Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Matemática e Estatística

Márcio Anderson de Sá Pereira

Geometria Projetiva: um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica.

Rio de Janeiro

2019

Márcio Anderson de Sá Pereira

Geometria Projetiva: um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede nacional PROFMAT, da Universidade Estadual do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos

Rio de Janeiro

2019

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

P436 Pereira, Márcio Anderson de Sá.
Geometria Projetiva: um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica / Márcio Anderson de Sá Pereira. – 2019.
126f. : il.

Orientador: Francisco Roberto Pinto Mattos.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Geometria descritiva - Teses. 2. GeoGebra (Programa de computador) - Teses. 3. Ensino auxiliado por computador – Teses. I. Mattos, Francisco Roberto Pinto. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU 514.144

Patrícia Bello Meijinhos – CRB7- 5217 - Bibliotecária responsável pela elaboração da ficha catalográfica.

Márcio Anderson de Sá Pereira

Geometria Projetiva: um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica.

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, da Universidade Estadual do Rio de Janeiro.

Aprovada em 30 de agosto de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Francisco Roberto Pinto Mattos (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Prof.ª Dra. Flavia dos Santos Soares
Instituto de Matemática e Estatística da UFF – PPG/FEUFF

Prof. Dr. Rogério Quintino de Oliveira Junior
Instituto de Matemática e Estatística – Profmat – UERJ

Rio de Janeiro

2019

DEDICATÓRIA

À minha família pelos incentivos diários, comprometimento e sacrifício de aguentar minha ausência em muitos momentos. A ela dedico toda minha vida profissional e acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus, que é minha fortaleza, meu refúgio sempre presente em minha vida.

Ao meu pai, legítimo desbravador, Francisco de Assis Pereira e a minha guerreira mãe Maria do Socorro, que, juntos, sempre fizeram o impossível para dar todo amparo, incentivo e valores necessários para que eu e meus irmãos crescêssemos, estudássemos e nos tornássemos cidadãos do bem.

À minha esposa Marise Farias Duarte, verdadeira deusa Atenas, meu porto seguro que sempre acreditou, me incentivou e deu todo suporte para que eu pudesse chegar a esta conquista tão importante.

À minha querida filha Marina Duarte Pereira, pela compreensão e carinho neste período de muito estudo.

Ao meu orientador Dr. Francisco Roberto Mattos Pinto, pela orientação e paciência com que sempre me recebeu.

Aos meus amigos e professores que sempre contribuíram diretamente ou indiretamente para esse sucesso.

À Instituição UERJ, que me recebeu de braços abertos.

Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.

Ayrton Senna

RESUMO

PEREIRA, M.A.S. *Geometria Projetiva:* um breve relato histórico, artístico, teórico e aplicações com Geometria Dinâmica. 2019. 126f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

O presente trabalho apresenta um passeio sobre o contexto histórico, artístico e teórico da Geometria Projetiva. Aborda a origem da geometria dando ênfase ao Renascimento, período da história no qual surge a Geometria Projetiva. O Estudo tem como objetivo apresentar alguns teoremas relacionados a Geometria Projetiva e a sua relação com os principais artistas deste período. Esta pesquisa ainda irá sugerir algumas metodologias no ensino deste conteúdo através de Softwares de Geometria Dinâmica. Considerando as possibilidades de abordar o ensino atual da geometria, optamos como foco do nosso trabalho a seguinte questão: Como é possível trabalhar as teorias da Geometria Projetiva a partir da Geometria Dinâmica no Ensino Fundamental? Pretendemos, desse modo, facilitar a compreensão desta Geometria, e ser referência principalmente aos docentes que não se identificam com a disciplina.

Palavras-Chave: Geometria Projetiva. Geometria Dinâmica. Geogebra. Educação Básica.

ABSTRACT

PEREIRA, M.A.S. *Projective Geometry*: a breaf historical, artistic, theoretical report and aplications whith Dynamic Geometry. 2019. 126f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019.

The present work presents a tour on the historical, artistic and theoretical context of Projective Geometry. It addresses the origin of geometry with an emphasis on the Renaissance, a period of history in which Projective Geometry appears. The study aims to present some theorems related to Projective Geometry and its relationship with the main artists of this period. This research will also suggest some methodologies in the teaching of this content through Dynamic Geometry Software. Considering the possibilities of approaching the current teaching of geometry, we chose as the focus of our work the following question: How is it possible to work the theories of Projective Geometry from Dynamic Geometry in Elementary School? In this way, we intend to facilitate the understanding of this Geometry, and be a reference mainly to teachers who do not identify with the discipline.

Keywords: Projective Geometry. Dynamic Geometry. Geogebra. Basic Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Papiro de Rhind	19
Figura 2 -	Papiro de Moscou	20
Figura 3 -	Ptolomeu (gravura do século XVI)	22
Figura 4 -	Busto de Pitágoras	23
Figura 5 -	Busto de Platão	24
Figura 6 -	Busto de Aristóteles de Macedônia	25
Figura 7 -	Representação artística de Euclides	26
Figura 8 -	Frontispício da primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa dos Elementos de Euclídes, 1570	27
Figura 9 -	Capa de uma edição recente de “Os Elementos”	28
Figura 10 -	Representação artística de Hipátia de Alexandria	30
Figura 11 -	Representação artística de Blaise de Pascal	32
Figura 12 -	Representação artística de Girard Desargues	32
Figura 13 -	David Hilbert	34
Figura 14 -	Henri Poincaré	38
Figura 15 -	A pesagem das almas, Cena 6 da Taula de Saint Miguel (SORIGUEROLA, 2006)	41
Figura 16 -	Santa Ceia, Cena 4 da Taula de Saint Miguel (SORIGUEROLA, 2006)	42
Figura 17 -	Projeção em tela de pintura – Monalisa	43
Figura 18 -	Cúpula da Igreja de Santa Maria del Fiori – A Catedral de Florença	45
Figura 19 -	Busto de Leon Battista Alberti	45
Figura 20 -	Capa Della Pittura	46
Figura 21 -	Ideias de Alberti	47
Figura 22 -	Palácio Rucellai	47
Figura 23 -	Cidade Ideal de Pierro dela Francesa	48
Figura 24 -	Esboço de “A Ceia” de Leonardo da Vinci	49
Figura 25 -	A Ceia, de Leonardo da Vinci	49
Figura 26 -	Teorema de Desargues	50
Figura 27 -	Representação artística de Jean Victor Poncelet	51
Figura 28 -	Princípio da Continuidade de Poncelet	53
Figura 29 -	A Virgem com o Menino, Memmo di Filippucio	54

Figura 30 - Madona e a Criança, Giovanni Bellini.. 55
Figura 31 - Ideias intuitivas de incidências.. 56
Figura 32 - Ideias intuitivas de incidências.. 56
Figura 33 - Projeção da Circunferência.. 57
Figura 34 - Projeções da Circunferência... 58
Figura 35 - Representação geométrica do axioma 1 de geometria projetiva............. 59
Figura 36 - Representação geométrica do axioma 2 de geometria projetiva............. 59
Figura 37 - Representação geométrica do axioma 3 de geometria projetiva............. 59
Figura 38 - Ponto de fuga.. 60
Figura 39 - Ponto de fuga.. 61
Figura 40 - Ponto de fuga.. 61
Figura 41- Representação do ponto do infinito.. 62
Figura 42- Pintura Egípcia... 62
Figura 43 - Crucificação, de Giotto.. 63
Figura 44 - Arte ótica... 64
Figura 45 - Hogart, Falsa Perspectiva.. 65
Figura 46 - Escher, falsa perspectiva... 66
Figura 47 - Ilusão de ótica, Salvador Dalí.. 66
Figura 48 - Atividade 1.1... 74
Figura 49 - Atividade 1.2... 75
Figura 50 - Atividade 1.3... 75
Figura 51 - Atividade 1.4... 76
Figura 52 - Atividade 1.5... 76
Figura 53 - Atividade 1.6... 77
Figura 54 - Atividade 1.7... 77
Figura 55 - Atividade 1.8... 78
Figura 56 - Atividade 1.9... 78
Figura 57 - Atividade 1.10... 79
Figura 58 - Atividade 1.11... 79
Figura 59 - Atividade 1.12... 80
Figura 60 - Ponto de Fuga.. 80
Figura 61 - Ponto de Fuga.. 81
Figura 62 - Ponto de Fuga.. 81

Figura 63 -	Ponto de Fuga	82
Figura 64 -	Atividade 2.1	83
Figura 65 -	Atividade 2.2	83
Figura 66 -	Atividade 2.3	84
Figura 67 -	Atividade 2.4	84
Figura 68 -	Atividade 2.5	85
Figura 69 -	Atividade 2.6	85
Figura 70 -	Atividade 2.7	85
Figura 71-	Atividade 3.1	86
Figura 72 -	Atividade 3.2	87
Figura 73 -	Atividade 3.3	87
Figura 74 -	Atividade 3.4	88
Figura 75 -	Atividade 3.5	88
Figura 76 -	Atividade 3.6	89
Figura 77 -	Atividade 3.7	89
Figura 78 -	Atividade 3.8	90
Figura 79 -	Atividade 3.9	90
Figura 80 -	Atividade 3.10	91
Figura 81 -	Atividade 3.11	91
Figura 82 -	Atividade 3.12	92
Figura 83 -	Atividade 3.13	92
Figura 84 -	Atividade 4.1	93
Figura 85 -	Atividade 4.2	94
Figura 86 -	Atividade 4.3	94
Figura 87 -	Atividade 4.4	95
Figura 88 -	Atividade 4.5	95
Figura 89 -	Atividade 4.6	96
Figura 90 -	Atividade 4.7	96
Figura 91 -	Atividade 4.8	97
Figura 92 -	Atividade 4.9	97
Figura 93 -	Teorema de Menelaus	106
Figura 94 -	Teorema 1.1 a	107
Figura 95 -	Teorema 1.1 b	109

Figura 96 -	Triângulos Homólogos (Triângulos Perspectivos).................................	111
Figura 97 -	Triângulo BCO e a transversal EFL...	111
Figura 98 -	Triângulo CAO e a transversal DFM..	112
Figura 99 -	Triângulo AOB e a transversal EDK..	112
Figura 100 -	Triângulo ABC e a transversal KLM..	113
Figura 101 -	Anexo 2.1..	114
Figura 102 -	Anexo 2.2..	115
Figura 103 -	Anexo 2.3..	115
Figura 104 -	Anexo 2.4..	116
Figura 105 -	Anexo 2.5..	116
Figura 106 -	Anexo 2.6..	117
Figura 107 -	Anexo 2.7..	117
Figura 108 -	Anexo 2.8..	118
Figura 109 -	Anexo 2.9..	118
Figura 110 -	Anexo 2.10..	118
Figura 111 -	Anexo 2.11..	119
Figura 112 -	Anexo 2.12..	119
Figura 113 -	Anexo 2.13..	120
Figura 114 -	Anexo 3.1..	121
Figura 115 -	Anexo 3.2..	122
Figura 116 -	Anexo 3.3..	122
Figura 117 -	Anexo 3.4..	123
Figura 118 -	Anexo 4.1..	124
Figura 119 -	Anexo 4.2..	125
Figura 120 -	Anexo 4.3..	125
Figura 121 -	Anexo 4.4..	126

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Expressões duais entre ponto e reta.. 52
Tabela 2 - Softwares usados em Geometria Dinâmica.. 67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
a.C.	antes de Cristo
d.C.	depois de Cristo
IR	Conjunto de Números Reais
IR^2	Plano numérico
Op-Art	Optical Art
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
LT	Linha da Terra
LH	Linha do Horizonte
PV	Ponto de Vista
PF	Ponto de Fuga
LF	Linha de Fuga

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	16
1	**UM POUCO DE HISTÓRIA**	19
1.1	**Breve relato histórico**	20
1.2	**A Geometria na Grécia Antiga**	21
1.3	**A era euclidiana**	26
1.4	**A era pós Euclides**	30
1.5	**O surgimento de outras geometrias**	31
1.6	**Os axiomas de Hilbert**	34
1.7	**O sistema axiomático e o modelo para novas geometrias**	37
2	**A GEOMETRIA PROJETIVA**	41
2.1	**Breve relato histórico da Geometria Projetiva**	41
2.2	**Ideias intuitivas**	55
2.3	**Os axiomas da Geometria Projetiva**	58
2.4	**Teorema do Ponto do Infinito**	62
2.5	**Pinturas antes da perspectiva**	62
2.6	**Op Art**	63
2.7	**Ilusões de Ótica**	64
3	**A GEOMETRIA DINÂMICA**	67
3.1	**A importância do uso de softwares no ensino**	69
3.2	**Algumas abordagens da geometria no Ensino Fundamental**	71
3.2.1	Atividade 1	73
3.2.2	Atividade 2	83
3.2.3	Atividade 3	86
3.2.4	**Atividade 4**	93
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
	REFERÊNCIAS	100
	ANEXO A	106
	ANEXO B	114
	ANEXO C	121
	ANEXO D	124

INTRODUÇÃO

Antes de dar início a nossa leitura, falarei um pouco sobre minha trajetória para que o leitor possa compreender minhas motivações na escolha deste tema.

Atuo, por mais de vinte anos, como professor da Educação Básica da rede particular de ensino e em diversos cursos preparatórios pré-vestibulares e pré-militares em todo Estado do Rio de Janeiro.

Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Fluminense, tive o prazer em lecionar geometria em todos esses anos de magistério. Com isso, espero que minhas experiências venham contribuir para a conclusão deste trabalho.

A Matemática do Ensino Fundamental geralmente não estabelece uma separação entre a parte algébrica e a geométrica, com isso, é comum observar que em algumas Instituições de Ensino o conteúdo de Geometria é pouco abordado.

No Ensino Fundamental I, por exemplo, cabe ao professor determinar como abordará a Matemática e alguns estudos comprovam que os professores deste segmento trabalham a matemática em si de forma superficial. Já no Ensino Fundamental II, dependendo da Instituição, o conteúdo de Geometria é abordado de forma diferenciada e alguns docentes fazem esta abordagem apenas nos últimos bimestres.

O ensino da Geometria tem estado muito mais presente atualmente no Currículo Escolar do que era alguns anos atrás. Há tempos que pesquisadores discutem essa abordagem.

Por outro lado, no Ensino Médio, é comum notar o estudo da Matemática de forma segmentada, na maioria das vezes até mesmo em mais de duas frentes, como por exemplo: Álgebra, Geometria, Aritmética, Matemática I e Matemática II

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o Ensino Fundamental está organizado em áreas do conhecimento, sendo a Matemática uma delas. Segundo o documento, uma das competências desta área é:

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BNCC, 2017, p. 55)

Notamos ainda que nos cursos preparatórios o estudo da Geometria é abordado de forma intensa, pois dependendo do concurso, a Geometria representa quase cinquenta porcento ou mais de suas provas. Este fato pode ser comprovado a partir da análise das provas aplicadas nos últimos anos.

Com relação ao corpo docente de matemática, notamos que poucos possuem aptidão para fazer desenhos geométricos bons ou resolver problemas geométricos de forma abstrata. Em virtude destes fatos, notamos que é alto o quantitativo de docentes que preferem não lecionar geometria. A partir de minhas experiencias profissionais, percebi a importância de propor um novo olhar para a disciplina e, para isso, se faz necessário conhecê-la bem.

Por outro lado, para os alunos, os conteúdos relacionados a Geometria se tornam mais fáceis de serem compreendidos em virtude de sua aplicabilidade em situações do dia a dia. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), a Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. Veja o que diz o PCN quanto ao ensino de Geometria:

> A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (PCN,1998, p. 39)

Desse modo iremos apresentar o contexto histórico na qual a Geometria apresenta os seus primeiros registros, descrevendo como ocorreu o surgimento de outras geometrias. No entanto, nossa pesquisa dará ênfase ao período do Renascimento Europeu, pois nosso foco principal será uma análise histórica da Geometria que tem auge nesta época: a Geometria Projetiva.

O presente estudo pretende apresentar uma forma de abordagem teórica da geometria para a educação básica, enfatizando o quanto a geometria pode ser fascinante e dessa forma poder contribuir para potencializar a sua relevância dentro do conteúdo programático anual.

Na matemática, o ensino da geometria se destaca desde a antiguidade, nos primórdios, ela era utilizada para resolver problemas do cotidiano e seu conhecimento era transmitido de forma empírica. Nos dias atuais, seu estudo pode ser realizado por meio de programas de computadores, softwares e aplicativos de celulares. Apesar da geometria apresentar diversas aplicações no cotidiano, ainda encontramos muita resistência em seu estudo na Educação Básica.

No capítulo 1, apresentaremos uma breve abordagem histórica da geometria Euclidiana, relatando os principais acontecimentos, personagens e suas contribuições. Através da História, mais precisamente pela época do Renascimento Europeu, citaremos alguns axiomas e teoremas, sem a necessidade de demonstrá-los e vamos observar o surgimento e as primeiras práticas pedagógicas no universo da Geometria. Por fim, apresentaremos as primeiras noções de projetividade, bem como alguns notórios personagens célebres.

No segundo capítulo, o leitor encontrará um breve relato sobre história da Geometria Projetiva, as primeiras noções, principais pensadores e suas contribuições, assim como iremos discutir sua relação no contexto artístico. Será abordado de forma sucinta sua formalização, principais postulados e teoremas.

No terceiro, iremos apresentar alguns recursos de Geometria Dinâmica, discutir o quanto a utilização desses recursos pode impactar no aprendizado.

Já no capítulo 4, discutiremos como é possível trabalhar a parte teórica da Geometria Projetiva através do Software de Geometria Dinâmica, mais precisamente o Geogebra. Além de apresentarmos algumas atividades possíveis de serem abordadas no Ensino Fundamental.

Por fim, no último capítulo iremos expor a conclusão do tema abordado nesta pesquisa, propondo uma abordagem das Teorias da Geometria Projetiva sob forma mais interativa e interessante, não apenas com o propósito de auxiliar o professor a lecionar, mas também proporcionar aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo. Sendo assim, serão apresentadas quatro atividades detalhadas para que o professor possa adaptá-las ao seu planejamento.

1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Com o intuito de despertar o interesse no estudo da Geometria por parte dos professores e alunos, iremos apresentar um breve relato sobre a sua origem. Como não sabemos ao certo o seu início, no entanto, o que temos conhecimento é que suas origens estão intimamente ligadas as antigas civilizações, em particular, a babilônica e a egípcia. Destas, existem papiros que comprovam conhecimentos da geometria, geralmente ligados a astronomia. Isso pode ser constatado na figura 1, que nos mostra o papiro de Rhind que nada mais é, um documento egípcio de cerca de 1650 a.C. Este é o mais famoso documento que chegou até hoje, juntamente com o papiro de Moscou (figura 2). Nele é detalhado a solução de 85 problemas não só de geometria, mas de aritmética, álgebra e trigonometria.

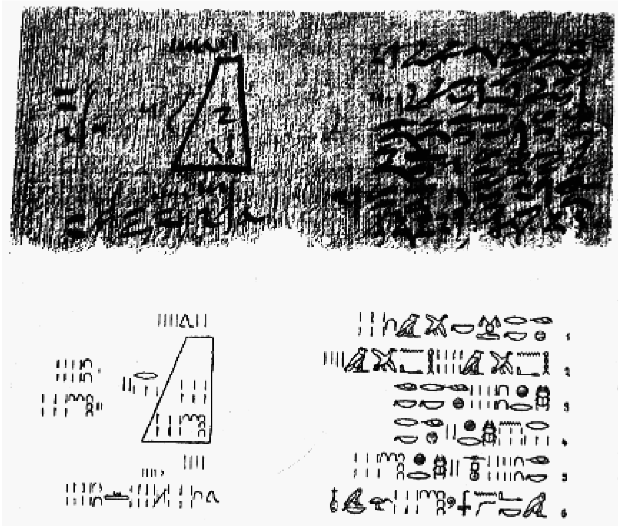
Sobre do papiro de Rhind, vejamos o que Howard Eves afirma:

> [...] o papiro de Rhind é uma fonte rica sobre a matemática egípcia, pois descreve os métodos de multiplicação e divisão dos egípcios, o uso que faziam das frações unitárias, seu emprego da regra de falsa posição, solução para problemas de determinação de área de um círculo e muitas aplicações da matemática em problemas práticos. (EVES, 2004, p. 70)

Figura 1: Papiro de Rhind

Fonte: matematica.br/historia/prhind.html, 2019

Figura 2: Papiro de Moscou



Fonte: matematica.br/historia/pmoscou.html, 2019

1.1 **Breve relato histórico**

Nos tempos atuais, a quantidade de informação circulante é imensa, ao ponto que, se quisermos algo basta clicarmos num botão e o conhecimento aparece em frações de segundos na tela do celular, tablet ou de um computador. Porém, esse volume de informação variou muito com o passar do tempo. Antigamente, os conhecimentos eram passados de pessoa para pessoa, de pai para filho, de mestre para aluno etc.

Quando estudamos a história da matemática, mais precisamente as civilizações antigas e fazendo análise de comparações entre suas culturas, notamos indícios existentes de que os povos, mesmo que fossem contemporâneos, tinham seus conhecimentos matemáticos bem restritos em relação aos outros.

A geometria é uma ciência muito antiga, segundo Barbosa, em seu livro Geometria Hiperbólica[1], aprendemos que os primeiros conceitos sobre geometria datam bem antes de Cristo (a.C.), mais precisamente com as civilizações do Egito Antigo e da Mesopotâmia. Esses povos eram bastante evoluídos para a época ao ponto de, mesmo sem recursos, realizarem cálculos bem complexos, ademais, faziam uso do conhecimento empírico, isto é, de forma bem experimental e artesanal, sem complexidades, sem demonstrações e, em muitos casos, até aplicavam fórmulas erradas para cálculos em figuras geométricas, embora tenham

[1] BARBOSA, J.L.M. Geometria Hiperbólica, Rio de Janeiro: IMPA, 1995. p. 1

sido com os gregos (aproximadamente 350 a.C.) que adquiriram caráter científico, obtendo assim, maior estreitamento com a filosofia.

Existem relatos que é possível encontrar registros entre os povos hindus e chineses, este último, há trabalhos envolvendo geometria que datam dos séculos III a I a.C. Ela é a parte da matemática destinada a estudar as medidas, as formas e as posições de figuras. Sua etimologia vem do grego e o seu nome é o resultado da junção de duas palavras: “geo” (quer dizer terra) e “metrón” (medição). Sua origem está ligada ao momento no qual o homem passou a observar o mundo ao seu redor e tentou compreendê-lo.

A partir deste momento, foram criados conceitos para formas e figuras. Alguns exemplos que podemos citar seriam a invenção da roda, trazendo a noção de círculo; outro, das construções de casas com paredes verticais e tetos horizontas, decorrendo as noções de planos paralelos e planos perpendiculares, assim como, da necessidade de partilhar terras, derivado das noções de distâncias, áreas e volumes.

Alguém já se perguntou por que as tampas dos bueiros das ruas são circulares? Ou o porquê não ficam rígidos os portões de madeira na forma retangular? O motivo pelo qual as abelhas preferem construir as entradas dos alvéolos em forma hexagonal ao invés de forma triangular? Por que a mesa de três pernas é rígida, enquanto a de quatro pernas é manca? Um razoável conhecimento da geometria serve para elucidar esses fatos.

As respostas para todas essas e outras questões podem ser obtidas quando se compreende a Geometria.

1.2 **A geometria na Grécia Antiga**

Conforme afirma Barbosa (1995, p. 1), os gregos foram os pioneiros em observar a matemática a partir do olhar axiomático e dedutivo, bem diferente do método empírico das civilizações mais antigas, de tal modo podemos estabelecer na Grécia Antiga, o ponto inicial da geometria na forma como a conhecemos, para ser mais preciso, no tempo de Ptolomeu quando Euclides de Alexandria escreveu “Os Elementos” em aproximadamente 300 a.C., como veremos mais adiante.

A transição de mentalidade entre o empirismo e o método axiomático demorou bastante tempo, quase mil anos, e foi a partir deste ponto que surgiram critérios para ser admitida uma verdade matemática e as primeiras demonstrações.

Figura 3: Ptolomeu[2] (gravura do século XVI)

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Ptolemy/, 2019

Segundo ANDRADE e BARROS[3], o primeiro grego a adotar a nova postura foi Tales de Mileto (± 624 – ± 547 a.C.), matemático e engenheiro, considerado o primeiro filósofo-cientista. Ele utilizou argumentos lógicos para demonstrar algumas proposições básicas de Geometria, muitas delas sem elo com a agrimensura. Tales que, também era mercador viajante, aprendeu os rudimentos de Geometria em suas viagens, com os povos do Egito e da Mesopotâmia. Este matemático é uma figura muito importante dentro do contexto histórico da Geometria, pois foi o Fundador de uma escola que perdurou aproximadamente um século.

Atribui-se a ele algumas demonstrações de resultados como:

- *Um círculo é bissectado por um diâmetro;*
- *São iguais os ângulos da base de um triângulo isósceles;*
- *Os ângulos opostos pelo vértice são iguais;*
- *Um ângulo inscrito num semicírculo é um ângulo reto.*

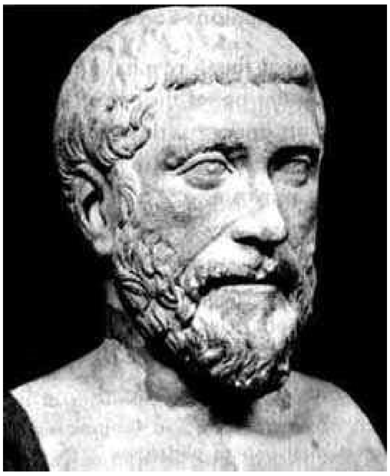
Um possível aluno da escola de Tales foi Pitágoras de Samos (± 569 a.C. – ± 475 a.C.). Há poucos registros confiáveis de sua existência, mas, supostamente é atribuída a ele a criação de uma sociedade de cunho filosófico e religioso que muito contribuiu para a formalização da Geometria. Podemos destacar alguns trabalhos nas áreas de Teoria dos Números e na Teoria das Paralelas. Acredita-se que foi o próprio quem introduziu as palavras

[2] **Cláudio Ptolomeu** (Ptolemaida Hérmia, Egito, 90 d.C. - Canopo, Egito, 168 d.C.) foi um cientista, astrônomo e geógrafo de origem grega. Nascido no Egito sob domínio romano. Ptolomeu foi responsável por sintetizar a obra de seus predecessores, estudando não só astronomia, mas também matemática, física e geografia. (https://www.infoescola.com/biografias/ptolomeu/)

[3] BARROS, A.; ANDRADE, P. Introdução à geometria Projetiva. Rio de Janeiro: SBM 2010, p. 1

Filosofia, que significa amor à sabedoria, e a *Matemática*, aquilo que se aprende. (ANDRADE e BARROS, 2010, p.1)

Figura 4: Busto de Pitágoras



Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pythagoras, 2019

A morte do filósofo originou dentro da escola pitagórica, uma ruptura de ideias. Tal divisão resultou em duas correntes:

Uma formada por aqueles que acreditavam nas "*palavras do mestre*" e, outra, formada por seguidores que almejavam "*o novo aprendizado*", os matemáticos. Estes últimos desenvolveram uma corrente exclusivamente dedutiva e lógica, transformando a matemática numa Ciência de dedução.

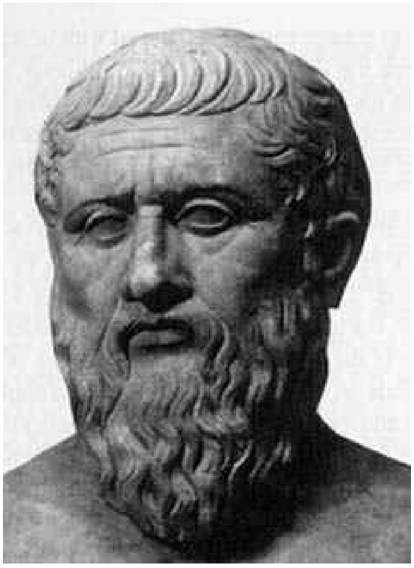
Hipócrates de Chios (± 470 a.C. – ± 410 a.C.), foi comerciante e, posteriormente, professor de geometria da escola pitagórica. Tem o crédito de ser o responsável por um outro avanço da matemática a publicação do texto "*ELEMENTOS DE GEOMETRIA*". O texto trazia demonstrações de teoremas sobre circunferências, escritos dentro de uma sequência lógica e com base de teoremas anteriormente demonstrados. A partir de então, matemáticos de todo o mundo antigo puderam, pelo menos em princípio, fazer desenvolvimentos sob uma estrutura lógica, comum de conceitos, métodos e teoremas básicos, estimulando mais o progresso científico.

Tudo indica que essa obra está contida em uma obra ainda maior, nos livros I e II dos Elementos de Euclides, que veremos mais à frente.

Por esse mesmo tempo, destaca-se Platão (± 427 a.C. – ± 347 a.C.), outro filósofo que muito contribuiu para os alicerces da filosofia e ciência. Para Moreira[4], muitos o consideravam a figura central na história grega antiga e da filosofia ocidental. Fundou em Atenas, a primeira instituição de educação superior do ocidente que congregava os maiores sábios da época, a famosa ***Academia,*** que dava ênfase ao desenvolvimento do pensamento matemático e filosófico. Com ela, a Matemática obteve status de Ciência Pura. Essa escola chamava atenção com a seguinte frase escrita sobre seu portão:

"Não permitam a entrada de quem não saiba Geometria."

Figura 5: Busto de Platão



Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Plato, 2019

O filósofo Aristóteles da Macedônia (± 384 a.C. – ± 322 a.C.), é um outro grande nome da época. Membro da Academia dos 17 aos 30 anos, foi aluno de Platão e teve contribuição indireta na matemática com trabalhos na área de lógica sobre a filosofia estabelecendo toda a base para a ciência grega. Fundou o ***Liceu,*** grande centro científico e filosófico da época. A partir daí, nos seiscentos anos seguintes, foram criadas, na região da Grécia Antiga, diversas escolas voltadas à ciência, mas nenhuma delas pode ser comparada a Academia e ao Liceu, exceto o Museu de Alexandria.

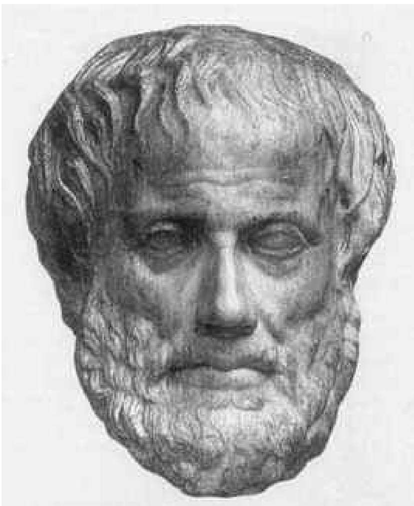
[4] MOREIRA, Ana Cláudia da Silva. Geometrias sob a Axiomática de Hilbert, Unicamp, Campinas, SP, 2006. p. 2

Eudoxos de Cnido (± 408 a.C. – ±355 a.C.), foi outro membro de destaque da Academia. Inspirado pelos trabalhos de Aristóteles, se destacou em duas áreas, na astronomia e numa outra que tanto perturbavam os pitagóricos, as das quantidades incomensuráveis. Seu trabalho moldurou, como deve ser, uma teoria Matemática, sistematizando o método axiomático. Acredita-se que seus estudos sejam as bases dos livros V, VI e XII dos Elementos, segundo Barros e Andrade.

> No séc. IV a.C., a principal contribuição astronômica dos gregos foi a introdução de modelos geométricos para dar conta das observações. Quem mais contribuiu para a elaboração desses modelos, neste período, foi o matemático Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), membro da Academia de Platão. (apud. PESSOA JR. 2010, p. 31)[5]

Como se pode ver, esse período foi bastante fértil para a ciência e a Academia foi um grande centro acadêmico, no qual diversos membros se destacaram na história da Matemática, em particular na geometria.

Figura 6: Busto de Aristóteles da Macedônia



Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aristotle, 2019

Entre os citados acima, podemos destacar nomes como Teodoro de Cirene (± 465 a.C. – ±398 a.C.), Teaetetus (± 417 a.C. – ±369 a.C.); Autólicos de Pitane (± 360 a.C. – ±290 a.C.); Meneacmus (± 408 a.C. – ±355 a.C.); entre outros.

O Rei Alexandre "O Grande" ou Alexandre da Macedônia (± 356 a.C. – ±323 a.C.), que foi orientado na adolescência por Aristóteles, teve papel de destaque na expansão do

---

[5] PESSOA JR, O. Teoria do Conhecimento e Filosofia da Ciência I. 2010, p. 31

Império Grego. Tanto que após a sua morte, todo território conquistado por ele foi dividido entre seus generais, dentre os quais destaca-se o general Ptolomeu, que governou Alexandria, atual Egito. Atribui-se ao Ptolomeu a fundação do Museu de Alexandria, o maior e o mais importante centro de conhecimento da época, uma espécie de Universidade se formos comparar com os dias de hoje. Para ter dimensão da importância, notícias da época relatam uma biblioteca com mais de 500.000 livros, com isso, muitos intelectuais se mudaram para Alexandria, entre eles Euclides.

1.3 **A era euclidiana**

Praticamente nada temos sobre a biografia do matemático grego Euclides que viveu por volta de ± 330 a.C. – ± 270 a.C. Sabemos que ele estudou na Academia e se tornou, a convite de Ptolomeu, o primeiro professor de Matemática do Museu.

Figura 7: Representação artística de Euclides

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid, 2019

Escreveu cerca de 12 obras, todavia apenas cinco delas resistiram ao tempo, uma delas tem o texto intitulado de *Ópitica (Stoichia*) – três dos primeiros trabalhos escritos usando perspectivas. (MOREIRA, 2006, p. 3)

Outro trabalho que temos conhecimento é intitulado *Os Elementos*, sua obra-prima. Composta por 13 livros, ou melhor 13 capítulos. Nela, traduziu com clareza e simplicidade na escrita toda formação do pensamento humano feito ao longo de 300 anos. Esses livros se tornaram o divisor de águas dentro do estudo da matemática. Não era um simples compilado de resultados conhecidos, neles havia demonstrações de 365 proposições, muitas delas são atribuídas ao próprio Euclides e, outras, acrescentadas posteriormente, deduzidas a partir de uma axiomatização, independente e concisa, novidade para a época. (ANDRADE e BARROS. 2010, p. 4)

Sem dúvida, a sistematização, a axiomatização e o método dedutivo adotados por Euclides é o aspecto mais interessante de seu trabalho, tanto que passou a ser ponto norteador de toda Matemática de sua era. O que afirma EVES (2004, p. 167) é que com o passar dos tempos, “Os Elementos” tornou-se o segundo livro mais traduzido do mundo, tanto que só é superado em número pela Bíblia. Hoje, dois milênios depois, ainda é adotado em escolas do mundo inteiro.

