UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS - DCET
COLEGIADO DO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

ÍVIA NEVES VIEIRA

APLICANDO IDEIAS DE PÓLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA DA OBMEP PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Ilhéus-Ba
2020

ÍVIA NEVES VIEIRA

APLICANDO IDEIAS DE PÓLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA DA OBMEP PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação submetida ao Colegiado do PROFMAT da Universidade Estadual de Santa Cruz, com objetivo de obter título de mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello

Ilhéus-Bahia
2020

V658 Vieira, Ívia Neves.
Aplicando ideias de Pólya na resolução de problemas de geometria da OBMEP para o ensino fundamental / Ívia Neves Vieira . – Ilhéus, BA: UESC, 2020.
60 f. : il.

Orientadora: Mirela Vanina de Mello.
Dissertação (mestrado) –Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Referências bibliográficas: f. 59-60.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Geometria – Problemas, questões, exercícios. 3. Ensino – Meios auxiliares. 4. Material didático. I. Título.

CDD 516

ÍVIA NEVES VIEIRA

APLICANDO IDEIAS DE PÓLYA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA DA OBMEP PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para a obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho Aprovado. Ilhéus, 10 de setembro de 2020:

Profa. Dra. Mirela Vanina de Mello, UESC
Orientadora

Profa. Ma. Larissa Brito de Oliveira, UESC

Profa. Dra. Vanessa Gonçalves Paschoa Ferraz, Unifesp - São José dos Campos

"Instrua o homem sábio, e ele será ainda mais sábio; ensine o homem justo, e ele aumentará o seu saber."Provérbios 9.9

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer ao Senhor Jesus. A Ele, a honra, a glória e louvor. Aquele que me deu a vida e a capacidade de aprender. Separou com tanto cuidado uma vaga nesse curso pra mim e durante todo o processo me sustentou com tanta fidelidade, revigorando os ânimos e às forças. Colocou pessoas sábias em meu caminho para me aconselhar quando tinha dificuldades em minhas escolhas. Ele que é fonte de toda a vida, permitiu que eu cursasse esse mestrado e durante todo o curso me sustentou de maneira sobrenatural. Minha gratidão também ao Senhor Jesus por ter me presenteado com um pai, Douglas Ferro Vieira, maravilhoso, o qual sempre me instruiu a estudar e buscar conhecimento e mesmo tendo partido desta vida durante o meu curso, haverá sempre na minha memória e em meu coração a lembrança, a gratidão e a saudade eterna pelo pai que ele foi.

À minha mãe, Leidimar Vieira, que se dedicou a longas tardes fazendo tarefas da escola comigo, me ensinando e me cobrando a sabatina de tabuada (risos). Sem ela não seria possível.

A todos os meus irmãos por serem tão especiais pra mim.

À meu pastor, Antônio Neves, que sempre me apoiou e mesmo nos momentos mais difíceis, quando o ânimo estava quase acabando e, mesmo assim, sempre me estimulou a prosseguir no PROFMAT. Obrigada pelo apoio e pelas orações.

A Genilza Amparo por ser tão amiga e estar sempre disposta a ouvir e me aconselhar de forma tão sábia.

À minha família em Cristo pelas orações.

À D. Zenaide, Nilly e Gigi, pelas hospedagens e suportes nas viagens a Itabuna/Ilhéus.

Agradecer também em especial à família Marinho, em Porto Seguro, por me adotarem de maneira tão especial e amorosa e em particular a D. Ninha, Sr. Manoel e Eudian por me hospedarem no momento mais difícil do mestrado e a Leli que acordava madrugada para orar comigo. Minha eterna gratidão.

À minha orientadora, Profa. Dra. Mirela Vanina pela ajuda, pela orientação que foi de grande importância no meu trabalho.

À meus colegas do PROFMAT pelo coleguismo, pelas ajudas nas dúvidas e por eu aprender tanto com o conhecimento deles.

E a todos que colaboraram, direta ou indiretamente, nesse percurso meu muito obrigada!

Resumo

Nesse trabalho queremos trazer incentivo e estímulo àqueles professores de Matemática que se sentem desafiados a despertar em seus alunos o interesse pelas Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP. Abordaremos aqui a resolução de questões de Geometria presentes nas provas da primeira fase de nível 2 da OBMEP, afim de atribuir a essa importante área a relevância necessária de estar presente nas aulas de Matemática. A metodologia que utilizamos se baseia nas 4 fases para resolução de um problema sugeridas por Pólya (1995) e paralelamente a essa proposta, sugerimos o uso de materiais manipuláveis como material de apoio. Como a resolução de um problema em si, não está somente em compreendê-lo e resolvê-lo, mas em analisar todas as etapas da resolução relembrando conteúdos, definições e problemas correlatos, acreditamos que trabalhando dessa forma específica e contínua além de obtermos excelentes resultados na aprendizagem despertaremos um interesse maior em nossos alunos pela OBMEP. Vamos mostrar que ao se organizar, e aplicar as fases de Pólya (1995), o professor pode trazer problemas de Geometria da OBMEP, mostrando que um problema não é limitado, mas que pode ser explorado consolidando assim a aprendizagem, e mostrar que as operações matemáticas podem interagir com a realidade do aluno e não serem enfadonhas e desinteressantes, mas sim interessantes e prazerosas. O uso de materiais manipuláveis como apoio será grande aliado para que as formas geométricas presentes no problema, explícita ou implicitamente, não seja algo presente apenas na imaginação do estudante, mas uma ideia concreta para seu manuseio. Assim, o imaterial se tornará material. Acreditamos que uma ação conjunta de comprometimento entre educandos e educadores será uma chave de sucesso para a sugestão que iremos apresentar.

Palavras-chave: OBMEP, Resolução de problemas, Geometria, Materiais Manipuláveis.

Abstract

In this work we want to bring encouragement to those math teachers who feel challenged to awaken in their students an interest in the Brazilian Mathematics Olympics in Public Schools - OBMEP. We will address here the resolution of issues of Geometry present in the tests of the first phase of level 2 of OBMEP, in order to give this important area the necessary relevance to be present in math classes. The methodology we use is based on the 4 phases for solving a problem suggested by Pólya (1995) and in parallel to this proposal, we suggest the use of manipulable materials as support material. As the resolution of a problem itself, is not only in understanding it and solving it, but to analyze all the stages of the resolution, remembering contents, definitions and related problems, we believe that working in this specific and continuous way besides obtaining excellent learning results we will arouse a greater interest in our students by OBMEP. We are going to show that when organizing, and applying the Pólya (1995) phases, the teacher can bring OBMEP Geometry problems, showing that a problem is not limited, but that it can be explored thus consolidating the learning, and showing that the mathematical operations can interact with the student's reality and not be boring and uninteresting, but interesting and pleasurable. The use of manipulable materials as support will be a great ally so that the geometric shapes present in the problem, explicitly or implicitly, are not only present in the student's imagination, but a concrete idea for their handling. Thus, the immaterial will become material. We believe that a joint action of commitment between students and educators will be a key to success for the suggestion that we will present.

Keywords: OBMEP, Problem solving, Geometry, Manipulable Materials.

Sumário

Introdução

A OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - é uma prova, aplicada uma vez ao ano, e é uma realidade nas escolas públicas e particulares do Brasil. A OBMEP é realizada pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) de caráter recreativo e que busca melhorar o desempenho do ensino da matemática nas escolas públicas. Nesse trabalho, vamos abordar alguns problemas de Geometria da OBMEP do nível 2 e os resolveremos utilizando a proposta de (PÓLYA, 1995), buscando assim um melhor desempenho da aprendizagem dos alunos em matemática e um aumento do número de premiados dos alunos da Escola Chico Mendes na prova da OBMEP.

Os assuntos abordados na OBMEP são divididos em três temas: Aritmética, Análise Combinatória e Geometria. O foco desse trabalho será direcionado para as questões de Geometria visto que muitas instituições de ensino apresentam ausência parcial ou total desse conteúdo nas aulas de Matemática. Quando abordado, é feito de forma mecânica e desinteressante. Devido a isso, apresentaremos a resolução de três problemas de Geometria da OBMEP, do nível 2, mostrando como a inserção desse tipo de problema nas aulas de Matemática é significativo para a aprendizagem. Utilizaremos para resolvê-los as 4 fases de resolução de problemas de Pólya (1995) e o uso de materiais manipuláveis como ferramenta para que o educando visualize e manuseie de forma concreta as formas geométricas contidas de forma explícita ou implícita no problema. O foco desse trabalho será nas questões do nível 2 da OBMEP da primeira fase.

Mostraremos no Capítulo 1 algumas considerações sobre a OBMEP em alguns pontos que consideramos relevantes, seus objetivos, uma apresentação de problemas de Geometria de cada fase da OBMEP e seus respectivos níveis e, ainda, os programas oferecidos pelo Governo Federal através da OBMEP. Além disso, um breve relato de como acontece a OBMEP na Escola Chico Mendes em Porto Seguro.

Já no Capítulo 2, traremos um pouco da realidade do Ensino da Geometria nas escolas brasileiras. A omissão e o despreparo de alguns profissionais e também e de como os currículos escolares são apresentados aos professores ao iniciar o ano letivo, em suas respectivas escolas. Tanto os currículos como os livros didáticos posicionam os conteúdos geométricos, em sua maioria das vezes, no último bimestre do ano letivo. Realçaremos a relevância que o uso de materiais manipuláveis com recortes podem contribuir, positivamente, no aprendizado e como a abstração de uma ideia apresentada em um problema de Geometria pode ser concretizada com o manuseio desse material.

A resolução dos problemas de Geometria, serão feitas utilizando as 4 fases para a resolução de problemas de Pólya (1995), encontradas no livro: “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático”. No Capítulo 3 apresentaremos algumas das ideias presentes nesse livro as quais consideramos de maior relevância para resolução de problemas de geometria da OBMEP. Na obra, de Pólya (1995) ele nos ensina a analisar um problema em toda a sua estrutura: Compreendê-lo, elaborar um plano para resolvê-lo, executar esse plano e depois fazer um retrospecto de toda a resolução.

Finalmente, no Capítulo 4 mostraremos de forma detalhada a resolução de três problemas da OBMEP, do nível 2, ou seja, voltado para 8º e 9º anos, utilizando as fases ensinadas por Pólya (1995) juntamente com o uso de materiais manipuláveis, acreditando que sua contribuição será considerável na aprendizagem dos estudantes.

Sabe-se do baixo índice de aprendizagem da maioria dos alunos das Escolas Públicas em Matemática, como diz no sítio do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira):

> Dos estudantes brasileiros da 3^a série do ensino médio, na disciplina de Matemática, $62,6\%$ foram classificados no estágio crítico e outros $4,8\%$ no estágio muito crítico do aprendizado. No total, $67,4\%$ dos alunos têm desempenho muito abaixo daquele desejado. No Brasil, no estágio considerado adequado para essa disciplina estão somente 6% dos alunos. [...] (INEP, 2020)

e ainda,

> [...] No estágio muito crítico, em Matemática, os estudantes não conseguem ler e interpretar gráficos e usar as figuras geométricas planas, por exemplo. No estágio crítico, desenvolvem algumas habilidades elementares de interpretação de problemas, mas estão muito aquém do que é desejado [...] (INEP, 2020)

Também, é de conhecimento que muitas escolas ainda não houveram medalhistas na OBMEP. Um exemplo é a Escola Chico Mendes, em Porto Seguro, Bahia. Como professores de Matemática queremos cooperar para a mudança desse quadro inovando e estimulando nossos alunos através de problemas de geometria da OBMEP e resolvendo-os usando as 4 fases de Pólya (1995).

Capítulo 1

Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP

A OBMEP é uma prova realizada pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, com apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), promovida com recursos oriundos do contrato de gestão firmado pelo IMPA com o Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações (MCTIC) e com o Ministério da Educação (MEC) e é exclusivamente cultural e recreativa, sendo a participação voluntária.

1.1 Objetivos da OBMEP

De acordo com o RegulamentoOBMEP (2020), estão entre os objetivos das olimpíadas:

- Estimular e promover o estudo da Matemática no Brasil;
- Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de alunos brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade;
- Promover a difusão da cultura matemática;
- Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades nas áreas científicas e tecnológicas;
- Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo com a sua valorização profissional.

1.2 Provas da OBMEP

As provas da OBMEP são realizadas nas escolas públicas e privadas todos os anos, desde 2005. É uma prova realizada em duas fases e possui quatro níveis que são conforme o ano. Mostraremos na tabela a seguir, como são divididos esses níveis.

Tabela 1.1: Níveis da OBMEP

Nível A	Nível 1	Nível 2	Nível 3
4^o e 5^o ano	6^o e 7^o ano	8^o e 9^o anos	Ensino Médio

A prova da primeira fase da OBMEP, é composta de 20 questões objetivas e é realizada na própria escola com duração de 2h30min (duas horas e 30 minutos). Caso o aluno tenha alguma necessidade especial, a prova terá 1h (uma hora) de acréscimo.

Para provas que serão aplicadas a alunos especiais, a escola deverá informar, no momento da inscrição a sua necessidade, para que o IMPA envie a prova, pois caso a escola modifique o formato da prova, isso pode implicar na desclassificação da mesma.

As correções da primeira fase são feitas na própria instituição, através das máscaras do gabarito, que são enviadas juntamente das provas, em que é contado o número de acertos que o aluno obteve. Os estudantes são classificados para a segunda etapa, por ordem decrescente de número de questões certas de acordo com o número de vagas destinados à instituição de ensino, que vem especificado no regulamento da OBMEP, encontrado no sítio da OBMEP.

Já a prova da segunda fase, é composta de 6 questões discursivas, realizadas em um local indicado pela coordenação da OBMEP e sua correção é de responsabilidade total do IMPA. Nessa fase, as questões são discursivas e possuem valor máximo de 20 pontos. Caso haja empate, o critério de desempate será pontuada a maior nota obtida por questão nesta ordem: questão 6, questão 5, questão 4, questão 3, questão 2, questão 1 e o número de vagas para aprovação é de acordo com o número de inscritos na primeira fase, que também está contido no regulamento.

