os de uma forma construtivista, isto é, uma construção do conhecimento e para que isso aconteça, devem-se criar métodos que estimulem essa construção. Segundo PINTO (2011, p. 76) “a interação no processo de construção do conhecimento é um fator fundamental na Psicologia de Piaget”. Eduard Marti Sala e

Javier Onrubia Goni (2000, p. 250) apontam que, para Piaget, o sujeito é protagonista na aquisição do conhecimento através de suas ações. A ação, portanto, tem grande importância nesta teoria, pois "conhecer é atuar diante da realidade que nos envolve. O sujeito conhece na medida em que modifica a realidade através de suas ações" (apud PINTO, 2011, p. 76). Sendo assim, os alunos devem analisar um determinado problema para que, só então, possam compreendê-lo. É importante que o professor ofereça espaço para discussões e interaja constantemente com seus alunos.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. No primeiro, será apresentada uma revisão de literatura sobre o conceito de oficina pedagógica no qual está inserido o de oficina de matemática. Também são elencados alguns trabalhos disponíveis no portal da CAPES, que abordam o conceito de proporcionalidade. No Capítulo 2, apresentamos os aspectos matemáticos que fundamentam a proposta. Após revisar o sistema métrico decimal, abordamos os conceitos de proporcionalidade, comprimento, área e volume, para terminar com resultados relativos a semelhança de figuras planas e sólidas.

No Capítulo 3, apresentamos detalhadamente os procedimentos metodológicos para a aplicação da proposta. Enquanto que no Capítulo 4 apresentamos uma oficina alternativa, com uma quantidade menor de intervenções do que a original, partindo do princípio da escala e o tema estarem previamente definidos, mas sem interferir nos conteúdos matemáticos contemplados.

No Capítulo 5, fazemos as considerações finais analisando cada encontro da oficina, defendendo sua aplicação com o intuito de consolidar e aprofundar os conhecimentos propostos, contribuindo para uma melhor aprendizagem sobre os temas que a envolvem (Proporcionalidade e Geometria).

Capítulo 1

Referencial Teórico

Na escola, o dinamismo do processo educativo, em muitos casos, está ausente, quando professores e alunos reproduzem práticas de ensino-aprendizagem tradicionais, isto é, aplicações com ênfase na figura do professor como detentor daquele conhecimento e o uso de um livro didático como fonte norteadora. Vale salientar que esse método em um ambiente favorável, ou seja, num ambiente social mais justo e equilibrado, tende a promover resultados positivos. O ensino tradicional, posto aqui, não se furta do debate acerca do conhecimento proferido e tem em suas aulas processos para despertar o interesse dos alunos, para tanto o engajamento e a criatividade do professor se faz necessário.

Mas, é possível propiciar práticas alternativas que possam ser desenvolvidas em paralelo com o ensino tradicional, dando mais espaço para a criatividade e participação dos alunos. Sendo assim, utilizar metodologias que divergem do clássico, pode ser uma maneira de alcançar um futuro descompromissado com um passado de repetições.

> Ai daqueles e daquelas que, em lugar de visitar de vez em quando o amanhã, o futuro, pelo profundo engajamento com o hoje, com o aqui e com o agora, ai daqueles que, em lugar desta viagem constante ao amanhã, se atrelarem a um passado de rotina (FREIRE, 1998).

Relacionar o teórico com o prático é sempre um desafio, não apenas no setor educacional. Entre pensar e realizar, há um fosso que, no entanto, pode ser vencido. Um dos meios possíveis para vencer essa situação é a construção de estratégias de integração entre pressupostos teóricos e práticos, o que, fundamentalmente, caracteriza as oficinas pedagógicas, portanto,

> um dos requisitos mais importantes a serem levados em consideração pelo professor no processo ensino-aprendizagem é o de desenvolver meios de dinamizar a assimilação de conteúdos por parte dos alunos. Cabe ao professor planejar e refletir sobre quais são os melhores métodos e/ou abordagem a serem utilizados para que haja uma aprendizagem significativa (SOUZA, 2016).

As diferentes estratégias de ensino tornam a aprendizagem dos alunos em um processo mais dinâmico e significativo. As oficinas pedagógicas são uma das estratégias de ensino capazes de dinamizar a aprendizagem dos alunos. Uma oficina oportuniza vivenciar cenários concretos e significativos, baseados no tripé: sentir-pensar-agir, com objetivos pedagógicos. Vieira e Volquind (2002) conceituam como sendo “um caminho com alternativas, com equilibrações que nos aproximam progressivamente do objeto a conhecer”.

Em uma oficina ocorrem apropriação, construção e produção de conhecimentos teóricos e práticos, de forma ativa e reflexiva. De acordo com Vieira e Volquind (2002) a oficina se caracteriza como sendo “um sistema de ensino-aprendizagem que abre novas possibilidades quanto à troca de relações, funções, papéis entre educadores e educandos”.

A construção de saberes e as ações relacionadas decorrem, principalmente, do conhecimento prévio, das habilidades, dos interesses, das necessidades, dos valores e julgamentos dos participantes. Para Anastasiou e Alves (2004) a oficina “É lugar de pensar, descobrir, reinventar, criar e recriar, favorecido pela forma horizontal na qual a relação humana se dá”. Com isso o professor da oficina não ensina o que sabe, mas vai oportunizar o que os participantes necessitam saber, sendo, portanto, uma abordagem centrada no aprendiz e na aprendizagem e não no professor.

A oficina de matemática é uma técnica de aprendizagem que incentiva a transmissão de conhecimentos e a troca de informações de uma maneira mais interativa, lúdica e dinâmica. Muito já foi discutido sobre o modelo tradicional de ensino, ao qual, Stacciarini e Esperidião (1999) afirmam “se tratar de um modelo que aos poucos, vem deixando de corresponder às necessidades atuais dos alunos, sendo necessário buscar o desenvolvimento de suas capacidades de analisar e criticar o mundo e suas transformações”. Com isso, evidencia-se a importancia de se usar novas metodologias de ensino que incorporem novas estratégias em sala de aula, pois tais estratégias podem favorecer o planejamento e o monitoramento do desempenho do aluno (DE SOUZA, 2010).

Por meio do uso de ferramentas educacionais complementares, como atividades extracurriculares, nesse caso, especificamente uma oficina, é possível despertar a atenção dos alunos de diferentes formas, além de apresentar conceitos teóricos essenciais à sua formação. "As atividades práticas são um exemplo de metodologia que pode facilitar a assimilação de conteúdos, tornando assim a aprendizagem mais significativa, pois as atividades práticas proporcionam aprendizagem nos quais o aluno não poderia aprender apenas com aulas teóricas" (DE ANDRADE; MASSABINI, 2011).

A BNCC menciona como uma das competências específicas para Matemática,

> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles (BRASIL, 2018).

A Matemática, na maioria das vezes, é vista como uma disciplina pronta e acabada, sem espaço para a criatividade. Isso acaba gerando uma grande aversão nos alunos, fazendo com que acreditem que é algo difícil, distante da realidade e, muitas vezes, sem utilidade, onde quem a aprende ou compreende é considerado muito inteligente. O que devemos fazer é tirar a idéia de que a Matemática é para poucos e, mostrar que todas as pessoas têm a capacidade de aprendê-la e ainda explorar o lúdico, ou seja, utilizar de atividades criativas.

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2018).

A presente proposta, que está baseada na construção ou confecção de maquetes, lida com aspectos de criatividade, pois faz com que os alunos envolvidos na oficina aflorem o seu talento para criar, inventar ou fazer inovações no intuito de transformar objetos reais em modelos menores, lançando mão de utensílios descartáveis, tais como papelão, palitos, latas, fios dentre outros.

Considerando o assunto, Proporcionalidade, alguns trabalhos estão disponíveis no portal da CAPES, tais como:

- A tese de título "Proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais: uma sequência de ensino diferenciada para estudantes da EJA", de Eduardo Lopes de Macedo, defendida em 2012, teve como objetivo investigar as potencialidades de uma sequência de ensino focada na aprendizagem do conceito de proporção simples, considerando os conhecimentos prévios dos estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA) e à luz da Teoria dos Campos Conceituais. O autor utilizou um grupo de controle e um grupo experimental, que passaram por intervenções diferentes e, por meio de um pré-teste e um pós-teste, constatou ao final que os alunos do grupo experimental apresentaram uma ampliação em seus conhecimentos acerca do tema e que o método utilizado tornou-se eficiente.

- Uma dissertação intitulada "Regra de três: prática escolar de modelagem matemática", cujo autor Denivaldo Pantoja da Silva apresentou em 2011, teve como objetivo apontar caminhos que pudessem, mesmo que parcialmente, levar à compreensão do ensino da regra de três na formação de uma consciência crítica, que revele os modelos matemáticos como algo não restrito apenas à Matemática. Ao longo da dissertação, o autor analisa historicamente acerca do conteúdo de regra de três e, a partir disso, verificou o caráter prático da regra de três ao longo do tempo e a possibilidade de permitir um fazer docente de regra de três algebrizada, que poderá promover o ensino da modelagem matemática na escola, tornando-a mais atuante e reflexiva socialmente.

- A dissertação intitulada "Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho", de Maria Gilvanise de Oliveira Pontes, defendida em 1996, teve como foco verificar a relação entre a matemática proveniente da escola a partir da análise das aulas das turmas de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental, nos conteúdos de Medidas e Razão e Proporção, com as atividades do dia a dia de uma costureira, uma comerciante, uma cozinheira, um marceneiro, um mestre de obras e um oleiro, procurando verificar que itens eram abordados e como eram trabalhados por esses profissionais. Em seguida, foram confrontadas as duas abordagens constatando que as estratégias mais usadas por esses profissionais não são ensinadas na matemática escolar, concluindo que há uma lacuna entre "o que" e "como" se ensina Matemática na escola e "o que" e "como" se usa essa disciplina na prática diária dos profissionais observados.

Considerando o referencial acima citado, destacamos uma evidente preocupação dos autores quanto ao ensino e à aprendizagem dos alunos sobre o conteúdo de proporcionalidade. É claro que a preocupação da formação de uma consciência crítica que leve não somente à aprendizagem de um conceito, mas, também, à formação do indivíduo enquanto cidadão.

De fato, os trabalhos referenciados, tanto os relacionados ao conceito de proporcionalidade, quanto ao que se referem às oficinas, cada um com suas devidas importâncias e particularidades, delimitam um universo de pesquisas relacionadas a ambos os temas. Nesse sentido, esta dissertação vem com o objetivo de contribuir ainda mais com as pesquisas voltadas a proporcionalidade, conceito de grande relevância no contexto social e matemático.

Capítulo 2

Aspectos Matemáticos

2.1 Sistema Métrico Decimal

Trabalhar com o sistema métrico decimal é algo tão cotidiano que o conhecimento dessa ferramenta se torna quase obrigatório. O metro (m) é a unidade de medida de comprimento do Sistema Internacional de Unidades. O sistema de medidas é uma tentativa de padronização mundial para medição de massas, comprimentos, volumes, áreas etc. Registros históricos mostram que os povos criavam seus métodos particulares de medição, o que dificultava as transações comerciais e o intercâmbio científico entre eles. As unidades de comprimento, por exemplo, eram quase sempre derivadas das partes do corpo do rei de cada país: a jarda, o pé, a polegada etc. Outra inconveniência das unidades antigas, é que seus múltiplos e submúltiplos não eram decimais, isto é, não eram agrupadas de dez em dez, o que dificultava enormemente a realização das operações matemáticas com as medidas. Até recentemente, os estrangeiros, na Inglaterra, encontravam grande dificuldade em operar com a moeda inglesa porque o sistema monetário britânico não era decimal (1 libra valia 12 shillings e 1 shilling valia 20 pence).

Os avanços comerciais, contudo, impediam a coexistência de uma grande diversidade de sistemas de medidas. Dessa forma, foi necessário que se adotasse um "sistema padrão" de medidas em suas respectivas grandezas.

Data de 1971 o início das discussões com vários representantes mundiais para estabelecer um consenso na adoção de um sistema de medidas único, que, dessa forma, viabilizaria a troca de informações entre os povos dos mais diferentes lugares do mundo. Ao resultado desse processo, denominou-se **sistema métrico decimal**.

O termo **metro** tem origem na palavra grega métron, que significa “o que mede”. Estabeleceu-se, no princípio, que a medida do metro seria a décima milionésima parte da distância entre o Pólo Norte e o Equador, medida pelo meridiano que passa pela cidade francesa de Paris. O metro padrão foi criado no ano de 1799 e hoje é baseado no espaço percorrido pela luz no vácuo em $\frac{1}{299.792.458}$ segundos (s).

Luz, Álvares e Guimarães contam que

> [...] a precisão dos padrões estabelecidos no século passado não era suficiente diante do grande desenvolvimento científico do século XX. Assim, os cientistas perceberam a necessidade de uma reestruturação do Sistema Métrico Decimal e, em 1960, durante a XI Conferência de Pesos e Medidas, realizada em Paris, foi formulado um novo sistema, denominado **Sistema Internacional de Unidades** (SI). É importante observar que o SI é baseado no Sistema Métrico Decimal, mas suas unidades são definidas de maneira mais rigorosa e atualizada (LUZ; ÁLVARES; GUIMARÃES, 2016).

Houve países que resistiram ao metro, como relatam Giovanni Júnior e Castrucci

> Alguns países, como Inglaterra e os Estados Unidos, não adotaram de imediato o Sistema Métrico Decimal, mantendo as unidades então utilizadas, como pés, polegadas e milhas. Só recentemente o Sistema Métrico Decimal passou a ser obrigatório nesses países. Para se ter uma ideia, a Inglaterra adotou oficialmente o sistema a partir de 1995, mantendo, as antigas unidades (milhas, jardas, pés, polegadas), que são largamente utilizadas pela população (GIOVANNI JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009)

Medir uma grandeza é compará-la a outra grandeza de mesma espécie, denominada **unidade**. No Sistema Internacional de Unidades, podem ser feitas as medições (comparações) mostradas a seguir com as respectivas unidades.

2.1.1 Medição de comprimento

Medir um comprimento é verificar quantas vezes ele contém a unidade utilizada. No sistema métrico decimal, além do metro (m), existem outras unidades de medidas de comprimento.

Para representar a medida de distâncias maiores, usamos o decâmetro, o hectômetro e o quilômetro, que são múltiplos do metro (ver Tabela 2.1). Os prefixos deca, hecto e kilo vêm do grego, que significam respectivamente dez, cem e mil. E, por sua vez, os termos decímetro, centímetro e milímetro são os submúltiplos do metro e servem para expressar a medida de distâncias menores. Seus prefixos deci, centi e mili, vem do latim, onde significam respectivamente décimo, centésimo e milésimo.

Múltiplos do metro		
Quilômetro (km)	$\rightarrow$	1 km = 1 000 m
Hectômetro (hm)	$\rightarrow$	1 hm = 100 m
Decâmetro (dam)	$\rightarrow$	1 dam = 10 m
Submúltiplos do metro		
Decímetro (dm)	$\rightarrow$	1 dm = 0,1 m
Centímetro (cm)	$\rightarrow$	1 cm = 0,01 m
Milímetro (mm)	$\rightarrow$	1 mm = 0,001 m

Tabela 2.1: Unidades de medida de comprimento

Quando precisamos comparar medidas e estas não estão na mesma unidade, precisamos transformá-las de modo que a comparação entre elas seja possível. Para tanto, segue abaixo um modo prático para realizar tais conversões:

Transformação das unidades de medida de comprimento

Observando a Tabela 2.1, temos que: de cima para baixo, da referida tabela, cada unidade contém 10 vezes a unidade seguinte e no sentido inverso, ou seja, de baixo para cima, cada unidade representa $\frac{1}{10}$ da unidade anterior.

Exemplo 2.1.

- Como transformar 3,56 m em cm?

  Nesse caso vamos multiplicar 3,56 por 100, pois a unidade metro (m) contém 10 x 10 vezes a unidade centímetro (cm):

  3,56 m = (3,56 x 100) cm = $\frac{356}{100}$ x 100 cm = 356 cm

- Transformar 2.150 m em km.

  Como a unidade metro (m) representa $\frac{1}{10}$ x $\frac{1}{10}$ x $\frac{1}{10}$ da unidade quilometro (km), devemos dividir 2.150 m por 1.000:

  2.150 m = (2.150 : 1.000) km = (2.150 x 0,001) km = 2,15 km

2.1.2 Medição de área

No Sistema Métrico Decimal, a unidade fundamental para expressar a medida de área é o **metro quadrado**, que se abrevia m^2. O metro quadrado corresponde à área de um quadrado que tem 1 m de lado, assim como o centímetro quadrado corresponde à área de um quadrado que tem 1 cm de lado.

Outras unidades utilizadas, no sistema métrico decimal para medir áreas são:

Múltiplos do metro quadrado (m^2)		
Quilômetro quadrado (km^2)	$\rightarrow$	1 km^2 = 1.000.000 m^2
Hectômetro quadrado (hm^2)	$\rightarrow$	1 hm^2 = 10.000 m^2
Decâmetro quadrado (dam^2)	$\rightarrow$	1 dam^2 = 100 m^2
Submúltiplos do metro quadrado		
Decímetro quadrado (dm^2)	$\rightarrow$	1 dm^2 = 0,01 m^2
Centímetro quadrado (cm^2)	$\rightarrow$	1 cm^2 = 0,0001 m^2
Milímetro quadrado (mm^2)	$\rightarrow$	1 mm^2 = 0,000001 m^2

Tabela 2.2: Unidades de medida de área

Quando queremos representar medida de áreas maiores utilizamos o quilômetro quadrado, o hectômetro quadrado e o decâmetro quadrado. No caso das medidas de áreas menores temos o decímetro quadrado, o centímetro quadrado e o milímetro quadrado.

Transformação das unidades de medida de área

Verificando a Tabela 2.2, temos que:

- De cima para baixo, cada unidade contém 100 vezes a unidade seguinte.
- De baixo para cima cada unidade representa $\frac{1}{100}$ da unidade seguinte.

Exemplo 2.2.

- Como transformar 3,56 m^2 em cm^2?

  3,56 m^2 = (3,56 x 10.000) cm^2 = 35.600 cm^2

- Converter 12.500 mm^2 em dm^2

  12.500 mm^2 = (12.500 : 10.000)dm^2 = (12.500 x 0,0001) dm^2 = 1,25 dm^2

2.1.3 Medição de volume

Medir o volume de um corpo é determinar a medida do espaço que ele ocupa.

No Sistema Métrico Decimal, a unidade fundamental de medida de volume é o **metro cúbico**, que indicamos m^3. O metro cúbico corresponde ao volume de um cubo com 1 m de aresta.

Múltiplos do metro cúbico (m^3)		
Quilômetro cúbico (km^3)	$\rightarrow$	1 km^3 = 1.000.000.000 m^3
Hectômetro cúbico (hm^3)	$\rightarrow$	1 hm^3 = 1.000.000 m^3
Decâmetro cúbico (dam^3)	$\rightarrow$	1 dam^3 = 1.000 m^3
Submúltiplos do metro cúbico		
Decímetro cúbico (dm^3)	$\rightarrow$	1 dm^3 = 0,001 m^3
Centímetro cúbico (cm^3)	$\rightarrow$	1 cm^3 = 0,000001 m^3
Milímetro cúbico (mm^3)	$\rightarrow$	1 mm^3 = 0,000000001 m^3

Tabela 2.3: Unidades de medida de volume

Outras unidades utilizadas, no sistema métrico decimal, para medir volumes são::

Pela tabela acima, observa-se que:

- De cima para baixo, cada unidade contém 1.000 vezes a unidade seguinte.
- Da baixo para cima, cada unidade representa $\frac{1}{1.000}$ da unidade anterior.

Exemplo 2.3.

- Como transformar 30.000 cm^3 em dm^3?

  30.000 cm^3 = (30.000 : 1.000) dm^3 = (30.000 x 0,001) dm^3 = 30 dm^3

- Quantos centímetros cúbicos há em $\frac{1}{4}$ m^3?