Figura 8: Frontispício da primeira edição de Sir Henry Billingsley em língua inglesa dos Elementos de Euclides, de 1570

Fonte: geometras.wordpress.com, 2019

Figura 9: Capa de recente edição de “Os Elementos”

Fonte: editoraunesp.com.br, 2019

Abaixo estão descritos os títulos, já agrupados por tema, dos livros da obra Euclidiana.

Sobre a Geometria Plana:

Livro I. Fundamentos da Geometria Plana

Livro II. A Geometria de Retângulos

Livro III. A Geometria do Círculo

Livro IV. Polígonos Regulares no Círculo

Livro V. A Teoria Geral de Magnitudes em Proporções

Livro VI. A Geometria Plana de Figuras Planas

Sobre a Teoria dos Números:

Livro VII. Aritmética Básica

Livro VIII. Números em Proporções

Livro IX. A Teoria dos Números Pares e Ímpares, Números Perfeitos.

Sobre os Números Primos:

Livro X. Segmentos de Retas Incomensuráveis

Sobre a Geometria Sólida:

Livro XI. Fundamentos da Geometria Sólida

Livro XII. Áreas e Volumes, Método de Eudoxos da Exaustão.

Livro XIII. Os Sólidos de Platão

Nos trabalhos de Euclides, o interessante é a construção da axiomátização. O autor edificou sua geometria em 10 axiomas separados em dois grupos: o primeiro deles classificado como "*Noções comuns*" e outro como "*Postulados*". A distinção entre esses axiomas não é de todo clara. A primeira parece ter sido considerada como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou a todas as mentes inteligentes, enquanto o segundo, os postulados, eram considerados como hipóteses características da geometria.

Eis os enunciados das cinco noções comuns por Euclides:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos a iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. Todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Eis os enunciados dos cinco postulados por Euclides eram:

1. Pode-se traçar uma reta ligando quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Na história, existe indícios de que o quinto postulado euclidiano tornou alvo de críticas pelos matemáticos da época, isso causou estranhamento, haja vista sua redação diferente dos demais. Como podemos notar, o último postulado citado é uma condicional, o que contrasta com os anteriores.

1.4 A era pós Euclides

A escola de Alexandria perdurou até aproximadamente 450 d.C. e muito contribuiu para o desenvolvimento da matemática e da geometria pós-Euclidiana (BARROS e ANDRADE, 2010, p. 9), No período de sua existência, podemos destacar alguns expoentes marcantes como os ex-alunos: Arquimedes de Siracusa (±287 a.C. – ±212 a.C.), Apollonios de Perga (±262 a.C. – ±190 a.C.) e o professor Papus de Alexandria (±290 – ±350). Este último tem diversos trabalhos no campo da Geometria Projetiva, sendo um dos percussores desta área.

Outro nome de destaque e que não pode ficar fora deste breve relato é Hipátia ou Hipácia de Alexandria (±370 – ±415), professora do museu, foi a primeira mulher a se destacar no estudo da Matemática. Sua morte marca o início do declínio daquele polo científico, verdadeira época de trevas. Foi cruelmente assassinada em praça pública, descarnada e queimada por cristãos incentivados por Cirilo de Alexandria. (BARROS e ANDRADE, 2010, p. 9)

Após um século de sua morte, centenas de escolas foram fechadas, inclusive a Academia Platônica de Atenas que já possuía quase 1000 anos de existência e teve seus membros espalhados pelo mundo. A partir deste ponto da história o desenvolvimento da Matemática como ciência ficou a cargo de outras civilizações como por exemplo a árabe, a qual muito contribuiu para a álgebra.

Figura 10: Representação artística de Hipátia de Alexandria

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hypatia, 2019

Voltando ao quinto postulado, sua não demonstração sugere que Euclides o deixou para a posteridade, talvez na esperança de alguém viesse a demonstrá-lo. Quem sabe?

Na visão de Barros e Andrade (2010, p. 8), por mais de dois mil anos acreditou-se ser impossível essa façanha, diante de tantas ponderações, o quinto postulado proposto por Euclides teve sua redação trocada. Sua troca foi proposta pelo professor escocês da Universidade de Edimburgo chamado de John Playfair (1748 – 1819).

O novo axioma passou a ser conhecido como Axioma de Playfair, e diz o seguinte, segundo Barbosa (1995, p. 9):

Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

No século XIX, foi reforçada a ideia de que quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro. A esta descoberta podemos associar dois nomes importantes que realizaram pesquisas de formas independentes. São eles: János Bolyai (1802 – 1860) e Nikolai Lobachewsky (1793 – 1856). Segundo Barros e Andrade, esses dois são os responsáveis por fazer com que a geometria euclidiana deixasse o universo físico, no sentido amplo da palavra, para o universo abstrato, como veremos mais à frente.

1.5 **O surgimento de outras geometrias**

As primeiras traduções para línguas europeias dos *Os Elementos* ocorreram, segundo Moreira (2006, p. 6) por volta de mil e oitocentos anos após seu surgimento, mais precisamente durante o *Renascimento*. Nesta linha de tempo, muitos resultados foram surgindo e, estudiosos da época, passaram a ter olhares mais críticos à obra euclidiana. Momento de destaque para Girard Desargues (1591 – 1661) e Blaise Pascal (1623 – 1662), usando ideias de incidência, demonstraram algumas propriedades não métricas de cônicas, bem diferentes das demonstrações de Apolonius feitas dezoito séculos antes.

Figura 11: Representação artística de Blaise Pascal

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pascal, 2019

O modelo Euclidiano permaneceu por muito tempo e com ele, a secular dúvida: *se o quinto postulado era ou não um axioma independente dos demais*. Ao longo da história, muitos acreditavam que era um teorema. A verdade é que a dúvida foi instigante para muitas mentes brilhantes ao ponto de até realizarem demonstrações falaciosas. Ainda na era de Euclides, Ptolomeu se enganou ao acreditar que havia feito a demonstração do axioma das paralelas. Todo o ocorrido nos leva a crer que o próprio Euclides havia relutado em aceitá-lo como postulado.

Figura 12: Representação artística de Girard Desargues

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Desargues, 2019

Voltando ao Renascimento, a exemplo do desacerto de Ptolomeu, temos a dramática tentativa do padre jesuíta italiano Giovanni Saccheri (1667 – 1773), sua contribuição é considerada a mais importante do que todas as anteriores (Barbosa, 1995, p. 24). Saccheri, como era conhecido, demonstrou todos os resultados básicos do que conhecemos hoje como a *Geometria Hiperbólica*, porém, não foi ousado em acreditar na existência de outros modelos geométricos de natureza não-Euclidiana. (BARROS e ANDRADE, 2010, p. 10)

Na segunda metade do século XIX, muitos matemáticos já aceitavam hipóteses assumidas por Euclides, mesmo ele não tendo argumentações para isso, isto é, sem nenhuma axiomatização.

Veja algumas hipóteses não mencionadas, porém, utilizadas por Euclides:

a) Retas é conjunto de pontos.

b) As retas são contínuas.

c) A reta que podemos traçar ligando dois pontos é única.

d) Pode-se continuar uma reta de uma única maneira.

e) Sejam A, B e C três pontos não colineares e r uma reta que não contém nenhum destes pontos. Se r cortar o segmento AB, então ela também corta o segmento BC ou o segmento AC.

O alemão Bernhard Riemann (1826 – 1866) deu um contraexemplo para o segundo axioma euclidiano, que fala: "*Pode-se continuar uma reta infinitamente*". Segundo Riemann, não implica em ser ilimitada. Para isso, ele usou um arco de círculo ligando dois pontos. Se for continuado continuamente, pode-se produzir um conjunto "circular" que é limitado. O que não é garantido por nenhum dos cinco axiomas euclidianos. Para Riemann, o plano corresponde a uma superfície de uma esfera e a reta, é o círculo máximo contido na superfície da esfera. Seus estudos resultaram na descoberta de outra geometria, que leva seu nome, a *Geometria Riemaniana ou Esférica*.

Segundo Moreira (2006, p. 6), o alemão David Hilbert (1862 – 1943), sugeriu, em 1899, uma axiomática bem mais completa para a geometria euclidiana. Sobre os axiomas euclidianos, Hilbert elaborou nova redação, agora sob olhar da Análise Matemática, organizando, enfim, os fundamentos da geometria clássica, tornando-se novo marco na História da Matemática. Era a prova da validez de todos os argumentos apresentados por Euclides.

Figura 13: David Hilbert

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert, 2019

1.6 **Os axiomas de Hilbert**

Para Barros e Andrade, a façanha de Hilbert em relação aos postulados euclidianos tornou a Geometria mais concisa e refinada, ao ponto que, se fizermos comparações, ela está para a geometria Euclidiana assim como a teoria dos grupos está para a Álgebra. Segue abaixo os axiomas de Hilbert[6]:

I. Termos indefinidos

1. Ponto, Reta, Plano, Pertence, Está Entre, Congruência.

II. Axiomas de Incidência

1. Para cada dois pontos distintos existe uma única reta que os contém.

2. Toda reta contém pelo menos dois pontos.

3. Existem pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta e todos os pontos estão sobre o mesmo plano.

---

[6] BARROS, A.; ANDRADE, P. Introdução à geometria Projetiva. 2010. p. 20.

III. Axiomas de Ordem

1. Se um ponto $\boldsymbol{B}$ está entre $\boldsymbol{A}$ e **C**, então os três pontos pertencem a uma mesma reta e $\boldsymbol{B}$ está entre **C** e $\boldsymbol{A}$.

2. Para quaisquer dois pontos distintos $\boldsymbol{A}$ e **C**, existe pelo menos um ponto $\boldsymbol{B}$ pertencente ao segmento de reta $\overline{\boldsymbol{AC}},$ tal que $\boldsymbol{B}$ está entre $\boldsymbol{A}$ e **C**.

3. Se três pontos distintos estão sobre uma mesma reta, não mais que um ponto está entre os outros dois.

4. Sejam $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$ três pontos que não estão sobre uma mesma reta e seja **r** uma reta do plano que não contém algum dos três pontos. Então, se **r** interseta o segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$, ela também interseta o segmento $\overline{\boldsymbol{AC}}$ ou segmento $\overline{\boldsymbol{BC}}$.

IV. Axiomas de Congruência

1. Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são dois pontos numa reta **r** e $\boldsymbol{A'}$ é um outro ponto de uma reta $\mathbf{r}'$, não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto $\boldsymbol{B'}$ em (um dado lado da reta) $\mathbf{r}'$, tal que os segmentos $\overline{\boldsymbol{AB}}$ e $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ são congruentes (≅).

2. Se um segmento $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ e um outro segmento $\overline{\boldsymbol{A''B''}}$ são congruentes a um mesmo segmento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ então os segmentos $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ e $\overline{\boldsymbol{A''B''}}$ são congruentes entre si.

3. Sobre uma reta **r**, sejam $\overline{\boldsymbol{AB}}$ e $\overline{\boldsymbol{BC}}$ dois segmentos da mesma que, exceto por **B**, não tem ponto em comum. Além disso, sobre uma outra ou a mesma reta **r’,** sejam $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ e $\overline{\mathbf{B'C'}}$ dois segmentos que, exceto por $\mathbf{B'}$ não tem pontos em comum. Neste caso, se $\overline{\boldsymbol{AB}} \simeq \overline{\boldsymbol{A'B'}}$ e $\overline{\mathbf{BC}} \cong \overline{\mathbf{B'C'}}$, então $\overline{\mathbf{AC}} \cong \overline{\mathbf{A'C'}}$.

4. Se $\angle \boldsymbol{ABC}$ é um ângulo e se $\overline{\mathbf{B'C'}}$ é um raio, então existe exatamente um raio $\overline{\boldsymbol{A'B'}}$ em cada lado de $\overline{\mathbf{B'C'}}$ tal que $\angle \boldsymbol{A'B'C'} \cong \angle \boldsymbol{ABC}$**.** Além disto cada ângulo é congruente a si mesmo.

5. Se para dois triângulos $\Delta\, \boldsymbol{ABC}$ e $\Delta\, \mathbf{A'B'C'}$ as congruências $\overline{\boldsymbol{AB}} \simeq \overline{\boldsymbol{A'B'}}$, $\overline{\mathbf{AC}} \cong \overline{\mathbf{A'C'}}$ e $\angle \boldsymbol{BCA} \cong \angle \boldsymbol{B'C'A'}$ são válidas, então a congruência $\angle\, \boldsymbol{ABC} \cong \angle \boldsymbol{A'B'C'}$ é satisfeita.

V. Axioma das paralelas

1. Seja **r** uma reta e $\boldsymbol{A}$ um ponto não em **r**. Então existe apenas uma reta no plano que passa por $\boldsymbol{A}$ e não interseta **r**.

VI. Axiomas de Continuidade

1. AXIOMA DE ARQUIMEDES: Se $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{CD}}$ são segmento, então existe um número natutal **n** tal que **n** cópias de $\overline{\mathbf{CD}}$ construídas contiguamente de **A** ao longo do raio $\overline{\mathbf{AB}}$ passará além do ponto **B**.

2. AXIOMA DA COMPLETUDE: uma extensão de um conjunto de ponto sobre uma reta com suas relações de congruência e ordem que poderiam preservar as relações existentes entre os elementos originais, bem como as propriedades fundamentais de congruência e ordem que seguem os axiomas acima (menos o das paralelas), é impossível.

Hilbert deu uma nova redação aos axiomas euclidianos e, fazendo comparações com os originais, notamos a substituição de termos indefinidos, antes foram usados por Euclides, em outros termos mais adequados, como por exemplo, conjunto por plano e elemento por ponto.

Após a proposta de Hilbert, outros sistemas axiomáticos foram surgindo, entre eles podemos destacar o que fora apresentado pelo matemático americano Oswald Veblen (1880 – 1960). Veblem estabeleceu axiomática para a *Geometria Projetiva* na sua obra Projective Geometry. Mas as ideias de Hilbert não esgotaram, muito pelo contrário, elas foram férteis para outro tipo de estudo, curvas definidas por equações homogêneas de ordem n e m variáveis, originando a *Geometria Algébrica*, uma das áreas mais úteis da Matemática.

1.7 **O sistema axiomático e o modelo para novas geometrias**

Por volta de 1830, Lobaschevsky e Bolyai foram os responsáveis por outra mudança de pensamento matemático: que a geometria Euclidiana deixasse de explorar o universo físico.

Até aquele momento, o universo Euclidiano moldava o Cálculo, a Geometria Diferencial e até a Mecânica Newtoniana. Indo na contramão do que as ideias de Euclides representavam na época, eles desenvolveram, de forma independente um do outro, um novo modelo de geometria, que mais tarde foi chamada de Geometria Hiperbólica. Na nova geometria eram considerados os quatro primeiros axiomas Euclidianos, porém apresentava uma substituição para o quinto postulado euclidiano. Eis o substituto, redigido exatamente conforme Barros e Andrade, (2010, p. 15).

> "*POR UM PONTO FORA DE UMA RETA PODE-SE TRAÇAR DUAS RETAS QUE NÃO A INTERSETAM*"

A substituição do quinto postulado causou forte embate entre os matemáticos da época, isso porque tal objeto de estudo poderia não existir. Contudo, para fazer diferenciações entre a física e a matemática era necessário responder duas indagações que viriam justificar a existência e obter a identidade própria.

1ª) Para a matemática, qual deveria ser o objetivo do estudo?

2ª) Caso esse objeto exista, qual deveria ser o significado de sua existência?

Quanto à primeira pergunta, sua resposta é pragmática. Tanto Euclides quanto a dupla formada por Lobaschevsky e Bolyai chegaram à mesma conclusão apesar de terem estudado sistemas axiomáticos distintos. A conclusão foi um sistema dedutivo lógico. Portanto, os objetivos estavam ligados aos sistemas axiomáticos.

A resposta para a segunda indagação está associada a questões mitológicas: "*Para quem tudo é número*"*?* lembrando a figura de Pitágoras, segundo Abdênago Barros e Plácido Andrade.

> *Um sistema axiomático será válido se existir um conjunto numérico, isto é, um modelo possuindo propriedades fixadas no próprio sistema axiomático. (BARROS e ANDRADE, 2010, p. 16).*

Diante das respostas, concluíram que a Matemática deveria ser aritmetizada, já que sua base seriam números. Isso só resolvia a questão euclidiana, pois o plano numérico IR^2 seria o modelo aritmético para a Geometria euclidiana, o espaço IR^3 seria o modelo aritmético para a geometria espacial. Influenciado por respostas, Henri Poincaré (1654 – 1912) engatou numa história fascinante em busca de um modelo definitivo para a Geometria Hiperbólica.

Riemann foi mais além, antes de estruturar a geometria que leva seu nome, o próprio propôs estudar sistemas axiomáticos que davam origens à vários universos, sem se preocupar se eles existiam ou não, universos os quais também seriam axiomatizados. (BARROS e ANDRADE, 2010, p. 17)

Figura 14: Henri Poincaré

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare, 2019

Como podemos perceber, a escolha de um sistema axiomático não era tarefa fácil e essa escolha está associada a um modelo de um conjunto numérico conveniente, seguindo sempre os axiomas de Hilbert, em alguns casos com pequenas modificações. Só para lembrarmos do que já vimos, faremos, abaixo, uma ressalva sobre a genealógica axiomática de Hilbert, organizada em seis grupos:

1. Termos indefinidos
2. Incidência
3. Ordem

4. Congruência
5. Paralelismo
6. Continuidade

Segundo essa axiomática de Hilbert, é possível fazer comparações entre as geometrias. Eis algumas delas que podemos listar:

- Na Geometria Projetiva: tem apenas dois grupos axiomáticos, o de *incidência* e o de *continuidade*.
- Na Geometria Hiperbólica: tem todos os postulados Euclidianos, menos o quinto.
- Na Geometria Riemaniana: tem todos os grupos de Hilbert, *exceto os de ordem*. Nela também se nega a existência do paralelismo e não é exigida a unicidade de interseção entre retas.
- A Geometria Afim é igual à Geometria Euclidiana que conhecemos, só que sem o grupo de *congruência* de Hilbert.

Levando em conta o axioma das paralelas, Barros e Andrade resumiu essas diferentes Geometrias do seguinte modo:

a**) Geometria Euclidiana:** tem o V Postulado de Euclides. Seu ponto de referência e modelo é o plano numérico (IR^2). E como aprendemos no ensino fundamental, a soma dos ângulos internos de um triângulo vale dois ângulos retos.

b) Geometria Esférica ou a Riemaniana: tem o V postulado de Euclides substituído por:

"Por um ponto fora de uma reta, não passa reta paralela a ela".

Seu ponto referencial é uma esfera de raio unitário. Neste caso, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.

c) Geometria Hiperbólica: tem o V postulado de Euclides substituído por:

"Por um ponto fora de uma reta, passa mais de uma reta paralela a ela".

Normalmente, o modelo que consideramos é o disco de Poincaré (um disco unitário do plano euclidiano). Neste caso, a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor do que dois ângulos retos.

No próximo capítulo, veremos uma parte interessante de nossa História, o Renascimento Europeu e, através da arte, contemplaremos o engatinhar da Geometria Projetiva.

2 A GEOMETRIA PROJETIVA

2.1 Breve relato histórico da Geometria Projetiva

O Renascimento europeu, segundo a visão de Abramo Hefez[7], foi o movimento intelectual ocorrido entre os séculos XIV e XVI, e é marcado por um período muito fértil para a ciência e cultura, pois influenciou o pensamento humano. É o marco da ruptura com o padrão grego-romano e a Idade Média. No ponto de vista artístico, buscava a perfeição. Nos renascentistas, havia a preocupação em mostrar realidades, sentimentos e fantasias, contrastando com o classicismo grego, mais preocupados com a forma física ou estética.

Um fato marcante da vida artística medieval está relacionado a não representação da realidade como ela era vista. Suas pinturas não apresentavam noções de profundidade ou de projeção e baseavam-se em símbolos e temas religiosos. Tal fato é possível perceber nas Figuras 15 e 16, a Taula de Saint Miquel (século XIII), mestre de Soriguerola – Pesagem das almas e a Santa Ceia. As pinturas são retratadas de forma plana sem detalhes no ambiente; não diferenciando o personagem que está à frente ou atrás dos demais.

Figura 15: A pesagem das almas, Cena 6 da Taula de Sant Miquel (SORIGUEROLA, 2006)

Fonte: www.ricardocosta.com/sites/default/files/imagens/taula/taula10.jpg

[7] HEFEZ, A. Introdução a história da geometria projetiva. SBM, 1985. Disponível em: https://vdocuments.mx/03-03-uma-introducao-a-historia-da-geometria-projetiva-abramo-hefez.html. Acesso em: 01.06.2019. páginas 42 e 43.

Figura 16: Santa Ceia, Cena 4 da Taula de Sant Miquel. (SORIGUEROLA, 2006)

Fonte: www.ricardocosta.com/sites/default/files/imagens/taula/taula2.jpg,2019

A partir do século XIII, pintores como Duccio di Buoninsegna (1255 – 1319) e Giotto di Bondoné (1266 – 1337) tiveram maior preocupação nas confecções de pinturas mais detalhistas que mostrassem a realidade como ela era vista. No início do século XIV, foram os pioneiros em mostrar noções de perspectiva e, com isso, influenciaram outros da época. Entre eles, podemos destacar Filippo Bruneleschi (1377 – 1446), conhecido como criador de um sistema organizado de perspectiva, tornou-se mentor de outros pintores.

No século XV: a geometria euclidiana passa a não ser suficiente para modelar deformações de perspectiva. Pintores e arquitetos começam a manipular a noção de perspectividade.

Segundo Leonardo Yokoyama[8], Bruneleschi já havia observado que retas paralelas podem ser vistas como retas concorrentes que se cruzam na linha do horizonte. Abaixo, na figura 17, ilustraremos uma imagem feita por um pintor, na qual pode ser vista uma projeção do original na tela, “com o centro de projeção no olho do pintor, como faziam os primeiros artistas preocupados com a perspectiva.”

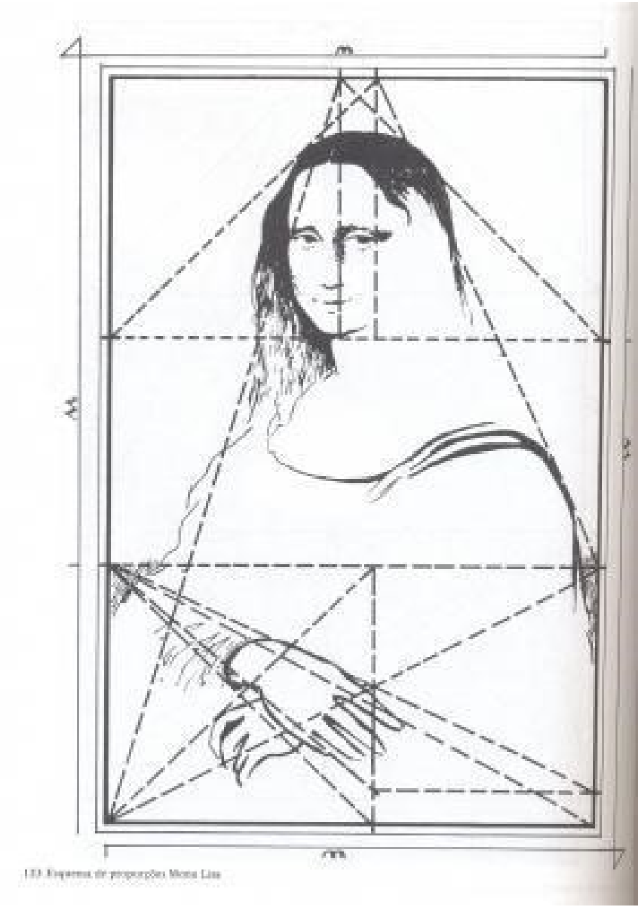
O surgimento da geometria projetiva está intimamente ligado ao movimento renascentista ocorrido na Europa. Sabe-se que, no final do século XV, os países localizados no continente europeu experimentaram mudanças em seu âmbito econômico, social e cultural. Ela chega ao amadurecimento como fonte de estudo no século XX. Contudo, tem presença rara ao longo do tempo, assim como todas as ciências. Seus primeiros passos foram

---

[8] YOKOYAMA, Leo Akio. Uma Prova Geométrica da Versão Projetiva do Teorema de Steiner. Dissertação de Mestrado, 2002. p. 4.

dados, quase simultaneamente na Itália e Alemanha, através do desejo dos pintores renascentistas em reproduzir suas telas do modo mais fiel possível.

Figura 17: Projeção em tela de pintura - Monalisa



Fonte: lukscerezerti.blogspot.com, 2019

Os artistas renascentistas buscavam cada vez mais o realismo para suas obras, para isso inseriram as teorias de ponto de fuga e perceptividade. Segundo Erwin Panofsky[9], a descoberta do ponto de fuga, enquanto imagem dos pontos infinitamente distantes de todas as ortogonais constitui, num determinado sentido, o símbolo concreto da descoberta do próprio infinito.

A geometria projetiva lida com propriedades que são invariantes nas projeções. Portanto, ângulos e distâncias não são preservados, mas a colinearidade é.

De várias maneiras é tão fundamental quanto a geometria euclidiana e, também, mais simples em termos de sua apresentação axiomática. A geometria projetiva também é "global", no sentido de que a geometria euclidiana não é. Na geometria euclidiana, as linhas

[9] PANOFSKY, Erwin. A Perspectiva como Forma Simbólica, 1999, p. 54

podem ou não atender (o quê?), se não, isso é uma indicação de que algo está "faltando". Na Projetiva, duas linhas sempre se encontram e, portanto, há uma dualidade perfeita entre os conceitos de pontos e linhas.

Filippo Brunelleschi (1377 – 1446), arquiteto florentino, foi um dos primeiros artistas a usar a geometria projetiva para aperfeiçoar suas obras. Este é considerado uma personalidade histórica do movimento renascentista, abrindo espaço para uma arte que mudaria definitivamente a perspectiva cultural, histórica e da matemática.

Giulio Carlo Argan[10], descreve Brunelleschi, em sua monografia sobre artista florentino, como: “Pela primeira vez, reconhece-se no artista uma personalidade histórica, cuja obra ultrapassa o círculo da arte e abre horizontes novos ao conhecimento humano” (ARGAN, 2011, p. 81). No início de uma época que define a arte como invenção, Filippo Brunelleschi surge como o grande inventor, aquele que abre à arte não apenas uma nova dimensão do espaço, a perspectiva, mas também uma nova dimensão do tempo, a história.

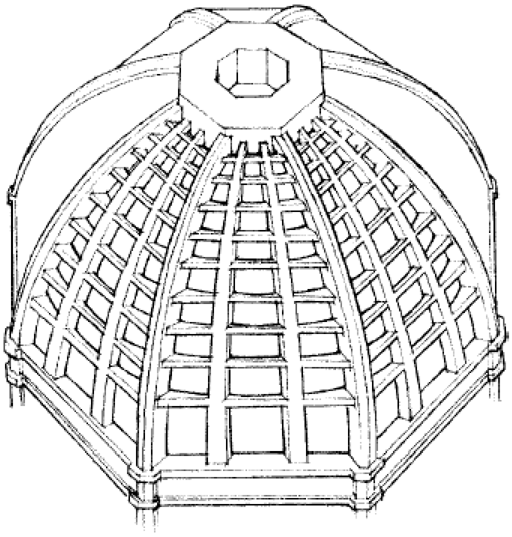
Na figura 18 a seguir, apresentamos a cúpula da Igreja de Santa Maria Del Fiori – A catedral de Florença. Suntuosa, muitos pesquisadores e historiadores consideram a Catedral projetada por Arnolfo di Cambio (1245 – 1301/10) como o primeiro símbolo da arquitetura Renascentista[11]. por muito tempo acreditou-se que Brunelleschi tinha projetado toda a igreja, posteriormente fora constatado que ele projetou somente a cúpula desta construção.

Um dos primeiros livros sobre Geometria Projetiva foi escrito por Leon Battista Alberti (1404 – 1472), considerado um dos grandes gênios da perspectiva matemática teórica, que apresentou suas ideias em Della Pictura (1435). Segundo Yokoyama, Brunelleschi é o responsável pelo primeiro tratado formal de uma nova técnica para representar um piso (Yocoyama, 2002, p. 4). Esta técnica será detalhada na atividade 3 desta pesquisa.

---

[10] ARGAN, Giulio Carlo. Clássico Anticlássico: O Renascimento de Brunelleschi a Bruegel. 2011, p. 81
[11] www.culturagenial.com/igreja-de-santa-maria-del-fiore/

Figura 18: Cúpula da Igreja de Santa Maria del Fiori – a Catedral de Florença.



Fonte: arquiteturaeurbanismosite.files.wordpress.com/2016/02/9_arquitetura-renascentista.pdf, 2019

Figura 19: Busto de Leon Batista Alberti

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Alberti/Alberti_3.jpeg, 2019

Figura 20: Capa de Della Pittura

Fonte: covers.openlibrary.org/b/id/6752480-L.jpg, 2019

Entretanto, era nas artes e nos monumentos arquitetônicos que encontravam suas paixões, sob forte influência de Brunelleschi, por quem tinha grande admiração, Alberti prestou serviços à corte papal que diretamente o influenciou em suas obras e possibilitou a diversidade de áreas de domínio, sendo elas a pintura, a escultura e a arquitetura.

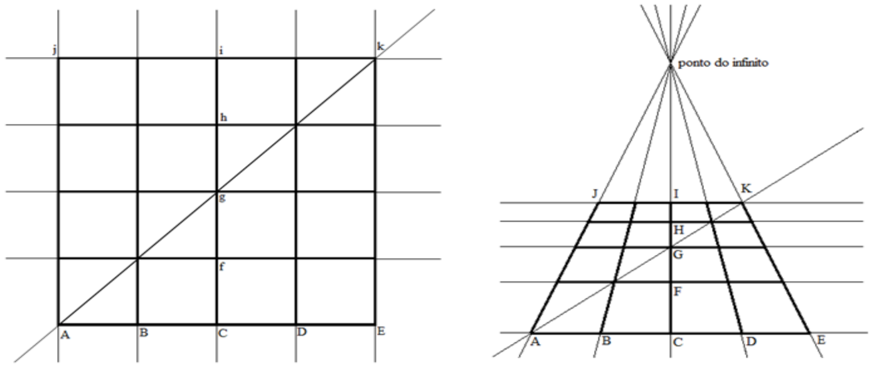
Vejamos o que Emst Hans Josef Gombrich escreve:

> A ideia de Brunelleschi era apresentar as formas dos edifícios clássicos, as colunas, frontões e cornijas que ele copiara das ruínas romanas. Ele havia usado essas formas em suas igrejas. Seus sucessores estavam ansiosos para imitá-lo nisso. A Igreja de S Andrea, Mantua, é uma igreja projetada pelo arquiteto florentino Leone Battista Alberti, que concebeu sua fachada como um gigantesco arco triunfal à maneira romana. Mas como esse novo programa poderia ser aplicado a uma casa comum em uma rua da cidade? Nenhuma casa particular havia sobrevivido desde a época dos romanos e, mesmo que sobrevivesse, as necessidades e os costumes haviam mudado tanto que poderiam ter oferecido pouca orientação. O problema, então, era encontrar um meio-termo entre a casa tradicional, com paredes e janelas, e as formas clássicas que Brunelleschi ensinou os arquitetos a usar. Mais uma vez, foi Alberti quem encontrou a solução que influenciou até nossos dias. Quando construiu um palácio para a rica família de mercadores florentinos Rucellai, ele projetou um prédio comum de três andares. Há pouca semelhança entre esta fachada e uma ruína clássica. Mesmo assim, Alberti manteve o programa de Brunelleschi e usou formas clássicas para a decoração da fachada. Em vez de

> construir colunas ou meias colunas, ele cobriu a casa com uma rede de pilastras planas e entablamentos que sugerem uma ordem clássica sem alterar a estrutura do edifício. ... Alberti ... meramente 'traduziu' um design gótico em formas clássicas, suavizando o arco pontiagudo 'bárbaro' e usando os elementos da ordem clássica em um contexto tradicional. (GOMBRICH, Londres, 1995)

Como podemos observar na figura 20, há os pontos F, G, H, I, J, K são as projeções dos pontos f, g, h, i, j e k.

Figura 21: Ideias de Alberti



Fonte: o autor, 2019

O palácio Rucellai em Florença, um dos primeiros trabalhos de Alberti, tornou-se modelo arquitetônico para a época. Ele se destaca pela fachada em três andares, separada por cornijas no sentido horizontal que não coincidem com a altura real de sua planta. Para quebrar a horizontalidade, introduz uma serie de pilastras verticais onde utiliza a superposição de ordens clássicas.

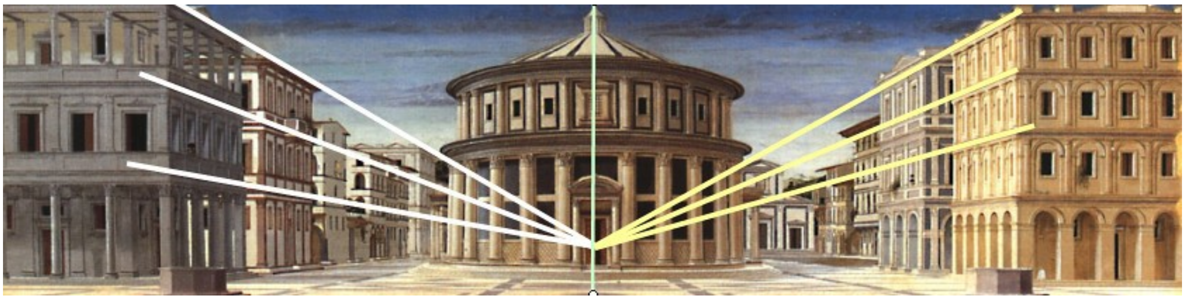
Figura 22: Palácio Rucellai

Fonte: algargosarte.blogspot.com/2014/10/el-palacio-rucellai-de-leonbattista.html, 2019

Todavia, delongou cerca de dois séculos para que as ideias de Alberti pudessem ser estabelecidas matematicamente. Foi apenas em 1639, com o célebre e pioneiro trabalho sobre a teoria geométrica das cônicas, o Broullion Projet, que Girard Desargues (1591 – 1661) formalizou esses conceitos (WATERMANN, 2008, p. 4)

Diversos pintores contemporâneos faziam uso desta técnica em suas obras. Podemos constatar na figura abaixo que mostra a obra Cidade Ideal, do pintor italiano Pierro della Francesca (1410 – 1492).