O gabarito é disponibilizado em 10 dias após a aplicação da prova, no site da OBMEP, e a divulgação será feita na data prevista no Calendário Oficial da OBMEP.

1.3 Questões de Geometria na OBMEP

Embora o foco desse trabalho sejam as questões de nível 2, que abrangem o 8º e 9º anos, somente a título de conhecimento do leitor, mostraremos a seguir 7 questões de Geometria da OBMEP que envolvem quadrados. São quatro questões da primeira fase dos níveis A, 1, 2 e 3 e três questões da segunda fase dos níveis 1, 2 e 3 respectivamente. O nível A não possui segunda fase.

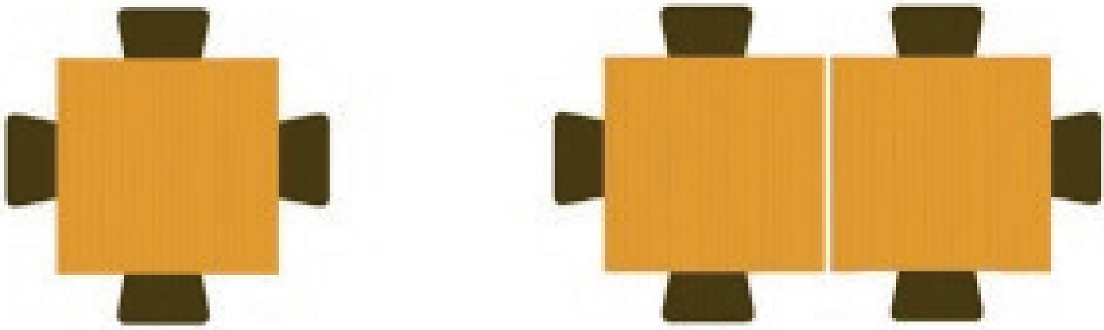
Ainda que priorizando nessa dissertação a resolução de questões de Geometria do nível 2 da OBMEP, não podemos deixar de enfatizar que é importante ao planejar suas aulas, o professor selecione questões que ele consiga trabalhar em sequências didáticas, abordando diversos conteúdos. Nos programas e no site da OBMEP o docente encontra a sua disposição, uma gama de opções de questões suficientes para se trabalhar Geometria, de forma desafiadora e preparatória para a OBMEP, podendo explorar resultados que estimulam o raciocínio matemático na resolução de problemas.

Apresentaremos agora, apenas a título de conhecimento para o leitor, as questões da 1ª fase (nível 1, 2 e 3, respectivamente) e depois as questões da 2ª fase na mesma sequência de níveis.

1.3.1 Questões da 1ª fase

Nível A

Exemplo 1.1 ***(OBMEP 2019 - Questão 08)*** *As mesas da cantina da escola são quadradas, e ao redor de cada uma delas cabem quatro cadeiras, como mostra a figura da esquerda. Quando duas mesas estão juntas, há lugar para 6 cadeiras, como na figura a direita.*



Para a festa do dia das crianças, as professoras juntaram as 10 mesas que havia na cantina, formando uma única mesa comprida. Quantas cadeiras puderam ser colocadas ao redor dessa mesa comprida?

- *a) 20*
- *b) 22*
- *c) 30*
- *d) 32*
- *e) 40*

Nível 1

Exemplo 1.2 ***(OBMEP 2017 - Questão 08)*** *Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro, em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?*

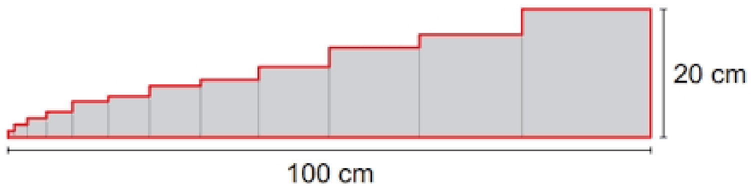
a) 220 cm

b) 240 cm

c) 260 cm

d) 300 cm

e) 400 cm



Nível 2

Exemplo 1.3 ***(OBMEP 2017 - Questão 13)*** *Na figura vemos um quadrado dentro de outro, determinando uma região cinza. A área (em* cm^2*) e o perímetro (em cm) dessa região são numericamente iguais, ou seja, o valor numérico da soma dos perímetros desses quadrados é igual ao valor numérico da diferença entre suas áreas. Qual é a diferença entre as medidas dos lados desses quadrados?*

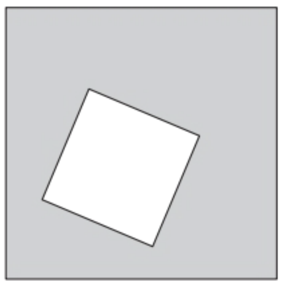
a) 1 cm

b) 4 cm

c) 6 cm

d) 8 cm

e) 10 cm



Nível 3

Exemplo 1.4 ***(OBMEP 2017 - Questão 10)*** *No interior do quadrado ABCD de lado 9 cm, foram traçadas as semicircunferências de centros E, F e G, tangentes como indicado na figura. Qual é a medida de AG?*

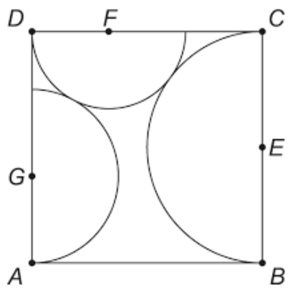
a) $\frac{11}{5}$ *cm*

b) $\frac{18}{5}$ *cm*

c) $\frac{19}{5}$ *cm*

d) $\frac{11}{4}$ *cm*

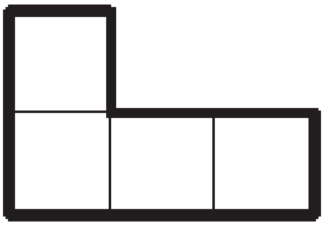
e) $\frac{27}{8}$ *cm*



1.3.2 Questões da 2ª fase

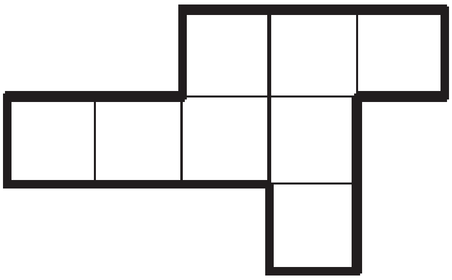
Nível 1

Exemplo 1.5 ***(OBMEP 2016 - Questão 2)*** *A peça ilustrada abaixo é formada por quatro quadradinhos de 1 cm de lado. Observe que o perímetro desta peça, ou seja, a medida de seu contorno, é 10 cm.*



Roberto forma figuras juntando duas dessas peças, sem sobreposição, e fazendo coincidir lados de quadradinhos.

a) Roberto formou a figura abaixo. Qual é o perímetro desta figura?



b) Ajude Roberto desenhando uma figura com perímetro igual a 12*cm no quadriculado da esquerda e outra com perímetro igual a* 18*cm no quadriculado da direita.*

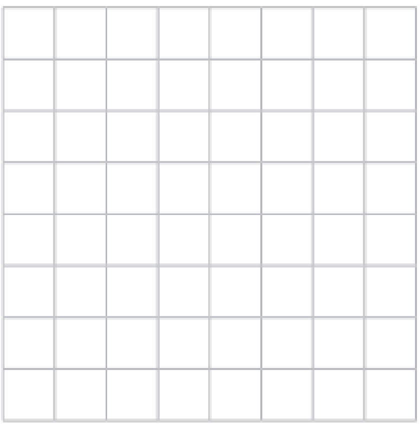


Figura com perímetro igual a 12 cm

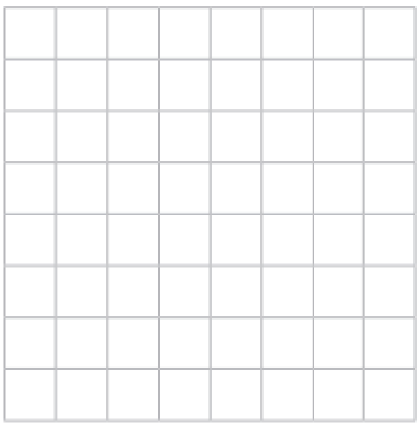
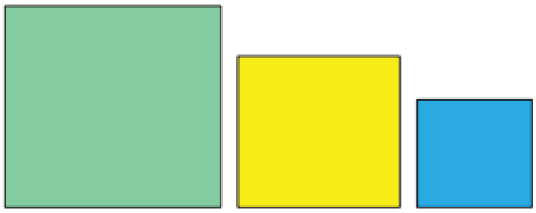


Figura com perímetro igual a 18 cm

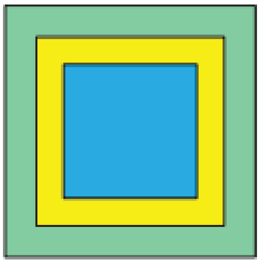
c) Explique por que Roberto nunca conseguirá formar uma figura com perímetro igual a 15*cm. (Lembre-se de que Roberto sempre faz coincidir lados de quadradinhos).*

Nível 2

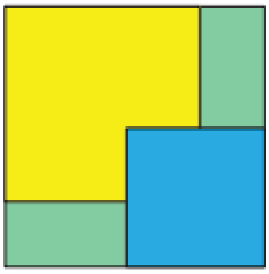
Exemplo 1.6 ***(OBMEP 2018 - Questão 3)*** *Janaína tem três folhas de papel quadradas: uma verde de área* $64cm^2$*, uma amarela de área* $36cm^2$ *e uma azul de área* $18cm^2$.



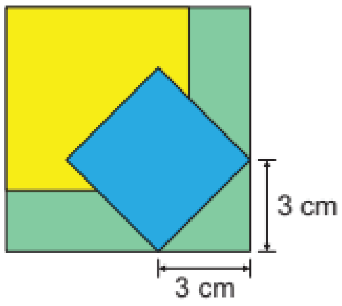
a) *Janaína colocou a folha amarela sobre a folha verde, e a folha azul sobre a folha amarela, como na figura abaixo. Dentre as regiões verde, amarela ou azul da figura, qual tem a maior área? Explique sua resposta.*



b) *Em seguida, Janaína colocou as folhas azul e amarela sobre a verde como na figura abaixo, determinando novas regiões coloridas. Qual é a soma das áreas das regiões verdes e amarela?*

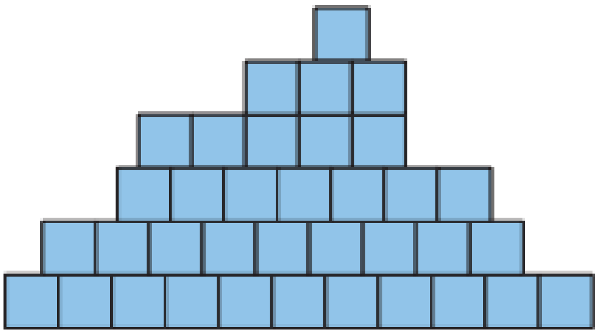


c) *Finalmente Janaína colocou as folhas como na figura abaixo. Qual é a área da nova região amarela?*



Nível 3

Exemplo 1.7 ***(OBMEP 2016 - Questão 4)*** *Uma figura é construída por fileiras horizontais de quadradinhos* 1×1*, dispostos lado a lado, sem sobreposição e sem espaçamento. Cada fileira, com exceção da primeira, está encostada inteiramente na fileira de baixo. A primeira fileira possui um número ímpar de quadradinhos e cada uma das demais possui dois quadradinhos a menos do que a fileira imediatamente abaixo. A última fileira sempre contém um único quadradinho. Abaixo, vemos uma figura na qual a primeira fileira contém 11 quadradinhos.*



a) Encontre a área e o perímetro de uma figura com 13 quadradinhos na primeira fileira.

b) Mostre que, independentemente do número de quadradinhos da primeira fileira, o número total de quadradinhos de uma figura é o quadrado de um número natural.

c) Mostre que, independentemente do número de quadradinhos da primeira fileira, a área A *e o perímetro* p *da figura satisfazem a igualdade* $(p+2)^2 = 36A$.

1.4 Premiações da OBMEP

Será concedido entre os alunos participantes e classificados, um total de 575 medalhas de ouro, 1.725 medalhas de prata, 5.175 medalhas de bronze e até 51.900 Certificados de

Menções Honrosas, de acordo com os critérios presentes no Regulamento. Tanto as medalhas de bronze, de prata como as menções honrosas, serão entregues no ano subsequente da prova em que o aluno obteve a premiação. Aos 6.500 alunos de escolas públicas premiados na OBMEP, com medalhas de ouro, prata ou bronze e matriculados em escolas públicas no mesmo ano, será oferecida a oportunidade de participar do Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC), que inclui o recebimento de uma bolsa de Iniciação Científica Jr. do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Em caso de vacância de bolsas, um medalhista poderá ser substituído por um aluno que tenha recebido Menção Honrosa e que esteja matriculado no ensino público. Os alunos das escolas particulares também podem participar, porém é cobrada uma taxa, de acordo com o número total de alunos que participarão. A premiação pra as escolas particulares, será: 75 (setenta e cinco) medalhas de ouro, 225 (duzentas e vinte e cinco) medalhas de prata, 675 (seiscentas e setenta e cinco) medalhas de bronze, e até 5.700 (cinco mil e setecentos) Certificados de Menção Honrosa. Os professores e as escolas também serão premiados de acordo com a premiação de seus alunos.

1.5 Alguns programas da OBMEP

Existem programas desenvolvidos ao longo desses anos voltados para os alunos de Escola Pública e citaremos a seguir alguns deles:

1.5.1 Programa de Iniciação Científica - PIC

O PIC é um programa que oferece ao aluno medalhista ou até mesmo, que foi premiado com menção honrosa, em cada edição da OBMEP ter acesso a questões no ramo da Matemática, ampliando o seu conhecimento científico e preparando-o para um futuro desempenho profissional e acadêmico. O estudante poderá participar do PIC presencial, caso haja um polo de Iniciação Científica perto da sua residência, com encontros presenciais, ou participar do PIC a distância com aulas virtuais, em um fórum denominado Hotel de Hilbert. Os alunos terão atividades para serem desenvolvidas em casa, tudo elaborado pela OBMEP, no qual, com ajuda de moderadores, realizarão tarefas complementares às aulas e também poderão compartilhar uns com os outros resoluções e dúvidas de questões. Os moderadores acompanham e estimulam as discussões e resolução de problemas entre os alunos em suas salas virtuais no fórum Hotel de Hilbert.