  $\frac{1}{4}$ m^3 = 0,25 m^3 = (0,25 x 1.000.000) cm^3 = 250.000 cm^3

Outra unidade bastante utilizada para medir volume é o litro (L), que representa a capacidade de um cubo de aresta igual a 1 dm. Como o volume de um cubo é igual a medida da aresta elevada ao cubo (Ver Seção 2.5), temos então a seguinte relação: 1 L = 1 dm^3.

Além do litro, também é usado o quilolitro(kL), hectolitro(hL) e decalitro que são seus múltiplos e o decilitro, centilitro e o mililitro que são os submúltiplos.

Como o sistema padrão é decimal, as transformações entre os múltiplos e submúltiplos são feitas multiplicando-se ou dividindo-se por 10.

Para transformar de uma unidade de capacidade para outra, podemos utilizar a Tabela 2.4:

Múltiplos do litro		
Quilolitro (kL)	$\rightarrow$	1 kL = 1 000 L
Hectolitro (hL)	$\rightarrow$	1 hL = 100 L
Decalitro (daL)	$\rightarrow$	1 daL = 10 L
Submúltiplos do litro		
Decilitro (dL)	$\rightarrow$	1 dL = 0,1 L
Centilitro (cL)	$\rightarrow$	1 cL = 0,01 L
Mililitro (mL)	$\rightarrow$	1 mL = 0,001 L

Tabela 2.4: Unidades de capacidade

Exemplo 2.4.

- Expressar 30 mL em litros.

  30 mL = (30 : 1.000) L = 0,03 L

- Quantos centímetros cúbicos há em 250mL?

  250 mL = (250 : 1.000) L = 0,25 L.

  Como 1L = 1 dm^3, temos que 0,25 L = 0,25 dm^3. Assim:

  0,25 L = 0,25 dm^3 = (0,25 x 1.000) cm^3 = 250 cm^3

2.1.4 Medidas de massa

A unidade padrão de massa no sistema internacional de unidades é o quilograma (kg).

A massa de um cilindro padrão de platina iridiada representa a medida correspondente a 1 quilograma (1 kg).

Esse cilindro está guardado na Bureau Internacional de Pesos e Medidas (BIPM), em Sèvres na França.

As unidades do sistema métrico decimal de massa são: quilograma (kg), hectograma (hg), decagrama (dag), grama (g), decigrama (dg), centigrama (cg), miligrama (mg).

Como o sistema padrão de medida de massa é decimal, as transformações entre os múltiplos e submúltiplos são feitas multiplicando-se ou dividindo-se por 10.

Para transformar as unidades de massa, podemos utilizar a Tabela 2.5:

Múltiplos de massa		
Quilograma (kg)	$\rightarrow$	1 kg = 1 000 g
Hectograma (hg)	$\rightarrow$	1 hg = 100 g
Decagrama (dag)	$\rightarrow$	1 dag = 10 g
Submúltiplos de massa		
Decigrama (dg)	$\rightarrow$	1 dg = 0,1 g
Centigrama (cg)	$\rightarrow$	1 cg = 0,01 g
Miligrama (mg)	$\rightarrow$	1 mg = 0,001 g

Tabela 2.5: Unidades de medida de massa

Exemplo 2.5.

- Quantos gramas tem uma ampola de 250 mg?

  250 mg = (250 : 1.000) g = (250 x 0,001) g = 0,25 g

- Uma peça de 5,2 kg tem quantos gramas?

  5,2 kg = (5,2 x 1.000) g = 5.200 g

Algumas unidades especiais:

- A tonelada (t), que equivale a 1.000 kg e serve para expressar a medida de grandes massas.

- O quilate, que equivale a 0,2 g e serve para expressar a medida de pequenas massas, como as massas das pedras e metais preciosos.

Podemos utilizar a relação 1 L $\Leftrightarrow$ 1 kg, considerando a água pura numa temperatura de 4^{o}C, que auxilia na resolução de alguns problemas como esse do exemplo 2.6.

Exemplo 2.6.

Um recipiente, totalmente cheio, contém um volume de 18 m^3 de água pura. Quantos quilogramas de água há nesse recipiente?

Temos que: 18 m^3 = (18 x 1.000) dm^3 = 18.000 dm^3

Como 1 dm^3 de água tem 1 kg, então 18.000 dm^3 de água tem 18.000 kg.

2.2 Proporcionalidade

2.2.1 Razão e Proporção

Berlinghoff e Gouvêa (2008) contam a seguinte história:

> As razões desempenhavam papel muito importante na matemática grega, porque os geômetras gregos não ligavam diretamente números aos objetos que estudavam. Um segmento de reta era um segmento de reta. Há segmentos iguais, mais longos e mais curtos, e um segmento podia ser igual a dois outros unidos − mas em nenhum momento os matemáticos gregos falavam no *comprimento* de um segmento. Áreas, volumes e ângulos eram tratados como quantidades de espécies diferentes, nenhuma das quais era necessariamente ligada a números. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2008, p. 17)

Para comparar quantidades, os matemáticos gregos trabalhavam com *razões* de quantidades. Eles exprimiam a ideia de área de um círculo ($A = \pi.r^2$), dizendo: "A razão entre as áreas de dois círculos é a mesma que a razão entre as áreas de dois quadrados com lados iguais aos raios dos círculos". Considerando A_1 e A_2 como as áreas dos dois círculos, e r_1 e r_2 os seus raios, temos que: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$. Daí, segue que: $\frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2}{r_2^2}$.

Dessa forma, a razão da área A, de um círculo para a área de um quadrado cujo lado é igual ao raio, r, (ou seja, A/r^2) é sempre a mesma, qualquer que seja o tamanho do círculo. Sabemos que essa razão é o número π, o qual é irracional, e que, não possui expressão decimal periódica.

O estudo de razões é uma ferramenta que auxilia na interpretação de situações das mais diversas áreas, como na Geografia, na forma de uma escala bem como na leitura de um mapa; ou na Física, na densidade de um corpo ou mesmo no índice de refração de um meio. A palavra *razão* vem do latim *ratione* e é a faculdade que o ser humano tem de avaliar, julgar, ponderar ideais, estabelecer relações lógicas, conhecer, compreender, raciocinar.

O termo razão ou divisão é usado em Matemática para comparar duas grandezas (ou dois números). Matematicamente, define-se razão do número x para o número y (com y não nulo) ao quociente de x por y. Em símbolos: $\frac{x}{y}$ ou $x : y$. A leitura da razão é feita da seguite forma: x está para y.

Existem algumas razões especiais muito utilizadas, dentre as quais podem ser citadas: velocidade média, escala, densidade demográfica, densidade absoluta de um corpo e renda per capita.

Quando são feitas maquetes, miniaturas de carros ou mapas, é necessário fazer uso de uma escala. A escala de um desenho é a razão entre o comprimento considerado no desenho e o comprimento real correspondente, ambos medidos na mesma unidade.

$$Escala = \frac{Comprimento\ \ no\ \ desenho}{Comprimento\ \ real}$$

Engenheiros e arquitetos, antes da execução de suas obras, desenham ou montam seus projetos em dimensões reduzidas, fazendo uso de plantas e maquetes.

> Maquete é uma miniatura de uma obra a ser executada, ou seja, é semelhante à construção que ela representa. Isso significa que a razão entre as medidas lineares da maquete e as medidas correspondentes da construção finalizada é constante. A essa razão chama-se escala.
> A escala pode ser indicada de diferentes maneiras. Por exemplo, se a maquete de um prédio foi construída de modo que suas dimensões representem um centésimo das dimensões correspondentes no prédio construído, dizemos que a maquete foi feita na escala de $1 : 100$ ou $\frac{1}{100}$ (lê-se: um para cem). Isso significa que cada centímetro da maquete corresponde a 100 centímetros, ou 1 metro, no prédio construído (GIOVANNI et al., 2015).

Exemplo 2.7.

A Figura 2.1 representa uma miniatura de um ônibus cujo comprimento é igual a 9,5 cm e a escala utilizada foi de $1 : 144$.

Figura 2.1: Miniatura de ônibus

Fonte: O autor

Qual é o comprimento real do ônibus, em metros?

Resolução:

A miniatura e o ônibus real são figuras semelhantes, isto é, possuem a mesma forma, sem necessariamente terem o mesmo tamanho. A escala nos indica a razão entre os comprimentos da miniatura e os comprimentos reais, tomados em uma mesma unidade. Assim:

$$1:144 = \frac{1}{144} = \frac{comprimento\ \ da\ \ miniatura}{comprimento\ \ real}$$

Cada unidade de medida na miniatura (1 cm) vai corresponder a 144 unidades de medida no ônibus real, ou seja, 144 cm.

Assim, sendo x o comprimento procurado, temos

$$\frac{1\text{ cm}}{144\text{ cm}} = \frac{9,5\text{ cm}}{x} \implies x = 144 \times 9,5\text{ cm} = 1.368\text{ cm} \qquad (\lhd)$$

Portanto, o comprimento real do ônibus é 1.368 cm ou 13,68 m.

No exemplo acima, vemos em ($\lhd$) uma igualdade entre duas razões. Chamamos essa igualdade de **proporção**. Assim sendo, quando se escreve $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, há a indicação de uma proporção entre as frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Essa proporção também pode ser indicada por a : b :: c : d (lê-se: a está para b assim como c está para d). Em resumo, escrevemos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ou } a : b :: c : d$$

Os números a, b, c e d são os termos da proporção, sendo: a e d os extremos da proporção; enquanto que b e c os meios da proporção.

Propriedade fundamental das proporções

O produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

De modo geral temos que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c$

Um dos processos mais práticos e utilizados para resolver problemas que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais é a regra de três. Na resolução desse tipo de problema, recorre-se à "propriedade fundamental das proporções" e à "quarta proporcional".

2.2.2 Teorema de Thales

Pode-se também destacar, na Geometria, o Teorema de Thales, que ajuda a determinar comprimento de segmentos. No estudo das Ciências da Natureza, em Física, por exemplo, há várias aplicações que usam essa ferramenta da proporção. Em Termometria, quando se quer transformar determinada temperatura de uma escala em outra, pode-se fazer uso de uma representação geométrica, que aplica o conceito de proporção para encontrar o valor pretendido.

O teorema de Thales estabelece a relação entre os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais.

Teorema 2.1 (Teorema de Thales)**.** *Se um feixe de retas paralelas tem duas transversais, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos quaisquer de uma é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.*

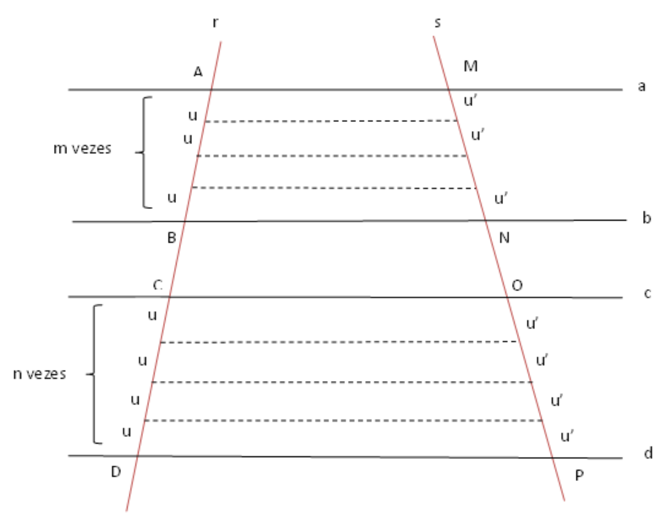


Figura 2.2: Feixe de retas

$$\text{Hipóteses}\begin{cases} \text{a // b // c // d} \\ \text{r e s transversais} \end{cases}$$

$$\text{Tese}\left\{ \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OP}} \right.$$

DEMONSTRAÇÃO.

Começaremos demonstrando o teorema para segmentos comensuráveis, isto é, segmentos cujas medidas podem ser expressas por uma quantidade inteira (não necessariamente a mesma) de certa unidade. Vamos considerar um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais r e s, conforme Figura 2.2.

Supondo que exista um segmento de medida u e dois números inteiros m e n tais que:

$$\begin{cases} \overline{AB} = m.u \\ \overline{CD} = n.u \end{cases}$$

Instituindo a razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$, temos: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{m.u}{n.u} = \frac{m}{n}$ (I)

Traçando retas paralelas ao feixe, pelos pontos que dividem AB e CD, dividimos MN e OP, respectivamente, em m e n partes iguais a u'. Assim temos:

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{OP}} = \frac{m.u'}{n.u'} = \frac{m}{n} \qquad \text{(II)}$$

Das relações (I) e (II), temos a tese: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OP}}$

Agora suponhamos que os segmentos AB e CD sejam incomensuráveis.

Escolhendo um segmento unitário α contido n vezes exatamente no segmento CD, temos:

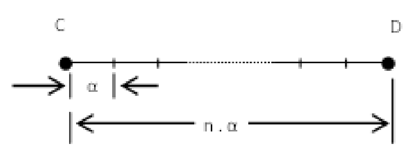


Figura 2.3: Segmento CD

$$\overline{CD} = n.\alpha \qquad \text{(I)}$$

Quaisquer que sejam n e α, nunca α caberá um número exato de vezes no segmento AB, pois AB e CD são incomensuráveis, isto é, não existe segmento submúltiplo comum de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Mas a medida $\overline{AB}$ será maior que m vezes α e menor que $(m+1)$ vezes α, para algum número interiro m, e teremos:

$$m.\alpha < \overline{AB} < (m+1).\alpha \qquad \text{(II)}$$

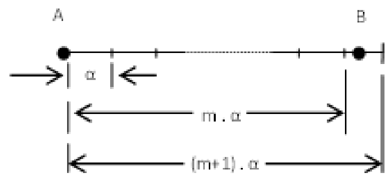


Figura 2.4: Segmento AB

Multiplicando a relação (II) por $\frac{1}{n.\alpha}$, vem:

$$\frac{m.\alpha}{n.\alpha} < \frac{\overline{AB}}{n.\alpha} < \frac{(m+1).\alpha}{n.\alpha}$$

de acordo com (I), temos:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} < \frac{(m+1)}{n} \qquad \text{(III)}$$

Traçando pelos pontos que dividem AB e CD, nas condições anteriormente mencionadas, as retas paralelas às do feixe, os segmentos MN e OP também ficarão divididos em partes congruentes entre si. Assim, o comprimento do segmento MN valerá n vezes uma certa medida unitária β e o comprimento do segmento MN será maior que m vezes β e menor que $(m+1)$ vezes β, e teremos também:

$$\frac{m}{n} < \frac{\overline{MN}}{\overline{OP}} < \frac{(m+1)}{n} \qquad \text{(IV)}$$

Pelas relações (III) e (IV), as razões $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\frac{\overline{MN}}{\overline{OP}}$ estão compreendidas entre $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$, cuja diferença é $\frac{1}{n}$. Em outras palavras, as razões $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ e $\frac{\overline{MN}}{\overline{OP}}$ tem valores aproximados a menos de $\frac{1}{n}$. O mesmo se dá para todo valor inteiro de n, por maior que seja. Logo, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{OP}} \qquad \text{c.q.d.}$$

Vimos que proporção é a igualdade entre duas ou mais razões provenientes das medidas extraídas de grandezas. Quando duas razões possuem o mesmo resultado, dizemos que elas são proporcionais.

É importante ressaltar que o aluno deve ser levado a verificar a relação entre as grandezas envolvidas na situação-problema antes de encontrar o resultado, podemos chamar esse fato de raciocínio proporcional.

O raciocínio proporcional é essencial para a aprendizagem efetiva do conceito, pois, é a partir dele que as situações-problema passam a ter mais sentido para o estudante, ou seja, quando o estudante entende a relação entre as grandezas sem precisar, efetivamente, realizar cálculos.

2.2.3 Função Linear

Lima et al. (2016) afirmam que "A função linear, dada pela fórmula $f(x) = a.x$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios".

E definem proporcionalidade da seguinte forma

> Diz-se que duas grandezas são *proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridos as seguintes condições:
>
> 1. Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.
>
> 2. Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x, então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
>
> Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma *proporcionalidade* (LIMA et al, 2010).

Exemplo 2.8.

Sejam r e s retas paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, chamemos de x o comprimento de um desses lados e z a área do retângulo.

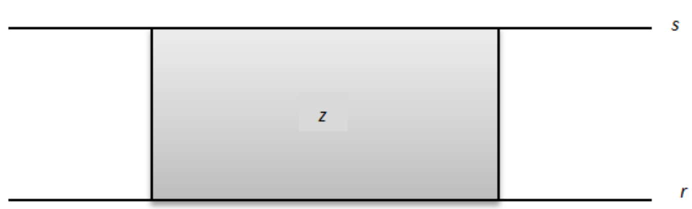


Figura 2.5: Área do retângulo

A correspondência $x \mapsto z$ é uma proporcionalidade. Ou seja: retângulos de altura fixada possuem áreas proporcionais às suas bases.

Com efeito, em primeiro lugar, se $x < x'$ então a área z' do retângulo de base x' é igual à área z do retângulo de base x mais a área de um retângulo de base $x' - x$, logo $z < z'$. Em segundo lugar, um retângulo de base $n.x$ pode ser expresso como reunião de n retângulos justapostos de base x (e mesma área z), logo sua área é $n.z$.

Segundo Lima (2013) "há situações em que a fórmula $y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade, é dada explicitamente (ou quase)". Mas, em outros casos não tem relevância alguma para o problema. Um exemplo disso se tem nas aplicações do Teorema de Thales.

Teorema 2.2. *Se uma reta é paralela a um lado BC de um triângulo ABC e intersecta os outros dois lados em pontos distintos (D e E), então ela divide esses outros dois lados em partes proporcionais.*

Hipótese $\{ \overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$

Tese $\left\{ \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \right.$

DEMONSTRAÇÃO.

Tracemos pelo ponto D, interno ao lado AB, a paralela DE ao lado BC. Pelo vértice A tracemos a reta r também paralela ao lado BC.

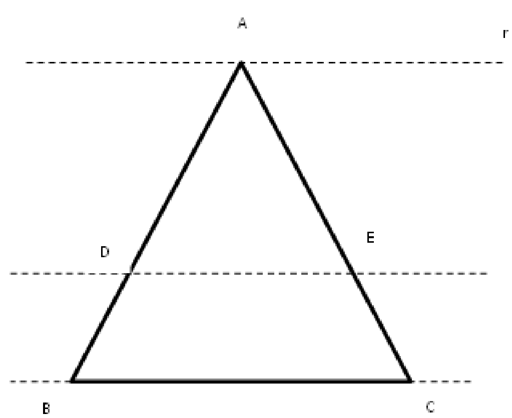


Figura 2.6: Segmentos proporcionais em triângulo

Teremos um feixe de paralelas, cortado pelas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$.

Aplicando o Teorema de Thales, temos a tese: $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ c.q.d.

No teorema anterior, tem-se um triângulo ABC e uma correspondência que a cada ponto D do lado AB associa o ponto E do lado AC tal que DE é paralelo a BC. O

Teorema de Thales garante que o comprimento y do segmento AE é proporcional ao comprimento x de AD. Mas o que importa é saber apenas que se $y = f(x)$ e $y^{'} = f(x^{'})$ então $\frac{y^{'}}{x^{'}} = \frac{y}{x}$ é constante.

O modelo matemático de proporcionalidade pode ser caracterizado por uma função linear e a demonstração a seguir, do livro Temas e Problemas (Lima et.al, 2010), refere-se ao Teorema Fundamental da Proporcionalidade, no qual é possível verificar essa relação:

Teorema 2.3. *Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função com as seguintes propriedades:*

1) $x < x^{'} \implies f(x) < f(x')$

2) $f(nx) = n.f(x)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$

Então $f(cx) = c.f(x)$ *para todo* $c \in \mathbb{R}^+$ *e todo* $x \in \mathbb{R}^+$.

Consequentemente, $f(x) = ax$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^+$ *com* $a = f(1)$.

DEMONSTRAÇÃO.