Figura 23: Cidade Ideal de Pierro dela Francesca



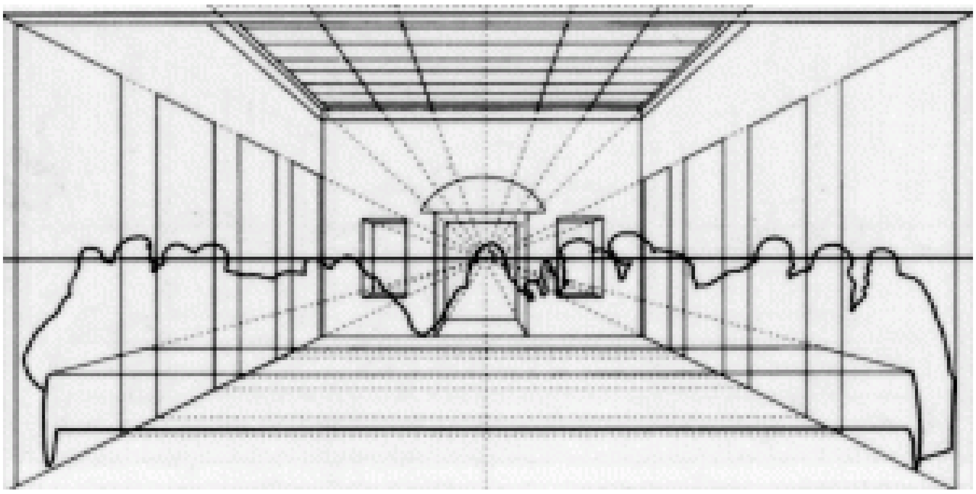
Fonte: turomaquia.com/piero-della-francesca-o-artista-matematico, 2019

O polímata Italiano Leonardo di Ser Piero da Vinci (1452 – 1519) ou simplesmente Leonardo da Vinci, que é considerado o maior expoente do Renascimento por muitos autores, sempre teve uma relação muito forte com a matemática e a arte. Ele sempre utilizou técnicas de perspectivas e considerava a pintura a mais nobre e elevada das belas artes, pois ela nos permite possibilidades de expressão diferenciadas, como por exemplo, quando comparada com a arte da produção de esculturas.

Dentre suas pinturas mais famosas, podemos destacar "A Ceia" (figura 24). Nela, há uma curiosidade que vale a pena enfatizar, que nos anos 1990, restauradores encontraram um prego na cabeça de Jesus, provavelmente adaptado por Da Vinci para marcar o ponto de fuga e compor a perspectiva perfeita da obra[12].

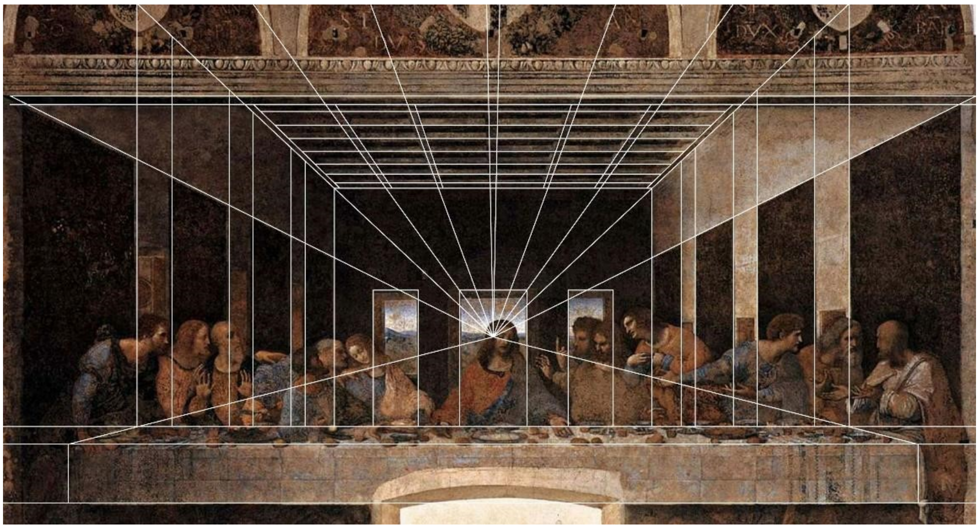
[12] https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-ultima-ceia-leonardo-da-vinci/

Figura 24: Esboço de “A ceia”, de Leonardo da Vinci



Fonte: medium.com/@pibidartesvisuaisufma/renascimento-c8242bb0f5d7, 2019

Figura 25: A ceia, de Leonardo da Vinci



Fonte: collective-alchemy.net/blog/integral-consciousness/updating-our-ways-of-knowing-part-3-the journey-of-unfolding-consciousness-the-mythical-and-mental-rational-structures, 2019

Girard Desargues (figura 12) foi matemático, arquiteto e engenheiro, publicou trabalhos como *Brouillon proiect d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* apresentado em 1639, que aborda propriedades na interseção entre cone e plano, Desargues também descreva as cônicas como deformações em perspectiva do círculo. Uma de suas principais contribuições para a Geometria Projetiva é justamente o *ponto no infinito* ou *ponto ideal.* Ele considera o ponto no infinito como a interseção de linhas paralelas[13].

[13] BOYER, Carl. B. História da Matemática. 2001, p. 248

O Teorema de Desargues relata propriedades projetivas entre dois triângulos. Com isso, seu trabalho nos é apresentado como um ponto de partida para um olhar matemático sobre o estudo histórico do desenvolvimento dos primeiros conceitos projetivos.

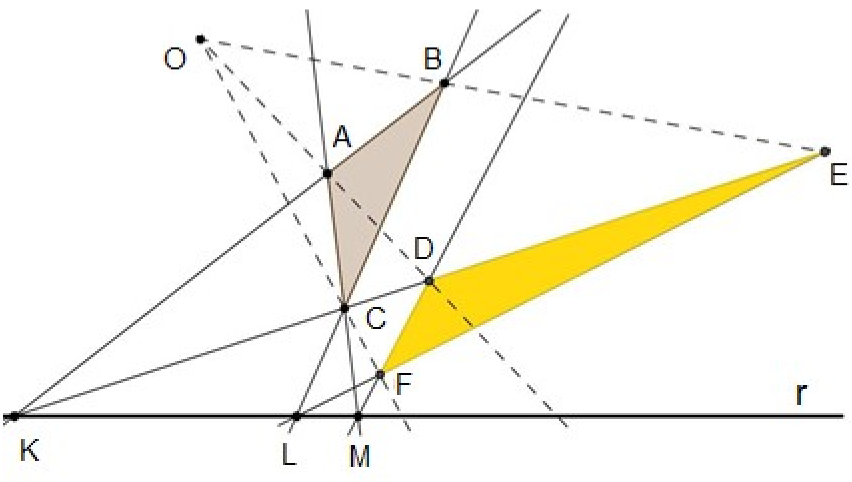
Veja o que diz Gonçalves sobre versões do teorema de Desargues:

> É possível encontrar grande variedade de enunciados para este teorema, porém todos tratando dois triângulos em perspectiva ou perspectivos. A versão apresentada por Abramo Hefez (HEFEZ, 1985), é muito clara e didática, é parecida à versão de Efimov (EFIMOV, 1984), porém versão de Coxeter (COXETER, 1987), pois representa o enunciado mais clássica.[14]

Ressaltando que demonstração deste teorema será feita no anexo 2 desta dissertação, eis o seu enunciado:

Se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes (AD, BE, CF) *são correspondentes de um ponto O, então os pontos de interseção* (K, L, M) *de pares de lados correspondentes* (AB e DE, AC e DF, BC e EF) *são colineares e reciprocamente.*

Figura 26: Teorema de Desargues



Fonte: O autor, 2019

Todavia, Desargues tinha prestígio incontestável na álgebra, detentor de uma linguagem própria para estudos matemáticos, suas escritas não foram bem aceitas na ocasião, somente em meados do séc. XIX, isto é, dois séculos após, que Jean Victor Poncelet (1788 –

[14] GONÇALVES, Tiago da Silva. Uma introdução a Geometria projetiva para o Ensino Fundamental, 2013, p. 48

1867) passou a usá-la, resgatando assim suas ideias. Na época, os matemáticos tinham a visão restrita de que retas paralelas eram retas que não tinham ponto comum, por isso, havia muita dificuldade em trabalhar com pontos no infinito. Isso mostra como Desargues transformou-se uma espécie de profeta da geometria projetiva. Na verdade, sua contribuição foi modernizar o estudo da geometria, transformando-a em uma área de pesquisa.

Segundo o artigo escrito por Douglas Gonçalves Leite durante o XX EMPRAPEM[15], a história nos mostra que o sucesso do ponto de vista cartesiano obscureceu quase completamente o ponto de vista de Desargues. Nem os escritos arguesianos de Pascal sobre as cônicas (o Essay de 1640 e o Traité perdido), nem os de respeitáveis geômetras como Philippe de la Hire e Le Poivre nada mais fazem do que instituir, na verdade, nos séculos XVII e XVIII, uma Matemática à Desargues. Carnot, Monge, Poncelet, Michel Chasles retomarão as ideias arguesianas no início do século XIX e desenvolverão suas consequências num corpo de doutrina chamado “geometria moderna”. (apud GRANGER, 1974, p. 61)

Considerado o pai da Geometria Projetiva, Poncelet era matemático e engenheiro, a sua principal obra foi o "Tratado das propriedades projetivas das figuras", publicada em 1822, que descrevia o conceito de linhas paralelas que se encontram em um ponto no infinito e definiu os pontos circulares no infinito que estão em todos os círculos do plano.

Figura 27: Representação artística de Jean Victor Poncelet

Fonte: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poncelet, 2019

[15] LEITE, Douglas Gonçalves. Girard Desargues e o desenvolvimento da geometria projetiva. XX EMPRAPEM, Curitiba, 2016

Poncelet, que na época era aluno da *Ecole Polytechniqué* e da Academia Militar de Metz, foi preso durante a campanha napoleônica contra a Rússia e, nos dois anos que passou na prisão, desenvolveu ideias que revolucionariam a geometria.

Essas descobertas levaram a uma característica marcante da Geometria Projetiva, o desenvolvimento do Princípio da Dualidade ou Princípio da Reciprocidade, que, em resumo, é a possibilidade de trocar pontos por retas e vice-versa, além de alguns termos relacionados a estes elementos, sem que se perca a validade de axiomas, proposições e teoremas.

Claramente, para que não mude o sentido das afirmações duais, alguns elementos linguísticos também precisam ser alterados quando as palavras reta e ponto são permutadas entre si. Segundo Coxeter e Greitzer[16] quando as palavras ponto e reta são substituídas uma pela outra em uma afirmação, os demais elementos devem ser recolocados de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1: Expressões duais entre ponto e reta.

Ponto	Reta
está sobre	passa por
retas por dois pontos	Interseção de duas retas
concorrentes	colineares
vértices	lado
quadrângulo	quadrilátero
tangente	ponto de contato

Fonte: O autor.

Poncelet também desenvolveu o princípio da continuidade mostrado na figura 28, que segundo Abramo Hefez[17], diz o seguinte:

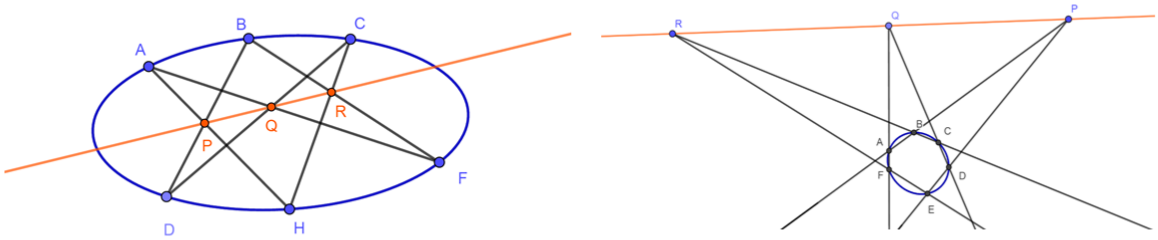
> "se uma figura deriva de outra por mudança contínua, toda a propriedade da primeira se aplica à segunda".

[16] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. Geometry Revisited. 1967, p. 135

[17] HEFEZ, A. Introdução a história da geometria projetiva. SBM, 1985, p. 43.

Ainda, segundo o autor citado acima, este princípio se baseia grande parte da Geometria Projetiva do século 19 e foi um dos argumentos que mais suscitaram polêmicas em matemática.

Figura 28: Princípio da continuidade de Poncelet



Fonte: o autor, 2019

Após Poncelet, outros grandes nomes surgiram na geometria projetiva, como Michel Chasles (1798 –1867), Jacob Steiner (1796 – 1863), Karl Christian e Von Staudt (1798 – 1867). Assim, no final do século XIX, a geometria projetiva estava definitivamente solidificada.

A geometria projetiva lida com o mundo que vemos. Na prática, os trilhos de trem não são retas paralelas, mas retas que se encontram no horizonte, no infinito. Essa é uma das características marcantes da geometria projetiva, duas retas quaisquer sempre se intersectam. Observaremos também que, ao contrário da geometria euclidiana, todo o desenvolvimento da geometria projetiva pode ser feito usando-se apenas uma régua não graduada.[18]

Cláudia Regina Flores[19] afirma em seu artigo que refletir sobre a técnica do desenho em perspectiva em sua forma de problematizações com a cultura na qual está inserida é fundamental por proporcionar subsídios para a percepção da relação com o saber, enquanto produção histórica, desnaturalizando verdades estabelecidas.

Ademais, o conhecimento de como surgiu um modo de representação em perspectiva pode nos fazer pensar como esta técnica transformou e modificou nosso olhar sobre o mundo a nossa volta e educou nosso olhar para ver as imagens representadas.

Por fim, destacamos duas obras de estimados artistas para que seja observada a diferença entre o período que antecede o uso da geometria projetiva, e logo após a inserção

---

[18] AUFFINGER, Artur Carlos Theodoro; VALENTIM, Fábio Júlio da Silva. Introdução à Geometria Projetiva, 2003, p. 2

[19] FLORES, CLÁUDIA REGINA, Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva, 2003, p. 94

da matemática nas obras de artes. Ressaltamos que não é nossa intenção avaliar as obras de artes, pois cada artista contribuiu positivamente para a construção histórica da humanidade.

A primeira obra de arte apresentada é a do pintor Memmo di Filippuccio (1303 – 1345), natural de Siena, na Itália. Filippuccio pintou várias telas e prédios arquitetônicos na Prefeitura de San Gimignano, em 1303, retratando cenas da vida cotidiana da época. Fez parte de um grupo de artistas que trabalhou na Basílica de São Francisco de Assis. Essa experiência marcou seu estilo, que sempre teve uma forte influência de Giotto di Bondone (1266 – 1337), que foi um dos maiores expoentes da pintura renascentista. Memmo também realizou pinturas no Palazzo Comunale, em Siena, onde o próprio veio a falecer. A pintura destacada se chama "A Virgem com o menino", retratada na figura 29.

A segunda é de Giovanni Bellini, nascido em Veneza (1430 – 1516). Este foi um pintor do Renascimento que já fazia o uso da geometria projetiva. É considerado como renovador da pintura da escola veneziana, movendo-a para um estilo mais sensual e policromático. Pelo uso de cores claras de lenta secagem, Bellini criou sombras detalhadas, profundidade e ricos coloridos. Suas fluentes e coloridas paisagens tiveram um grande efeito no seu tempo. A pintura destacada se chama: "Madona e a Criança", retratada na imagem 30:

Figura 29: Virgem com o menino, Memmo di Filippuccio

Fonte: wahooart.com/@/Memmo-Di-Filippuccio, 2019

Figura 30: Madona e a Criança, Giovanni Bellini

Fonte: associazioneclaramaffei.org/2008/11/29/giovanni-bellini, 2019

2.2 **Ideias intuitivas**

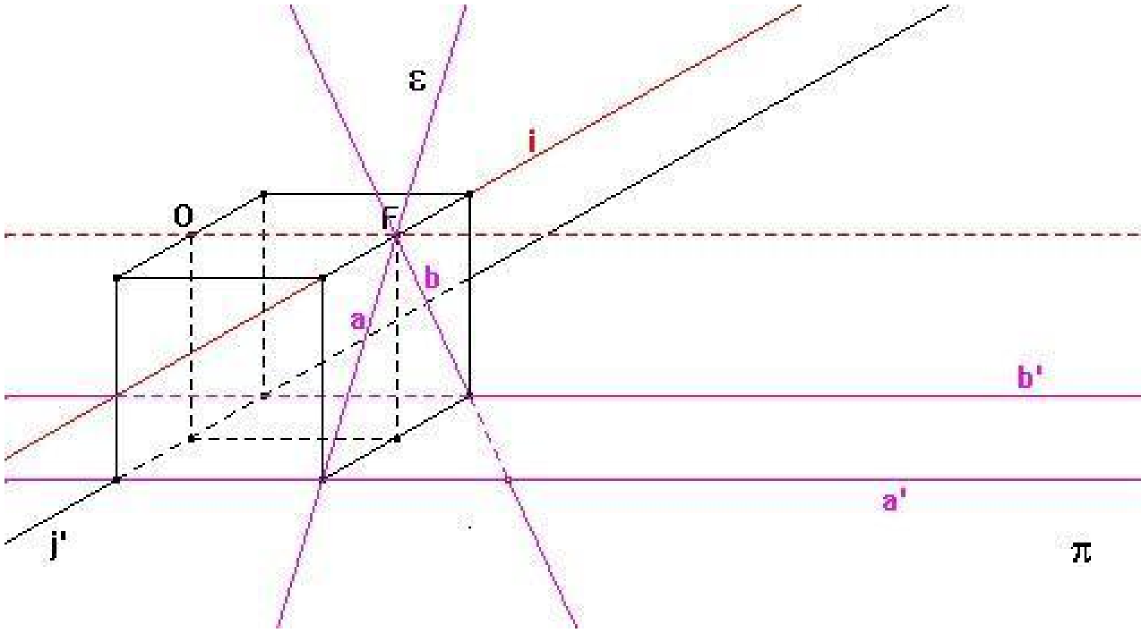
Considera-se um ponto de projeção *O*.

Acredita-se que ele seja como se fosse uma fonte luminosa pontual. Considera-se o plano ε, euclidiano, e outro plano π qualquer no espaço. A Geometria Projetiva estuda o que acontece no plano π quando projetamos nele o plano ε, através de *O*. Chamaremos essa transformação de *T*. Quais as semelhanças e as diferenças dos dois planos? Quais as propriedades geométricas que se alteram? E as que não sofrem mudanças? Quais são as regras dessa transformação *T*?

Analisando intuitivamente, percebe-se que um ponto e uma reta em ε continuam sendo um ponto e uma reta em π. Se o ponto A está na reta *a* no plano ε, um ponto projetado A' (de A) estará na reta projetada a' (de a) no plano π. Se A estivesse em uma curva qualquer, pela projeção, A' continuaria na curva projetada em π. Ou seja, a incidência se preserva. O que já não acontece com o tamanho de segmentos e de ângulos.

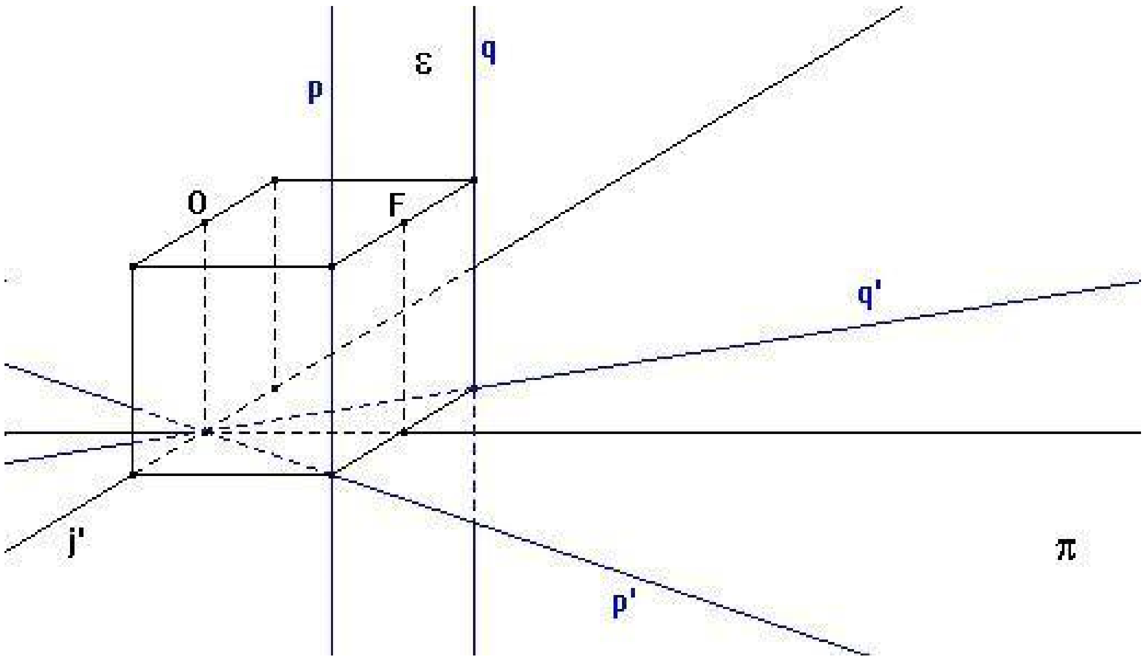
Retas paralelas em ε nem sempre continuam paralelas em π. E retas concorrentes em ε podem se tornar retas paralelas em π, como mostram as imagens a seguir:

Figura 31: Ideias intuitivas de incidências



Fonte: o autor, adaptado de Yocoyama (2002, p. 20), 2019

Figura 32: Ideias intuitivas de incidências



Fonte: o autor, adaptado de Yocoyama (2002, p. 20), 2019

Sejam dois planos perpendiculares ε e π e um ponto *O* fora deles.

As duas retas *p* e *q* que eram paralelas em ε pela transformação *T* tornam-se duas retas concorrentes *p*' e *q'* em π. Na figura acima, as retas *a* e *b* concorrentes em ε tornam-se paralelas em π. (na figura 30)

Outra observação interessante é que, na mesma figura 31, a reta *i* em ε, não é projetada em nenhuma reta do plano π. Podemos pensar como se ela fosse para o infinito (em relação ao plano π pela projeção *T*). Por outro lado, nenhuma reta do plano ε vai parar na reta ordinária *j'* (em π), assim como a reta *i'* vai para o infinito do plano π. Podemos pensar também que existe uma reta (do infinito) do plano ε que é projetada em *j'*. Para entendermos melhor esta última projeção, considere pares de retas paralelas em todas as direções em ε. Quando projetadas em π, o conjunto dos pontos de interseção dessas retas forma a reta *j'*. Na prática *j'* é a interseção do plano π com o plano paralelo ao plano ε que passa por *O*.

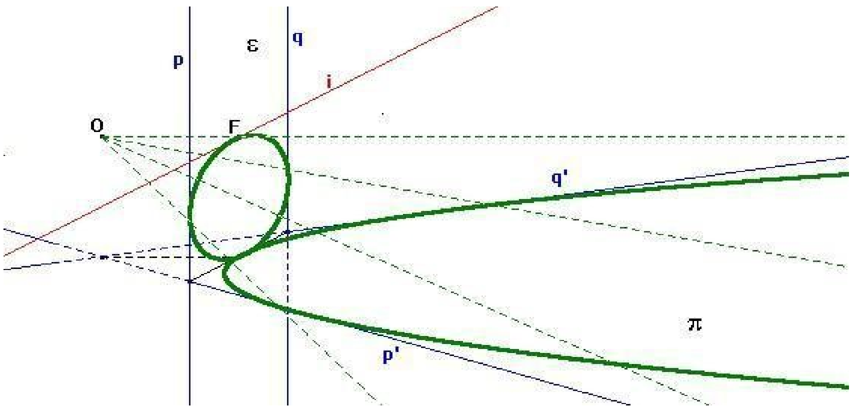
Associando estas ideias, pode-se concluir que retas paralelas, quando são projetadas em outros planos, podem deixar de ser paralelas e retas concorrentes podem vir a se tornar paralelas por uma projeção. Portanto, pode-se considerar a existência de um ponto de interseção entre quaisquer duas retas.

Assim, pode-se pensar que duas retas distintas, quaisquer, se interceptam em um ponto (ordinário ou ideal).

A projeção da circunferência é um caso interessante.

Considera-se a figura a seguir, a reta *i* em ε é tangente à circunferência *C* no ponto *F*, e pela projeção, do ponto *O* para o plano π, *F* iria para o infinito em π. Mas em π a circunferência se transforma em uma parábola *k*. Também podemos imaginar ainda um cone de vértice *O* onde a seção dele com o plano ε é uma circunferência e com o plano π é uma parábola.

Figura 33: Projeção da circunferência



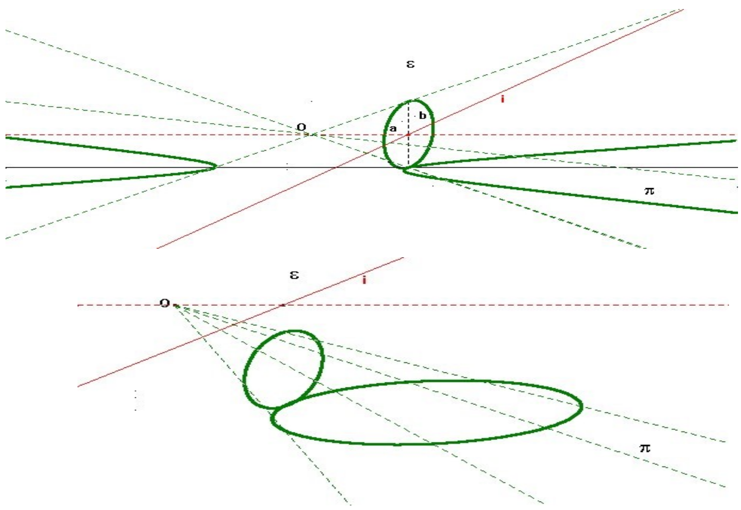
Fonte: o autor, adaptado de Yocoyama (2002, p. 20), 2019

Ainda tem mais dois casos de projeção da circunferência:

Quando a reta *i*, que vai para o infinito, é secante à circunferência, a projeção é uma hipérbole e quando a reta *i* é exterior à circunferência, a projeção de *C* é uma elipse.

Logo, pode-se pensar em cones com vértice em O onde as projeções são as seções do plano π com o cone, como mostram as figuras abaixo.

Figura 34: Projeções da circunferência



Fonte: o autor, adaptado de Yocoyama (2002, p. 20), 2019

No plano projetivo, a distinção entre elipse, hipérbole e parábola pode ser feita determinando uma posição especial para a reta do infinito. Mas, essencialmente, cônicas são o mesmo objeto geométrico.

Portanto, conclui-se dizer que a parábola é uma cônica com apenas um de seus pontos no infinito, a hipérbole é uma cônica com apenas dois de seus pontos no infinito e a elipse é uma cônica com nenhum de seus pontos no infinito.

Logo, realiza-se esta transformação quantas vezes quisermos com quaisquer planos e quaisquer pontos de projeção. Dizemos, então, que temos uma projetividade do primeiro plano com o enésimo plano. Agora, estaremos prontos para a formalização da Geometria Projetiva.

2.3 **Os axiomas da Geometria Projetiva**

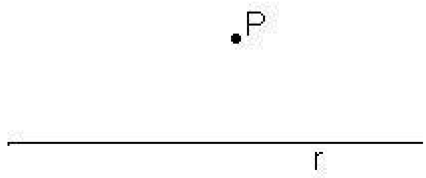
Segundo Yocoyama[20], alguns axiomas da Geometria Projetiva são basicamente os mesmos da Geometria Euclidiana, com exceção do Postulado das Paralelas, de onde se constrói uma Geometria totalmente diferente, onde retas “paralelas” se encontram num ponto no infinito, ou seja, não existem retas paralelas.

[20] YOKOYAMA, Leo Akio. Uma Prova Geométrica da Versão Projetiva do Teorema de Steiner, 2002, p. 40

A Geometria Projetiva é fundamentada em oito axiomas. De acordo com Auffinger e Valentim (2003, p. 10) são enunciados do seguinte modo:

Axioma 1: *Existem uma reta e uma ponto que não são incidentes.*

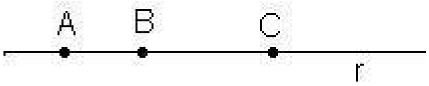
Figura 35: Representação geométrica do axioma 1 da geometria projetiva



Fonte: o autor, 2019

Axioma 2: *Toda reta é incidente com pelo menos três pontos distintos.*

Figura 36: Representação geométrica do axioma 2 de geometria projetiva



Fonte: o autor, 2019

Axioma 3: Dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.

Figura 37: Representação geométrica do axioma 3 de geometria projetiva

Fonte: o autor, 2019

Axioma 4: *Se A, B, C e D são quatro pontos distintos dois a dois, tais que AB intersecta CD, então AC intersecta BD.*

Axioma 5: *Se ABC é um plano, existe ao menos um ponto fora do plano ABC.*

Axioma 6: *Quaisquer dois planos distintos têm ao menos dois pontos em comum.*

Axioma 7: *Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo nunca são colineares.*

Axioma 8: *Se uma projetividade deixa invariante cada um de três pontos distintos de uma reta, ela deixa invariante todos os pontos da reta.*

Segundo Yocoyama, (2002, p. 40) ressalta que: nos Axiomas 1 e 3, vale ressaltar a semelhança destes axiomas com o da geometria Euclidiana. O Axioma 2 apresenta a existência de três pontos numa reta, pois com três pontos não há possibilidade de formar um quadrângulo[21]. O quarto axioma difere totalmente da geometria Euclidiana, onde existem retas que não possuem ponto comum (retas paralelas). Na Geometria Projetiva, não há retas paralelas.

Deste modo, a motivação para este axioma surge exatamente nos quadros dos renascentistas que escolhiam um determinado ponto para ser o *Ponto de Fuga* aonde as retas paralelas iriam se encontrar.

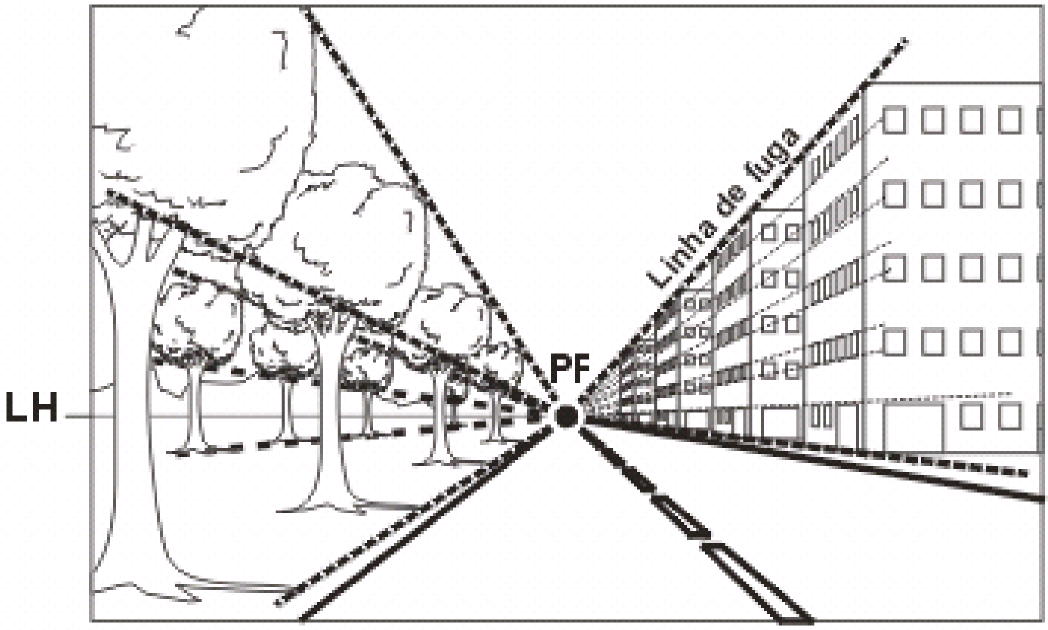
Assim a frase: *"Retas Paralelas se encontram no Infinito"* é verdadeira na Geometria Projetiva.

Figura 38: Ponto de fuga

Fonte: flickr.com/photos/zekatreka/2830758509, 2019

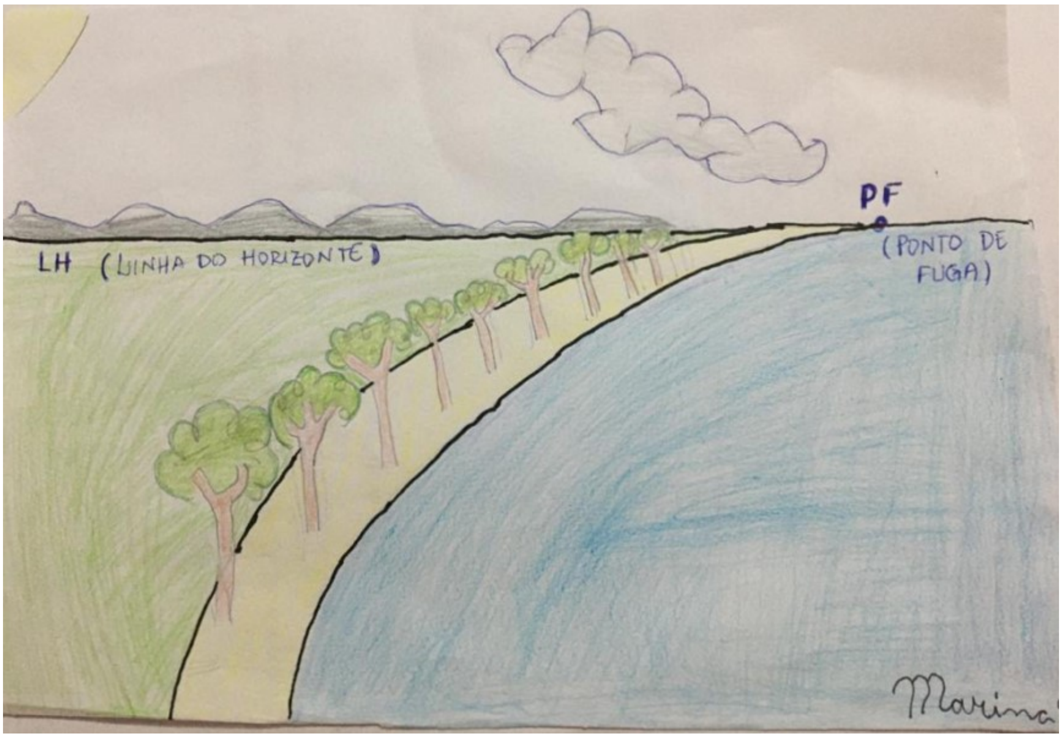
[21] quadrângulos: constituídos por quatro pontos não colineares, A, B, C e D, por cada par dos quais passa-se uma reta. Dois lados são ditos opostos, se eles não têm nenhum vértice comum. O ponto de interseção, E, F e G, de dois lados opostos denominado ponto diagonal.