Quando o aluno já participante do PIC tem a oportunidade de, após ser premiado com medalhas, fazer parte do Programa Mentores OBMEP, que oferece atividades ministradas por professores universitários sobre diversos conteúdos que envolvem matemática, direta ou indiretamente. Além disso, os estudantes que fazem parte do Programa de Iniciação Científica, ganham uma bolsa do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), ou seja, um incentivo financeiro, além de acrescentar muito em seu currículo acadêmico.

1.5.2 Programa Mentores da OBMEP

O Programa Mentores é para o aluno que já participou mais de duas vezes do PIC, sendo que pelo menos uma delas no nível 3. É um aluno com alta multiplicidade que terá a chance de estudar assuntos avançados em diversas áreas, através de cursos que serão ministrados por professores universitários sobre tópicos específicos que estão conectados direta ou indiretamente Matemática.

As atividades a distância são desenvolvidas exclusivamente na Plataforma Mentores. Nesse programa, os alunos participam de vídeos conferências, fóruns e chats.

1.5.3 Portal do Saber

O Portal do Saber, foi criado para facilitar o acesso ao conteúdo elaborado, que reúne o Portal da Matemática OBMEP (6º do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio) , Portal da Física OBMEP (9º do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio) e Quebra-cabeças de Matemática OBMEP (4º ao 6º ano do Ensino Fundamental), que oferece desafios matemáticos divididos em dois níveis de dificuldade, orientações pedagógicas e arquivos digitais. Nesse portal o estudante encontra videoaulas, apostilas teóricas, cadernos de exercícios, problemas resolvidos, aplicativos e testes que cobrem todo o currículo de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, além de tópicos adicionais para complementar e aprofundar o aprendizado. Ao final de cada aula ou de cada módulo, é possível avaliar os conhecimentos adquiridos através de testes oferecidos pelo Portal.

1.5.4 Portal Clubes da Matemática

Segundo OBMEP (2020), entre os objetivos do Portal Clubes da Matemática encontramos:

- Disseminar o estudo da Matemática;
- Incentivar o desenvolvimento intelectual dos participantes promovendo debates, pesquisas e, sobretudo, desafiando-os a análises críticas de resultados obtidos por eles mesmos e por outros;
- Desmistificar ideias preconcebidas relativas à Matemática.

No ambiente Clubes da Matemática, entre diversas atividades que o compõe, dentre as que consideramos mais interessantes para o aluno são: gincanas regionais e nacionais, resolver problemas, jogos, e também filmagens e atividades que são utilizados programas de geometria dinâmica.

Alunos do Ensino Fundamental e Médio, tanto de escolas públicas ou particulares, são aqueles que podem participar. Já o aluno que está em curso superior só poderá participar como orientador.

O programa funciona em um blog e um fórum. Nesse blog, temos alguns conteúdos como: discussão e resolução de problemas e desafios; indicação de livros e sites interessantes; pequenos artigos sobre matemática; salas de estudo de temas de matemática. Já no fórum, é disponibilizado: ambientes para gincanas; ambientes para discussão, resolução de problemas e desafios; ambientes com dicas dos Problemas da Semana; ambientes para dúvidas do material disponibilizado no Blog; ambientes para aprendizagem e utilização do GeoGebra e do Latex.

Sobre o Clube Olímpico,

> [...] Um Clube Olímpico de Matemática deve ser composto de cinco a dez membros e um Responsável, obrigatoriamente. Recomendamos fortemente que cada Clube tenha um Orientador, mas essa não é uma condição obrigatória. A composição de um Clube só poderá ser alterada depois que este Clube tiver sua inscrição deferida.(CLUBESOBMEP, 2020)

Cada grupo deverá ter seu lema e seu escudo. Esse é um excelente programa para um aprendizado mais aprofundado e ainda, com o recurso de compartilhar com outros membros efetivando cada vez mais o conhecimento matemático.

1.5.5 Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo - POTI

O programa é destinado aos interessados em se preparar para as provas da OBMEP e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), que estejam matriculados no 8º ou no 9º ano do Ensino Fundamental ou em qualquer uma das séries do Ensino Médio. É um programa com o objetivo de melhorar o desempenho dos alunos na OBMEP e OBM. Para os estudantes que não podem, por algum motivo fazer o POTI presencial, também tem a possibilidade de fazê-lo de maneira virtual que atenderá, além dos alunos cujo município não dispõe de Polo presencial, àqueles que não foram selecionados para a presencial. Nesse programa não existe limite de inscritos.

1.5.6 Programa de Iniciação Científica e Mestrado - PICME

O PICME é um programa destinado a alunos universitários que foram medalhistas nas Olimpíadas de Matemática (medalhistas da OBMEP ou da OBM). No programa os alunos participam de estudos avançados em Matemática ao mesmo tempo que cursam sua graduação.

O programa oferece 300 vagas anuais e, além disso, os participantes recebem as bolsas por meio de uma parceria com o CNPq (Iniciação Científica) e com a CAPES (Mestrado). Caso seja aprovado para o nível de mestrado de qualquer uma das universidades participantes, ou, o aluno tenha sido medalhista da OBMEP ou OBM, sua bolsa pela CAPES/PICME é garantida para o mestrado.

Quem pode partipar do PICME, são: medalhistas da OBMEP ou da OBM, em pelo menos uma de suas edições, e estar matriculado no ensino superior no corrente ano, mesmo que somente a partir do 2º semestre. Caso o aluno que estiver graduando em Matemática ou tiver obtido pelo menos 4 medalhas, pode iniciar o PICME no primeiro semestre do ano corrente, mas se ingressar na universidade apenas no 2º semestre, o aluno só deverá ser chamado ao PICME no início do ano seguinte.

O PICME é coordenado em nível nacional pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA e ofertado por Programas de Pós-Graduação em Matemática de diversas universidades espalhadas pelo país, as quais desenvolverão de maneira autônoma, escolhendo as atividades e avaliando o desempenho acadêmico do aluno e decidindo assim, a manter e renovar a bolsa de cada estudante.

1.5.7 Bolsa Instituto Tim

A Bolsa Instituto Tim é em parceria com o IMPA, a OBMEP e o Instituto Tim. O objetivo é dar apoio financeiro aos alunos medalhistas, de qualquer edição da OBMEP, que estão ingressando na Universidade Pública. As áreas apoiadas são: Astronomia, Biologia, Economia, Engenharia, Estatística, Física, Matemática, Medicina e Química. Nos 5 anos anteriores a 2020, incluindo o ano atual, foram oferecidas a cada ano 50 bolsas, no valor de $R\$1200,00$ (Um mil e duzentos reais), com duração de 12 meses, podendo ser renovadas todos os anos com duração máxima de 48 meses.

1.6 Impacto da OBMEP na educação e na profissão

A OBMEP acontece desde 2005, e a cada ano, alcança mais e mais alunos das escolas públicas. No ano de 2019, segundo o site da OBMEP diz que aconteceu a prova das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas em $99,71\%$ dos municípios brasileiros na primeira etapa e $99,03\%$ da segunda etapa. Um dos objetivos da OBMEP é promover o estudo de matemática entre alunos das escolas públicas além de descobrir novos talentos. As provas das Olimpíadas de Matemática contém questões que podem ser grandes aliadas nas aulas. Não somente as questões, mas os programas desenvolvidos pela OBMEP, são também grande estímulo para os alunos, tanto na sua vida educacional e acadêmica, como também na ajuda financeira. Esses programas abrem janelas para um novo mundo na vida do aluno e fomenta a educação do país. Por isso, vemos a importância de se trabalhar de forma mais constante questões das olimpíadas junto ao conteúdo do currículo anual.

É de conhecimento que, em termos gerais, o retorno salarial de cada indivíduo aumenta a partir de cada avanço no seu nível de escolaridade. O interessante é que a participação dos alunos na OBMEP, também contribui para esse retorno salarial no futuro dos estudantes. Assim:

> Para avaliar o impacto da OBMEP sobre a melhoria da qualidade do ensino, utilizamos a nota dos alunos em Matemática na Prova Brasil 2007, comparando a nota média das escolas que participaram da Olimpíada em 2007 com a nota nesta prova de escolas que nunca participaram da OBMEP. A amostra é composta por escolas públicas que oferecem o 9º ano do ensino fundamental que participaram da Prova Brasil nas edições de 2005 e 2007. Incluímos na amostra apenas escolas com mais de 10% dos alunos inscritos na primeira fase da Olimpíada para garantir que houve participação de um grupo relevante de alunos, capaz de afetar a média da série. Assim, o grupo de escolas tratadas, após estes filtros, é composto por 22703 escolas, e, o grupo de escolas de comparação, por 1756 escolas. (BIONDI; VASCONCELLOS; FILHO, 2012)

Segundo Biondi, Vasconcellos e Filho (2012), a OBMEP tem impacto no desempenho dos alunos na Prova Brasil de matemática e interfere no salário futuro como diz

> [...] estimamos o aumento esperado no salário ao longo do ciclo de vida dos alunos que estudaram em escolas participantes a partir de um estudo de Curi e Menezes-Filho (2007), que mostra que o desempenho em avaliações educacionais - como é o

> caso da Prova Brasil de matemática -, afeta o salário futuro com uma elasticidade de 0,3, ou seja, 10% de aumento no desempenho nas avaliações reflete em um aumento de 3% no salário anual futuro. (BIONDI; VASCONCELLOS; FILHO, 2012)

Dessa forma o que não falta para o aluno são excelentes motivações para se preparar para o OBMEP. Aprendizado, programas de aprimoramento a seu avanço nos estudos da matemática e para somar, aumento no salário futuro.

Essas motivações nos levam a dar um destaque importante à resolução de problemas de Geometria da OBMEP nas aulas de matemática, trabalhados utilizando as fases de Pólya (1995), pois entendemos que haverá significatica melhora no desempenho dos alunos na resolução das provas da OBMEP. Os frutos desse trabalho não serão apenas na vida escolar do aluno, mas em todo o seu contexto de vida como cidadão, pricipalmente no que diz respeito a seu desempenho profissional e, consequentemente salarial.

A função que o professor desempenha nesse processo é muito importante. Isso envolve a maneira como ele estimula os alunos a participar das provas da OBMEP e a metodologia que vai adotar para contribuir com a aprendizagem e desempenho dos alunos.

1.7 A OBMEP como desafio para a Escola Chico Mendes

Apesar de acontecer desde 2005, acreditamos que faltam empenho dos professores para que a OBMEP se faça mais presente na aulas de matemática.

Infelizmente, a maioria dos alunos da Escola Chico Mendes ainda vive a fase de que o dia da aplicação das provas da OBMEP na escola é um dia de ir embora mais cedo para casa. Analisando de forma reflexiva essa situação, podemos chegar a conclusão de como é frustrante essa realidade. Frustrante tanto para o aluno como para minha pessoa como professora. As falhas existem mas podem ser transformadas e ao desejar mudar e se sentir estimulado a isso, não terá como o professor não contagiar seus alunos, pois além de ser desafiadora a OBMEP também abre portas promissoras para os estudantes, como vimos anteriormente nos programas oferecidos, tanto na vida acadêmica e tanto na sua vida profissional, como vimos nos impactos da OBMEP.

Tudo isso, os programas, as questões de provas anteriores da OBMEP de Geometria, e resolução dessas questões utilizando o método de Pólya (1995) deve ser incorporado no planejamento anual do professor de matemática e da escola e não como um plano a parte e secundário, mas sim uma prioridade e ser trabalhado de forma periódica para a aprendizagem processar-se de maneira efetiva.

Esse trabalho tem como um dos intuitos estimular os professores de Matemática a inserir em sua prática pedagógica e em seus planos de aula problemas da OBMEP e, além de inserir, explorá-los com seus alunos utilizando as fases de Pólya, apresentadas no Capítulo 3.

Felizmente, em contrapartida, na Escola Chico Mendes temos alunos interessados e promissores, inclusive já tivemos estudantes premiados como o aluno Henrique Hassen de Abreu, do 7^o ano em 2017, que recebeu menção honrosa na 13ª OBMEP e a aluna Vitória da Silva Penchel, do 6^o ano, que também recebeu menção honrosa em duas edições consecutivas da

OBMEP, 13ª e 14ª, em 2017 e 2018, respectivamente, como foi noticiado em OXAROPE (2017).

Figura 1.1: Henrique e Vitória sendo presenteados pela Escola Chico Mendes pelo bom desempenho na 13ª OBMEP.

Fonte: Site oxarope.com disponível em (OXAROPE, 2017)

Muitas vezes em meio a cargas horárias intensas, diversos planejamentos, ou até mesmo falta de motivação, confesso que encontro-me em falta a dar o suporte necessário aos alunos no que diz respeito a introduzir resolução de problemas de Geometria da OBMEP nas minhas aulas. Acontece que, o professor não pode desvincular a OBMEP de sua prática docente no dia a dia, mas sim inserir a OBMEP em suas aulas e, esse trabalho traz isso com clareza.

Esses alunos premiados nos mostram que nossos estudantes tem potencial sim. O que eles precisam é de um auxílio e aulas mais direcionadas para OBMEP. Direcionar essas aulas, não significa descumprir o currículo escolar, mas de inserir nele novas metodologias para estimular nossos educandos a vôos mais altos.

Capítulo 2

A Geometria no Ensino Fundamental

A geometria é um dos galhos da árvore matemática que estuda as formas, tamanho e posição relativa de figuras com propriedades dos espaços. A tradução do grego antigo da palavra geometria é: geo = "terra", metria = "medida". Na Babilônia, estudos com a Geometria (1900–1600 a.C.), antecede e, em muito, às teorias de Tales de Mileto, como por exemplo o Teorema de Tales (624 a.C - 585 a.C).

A Geometria desenvolvida pelos estudiosos, partiram de situações cotidianas, e isso coopera nos nossos dias, para que a contextualização desse conteúdo aconteça na sala de aula. Dessa maneira, o conteúdo se aproxima de forma mais real do aluno e, é capaz de despertar mais a sua atenção, aumentando de forma significativa a aprendizagem.

As Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica, trazem que:

> [...] além da eficácia e da eficiência, advoga que a educação de qualidade, como um direito fundamental, deve ser antes de tudo relevante, pertinente e equitativa. A relevância reporta-se à promoção de aprendizagens significativas do ponto de vista das exigências sociais e de desenvolvimento pessoal. A pertinência refere-se à possibilidade de atender às necessidades e às características dos estudantes de diversos contextos sociais e culturais e com diferentes capacidades e interesses. E a equidade, à necessidade de tratar de forma diferenciada o que se apresenta como desigual no ponto de partida, com vistas a obter aprendizagens e desenvolvimento equiparáveis, assegurando a todos a igualdade de direito à educação". (BRASIL, 2013, p. 107)

Vemos na Geometria um ramo da matemática que permite uma educação que contemple pertinência, relevância e equitância. Exemplos como construções, agricultura, esportes, meio ambiente e resolução de problemas, que envolvem cálculos e medidas, são formas de mostrar ao aluno que ele próprio possui um certo conhecimento imediato do conteúdo na relação dele com o espaço e o professor pode e deve inserir essa realidade em sua prática pedagógica e assim conduzir seu público à construção gradativa do saber geométrico, despertando a curiosidade dos alunos tornando seu ensino mais atrativo. Mas, nem sempre a geometria é ensinada dessa forma. Em muitas escolas, as aulas de geometria são monótonas, cheias de fórmulas e reprodução delas nos exercícios, o que para o aluno tem pouca relevância e parece distante de sua realidade. Dessa maneira, além de ser um conteúdo pouco ensinado pelos professores e quase nada aprendido pelos estudantes, a parte mais atrativa da matemática se torna desinteressante, mecânica e sem significado devido a didática aplicada por alguns profissionais durante as aulas.

2.1 A omissão do Ensino da Geometria nas aulas de Matemática

Dos conteúdos programáticos de matemática que compõem cada série, a parte geométrica está entre as mais excluídas e são poucos os professores que conseguem lecionar esse tópico do plano anual em suas aulas. Um dos motivos para que esse fato aconteça, é devido ao alto apego à sequência contida no livro didático como relata Lorenzatto (1995) que, em sua grande maioria, ou, quase todos, apresentam os conteúdos geométricos, no quarto bimestre, ou seja, nas suas páginas finais. Por isso, muitas vezes é abolido da vida escolar do estudante essa parte do conteúdo programático, e, consequentemente, o conhecimento e aprendizagem significativa da Geometria.

Segundo Lobo e Bayer (2004), numa pesquisa realizada com professores do Rio Grande do Sul foram feitas três perguntas. A primeira pergunta foi "porque ensinar Geometria?", e apenas um professor respondeu baseado na orientação dada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Sua resposta foi: "O ensino de geometria, na minha opinião, deve estar a serviço dos objetivos maiores da educação, a saber, desenvolvimento da cidadania, formação científica e tecnológica, competência crítico-reflexiva da realidade. Boas aulas de geometria são capazes de melhorar a percepção de espaço, de discutir reformas agrárias, de aprimorar habilidades artísticas e arquitetônicas, de debater espaço urbano, posicionamento de ruas e avenidas, etc." O restante dos professores deram respostas subjetivas como: "Não sei. Acredito ser para entender as necessidades do dia-a-dia"; "Faz parte dos conteúdos"; "Porque está no currículo". Ou seja, desconhecem o objetivo do ensino de geometria. Já a segunda pergunta foi: "Você consegue desenvolver todos os conteúdos do plano de ensino durante o ano letivo?" Nesse segundo questionamento, 72,3%, responderam não. E a partir daí, se fez a última indagação, querendo saber, dos professores que não conseguem desenvolver todos os conteúdos propostos no plano anual nas séries que lecionam, qual conteúdo fica fora das aulas. Daí, 55,3% ficam sem ensinar o conteúdo que está no final do último bimestre ou trimestre.

Um outro fator determinante também para essa omissão geométrica na vida dos alunos é a falta de profissionais graduados na área de Matemática que acabam por deixar de ensinar esse galho tão importante e cotidiano, que por falta de conhecimento, o conteúdo deixa de ser exposto ou, por vezes, é feito de forma mecânica e cheia de fórmulas que são apenas decoradas e aplicadas como diz Lorenzatto (1995).

No artigo, Porque não Ensinar Geometria de Lorenzatto (1995), uma pesquisa foi realizada com 255 professores de 1ª a 4ª séries, que foram sujeitos a responder a 8 questões com conteúdos básicos da Geometria Plana Euclidiana, e o resultado foi o pior possível: 2040 respostas erradas,

> [...] e mais, somente 8% dos professores admitiram que tentavam ensinar Geometria aos alunos. Considerando que o professor que não conhece Geometria também

> não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. (LORENZATTO, 1995, p. 3-4)

Acredita-se que a falta de preparo dos professores e a falta do ensino da Geometria na maioria das salas de aula são fatores que contribuem para que a aprendizagem e, consequentemente a assertividade das questões que envolvem os conteúdos geométricos na OBMEP seja baixa, o que diminui as chances de aprovações e premiações dos alunos.

De acordo com Rogenski e Pedroso (2013, p. 6)

> [...] estudos esclarecem que a geometria promove o entendimento de diferentes conteúdos matemáticos, é por isso que precisa ser trabalhada em conjunto com cada conteúdo, pois dessa forma os alunos entenderão melhor até mesmo o cálculo algébrico, que, muitas vezes, parece ser abstrato.(ROGENSKI; PEDROSO, 2013, p. 6)

Visto o resultado dessa pesquisa, entendemos que a falta de preparo de alguns professores e o apego excessivo a ordem de conteúdos apresentados nos livros didáticos cooperam para que a Geometria seja pouco ensinada nas escolas e consequentemente a formação do aluno na construção do saber matemático, na interpretação do mundo a sua volta, na arte, no exercício de sua cidadania e também sua inserção no mercado de trabalho fica incompleta.

A Geometria é uma parte do currículo que é comum a todas as regiões e seu ensino contribui para a construção do programa curricular comum da Matemática. Quando o aluno é privado dos conteúdos geométricos acontece uma carência na aprendizagem dele e habilidades como: interpretação de objetos no espaço; reconhecimento de semelhança e diferenças de polígonos, poliedros e corpos redondos de acordo com seus elementos; composição/decomposição e ampliação/redução de figuras planas e de figuras planas; e, percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas ficam deformadas durante sua formação escolar.

2.2 Materiais manipuláveis: um catalisador e auxílio na aprendizagem da Geometria

Existe um vasto material didático disponível no sítio da OBMEP como: provas de anos anteriores com seus respectivos gabaritos; aulas em vídeos e todo o conteúdo do Ensino Fundamental e Médio no Portal da OBMEP; gincanas, discussão de filmes, resolução de problemas e jogos podem ser encontrados no Portal Clubes da Matemática; e, cursos de Treinamento Intensivo voltados para competições de matemática podem ser encontrados no POTI. Todo esse material o professor pode fazê-lo presente e mais frequente em suas aulas com intuito de melhorar a aprendizagem dos alunos em Matemática.

Além desse material didático que citamos no parágrafo anterior para que questões de Geometria da OBMEP sejam trabalhadas em aula, queremos também sugerir o uso de materiais manipuláveis, para serem trabalhados concomitantemente às questões, que podem ser prontos, confeccionados em aula ou até mesmo pelos próprios alunos em casa para facilitar a transformação de conceitos abstratos, contidos em problemas, em imagens reais e manipuláveis para os estudantes. O objetivo disso é concretizar o enunciado de uma questão de Geometria que, por vezes, pode vir ou não com uma figura geométrica em seu enunciado. O uso desses materiais são facilitadores, cooperadores e catalisadores na aprendizagem de resolução de problemas de Geometria da OBMEP.

Para Rogenski e Pedroso (2013),

> [...] o que se refere à visualização, o uso de materiais manipulativos, um desenho ou outro modelo, servem de representação para gerar uma imagem mental, permitindo evocar o objeto na sua ausência, inicia-se um processo de raciocínio visual, facilitando a representação de um esboço gráfico ou modelo manuseável. (ROGENSKI; PEDROSO, 2013, p. 4)

Com o uso de objetos manipuláveis que ora o professor pode levar para o ambiente de trabalho, ou até mesmo o próprio aluno possa construir, irá facilitar que o estudante apropri-se de conceitos geométricos abstratos de forma mais significativa e concreta no que se refere ao objeto geométrico em si.

Devido a aulas não reflexivas mas, ricas apenas em definições de figuras, replicação de problemas e aplicações repetitivas das fórmulas de área ou volume em problemas, quando um aluno se depara com um problema mais complexo aí surgem as dificuldades na visualização das figuras e percepções das relações entre objetos geométricos e também em relacionar as propriedades a cada figura.

Isso é contrário ao que traz a BNCC (2019), pois,

> [...]Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras [...] (BNCC, 2019, p. 272)

E,

> [...] a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. (BNCC, 2019, p. 300)

De acordo com Rogenski e Pedroso (2013 apud DIENES, 1974, p. 1), "Os conceitos não se ensinam – tudo que se pode fazer é criar, apresentar situações e as ocorrências que ajudarão a formá-los".

Dessa forma, percebemos que aulas mecânicas apenas baseadas em exposições reescritas do livro didático e sem expressões, sem materiais concretos contribui muito pouco na aprendizagem como um todo da Geometria.

Mas, o aluno pode se tornar protagonista do saber quando ele manipula, observa, constrói. Com essa didática o estudante deixa de ser aquele que apenas ouve e reproduz, mas se apresenta como sujeito do aprender. Ele é aquele que constrói.

> [...] Entendemos que o uso de materiais manipuláveis permite ao aluno construir seu conhecimento, despertando curiosidade, incentivando a criatividade e tornando o aluno apto a assumir seu papel de protagonista de sua própria aprendizagem. (POLLI; FIGUEIREDO, 2017)

Existe um vasto conjunto de recursos e materiais manipuláveis que podem e devem ser usados nas aulas de Geometria, tanto para explicar o conteúdo com suas definições e propriedades, como para contribuir no processo onde os alunos sentem mais dificuldade que é na resolução de problemas. Acredita-se que a resolução de problemas é o sujeito principal no processo ensino-aprendizagem, pois é aqui que o aluno conseguirá apresentar o entendimento, se conseguiu elaborar um raciocínio visual para dispor de suas ideias e conseguir resolver o que lhe é pedido. E caso ele ainda não consiga realizar a resolução do problema proposto, o professor pode, até mesmo aqui, construir ou apenas expor, material manipulável relativo ao problema para ajudar o estudante a visualizar a descrição do problema e assim ampliar seu entendimento na exercício proposto.

Há grande importância da aprendizagem da Geometria pois, para Polli e Figueiredo (2017 apud LORENZATTO, 1995, p. 5) "[...] sem conhecer geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida". E os materiais manipuláveis são fortes aliados nesse processo, pois os mesmo autores acreditam que "[...] para se chegar no abstrato, é preciso partir do concreto".

Esse trabalho traz como um recurso catalisador do aprendizado na resolução de problemas de geometria da OBMEP, nosso material manipulável com recortes. Eles serão apresentados através de fotos no Capítulo 4, como ferramenta de apoio às fases propostas por Pólya (1995) na resolução de problemas de Geometria da OBMEP.

No artigo, O Ensino de Geometria: Problematizando o Uso de Materiais Manipuláveis, há uma citação interessante:

> [...] por compartilharem dessa visão argumentam que os materiais manipuláveis são fundamentais se pensarmos em ajudar a criança na passagem do concreto para o abstracto, na medida em que eles apelam a vários sentidos e são usados pelas crianças como uma espécie de suporte físico numa situação de aprendizagem. Assim sendo, parece relevante equipar as aulas de Matemática com todo um conjunto de materiais manipuláveis (cubos, geoplanos, tangrans, réguas, papel ponteado, ábaco, e tantos outros) feitos pelo professor, pelo aluno ou produzidos comercialmente, em adequação com os problemas a resolver, as idéias a explorar ou estruturados de acordo com determinado conceito matemático. (ROCCO; FLORES, 2008 apud SILVA A.; MARTINS, 2000)

Concluí-se através de práticas pedagógicas e estudos que o uso de materiais manipuláveis nas aulas de Geometria, faz com que o conhecimento seja mais significativo para o aluno pois, aquilo que era apenas abstrato em sua mente se torna concreto e palpável a ele. Essa atividade mental desenvolvida tanto pelo uso e materiais manipuláveis como as fases de Pólya usadas na resolução de problemas, de Geometria da OBMEP, é de fundamental importância que a aprendizagem seja efetiva.

2.3 Questões de Geometria da OBMEP nas aulas de Matemática

É de fundamental importância trabalhar questões de Geometria da OBMEP nas aulas de Matemática. Na verdade, essas questões já devem compor o plano de curso do professor que prioriza em sua prática pedagógica a familiarização e aprendizagem dos alunos para as questões de Geometria da OBMEP. No Capítulo 4, vamos mostrar alguns exemplos de questões das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas que podem ser trabalhadas nas aulas de Matemática junto aos conteúdos do currículo anual, e, iremos resolvê-las usando fases sugeridas no Capítulo 3, por Pólya (1995) de forma expositiva, e usando manipulação das figuras feitas em recortes (também podem ser animadas em slides), buscando assim atrair e despertar no aluno a curiosidade pela Matemática.