Em primeiro lugar, para todo número racional $r = m/n$, com m, $n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n.f(rx) = f(n.rx) = f(mx) = m.f(x),$$

por 2) logo, $f(rx) = \frac{m}{n}f(x) = r.f(x)$. Assim, a igualdade $f(cx) = c.f(x)$ é válida quando c é racional. Suponhamos, por absurdo, que exista $c > 0$ irracional talque $f(cx) \neq c.f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c.f(x)$ ou $f(cx) > c.f(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $f(cx)/f(x) < r < c$, logo $f(cx) < r.f(x) < c.f(x)$. Como r é racional, vale $r.f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c.f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas, como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1), isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Esta contradição mostra que não é possível ter-se $f(cx) < c.f(x)$. De modo inteiramente análogo se vê que $f(cx) > c.f(x)$ é impossível. Portanto deve ser $f(x) = c.f(x)$ para quaisquer c, $x \in \mathbb{R}^+$.

Observação 2.1.

Um teorema análogo, com a mesma demonstração, vale para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escrevendo, na propriedade 2), $n \in \mathbb{Z}$ em vez de $n \in \mathbb{N}$.

A definição, acima citada, não é utilizada no ensino inicial de proporções, já que o conceito de proporcionalidade é introduzido, na maioria das vezes, no 6º ano do Ensino Fundamental e a definição de função, no 1º ano do Ensino Médio.

A seguir, faremos uma explanação sobre os conceitos de perímetro, área e volume.

2.3 Perímetro

Para Muniz Neto (2013) "[...] a soma dos comprimentos dos lados do polígono é o perímero do mesmo". Em polígonos, o perímetro é obtido somando as medidas dos lados da figura. Por exemplo, em um quadrado, basta somar as medidas dos quatro lados e teremos o perímetro.

Já em um círculo, o perímetro é a medida da circunferência pela qual ele é limitado. É como se pudéssemos fazer um corte na linha que forma o círculo, esticá-la e medir com a régua o seu tamanho. Agora, vamos estabelecer a noção de comprimento de uma circunferência:

> Tomando-se quatro pontos na circunferência, obtemos um quadrilátero inscrito. Com oito pontos, temos um octógono inscrito. Aumentando-se o número de pontos considerados, os polígonos inscritos, cujo número de lados é cada vez maior, têm o comprimento de cada lado cada vez menor. O *perímetro* de cada polígono representa uma melhor aproximação para o comprimento da circunferência, quanto maior é o número de pontos marcados. Podemos dizer que o **comprimento da circunferência** é o valor para o qual tende a sequência de perímetros, à medida que o números de vértices aumenta indefinidamente (ANTAR NETO et al., 1982).

Indicando por C o comprimento de uma circunferência de raio r, a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é a mesma para todas as circunferências.

Dessa forma, dois círculos quaisquer são figuras semelhantes. O valor dessa razão ou constante de proporcionalidade é o número representado pela letra grega pi (π). Logo, sendo C e r o comprimento e raio de uma circunferência arbitrária,

$$\tfrac{C}{2r} = \pi$$

Da definição de π, resulta a expressão do comprimento C de uma circunferência de raio r:

$$C = 2\pi r$$

Na Subseção 2.1.2 afirmamos que área de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado. Na próxima seção, operacionalizaremos o cálculo de áreas de algumas regiões simples.

2.4 Área

Intuitivamente, a *área* de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado (MUNIZ NETO, 2013).

Desejando estabelecer um significado mais preciso para esta idéia, postulamos que as seguintes propriedades sejam válidas, segundo Muniz Neto (2013):

1. Polígonos congruentes tem áreas iguais.

2. Se um polígono convexo é *particionado* em um número finito de outros polígonos convexos (i.e., se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígino maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

4. A área de um quadrado de lado 1 cm é igual a 1 cm^2.

Valendo os postulados 1 a 4 acima, vamos considerar como exemplo a Figura 2.7, onde temos um retângulo particionado em 12 quadrados congruentes de lado igual a n. A área exprime uma medida numa certa unidade. Adotando como unidade a área do quadrado de lado n, temos que a área do retângulo é igual a 12.

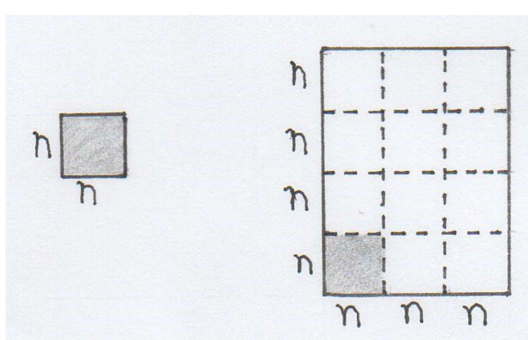


Figura 2.7: Área do retângulo

A Figura 2.8, ilustra o Postulado 1, temos aqui triângulos congruentes e

$$\text{área}_{(T_1)} = \text{área}_{(T_2)}.$$

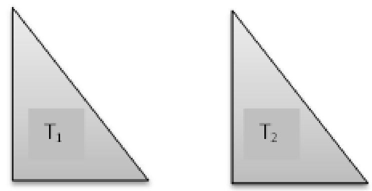


Figura 2.8: Triângulos congruentes

Segundo Antar Neto (1982), “Dois polígonos se dizem equivalentes se tem mesma área”.

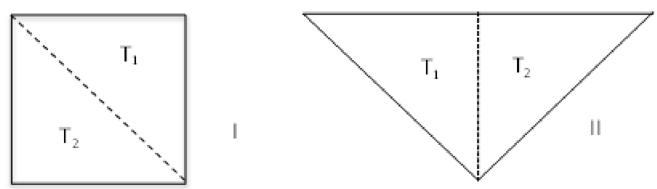


Figura 2.9: Polígonos equivalentes

Chamando de área$_{(I)}$ a área do polígono I; área$_{(II)}$ a área do polígono II; área$_{(T_1)}$ a área do Triângulo T_1 e área$_{(T_2)}$ a área do Triângulo T_2, afirmamos que os polígonos I e II da Figura 2.9 são equivalentes.

$$\begin{cases} \text{área}_{(I)} = \text{área}_{(T_1)} + \text{área}_{(T_2)} \\ \text{área}_{(II)} = \text{área}_{(T_1)} + \text{área}_{(T_2)} \end{cases} \Rightarrow \text{área}_{(I)} = \text{área}_{(II)}$$

A Figura 2.10 ilustra o Postulado 2, isto é, o polígono F é particionado em dois polígonos F_1 e F_2, então a área de F é a reunião das áreas de F_1 e F_2.

$$\text{área}_F = \text{área}_{F_1} + \text{área}_{F_2}$$

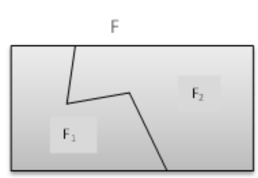


Figura 2.10: Polígono particionado

A partir dos Postulados 1 a 4, vamos mostrar a área de outros polígonos.

Área de um quadrado

Particionando um quadrado de lado $a \in \mathbb{N}$, em a^2 quadrados de lado 1 cada. Denotando a área do quadrado maior por A_Q, devemos ter A_Q igual à soma das áreas desses a^2 quadrados de lado 1, de maneira que $A_Q = a^2$.

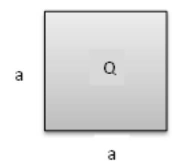


Figura 2.11: Quadrado de lado a

Área de um retângulo

Teorema 2.4. *A área de um retângulo é o produto de um lado pela altura relativa a esse lado.*

Hipótese {Retângulo de dimensões a e b

Tese {$A_R = a.b$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja um retângulo de lado a, altura b relativa ao lado a e área A_R.

Figura 2.12: Retângulo

Considerando os quadrados de lados a, b e $a+b$, conforme Figura 2.13.

Aplicando o Postulado 2 temos: $a^2 + A_R + A_R + b^2 = (a+b)^2 \implies a^2 + 2A_R + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 2A_R = 2.a.b \Rightarrow A_R = a.b$ c.q.d.

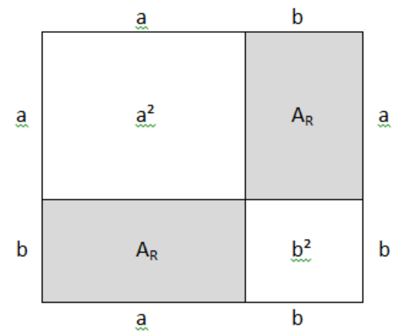


Figura 2.13: Quadrados de lados a, b e $a + b$

Área de um paralelogramo

Teorema 2.5. *A área de um paralelogramo é igual ao produto de um lado pela altura relativa a esse lado.*

Hipótese {Paralelogramo de lado b e altura h relativa a esse lado

Tese { $A_P = b.h$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja o paralelogramo ABCD da Figura 2.14. Tracemos pelos vértices A e D as perpendiculares AE e DF à reta suporte do lado BC.

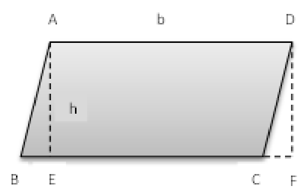


Figura 2.14: Paralelogramo ABCD

Os triângulos retângulos ABR e DCF são congruentes, pois AB $\equiv$ CD, como lados opostos, e AE $\equiv$ DF, como alturas do paralelogramo.

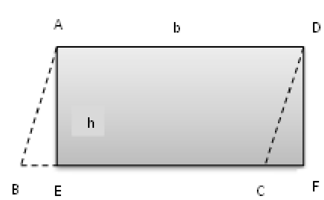


Figura 2.15: Retângulo AEFD

Portanto, o paralelogramo ABCD e o retângulo AEFD são equivalentes, isto é, tem a mesma área.

Logo, representando por b e h as medidas do lado e altura relativa a b comuns, A_R área do retângulo e A_P área do paralelogramo, temos:

$$\begin{cases} A_P = A_R \\ A_R = b.h \end{cases} \Rightarrow A_P = b.h \qquad\qquad c.q.d.$$

Área de um triângulo

Teorema 2.6. *A área de um triângulo é igual à metade do produto de um lado pela altura relativa a esse lado.*

Hipótese {Triângulo de lado b e altura (h) relativa a esse lado

Tese { $A_T = \frac{b.h}{2}$

DEMONSTRAÇÃO.

Seja o triângulo ABC de lado b e altura h relativa ao lado b. Tracemos AD e CD respectivamente paralelas aos lados BC e AB.

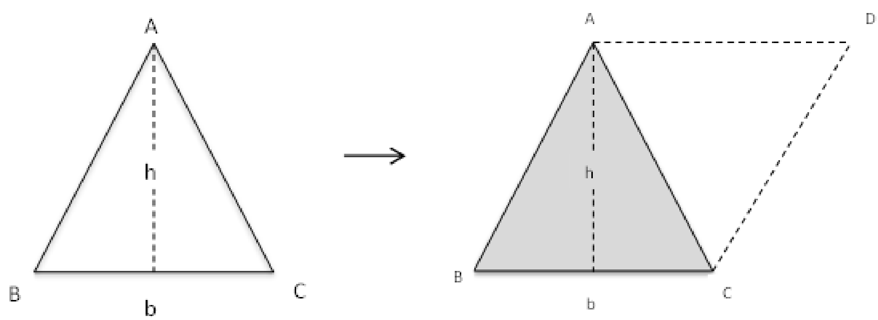


Figura 2.16: Triângulo ABC

Os triângulos ABC e CDA (Figura 2.16) são congruentes pelo caso LLL. Portanto a área do triângulo ABC é igual à área do triângulo CDA. Com isso, podemos dizer que a área do paralelogramo ABCD é igual ao dobro da área do triângulo ABC, isto é, $A_P = 2.A_T$. Logo: $2.A_T = A_P = b.h \Rightarrow A_T = \frac{b.h}{2}$ c.q.d.

Área de um círculo

Teorema 2.7. *A área de um círculo é o produto do número π pelo quadrado do raio.*

Hipótese {Círculo de raio r

Tese { $A_C = \pi.r^2$

DEMONSTRAÇÃO.

A área de um círculo é o limite para o qual tendem as áreas dos polígonos regulares inscritos quando o número de lados aumenta indefinidamente, nesse caso, a medida dos lados tende a zero. Em um círculo (Figura 2.17) consideremos inscrito um polígono regular de n lados, P_n, de perímetro $2p_n$ e apótema a_n. A expressão de sua área: $A(P_n) = p_n \cdot a_n$

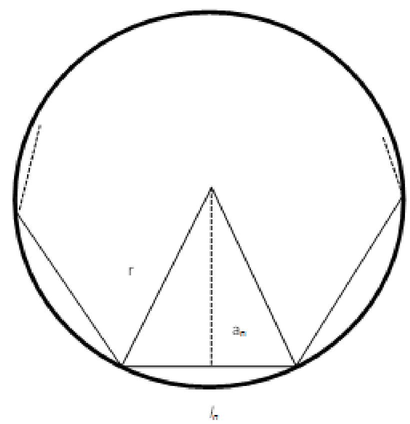


Figura 2.17: Círculo

Mas, quando o número de lados cresce indefinidamente ($n \to \infty$), o seu perímetro tende ao comprimento C ($2p_n \to C$) da circunferência e seu apótema tende ao raio r ($a_n \to r$) do círculo. Portanto,

$$A_C = \lim_{n\to\infty} A(P_n) = \lim_{n\to\infty} p_n \cdot a_n = \frac{C}{2} \cdot r.$$

Como $C = 2\pi r$, temos a tese: $A = \frac{2\pi r}{2}.r \implies A = \pi r^2$

Na próxima seção, vamos tratar de volumes dos sólidos simples: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas.

2.5 Volume

Para Lima et al. (2016), "Intuitivamente, o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Para exprimir essa "quantidade de espaço" através de um número, devemos compará-la com uma unidade; e o resultado dessa comparação será chamado de volume".

A noção de volume fica estabelecida, de modo mais preciso, quando fixamos as propriedades que o volume deve ter. Segundo Osvaldo Dolce e José N. Pompeu (2005):

1. Volume de um sólido ou medida do sólido é um número real positivo associado ao sólido de forma que:

   1º) sólidos congruentes têm volumes iguais;

   2º) se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos *interiores* comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 com S_2.

   O volume dos sólidos é medido por uma *unidade* que, em geral, é o volume de um *cubo* de aresta unitária, assim o volume desse cubo é 1. Se sua aresta medir 1 cm (um centímetro), seu volume será 1 cm^3 (um centímetro cúbico). Se sua aresta medir 1 m, seu volume será 1 m^3.

2. Dois sólidos são *equivalentes* se, e somente se, eles têm *volumes iguais* na mesma unidade de volume.

A Figura 2.18 representa um paralelepípedo retângulo, definido por Lima et al. (2016) como "um poliedro formado por 6 retângulos. Ele fica perfeitamente determinado por três medidas: o seu comprimento (a), a sua largura (b) e a sua altura (c)". O volume desse sólido cujas arestas tem medidas a, b e c é igual a $V = abc$.

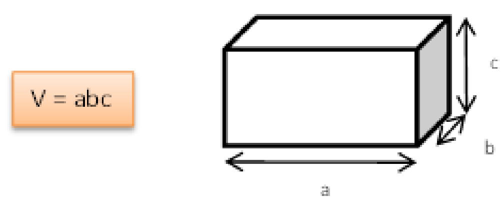


Figura 2.18: Volume do paralelepípedo

Portanto, o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto de suas dimensões. Como o produto $a.b$ é a área da base e c é a medida da altura (Figura 2.18), podemos dizer que o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

A seguir enunciaremos um postulado que nos auxiliará a estabelecer o volume de outros sólidos.

Postulado 2.1 (Princípio de Cavalieri)**.** *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então, esses sólidos têm mesmo volume.*

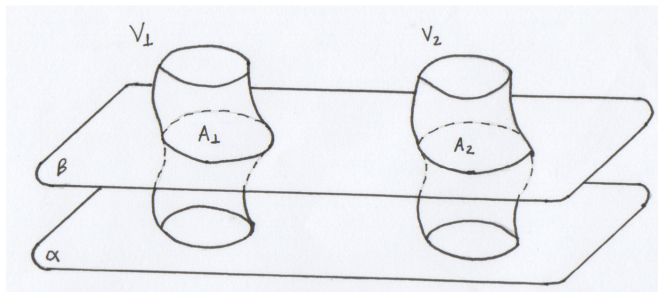


Figura 2.19: Princípio de Cavalieri

Empregando o Postulado 2.1 na ilustração (Figura 2.19), temos que:

$$A_1 = A_2, \text{ para todo plano } \beta \text{ paralelo a } \alpha \;\Rightarrow\; V_1 = V_2.$$

Como aplicação do Princípio de Cavalieri, podemos obter os volumes dos demais sólidos simples.

2.5.1 O prisma

Um prisma é um poliedro com duas faces congruentes e paralelas (localizadas em planos paralelos) e cujas outras faces são paralelogramos obtidos ligando-se os vértices correspondentes das duas faces paralelas (GIOVANNI et al., 2015). Segundo Lima et al (2016), poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados *faces* onde:

a) Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

b) A interseção de duas faces quaisquer, ou é um lado comum, ou é um vértice ou é vazia.

   Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é um vértice do poliedro.

c) É sempre possível ir de um ponto de uma face a um ponto de qualquer outra, sem passar por nenhum vértice (ou seja, cruzando apenas arestas).

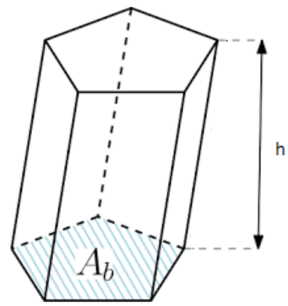


Figura 2.20: Prisma

Determinaremos o volume de um prisma usando o Princípio de Cavalieri. Vamos supor um prisma de altura h, cuja base seja um polígono de área A_b, contido em um plano horizontal (ver Figura 2.20). Imaginemos ao lado um paralelepípedo retângulo com altura h tal que sua base seja um retângulo de área A_b. Vamos admitir que os dois sólidos sejam cortados por um outro plano horizontal, que produz seções de áreas A_1 e A_2 no prisma e no paralelepípedo, respectivamente. Como o paralelepípedo é também um prisma e, que em todo prisma, uma seção paralela à base é congruente com essa base (ver Figura 2.21).

> A intersecção de um prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais é denominada secção do prisma. Quando o plano é paralelo às bases, obtemos uma secção transversal. A secção transversal de um prisma é um polígono congruente aos polígonos das bases (GIOVANNI et al., 2015).

Como figuras congruentes tem mesma área, temos que $A_1 = A_b = A_2$ e, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos tem o mesmo volume.

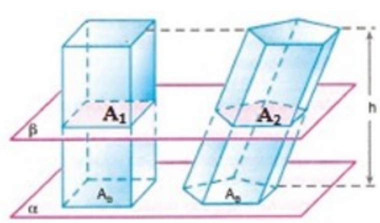


Figura 2.21: Esquerda: paralelepípedo; direita: prisma

Sabemos que o volume do paralelepípedo é $A_b h$, então o volume do prisma também é o produto da área de sua base por sua altura.

2.5.2 A pirâmide

Primeiro vamos ter uma noção de pirâmide. Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um polígono P. Seja V um ponto situado fora do plano α (ver Figura 2.22).

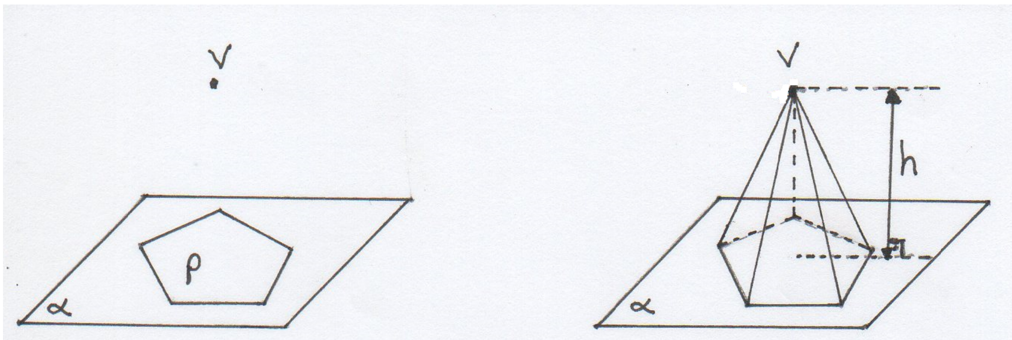


Figura 2.22: Pirâmide

Segundo Giovanni et al. (2015), “A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra num ponto do polígono P é denominada pirâmide”.