Figura 39: Ponto de fuga



Fonte: medium.com/aela/a-perspectiva-nas-artes-visuais-76afe4114da1, 2019

Figura 40: Ponto de fuga



Fonte: Marina Duarte Pereira, 9 anos, 2019

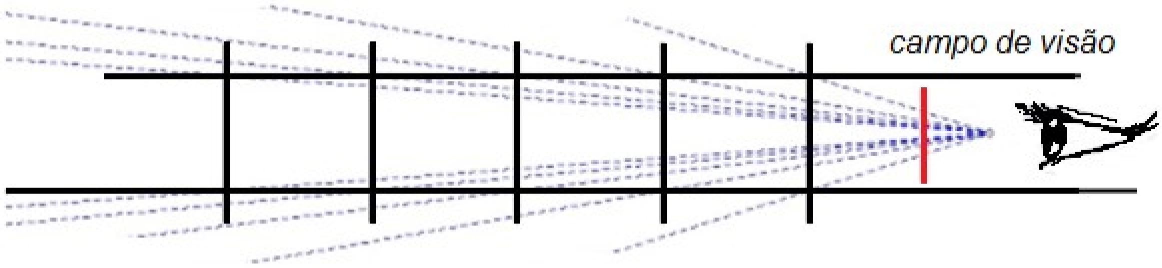
Na arte, o ponto de fuga (PF) é um ponto localizado sobre a linha do Horizonte (LH) para onde todas as linhas convergem, quando vistas em perspectivas. Em alguns casos de perspectivas, são necessários mais de um ponto de fuga. Já no cinema, o ponto de fuga é a posição da câmera.

2.4 **Teorema do Ponto do Infinito**

É possível compreender essa ideia do Ponto de Fuga, a partir do Teorema do Ponto do Infinito, que diz exatamente o seguinte, de acordo com Yocoyama[22]:

> Se duas ou mais retas no mundo real são paralelas uma à outra, mas não são paralelas ao plano da figura, então elas têm o mesmo ponto do infinito. A imagem em perspectiva destas retas não será de retas paralelas. Se isto se estende a todo o desenho, as imagens das retas irão se intersectar no ponto do infinito. (Yocoyama, 2013, p. 20)

Figura 41: Representação do ponto do infinito



Fonte: o autor, adaptado de Yocoyama (2013, p. 20), 2019

2.5 **Pinturas antes da Perspectiva**

Como já vimos na seção 2.1, as pinturas feitas no período que antecede o Renascimento não tinham técnicas de perspectivas. Por esse motivo, os trabalhos artísticos não davam a noção de profundidade. Isso pode ser notado na figura 42 abaixo.

Figura 42: Pintura Egípcia

Fonte: leopoldina-emummundodistante.blogspot.com/2009/05/pesagem-das-almas.html, 2019

[22] YOKOYAMA, Leo Akio. Proposta de atividade da Bienal SBM. Matemática e Arte: Perspectiva, um passeio histórico, artístico e teórico através da Geometria Dinâmica. 2013, p. 20

Um outro exemplo que podemos citar antes do uso de perspectivas são as Pinturas Góticas. Essas pinturas nada mais são do que uma das manifestações da arte gótica do período que marca os últimos três séculos da Idade Média e é intimamente ligada à pintura italiana.

Durante esse período, era praticada em quatro principais ofícios: afrescos[23], painéis, iluminura de manuscritos e vitrais. Os principais artistas na pintura gótica são os verdadeiros precursores da pintura do Renascimento.

Figura 43: Crucificação, de Giotto

Fonte: giottodibondone.org/biography.html, 2019

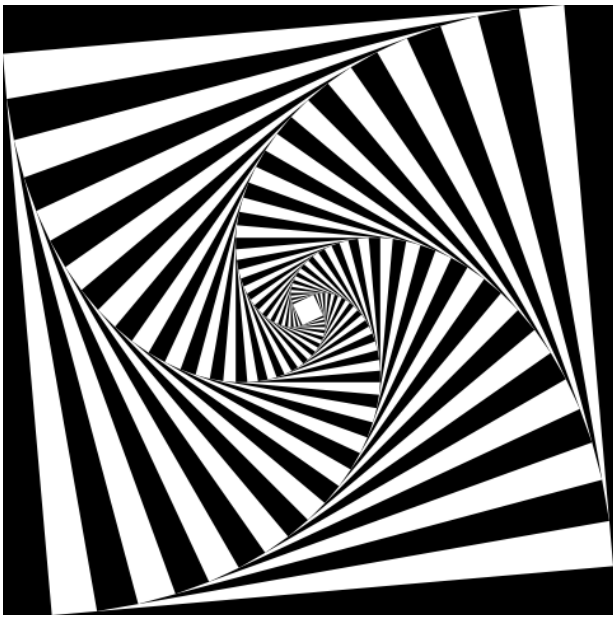
2.6 **Op-Art:**

A expressão inglesa "op-art" significa "arte óptica". Defendia, para arte, "menos expressão e mais visualização". O rigor com que é construída, simboliza um mundo instável e precário, que se modifica a cada instante. (Yocoyama, 2013, p. 30)

Apesar de ter ganho força na metade da década de 1950, a Op Art passou por um desenvolvimento relativamente lento. Ela não tem o ímpeto atual e o apelo emocional da Pop Art; em comparação, parece excessivamente cerebral e sistemática, mais próxima das ciências do que das humanidades, em contrapartida, suas possibilidades parecem ser ilimitadas.

[23] Obra pictótica em forma de mural com narrativas em paredes ou tetos, utilizada desde a antiguidade.

Figura 44: Arte ótica



Fonte: significados.com.br/op-art, 2019

As regras de perspectiva desenvolvidas na Renascença influenciariam a produções de imagens por muitos mais séculos, de tal forma a estabelecer um abandono pelas artes plásticas do século XX, sobretudo por Picasso (1981 – 1973) e Kandinsky (1866 – 1944). Foi um ato radical, revolucionário e polêmico. O olhar do espectador tinha, até então, contado com a codificação da perspectiva para poder compreender as imagens, mas, no século XX, a fotografia e o seu rigor estavam há muito implantados. Surgiu então a necessidade de um olhar novo. Ao contrário do passado, as deformações ou ausência da perspectiva passaram a proliferar nas criações artísticas. Porém, o mundo de imagens que nos rodeia é muito mais vasto e no cinema, na televisão, na fotografia, na tridimensionalidade continua a estar representada sobre superfícies planas.

2.7 **Ilusões de ótica**

Podemos usar a perspectiva para criarmos ilusões de ótica. Isso já havia sido retratado por Hogarth (1697 – 1764) em uma de suas obras, como podemos observar na figura 45. Nela, entre outras observações, podemos notar o seguinte: o homem de azul está distante do rio, mesmo assim, consegue pescar; o ganso dentro do lago, tem tamanho maior do que o boi que encontra-se na beira; e a mulher que está na janela tem praticamente o mesmo tamanho do que o homem que está no alto do morro, entre outras.

Figura 45: Hogarth, Falsa Perspectiva

Fonte: hannahbroster1201.wordpress.com/lectures/lecture-three, 2019

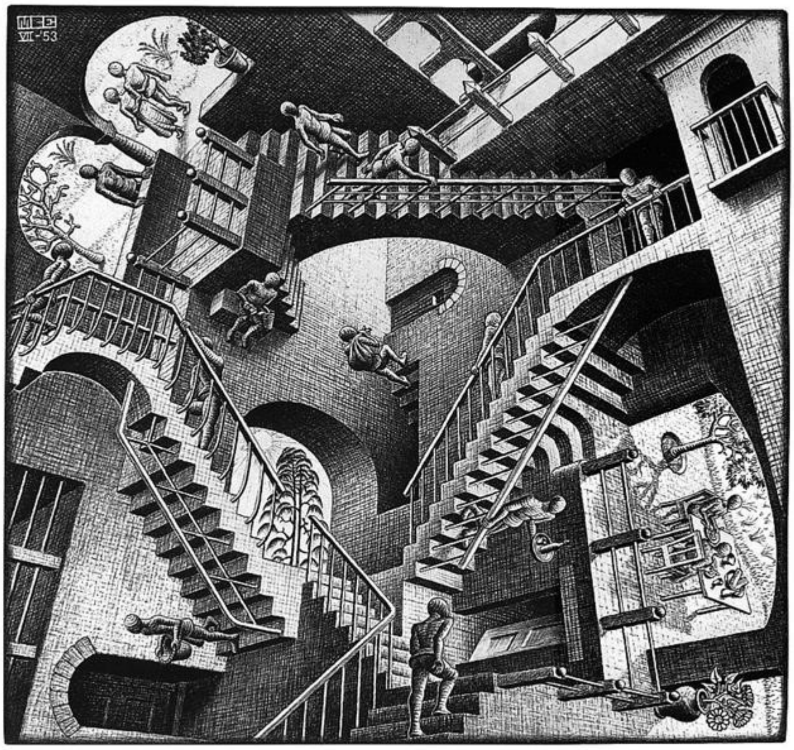
O verdadeiro segredo para as falsas perspectivas da figura acima ocorre por conta da existência de mais de um ponto de fuga na obra, ou seja, existe um ponto de fuga para desenhar o ganso e outro para desenhar o boi, e assim adiante.

Na arte contemporânea da falsa perspectivas, podemos destacar o holandês Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) e o espanhol Salvador Dalí (1904 – 1989), este último sendo um mestre do surrealismo[24].

As figuras 46 e 47, nos mostram a falsa perspectiva em uma das obras de Escher e Dalí, nesta ordem. Na primeira, é possível notar o encontro de escadas e uma pessoa subindo determinada escada e, ao mesmo tempo, outra parece que está descendo a mesma.

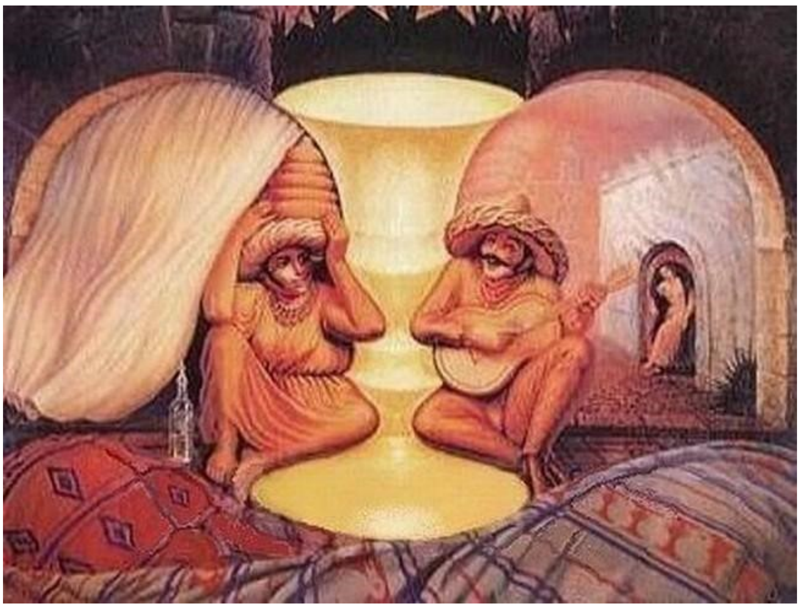
[24] Movimento artístico e literário de vanguarda ocorrido na França no período entre as duas Grandes Guerras Mundiais, que enfatizava o papel do inconsciente na atividade criativa.

Figura 46: Escher, falsa perspectiva



Fonte: wikiart.org/pt/maurits-cornelis-escher/relativity-lattice, 2019

Figura 47: Ilusão de ótica, de Salvador Dalí



Fonte: didatticarte.it/public/vedere-ocampo.jpg, 2019

Na próxima unidade, contemplaremos a Geometria Dinâmica, mostraremos fundamentações legais e sua importância dentro do processo de ensino e aprendizagem.

3 A GEOMETRIA DINÂMICA

A Geometria Dinâmica não consiste em uma nova geometria, mas sim em novas formas de abordar os conceitos de geometria através de softwares. De acordo com o Portal dos Professores de Matemática[25], programas de Geometria Dinâmica são ambientes virtuais voltados para o Ensino e Aprendizagem de Geometria de uma forma não estática como no quadro da sala de aula, ou seja, de uma forma dinâmica. No site do Portal do Professor do Ministério da Educação[26], é disponibilizado o download dos principais softwares usados em Geometria Dinâmica, sendo alguns pagos e outros gratuitos. Veja alguns:

Tabela 2: Softwares usados em Geometria Dinâmica

Softwares Free	Softwares Pagos
• Geogebra	• Cabri Geometre
• Régua e Compasso	• Cabri 3D (shaware)
• Tabulae	
• Software Triângulos	

Fonte: o autor, 2019

Optamos por fazer uso do software Geogebra por ser um programa voltado a diversos públicos. Neste, é possível colocar em prática conceitos da Educação Básica quanto do Ensino Superior. No entanto, suas ferramentas tornam-se mais fáceis em alguns quesitos como: “contas simples” e “desenhar gráficos”. Por outro lado, usar seus comandos exige que o usuário tenha conhecimentos mais aprofundados. Assim, é possível encontrar diversos caminhos para resoluções de problemas ou até mesmo checar se o que foi feito está correto.

O software Geogebra é facilmente encontrado em sites de busca ou em um dos endereços:

- http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm
- http://www.geogebra.org/cms/

[25] http://www.professoresdematematica.com.br/softwares-geometria-dinamica.html
[26] http://portaldoprofessor.mec.gov.br/link.html?categoria=9

Ao acessar o usuário tem a opção de escolher o idioma podendo optar por Português (Brasil).

Além disso, através do site da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo[27], é possível encontrar materiais interativos on-line, tutoriais, oficinas e até mesmo ficar atualizado dos eventos relacionados ao Geogebra.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática - PCN destaca-se a necessidade de contextualizar o ensino com situações cotidianas. As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado. (BRASIL, 1998, p. 37)

Para que seja possível atender a essa necessidade do PCN citada no parágrafo anterior, se faz necessário que o aluno consiga compreender o conteúdo estudado. Na medida que o aluno consegue assimilar o conteúdo de forma diferente do tradicional, ele já consegue fazer associações do que foi estudado com a sua realidade. Usar Softwares de Geometria Dinâmica não consiste apenas em tecnologia na sala de aula, mas sim, através dos recursos disponíveis pelo programa, levar o aluno a compreender o assunto de forma dinâmica.

De acordo com a BNCC, o Ensino Fundamental está organizado em áreas do Conhecimento, dentro deste contexto uma das competências do Ensino da Matemática para a educação básica é:

> Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados; (BNCC, 2017, p.55)

Como a tecnologia está muito presente em nosso cotidiano, é inevitável associá-la ao ensino, fazer uso de softwares educativos para a aprendizagem de alunos nos ensinos fundamentais e médio vem se tornando cada vez mais comum. Um bom exemplo que podemos citar é o uso de calculadoras e aplicativos de celulares usados com bastante frequência, entre outras tecnologias.

Com a era da informação cada vez mais presente no cotidiano das pessoas, a utilização de softwares educativos no processo de ensino-aprendizagem vem se tornando frequente. Os

[27] https://www.pucsp.br/geogebrasp/sobre_instituto.html

softwares educativos são capazes de fazer com que a Geometria se torne mais prazerosa e em muitos casos, até mais fácil. A contribuição desses recursos didáticos é constatada tanto para os alunos quanto para os professores. Para estes, é favorável porque servem como material complementar à elaboração das aulas. Já para os educandos, é uma forma fácil e interativa no processo de ensino e aprendizagem. Contudo, geram dúvidas se tal crescente pode gerar uma revolução dentro do processo educacional.

3.1 **A importância do uso de softwares no ensino**

Conforme âmbito de competência e disciplina curricular, a Matemática tem por alvo colaborar para que os alunos desenvolvam e aperfeiçoem competências à vida em sociedade, desenvolvendo o raciocínio lógico. A Matemática é, por muitas vezes, considerada vilã pelos alunos, que a qualificam como difícil e sem aplicação prática. Mas, caso vista e entendida como um saber real propicia a chegada do saber de entendimento comum à instrução sistematizada cientificamente. Santos[28] corrobora essas premissas:

> No âmbito escolar, a educação da matemática é vista como uma linguagem capaz de traduzir a realidade e estabelecer suas diferenças. Na escola a criança deve envolver-se com atividades matemáticas que a educam nas quais ao manipulá-las ela construa a aprendizagem de forma significativa, pois o conhecimento matemático se manifesta como uma estratégia para a realização das intermediações criadas pelo homem, entre sociedade e natureza. (Santos, 2008, p. 1)

Dessa maneira, na construção da instrução matemática deve existir um andamento em que os alunos se apropriem dos conteúdos curriculares de maneira motivadora e significativa. Assim sendo, é essencial que o docente aperfeiçoe a sua prática, buscando métodos inovadores e promovendo práticas pedagógicas interdisciplinares. Vejamos o que Skovsmose[29] relata que:

> A Educação Matemática se enquadra tradicionalmente no paradigma do exercício, que possui a premissa central de que existe uma, e somente uma resposta correta para questões, desafios e problemas. Acredito que mais importante do que fazer exercícios, é analisar os diferentes tipos de situações, aprendendo a construir estratégias utilizando os conceitos matemáticos. (SKOVSMOSE, 2008, p. 3)

[28] SANTOS, Sueli dos. O Ensino da Matemática com Significação nos Anos Iniciais da Educação Básica. 2008, p. 1

[29] SKOVSMOSE, Ole. Matemática Crítica. 2008, p. 3

Juntamente com o crescimento do raciocínio lógico-matemático, os conteúdos curriculares deixam de ser somente decorados e memorizados para serem verdadeiramente compreendidos, entendidos e internalizados pelos alunos. Nesse processo, o docente é visto como o facilitador e intermediador, aquele que desenvolve oportunidades ricas de aprendizagem.

Encontramos diversos estudos apontando a inclusão tecnológica como fator que muito favorece na utilização dos recursos materiais à prática docente, em especial na sala de aula. Mesmo que sua utilização seja controversa à vida de muitos professores, ela pode gerar novos métodos e práticas dentro do desenvolvimento profissional. Ademais, o bom uso dessa inclusão traz motivações extras para nossos alunos. Segundo Maria Alice Gravina, em seu artigo "*Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria*" (1996), programas de computadores constituem ferramentas poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado.

> A partir de nossa experiência e de pesquisas publicadas podemos dizer que os programas de criação de micro-mundos de Geometria, como Cabri-Géomètre e Geoplan, constituem ferramentas poderosas na superação dos obstáculos inerentes ao aprendizado. Nestes ambientes conceitos geométricos são construídos com equilíbrio conceitual e figural; a habilidade em perceber representações diferentes de uma mesma configuração se desenvolve; controle sobre configurações geométricas levam a descoberta de propriedades novas e interessantes. Quanto as atitudes dos alunos frente ao processo de aprender: experimentam; criam estratégias; fazem conjeturas; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir de manipulação concreta, "o desenho em movimento", passam para manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e desta forma entendem a natureza do raciocínio matemático. (GRAVINA, 1996. p. 13)

Para Gravina, nos ambientes virtuais, os alunos usam conceitos matemáticos, desenvolvem habilidades, fazem conjecturas argumentam e decidem propriedades matemáticas. Enfim, apresentam melhor interação.

Neste contexto, vale ressaltar a importância do professor em sempre incentivar seus alunos a conjecturar, a explorar e levantar hipóteses e a refinar as suas crenças e convicções. Essas medidas os levarão a compreender as verdades de proposições matemáticas. Neste âmbito, o computador pode ser crucial aliado e não um obstáculo a mais. Através do manuseio dos softwares da geometria dinâmica, os alunos podem ser instigados a explicarem o porquê da verdade de suas conjecturas, não deixando que as demonstrações fiquem esquecidas em segundo plano. Trata-se do ensino se adequando à realidade educacional.

Na unidade seguinte, iremos propor algumas atividades, dentro da Educação Básica, para abordar a Geometria Projetiva, fazendo uso dos conceitos de Geometria Euclidiana, através de software de Geometria Dinâmica.

3.2 Algumas abordagens da geometria no Ensino Fundamental

Agora que já apresentamos o que é a Geometria Projetiva e contamos um pouco do seu contexto histórico e da sua inserção no mundo artístico desde a sua origem, iremos dar início a parte final deste trabalho: como podemos trabalhar a Geometria Projetiva fazendo uso da Geometria Dinâmica? Para apresentar como é possível, vamos abordar alguns conceitos ensinados no Segundo Segmento do Ensino Fundamental, os quais podem ser aplicados de forma interdisciplinar com o professor de Artes e de História.

Dentro de um foco histórico, tendo em vista que toda a origem da Geometria Projetiva se pauta no Renascimento, é possível estabelecer perfeitamente relações com uma aula de História, na qual se discuta como era o mundo durante esse período. Se quisermos relacionar a Geometria Projetiva com a arte, a melhor forma de fazê-lo é falar sobre os artistas da época e das características presentes em suas obras.

No entanto, para que seja possível ocorrer uma discussão a respeito da Geometria Projetiva, é fundamental que se compreenda a parte teórica e, para isso, faremos uso de um software de Geometria Dinâmica para explicar alguns conceitos através de construções geométricas.

Iremos propor algumas atividades, donde, iremos também indicar uma forma de abordar a Geometria Projetiva a partir do uso de um dos Softwares de Geometria Dinâmica gratuito: ***o Geogebra*.**

Abaixo, estão seis sugestões de atividades que podem ser abordadas em turmas dos anos finais do Ensino Fundamental. As atividades 5 e 6 serão abordadas no anexo 3 e 4, respectivamente, desta pesquisa.

Atividade 1: *Um Ponto de Fuga e Profundidade*

Atividade 2: *Dois Pontos de Fuga e Profundidade*

Atividade 3: *Projeção do Chão em perspectiva com um ponto de fuga.*

Atividade 4: *Três pontos de Fuga e Profundidade*

Atividade 5: *Construção do Incentro de um triângulo*

Atividade 6: *Construção do Baricentro de um triângulo*

Antes de particarmos estas atividades no Geogebra de fato, é importante que conheçamos os principais elementos da perspectiva:

- ✔ **O *Quadro***: é o espaço delimitado para representar a imagem, no nosso caso, a tela do computador.
- ✔ **A *Linha de Terra*** (LT): é a posição dos pés do observador, ou a base do quadro.
- ✔ **A *Linha do Horizonte*** (LH): é o elemento da perspectiva que representa o nível dos olhos do observador.
- ✔ **O *Ponto de Vista*** (PV): é o ponto obtido a partir do olhar do observador; caso ele esteja posicionado no centro e olhando bem \`a sua frente, este ponto estará bem no meio do desenho, no cruzamento da linha do horizonte com uma linha vertical.
- ✔ **O *Ponto de Fuga*** (PF): é um ponto de referência localizado na linha do horizonte usado par formar as linhas de um desenho e construir uma perspectiva, em outras palavras, é o ponto para o qual todas as linhas paralelas convergem quando vistas em perspectiva.
- ✔ **As *Linhas de Fuga*** (LF): são as linhas de apoio do desenho que convergem para o ponto de fuga. São essas linhas que geram a sensação de profundidade nos desenhos.

Outras informações básicas sobre o ponto de fuga é que sua localização é sobre a altura que representa o nível dos olhos de um observador. Deste modo, todos os objetos que se encontrarem na parte de cima da linha do horizonte serão vistos de baixo, e aqueles que estiverem sobre, serão vistos de frente e o que estiverem embaixo, serão vistos de cima.

Pode ser que num desenho haja mais de um ponto de fuga. O caso mais utilizado são figuras com dois pontos de fuga, pois representam com mais exatidão a nossa visão dos objetos em três dimensões.

Já os desenhos com três ou mais pontos de fuga trazem muitas distorções, pois passam a sensação de exagero ou monumentalidade como podemos notar nas figuras 45 e 46.

Vamos construir um paralelepípedo fazendo uso de conceitos da Geometria Projetiva no Geogebra usando um e dois pontos de fuga.

3.2.1 Atividade 1:

Um ponto de fuga e profundidade

Autor:

- Márcio Sá – Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Descrição da Atividade:

O aluno deverá construir um paralelepípedo usando apenas um ponto de fuga utilizando o software geogebra e associando sua construção a algumas imagens nas quais é possível visualizar o ponto de fuga.

Estrutura Curricular:

- **Modalidade /Nível de Ensino:** Ensino Fundamental – 6ª ou 7º ano
- **Componentes Curriculares:** Matemática e Arte
- **Eixo:** Geometria

Dados da Aula:

- **Objetivo Geral:**

  – Saber reconhecer e construir um paralelepípedo com um ponto de fuga no geogebra.

- **Objetivos Específicos:**

  – Conhecer as teorias da Geometria Projetiva.

  – Reconhecer e nomear polígonos, considerando o número de vértices, lados e de ângulos de um Sólido.

  – Identificar elementos de prima e pirâmides. (arestas, vértice e faces)

  – Identificar um sólido geométrico e suas características.

  – Estabelecer conexões entre a Geometria e a Arte.

  – Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender o mundo à sua volta.

Duração da atividade: 60 minutos

Conhecimentos Prévios trabalhados pelo professor:

O Professor deve trabalhar anteriormente o conceito de Sólidos Geométricos e as teorias da Geometria Projetiva.

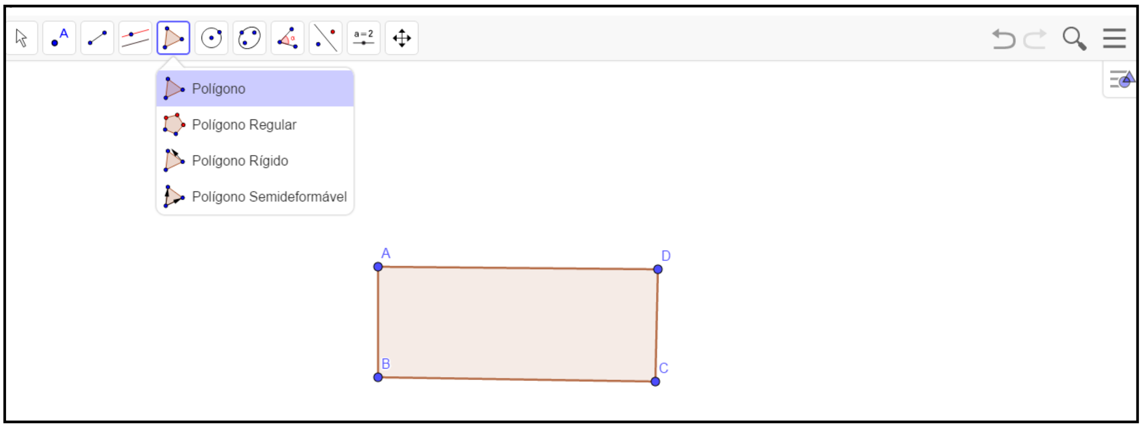
Estratégia e recursos da aula:

O objetivo nesta atividade é construir o paralelepípedo no software geogebra conhecendo um ponto de fuga. Vamos iniciar relembrando as duas regras básicas da perspectiva, que dizem que as retas paralelas se mantêm paralelas ou as retas paralelas se encontram em um ponto do infinito.

Caso seja necessário, sugerimos acessar o anexo 1 deste trabalho para tirar quaisquer dúvidas sobre como executar alguns passos que serão exigidos no decorrer da atividade.

Para dar início a construção, a princípio, com a tela do aplicativo aberta, construímos um retângulo, conforme imagem a seguir:

Figura 48: Atividade 1.1

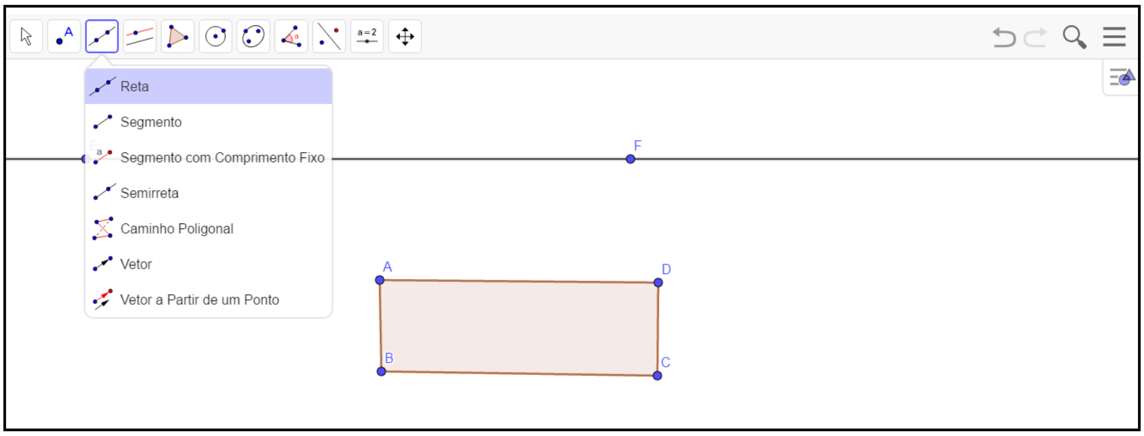


Fonte: o autor, 2019

O próximo passo será inserir uma linha do horizonte e escolhermos, sobre ela, uma posição qualquer como ponto de fuga. Para obter essa linha do horizonte, vamos traçar uma reta a partir de dois pontos e escolher um desses dois pontos para considerarmos como o nosso Ponto de Fuga (PF).

Após escolher a barra de ferramenta da "construção de reta", localizada na parte superior esquerda da tela, você deverá inserir os dois pontos onde deseja construir a linha horizontal. No nosso caso, vamos considerar o ponto F como sendo o nosso ponto de fuga (figura 49).

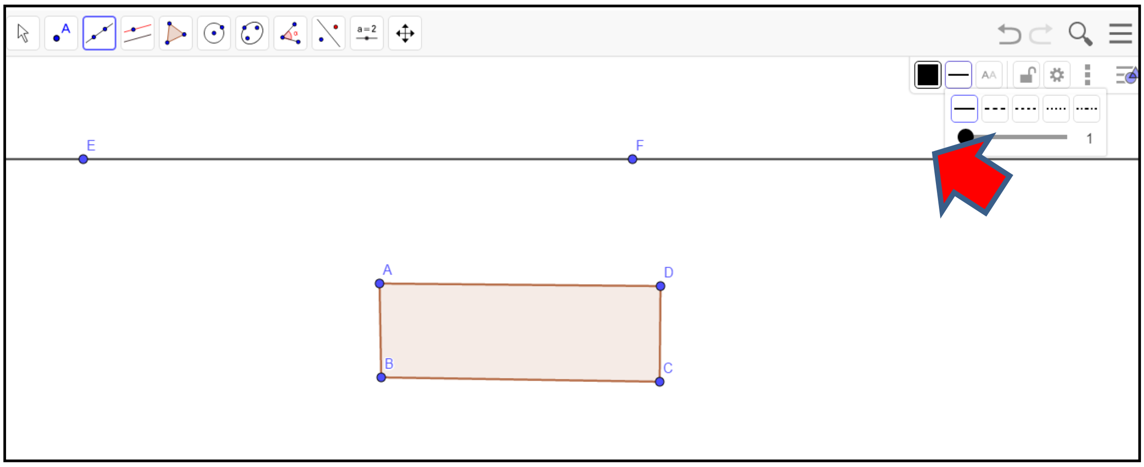
Figura 49: Atividade 1.2



Fonte: o autor, 2019

Iremos ligar cada vértice do retângulo ABCD ao ponto de fuga, mas antes vamos tornar as linhas menos espessas, para isso, basta seguir os passos:

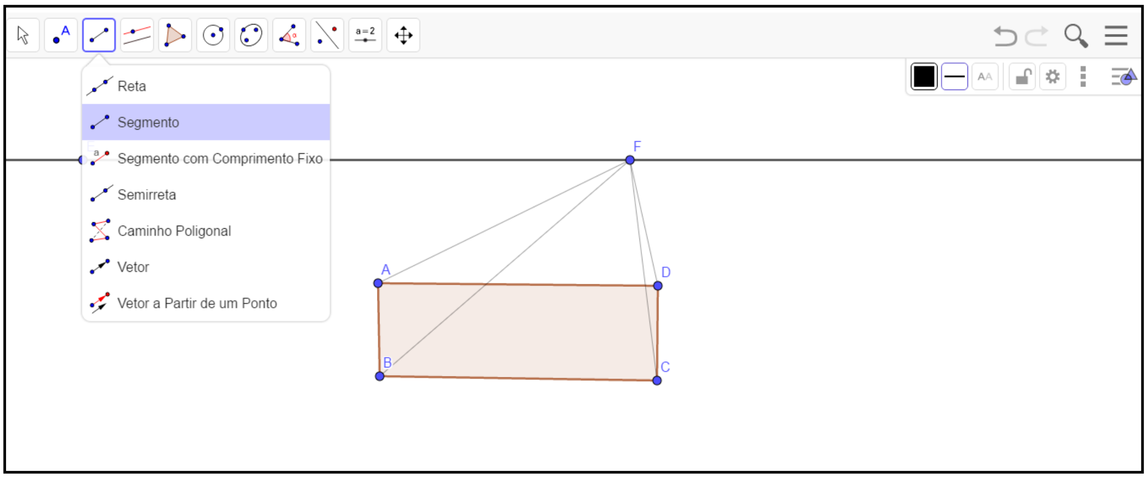
Figura 50: Atividade 1.3



Fonte: o autor, 2019

Usando a barra de ferramenta "segmento de reta", vamos ligar cada vértice do retângulo ABCD ao ponto de fuga F e, em seguida, iremos traçar segmentos de forma que todos se encontrem no infinito, ou seja, no ponto de fuga F (figura 51). Neste momento, é importante lembrar de diminuir a espessura dos elos traçados.