Além de resolver essas questões usando as quatro fases de Pólya (1995), vamos também apresentar juntamente a cada problemas suas respectivas figuras manipuláveis a fim de ampliar a percepção e interpretação do aluno ao resolver uma situação problema, contando que essa prática contribuirá para que o estudante desenvolva interpretação de objetos presente na questão; reconheça a figura proposta no problema; composição/decomposição e ampliação/redução de figuras planas, caso necessário. Temos essa base nas Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica:

> A exposição das crianças e adolescentes de praticamente todas as classes sociais no Brasil à mídia e, em particular, à televisão durante várias horas diárias tem, por sua vez, contribuído para o desenvolvimento de formas de expressão entre os alunos que são menos precisas e mais atreladas ao universo das imagens, o que torna mais difícil o trabalho com a linguagem escrita, de caráter mais argumentativo, no qual se baseia a cultura da escola. O tempo antes dedicado à leitura perde o lugar para as novelas, os programas de auditório, os jogos irradiados pela TV, a internet. (BRASIL, 2013, p. 111)

Assim, nossa sugestão é que o professor insira questões da OBMEP nas suas aulas, e no momento da resolução, apresente ao aluno, através das imagens em recortes juntamente com os passos indicados por Pólya (1995), o problema de maneira mais completa, abordando problemas correlatos e outras formas de solução, manipulando o material concreto de diferentes maneiras, possibilitando assim que apenas um exercício, seja capaz de abordar diferentes assuntos, ou o mesmo assunto de formas distintas.

Quando essas resoluções se tornarem mais cotidianas, no dia a dia do aluno, e o professor trouxer em sua resolução a participação atuante do aluno acreditamos que a aprendizagem se tornará mais atrativa e, consequentemente mais efetiva. Sendo assim, as questões de Geometria da OBMEP não serão questões que estão desassociadas daquilo que o aluno aprende em suas aulas de matemática. Dessa maneira, acreditamos que o estudante terá um melhor desempenho nas provas da OBMEP e consequentemente, teremos mais chances de aprovações desses alunos, além de auxiliar no seu pleno desenvolvimento para o exercício da cidadania, sua formação científica e tecnológica e preparação para o ensino superior e mercado de trabalho.

Capítulo 3

Resolução de um problema segundo Pólya

Muitas vezes ao resolver um problema matemático, fazemos de forma intuitiva e, paralelo a isso, automaticamente, buscamos em nosso conhecimento o respectivo conteúdo matemático relacionado àquele problema.

Neste capítulo apresentaremos passos para a resolução de um problema segundo Pólya (1995). Não faremos menção de todos os passos utilizados pelo autor referido, mas sim daqueles que consideramos mais importantes e mais relevantes e que contribuam para o entendimento, interpretação e solução de um problema pelo aluno.

Para Pólya, essa resolução acontece em um processo em que o professor e o aluno desempenham papéis importantes, um em cooperação com o outro. Porém, a função do professor nesse processo é o de fomentar no estudante a busca pelo compreensão do processo de resolução e o alcance da solução do problema, executando os passos propostos.

3.1 Um breve relato da vida de Pólya

George Pólya, nasceu em Budapeste, no ano de 1887, na Áustria-Hungria, de pais asquenazes. Começou a estudar direito, mas não gostou do curso e passou a estudar línguas e literatura. Por fim, se interessou por Matemática. Concluiu sua licenciatura em 1905 e como seu desempenho como aluno estava dentre os melhores, ganhou uma bolsa de estudo na Universidade de Budapeste. Depois, interessou-se por Latim, Física e Matemática e em 1912 concluiu seu doutorado, e sua tese teve o título: "A valószinuségszámítás néhány kérdésérol és bizonyos velük összefüggo határozott integrálokról " em Húngaro, que pode ser traduzido por: "Cálculo de probabilidades e algumas integrais definidas associadas". O orientador de George Pólya foi o Leopold (Lipót) Fejér.

Por ter se recusado a ir para a guerra, quando convocado pela Hungria, manteve-se afastado do seu país até a 2ª Guerra Mundial acabar.

Foi professor de matemática de 1914 a 1940 no Instituto Federal de Tecnologia (ETH) de Zürich na Suíça.

Em 1940, foi morar nos Estados Unidos da América, e lá foi professor na Universidade de Stanford, e se aposentou em 1953, porém continuou a desenvolver atividades com a

Educação Matemática. Trabalhou com tópicos matemáticos, incluindo Séries, Teoria dos Números, Análise Matemática, Geometria, Álgebra, Combinatória e Probabilidade.

Faleceu no dia 7 de setembro de 1985, com 97 anos, e mesmo com a idade avançada, no ano anterior à sua morte ministrou um curso de Análise Combinátoria na Universidade de Stanford.

No início de sua carreira, Pólya escreveu, juntamente com Gábor Szegő, dois livros que tratam de resolução de problemas: Problemas e Teoremas de Análise. Posteriormente, começou a pesquisar sobre métodos de resolução de problemas e então escreve "How to Solve It" ("Como Resolvê-lo"), uma de suas obras mais famosas, lançada em 1945. Nessa obra, Pólya, mostra que para resolver um problema, o primeiro passo é compreender o problema. Depois de compreendê-lo, elaborar um plano e, logo após, executar esse plano. Por fim, o último passo para resolver bem um problema para Pólya (1995) será revisar a resolução do problema. Esse passo, Pólya (1995) denomina de retrospecto.

Além disso, Pólya ensinou professores a conversar, ensinar o estudante a refletir o problema de maneira que o estudante consiga reescrever a questão com suas próprias palavras, imaginar imagens que os auxilie nessa percepção, se há informações suficientes para a resolução do problema, entre outras observações até que o aluno possa responder o problema de maneira que execute todos os passos de maneira satisfatória.

Veremos na próxima seção mais detalhadamente, cada passo proposto por Pólya (1995), de maneira mais específica, no livro "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático".

3.2 Passos para a resolução de um problema

3.2.1 Conhecendo um pouco do livro "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático" de Pólya

O livro "A Arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático" de George Pólya, foi traduzido para a língua portuguesa por Hélio Lisboa de Araújo. Porém, as edições anteriores, tiveram títulos diferentes. Na publicação de 1978, o título era: "A arte de resolver problemas", já em 1994, o qual sofreu um acréscimo, e ficou: "A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático" e, por fim, em 1995, o título foi: "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático". Mas apesar da mudança no título do livro, seu conteúdo permaneceu inalterado.

O livro é dividido em quatro partes. A primeira parte intitulada de "Em aula" contém seções que trazem os objetivos da lista de sugestões e indagações que Pólya (1995) apresenta em de sua obra a Arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático e que citaremos em breve na tabela 3.1. Nessa primeira parte do livro, é onde fica sua essência, ou seja, logo após os objetivos da lista, ele traz as divisões principais e questões principais, uma seção que apresenta as quatro fases para a resolução de problemas: Compreensão do problema, Estabelecimento de um plano, Execução do plano e Retrospecto. Já na segunda parte do livro, traz como título: Como resolver um problema. Para explicar essa parte, Pólya (1995) escreve um diálogo entre um professor e um aluno idealizados. A terceira parte do livro traz um dicionário de Heurística e a quarta e, última parte "Problemas, Indicações e soluções”, propõe a solução de alguns problemas, mostrando a aplicação das fases sugeridas por Pólya.

A obra é voltada para professores e alunos, tendo o enfoque na participação do professor, não como aquele que apenas ensina a resolver um problema ou apresenta soluções prontas ou aplicações diretas, mecânicas e repetitivas de fórmulas matemáticas no processo de resolver questões, mas sim, um docente que instiga e propõe exercícios compatíveis com a maturidade cognitiva do aluno.

O docente e o discente, têm papéis definidos. O professor, no processo de ensino de como resolver problemas, é responsável por apresentar ao aluno problemas que desafiem a curiosidade dele e inquira indagações pertinentes com o objetivo que o estudante logre de forma independente efetuar o processo da resolução do problema de maneira correta, porém, com o mínimo de intervenção possível do professor, e, por fim, chegar ao objetivo de solucionar o problema.

A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático, é um clássico usado em trabalhos voltados à esse tema como vemos a seguir:

> [...] ao produzirmos um levantamento dos trabalhos sobre resolução de problemas constatamos que na maioria deles a obra de Polya (1978) é tomada como referência. [...] Outros trabalhos no formato de artigo como o de Nicolau (2009); Almeida J. E.; Ferreira (2010); Silva W. D.; Lamas (2010), publicados recentemente, também utilizam como aporte teórico Polya (1978). E na maioria deles há referência as etapas sugeridas na obra de Polya, que auxiliam na resoluções de problemas, tanto na sala de aula quanto no dia-a-dia, apesar de refletirem sobre a necessidade de flexibilizar o método, ou seja, o sucesso não está diretamente ligado ao fato de manter regras fixas, é possível pular etapas e ainda assim obter êxito. (COSTA; SILVA, 2013)

Apesar do ano em que foi escrito, até hoje os passos propostos por Pólya são utilizados na resolução de problemas, consciente ou intuitamente, e no ensino destes. Mesmo que em 1978, o foco do ensino era no professor e, o aluno era um sujeito passivo que apenas reproduzia o que era ensinado, “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático”, é um livro atual, no qual o professor auxilia, estimula o estudante a ter um raciocínio o mais independente possível, afim dele concretizar sua habilidade de resolver problemas e ganhar mais autonomia e confiança nesse processo.

Podemos ver, que essa autonomia está descrita nos Parâmeros Curriculares Nacionais, na relação entre o aluno e o saber matemático:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 1997, p. 37)

Apesar de Pólya relatar em seu livro que o resolver problemas é uma habilitação prática, e qualquer habilitação adquirimos pela imitação e repetição, ele também enfatiza que a participação do professor nesse processo, deve ser muito discreta assim como as indagações feitas ao estudante, para que ele consiga obter bons resultados no seu trabalho da maneira mais independente possível:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável de trabalho. (PÓLYA, 1995)

Assim, percebemos que mesmo sendo um livro da década de 70, é ao mesmo tempo atual, pois o aluno também é participante do processo ensino aprendizagem, e não apenas um imitador e reprodutor daquilo que o docente faz e ensina. O professor ao usar os métodos propostos por Pólya (1995) no ensino de resolver problemas, tem ao seu dispor os quatro objetivos principais para ser usado pelo aluno na resolução de um problema: compreender o problema; estabelecer um plano para resolver o problema; executar o plano; e, por último, fazer um retrospecto da resolução completa, revendo-a. A obra ajuda a professores que desejam desenvolver nos seus alunos a capacidade de resolver problemas e a estudantes que realmente queiram desenvolver a sua própria capacidade. É levada em conta a individualidade de cada indivíduo, e não a homogenização dos estudantes como uma massa. Percebemos isso quando lemos:

> O professor deve se colocar no lugar do aluno, perceber o ponto de vista desse, procurar compreender o que se passa em sua cabeça e fazer uma pergunta ou indicar um passo que poderia ter ocorrido pelo próprio estudante. (PÓLYA, 1995)

Além disso,

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. Por isso é fundamental não subestimar o potencial matemático dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscar estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 1997)

Percebemos que anos atrás dos Parâmetros Curriculares Nacionais serem implementados, Pólya já estava inovando o ensino e suas propostas são usadas e estudadas até os dias atuais, e todo professor de matemática, explicitamente ou não, utiliza seus passos, ou pelo menos parte deles.

3.2.2 Resolução de problemas: indagações, objetivos e fases

Pólya divide os problemas em dois tipos: problemas de demonstração e os problemas de determinação, os quais denominaremos de apenas problemas e serão o foco desse trabalho.

O objetivo dos problemas de demonstração, é mostrar conclusivamente que certa afirmativa, é verdadeira ou que é falsa. Já um problema de determinação é aquele que o objetivo é encontrar uma incógnita, sendo a incógnita aquilo que se procura ou que se necessita.

As partes principais dos problemas de determinação são: a incógnita, os dados e a condicionante. A condicionante relaciona a incógnita com os dados, por exemplo,

> [...] se tivermos de traçar um triângulo de lados a, b e c, a incógnita será um triângulo os dados serão os três comprimentos a, b e c e o triângulo terá de satisfazer a condicionante de que seus lados tenham comprimento a, b e c. (PÓLYA, 1995, p. 125)

A condicionante é uma das partes primordiais ou seja, é um requisito para se resolver um problema. Uma condicionante pode ser redundante ou contraditória. Quando ela aparece com dados excessivos, ela é redundante e, quando esses dados são divergentes, ela é contraditória.

Obervemos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1 ***Questão 13 - OBMEP - 2017 - Nível 2*** *Na figura vemos um quadrado dentro de outro, determinando uma região cinza. A área (em cm^2) e o perímetro (em cm) dessa região são numericamente iguais, ou seja, o valor numérico da soma dos perímetros desses quadrados é igual ao valor numérico da diferença entre suas áreas. Qual é a diferença entre as medidas dos lados desses quadrados?*

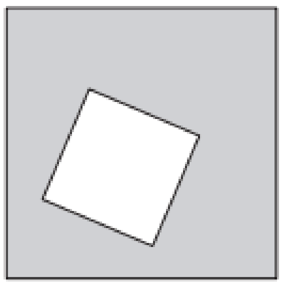
a) 1 cm

b) 4 cm

c) 6 cm

d) 8 cm

e) 10 cm



Seria impossível resolver esse problema sem a condicionante, que no exemplo acima é: o valor numérico da soma dos perímetros desses quadrados é igual ao valor numérico da diferença entre suas áreas.

Para Pólya, para resolver um problema, é fundamental seguir as seguintes fases:

- Primeira: Compreensão do Problema.

- Segunda: Establecimento de um plano.

- Terceira: Execução do plano.

- Quarta: Retrospecto.

Para uma melhor compreensão desses passos, Pólya sugeriu uma lista de indagações e sugestões. A seguir apresentaremos algumas das indagações:

Tabela 3.1: Lista de Indagações Adaptado de (PÓLYA, 1995, p. XIII)

Fases	Indagações
Compreensão do Problema	Qual é a incóginita? Quais são os dados? Qual a condicionante? É possível satisfazer a condicionante? A condicionante é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ou é redundante? Ou é contraditória? É possível separar as partes da condicionante?
Estabelecimento de um Plano	Já viu o problema antes? Conhece algum problema correlato? Conhece algum problema que lhe poderia ser útil? Encontrando um problema correlato, é possível utilizá-lo? É possível utilizar seu resultado? É possível reformular o problema? É possível reformulá-lo ainda de outra maneira? Utilizou todos os dados? Utilizou toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essenciais implicadas no problema?
Execução do Plano	É possível verificar claramente que o passo está correto?
Retrospecto	É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível perceber isso num relance? É posssível utilizar o resultado ou método, em algum outro problema?