Os elementos de uma pirâmide podem ser vistos na Figura 2.23.

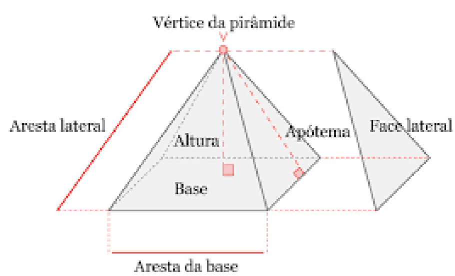


Figura 2.23: Partes de uma pirâmide

Agora enunciaremos um teorema que nos ajudará obter o volume da pirâmide.

Teorema 2.8. *Duas pirâmides de mesma base e mesma altura têm mesmo volume.*

A demonstração desse resultado segue diretamente do Princípio de Cavalieri, por esse motivo a omitiremos. Mas, o importante é que ele nos diz que se o vértice de uma pirâmide se move em um plano paralelo à base, o volume dessa pirâmide não se altera. Segundo Lima et al. (2016), "O fato de que podemos mover o vértice de uma pirâmide em um plano paralelo à sua base sem alterar o seu volume é a chave para a demonstração do volume da pirâmide de base triangular".

Posto isto, enunciaremos o próximo teorema.

Teorema 2.9. *O volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

DEMONSTRAÇÃO.

Consideremos, um prisma triangular cujas bases são os triângulos ABC e DEF. Sejam A_b e h a área de ABC e a altura do prisma, respectivamente. Decompondo esse prisma em três pirâmides triangulares: I, II e III, seccionando-o segundo os planos BCD e CDE, como mostra a Figura 2.24:

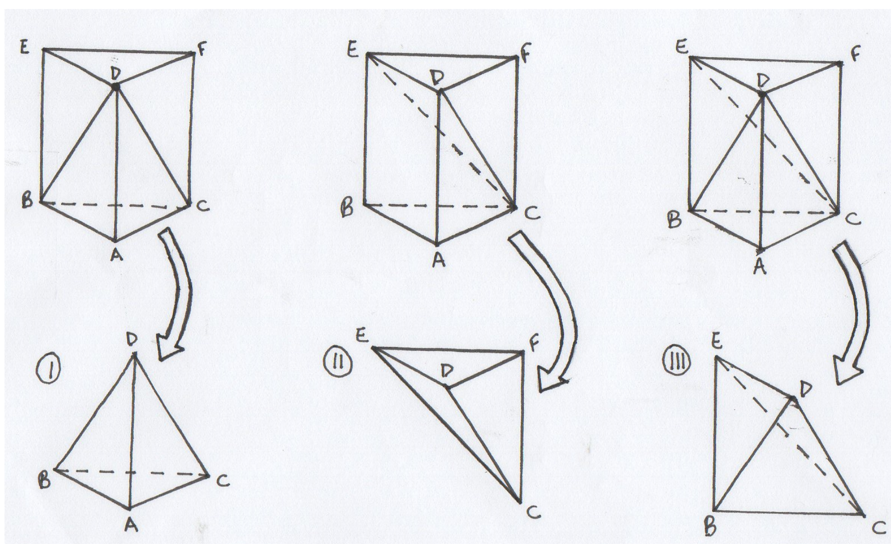


Figura 2.24: Prisma triangular decomposto

Notemos que:

- I e II têm bases congruentes ($\Delta ABC \cong \Delta DEF$, pois cada triângulo é uma base do prisma) e têm mesma altura (a do prisma), logo, pelo Teorema 3.14., a pirâmide I tem o mesmo volume que a pirâmide II.

- II e III têm bases congruentes ($\Delta CEF \cong \Delta BCE$, pois cada um desses triângulos é a metade do retângulo $BCEF$) e têm mesma altura (em relação às bases consideradas, a altura é a distância do ponto D ao retângulo $BCEF$). Portanto, pelo Teorema 3.14., a pirâmide II tem o mesmo volume que a pirâmide III.

- pela propriedade transitiva, a pirâmide I tem o mesmo volume que a pirâmide III.

Logo, um prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides triangulares de volumes iguais. Sejam V e v o volume do prisma triangular dado e o volume de cada pirâmide triangular, respectivamente. Temos que: $3v = V$ ou $v = \frac{1}{3}V$, isto é, o volume de cada pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ do volume do prisma triangular dado. Como o volume do prisma é dado pelo produto da área da base pela medida da altura, temos que: o volume de uma pirâmide triangular é igual a um terço do produto da área da base pela medida da altura, isto é, $v = \frac{1}{3}A_b h$.

O próximo teorema proporciona o resultado obtido para qualquer pirâmide.

Teorema 2.10. *O volume de qualquer pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura.*

DEMONSTRAÇÃO.

Observemos que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Essa divisão é feita dividindo-se a base em triângulos justapostos por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide, como mostra a Figura 2.25.

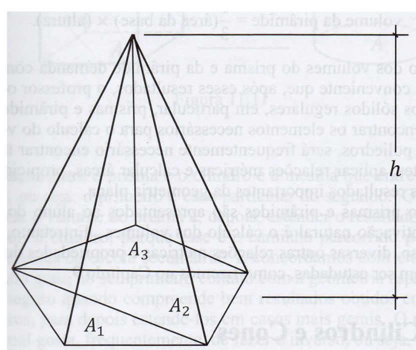


Figura 2.25: Pirâmide decomposta

Vamos supor, agora, uma pirâmide de altura h cuja base de área A, tenha sido dividida em n triângulos de áreas A_1, A_2,..., A_n. Como o volume da pirâmide é a soma dos volumes das pirâmides triangulares, temos que seu volume é: $V = \frac{1}{3}A_1 h + \frac{1}{3}A_2 h + ... + \frac{1}{3}A_n h = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)h = \frac{1}{3}Ah$, como queríamos demonstrar. Fica então estabelecido que:

$$\text{volume da pirâmide} = \frac{1}{3} \text{ (área da base) x (altura).}$$

Nas seções 2.5.1 e 2.5.2 vimos um dos tipos de sólidos geométricos, chamados de poliedros (sólidos geométricos em que a superfície é composta por polígonos). Na próxima seção veremos outro tipo de sólidos geométricos, os corpos redondos.

2.5.3 Cilindro

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta paralelos à reta r, com uma extremidade em um ponto do círculo de centro C e a outra no plano β, denomina-se *cilindro circular*.

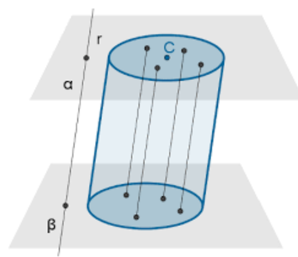


Figura 2.26: Cilindro circular

Observando a Figura 2.26, vamos destacar alguns elementos: chamemos de *bases*, os círculos situados nos planos paralelos α e β; *altura* a distância entre os planos planos paralelos α e β; *eixo* a reta que contém os centros das bases; e *geratriz* os segmentos paralelos ao eixo e cujas extremidades são os pontos das circunferências das bases.

Vamos nos ater aos cilindros retos, isto é, aqueles cujas geratrizes são perpendiculares às bases, pois eles estão mais relacionados com os objetos da nossa proposta de trabalho.

É importante salientar que, planificando o cilindro reto de raio r e altura h, conforme Figura 2.27, obtemos um retângulo de base $2\pi r$ e altura h mais dois círculos de raios r.

Com isso, a área lateral do cilindro (A_l) é igual à área do retângulo, que vale $2\pi rh$; e a área de uma de suas bases (a_b) é igual à área do círculo de raio r, que vale πr^2, sendo assim a área total (A_t) do cilindro será a soma da área lateral com as áres das duas bases do cilindro, ou seja, $A_t = A_l + 2A_b \implies A_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 \implies A_t = 2\pi r(h + r)$.

A Figura 2.28 nos mostra um cilindro e um prisma com mesma altura h e bases equivalentes ao plano α.

Nesse cenário, todo plano paralelo às bases e que secciona os dois sólidos determina neles secções transversais de mesma área. Pelo princípio de Cavalieri, temos então: volume

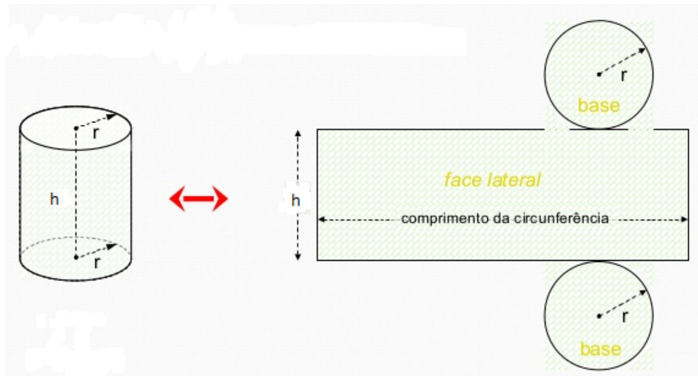


Figura 2.27: Planificação do Cilindro

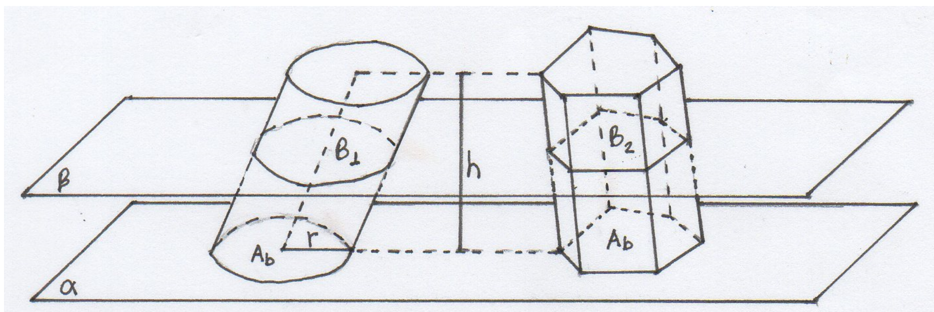


Figura 2.28: Volume do Cilindro

do cilindro = volume do prisma, ou seja, volume do cilindro = (área da base) x (altura). Num cilindro reto de raio r, a área da base é dada por $A_b = \pi r^2$. Portanto seu volume $V = A_b h$, isto é, $V = \pi r^2 h$.

2.5.4 Cone

Na Figura 2.29, temos um círculo de centro O e raio de medida r, contido em um plano α, e um ponto V, não pertencente a α.

A figura geométrica formada pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra em um ponto do círculo de centro O é denominada cone circular, ou apenas cone.

Denominaremos de *vértice* do cone o ponto V; a *base* do cone o círculo de cento O e raio de medida r; uma *geratriz* do cone a cada segmento com uma extremidade em V e a outra num ponto da circunferência da base e, finalmente, a *altura* do cone como a distância do vértice ao plano da base.

Pelo mesmo motivo que fizemos com os cilindros, vamos considerar apenas os cones

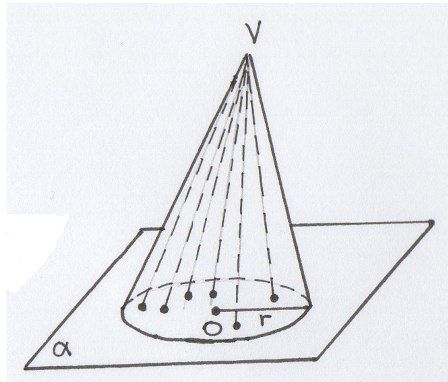


Figura 2.29: Cone

retos, isto é, quando a reta $\overleftrightarrow{VO}$, chamada eixo do cone, é perpendicular ao plano da base.

Quando planificamos o cone, temos:

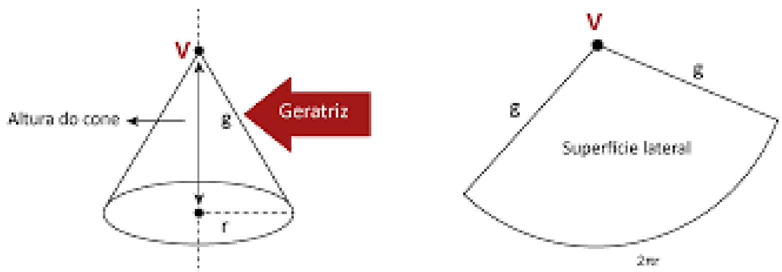


Figura 2.30: Planificação do Cone

Analisando a Figura 2.30, percebemos que a área lateral de um cone reto de raio r e geratriz g, transformou-se em um setor circular de raio g cujo arco tem comprimento $2\pi r$. A área desse setor é igual a área lateral (A_l) do cone e, para determiná-la usaremos uma regra de três. Assim, a área desse setor está para a área do círculo de raio g, assim como o comprimento do arco $2\pi r$ está para o comprimento total da circunferência $2\pi g$, ou seja, $\frac{A_l}{\pi g^2} = \frac{2\pi r}{2\pi g}$. Desta proporção, temos que: $A_l.2\pi g = \pi g^2.2\pi r \implies A_l = \frac{2\pi r.\pi g^2}{2\pi g} \implies A_l = \pi r g$. Como a área total (A_t) é igual a área lateral (A_l) mais a área da base (A_b) do cone, então $A_t = A_l + A_b \implies A_t = \pi r g + \pi r^2 \implies A_t = \pi r(g + r)$.

O lema a seguir nos auxiliará na conclusão de volume do cone.

Lema 2.1.

1. Sejam $\mathcal{T}$ um tetraedro de base $\mathcal{B}$ e altura h e α um plano paralelo ao plano de $\mathcal{B}$, situado à distância h' do vértice de $\mathcal{T}$, com $h' < h$. Então α intersecta $\mathcal{T}$ em um triângulo $\mathcal{B}'$, semelhante a $\mathcal{B}$ talque $\frac{A(\mathcal{B}')}{A(\mathcal{B})} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$.

2. Sejam $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ tetraedros de alturas iguais e bases respectivamente $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$. Se $A(\mathcal{B}_1) = A(\mathcal{B}_2)$, então $\mathcal{V}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{V}(\mathcal{T}_2)$.

Para calcular o volume do cone, utilizamos também o princípio de Cavalieri. Vamos considerar um cone de altura H e base de área A contida em um plano horizontal, e uma pirâmide de altura H e base de área A contida nesse mesmo plano (ver Figua 2.31). Se um outro plano horizontal, distando h do vértice desses dois sólidos secciona ambos segundo figuras de áreas A_1 e A_2, de acordo com o Lema 2.1, temos que: $\frac{A_1}{A} = (\frac{h}{H})^2 = \frac{A_2}{A}$, ou seja, $A_1 = A_2$. O Princípio de Cavalieri nos garante que os dois sólidos tem mesmo volume e, portanto, concluímos que o volume do cone é igual a um terço do produto da área da base pela altura.

$$\text{Volume do cone} = \frac{1}{3} \text{ (área da base) x (altura).}$$

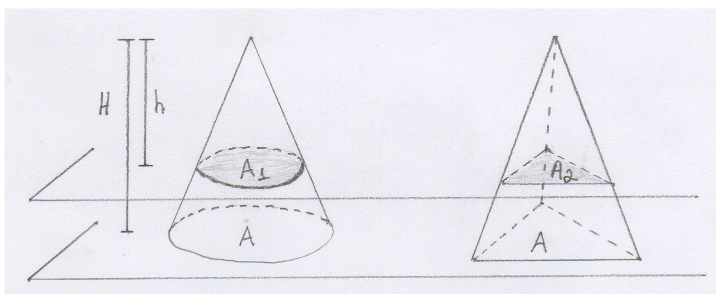


Figura 2.31: Calculando o volume de um cone

2.5.5 Esfera

Dolce e Pompeu (2005) definem:

Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. Chama-se *esfera* de *centro* O e *raio* r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância $\overline{OP}$ seja menor ou igual a r.

Chama-se *área* da esfera de centro O e raio r ao conjunto dos pontos P do espaço, tais que a distância OP seja igual a r.

A Figura 2.32 mostra uma esfera bem como os seus elementos, tais como: eixo e, pólos P_1 e P_2, meridiano, paralelo e equador.

A área de uma esfera S é dada pelo quádruplo da área de um dos círculos máximos, ou seja: $S = 4\pi r^2$, enquanto que seu volume V é determinado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

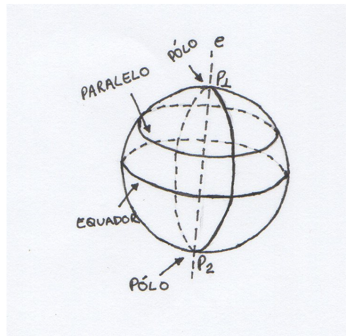


Figura 2.32: Esfera

O volume da esfera é obtido também como uma aplicação do Princípio de Cavalieri (veja postulado 2.1). Com isso, vamos imaginar um cilindro equilátero cujo raio da base seja r, igual ao raio da esfera. Seja V o centro do cilindro, ou seja, o ponto médio do seu eixo. Consideremos dois cones, com vértice nesse ponto V e tendo como bases as bases do cilindro (ver Figura 2.33). Suponhamos que estes dois cones são retirados do cilindro e vamos tomar o sólido que resulta, ou seja, a parte do cilindro situada fora dos dois cones. Este sólido será denominado de *anticlepsidra*.

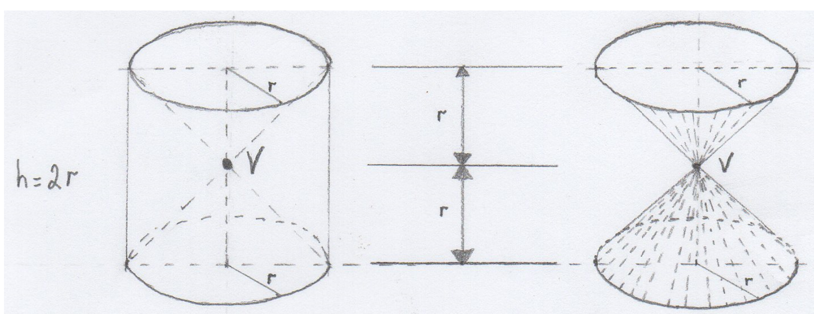


Figura 2.33: Clépsidra

Imaginemos que a esfera tangencia os dois planos das bases do cilindro. Um plano paralelo a estes, situado a uma distância $d(d < r)$ do centro da esfera, intercepta a anticlepsidra segundo uma coroa circular e a esfera, segundo um círculo (Ver Figura 2.34).