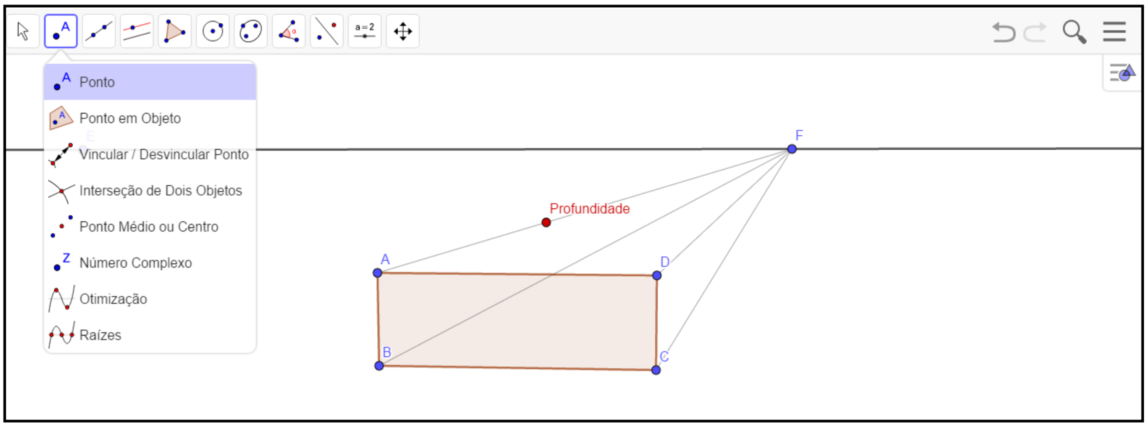
Figura 51: Atividade 1.4



Fonte: o autor, 2019

Agora, precisamos escolher um ponto de profundidade. Este ponto determinará o limite do nosso paralelepípedo. Observe que selecionamos a barra de ferramenta "ponto" e, em seguida, determinamos, marcando aleatoriamente, um ponto de profundidade do sólido sobre um dos elos entre o F e os vértices de ABCD. Na figura 52, mostra a profundidade sobre o segmento AF.

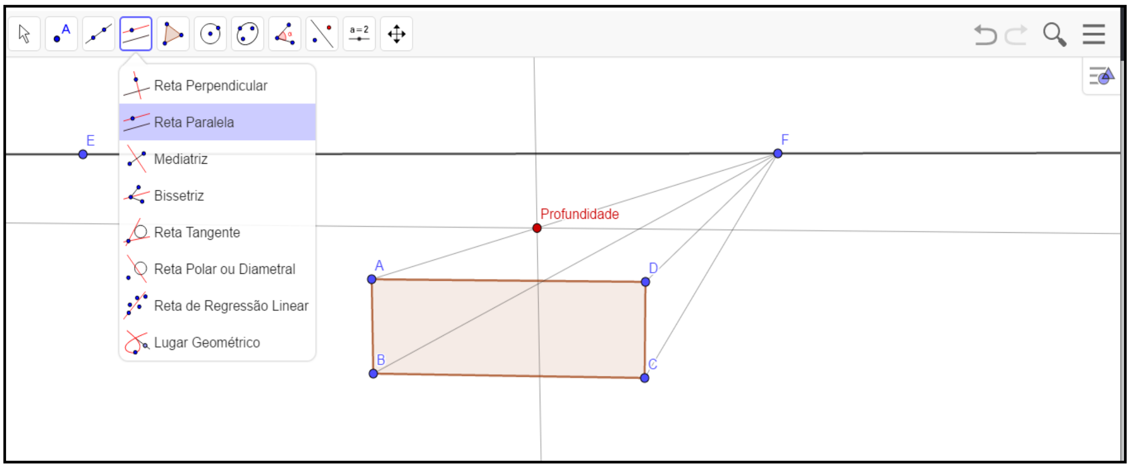
Figura 52: Atividade 1.5



Fonte: o autor, 2019

Após determinar o ponto de profundidade, vamos traçar os segmentos paralelos aos lados AB, BC, CD e AD. Para isso, vamos, a princípio, obter a reta paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ clicando na barra de ferramenta indicada na figura 53, e, em seguida, clicando sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ conduzir o mouse até o ponto de profundidade. Para obter a reta paralela a AD, usaremos o mesmo procedimento anterior, no entanto, iremos clicar nesta e no ponto de profundidade.

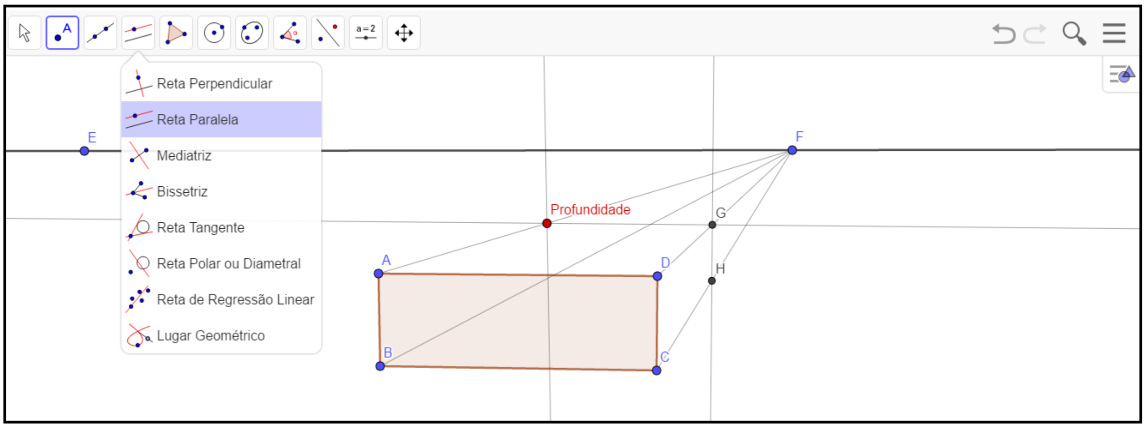
Figura 53: Atividade 1.6



Fonte: o autor, 2019

Devemos marcar o ponto de interseção da linha de fuga que passa F e D, com a reta que passa pelo ponto de profundidade e iremos obter o vértice G. Em seguida, vamos traçar a paralela a $\overleftrightarrow{CD}$ (vide figura 54).

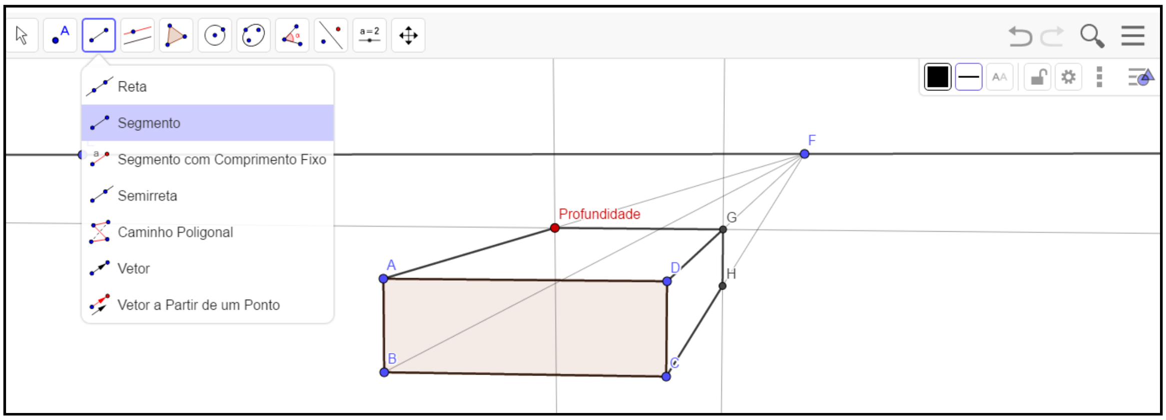
Figura 54: Atividade 1.7



Fonte: o autor, 2019

Por fim, devemos aumentar a espessura da linha e marcar as arestas, obtendo assim, o paralelepípedo projetado. Este passo pode ser observado na figura 55.

Figura 55: Atividade 1.8

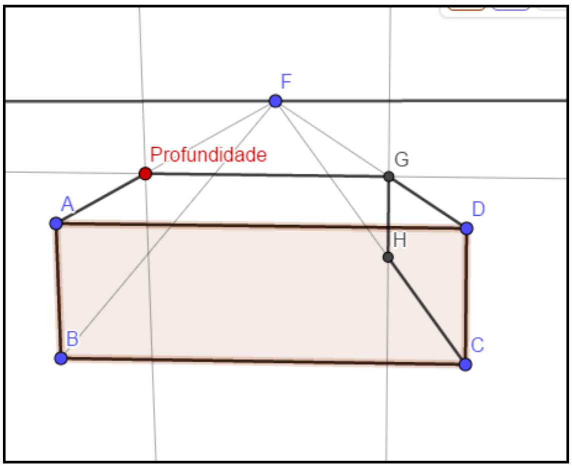


Fonte: o autor, 2019

Esta atividade pode ser desenvolvida em qualquer ano do Ensino Fundamental e, na série inicial, pode ser de grande utilidade uma vez que percebi que muitos alunos apresentam dificuldades em desenhar figuras em perspectivas a mão. Usando a técnica de um ponto de fuga, podemos construir qualquer prisma. No entanto, nos 6º, 7º e até 8º anos, os sólidos geométricos são mais abordados.

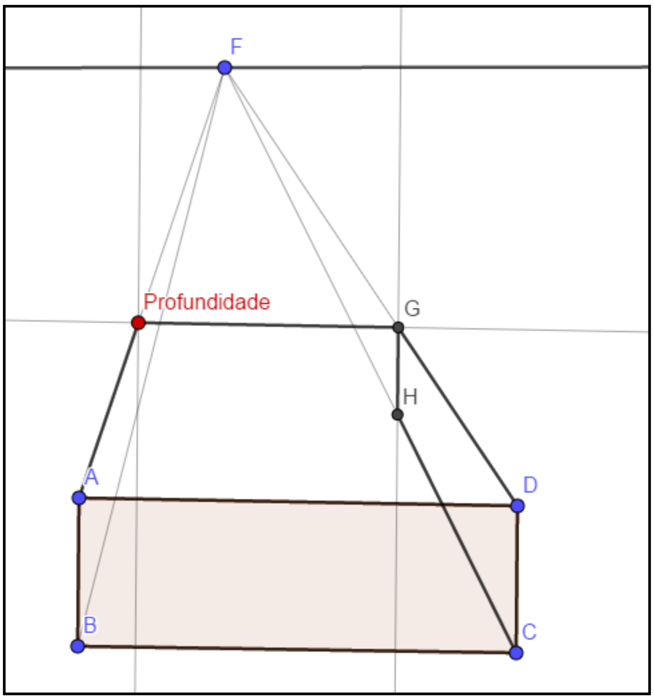
O geogebra ainda nos possibilita manipular o paralelepípedo na opção “mover” em sua barra de ferramentas (vide figura 56, 57 e 58). Desta forma, é possível perceber quando o desenho é feito corretamente. Em qualquer posição que o arrastemos podemos notar que as linhas de fuga, ou seja, as retas que não são paralelas, convergem para o ponto de fuga. (Teorema do Ponto do Infinito, página 60)

Figura 56: Atividade 1.9



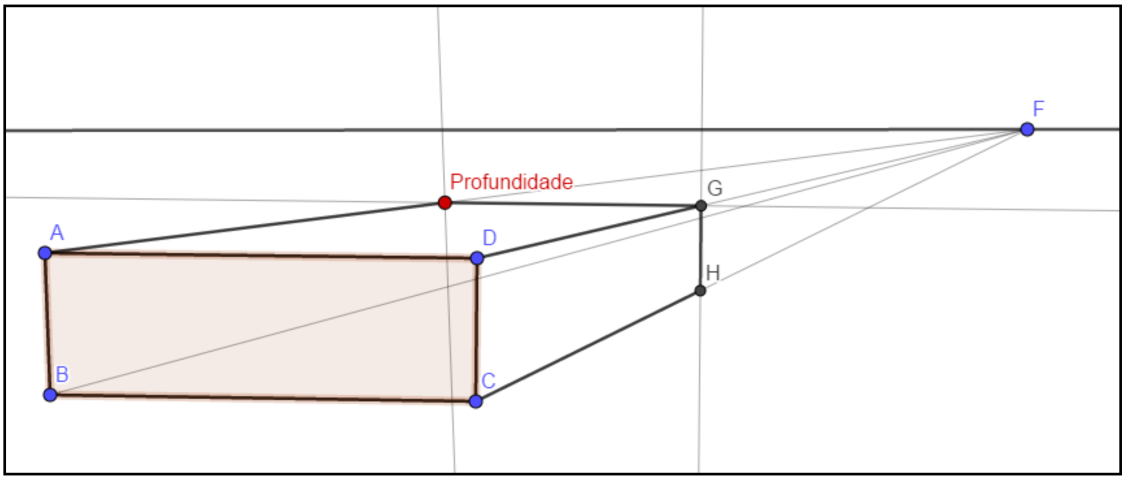
Fonte: o autor, 2019

Figura 57: Atividade 1.10



Fonte: o autor, 2019

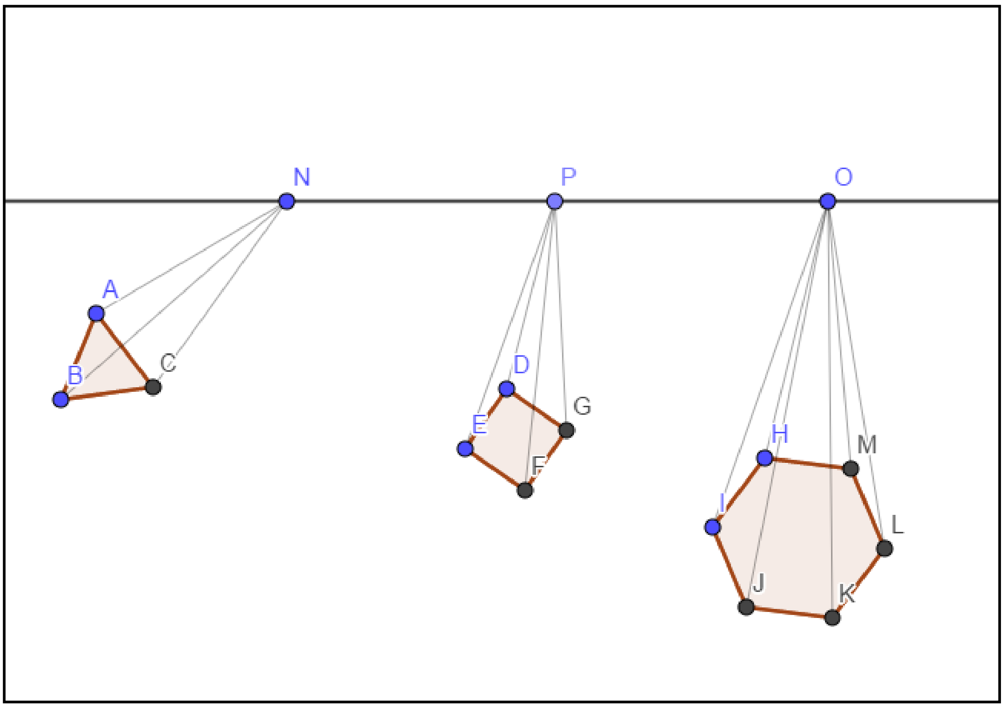
Figura 58: Atividade 1.11



Fonte: o autor, 2019

E se não traçarmos o ponto de profundidade note que teremos projeções de pirâmides. Isso pode ser observado na figura 59.

Figura 59: Atividade 1.12



Fonte: o autor, 2019

Uma sugestão pós a construção, seria o professor apresentar algumas imagens onde seria possível o aluno identificar ou marcar seus pontos de fuga.

Figura 60: Ponto de Fuga

Fonte: portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/discovirtual/aulas/16116/imagens/perspectivaconica1_300px.jpg, 2019

Figura 61: Ponto de Fuga

Fonte: i0.wp.com/www.blogdelfotografo.com/wp-content/uploads/2015/01/1130055779_6c8fb8dc76_o.jpg?zoom=2, 2019

Figura 62: Ponto de Fuga

Fonte: fotodicasbrasil.com.br/wp-content/uploads/2015/08/4Ponto-de-Fuga.jpg, 2019

Figura 63: Ponto de Fuga

Fonte: pearlsofprofundity.files.wordpress.com/2012/06/railroad-tracks-1.jpg?w=536&h =256&zoom=2, 2019

Recursos Complementares:

– Tutorial com alguns comandos do geogebra (Anexo 1).

Avaliação:

Ao final da aula, o professor deverá ser capaz de observar se os alunos são capazes de:

– Conhecer as teorias da geometria projetiva.

– Reconher um desenho com um único ponto de fuga e conseguir associar a construção da atividade.

3.2.2 Atividade 2:

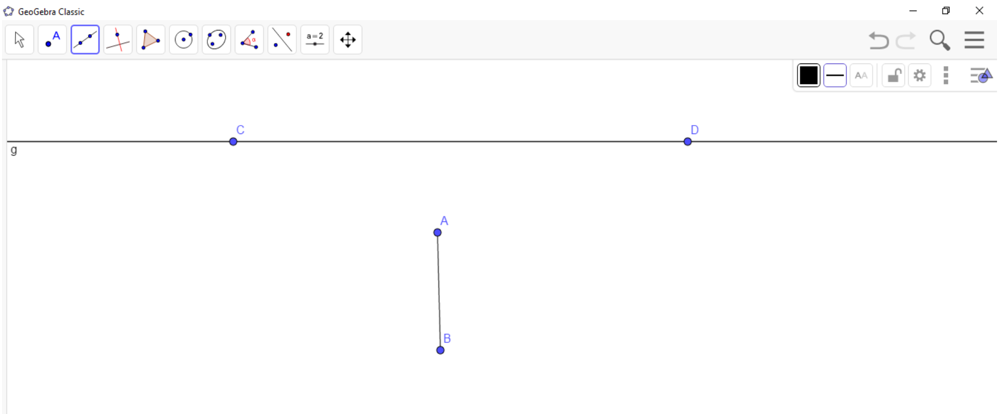
Dois pontos de fuga e profundidade

Construir um paralelepípedo com uso do software geogebra e usando **dois** pontos de fuga;

Neste momento, iremos construir um paralelepípedo com dois pontos de fuga. Os passos são semelhantes aos realizados na atividade 1, porém teremos dois pontos de fuga.

O primeiro passo, devemos traçar uma linha do horizonte com dois pontos distintos C e D, e um segmento de reta AB vertical (figura 64).

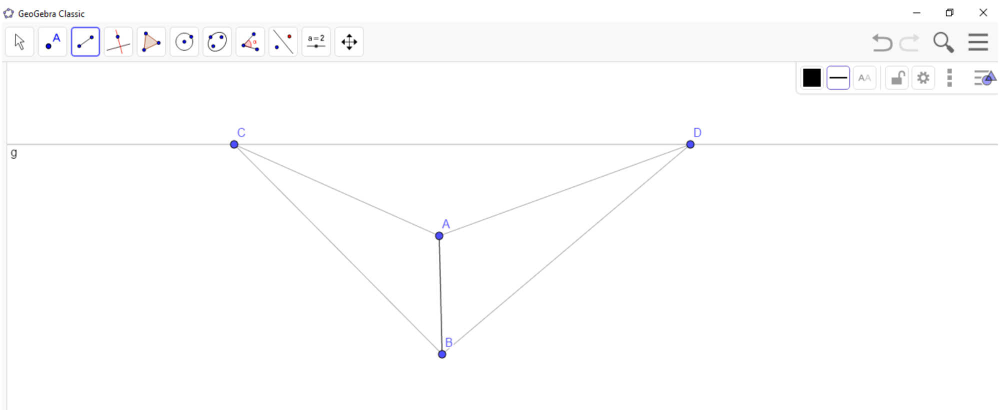
Figura 64: Atividade 2.1



Fonte: o autor, 2019

Logo após, vamos unir os pontos deste segmento a cada um dos pontos de fuga, no nosso caso, os pontos C e D. Veja a figura 65.

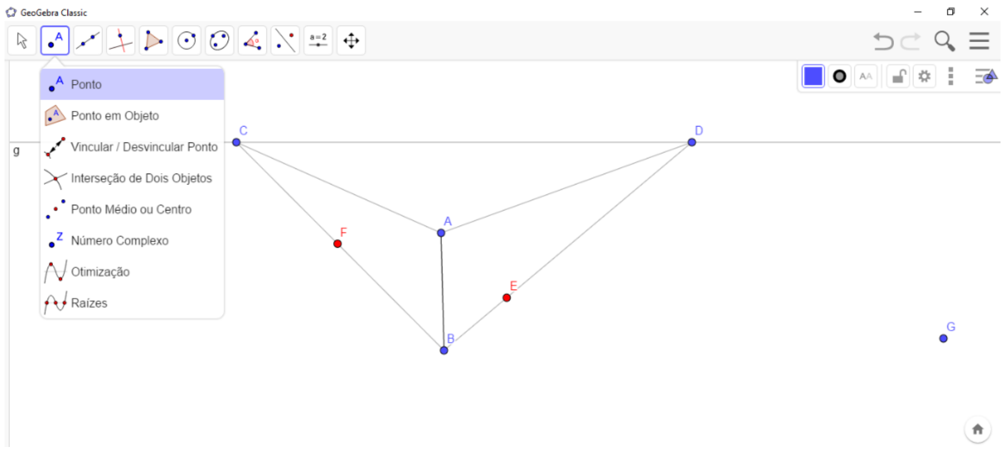
Figura 65: Atividade 2.2



Fonte: o autor, 2019

Daqui, vamos precisar de dois pontos distintos E (entre BD) e F (entre BC) para que possamos obter duas profundidades: a largura e o comprimento. A altura já foi determinada ao construir o segmento AB. Veja figura 66.

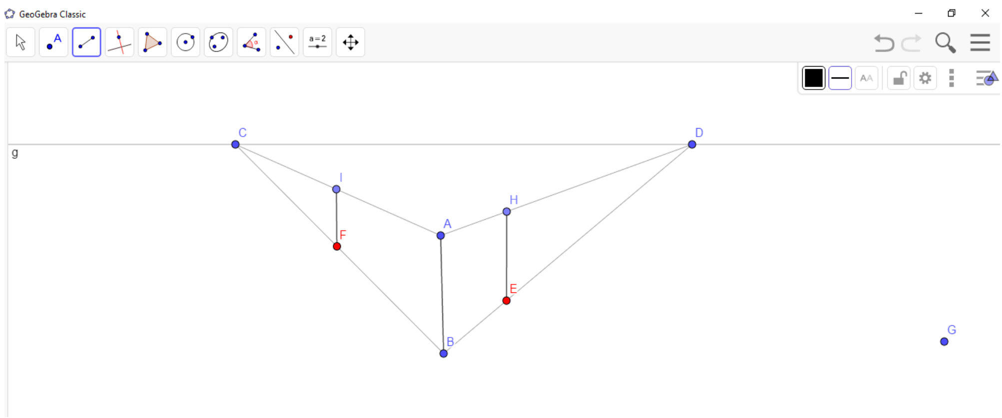
Figura 66: Atividade 2.3



Fonte: o autor, 2019

Traçamos, então, uma reta paralela ao segmento AB passando pelo ponto F, e outra paralela passando por E, obtendo assim, os pontos I pertencente ao AC e H, em AC. Este passo pode ser observado na figura 67.

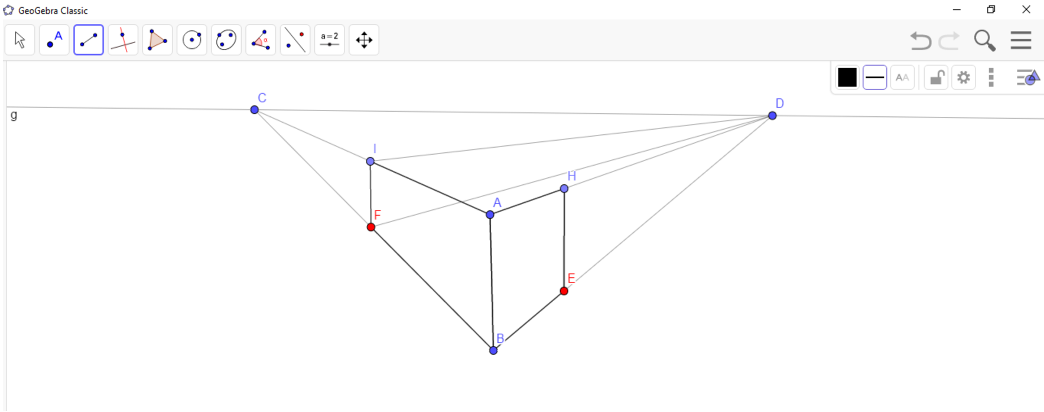
Figura 67: Atividade 2.4



Fonte: o autor, 2019

Em seguida, una os vértices F e I ao ponto de Fuga D, conforme a figura 68.

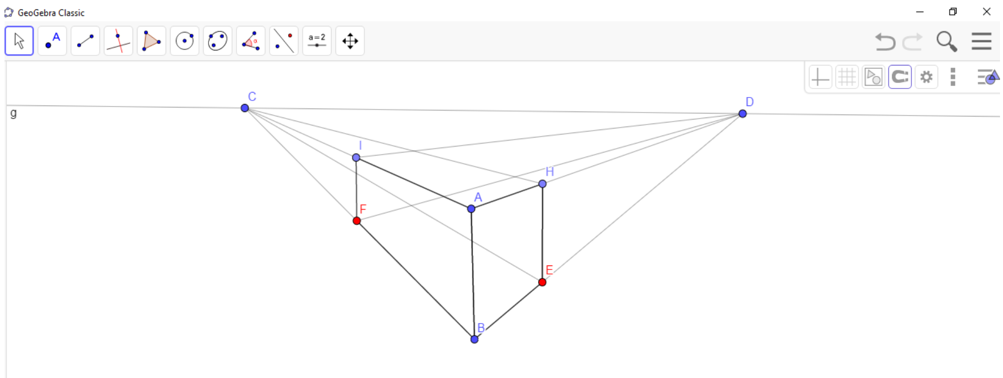
Figura 68: Atividade 2.5



Fonte: o autor, 2019

Unindo os pontos E e H ao ponto C, já conseguimos visualizar o nosso paralelepípedo. Observe a imagem a seguir:

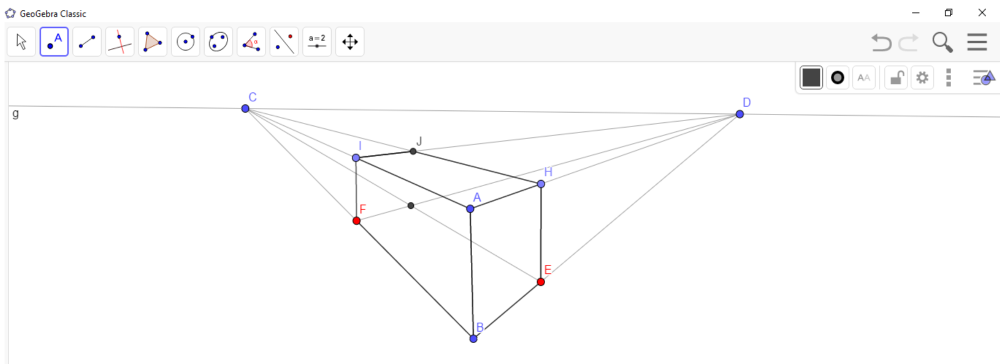
Figura 69: Atividade 2.6



Fonte: o autor, 2019

Note que, agora, temos todos os vértices do paralelepípedo identificados.

Figura 70: Atividade 2.7



Fonte: o autor, 2019

Na figura 70 é possível, observar que todas as retas não paralelas convergem para algum dos dois pontos de fuga. Da mesma forma que apresentamos, na construção com um ponto de fuga, ao movimentarmos o sólido, este fato reforça a principal teoria da geometria projetiva, que todas as retas ou são paralelas ou elas se encontram no infinito.

3.2.3 Atividade 3:

Projeção do Chão em perspectiva com um ponto de fuga.

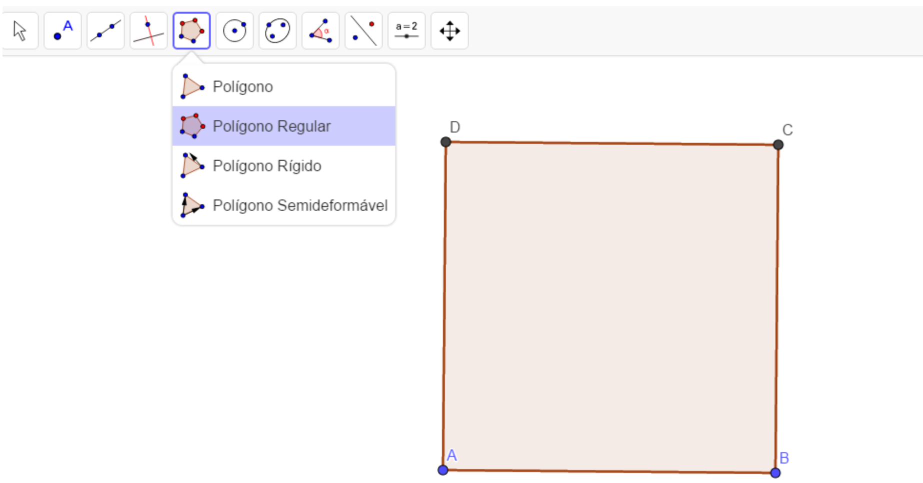
Construir uma projeção do chão em perspectiva com um ponto de fuga.

Primeiro vamos construir um chão usando alguns recursos do próprio aplicativo.

1º Passo:

Construa um quadrado.

Figura 71: Atividade 3.1

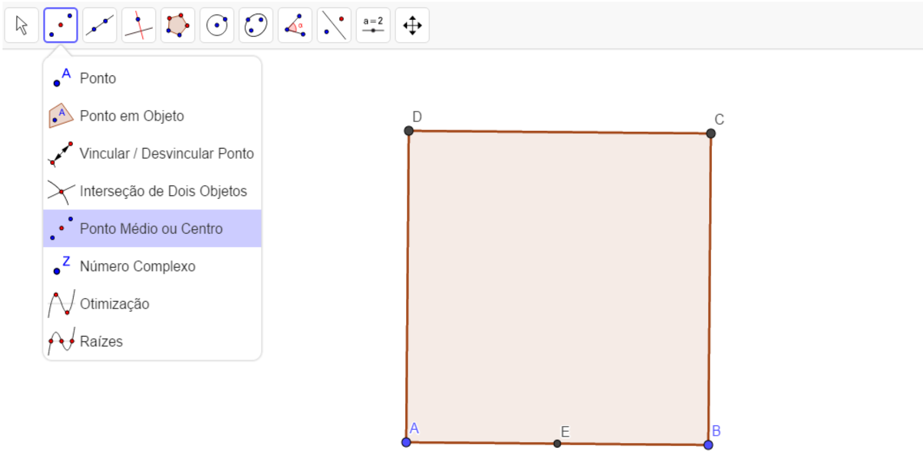


Fonte: o autor, 2019

2º Passo:

Usando a ferramenta ponto médio, divida o segmento AB obtendo o ponto E.

Figura 72: Atividade 3.2

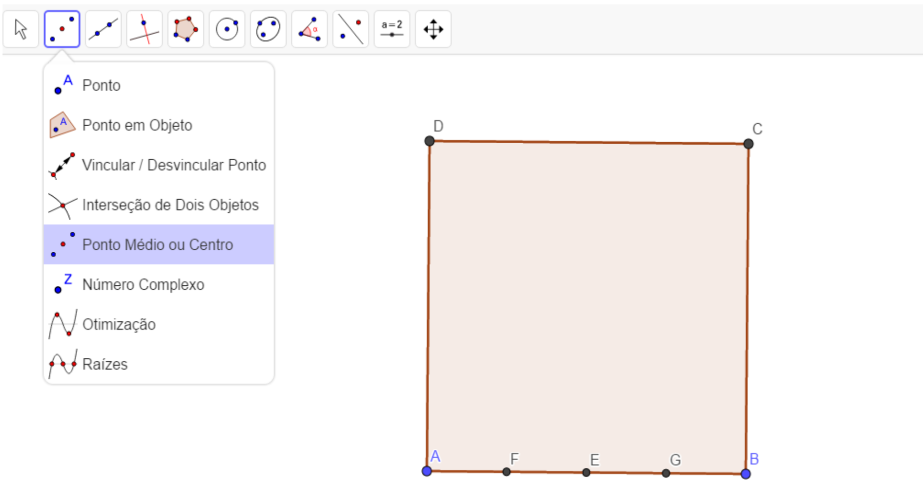


Fonte: o autor, 2019

3º Passo:

Iremos dividir ao meio os segmentos AE e EB , obtendo assim um segmento inicial AB dividido em quatro partes iguais.

Figura 73: Atividade 3.3

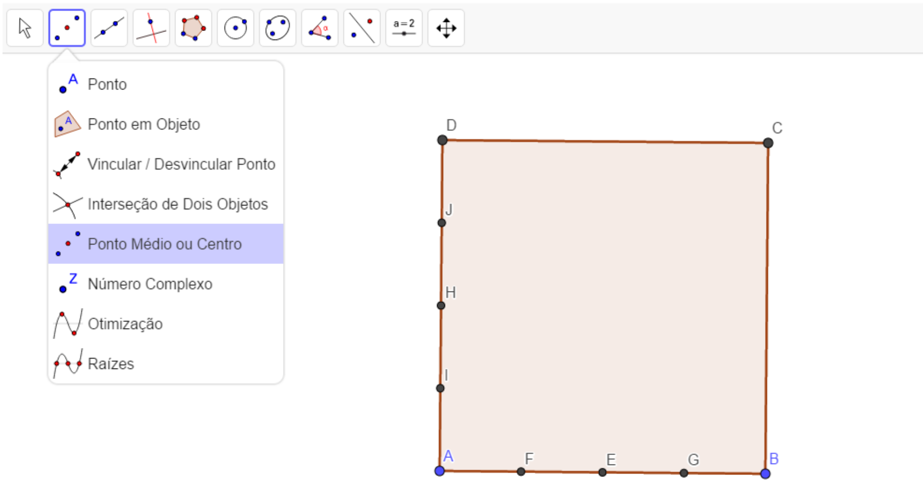


Fonte: o autor, 2019

4º Passo:

Realizando o mesmo passo a passo anterior, vamos dividir o segmento AD em 4 partes iguais. Veja a figura 74.