Nas quatro partes em que o livro é dividido, o qual já citamos na subseção anterior, a primeira parte, intitulada de "Em aula" será nosso foco aqui. Nessa parte, contém 20 seções. As seções de 1 a 5 explanam os objetivos da lista de indagações e sugestões sob "Como resolver um problema" apresentada anteriormente. As seções de 6 a 14 falam sobre as 4 fases. São esses objetivos e essas fases que serão essenciais para que resolvamos os problemas de Geometria da OBMEP. As 20 seções da primeira parte do livro intitulada "Em Aula" são as seguintes:

1. Auxílio ao estudante.

2. Questões recomendações, operações mentais.

3. Generalidade.

4. Bom senso.

5. Professor e aluno, imitação e prática.
6. As 4 fases.
7. Compreensão do problema.
8. Exemplo.
9. Estabelecimento de um plano.
10. Exemplo.
11. Execução do plano.
12. Exemplo.
13. Retrospecto.
14. Exemplo.
15. Abordagens diversas.
16. O método de questionar do professor.
17. Questões boas e más.
18. Um problema de traçado geométrico.
19. Um problema de demonstração.
20. Um problema de razão de variação.

A seguir, faremos um breve resumo de algumas seções principais as quais consideramos de maior relevância para esse trabalho e das fases de resolução de um problema que empregaremos na resolução das questões de Geometria da OBMEP.

Objetivos

- **Auxílio ao estudante** - No processo de aprendizagem todo aluno depende do auxílio do professor, que deve ser equilibrado para não ser insuficiente e o aluno não conseguir qualquer avanço. Em contrapartida, esse auxílio não deve ser além do necessário fazendo com que o aluno não tenha esforço algum. Nesse processo, o ideal é que o estudante adquira maior autonomia possível na resolução dos problemas.

- **Questões, recomendações, operações mentais** - As indagações e sugestões que o professor elaborará para o aluno devem ser selecionadas e úteis para auxiliá-lo e despertar nele a ação que deve ser tomada para resolver o problema. Dessa forma, trazendo a atenção do aluno para a incógnita, o professor recairá muitas vezes nas mesmas perguntas, mesmo que elaboradas de formas diferentes, porém quando o discente estiver habituado com as indagações, ele mesmo as fará e operará mentalmente.

- **Generalidade** – Indagações e sugestões como: Qual a incógnita? Quais os dados? Quais as condicionantes? São inquirições que são genéricas a qualquer problema que será resolvido e não de um problema específico. Além disso são indagações que precisam ser feitas para uma melhor compreensão e mapeamento do problema. A depender do tipo de problema, algumas dessas perguntas não se encaixam, como por exemplo, nos problemas de demonstração os quais suas resoluções são formadas de hipótese e tese e não há nenhuma condicionante. Já nos problemas de determinação todas as inquirições propostas por Pólya se encaixam nas perguntas generalizadas.

- **Professor aluno: imitação e prática** – Ao fazer indagações generalizadas e com bom senso, o professor além de auxiliar o aluno em um sentido correto para solucionar o problema, ele irá desenvolver autonomia do estudante em resolver futuros problemas. Quando as indagações são genéricas, apenas se indica um caminho a seguir, mas as etapas da resolução é feita pelo aluno, pois o auxílio é discreto e, caso ele consiga resolver, considera-se que terá tido acréscimo em sua aprendizagem. As indagações feita pelos docentes aos estudantes, podem ser assimiladas por estes, e assim, o aluno, vai adquirir a habilitação prática de resolver problemas pela repetição dessas perguntas a si mesmos e pela prática.

As 4 fases

1. **Compreensão do problema** – é impossível responder uma pergunta se ela não foi compreendida. O aluno deve ter bem claro as respostas das seguintes perguntas: Qual

a incógnita? Quais os dados que o problema oferece? Quais as condicionantes?

É preciso ter bem claro o que é a condicionante, pois nem sempre ela está explícita no problema. Mas não basta apenas compreender bem o problema, o estudante deve ter nele um interesse aguçado para resolver o que lhe é proposto. Essa responsabilidade deve ser intrínseca do professor que deve estar atento em seu planejamento para trazer situações-problemas que despertem a curiosidade dos alunos de maneira que eles tenham vontade de resolver questão, pois nada é mais desmotivador que ter que chegar ao fim de algo que não se deseja. Nessa fase, o discente deve ter bem claro as respostas das perguntas da lista (Qual a incógnita? Quais os dados? Quais as condicionantes? É possível satisfazer as condicionantes?), para pular para a próxima fase. Caso o professor perceba que não houve alguma iniciativa dos alunos para começarem a elaborar um plano, ele deve reformular as indagações não respondidas anteriormente, numa nova tentativa de que os alunos compreendam o problema.

2. **Estabelecimento de um plano** – É através das indagações feitas pelo professor ao aluno, que a sequência de ideias vão surgindo na mente do aluno. É de fundamental importância a pergunta: já resolveu algum problema análago? Já resolveu algum problema que tivesse a mesma incógnita? É fundamental relevância essas indagações, pois idéias surgem de conhecimentos já adquiridos ou de situações vividas. Porém, mesmo usando essas perguntas, pode acontecer do estudante não conseguir estabelecer um plano. Daí, o professor pode fazer o seguinte questionamento: É possível reescrever o problema? É possível reescrevê-lo de forma mais simples e relacioná-lo a um problema análago? Ao conseguir reescrever o problema é possível abandonar parte da condicionante? Se o aluno conseguir, será uma contribuição adequada nessa fase.

   O importante é a iniciativa do aluno de organizar seus passos para o estabelecimento de um plano. Aqui está o principal feito na resolução de um problema.

3. **Execução do plano** – Agora que o aluno compreendeu bem o problema, tem um

roteiro geral de resolução traçado, essa etapa será mais tranquila e o estudante terá menos chances de erros, caso ele mesmo tenha estabelecido o plano, ainda que com ajuda. O importante é executar cada passo do plano definido vericando-os. Caso o aluno tenha recebido o plano de fora, do docente ou de algum colega ele poderá esquecer rapidamente.

4. **Retrospecto** - Ao resolver um problema e encontrar sua solução a maioria dos alunos automaticamente passam para outra questão ou fecham os cadernos como se toda a aprendizagem retirada do problema tivesse sido feita. Porém, fazer um retrospecto da resolução é uma fase importante e instrutiva do processo. A retrospectiva da resolução do problema proporciona o estudante a consolidar o conhecimento. O professor deve mostrar que nenhum problema fica completamente acabado. Sempre podemos aperfeiçoar qualquer resolução e aprimorar nossa compreensão do problema. O aluno pode observar se a resposta do problema pode ser verificada, ou se o argumento deve ser revisto. Uma indagação que é significativa nessa fase é: é possível chegar estalecer um plano diferente para chegar ao resultado? ou: é possível utilizar o método ou o resultado em algum outro problema?

   Assim, os estudantes poderão imaginar situações correlatas em que eles poderão usar o plano que eles estabeleceram e executaram, ou até mesmo poderá surgir em suas idéias uma nova situação onde eles perceberão que o mesmo plano pode ser usado na resolução. Tudo isso contribui para a consolidação do aprendizado e assim, o discente perceberá que um problema matemático, mesmo depois de ter encontrado sua solução ainda pode ser fonte de novos conhecimentos.

No Capítulo 4, resolveremos três questões de provas anteriores da OBMEP de Geometria, todas do nível 2. As questões foram escolhidas não ao acaso, mas a motivação é pela a autora desse trabalho já lecionar para os alunos de 8º e 9º anos, há mais de 4 anos, que é seu público alvo no Ensino Fundamental. Vamos resolver as questões escolhidas aplicando as fases e lista de indagações de George Pólya como foi descrito na última parte do capítulo anterior. Também, utilizaremos materiais manipuláveis com recortes, que será de grande colaboração para um melhor desempenho dos alunos na resolução de problemas no dia a dia na sala de aula e também nas provas da OBMEP.

Capítulo 4

Resolução de questões do nível 2 de Geometria da OBMEP utilizando as fases de Pólya

Apresentaremos neste capítulo questões de Geometria da OBMEP, retiradas de provas da primeira fase do nível 2, propondo suas resoluções usando as fases propostas por Pólya (1995) com o apoio de materiais manipuláveis. A confecção do material manipulável ficará a critério do professor, e cabe a ele confeccionar o material em sala instruindo os alunos de maneira que cada um faça o seu ou, levar uma figura manipulável de um tamanho tal que seja visível para apresentar a turma e depois deixar que cada aluno manipule ou, dependo da maturidade da turma, o professor pode pedir como tarefa que cada aluno traga pronto de casa o seu material, desde que o professor passe as instruções.

Exemplo 4.1 ***(OBMEP 2015 - Questão 9)*** *O trapézio ABCD foi dobrado ao longo do segmento CE, paralelo ao lado AD, como na figura. Os triângulos EFG e BFH são equiláteros, ambos com lados de 4 cm de comprimento. Qual é o perímetro do trapézio?*

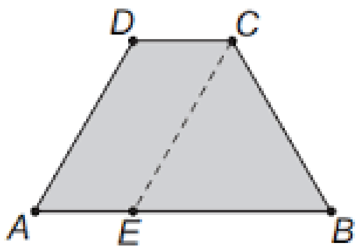
a) 16 cm

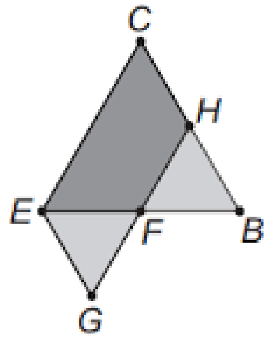
b) 18 cm

c) 20 cm

d) 24 cm

e) 32 cm





Resolução:

1. **Compreensão do problema**

   (a) Incógnita: P = Perímetro do trapézio.

   (b) Dados:
   - A figura ABCD é um trapézio;
   - Lados dos triângulos equiláteros.

   (c) Condicionantes:
   - Os lados AD e CE são paralelos;
   - Os triângulos EFG e BFH são equiláteros.

2. **Estabelecimento de um plano**

   (a) Uma primeira indagação que pode ser feita:
   - Conhece algum problema correlato?
   - Possui alguma definição que possa ajudar na resolução do problema?

   (b) Caso o aluno ainda não tenha resolvido algum problema com paralelogramo, o professor pode perguntar:
   - Conhece as figuras formadas na questão? (Aqui o docente apresenta ao aluno o material manipulável com recortes)
   - O professor pode pedir o aluno para construir a figura manipulável da seguinte maneira: Para construir o trapézio de forma manipulável o professor deve observar que a base maior do trapézio mede o triplo da base menor, o lado CB mede o dobro da base menor, o ângulo ABC mede 60 graus e o ângulo CDA mede 120 graus. Essa ação pode ser feita em sala ou dada como tarefa para cada aluno fazer em casa.
   - O professor pode pedir para o aluno separar as figuras geométricas que formam a figura dada na questão.

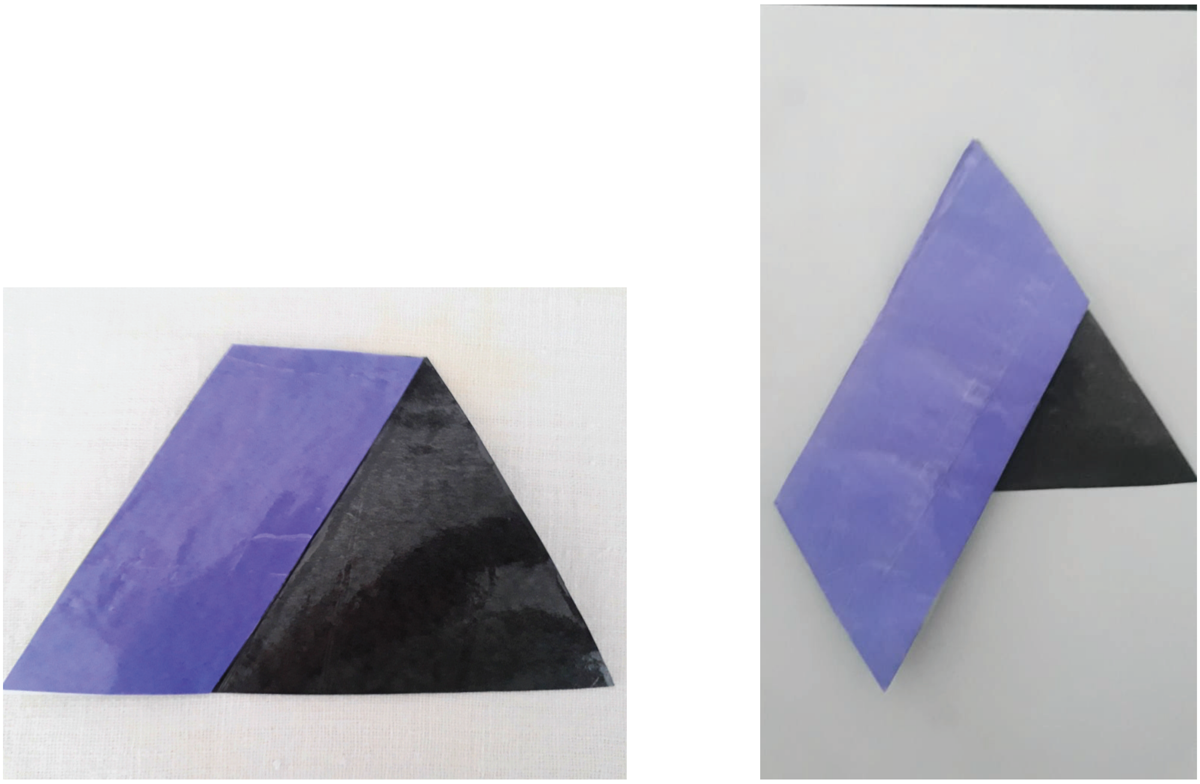


Figura 4.1: Trapézio ABCD e sua dobra em forma Manipulável

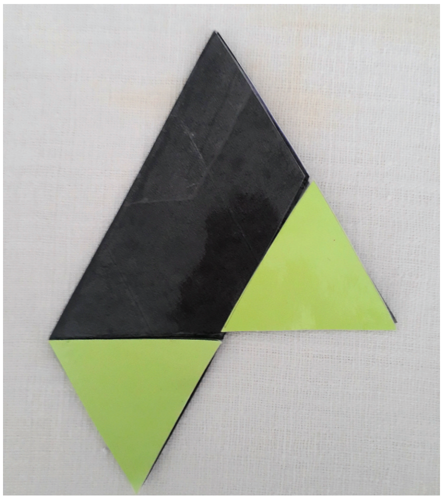


Figura 4.2: Formação da nova figura após a dobra do Trapézio ABCD

- Ao reconhecer as figuras apresentadas no material manipulável com recortes o professor pode indagar para o aluno:
- Como se calcula o perímetro?
- Quais as características de um trapézio?
- Quais as propriedades de um paralelogramo?