As circunferências que limitam a coroa circular tem raios d e r, logo a área da coroa (A_{co}) é

$$A_{co} = \pi r^2 - \pi d^2$$

A área do círculo A_{ci} determinado na esfera é

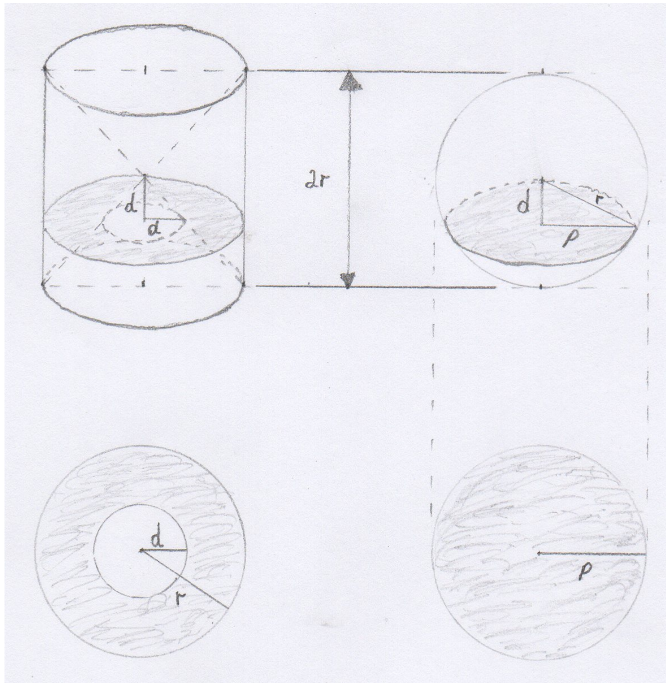


Figura 2.34: Coroa circular e círculo

$$A_{ci} = \pi\rho^2$$

Observando a Figura 2.34 tem-se que $r^2 = \rho^2 + d^2$, assim $\rho^2 = r^2 - d^2$. Logo,

$$A_{ci} = \pi(r^2 - d^2) = \pi r^2 - \pi d^2$$

Portanto, $A_{co} = A_{ci}$. Pelo Princípio de Cavalieri, isto acarreta que o volume da esfera é igual ao volume da *anticlepsidra*.

Podemos, então, calcular este volume tomando o volume do cilindro, menos duas vezes o volume de um dos cones retirados. Temos

$$V_{cilindro} = (\pi r^2).h = (\pi r^2).2r = 2\pi r^3$$
$$V_{cone} = \tfrac{1}{3}(\pi r^2).r = \tfrac{\pi r^3}{3}$$

Então, para o volume da esfera obtemos

$$V = V_{cilindro} - 2.V_{cone} = 2\pi r^3 - 2.\tfrac{\pi r^3}{3} = \tfrac{4\pi r^3}{3}$$

Quanto a área da esfera, vamos adotar um processo que, apesar de não constituir uma demonstração, torna o resultado $4\pi r^2$ bastante aceitável. Suponha a esfera de raio r, dividida em um número n muito grande de regiões, todas com área e perímetro muito pequenos. Como se a esfera estivesse coberta por uma rede de malha muito fina. Cada uma dessas regiões, que é "quase" plana se n for muito grande, será base de um cone com vértice no centro da esfera. Assim, a esfera ficará dividida em n cones, todos com altura aproximadamente igual a r (tanto mais aproximadamente quanto menor for a base do cone).

Se A e V são a área e o volume, respectivamente, da esfera e A_1, A_2,..., A_n são as áreas das diversas regiões e V_1, V_2,..., V_n são os volumes dos n cones, temos

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n$$
$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}A_1 r + \tfrac{1}{3}A_2 r + ... + \tfrac{1}{3}A_n r$$
$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + ... + A_n)r$$
$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}Ar$$
$$A = 4\pi r^2$$

Na próxima seção daremos um enfoque no objeto de estudo referente às razões de semelhança.

2.6 Figuras semelhantes

Primeiro vamos definir semelhança entre triângulos:

Dois triângulos, ABC e PQR, são semelhantes se é possível estabelecer uma correspodência entre os seus vértices, de tal modo que os seus ângulos internos sejam dois a dois congruentes: $\widehat{A} \equiv \widehat{P}$; $\widehat{B} \equiv \widehat{Q}$; $\widehat{C} \equiv \widehat{R}$ e os seus lados sejam proporcionais: $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = k$. Indicamos $\Delta ABC \sim \Delta PQR$. O número k, equivalente à razão entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes, chama-se razão de semelhança.

Podemos dizer que triângulos semelhantes tem a mesma forma, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Por exemplo, os dois triângulos retângulos da Figura 2.35 são semelhantes, pois os seus ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes apresentam a mesma razão: $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{1}{2}$.

Para concluir que dois triângulos dados são semelhantes, não é necessário que todas as condições dadas na definição sejam verificadas. Vamos relacionar os principais critérios de semelhança de triângulos:

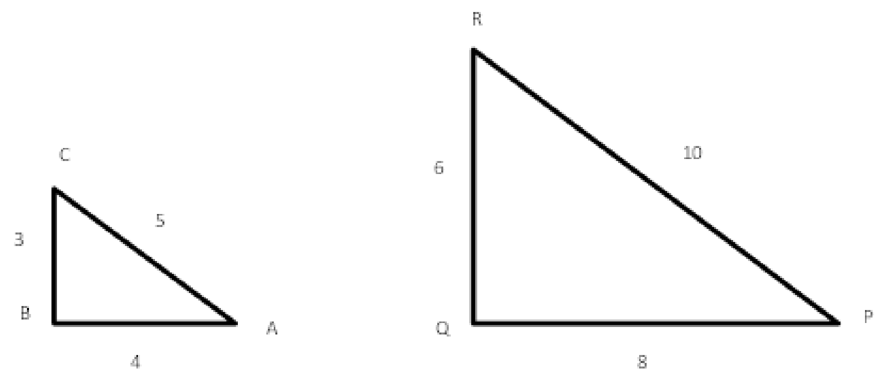


Figura 2.35: Triângulos semelhantes

1. AAA (ângulo - ângulo - ângulo) Se dois triângulos tem congruentes dois a dois os três ângulos internos, então esses dois triângulos são semelhantes.

2. LAL (lado - ângulo - lado) Se dois triângulos tem dois pares de lados proporcionais e os ângulos compreeendidos entre eles congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

3. LLL (lado - lado - lado) Se dois triângulos tem os três lados correspondentes proporcionais, então esses dois triângulos são semelhantes.

Vamos estender este conceito, de semelhança de triângulos, a outras figuras geométricas planas. A partir da figura F (ver Figura 2.36), vamos construir outra figura, F', que seja semelhante a ela.

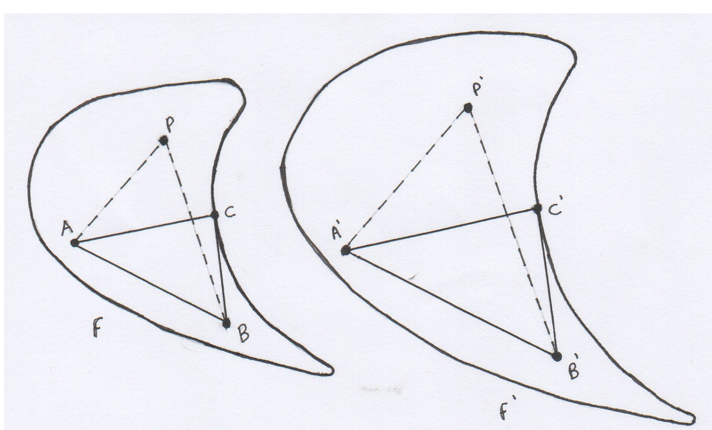


Figura 2.36: Figuras semelhantes

Escolhidos três pontos arbitrários, A, B e C, da figura F, não alinhados, tomemos outros três pontos A', B' e C', de tal modo que $\Delta\ A'B'C' \sim \Delta$ ABC.

Agora, dado um ponto qualquer P da figura F, podemos obter em correspondência outro ponto P', do seguinte modo:

1. Se P $\notin \overleftrightarrow{AB}$, escolhemos P' de modo que $\Delta\ A'P'B' \sim \Delta$ APB (P' e P em semiplanos correspondentes, com relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$).

2. Se P $\in \overleftrightarrow{AB}$, escolhemos P' de modo que $P' \in \overleftrightarrow{A'B'}$ e $\frac{\overline{A'P'}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{B'P'}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

Cada ponto de F terá uma imagem através da correspondência assim definida. Tais imagens formam uma nova figura, F', que é semelhante à figura F. Podemos definir: Duas figuras são semelhantes se existe uma correspondência entre seus pontos, tal que a razão entre um segmento da primeira e o correspondente segmento da segunda figura seja constante.

A razão entre dois segmentos correspondentes chama-se razão de semelhança. Vamos verificar como fica essa razão no caso de áreas das figuras semelhantes. Para tanto iremos analisar primeiro áreas de triângulos semelhantes, ou seja, vamos demonstrar que dois triângulos semelhantes, de razão de semelhança igual a k, tem suas áreas na razão igual a k^2.

Sejam S_1 e S_2 as áreas de dois triângulo semelhantes Δ ABC $\sim \Delta$ PQR (ver Figura 2.37), cuja razão de semelhança é $\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = k$, vamos provar que $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

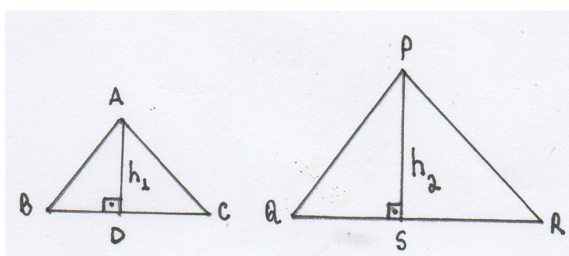


Figura 2.37: Δ ABC $\sim \Delta$ PQR

Para os triângulos Δ ABD e Δ PQS, temos $\widehat{B} \equiv \widehat{Q}$ e A$\widehat{D}$B = P$\widehat{S}$Q, logo, pelo critério AAA, temos Δ ABD $\sim \Delta$ PQS. Daí resulta que $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = k$. Se h_1 é a altura do ΔABC, relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$ e h_2 é a altura do Δ PQR, relativa ao lado $\overleftrightarrow{QR}$, sabemos que $\frac{h_1}{h_2} = k$. Temos também $\frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = k$. Portanto, $S_1 = \frac{\overline{BC}.h_1}{2} = \frac{(k.\overline{QR}).(k.h_2)}{2} = k^2.\frac{\overline{QR}.h_2}{2} = k^2.S_2$, donde $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

Tal fato se estende ao caso de figuras planas semelhantes quaisquer. A enunciaremos assim: Dadas duas figuras semelhantes F e F', seja k a razão de semelhança, isto é, se

AB $\subset$ F e $A'B' \subset F'$ são dois segmentos correspondentes das duas figuras, seja $k = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$. Sendo assim, as áreas das duas figuras estão entre si na razão k^2, isto é, $\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2$.

Considermos, agora, uma pirâmide de vértice V e altura H (Pirâmide 1). Imaginemos que um plano β, paralelo ao plano α da base ABCD, corte a pirâmide à distância h do vértice, sendo h $<$ H. A intersecção do plano β com a pirâmide é um polígono semelhante ao polígono da base e tem o nome de seção transversal. O plano β separa a pirâmide em dois sólidos, um dos quais é também uma pirâmide de vértice V e altura h (Pirâmide 2). O outro é um sólido chamado tronco da pirâmide.

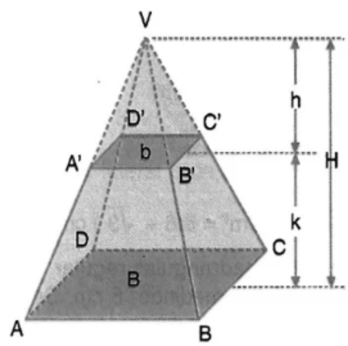


Figura 2.38: Pirâmide V-$ABCD$

As duas pirâmides, 1 e 2, obtidas (ver Figura 2.38) são semelhantes. Estamos estendendo o conceito geral de semelhança entre figuras planas para quaisquer figuras geométricas. Sendo assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BV}}{\overline{B'V}} = ... = k$$

Tomando-se, por exemplo, duas diagonais das bases, temos $\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k$. Em particular, podemos escrever também $\frac{H}{h} = k$. Duas pirâmides semelhantes apresentam:

a) os ângulos poliédricos correspondentes, congruentes;

b) as faces correspondentes, semelhantes;

c) as arestas correspondentes, proporcionais.

Chamemos de A_B a área da base da pirâmide 1 e A_b a área da base da pirâmide 2, e lembremos que as áreas correspondentes estão entre si na razão k^2, isto é, $\frac{A_B}{A_b} = k^2$.

Para os volumes das duas pirâmides temos

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}A_B.H}{\frac{1}{3}A_b.h} = \frac{A_B.H}{A_b.h} = k^2.k = k^3$$

As afirmações acima são facilmente adaptadas para cones semelhantes. Elas podem ser generalizadas para duas áreas ou dois sólidos semelhantes quaisquer:

- A razão entre as áreas semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.
- A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Capítulo 3

Proposta da Oficina

A proposta dessa oficina é oferecer ao aluno do Ensino Médio uma possibilidade de revisão no estudo de proporcionalidade e geometria. Como se sabe, trata-se de conteúdos fundamentais da Matemática, além de serem presenças garantidas em exames tais como Prova Brasil, SAEB e ENEM.

Com enfoque na construção, essa oficina de Matemática oportunizará aos participantes a identificação de possíveis relações do contexto de estudo com temas relacionados do seu dia-a-dia.

Para implementar essa proposta de trabalho, sugerimos uma divisão da turma em grupos de 4 (quatro) alunos com 8 (oito) encontros de 2 (duas) horas/aula (Considerando: 1 hora/aula = 50 minutos).

Os encontros podem ser realizados da seguinte forma de acordo com o cronograma:

Oficina Pedagógica de Matemática		
Cronograma		
Encontro	**Data**	**Atividade**
1º	____/____/_______	Aplicação do pré-teste
2º	____/____/_______	Comparação de medidas
3º	____/____/_______	Escolha do tema e definição da escala
4º	____/____/_______	Construção da maquete
5º	____/____/_______	Construção da maquete
6º	____/____/_______	Identificação de figuras geométricas nas maquetes
7º	____/____/_______	Criar situações-problemas
8º	____/____/_______	Aplicação do pós-teste e apresentação das maquetes

Figura 3.1: Cronograma

Fonte: O autor

3.1 Encontro 1

O primeira encontro iniciará mostrando a dinâmica do trabalho: apresentação de cada etapa da oficina e os dias em que ocorrerão, mostrando o cronograma (Figura 3.1), definição dos grupos, isto é, a divisão da turma em grupos de no máximo 4 (quatro) participantes, duração dos encontros etc. Em seguida será aplicado um pré-teste com características semelhantes à prova Saeb (Figura 3.2) contemplando os seguintes assuntos: razão e proporção, unidades de medidas, cálculo de área e volume. Essa avaliação terá a função, apenas, de fazer um diagnóstico das habilidades dos alunos para resolver problemas.

Colégio Estadual Professor Fabio Araripe Goulart

Teste diagnóstico aplicado em ___ / ___ / ___, na turma do 3º ano Integral (*Pré-Teste*)

Aluno(a): ____

1) A largura de um determinado automóvel é 2 *m*. Uma miniatura desse automóvel foi construída utilizando-se uma escala de 1:40. Qual a medida, em *centímetros*, da largura da miniatura?
   a) 2 cm   c) 5 cm   e) 2 dm
   b) 3 cm   d) 5 dm

2) Qual é a escala de um desenho em que um comprimento de 3 *m* está representado por um comprimento de 5 *cm*?
   a) 1:30   c) 1:300   e) 1:1000
   b) 1:60   d) 1:600

3) Em determinada hora do dia, a razão entre a altura de um bastão, fixado verticalmente no chão, e a sombra que ele projeta é de 5 para 3. Se a sombra mede 72 *cm*, qual é a altura desse bastão?
   a) 1,2 m   c) 43,2 m   e) 2,1 m
   b) 1,2 cm   d) 43,2 cm

4) Que altura tem uma árvore que projeta uma sombra de 10 *m* no mesmo instante em que uma pessoa de 1,60 *m* de altura projeta uma sombra de 2,50 *m*?
   a) 6 m   c) 6,4 m   e) 7,2 m
   b) 6,2 m   d) 6,5 m

Figura 3.2: Algumas questões do Pré-teste

3.2 Encontro 2

Nessa etapa, o professor utilizará como recursos didáticos régua, transferidor, compasso, tesoura, lápis, borracha, papel A4, cartolinas e calculadoras que serão entregues aos alunos para que eles recortem figuras geométricas, com medidas pré determinadas, e façam cálculos e comparações. Pode-se reservar, no início dessa etapa, alguns minutos para realizar uma revisão nos conceitos de frações equivalentes, cálculo de perímetro e área. Apesar dos alunos realizarem cálculos de perímetros e áreas, o objetivo dessa fase, é fazer com que os alunos percebam um "padrão" quando compararem as medidas pedidas das figuras duas a duas. Todos os resultados obtidos devem ser anotados em um Diário de Bordo.

No âmbito pedagógico e escolar, os diários de bordo são conhecidos por registrarem todo o desenvolvimento de determinado projeto, indicando todas as informações que forem pertinentes ao processo, como a fixação de datas, locais, descobertas, testes, resultados, etc.

> Como parte do processo de aprendizagem, precisa incluir registros e comentários da produção coletiva e individual do conhecimento e, por isso mesmo, não deve ser um procedimento aplicado nos alunos, mas um processo que conte com a partipação deles (BRASIL, 1999).

As principais características que pode conter um diário de bordo escolar são: detalhes sobre os fatos, processos, descobertas e indagações, os locais e datas das investigações, registros sobre todas as entrevistas realizadas, os testes e resultados obtidos, entre outras informações pertinentes.

As atividades com os alunos serão realizadas seguindo as seguintes orientações:

i) Desenhar, em seguida recortar, na cartolina ou papel A4, um quadrado de lado igual a 18 cm, conforme a Figura 3.3, em seguida calcular o seu perímetro e sua área, depois anotar na Ficha Comparações (Ver Figura 3.4). Tal ficha terá um modelo para que cada grupo possa anotar os resultados obtidos para lado, perímetro, área e os resultados das comparações;

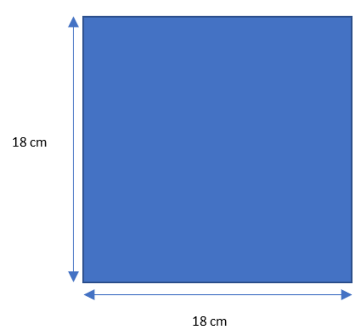


Figura 3.3: Quadrado 1

Oficina Pedagógica de Matemática				
Ficha - Comparações				
Figura	Tipo	Dimensões	Perímetro	Área
1	Quadrado	Lado = 18 cm		
2				
Vamos comparar lado, perímetro e área da *figura 2* com a *figura 1*				
3				
Vamos comparar lado, perímetro e área da *figura 3* com a *figura 1*				
4				
Vamos comparar lado, perímetro e área da *figura 4* com a *figura 1*				
5				
Vamos comparar perímetro e área da *figura 5* com a *figura 1*				
Conclusões				

Figura 3.4: Ficha Comparações

Fonte: O autor

ii) Desenhar e recortar outro quadrado de 9 cm de lado, que chamaremos de Quadrado 2, como mostra a Figura 3.5. Realizar o cálculo do perímetro e área, dessa figura, e anotar os resultados na Ficha Comparações (Figura 3.4);

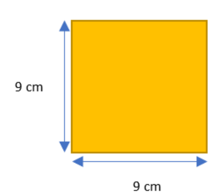


Figura 3.5: Quadrado 2

iii) Fazer comparação (ou divisão) entre os dados (lado, perímetro e área) do Quadrado 2 com o Quadrado 1, anotando os resultados na Ficha Comparações (Figura 3.6);