Figura 74: Atividade 3.4

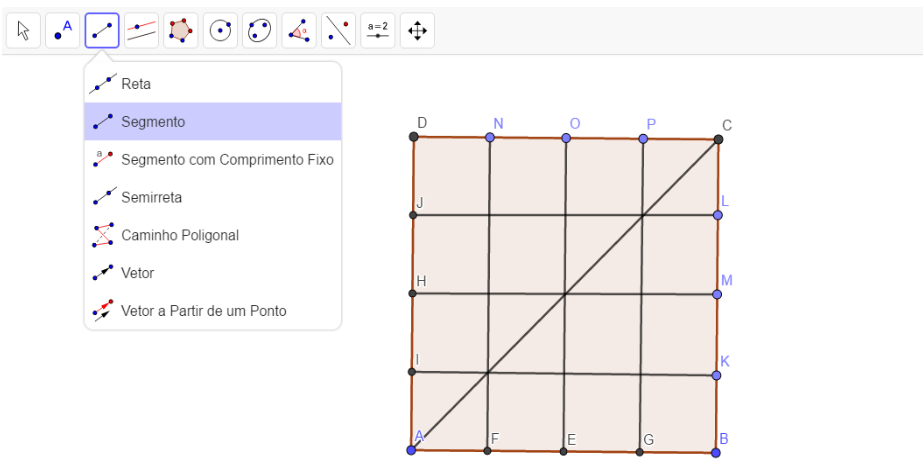


Fonte: o autor, 2019

5º Passo:

Vamos construir segmentos horizontais paralelos ao segmento AB e segmentos verticais paralelos ao segmento AD. Construa também o segmento $\overleftrightarrow{AC}$.

Figura 75: Atividade 3.5

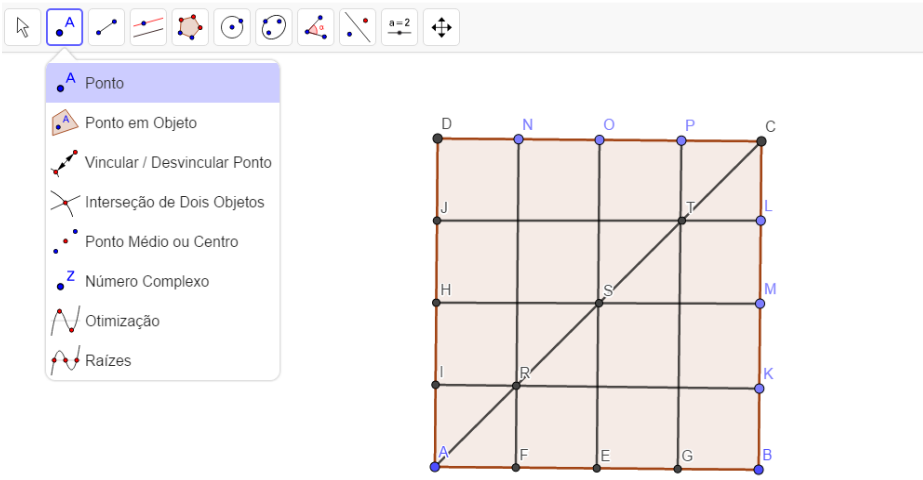


Fonte: o autor, 2019

6º Passo:

Identificamos os pontos de interseção da diagonal com as linhas horizontais e verticais. Por fim, obtemos o nosso chão. Caso o professor não queira fazer essa construção com os alunos, pode começar a atividade com a imagem do chão, pois, a partir deste passo daremos, de fato, início a nossa atividade.

Figura 76: Atividade 3.6

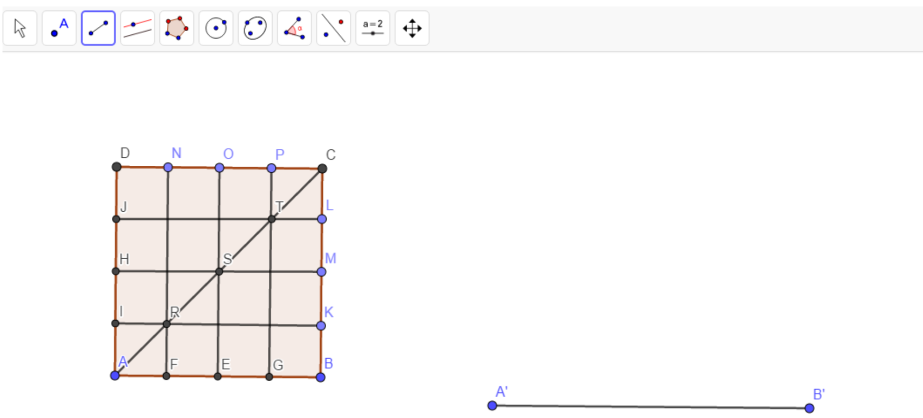


Fonte: o autor, 2019

7º Passo:

Agora, vamos iniciar o processo para construir a imagem do chão em perspectiva usando um ponto de fuga. Primeiro vamos construir um segmento $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Figura 77: Atividade 3.7

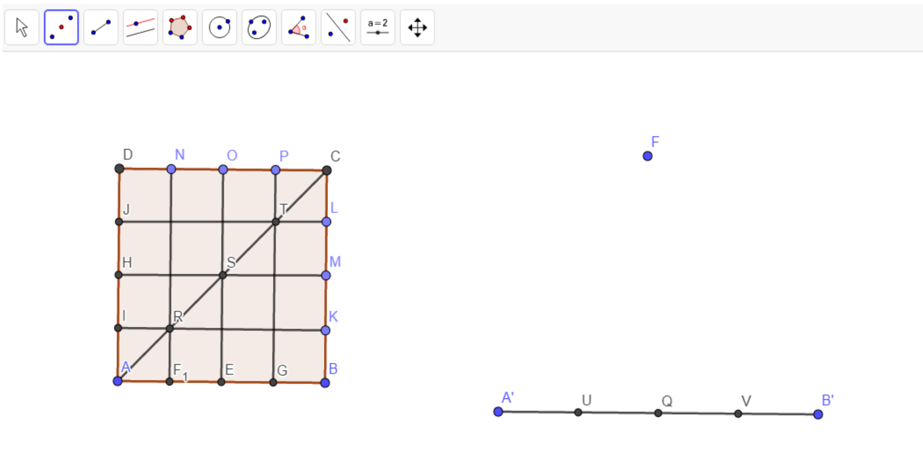


Fonte: o autor, 2019

8º Passo:

Construímos um ponto de fuga qualquer fora do segmento $\overleftrightarrow{A'B'}$ e dividimos o segmento desenhado na mesma quantidade de partes iguais de antes.

Figura 78: Atividade 3.8

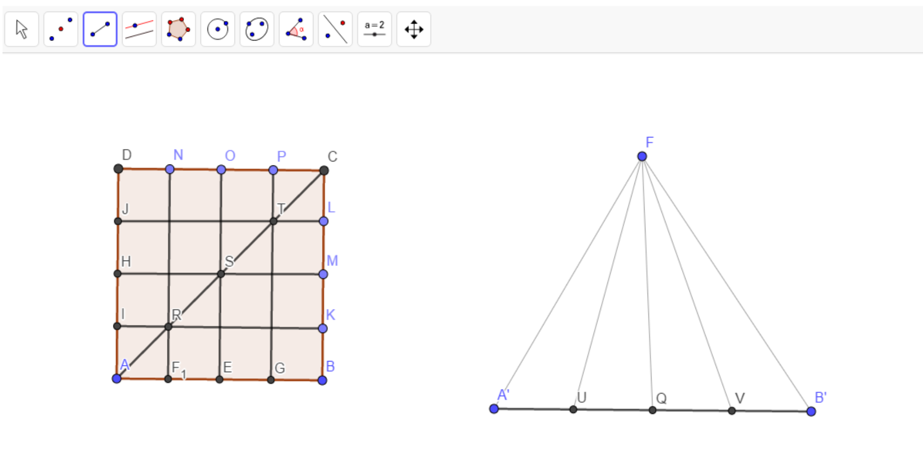


Fonte: o autor, 2019

9º Passo:

Agora, uniremos os pontos A', U, Q, V e B' do segmento $A'B'$ao ponto de fuga F, conforme pode ser notado na figura 79.

Figura 79: Atividade 3.9

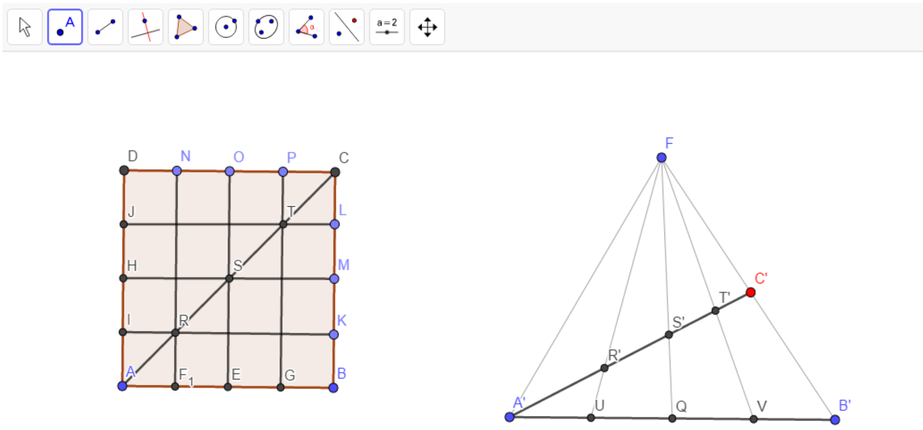


Fonte: o autor, 2019

10º Passo:

Neste momento, escolheremos um ponto de profundidade C’, sobre o segmento $B'F$ que será equivalente ao ponto C no desenho do Chão. Em seguida, traçamos a diagonal $A'C'$obtendo os pontos $R',\ S'e\ T'$. Esta construção pode ser notada na figura abaixo.

Figura 80: Atividade 3.10

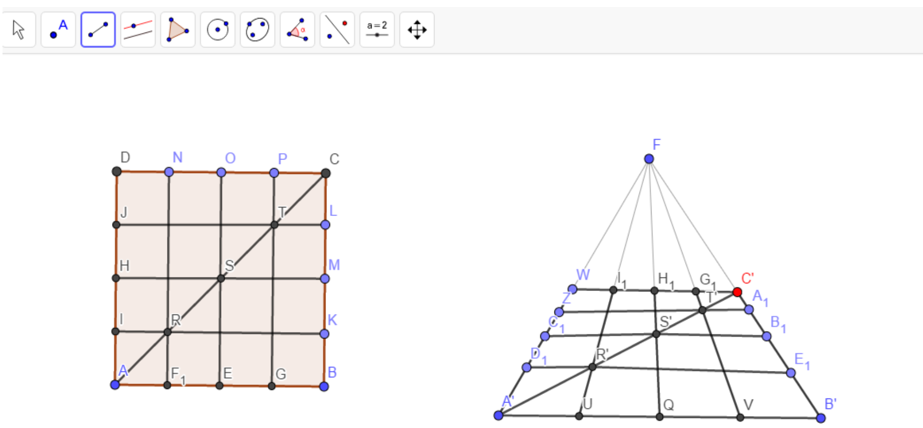


Fonte: o autor, 2019

11º Passo:

Por construção, traçar as paralelas ao segmento $\overleftrightarrow{A'B'}$ passando por R', S', T'e C' respectivamente as linhas de fuga.

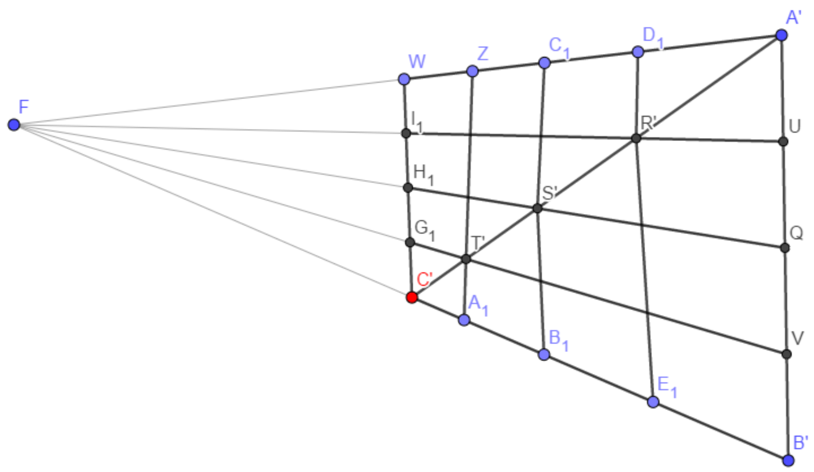
Figura 81: Atividade 3.11



Fonte: o autor, 2019

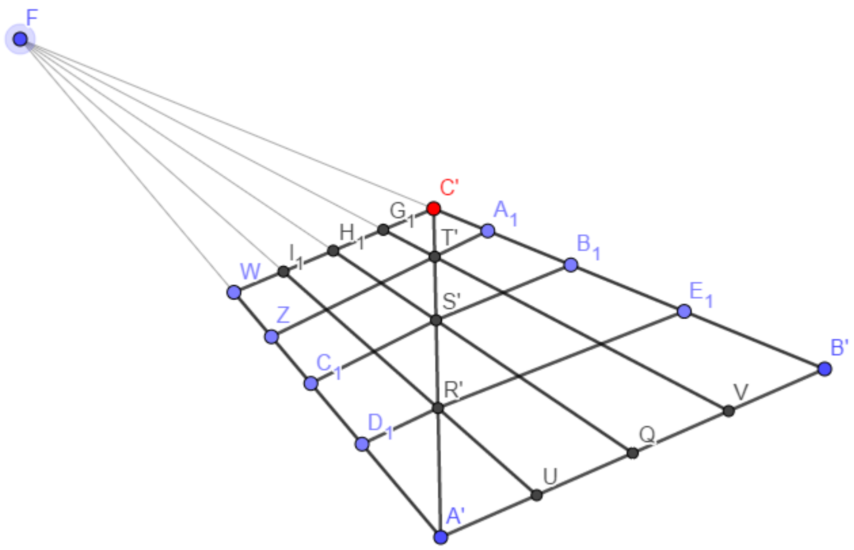
Observe que um dos recursos do software é poder manipular as imagens obtidas. Desse modo, a projeção do chão pode se tornar uma parede (figura 82) ou até mesmo um teto (figura 83). Note, também, as imagens obtidas a partir da movimentação do Ponto A’ e do Ponto de Fuga.

Figura 82: Atividade 3.12



Fonte: o autor, 2019

Figura 83: Atividade 3.13



Fonte: o autor, 2019

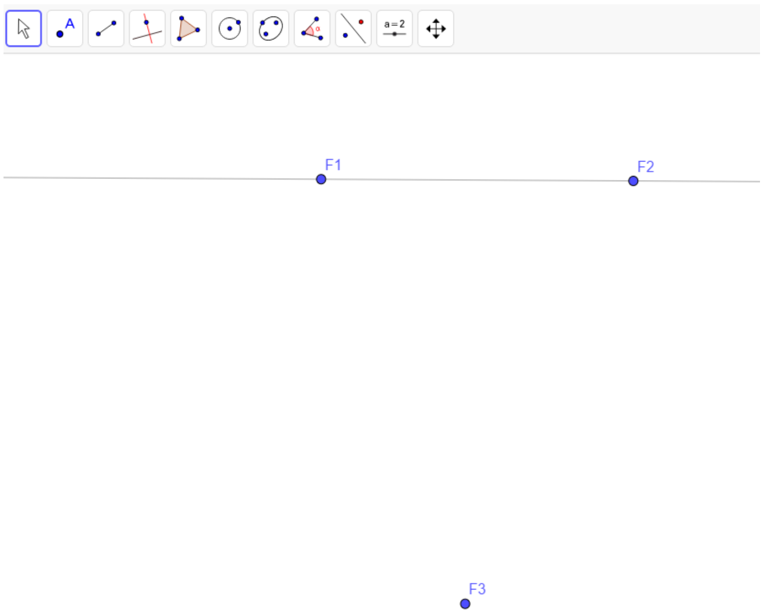
3.2.4 Atividade 4:

Construir um paralelepípedo com três pontos de Fuga. Neste caso, as três direções de retas paralelas estão indo para algum ponto de fuga.

1º Passo:

Comece escolhendo os três pontos de fuga, denotaremos por F_1, F_2 e F_3. Dois desses pontos precisam pertencer a linha do horizonte e um terceiro abaixo dela ou acima. Escolheremos, por convenção, um ponto abaixo conforme a figura 84.

Figura 84: Atividade 4.1

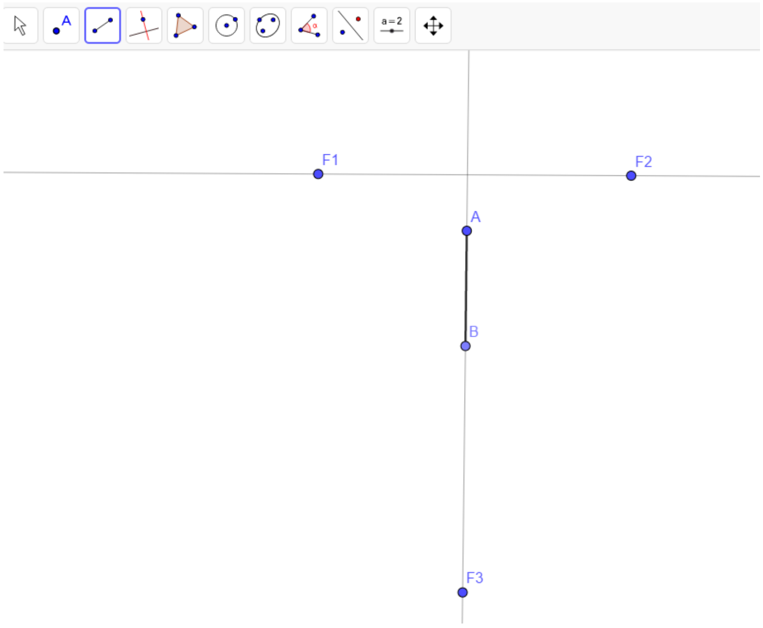


Fonte: o autor, 2019

2º Passo:

Vamos traçar o segmento AB, perpendicular à reta suporte F_1F_2. É importante ressaltar que este segmento deve estar contido na mesma reta do ponto de fuga F_3, pois todas as retas paralelas a ele irão convergir para este ponto (vide figura 85).

Figura 85: Atividade 4.2

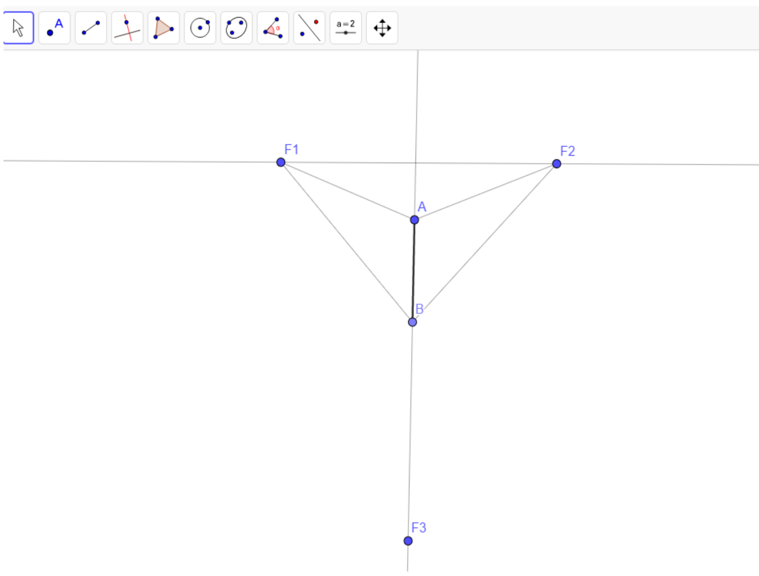


Fonte: o autor, 2019

3º Passo:

Com isso, iremos seguir os mesmos passos da atividade de construção do paralelepípedo com dois pontos de fuga, ou seja, vamos unir os vértices A e B aos pontos de fuga F_1 e F_2.

Figura 86: Atividade 4.3

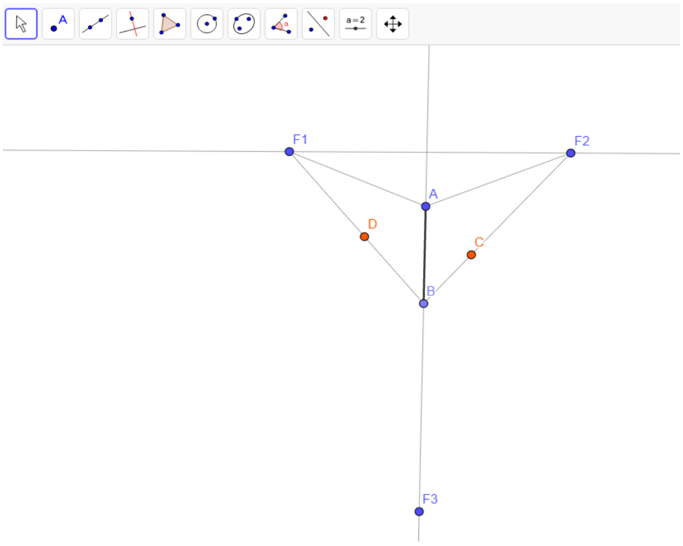


Fonte: o autor, 2019

4º Passo:

Determine os pontos de profundidade C e D, sobre os segmentos $\overleftrightarrow{BF_2}$ e $\overleftrightarrow{BF_1}$, respectivamente, conforme a figura abaixo.

Figura 87: Atividade 4.4

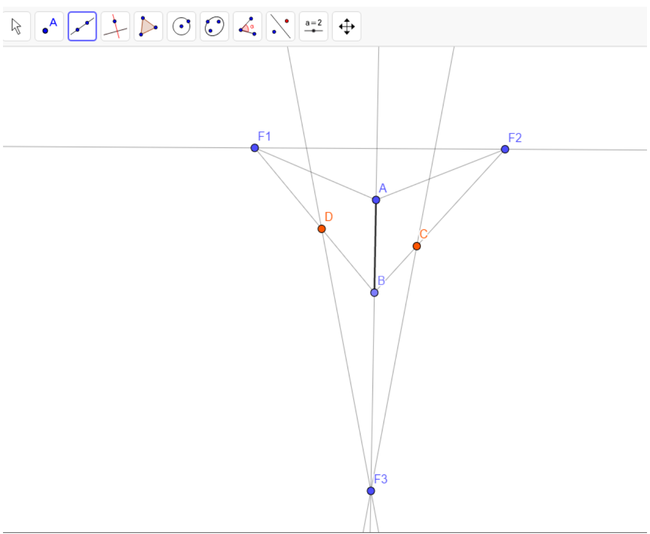


Fonte: o autor, 2019

5º Passo:

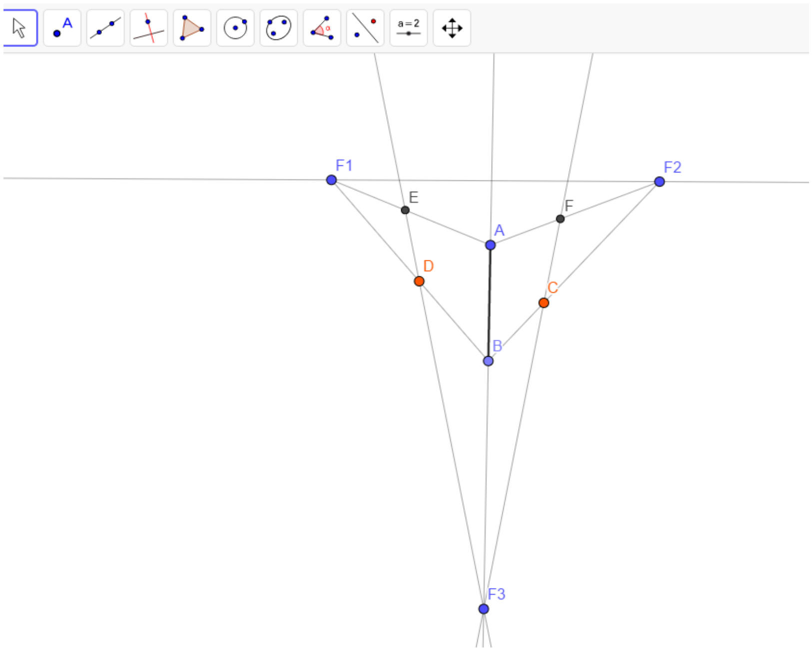
Como C e D são os pontos de profundidade escolhidos anteriormente, traçamos por eles duas retas que irão convergir para o ponto de fuga F_3 (figura 88). Marque, também, os pontos E e F como as interseções dessas, com os segmentos $\overleftrightarrow{AF_1}$ e $\overleftrightarrow{AF_2}$, nesta ordem (vide figura 89).

Figura 88: Atividade 4.5



Fonte: o autor, 2019

Figura 89: Atividade 4.6

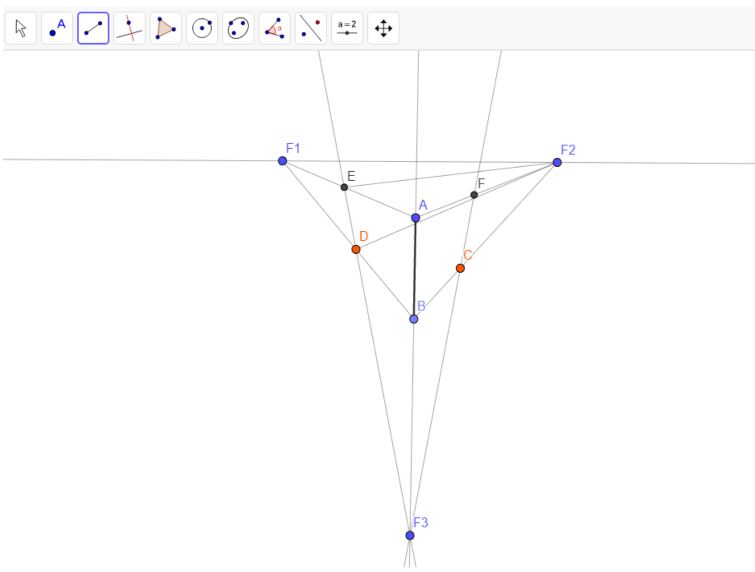


Fonte: O autor, 2019

6º Passo:

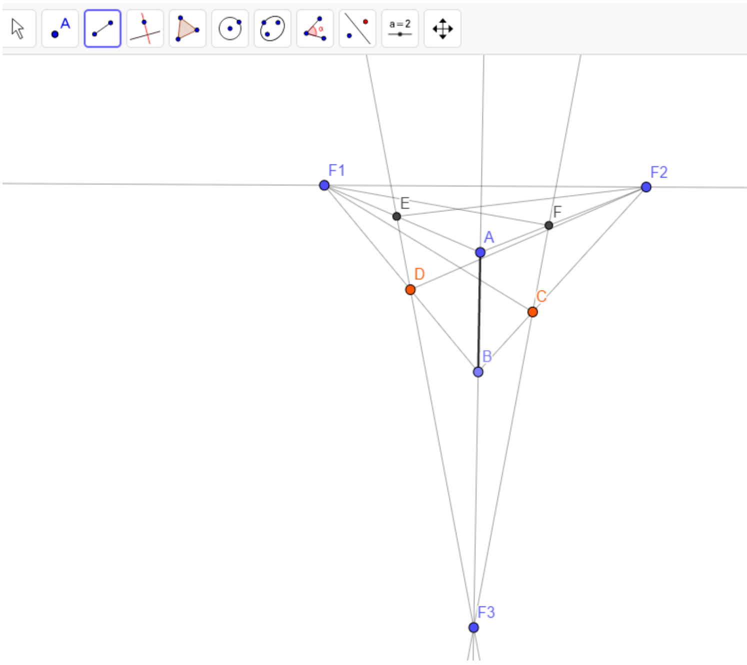
Vamos unir os vértices E e D ao ponto de fuga F_2 (figura 90) e os vértices C e F ao ponto de fuga F_1 (figura 91).

Figura 90: Atividade 4.7



Fonte: o autor, 2019

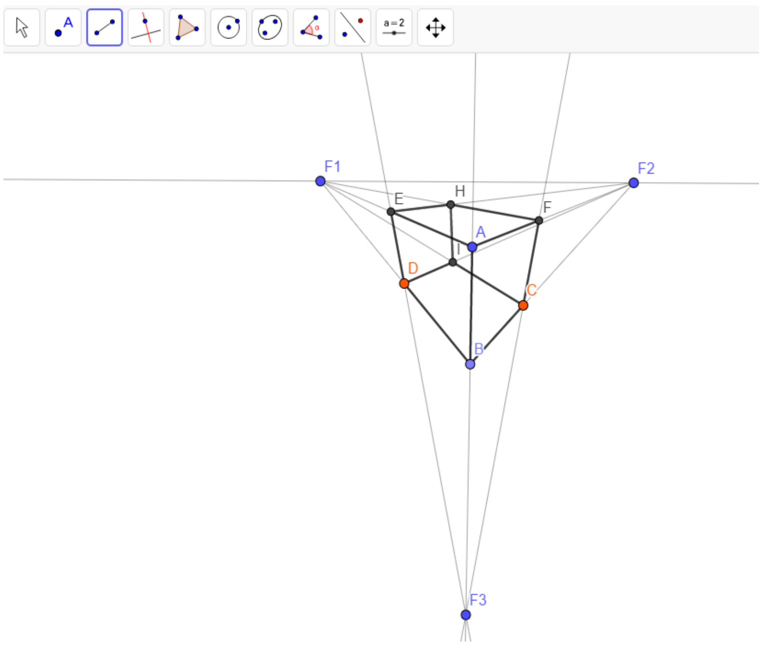
Figura 91: Atividade 4.8



Fonte: o autor, 2019

Deste nodo, concluímos o desenho. Note que, na figura 92, as três direções de paralelas convergem, cada uma, para um ponto de fuga.

Figura 92: Atividade 4.9



Fonte: o autor, 2019

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa pretende contribuir para que o ensino da Geometria Projetiva seja inserido de alguma forma dentro do Conteúdo Programático da Educação Básica. Para isso, foram apresentadas as percepções após a conclusão da pesquisa e da elaboração de uma proposta metodológica possível de ser adotada.

A primeira observação, é a necessidade de que o professor tenha conhecimentos prévios da Geometria Projetiva e saiba manusear alguns Softwares de Geometria Dinâmica.

Para alcançar o objeto de estudo, foram apresentados alguns contextos históricos, definições e conceitos básicos da Geometria Euclidiana e Geometria Projetiva, assim como um tutorial, com um passo a passo de como executar alguns comandos do software Geogebra, sendo usados nas atividades que foram apresentadas como produto desta pesquisa.

Outra percepção está no cuidado dos planejamentos das aulas que fazem uso dos recursos de Softwares de Geometria Dinâmica, é fundamental ter atenção para que não seja apenas uma aula no computador. É necessário fazer com que o programa conduza o aluno a fazer indagações que serão respondidas com base nos conceitos estudados. Dessa forma, o aplicativo se torna um importante aliado na Educação.

Através do estudo histórico e das atividades produzidas durante esta pesquisa, observa-se que é perfeitamente possível abordar o estudo da Geometria Projetiva na Educação Básica fazendo uso da Geometria Dinâmica, assim como pode-se trabalhar de forma interdisciplinar, principalmente relacionando-a com as disciplinas de Arte e História.

Este trabalho tem como objetivo sugerir uma metodologia alternativa da possibilidade de inserir a Geometria Projetiva no Ensino Fundamental, ressaltando a importância de seu estudo em um enfoque artístico, e apresentando a sua teoria a partir do uso de um Software de Geometria Dinâmica.

Para atingir tal objetivo foi apresentado um tutorial que poderá auxiliar os professores em como inserir a geometria dentro do conteúdo programático da educação básica. Lembrando que este conteúdo é apenas o ponto de partida para infinitas metodologias possíveis de serem adotadas.

A partir das minhas experiências profissionais e da pesquisa desenvolvida, é possível inserir as teorias da Geometria Projetiva na Educação Básica, seja qual for o ano de escolaridade ou o nível da turma. Por exemplo, já no 5º e 6º ano do Ensino Fundamental, quando o aluno começa a ter um contato mais concreto com o assunto, é possível apresentar algumas noções de perspectiva na construção de Sólidos Geométricos, através da atividade

1. Neste ano, o aluno aprende a diferenciar figuras planas de sólidos geométricos e é surpreendente como todos querem saber desenhá-los. Considerando este tópico, é notório que as atividades relacionadas ao ponto de fuga se aplicam a diversas situações e está presente no cotidiano.

Nos 7º e 8º anos do Ensino Fundamental, o conteúdo programático geralmente continua abordando os sólidos, onde se estudam áreas e volumes, novamente pode-se associar a esses assuntos a ideia de perspectiva e linhas de fuga. Também é possível mostrar que se pode trabalhar os pontos notáveis de um triângulo, de forma a relacioná-los com a Geometria Projetiva, como foi visto nesta pesquisa.

O principal objetivo foi refletir sobre o estudo da Geometria, em particular, a Geometria Projetiva. Todas estas reflexões visaram englobar as principais teorias que podem ser compreendidas através de construções geométricas no computador como recurso pedagógico se forem inseridas dentro do conteúdo programático.

Portanto, conclui-se que este estudo possa motivar outros docentes a trabalhar com a Geometria Projetiva, através da Geometria Dinâmica, nas salas de aula, reforçando para os alunos o quanto ela está presente no nosso dia a dia, despertando um interesse maior pela matemática a partir do momento que podem estabelecer relações de alguns conteúdos com a sua vida.

REFERÊNCIAS

ARGAN, Giulio Carlo. Clássico Anticlássico: O Renascimento de Brunelleschi a Bruegel. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

AUFFINGER, Artur Carlos Theodoro; VALENTIM, Fábio Júlio da Silva. Introdução à Geometria Projetiva. Universidade Federal do Espírito Santos, Vitória, ES, 2003.

BARBOSA, J.L.M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção Professor de matemática, SBM, 1994. Rio de Janeiro, RJ.

BARBOSA, J.L.M. Geometria Hiperbólica, Rio de Janeiro: IMPA, 1995. (20° Colóquio Brasileiro de Matemática-1995), Rio de Janeiro, RJ.

BARROS, A.; ANDRADE, P. Introdução à geometria Projetiva. Rio de Janeiro: SBM 2010.

BELFORT, E. (2001) "Tabulæ e Mangaba: Geometria Dinâmica". In: VII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática. UFRJ. Rio de Janeiro.

BOYER, CARL B., História da Matemática, tradução Elza F. Gomide, editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 1968.

BOYER, Carl. B. História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed, São Paulo: Edgard Blucher LTDA. 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. SEF (II). Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. (2017) Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica.

BURKE. P. O renascimento italiano: cultura e sociedade na Itália. São Paulo: Nova Alexandria, 1990.

CARMO, M. do Elementos de Geometria Diferencial, Rio de Janeiro, 1971.

COOLIDGE, J. LOWELL, A History of Geometrical Methods, Dover Publications Inc. New York, 1963.

COURANT, RICHARD and ROBBINS, HERBERT, What is Mathmetics, revisado por Ian Stewart, Oxford University Press, 1996.