- Qual a definição de um triângulo equilátero?

De fato, ao realizar a dobra temos que o paralelogramo ADCE dá origem outro paralelogramo congruente GHCE.

3. **Execução do Plano**

- Primeiramente, o aluno deve se recordar de como se calcula o perímetro de uma figura. Em seguida, concluir que o trapézio ABCD tem o perímetro dado por

$$P = AD + CD + BC + AB.$$

- Encontremos as medidas de cada um desses lados.
- Na fase de estabelecimento de um plano, o aluno deve perceber que o paralelogramo $ADCE$ é cogruente ao paralelogramo $GHCE$. Assim, deve concluir que

$$AD \cong GH, CD \cong HC, AE \cong EG.$$

Assim,

$$\begin{aligned} AD &\cong GH; \\ CD &\cong CH; \\ BC &\cong CH + BH; \\ AB &\cong AE + EB = EG + EF + BF. \end{aligned}$$

- Sabendo que os triângulos EFG e BFH são equiláteros, o aluno é capaz de observar que:

$$EG \cong EF \cong FG \cong FH \cong BH \cong BF = a = 4cm.$$

- Além disso, como ECHG é um paralelogramo, lembrando uma das propriedades de paralelogramo, o aluno conlcui que

$$EG \cong CH = a = 4cm$$

e

$$EC \cong GH = GF + FH = a + a = 2a = 8cm.$$

- Assim, ele já possui a medida de todos os lados do trapézio,

$$\begin{aligned} AD &= GH = 2a = 8cm \\ CD &= CH = a = 4cm, \\ BC &= CH + BH = 2a = 8cm, \\ AB &= EG + EF + BF = 3a = 12cm. \end{aligned}$$

- Agora é só somar e o perímetro será

$$\begin{aligned} P &= AD + CD + BC + AB \\ &= 8cm + 4cm + 8cm + 12cm \\ &= 32cm. \end{aligned}$$

4. **Retrospecto**

   - É possível resolver o problema por outro caminho?
   - É possível usar esse resultado ou método em outro problema?
   - Pode -se fazer o retrospecto relendo o problema e conferindo a resolução.
   - Caso ECHG não fosse um paralelogramo, conseguiríamos resolver o problema?
   - E, se os triângulos EFG e BFH não fossem equiláteros, seria possível resolver o problema?
   - Se reduzissemos, à metade, a medida dos lados dos triângulos, o que aconteceria com o resultado?
   - Aqui o professor poderá pedir ao aluno para reduzir o lado algébricamente, como por exemplo: Se o lado do triângulo mede a, o novo lado reduzido será $\frac{a}{2}$. Dessa forma, o aluno pode desenvolver a resolução desde o início, na execução do plano, ou apenas substituir no resultado algébrico anteriormente, encontrando o valor do novo lado. Daí, o aluno analisará algebricamente que o resultado do perímetro reduziu à metade.
   - Também, o professor, pode pedir depois, que o aluno substitua apenas o valor numérico, a = 2cm, como verificação do resultado encontrado no item anterior.

Exemplo 4.2 ***(OBMEP 2015 - Questão 07)*** *A figura abaixo é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos. Se M é o ponto médio de AB, qual é a área total da figura?*

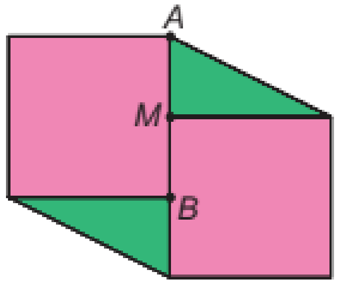
a) 90 cm^2

b) 96 cm^2

c) 100 cm^2

d) 108 cm^2

e) 120 cm^2



Resolução:

1. **Compreensão do problema**

   (a) Incógnita: $A =$ Área da figura.

(b) Dados:

- A figura é formada por dois quadrados e dois triângulos;
- Medida do lado do quadrado: $a = 6cm$;

(c) Condicionante:

- M é ponto médio;

2. **Estabelecimento de um plano**

(a) Uma primeira indagação que pode ser feita:

- Conhece algum problema correlato?
- Já resolveu algum problema que a incógnita fosse área de alguma das figuras apresentadas no problema?

(b) O professor pode apresentar o material com recortes manipulável nesse momento para concretizar a figura do problema ao aluno e, caso o aluno ainda não tenha resolvido algum problema com alguma das figuras (quadrado ou triângulo), esse material será de grande auxílio, e depois, o docente pode perguntar:

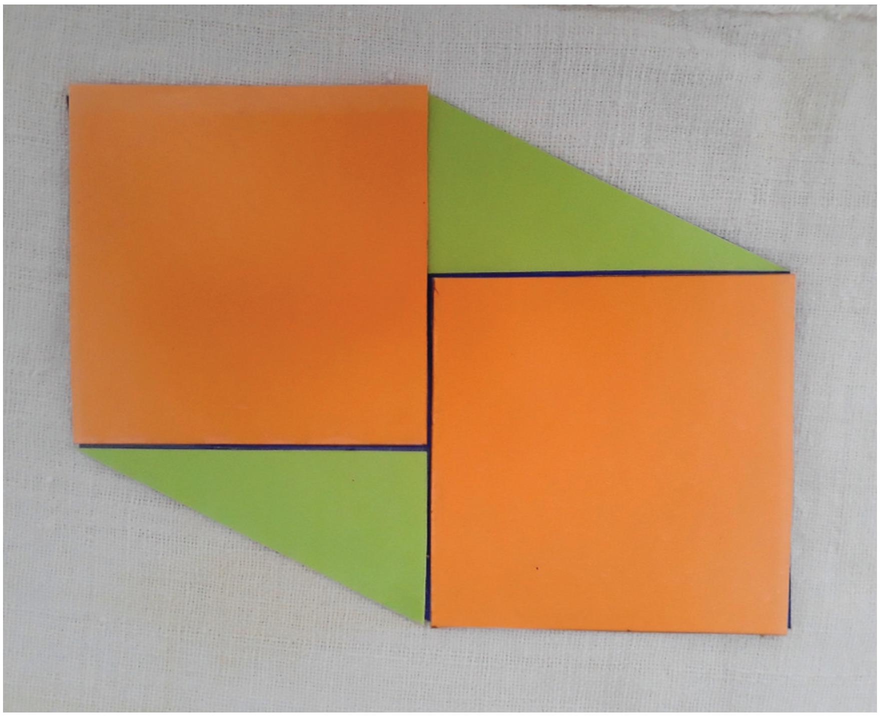


Figura 4.3: Figura manipulável

- Conhece as figuras formadas na questão? Nesse momento o professor pode pedir para o aluno separar as figuras do material manipulável com recortes.

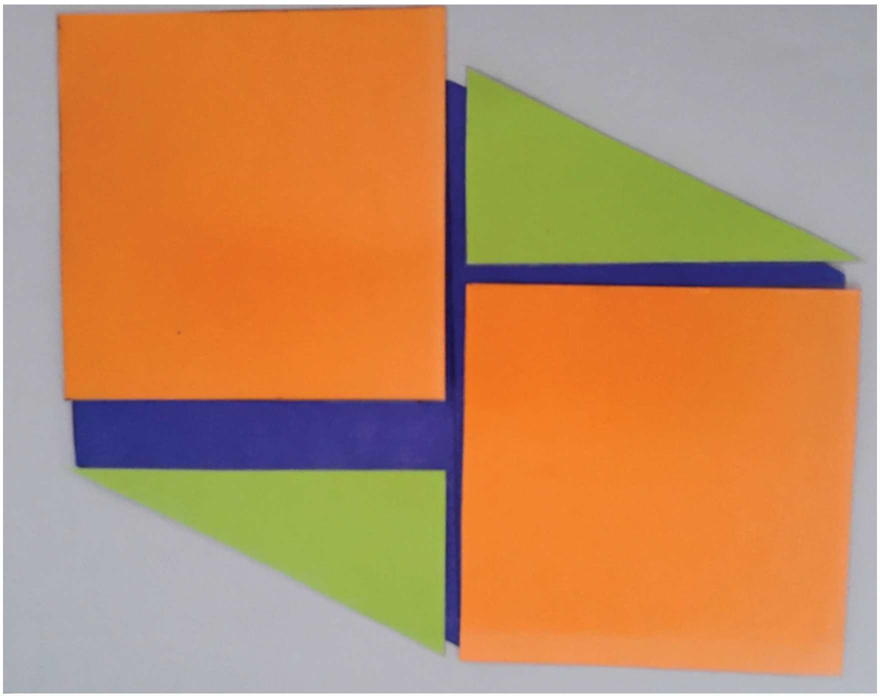


Figura 4.4: Formas geométricas na figura

(c) Ao reconhecer as figuras apresentadas no material manipulável com recortes o professor pode indagar para o aluno:

- O que é um quadrado? Quais suas características?
- O que é um triângulo? Quais os triângulos que você conhece? O triângulo do problema se classifica em qual dos que você me apresentou?
- É necessário descobrir a medida de todos os lados do triângulo? Se não, quais os que precisamos encontrar?
- Para descobrir a incógnita precisaremos de que conhecimento?
- Você sabe como se calcula área de um quadrado? E a área de um triângulo?

3. **Execução do Plano**

- O professor deverá se certificar de que o aluno se recorda o que é um ponto médio. Com essa definição clara, o aluno deverá perceber que M é ponto médio do lado do quadrado AB, então a medida de $AM = \frac{a}{2} = 3cm$ que é cateto do triângulo que é retângulo de lados a, $\frac{a}{2}$ e c.

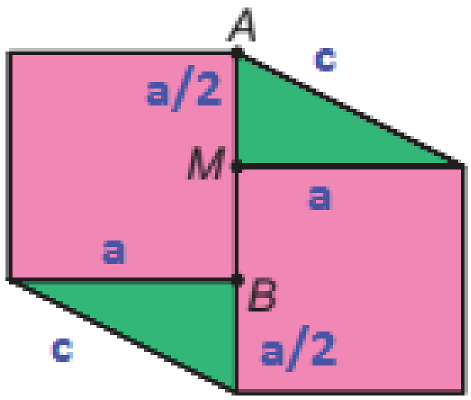


Figura 4.5: Identificando as Medidas

- Vamos denominar a área do quadrado de A_q e a área do triâgulo de A_t
- Daí então, só resta ao aluno aplicar os dados nas fórmulas de área. Calculando a área do quadrado temos:

$$A_q = (a)^2 = 6^2 = 36cm^2.$$

- Agora, calcula-se a área do triângulo:

$$A_t = \frac{a.\frac{a}{2}}{2} = \frac{6.\frac{6}{2}}{2} = 9cm^2.$$

- Como temos dois triângulos retângulos e dois quadrados iguais, para calcular a área total da figura, basta fazer:

$$A = 2A_q + 2A_t.$$

- Então a área da figura será:

$$A = 90cm^2.$$

4. **Retrospecto**

- É possível resolver o problema por outro caminho?
- É possível usar esse resultado ou método em outro problema?
- Pode-se fazer o retrospecto relendo o problema e conferindo a resolução.

- Caso não fosse fornecido pelo problema que M é ponto médio, seria possível a resolução?
- Na questão anterior verificamos que ao dobrar o lado do triângulo, o perímetro também dobrou. Mas, nesse problema o que acontece com a área se dobrarmos o lado do quadrado? O resultado final também dobra? E se reduzirmos à metade?

  Vamos aqui sugerir uma outra forma de como o professor pode direcionar o aluno e fazer uma resolução algébrica.
- **Resolução algébrica**

  Caso o lado do quadrado dobre sua medida, teremos que $AM = a$.

  No item Execução do Plano vimos que ao desenvolvermos algébricamente a fórmula da área total ficou da seguinte forma:

$$A = 2A_q + 2A_t = 2.(a)^2 + 2.\frac{a.\frac{a}{2}}{2} = \frac{5.a^2}{2}.$$

  Mas nessa resolução, $AM = a$. Nessa nova situação proposta, vamos dobrar o lado do quadrado. Daí teremos o lado $l = 2a$ e $AM = a$.

  Assim, a nova área $\tilde{A}$ será

$$\tilde{A} = 2.(2a)^2 + 2.\frac{2a.a}{2} = 8a^2 + 2a^2 = 10a^2.$$

  Ora, mas $10a^2$ é o quádruplo de $\frac{5.a^2}{2}$.

  Então o professor aqui pode repetir a pergunta: o que acontece com a área se dobrarmos o lado da figura?

  Percebemos que a razão de proporcionalidade da segunda área para a primeira área é de 4.

  Daí, o professor poderá brincar com o aluno com outras medidas e o aluno perceberá que se os lados triplicarem, a razão de proporcionalidade aumenta 3^2, ou seja 9 vezes.

  Caso os lados sejam quadruplicados, a razão de proporcionalidade entre as áreas será de 4^2, ou seja igual a 16.

  Uma outra sugestão, é que quando o professor for trabalhar razões de semelhanças e de proporcionalidade ele já terá esse exercício como um problema correlato.
- O professor pode trabalhar com valores numéricos afim de motivar o aluno à verificar esses resultados, façamos

$$\mathbf{a = 12.}$$

  Assim,

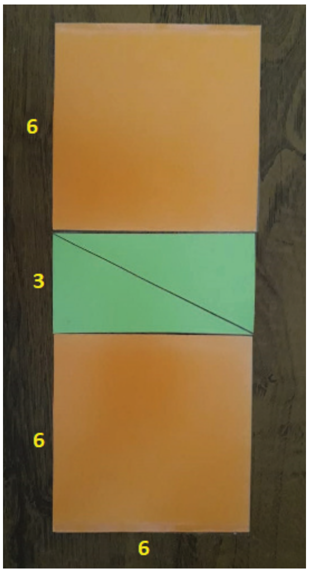
$$A = 2A_q + 2A_t = 2.(a)^2 + 2.\frac{a.\frac{a}{2}}{2} \Rightarrow A = 360cm^2.$$

  Logo, o resultado quadruplicou o resultado do exercício proposto.