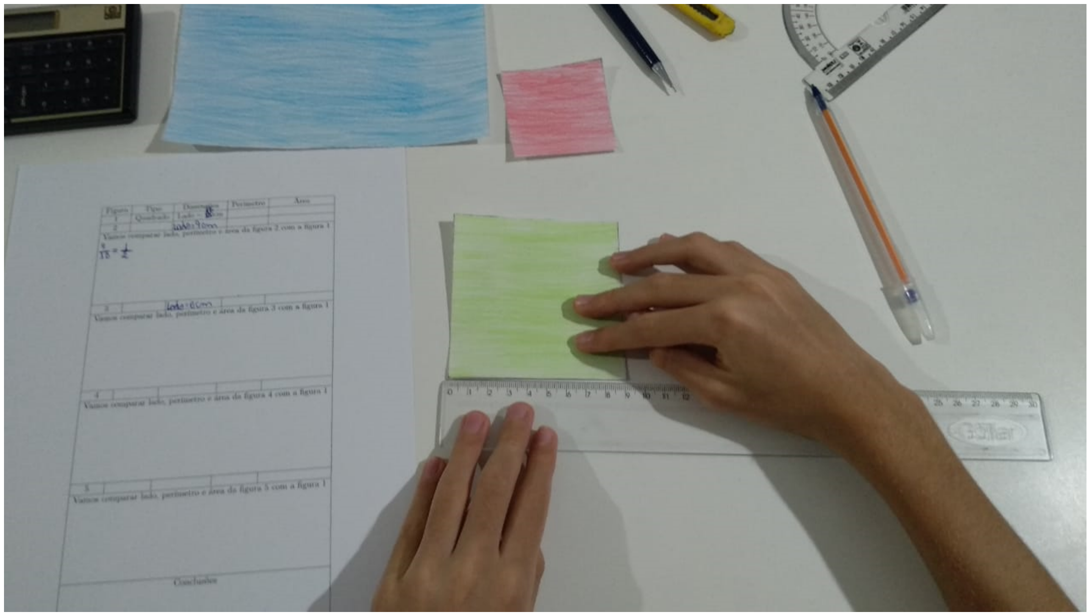


Figura 3.6: Comparando figuras

Fonte: O autor

iv) Observar se houve um "padrão" nos resultados encontrados. Neste momento, antes de seguir, é importante que o professor mediador verifique os resultados das comparações preenchidos na tabela, de cada grupo, se são parecidos ou não, conforme exemplo (Ver figura 3.7). É um momento de reflexão, os alunos precisam ter um olhar crítico sobre os seus resultados;

Oficina Pedagógica de Matemática

Ficha - Comparações

Figura	Tipo	Dimensões	Perímetro	Área
1	Quadrado	Lado = 18 cm	72 cm	324 cm²
2	Quadrado	Lado = 9 cm	36 cm	81 cm²

Vamos comparar lado, perímetro e área da *figura 2* com a *figura 1*

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2} \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{81}{324} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Figura 3.7: Exemplo da ficha preenchida

Fonte: O autor

v) Repetir as rotinas de ii) a iv) para quadrados com lados 6 cm e 3 cm, conforme ilustração (Figura 3.8), fazendo as comparações entre os Quadrados 3 e 1, bem como entre os Quadrados 4 e 1;

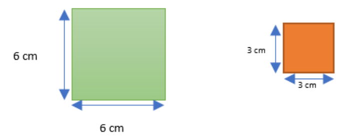


Figura 3.8: esquerda, Quadrado 3; direita, Quadrado 4

vi) Continuando, os grupos irão recortar uma nova figura, diminuindo em 9 cm e 12 cm os lados paralelos do Quadrado 1, obtendo assim um retângulo cujas dimensões são 9 cm e 6 cm (Figura 3.9). Em seguida eles irão calcular o perímetro e a área do retângulo, anotando os resultados na Ficha (Figura 3.6);

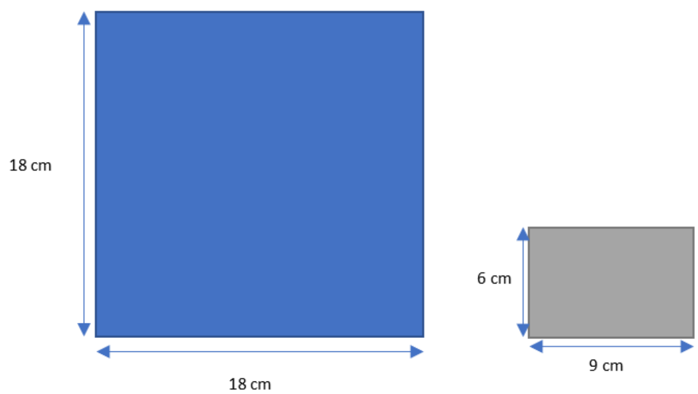


Figura 3.9: esquerda, Quadrado 1; direita, Retângulo

vii) Fazer uma comparação entre os dados do retângulo (lados, perímetro e área) com o Quadrado 1. No caso da comparação de lados, fazer comparações da seguinte forma: lado do retângulo que mede 9 cm com o lado do Quadrado 1 e em seguida lado do retângulo que mede 6 cm com o lado do Quadrado1. Verificar, se os resultados obtidos tiveram o mesmo comportamento que as comparações anteriores, isto é, se ocorre um padrão nos resultados;

viii) Esta fase será finalizada com o registro das conclusões de cada grupo em seus diários de bordo (Figura 3.10).

Visando o amadurecimento dos conceitos tratados, é recomendável que, no fechamento dessa etapa, os alunos participantes possam incluir em seus diários, situações-problema que tenham foco semelhante aos discutidos nessa fase. Esta situação deve ser descrita de forma que possa ser compreendida sem a necessidade de outras explicações. O objetivo desse encontro é fazer com que o aluno conheça e passe a fazer uso do assunto razão, mais precisamente, escala.

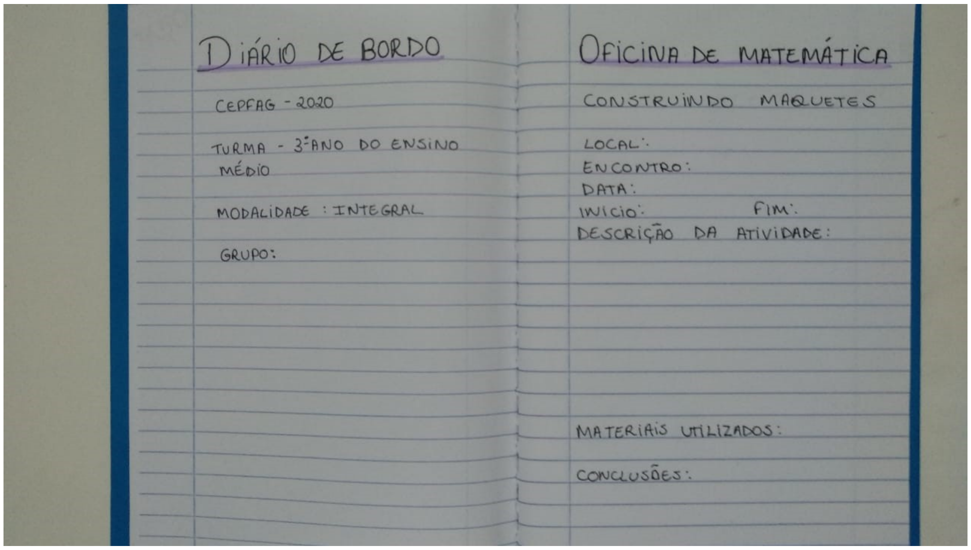


Figura 3.10: Modelo - Diário de Bordo

Fonte: O autor

3.3 Encontro 3

Nessa fase se dará a escolha dos temas de cada grupo para a construção das maquetes. Os grupos podem escolher temas já trabalhados em outras disciplinas, tais como: uma refinaria de petróleo, um bairro, uma rodoviária etc. Em seguida cada grupo começará a determinar a escala que irá utilizar para confecção de suas respectivas maquetes.

Para ajudá-los na escolha da escala, aplicaremos dois exercícios:

Exercício 1.

i) Será apresentado uma miniatura de ônibus (Figura 3.11) cujo comprimento real é de 14 m ou qualquer outra miniatura, desde que seja conhecido o tamanho real;

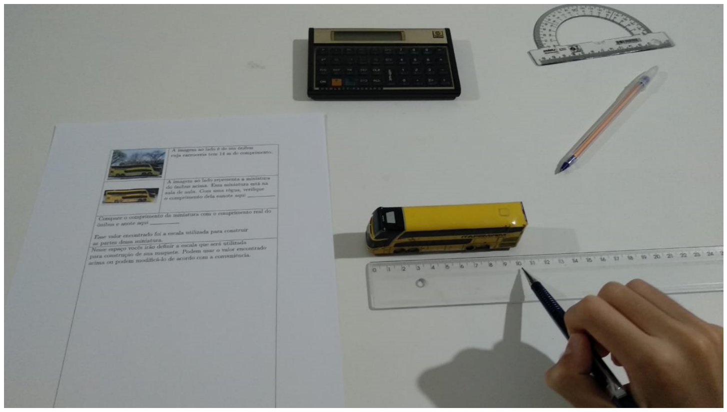
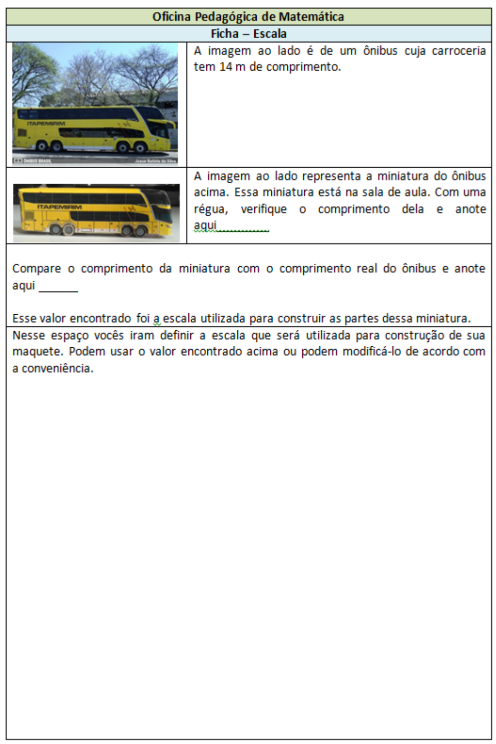


Figura 3.11: Determinando a escala da miniatura

Fonte: O autor

ii) Em seguida cada grupo irá medir o comprimento da miniatura e determinar qual escala foi utilizada, preenchendo a Ficha Escala (Figura 3.12);



Oficina Pedagógica de Matemática

Ficha – Escala

A imagem ao lado é de um ônibus cuja carroceria tem 14 m de comprimento.

A imagem ao lado representa a miniatura do ônibus acima. Essa miniatura está na sala de aula. Com uma régua, verifique o comprimento dela e anote aqui__________

Compare o comprimento da miniatura com o comprimento real do ônibus e anote aqui ______

Esse valor encontrado foi a escala utilizada para construir as partes dessa miniatura.

Nesse espaço vocês iram definir a escala que será utilizada para construção de sua maquete. Podem usar o valor encontrado acima ou podem modificá-lo de acordo com a conveniência.

Figura 3.12: Ficha Escala

Fonte: O autor

iii) Com essa escala determinada, cada grupo irá diminuir os objetos reais que estarão presentes em suas respectivas maquetes, tais como: uma casa, um prédio, uma praça, um tanque de combustível;

Com isso, eles terão uma noção do tamanho de suas maquetes, podendo diminuí-las ou aumentá-las dependendo da conveniência de cada grupo.

Exercício 2.

Usando o Google Maps. Caso a turma não tenha conhecimento ou costume de usar esse recurso, o professor pode fazer uma apresentação antes da atividade. Esta apresentação prévia deve focar na importância da escala que aparece no canto inferior direito da tela, ampliando e diminuindo a imagem, para que os alunos percebam as mudanças da escala.

Esse exercício consiste na escolha de determinado local de uma cidade, por exemplo um estádio, um hospital, aeroporto, rodoviária entre outros. Vamos utilizar como sugestão a rodoviária da cidade de Ilhéus, com escala gráfica de 20 m, ou seja, no canto inferior direito aparecerá 20 m ao lado de um segmento, conforme mostra a Figura 3.13.

Figura 3.13: Terminal Rodoviário de Ilhéus

Fonte: O autor

Vale lembrar que a Rodoviária de Ilhéus fica próximo do colégio e faz parte do cotidiano dos alunos, afinal é passagem obrigatória no deslocamento do bairro Teotônio Vilela para outras regiões da cidade, portanto essa escolha traz um elemento de contextualização para eles.

Com esse *zoom* dá pra perceber que a cobertura da rodoviária tem uma forma retangular. Com isso serão colocadas as seguintes questões:

i) Usando a escala descrita acima (canto inferior direito da tela), determine as dimensões reais da cobertura em metros.

   Observação: O professor pode imprimir a tela, no caso da impossibilidade de usar o recurso na oficina (ver Figura 3.14).

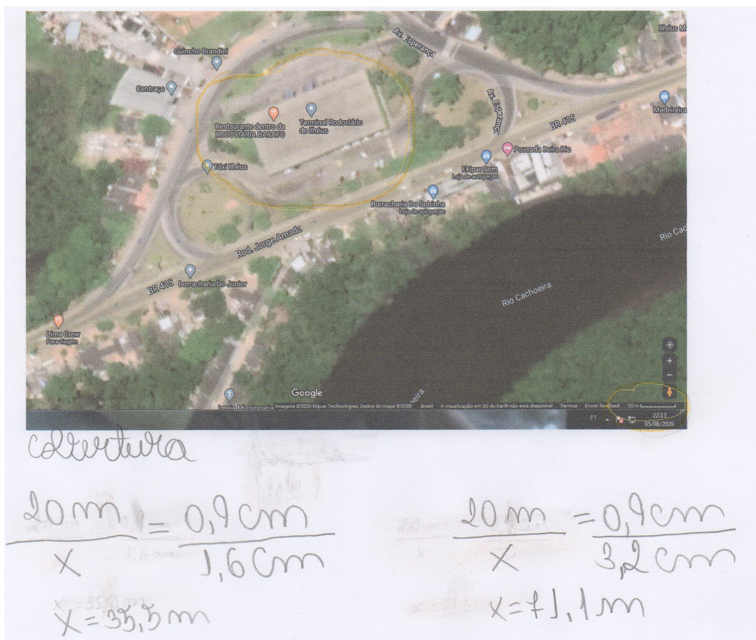


Figura 3.14: Captura de tela

Fonte: O autor

ii) Com quantos centímetros ficarão as dimensões da cobertura utilizando a escala encontrada no item i) do primeiro exercício?

iii) Considere, que será construída uma maquete dessa rodoviária, envolvendo a cobertura e todo o seu entorno, isto é, estacionamentos, vias laterais e pátio dos ônibus. Coloque todo esse entorno numa figura quadrangular, considerando as dimensões da tela, em seguida verifique se é possível construir a maquete sobre um pedaço de compensado, de forma retangular, cujas dimenções são 92 cm por 63 cm.

Provavelmente a escolha da escala se dará com muito debate entre os grupos e o professor mediador. Esse debate é muito importante para dar seguimento aos trabalhos, pois é melhor mudar a escala nessa fase do que com a maquete em fase de construção, evitariamos com isso o desperdício de material. Vale lembrar que a conclusão dessa etapa se dará com o preenchimento do diário de bordo.

3.4 Encontros 4 e 5

Já com a escala definida, os grupos começarão a confecção dos elementos de suas respectivas maquetes. Nesse momento cada grupo vai realizar, espontaneamente, operações envolvendo proporção bem como conversão de unidades de medidas. O material utilizado será proveniente, de preferência, de coisas usadas, tais como: palito de fósforo, picolé e churrasquinho, arame, cola, papelão, mdf, caixas, estilete, espuma, pó de serra, capa de caderno usado, pasta plástica etc.

Dependendo do tema e escala escolhidos, os grupos terão bastante trabalho, nessa fase, portanto, é importante que o trabalho em equipe seja produtivo. Após cada encontro os grupos farão o preenchimento do diário de bordo.

É importante que essa fase dure, no máximo, em 4 horas/aula, ou seja, em dois encontros.

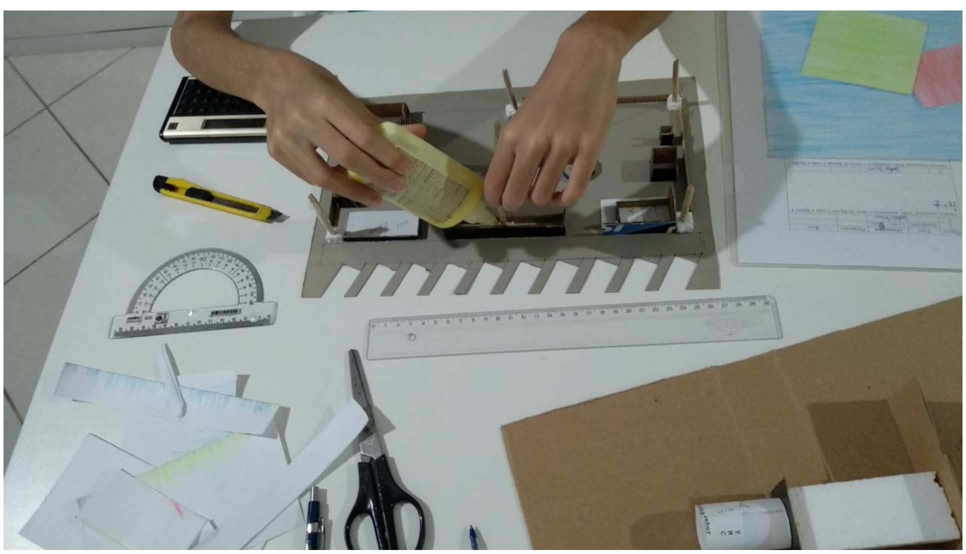


Figura 3.15: Confecção da maquete

Fonte: O autor

3.5 Encontro 6

Estando com as maquetes prontas, daremos seguimento aos trabalhos com um novo desafio. Primeiro, cada grupo deve identificar em suas respectivas maquetes figuras geométricas planas e/ou espaciais (Figura 3.16), anotando numa folha o nome da maquete e das figuras encontradas. Em seguida, fazer um rodízio que proporcione que cada grupo possa fazer o mesmo nas diferentes maquetes, sempre anotando o nome das figuras observadas e da maquete. Ao final, teremos anotações de cada grupo para cada maquete, isto oferece diferentes visões para cada trabalho, diminuindo a possibilidade da não observância de uma figura geométrica.

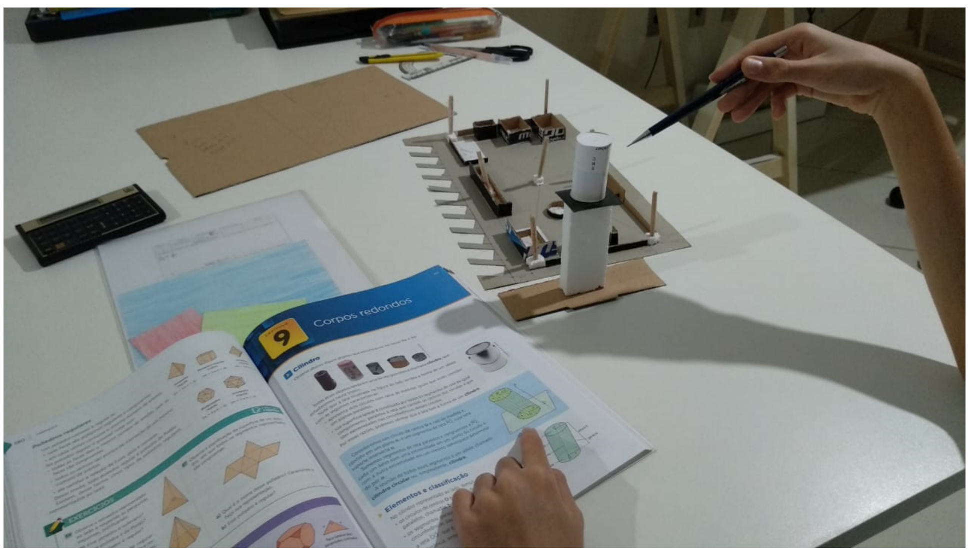


Figura 3.16: Figura geométrica na maquete

Fonte: O autor

Esta fase da oficina tem como objetivo a identicação das formas que os alunos encontrarão em suas construções. Afinal, as inúmeras obras de engenharia, arquitetura, artes plásticas etc., mostram a imensa quantidade de formas que podem ser relacionadas com figuras estudadas na Geometria. Sem contar que muitas formas encontradas no cotidiano, que provavelmente estarão representadss em algumas dessas maquetes, lembram sólidos geométricos. No diário de bordo, cada grupo vai anotar os detalhes desse encontro.