COXETER, H.S.M, The Real Projective Geometry Plane, second ediction by Cambridge University Press, 1955.

COXETER, H.S.M., Nom-Euclidean Geometry. 3rd ed. Toronto: University of Toronto Press, 1957.

COXETER, H.S.M., Projective Geometry, Blaisdell Publishing Company, University of Toronto, 1964.

COXETER, H. S. M.; GREITZER, S. L. Geometry Revisited. 1. ed. Washington D.C.: The Mathematical Association of America, 1967.

DE VILLIERS, M.D. (2001) “Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad”, Educação e Matemática, APM, nº 62.

DÖRRIE, HEINRICH, 100 Great Problems of Elementary.

EH Gombrich, The Story of Art (Phaidon, Londres, 1995).

ENCYCLOPÆDIA Britannica "Jean - Victor Poncelet". Encyclopædia Britannica, Inc. 2008. Página visitada em 29/09/2019.

EVES, J. HOWARD, An Introduction to the History of Mathematics, Saunders College Publishing, a division of Holt, Rinehart and Winston Inc., Orlando, Flórida, 1990.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. 4. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FAINGUELERNT, E. K., Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria. Porto Alegre: Artmed, 1998.

FIELD, J. V. & GRAY J. J., The Geometrical Work of Girard Desargues, Springer-Verlag New York, 1987.

FISCHBEIN, E. (1993) "The Theory of Figural Concepts", Educacional Studies in Mathmatics, nº 24/2.

FLORES, CLÁUDIA REGINA, Olhar, Saber, Representar: Ensaios sobre a representação em perspectiva, Tese de Doutorado – UFSC, 2003. >Acesso 21 de setembro de 2019.

GIERING, OSWALD, Affine and Projective Generalization of Wallace Lines, Journal for Geometry and Graphics - Vol. 1 No.2, 119133, Center of Mathematical Sciences, Munich University of Technology, 1997.

GILLISPIE, C. C. (Org.). Dicionário de biografias científicas. Tradução de Carlos Almeida Pereira et al. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

GONÇALVES, Tiago da Silva. Uma introdução a Geometria projetiva para o Ensino Fundamental. Universidade Federal do Rio Grande. 149f. Rio Grande, RS, 2013.

GRANGER, Gilles G. Filosofia do Estilo. 1. ed. São Paulo: Perspectiva. 1974.

GRAVINA, Maria Alice. GEOMETRIA DINÂMICA UMA NOVA ABORDAGEM PARA O APRENDIZADO DA GEOMETRIA. Instituto de Matemática da UFRGS. Artigo publicado nos Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p.1-13, Belo Horizonte, Brasil, nov 1996.

GUZMÁN, MIGUEL de, The envelope of the Wallace-Simson lines of a triangle, (Preliminary version, December 1998), Universidad Complutense de Madrid.

HEFEZ, A. Introdução a história da geometria projetiva. SBM, 1985. Disponível em: https://vdocuments.mx/03-03-uma-introducao-a-historia-da-geometria-projetiva-abramo-hefez.html. Acesso em: 01.06.2019. páginas 42 e 43.

J.W. ARCHBOLD, M.A., Introduction to the Algebraic Geometry of a Plane, Edward Arnold \& CO., London, 1948.

LAWRENCE, J. DENNIS, A Catalog of Special Plane Curves, Dover Publications, Inc., New York, 1972, pg. 132.

LEITE, Douglas Gonçalves. Girard Desargues e o desenvolvimento da geometria projetiva. XX EMPRAPEM, Curitiba, 2016.

MONTANELLI, I. História dos gregos. 2.ed. São Paulo: IBRASA 1968.

MOREIRA, Ana Cláudia da Silva. Geometrias sob a Axiomática de Hilbert, Unicamp, Campinas, SP, 2006.

PANOFSKY, Erwin. A Perspectiva como Forma Simbólica. Tradução de Elisabete Nunes. Lisboa: Edições 70, 1999.

PESSOA JR, O. Teoria do Conhecimento e Filosofia da Ciência I – Osvaldo Pessoa Jr. – 2010 Capítulo IX - Tradições de Pesquisa na Astronomia Antiga.

SANTOS, Sueli dos. O Ensino da Matemática com Significação nos Anos Iniciais da Educação Básica. 2008.

SKOVSMOSE, Ole. Matemática Crítica. n 83. vol. 14. São Paulo: Revista Presença Pedagógica, set/out 2008. .>Acesso 23 de setembro de 2019.

VEBLEN, OSWALD and YOUNG, JOHN WESLEY, Projective Geometry - Vol.1, Ginn and Company, New York, 1910.

WATERMANN, IVONE e FRANCO, Valdeni Soliani. Geometria Projetiva no Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade Estadual de Maringá. Maringá, PR. p.4), 2008.

WYLIE, C.R. Introduction to Projetive Geometry. New York: McGraw-Hill, 1970.

YOKOYAMA, Leo Akio. Uma Prova Geométrica da Versão Projetiva do Teorema de Steiner. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM – Departamento de Matemática Aplicada. Rio de Janeiro: UFRJ/CCMN/IM, 2002.

YOKOYAMA, Leo Akio. Proposta de atividade da Bienal SBM. Matemática e Arte: Perspectiva, um passeio histórico, artístico e teórico através da Geometria Dinâmica. > acesso em 20/06/2018– Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM – Departamento de Matemática Aplicada. Rio de Janeiro: UFRJ/CCMN/IM, 2013.

SITE ONLINE AUTORIA NÃO CONHECIDA

http://www.abcgallery.com/
http://www.algagosarte.blogspot.com
http://www.arquiteturaeurbanismosite.file.wordpress.com
http://www.associazioneclaramaffei.org
http://www.baixaki.com.br/download/geogebra.htm
http://www.blogdelfotografo.com
http://www.collective-alchemy.net
http://www.cover.openlibrary.org
http://www.culturagenial.com/igreja-de-santa-maria-del-fiore/
http://www.cyberus.ca/~icscis/perspect.htm#Prehistoric1
http://www.didatticarte.it
http://www.editoraunesp.com.br
http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/TCFC1-10-Cap09.pdf
http://www.flashmasters.com.br (pontos de fuga)
http://www.flickr.com/photos
http://www.fotodicasbrasil.com.br
http://www.geogebra.org/cms/
http://www.geometros.wordpress.com

http://www.giottodibondone.org

http://www.hannahbroster1201.wordpress.com

http://www.historiadaarte.com.br

http://www.ibiblio.org/wm/paint/

http://www.ilusaodeotica.com/

http://www.leopoldina-emummundodistante.blogspot.com

http://www.luckscerezerti.blogspot.com

http://www.matematica.br/historia

http://www.math.dartmouth.edu

http://www.mathshistory.st-andrews.ac.uk

http://www.medium.com

http://www.pearlsoprofundity.files.wordpress.com

http://www.portaldoprofessor.mec.gov.br

http://www.professoresdematematica.com.br/softwares-geometria-dinamica.html

https://www.pucsp.br/geogebrasp/sobre_instituto.html

http://www.ricardocosta.com

http://www.salvador-dali.org

http://www.significados.com.br

http://www.tamu.edu/mocl/picasso/

http://www.turomaquia.com/pielo-della-francesca-o-artista-matematico

http://www.wahooart.com

http://www.wikiart.org

https://www.historiadasartes.com/sala-dos-professores/a-ultima-ceia-leonardo-da-vinci/

ANEXOS

ANEXO A:

TEOREMA DE DESARGUES

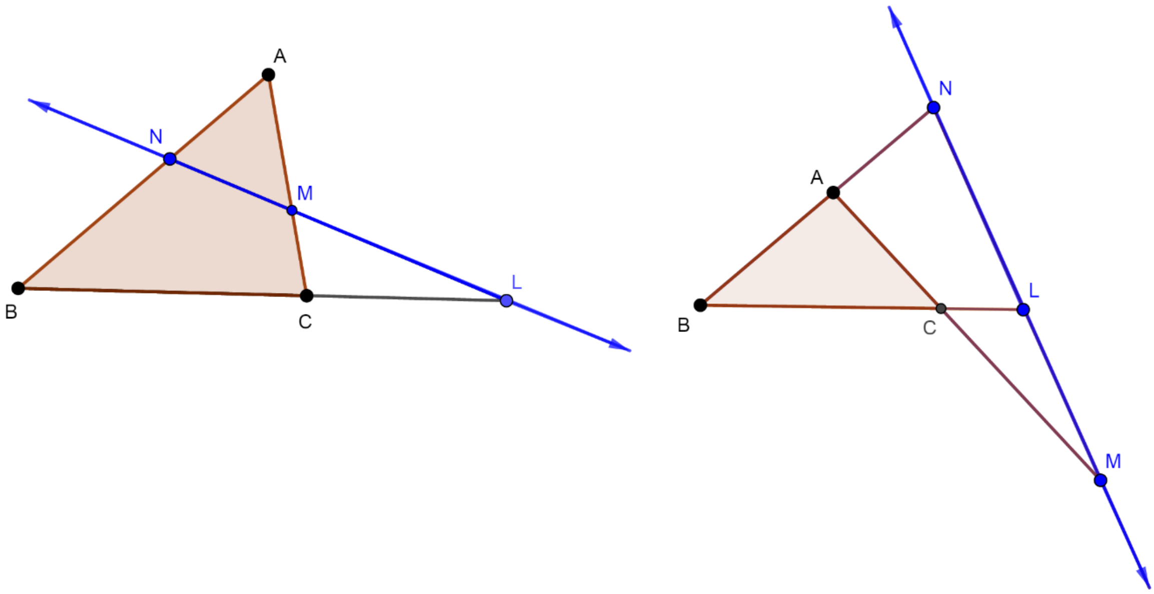
Nesta parte demonstraremos o Teorema de Desargues. Para tanto, é necessário ter o conhecimento do Teorema de Menelaus, que configura e argumento principal da demonstração do Teorema referido.

O teorema de Menelaus é bastante relevante e possui muita aplicação no campo da geometria, principalmente nos problemas de colinearidade. Há diferentes formas de realizarmos sua demonstração, o modo com que vamos apresentar será pelo teorema de Tales. Eis o seu enunciado:

Teorema 1.1 (*Teorema de Menelaus*) *Considere três pontos N, M e L localizados respectivamente nas retas suportes dos lados AB, AC e BC de um triângulo ABC (qualquer) e diferente dos vértices. Então, N, M e L são colineares se, e somente se,*

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Figura 93: Teorema de Menelaus.

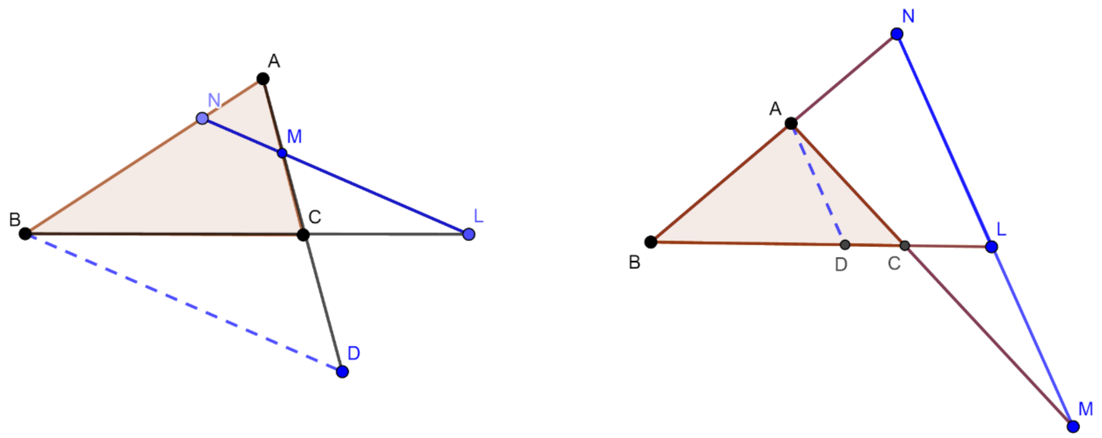


Fonte: o autor, 2019

Demonstração: Considerando o triângulo ABC, sejam os pontos colineares N, M e L pertencentes às retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente. Inicialmente, vamos supor que os pontos N, L e M são colineares. Distinguimos dois casos diferentes, veja figura ilustrativa abaixo

Figura 94: Teorema 1.1 a

(a) (b)



Fonte: o autor, 2019

Para o caso (a), traçamos o segmento $\overline{BD}$ paralelo à reta $\overleftrightarrow{NL}$ (reta de Menelaus) que intersecta o prolongamento do lado $\overline{AC}$ no ponto D e no caso (b), traçamos o segmento $\overline{AD}$ paralelo a $\overline{NM}$ com D pertencente ao segmento $\overline{BC}$. Para o caso (a) da figura 94, identificamos a proporcionalidade entre os segmentos paralelos $\overline{BD}$ e $\overline{NL}$ sobre os transversais. Os segmentos paralelos $\overline{BD}$ e $\overline{NM}$ cortam as secantes $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ em partes proporcionais, logo

$$\frac{NA}{NB} = \frac{MB}{MD}.$$

De onde obtemos

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{MD}{MA} = 1 \tag{1.1}$$

Pelo mesmo raciocínio, considerando os segmentos paralelos $\overline{NL}$ e $\overline{BD}$ e tomando agora as secantes $\overline{BL}$ e $\overline{MD}$ teremos:

$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CL}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{MC} + \mathrm{CD}}{\mathrm{MC}} \quad = \frac{\mathrm{BC} + \mathrm{CL}}{\mathrm{CL}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CL}}$$

Concluímos que:

$$\frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} \cdot \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MD}} = 1. \tag{1.2}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (1.1) e (1.2) e suprimindo o fator $\overline{\mathrm{MD}}$ obtemos:

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NB}} \cdot \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} \cdot \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}} = 1.$$

Para o caso (b) temos: Os segmentos $\overline{\mathrm{BN}}$ e $\overline{\mathrm{BL}}$ cortam as paralelas $\overline{\mathrm{AD}}$ e $\overline{\mathrm{NL}}$ em partes proporcionais, logo:

$$\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DL}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{AN}} = \frac{\mathrm{BA} + \mathrm{AN}}{\mathrm{AN}} \quad = \frac{\mathrm{BD} + \mathrm{DL}}{\mathrm{LD}} = \frac{\mathrm{BL}}{\mathrm{LD}}\,.$$

Segue daí que:

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NB}} \cdot \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LD}} = 1. \tag{1.3}$$

Analogamente considerando os segmentos paralelos $\overline{\mathrm{AD}}$ e $\overline{\mathrm{NM}}$ cortados pelas transversais $\overline{\mathrm{AM}}$ e $\overline{\mathrm{DL}}$ temos

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CL}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{CM}}{\mathrm{CM}} \quad = \frac{\mathrm{DC} + \mathrm{CL}}{\mathrm{CL}} = \frac{\mathrm{DL}}{\mathrm{CL}}\,.$$

Donde,

$$\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}} \cdot \frac{\mathrm{LD}}{\mathrm{LC}} = 1. \tag{1.4}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (1.3) e (1.4) e suprimindo o fator LD obtemos:

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1.$$

Isto completa a demonstração da primeira parte do teorema de Menelaus.

Agora vamos provar sua recíproca. Para isso, devemos considerar o triângulo ABC e pontos N, L e M sobre os lados (ou prolongamentos), AB, BC e CA, respectivamente. Se ocorrer que:

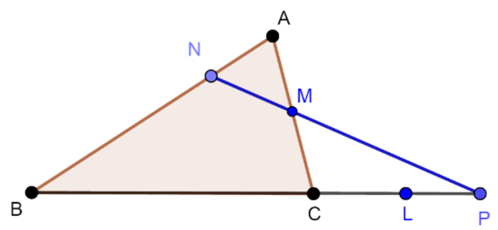
$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1,$$

então os pontos L, M e N são colineares.

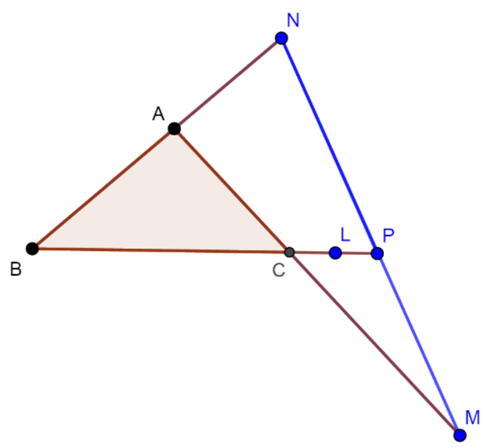
No caso (a), prolongamos o segmento $\overline{NM}$ até que intercepte a prolongamento do lado $\overline{AB}$ no ponto P. Para o caso (b) consideramos o segmento $\overline{NM}$ que corta a prolongação do lado $\overline{BC}$ no ponto P; conforme figura abaixo.

Figura 95: Teorema 1.1 b

(a)



(b)



Fonte: o autor, 2019

A demonstração que faremos vale para os dois casos. Pelo que acabamos de provar, vale que:

Como por hipótese,

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NB}} \cdot \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} \cdot \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MA}} = 1$$

temos daí, que:

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{LB}}{\mathrm{LC}} \Rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{L}.$$

Esta última igualdade nos mostra que os pontos P e L coincidem. Logo, concluímos que os pontos N, L e M são colineares.

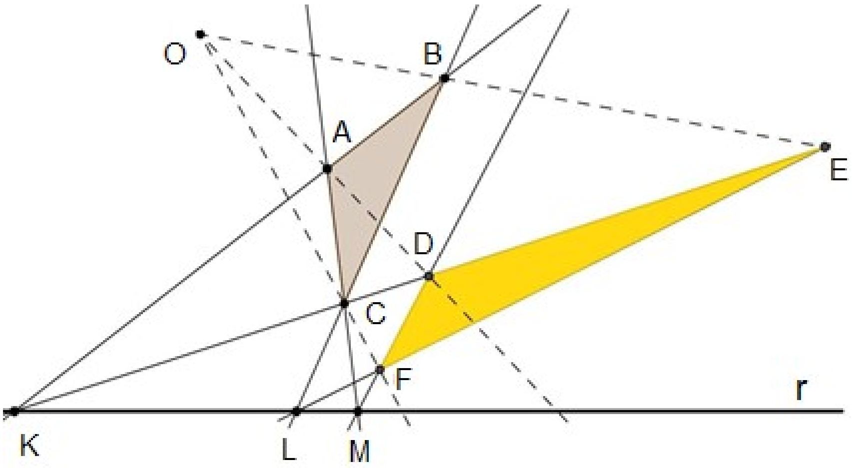
■

Agora, vamos ao enunciado do Teorena de Desargues

Teorema 2.2. (*Teorema de Desargues de Triângulos Homólogos*): *Dois triângulos são perspectivos por um ponto se, e somente se, eles são perspectivos por uma reta.*

Demonstração: Vamos mostrar que a condição necessária para dois triângulos serem perspectivos por um ponto é eles serem perspectivos por uma reta, para tanto, mostraremos que os pontos K, L e M são colineares. Aplicando o Teorema de Menelaus nos triângulos BCO, CAO e ABO e as respectivas transversais EFL, DFM e EDK. De acordo com a Figura 96.

Figura 96: Triângulos Homólogos (Triângulos Perspectivos)

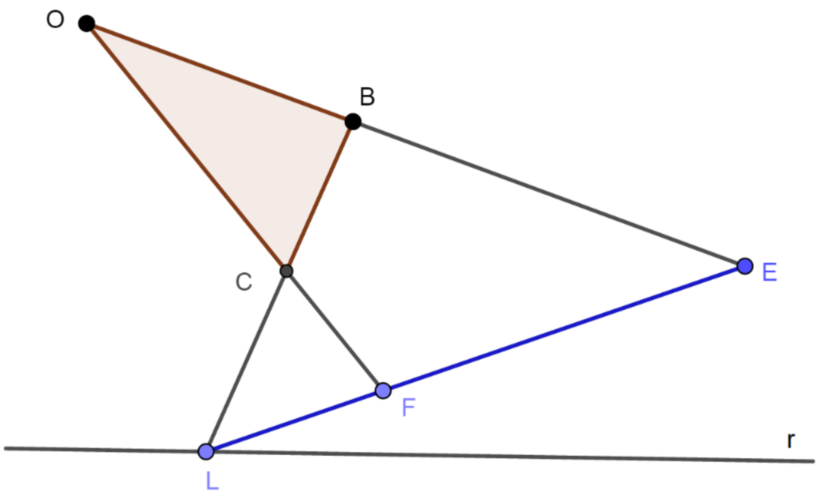


Fonte: o autor, 2019

1. Em relação ao ΔBCO e a transversal EFL da figura 96, teremos:

$$\frac{EB}{EO} \cdot \frac{FO}{FC} \cdot \frac{LC}{LB} = 1 \qquad (1.5)$$

Figura 97: Triângulo BCO e transversal EFL

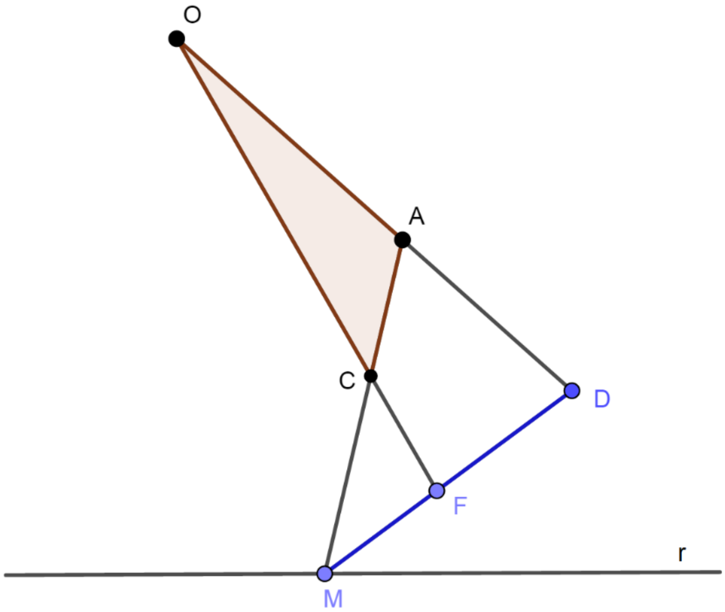


Fonte: o autor, 2019

2. Em relação ao ΔCAO e a transversal DFM da figura 97, teremos:

$$\frac{DO}{DA} \cdot \frac{FC}{FO} \cdot \frac{MA}{MC} = 1 \qquad (1.6)$$

Figura 98: Triângulo CAO e a transversal DFM

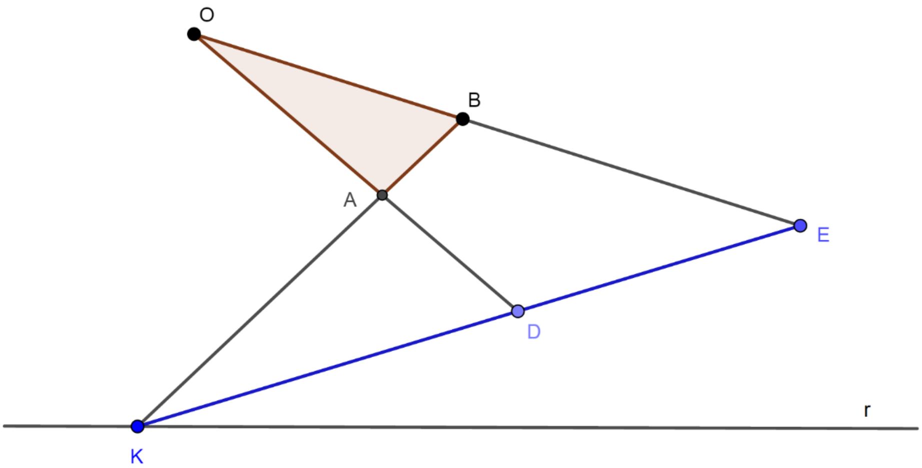


Fonte: o autor, 2019

3. Em relação ao ΔAOB e a transversal EDK da figura 99, teremos:

$$\frac{EO}{EB} \cdot \frac{DA}{DO} \cdot \frac{KB}{KA} = 1 \tag{1.7}$$

Figura 99: Triângulo AOB e a transversal EDK



Fonte: o autor, 2019

Agora vamos multiplicar as igualdades (1.5), (1.6) e (1.7) membro a membro, então teremos:

$$\frac{EB}{EO}\cdot\frac{FO}{FC}\cdot\frac{LC}{LB}\cdot\frac{D0}{DA}\cdot\frac{FC}{FO}\cdot\frac{MA}{MC}\cdot\frac{E0}{EB}\cdot\frac{DA}{DO}\cdot\frac{KB}{KA}=1\cdot1\cdot1 \tag{1.8}$$

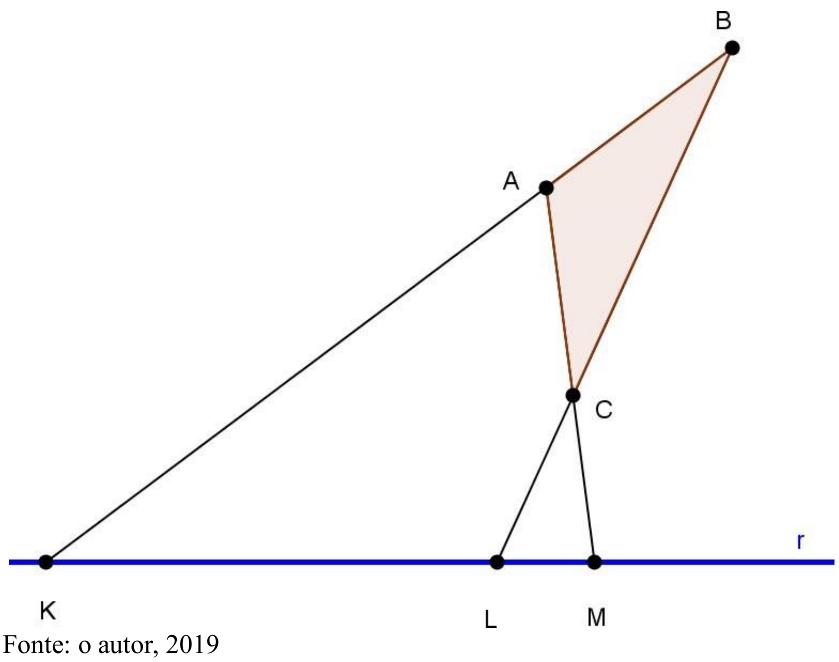
Logo, no produto dos membros da esquerda, seis termos se cancelam e o produto dos membros da direita é igual a 1. Assim obteremos:

$$\frac{LC}{LB}\cdot\frac{MA}{MC}\cdot\frac{KB}{KA}=1 \tag{1.9}$$

■

Desta forma, teremos o ΔABC e a transversal KLM, conforme a Figura 100.

Figura 100: Triângulo ABC e a transversal KLM.



Fonte: o autor, 2019

Após termos contato com a demonstração do Teorema de Desargues, um bom exemplo de sua aplicação pode ser visto na computação gráfica que se utiliza da perspectividade para mapear uma reta contida em uma cena numa reta (imagem) sobre o plano de projeção. O centro de perspectiva é a posição da câmera e o eixo de perspectividade é a direção de projeção.

ANEXO B:

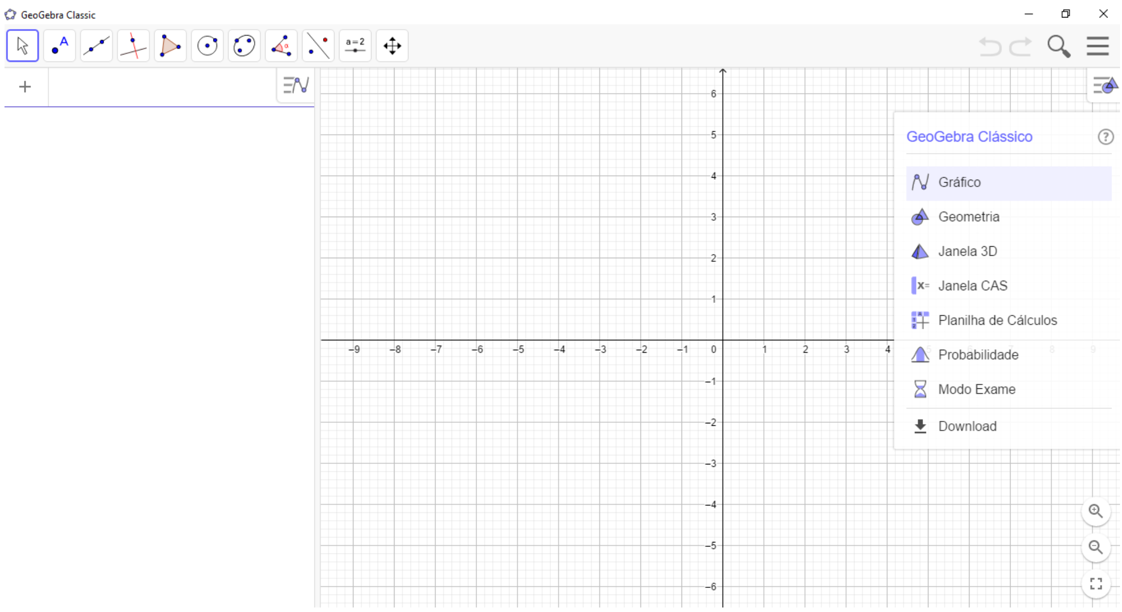
Este anexo apresenta um tutorial básico de como podemos fazer uso do recurso Geogebra para auxiliar nas construções utilizadas nas atividades 1, 2, 3 e 4. Para trabalhar com os alunos as atividades apresentadas sugerimos uma aula introdutória sobre essas ferramentas.

A seguir você encontrar uma sequência didática de como usar essas ferramentas:

– Retirando as linhas de grade e os eixos do plano cartesiano da tela:

1º - Abrindo o programa, a primeira imagem que temos é a seguinte:

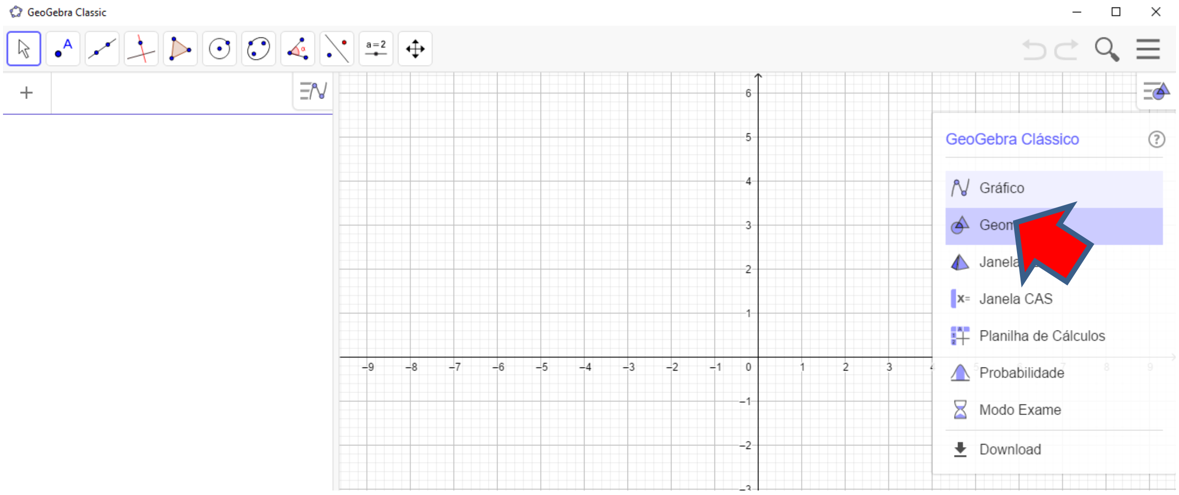
Figura 101: Anexo 2.1



Fonte: o autor, 2019

2º - Vamos ocultar o plano cartesiano e as linhas de grade. Para isso, deve-se clicar no ícone: Geometria

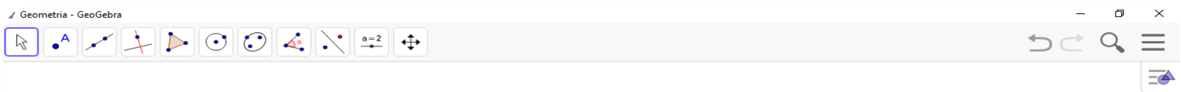
Figura 102: Anexo 2.2



Fonte: o autor, 2019

Logo em seguida, você irá visualizar a seguinte imagem:

Figura 103: Anexo 2.3

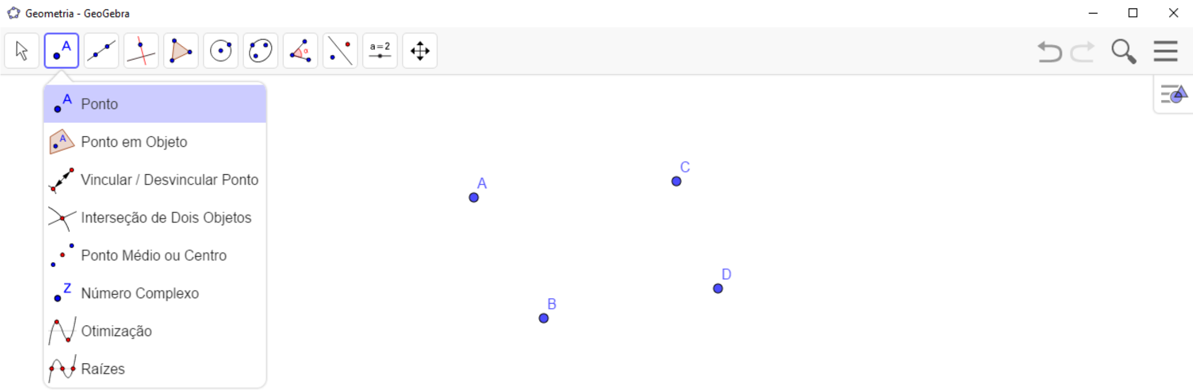


Fonte: o autor, 2019

– Marcando pontos quaisquer:

1º - Clique no ícone selecionado em azul, acesse a opção "ponto" e selecione uma posição na qual deseja inserir o ponto.