- Fica a critério do professor fazer outras substituições numéricas com o objetivo de consolidar o aprendizado desse tipo de problema na memória do aluno.

Outras maneiras de resolver o problema

1º Sugestão - Transformar a figura em um retângulo



- Base do retângulo:

$$b = 6cm.$$

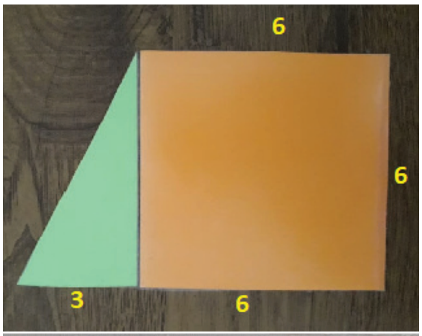
- Altura do retângulo:

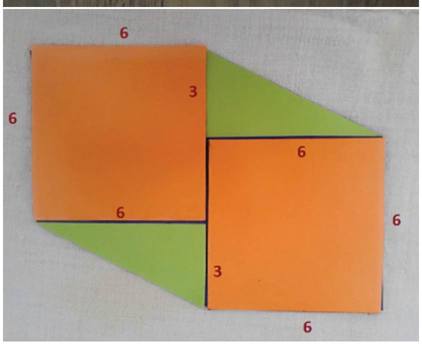
$$h = 6cm + 3cm + 6cm = 15cm.$$

- Logo, a área será:

$$A = b \times h = 6cm \times 15cm = 90cm^2.$$

2ª Sugestão: Transformar a figura em dois trapézios





- Cada trapézio terá as seguintes medidas para a base maior, base menor e altura, respectivamente:

$$B = 3cm + 6cm = 9cm,$$

$$b = 6cm,$$

$$h = 6cm.$$

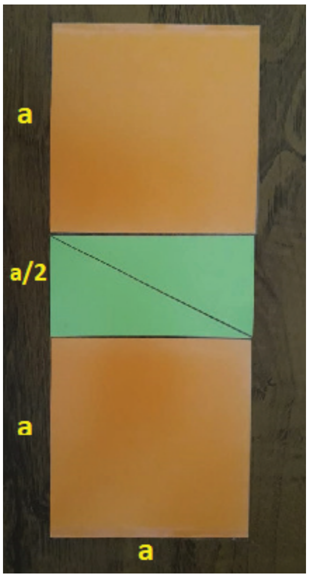
- Assim, a área de cada trapézio será:

$$A_1 = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{(9+6) \times 6}{2} = 45cm^2.$$

- Como temos dois trapézios iguais, temos que:

$$A = 2 \times 45 = 90cm^2.$$

3ª Sugestão: Uma solução algébrica



- Se os lados do quadrado medirem a, então a área da figura será

$$A = a \times (a + \frac{a}{2} + a) = \frac{5a^2}{2}.$$

Exemplo 4.3 ***(OBMEP 2017 - Questão 14)*** *Pelo centro do quadrado da Figura 1 traçam-se duas retas perpendiculares, que o dividem em quatro quadriláteros iguais. Esses quadriláteros são rearranjados em outro quadrado maior, como na Figura 2. Qual é a área do quadrado ABCD da Figura 2?*

a) 16 cm^2

b) 25 cm^2

c) 36 cm^2

d) 49 cm^2

e) 64 cm^2

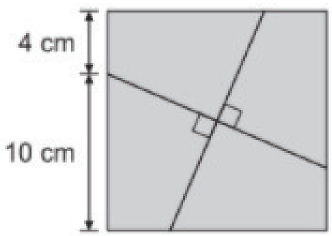


Figura 1

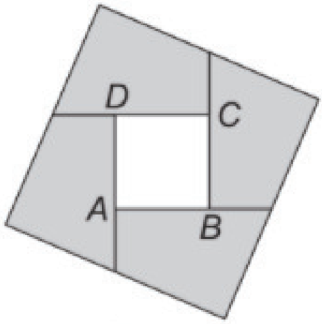


Figura 2

Resolução:

1. **Compreensão do problema**
   (a) Incógnita: Área do quadrado ABCD.
   (b) Dados:
   - A figura 1 e a figura ABCD são quadrados.
   - As retas que dividem a figura 1 em quadriláteros, são retas perpendiculares
   (c) Condicionantes:
   - Os 4 quadriláteros formados pelas retas perpendiculares são iguais.
   - A figura ABCD ser um quadrado.
2. **Estabelecimento de um plano**

(a) Uma primeira indagação que pode ser feita:

- Conhece algum problema correlato?
- Possui alguma definição que possa ajudar na resolução do problema?
- Conhece as figuras formadas na questão? Nesse momento o professor exibirá para o aluno o material manipulável com recortes.

Figura 4.6: Quadrado da Figura 1 manipulável

- Ao exibir o material manipulável com recortes respectivo à Figura 1, o professor pode pedir aos alunos para manipular a figura, deslocando os quadriláteros e os posicionando no quadrado maior de maneira que formem o quadrado menor, conforme está explícito na Figura 2. Assim, ficará bem mais fácil para eles encontrarem a medida do lado do quadrado formado pela nova disposição dos quadriláteros na Figura 2.

Figura 4.7: Formação do Quadrado da Figura 2 do Exemplo 4.3

- Considerando que a questão anterior tenha sido resolvida nessa mesma aula, ou em aulas anteriores, podemos considerar que o aluno já tem conhecimento da área de um quadrado.
- Com esses dados conseguimos encontrar a medida do lado do quadrado?
- Para encontrar a incógnita, é necessário descobrir a medida de todos os lados do quadrilátero? Se não, quais os lados que precisamos encontrar?

(b) Ao reconhecer as figuras apresentadas no material manipulável com recortes o professor pode indagar para o aluno:

- Quais as propriedades de um quadrilátero?

(c) É interessante também o professor nomear os lados dos quadriláteros, ou propor ao aluno que faça essa nomeação no intuito de que o aluno observar a semelhança entre os quadriláteros da questão e fazer a relação entre os lados de cada uma.

Figura 4.8: Nomeando os lados dos quadriláteros no material manipulável

3. **Execução do Plano**

   - Fazendo a relação entre os lados nomeados no material manipulável na Figura 4.8 com a figura da questão, o aluno deve ser capaz de identificar o valor das medidas dos lados L_1 e L_2, sendo

   $$L_1 = 4cm \text{ e } L_2 = 10cm.$$

   - Daí, o docente deve aguardar o aluno concluir que o lado do quadrado

   $$AD = 10cm - 4cm = 6cm.$$

   - Finalmente, o aluno deverá aplicar essa medida descoberta na fórmula de área do quadrado:

   $$A = (AD)^2 = 6cm \times 6cm \Rightarrow A = 36cm^2.$$

4. **Retrospecto**

   - É possível resolver o problema por outro caminho?
   - É possível usar esse resultado ou método em outro problema?
   - Pode -se fazer o retrospecto relendo o problema e conferindo a resolução.
   - Caso os quadriláteros não fossem iguais, seria possível resolver esse problema apenas com os dados que temos?
   - Se dobrássemos a medida dos lados dados dos quadriláteros, o que aconteceria com o resultado?
   - O estudante perceberá que a solução tem semelhança proporcional com o aumento ou diminuição das medidas dos lados dos quadrados.
   - Como no problema anterior já foi trabalhado quadrados e proporção, aqui o professor pode dar uma independência maior ao aluno. Porém sempre auxliando com mais perguntas de acordo com o desempenho de cada estudante.

Acreditamos que ao trazer propostas assim para a sala de aula, o aproveitamento da aula e o aprendizado que isso trará ao aluno será muito maior que somente resolver questões no quadro ou simplesmente tirar dúvidas. Nas fases sugeridas por Pólya (1995) , percebemos a riqueza que pode ser explorada ao resolver um problema, e dentro dele extrairmos perguntas que podem ser respondidas pelo próprio estudande através da mesma resolução que ele mesmo efetuou, e assim consolidando a aprendizagem.

Considerações Finais

Resolver problemas da OBMEP de Geometria nas aulas de Matemática utilizando os métodos de Pólya (1995), faz com o interesse dos alunos seja aguçado e suas habilidades matemáticas sejam desenvolvidas de maneira sólida.

Nesse trabalho, vimos como o método de Pólya nos revela a imensidão de recursos e conteúdos que podem ser explorados em um só problema e como ele coopera com o aprendizado dos nossos alunos ao deixar de resolver problemas por resolver, sem analisá-los ou até mesmo entendê-los, de maneira que a experiência de resolver um problema pode ser a chave para resolver muitos outros. E, ao retornar as aulas pós pandemia tenho o objetivo de inserir essa nova didática nas aulas, acreditando que contribuirá muito com o progresso dos alunos.

A didática de reproduzir, aplicação direta e mecânica de fórmulas já mostrou que pouco contribui para uma aprendizagem consolidada. A Geometria é um ramo belíssimo da matemática e pode "colorir", e muito, as nossas aulas, tornando a aprendizagem mais prazerosa.

Apesar das demandas do professor serem muitas, sempre existem maneiras de inovar e se reinventar para cooperar com o processo de ensino-aprendizagem do nosso país. Esse deve ser nosso objetivo.

Ao desenvolver esse trabalho, percebi o quanto preciso inovar e acrescentar às minhas aulas de Matemática problemas que desafiem o aluno, e, na verdade o que impede que esses problemas não sejam das provas anteriores da OBMEP?

A mudança é necessária. Não podemos abortar esse vasto mundo da imaginação e aprendizagem dos nossos alunos. Eles são futuros talentos para contribuirem na ciência do nosso país e a OBMEP é um meio de levá-los a alcançar degraus mais altos.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA J. E.; FERREIRA, C. R. *Resolução de problemas: uma proposta metodológica para o ensino de geometria espacial*. [S.l.], 2010. Disponível em: ⟨http://pt.pdfsb.com/readonline/5956524166517437563378304358526d56413d3d5067673⟩. Acesso em: 20 de jan de 2013.

BIONDI, R. L.; VASCONCELLOS, L.; FILHO, N. M. *Avaliando o impacto da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - na qualidade da educação*. [S.l.: s.n.], 2012. v. 12. 4 p.

BNCC. *Base nacional comum curricular*. Brasília: MEC, 2019. 595 p. Disponível em: ⟨http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf⟩. Acesso em: 30 jan. 2020.

BRASIL. *Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. ISBN 978 − 857783 − 136 − 4.

CLUBESOBMEP. *Clubes da OBMEP*. [S.l.], 2020. Disponível em: ⟨http://clubes.obmep.org.br/blog/sobre/o-que-e-preciso-para-montar-um-com/⟩. Acesso em: 10 de agosto de 2020.

COSTA, A. A.; SILVA, A. M. *Uma releitura do livro "A arte de resolver problemas"de George Pólya (1978)*. [S.l.: s.n.], 2013. 13 p.

DIENES, Z. P. *Exploração do espaço e prática da medição. São Paulo*. São Paulo: Editora pedagógica e Universitária, 1974.

INEP. *No ensino médio, 67% dos estudantes têm desempenho crítico em Matemática*. [S.l.], 2020. Disponível em: ⟨http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/no-ensino-medio-67-dos-estudantes-tem-desempenho-critico-em-matematica/21206⟩. Acesso em: 19 de outubro de 2020.

LOBO, J. S.; BAYER, A. O ensino de geometria no ensino fundamental. *ACTA SCIENTIAE*, v. 6, n. 1, p. 8, 2004.

LORENZATTO, S. A. Porque não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, n. 4, p. 13, 1995.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. *Parâmetros Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEF, 1997. v. 10.

NICOLAU, C. *Tendências em Educação Matemática- Resolução de Problemas: Como resolver um problema envolvendo Função Exponencial*. [S.l.], 2009. Disponível em: ⟨http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/411-4.pdf⟩. Acesso em: 20 de jan de 2013.

OBMEP. *Regulamento*. [s.n.], 2020. Disponível em: ⟨http://www.obmep.org.br/images/regulamento2020.pdf⟩.

OXAROPE. *Alunos da Escola Chico Mendes são premiados na Olimpíada de Matemática*. [S.l.], 2017. Disponível em: ⟨https://oxarope.com/noticias/20677/alunos-da-escola-chico-mendes-sao-premiados-na-olimpiada-de-matematica-04-12-2017/⟩. Acesso em: 10 de agosto de 2020.

POLLI, C. T. S.; FIGUEIREDO, H. R. S. Possíveis aplicações dos materiais manipuláveis no ensino da geometria para os anos iniciais. *Encontro Paranaense de Educação Matemática*, p. 9, 2017.

PÓLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. 2. ed. Rio de Janeiro: tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo, 1995. ISBN $978-857783-136-4$.

REGULAMENTOOBMEP. *Regulamento da* 16^a *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas OBMEP 2020*. [S.l.], 2020. Disponível em: ⟨http://www.obmep.org.br/regulamento.htm⟩. Acesso em: 10 de agosto de 2020.

ROCCO, C. C. M. K.; FLORES, C. R. O ensino de geometria: problematizando o uso de materiais manipuláveis. *Ebrapem*, p. 10, 2008.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. *O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades*. [S.l.], 2013. Disponível em: ⟨http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf⟩. Acesso em: 10 de agosto de 2020.

SILVA A.; MARTINS, S. *Falar de Matemática hoje é ...* Instituto Superior Politécnico de Viseu, 2000. Disponível em: ⟨http://www.ipv.pt/millenium/20_ect5.htm.⟩ Acesso em: 10 de agosto de 2020.

SILVA W. D.; LAMAS, R. C. P. Aplicação da metodologia de resolução de problemas na geometria. *Anais do XXXIII CNMAC*, v. 3, p. 1–14, 2010.