3.6 Encontro 7

Nesta fase, deve ser solicitado aos grupos que procurem identificar e descrever um problema ou uma situação-problema de aplicação de geometria, plana ou espacial. Mais precisamente, com as figuras geométricas já identificadas, cada equipe vai criar situações-problema envolvendo cálculo de área e volume que permitam projetar conclusões para realidade.

A seguir, sugerimos algumas situações que podem ocorrer nas maquetes construídas. Caso as sugestões abaixo não se identifiquem com a maquete, pelo menos servirão como base para que cada grupo pense numa situação-problema inédita.

- Vamos imaginar uma maquete que representa uma parte de um bairro, contemplando em sua construção uma praça e algumas edificações ao redor. Nesta maquete está uma praça cujo formato é um retângulo de comprimento 10 cm e largura 4 cm e dois semicírculos com diâmetro coincidindo com o lado menor do retângulo. Em torno da praça tem uma calçada de 0,5 cm de largura. Sabendo que 1 placa de grama (quadrado com 0,5 m de lado) custa $R\$20,00$, faça uma estimativa do custo para colocar grama nessa parte da praça no tamanho real. Lembrando que a escala utilizada será a que o grupo propôs para construção da maquete.

- Maquete que representa uma garagem de ônibus e contempla a parte de abastecimento de combustível com um reservatório cilíndrico, cujas dimensões são 10 cm de comprimento e 3 cm de diâmetro. Com a escala determinada pelo grupo para construção da maquete é possível determinar a capacidade real do reservatório. Supondo que o consumo diário nessa garagem seja de 20.000 litros/dia, esse reservatório é suficiente para abastecer os veículos durante uma semana?

O objetivo desta fase é fazer uso da miniatura para simular uma situação real em suas devidas proporções. Nas anotações, no diário de bordo, o grupo deve anexar as situações-problema bem como as sugestões de resolução.

3.7 Encontro 8

Cada equipe vai apresentar seus trabalhos em stands para a comunidade escolar. No final das atividades, os alunos serão submetidos a um pós-teste, cujas questões seguem um modelo (Figura 3.17) semelhante ao teste inicial.

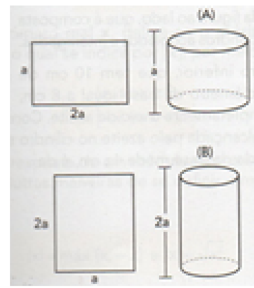
Colégio Estadual Professor Fabio Araripe Goulart

Teste diagnóstico aplicado em ___ / ___ / ____, na turma do 3º ano Integral (*Pós-Teste*)

Aluno(a): ____

1) Ao montar uma maquete, Gláucia decidiu utilizar a escala 1:75. Na maquete, qual será o comprimento de um muro que, na realidade, tem 12 metros de comprimento?
   a) 24 cm c) 18 cm e) 15 cm
   b) 20 cm d) 16 cm

2) Certa empresa fabrica latas cilíndricas de dois tipos, A e B. As superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados a e 2ª, em centímetros, soldando lados opostos dessas chapas. Observe a ilustração ao lado.
   Se V_A e V_B indicam os volumes das latas dos tipos A e B, respectivamente, tem-se:
   a) $V_B = 2\ V_A$
   b) $V_B = 4\ V_A$
   c) $V_A = 4\ V_B$
   d) $V_A = 2\ V_B$
   e) $V_A = V_B$



3) A altura da maquete de um edifício é 80 cm. Qual a altura real do prédio, sabendo que a maquete foi construída na escala 1:40?
   a) 500 m c) 200 m e) 32 m
   b) 320 m d) 50 m

4) Um retângulo tem 15 cm de comprimento por 8 cm de largura. Vamos aumentar as medidas dos lados desse retângulo em 50%. Qual é a razão entre a área do novo retângulo e a área do retângulo inicial?
   a) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{2}{9}$ e) 4
   b) $\frac{9}{4}$ d) $\frac{9}{2}$

Figura 3.17: Algumas questões do Pós-teste

Sugestão de atividades que podem ser inseridas no decorrer da oficina para revisar os aspectos matemáticos:

1. No Encontro 3, pedir para os participantes relacionarem em uma tabela lados e seus respectivos perímetros dos Quadrados 1, 2, 3 e 4. Em seguida, determinar a razão entre o perímetro e o lado de cada quadrado. Depois marcar os pontos no plano cartesiano, usando lado no eixo x e perímetro no eixo y (Figura 3.18).

   Assim, os participantes podem perceber a proporcionalidade e a função liear.

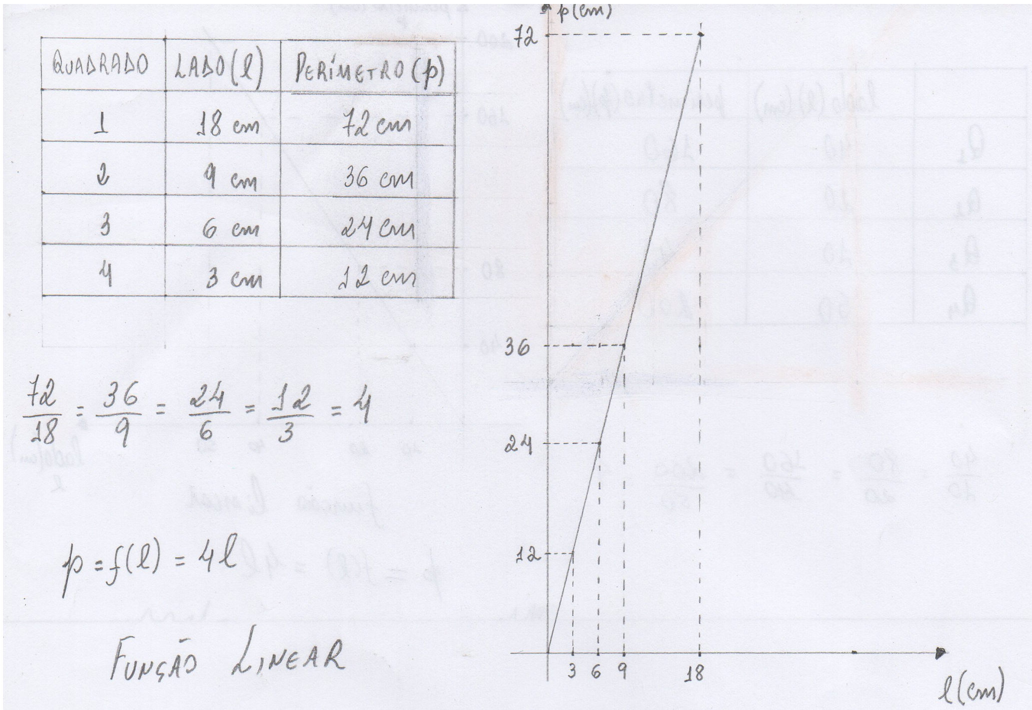


Figura 3.18: Proporcionalidade - Função linear

Fonte: O autor

2. No Encontro 7, desenhar dois sólidos semelhantes (tamanhos diferentes), e em seguida determinar a razão entre suas medidas lineares, de área e de volume (Figura 3.19)

   No exemplo da Figura 3.19 , usamos um cilindro, onde os participantes perceberão as razões de semelhança para medidas lineares, de área e de volume.

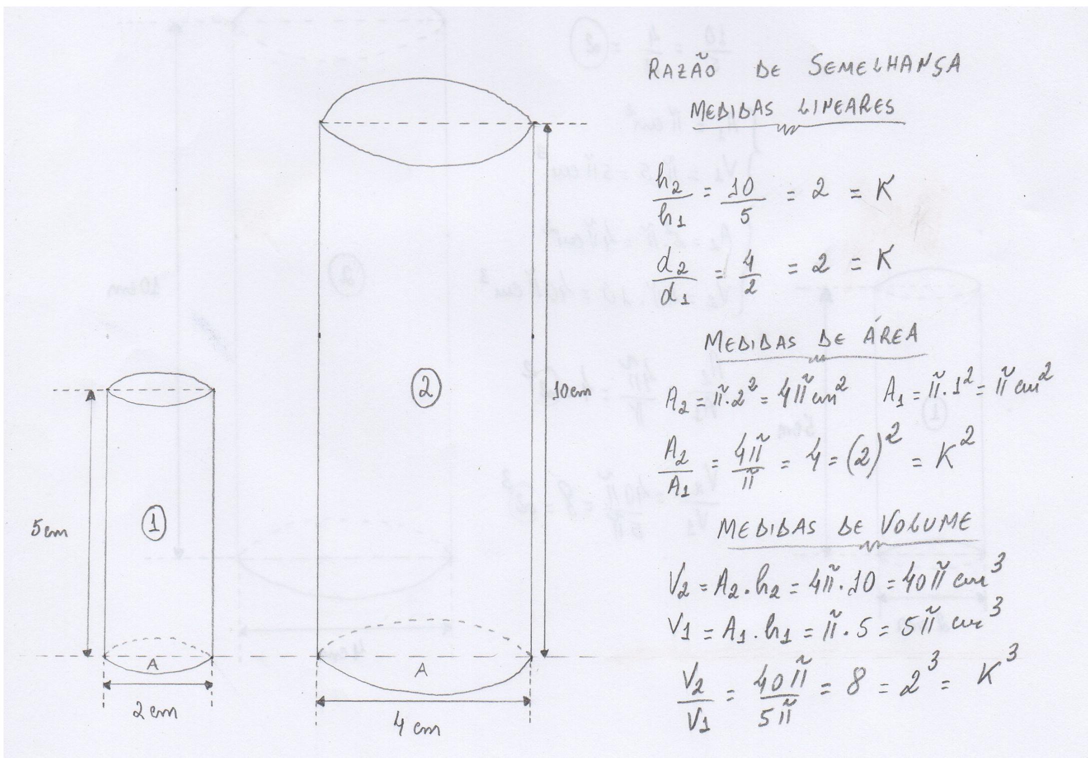


Figura 3.19: Razão de semelhança

Fonte: O autor

Capítulo 4

Proposta Alternativa

Neste capítulo sugerimos ao professor uma oficina alternativa com menos encontros do que a proposta original (Capítulo 3). Onde os aspectos matemáticos (Sistema métrico decimal, Proporcionalidade e Geometria) aparecerão no decorrer de sua aplicação. Neste caso não aplicaremos os testes, no início e no final dos encontros, trabalharemos com tema, escala e situação-problema previamente definidos.

Maquete de um Terminal Rodoviário

Objetivos:

1. Estimular o aluno a trabalhar em equipe;
2. Entender como se dá a aplicação de escala em situações práticas;
3. Proporcionar a conversão de unidades de medidas;
4. Facultar uma visão geométrica no gerenciamento de espaços;
5. Apresentar ao aluno uma aplicação de proporcionalidade;
6. Aplicar os conhecimentos de área e volume;
7. Mostrar ao aluno o modelo que usa experimentação em matemática;
8. Estimular a importância da testagem para chegar no melhor resultado;
9. Promover ao aluno a ideia de aproveitamento de materiais usados, tais como, caixas de papelão, palitos de madeira, isopor, etc.

10. Fazer com que o aluno resolva um problema de natureza matemática que exija o método da experimentação.

Divisão dos Grupos:

1. Cada grupo deve conter 4 (quatro) alunos;
2. Na ocorrência de divisão não exata dos grupos, existirão grupos com quantidades menores que 4 integrantes. Por exemplo, pode haver um, dois ou três grupos com 3 (três) alunos.

Lista de materiais:

1. 1 folha contendo a atividade da oficina, tais como, escala que será utilizada, medidas do tamanho real das seções que compõe o Terminal Rodoviário e dois exercícios (Figura 4.1);
2. 1 folha com uma tabela para anotar as medidas do tamanho real e suas respectivas conversões para o tamanho da maquete (Figura 4.2);
3. Lápis, borracha e calculadora para que os alunos de cada grupo preencham a tabela de conversões;
4. Cola, tesoura, estilete, régua, fita adesiva, compasso e caneta para auxiliar na construção da maquete;
5. Papelão (aproveitar caixa de embalagens); palitos roliços de madeira (palitos de dente); isopor (aproveitar aqueles de embalagens). Esses materiais comporão toda a estrutura da maquete;

Atividades:

1º Encontro:

1. Cada grupo deve ler a folha de atividade (Figura 4.1);
2. Preencher a tabela de conversões (Figura 4.2);
3. Entre os alunos do grupo deve haver uma discussão nas conversões e cálculos de área;

4. Conferir se o total das áreas das seções cabem na área a ser construída;

5. Reduzir as dimensões, do Terminal no tamanho real, usando a escala proposta;

ATIVIDADE

Construa uma maquete de um Terminal Rodoviário, na escala 1:144, com as seguintes características:

Área total sobre uma superfície retangular com dimensões de 46,1 *m* por 31 *m*.

A frente e a região das plataformas ficam no lado maior da superfície retangular, enquanto que as laterais ficam no lado menor. Os recuos de cada lado dessa superfície são:

7,2 m para a região das plataformas, sendo destinados 4,3 m para plataformas e 2,9 m para circulação de passageiros. Essa região contém 10 plataformas com 2,8 *m* de largura cada e distantes uma das outras de 1,3 *m*. A frente do terminal tem um recuo de 3,6 *m* e suas laterais com 2,2 *m* de recuo cada.

Seções internas:

Superfícies retangulares

10 guichês de 1,5 *m* por 2,5 *m* cada;
1 sala da administração com 1,5 *m* por 1,6 *m*;
1 guarda volumes com 2,5 *m* por 3,7 *m*;
1 lavanderia com 3 *m* por 3,1 *m*;
Banheiros femininos de 6 *m* por 4,4 *m*;
Banheiros masculinos de 6,5 *m* por 4,5 *m*;
2 lanchonetes com 8 *m* por 5 *m* cada;
1 sala de espera com 4,5 *m* por 9,5 *m*;
1 cobertura com 54,7 *m* por 31,7 *m*.

Superfície circular

1 balcão, coroa circular, de raios 2 *m* e 1,5 *m*;

As **paredes** das seções tem 2,5 *m* de altura, **balcões** e **cercados** com 1,5 *m*.

Cada seção com as seguintes configurações:

Banheiros, guarda volumes, lavanderia e sala da administração com 4 paredes;
Sala de espera com 2 cercados em L;
Guichês com 3 paredes e a frente balcão;
Lanchonetes com 2 paredes em L e 2 balcões em L.

7 Suportes de sustentação da cobertura com 8 *m* cada.

Exercícios propostos:

1) Suponha que o Terminal Rodoviário tem um reservatório de água, de forma cilíndrica, cuja capacidade é de 100 000 litros, suspensa a 13 *m* do solo. Construa na maquete esse reservatório.

2) Considere que o Terminal Rodoviário possui um sistema de aproveitamento da água de chuva que cai sobre a sua cobertura. Quando se diz que, numa região, caiu uma chuva com precipitação de 10 *mm* de água, isso significa que cada metro quadrado dessa região recebeu 10 *litros* de água da chuva. Com isso, determine quantos litros de água, esse terminal, poderá aproveitar numa chuva de 70 *mm*?

Figura 4.1: Atividade - Terminal Rodoviário

Fonte: O autor

TABELA DE CONVERSÕES

Escala 1:144

	Tamanho Real			Maquete		
	Dimensões (m)		Área (m²)	Dimensões (cm)		Área (cm²)
Área construída	46,1	31,0		32,0	21,5	689,2
Recuos						
Região das plataformas	7,2					
Frente	3,6					
Laterais	2,2					
Seções						
Guichê	1,5	2,5		1,0	1,7	1,8
Sala adm	1,5	1,6				
Guarda Volumes	2,5	3,7		1,7	2,6	4,5
Lavanderia	3,0	3,1		2,1	2,2	4,5
Banheiro Feminino	6,0	4,4		4,2	3,1	12,7
Banheiro Masculino	6,5	4,5		4,5	3,1	14,1
Lanchonetes	8,0	5,0		5,6	3,5	19,3
Cobertura	54,7	31,7		38,0	22,0	836,2
Sala de Espera	4,5	9,5		3,1	6,6	20,6
Balcão Circular	2,0	1,5		1,4	1,0	2,6
Altura das paredes	2,5					
Balcões e cercados	1,5					
Suporte da cobertura	8,0					

Reservatório Cilíndrico						
	Raio	Altura	Volume (m³)	Raio	Altura	Volume (cm³)
Configuração 1			100,0	1,5	5,0	33,5
Configuração 2			100,0			
Configuração 3			100,0			
Configuração 4			100,0			
Configuração 5			100,0			

Figura 4.2: Tabela de conversões - Terminal Rodoviário

Fonte: O autor

2º Encontro:

1. Cada grupo deve desenhar todas as seções, presentes no Terminal Rodoviário, numa folha de papel A4 e depois recortá-las; (Figura 4.3)

2. Marcar no papelão, que representa a área construída, os recuos laterais, da frente e da parte onde serão as plataformas; (Figura 4.4)