Figura 104: Anexo 2.4

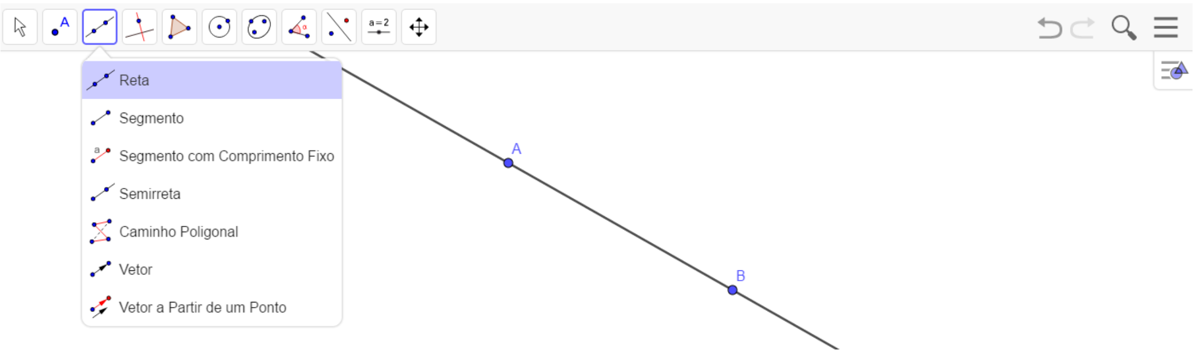


Fonte: o autor, 2019

– Traçando retas usando dois pontos:

1º - Clique no ícone indicado, selecione a primeira opção dele, posicione os dois pontos e você irá obter a reta determinada por eles.

Figura 105: Anexo 2.5

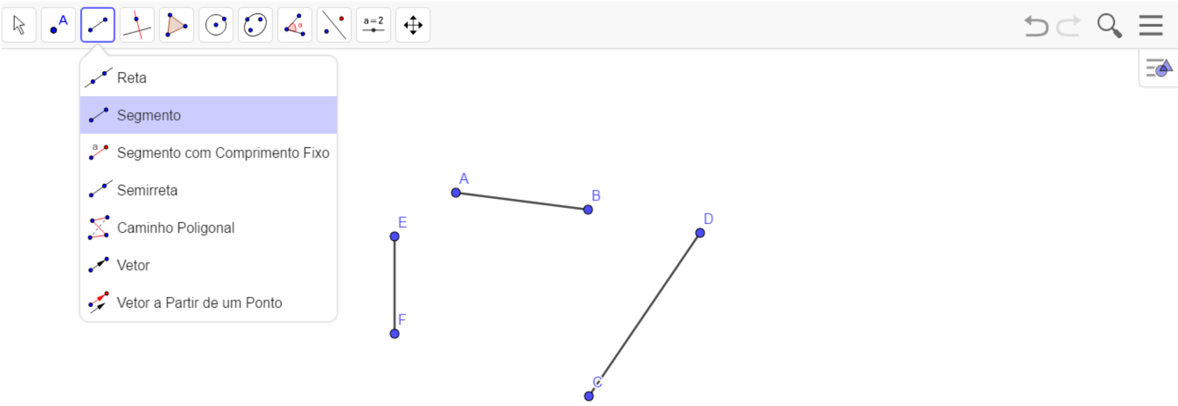


Fonte: o autor, 2019

– Traçando um segmento de reta:

1º - Basta seguir os passos da imagem e posicionar os dois pontos onde desejar.

Figura 106: Anexo 2.6

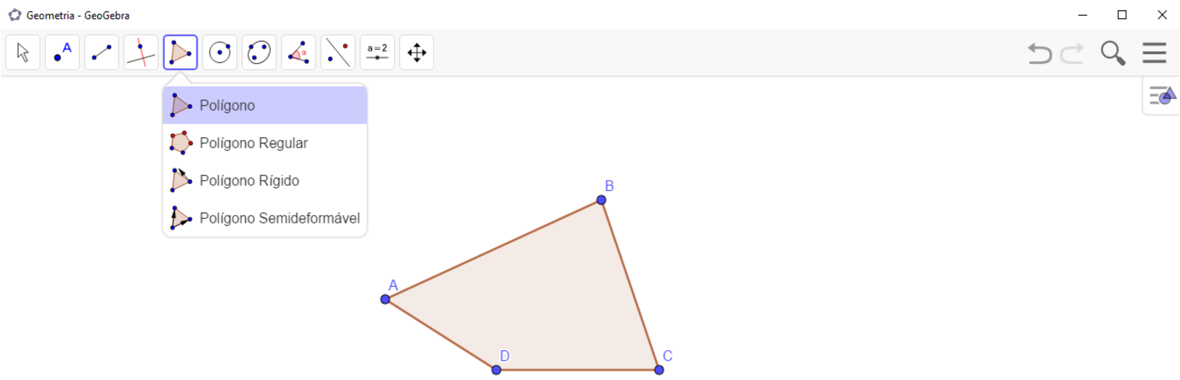


Fonte: o autor, 2019

– Traçando um polígono qualquer:

1º - Para esta opção, podemos traçar um polígono qualquer ou um polígono regular. Para a opção polígono regular, o software irá pedir um número que é o número de lados. Caso escolha a opção um polígono qualquer, basta posicionar os vértices, ou seja, os pontos, lembrando de encerrar clicando sobre o ponto inicial.

Figura 107: Anexo 2.7

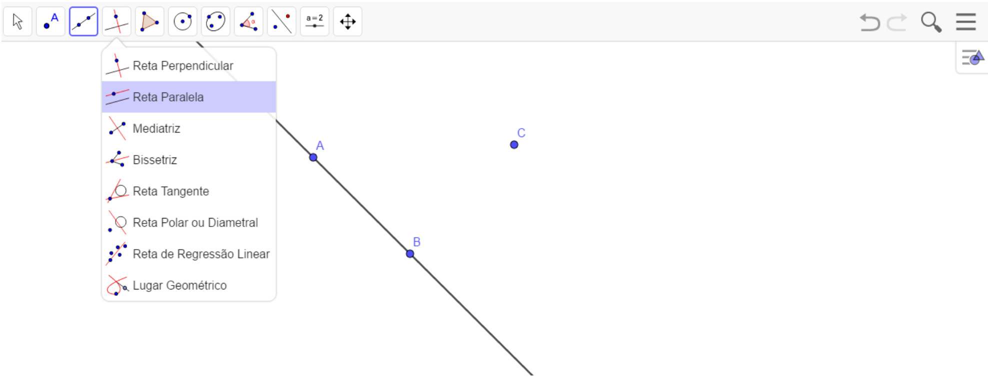


Fonte: o autor, 2019

– Traçando uma reta paralela passando por um ponto e uma reta dada.

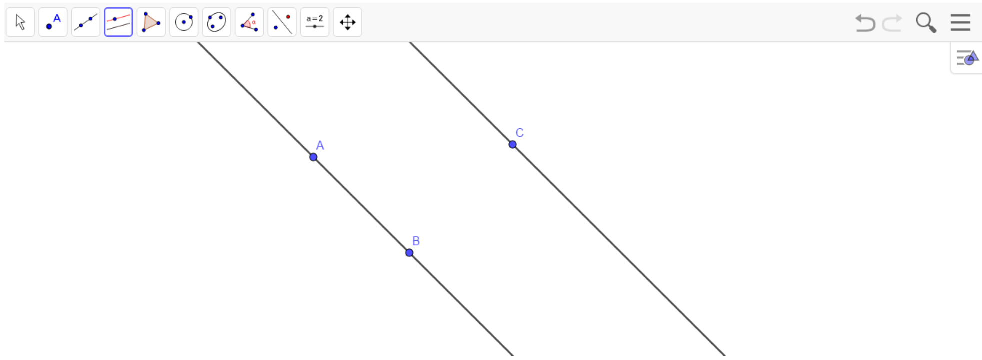
1º Passo: Dados uma reta e um ponto, clique no ícone indicado. Em seguida, selecione a reta e depois o ponto e aparecerá a reta paralela desejada.

Figura 108: Anexo 2.8



Fonte: o autor, 2019

Figura 109: Anexo 2.9

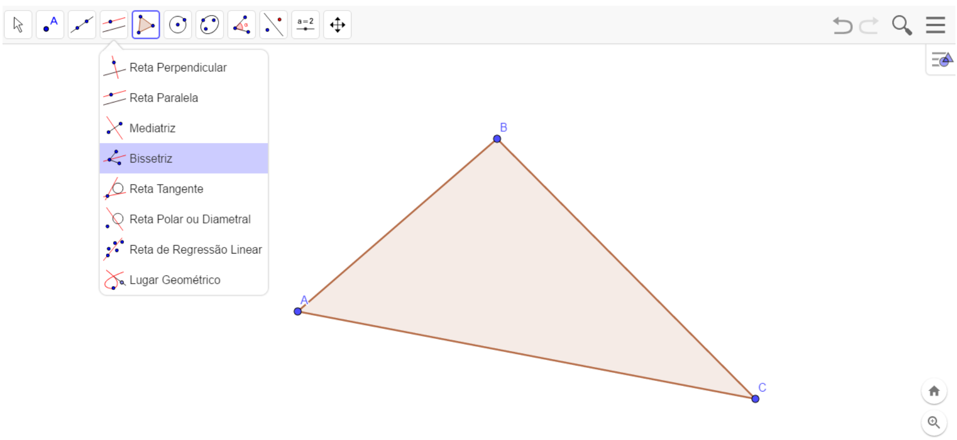


Fonte: o autor, 2019

– Traçando a bissetriz de um ângulo qualquer:

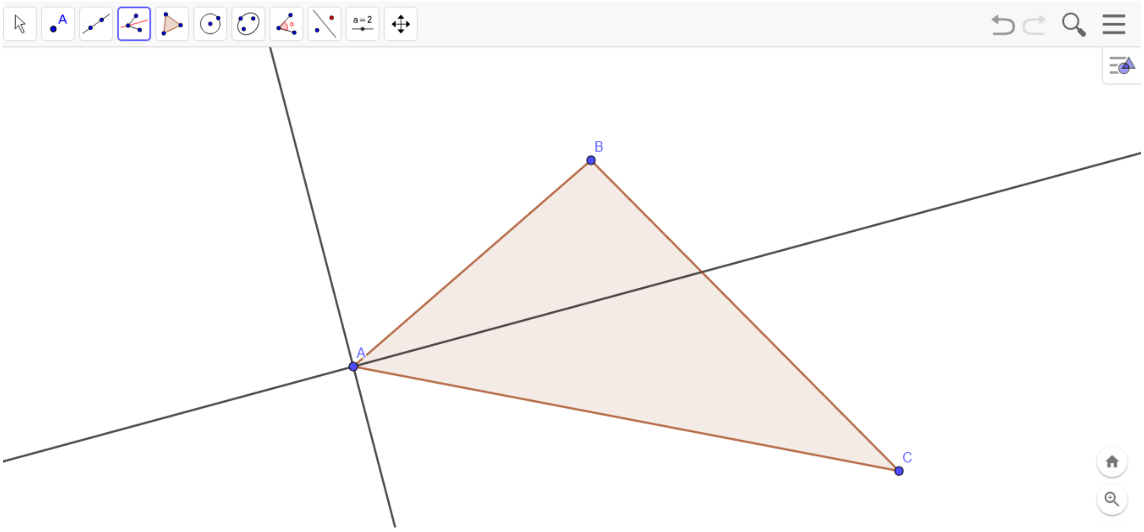
Para obter a bissetriz de um ângulo, devemos clicar no ícone indicado na imagem e selecionar duas retas.

Figura 110: Anexo 2.10



Fonte: o autor, 2019

Figura 111: Anexo 2.11

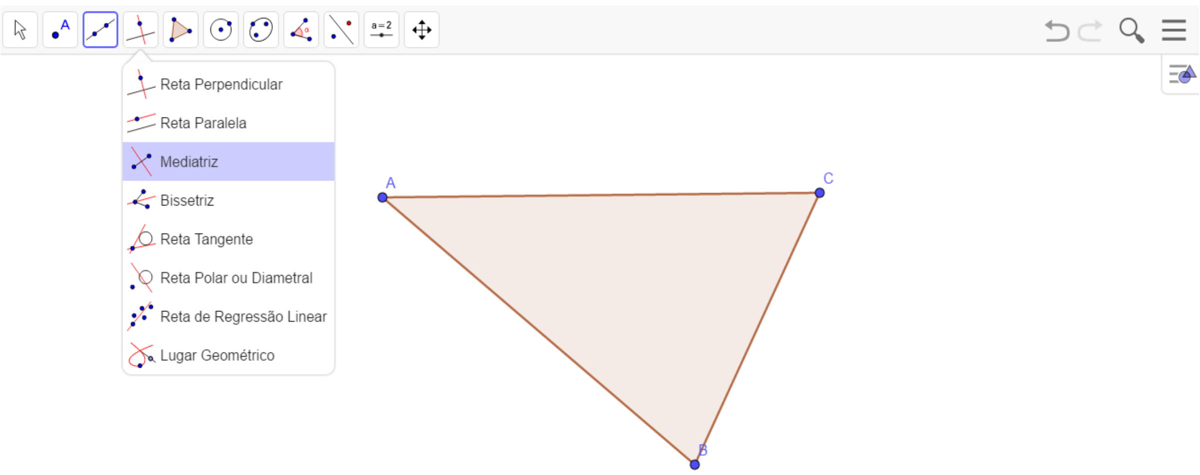


Fonte: o autor, 2019

– Obtendo o ponto médio de um segmento:

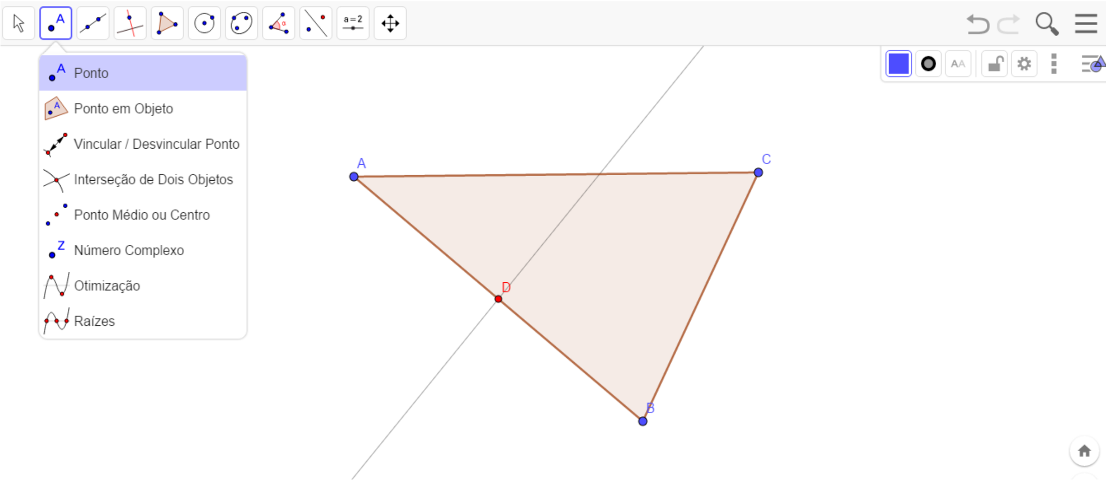
Para obter o ponto médio de um segmento de reta devemos construí-lo através de suas mediatrizes. Observe:

Figura 112: Anexo 2.12



Fonte: o autor, 2019

Figura 113: Anexo 2.13



Fonte: o autor, 2019

ANEXO C:

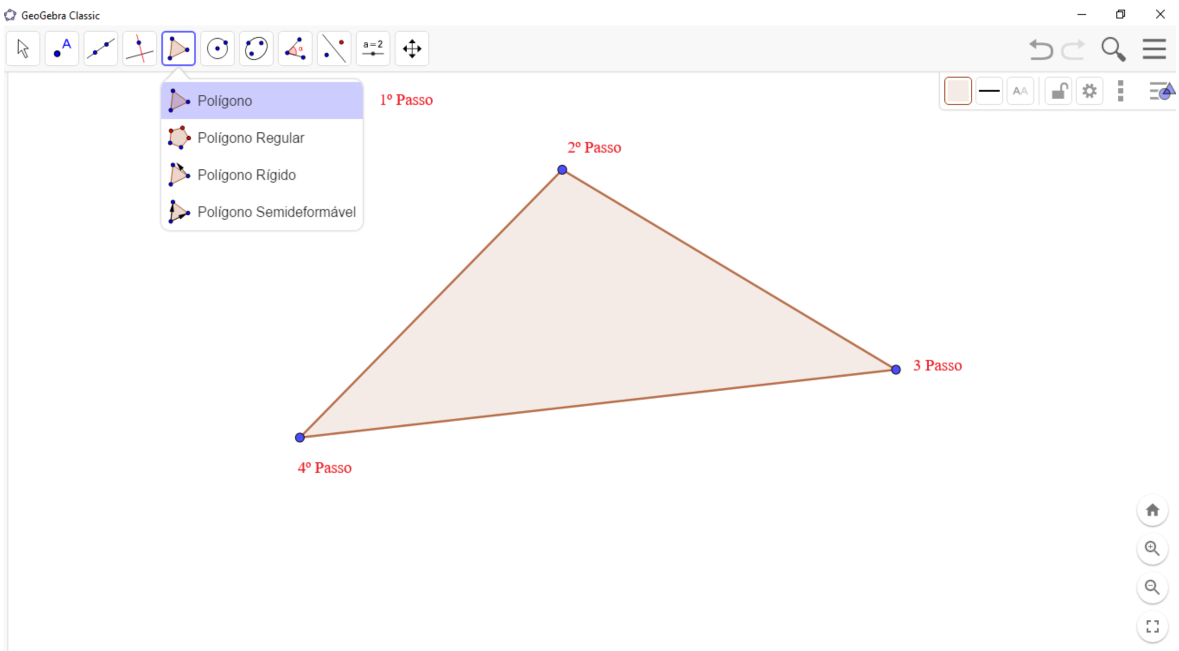
Neste anexo iremos tratar a construção do Incentro de um triângulo.

Da geometria Euclidiana, sabemos que o *incentro de um triângulo* é o ponto de encontro de suas bissetrizes internas. Desse modo, é possível associarmos este ponto de concurso a ideia de ponto de fuga, e apresentar mais uma alternativa de se abordar a Geometria Projetiva no conteúdo programático do ensino fundamental II. Para realizarmos essa construção no Geogebra vamos seguir os seguintes passos:

1º Passo:

Vamos construir um triângulo qualquer, de acordo com a instrução a seguir.

Figura 114: Anexo 3.1

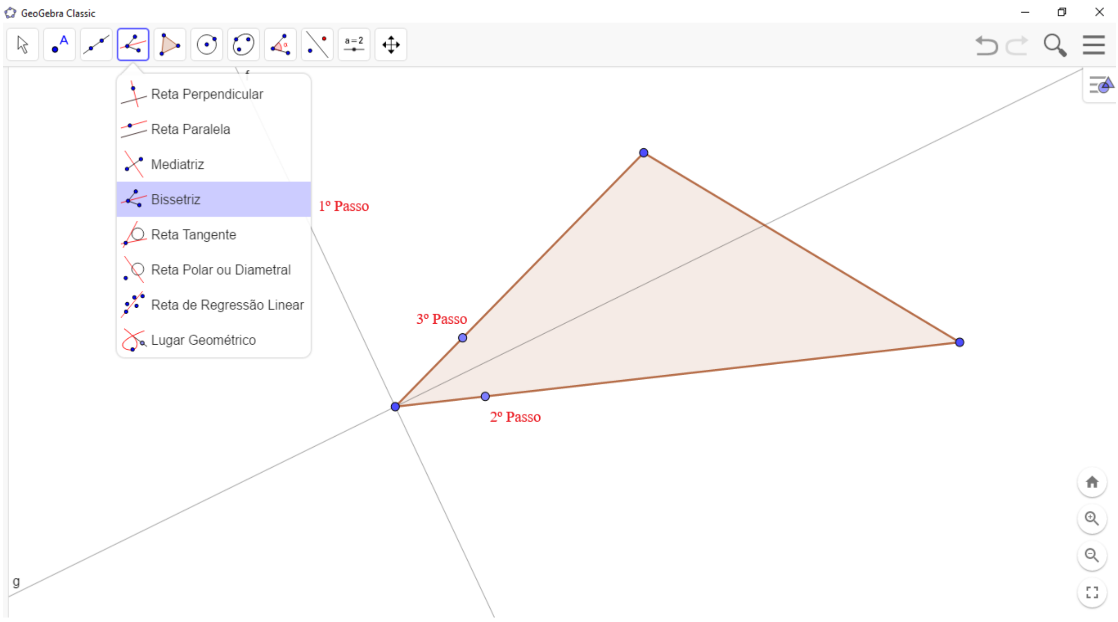


Fonte: o autor, 2019

2º Passo:

Para obter a bissetriz, conforme explicado no tutorial, basta seguir a ordem dos passos descritos.

Figura 115: Anexo 3.2

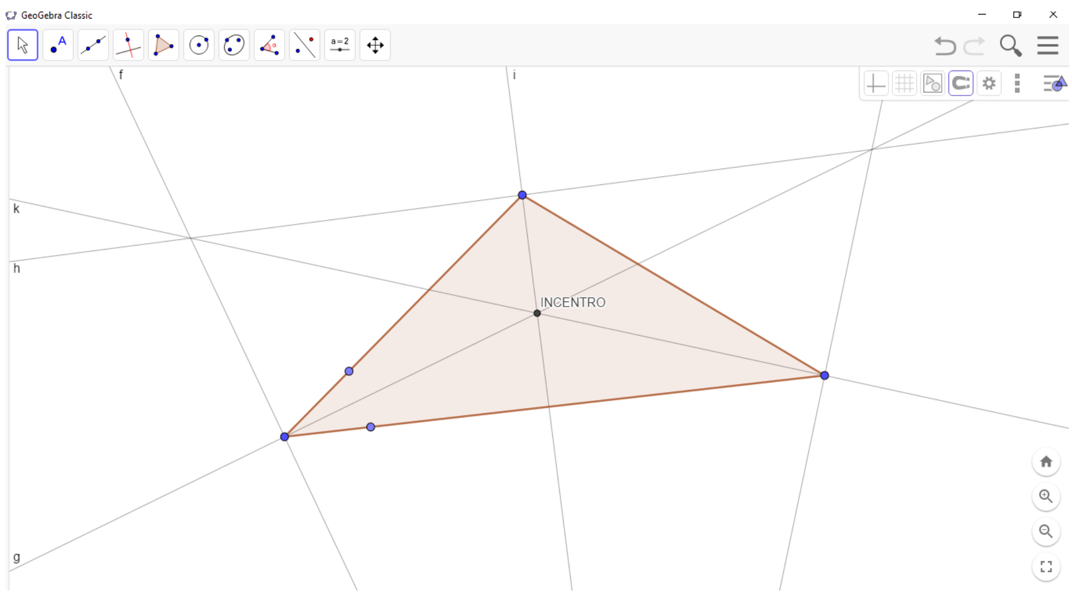


Fonte: o autor, 2019

3º Passo:

Vamos repetir o passo dois nos demais vértices do Triângulo.

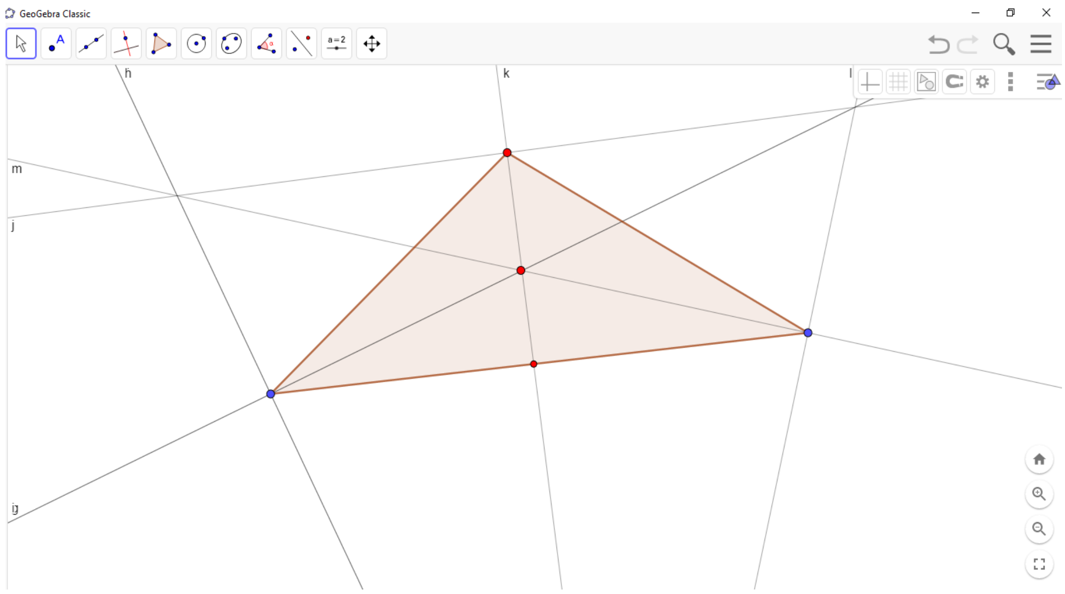
Figura 116: Anexo 3.3



Fonte: o autor, 2019

Vale ressaltar que o aluno chega à conclusão da concorrência dessas três cevianas importantes de um triângulo, reforçando conceitos importantes da geometria e sem precisar fazer cálculos.

Figura 117: Anexo 3.4



Fonte: o autor, 2019

Observe que todas as linhas convergem para um ponto, denominado de incentro. Isso também pode ser notado na figura 117. Vale ressaltar que demostrar a concorrência das bissetrizes internas de um triângulo, podemos utilizar o teorema de Menelaus do anexo 1.

ANEXO D:

Neste, vamos apresentar a construção do Baricentro de um triângulo.

Estrategicamente, escolhemos a construção do Baricentro de um triângulo, a partir das mediatrizes dos lados de um triângulo. Neste momento, vale enfatizar a diferença nas definições Euclidianas entre mediatriz e mediana dos lados de um triângulo.

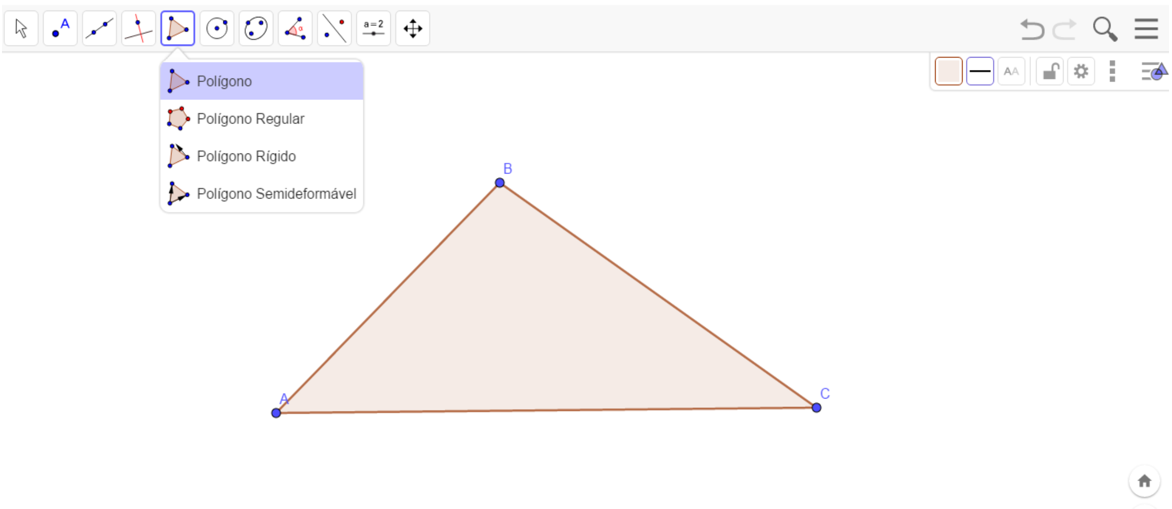
Ressaltando que o baricentro é o ponto de concorrência das medianas e a exemplo do incentro, também podemos associá-lo ao ponto de fuga.

Vamos iniciar sua construção com os passos:

1º Passo:

Vamos construir um triângulo qualquer:

Figura 118: Anexo 4.1

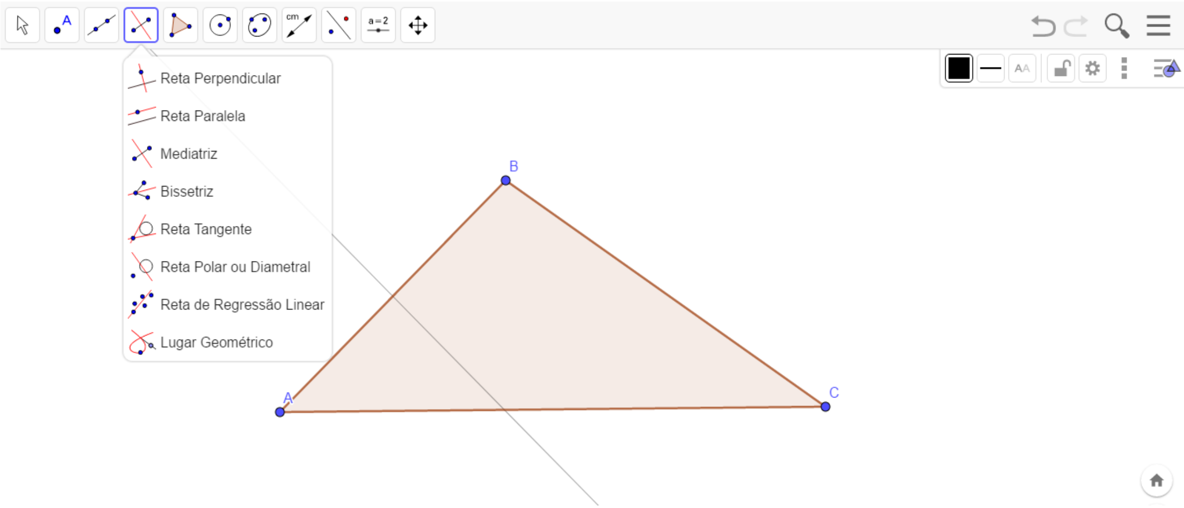


Fonte: o autor, 2019

2º Passo:

Traça-se a mediatriz do lado *AB* para determinarmos o ponto médio.

Figura 119: Anexo 4.2

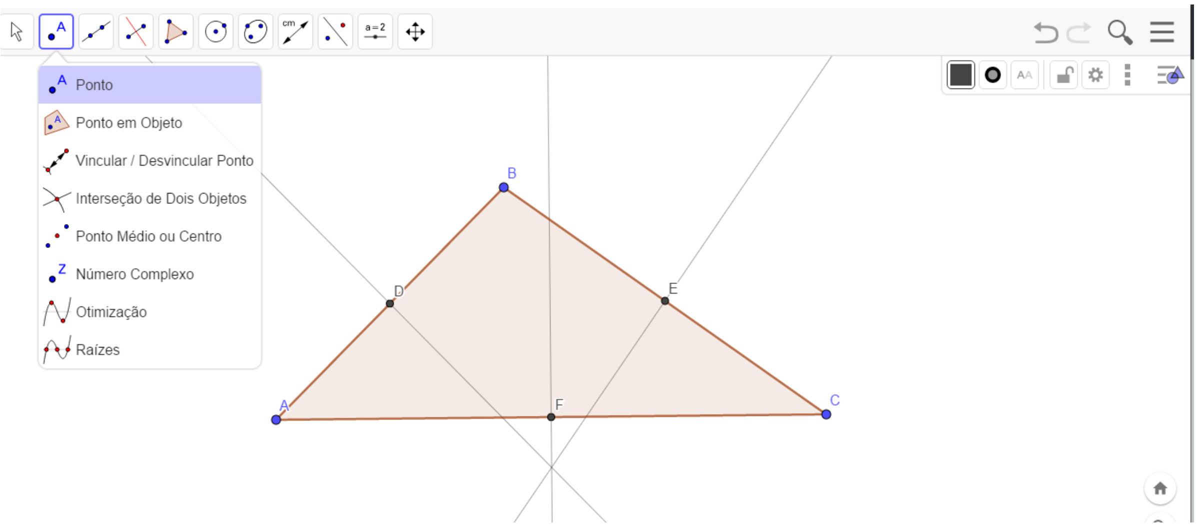


Fonte: o autor, 2019

3º Passo:

Repetimos o passo 2 para os demais lados. E, em seguida, marcamos os pontos médios de cada lado.

Figura 120: Anexo 4.3

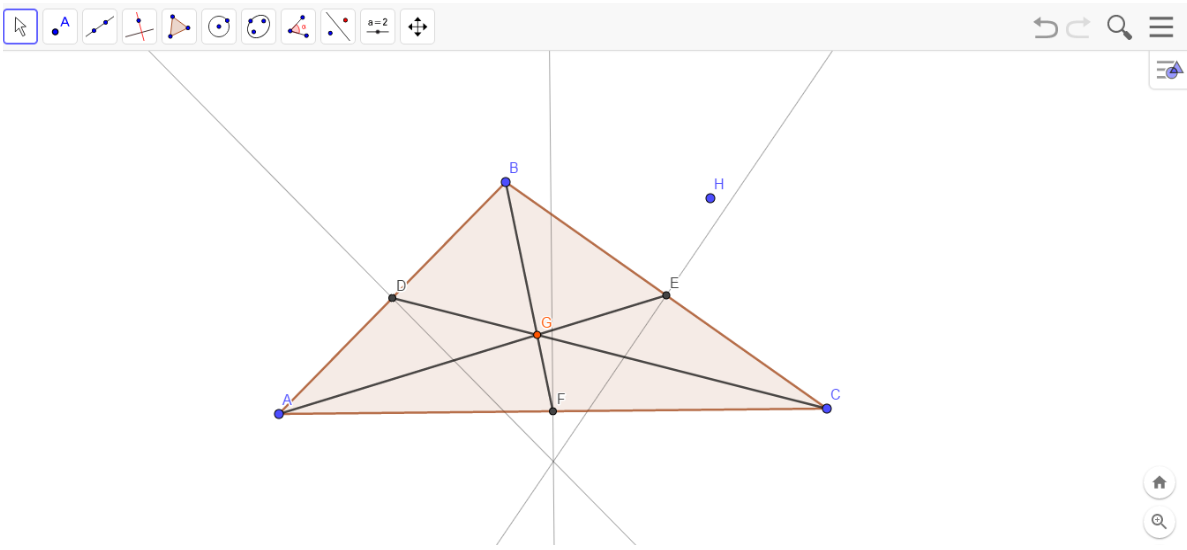


Fonte: o autor, 2019

4º Passo:

Agora, vamos traçar segmentos de reta ligando o ponto médio a vértice oposto. Vamos repetir este passo para cada um dos vértices.

Figura 121: Anexo 4.4



Fonte: o autor, 2019

Assim como no anexo anterior, a colinearidade das medianas também pode ser percebida. sem o uso de cálculos. Ressaltando que, pelo teorema de Menelau, também podemos chegara este resultado.