3. Definir o lay out ideal, ou seja, a melhor arrumação das seções na região limitada pelos recuos (Figura 4.5).

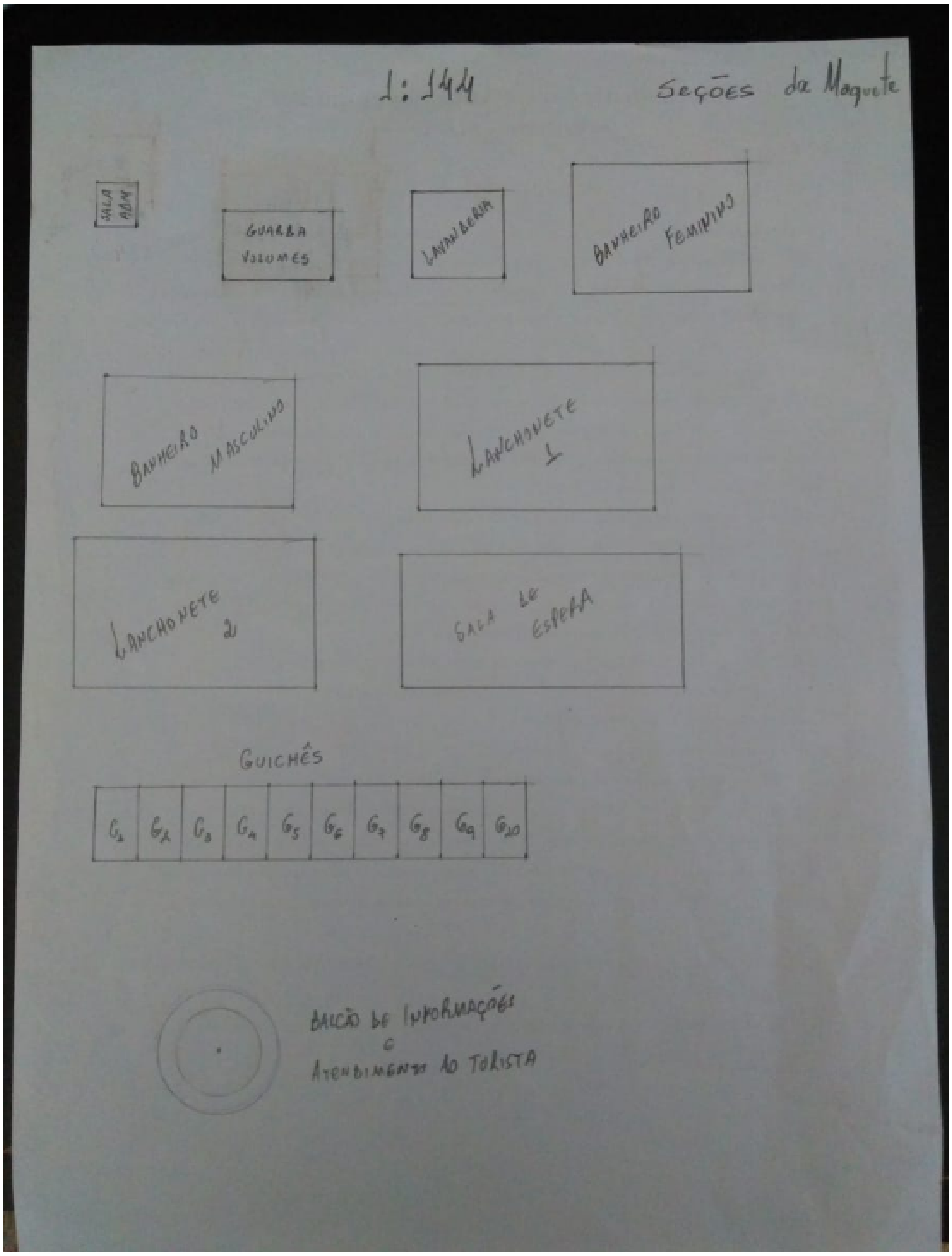


Figura 4.3: Folha A4 - Seções

Fonte: O autor

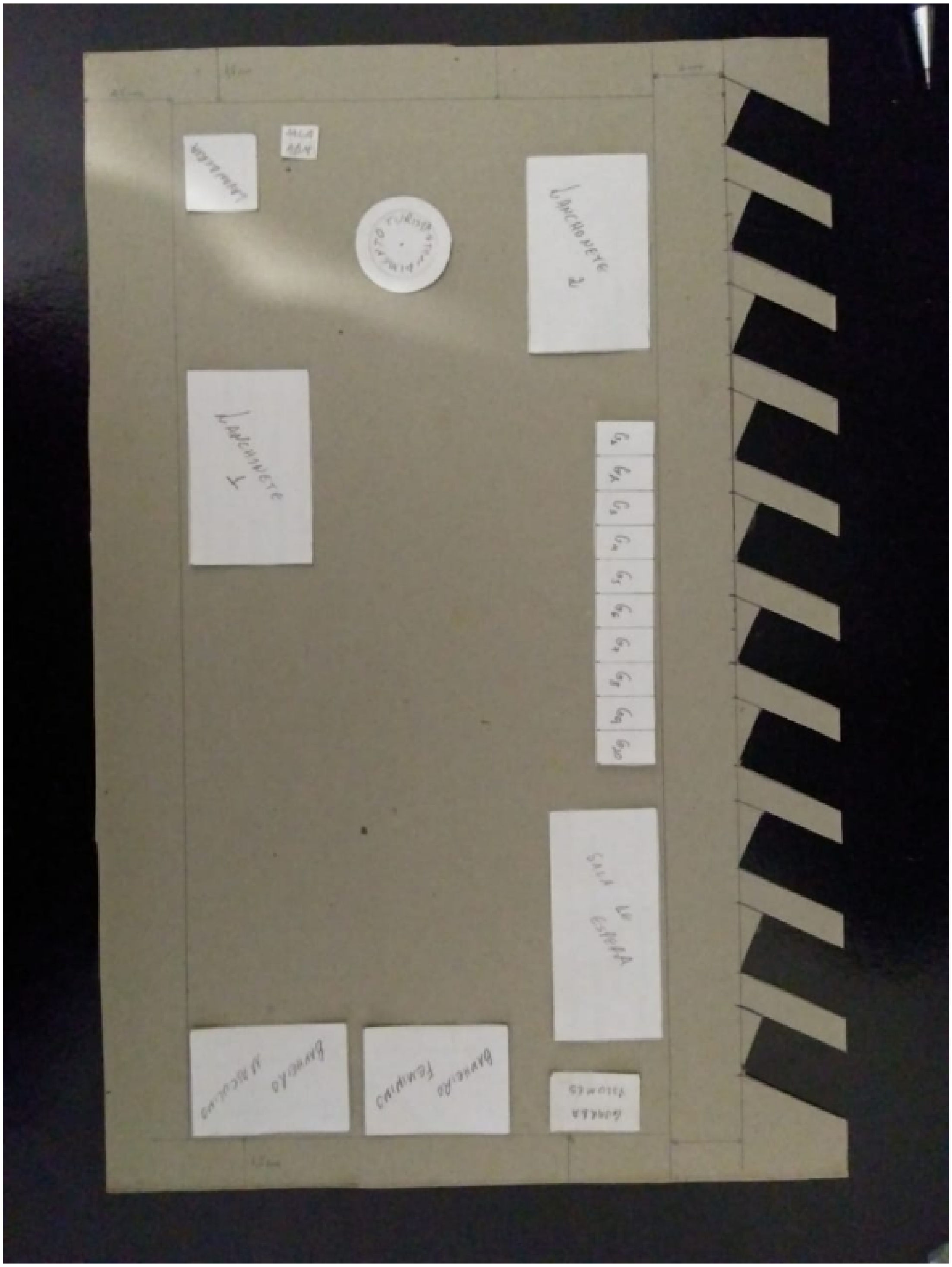


Figura 4.4: Plataformas, recuos e seções da maquete

Fonte: O autor

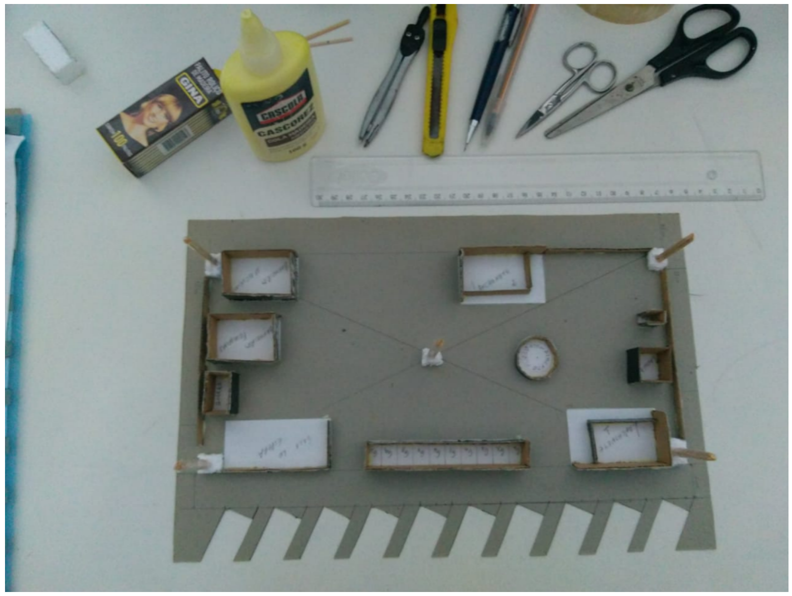


Figura 4.5: Layout da maquete

Fonte: O autor

3º Encontro:

1. Cada grupo pode alterar as seções desde que não altere a sua área, isto é, pode alterar, por exemplo, o retângulo que representa a superfície do banheiro masculino, bastando fixar um lado e alterar o outro de modo que sua área permaneça a mesma.

2. Recortar, usando o papelão, a cobertura, os balcões e os cercados;

3. Construir os suportes da cobertura, usando palitos e isopor na base;

4. Colar as seções, suportes, balcões e cercados conforme lay out definido pelo respectivo grupo (Figura 4.5).

4º Encontro:

1. Simular medidas lineares (altura e raio da base) do cilindro, usando a tabela de conversões (Figura 4.2), para obter uma capacidade igual a proposta;

2. Fazer as conversões necessárias, para construir o reservatório da maquete;

3. Construir o suporte do reservatório, atentando para a sua altura real (ver Figura 4.6);

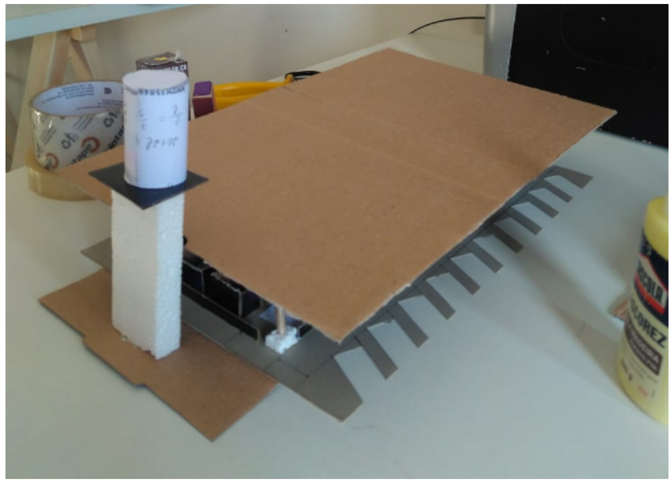


Figura 4.6: Reservatório cilíndrico na maquete

Fonte: O autor

4. Informar as dimensões do reservatório na maquete.

Ações:

1º Encontro:

1. Converter unidades de medidas;

2. Introduzir o conceito de razão e proporção;

3. Aplicar o Princípio Fundamental da Proporção.

2º Encontro:

1. Construir retângulos, circulos e coroa circular;

2. Associar alguns postulados de áreas na escollha do layout.

3º Encontro:

1. Aplicar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade;

2. Rever algumas aplicações da regra de três.

4º Encontro:

1. Definir volume;

2. Relacionar medidas de volume com medidas de capacidade;

3. Calcular volume do cilindro.

Algumas Orientações:

1º Encontro:

1. Entregar a folha de atividade (Figura 4.1) para cada grupo e orientar a leitura;

2. Em seguida, cada grupo deve receber a folha de conversões (Figura 4.2) para serem anotadas as conversões e cálculos de áreas e volumes;

3. No preenchimento da folha de conversões, é perfeitamente normal as discussões e a quantidade de dúvidas que ocorrerão, criando assim uma oportunidade ideal para que o professor faça algumas intervenções no papel de mediador;

2º Encontro:

1. Entregar, no máximo, duas folhas de papel A4, em branco, para que cada grupo desenhe as seções do terminal;

2. Verificar, em cada grupo, a marcação dos recuos no papelão, que representará a área total do terminal rodoviário;

3. Incentivar e orientar, cada grupo, na escolha do melhor layout interno do terminal;

3º Encontro:

1. Caso algum grupo não consiga definir um layout, devido discordancias internas, orientar uma mudança na forma de algumas seções, desde que não se altere suas áreas;

2. Discutir como pode ser feita uma alteração numa região retangular sem que se altere sua área, por exemplo. Nesse momento, apresentar o Teorema Fundamental da Proporcionalidade;

4º Encontro:

1. Sugerir algumas medições de altura e diâmetro, para que, cada grupo, encontre o volume ideal do sólido;

2. Incentivar que cada grupo, encontre dois cilindros de medidas diferentes com mesma capacidade;

3. Orientar a visualização das áreas laterais através da planificação.

Essa sugestão de oficina difere da proposta (Capítulo 3) no número de encontros, pois não há algumas etapas que são previstas na original, tais como: aplicação de pré-teste e pós-teste, definição da escala, escolha do tema, isto é, maquete a ser construída, bem como apresentação dos trabalhos finais. Mas trabalha com os mesmos conteúdos matemáticos que a proposta original.

Figura 4.7: Maquete do Terminal Rodoviário

Fonte: O autor

Capítulo 5

Considerações Finais

A realização de todas as etapas dessa proposta, na construção de maquetes, exigirá "mãos na massa", o que acreditamos ser uma condição necessária para melhorar a aprendizagem, valorizar o trabalho em grupo e consientizar quanto ao aproveitamento de materiais recicláveis.

O primeiro encontro tem como principal objetivo testar os alunos, por meio de uma avaliação diagnóstica, sobre os temas matemáticos que estarão presentes em cada etapa da oficina. O resultado do teste não é fator determinante para aplicação da oficina, apenas servirá para comparar com o resultado do teste aplicado no último encontro, com o intuito de verificar qual a influência do trabalho aplicado na aprendizagem dos temas abordados.

Na aplicação do 2º encontro, onde os alunos comparam medidas lineares e de área entre figuras semelhantes, vislumbra-se o caráter matemático quanto a percepção dos alunos no significado de razão, bem como perceber a razão de semelhança entre tais medidas.

No 3º encontro, etapa em que os grupos vão definir suas respectivas escalas, atavés da resolução de dois exercícios objetivando uma escolha com mais propriedade, estes terão a oportunidade de estudar a proporcionalidade e perceber a função linear quando comparados lados e perímetros dos quadrados semelhantes.

Já no 4º e 5º encontros, onde ocorre a confecção propriamente dita, os participantes utilizarão das conversões de medidas e proporção no ato de redução dos tamanhos que será exigida em cada detalhe, para uma perfeita construção de maquete.

No 6º encontro, caracterizada pela observância de figuras geométricas, os alunos terão a oportunidade de verificar algumas formas presentes no livro didático de Matemática, na parte de Geometria, que estarão, em algumas situações, presentes também nas maquetes.

Nessa etapa, estará ocorrendo uma revisão em um item da geometria que é relacionar um objeto do cotidiano com um sólido geométrico, recorrente em questões de exames que fazem parte da realidade dos alunos.

O objetivo do 7º encontro é fazer com que cada grupo crie uma situação problema envolvendo o tema da sua maquete, assim será oportunizado aos alunos uma forma criativa de utilizar a construção para solucionar um evento real. Com isso, eles poderão revisar Geometria e Razões de semelhança tanto para medidas lineares e de áreas quanto para medidas de volumes.

No último encontro, ocorrerá a aplicação de outro teste diagnóstico, cujo resultado será confrontado com o resultado do primeiro teste. Essa comparação nos dirá se a aplicação da oficina teve efeito no aprendizado dos assuntos proposto no estudo.

Acreditamos que a proposta, objeto deste trabalho, venha a contribuir na melhoria da qualidade da educação em duas direções, a saber: a de fundamentar e ampliar conceitos básicos da Matemática, e a de sugerir e discutir sobre práticas nas escolas de Ensino Médio.

Com a aplicação da oficina proposta nesta dissertação, acreditamos também que os alunos vivenciarão processos de aprendizagem ativa, em atividades que surgirão de desafios, situações-problemas e construções de onde extrairão sentido e significado de conceitos em contextos diversos de conteúdos e de desenvolvimento e habilidades.

Os temas abordados na oficina foram escolhidos dentre aqueles propostos na disciplina Matemática para o Ensino Médio e que são importantes âncoras para a aprendizagem. Em geral, os estudantes apresentam defasagens ou lacunas nestes temas, o que provoca desestímulo pelo estudo, quando as dificuldades a superar exigem a retomada de conteúdos de nível básico da disciplina.

Com professores sentindo-se desafiados a introduzir os conceitos a partir de situações planejadas para serem realizadas com a participação ativa dos estudantes, pensamos que a realização continuada da oficina na escola possa gerar um ambiente favorável para a aprendizagem de Matemática que, com o passar do tempo, possa se irradiar para as outras disciplinas.

A aplicação da atividade proposta, contribuirá para a qualificação dos professores do Ensino Médio envolvidos, a fim de que aprimorem a sua condição na organização de situações de aprendizagem ativa. Afinal, aprender é tarefa e possibilidade de quem aprende, e o professor tem, na sua função de ensinar, o papel imprescindível de promover condições para que a aprendizagem se efetive.

A proposta promove a interação da Matemática com a realidade e visa contribuir para superar a fragmentação do ensino. Também acreditamos que aponta para a formação integral dos alunos, a fim de que possam exercer criticamente a cidadania, mediante uma visão global de mundo e com capacidade de enfrentar problemas complexos da realidade atual. Por fim, esperamos que, a partir da experiência vivenciada, com ênfase nas reflexões e ideias discutidas, os alunos participantes dessa atividade possam reorganizar e motivar seus estudos.

Em se confirmando uma melhora dos alunos acerca dos temas de proporcionalidade e geometria, após a aplicação dessa proposta, propiciaremos um olhar especial para outras atividades desse tipo, ou seja, uma oficina, não apenas de matemática e sim de outras áreas também. Num cenário, onde não ocorra uma efetiva melhora dos alunos nos temas abordados da oficina, devemos nos lembrar que a presente proposta tem como escopo promover o envolvimento da turma, contextualizar o assunto abordado com atividades práticas e acompanhar a evolução da turma no trato dos conteúdos ofertados também. Portanto, é importante que haja uma continuidade na aplicação da ideia no CEPFAG, isto é, de dinâmicas desse tipo de modo que faça parte do seu planejamento estratégico.

Vale evocar que a oficina de matemática, como está sendo proposta aqui, pode ter seus desdobramentos em outras atividades, tais como: modelos de residências inteligentes com aproveitamento de luz natural e água de chuva; modelos de captação da água de chuva nas vias públicas, o que é um problema crônico no bairro Teotônio Vilela; uma proposta de área de lazer, que consiste em uma carência deste bairro e etc. Assim poderemos trabalhar com construções de maquetes, aprender matemática, fazer uso da interdisciplinaridade e mostrar alternativas para a comunidade em que vivem os nossos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] ANASTASIOU, L. G. C; ALVES, L. P. **Estratégias de ensinagem**. *Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*, v.3, p.67-100, 2004.

[2] ANTAR NETO, A. et al. **Geometria**: 2º grau. 1ª edição. São Paulo: Ed. Moderna, 1982. (Noções de Matemática; v. 5)

[3] BERLINGHOFF, W.P; GOUVÊA, F. **A matemática através dos tempos**: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Edição ampliada. São Paulo: Edgard Blücher,2008.

[4] BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1999.

[5] BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília: MEC/SEF, 2018.

[6] DA SILVA, D. P. **Regra de três**: prática escolar de modelagem matemática. 2011. 85 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2011.

[7] DE ANDRADE, M. L. F; MASSABINI, V. G. **O desenvolvimento de atividades práticas na escola**: *um desafio para os professores de ciências.* Ciência & Educação, v.17, n.4, p.835-854, 2011.

[8] DE MACEDO, E. L. **Proporcionalidade à luz da Teoria dos Campos Conceituais**: uma sequência de ensino diferenciada para estudantes da EJA. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2012.

[9] DE SOUZA, L.F.N.I. **Estratégias de aprendizagem e fatores motivacionais relacionados**. Educar em Revista,n.36, p.95-107, 2010.

[10] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar, 10**: Geometria espacial, posião e métrica. 6ª edição. São Paulo: Atual, 2005.

[11] FREIRE, P. **Professora sim, tia não**. 9ª ed. São Paulo, SP: Olho d' Àgua, 1998.

[12] GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CASTRUCCI, B. **A conquista da matemática**, 6º ano. 1ª edição. São Paulo: FTD, 2009.

[13] GIOVANNI, J.R. et al. **360º matemática fundamental**: uma nova abordagem, volume único. 2ª ed. São Paulo: FTD, 2015.

[14] INEP. Portal Inep. Disponível em <http:\\www.inep.com.br>. Acesso em: 20 de março de 2020.

[15] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio** - Volumes 1. 11ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[16] LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio -** Volumes 2. 7ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

[17] LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[18] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[19] LUZ, A.M.R.; ÁLVARES B.A.; GUIMARÃES C.C. **Física**: contexto & aplicações, Vol 1. 2ª edição. São Paulo: Scipione, 2016.

[20] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 1ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[21] OTAVIANO, A. B. N; ALENCAR, E. M. L. S; FUKUDA, C.C. **Estimulo à criatividade por professores de Matemática e motivação do aluno** Psicol. Esc. Educ., v.16, n.1, p.61-69, 2012.

[22] PINTO, K. P.. **Docência e fundamentos da educação -** Pedagogia: Psicologia e Educação I - EAD, módulo 3, volume 4. Ilhéus: UAB; UESC, 2011.

[23] PONTES, M. G. O. **Medidas e Proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**. 1996. 223 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Campinas, Campinas, 1996.

[24] STACCIARINI, J. M. R; ESPERIDIÃO, E. **Repensando estratégias de ensino no processo de aprendizagem**. Rev.latinoam.enfermagem, Ribeirão Preto, v.7, n.5, p.59-66, dezembro 1999.

[25] SOUZA, Valdeci Alexandre de. **Oficinas pedagógicas como estratégia de ensino**: Uma visão dos futuros professores de ciências naturais. Trabalho de conclusão de curso de licenciatura em ciências naturais. Planaltina, DF: UnB, 2016. 35f.

[26] VIEIRA, E; VOLQUIND, L. **Oficinas de ensino**. O quê? Por quê? Como. 4ª Ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2002.