UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ

Departamento de Ciências Exatas Tecnológicas
Mestrado em Matemática

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ

Autor: Gilmar Nascimento Borges
Orientadora: Profª. Drª. Fernanda Gonçalves de Paula

Gilmar Nascimento Borges

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, ofertado pela Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC, como requisito final para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Fernanda Gonçalves de Paula

Ilhéus, Bahia

2020

B732 Borges, Gilmar Nascimento.
Uma sequência didática para o ensino de análise combinatória com auxílio do jogo de xadrez / Gilmar Nascimento Borges. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.
54 f.: il.

Orientadora: Fernanda Gonçalves de Paula.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Análise combinatória. 3. Jogos no ensino de matemática. 4. Xadrez. I. Título.

CDD 510.07

GILMAR NASCIMENTO BORGES

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA COM AUXÍLIO DO JOGO DE XADREZ

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado em Ilhéus, 14 de setembro de 2020.

Fernanda Gonçalves de Paula

Profa. Dra. Fernanda Gonçalves de Paula – Orientadora - UESC

Claudemir Mota da Cruz

Prof. Me. Claudemir Mota da Cruz – UESC

Karolina

Prof.ª M.ª Karolina Barone Ribeiro da Silva Hrentchechen, - UNICENTRO

ILHÉUS – BAHIA

2020

Agradecimentos

“Ser capaz de perseguir nossos próprios sonhos é o que nos faz fortes”.
Chester Bennington

Agradeço primeiramente a Deus por ter permitido que eu chegasse até aqui com força e saúde. Agradeço aos meus pais João Carlos e Ilza Maria que sempre me incentivaram a estudar, e sempre me motivaram a nunca desistir. A minha esposa Samara, por sempre me apoiar em todas as minhas decisões, e por entender meus momentos de ausência durante o curso. Aos meus colegas de trabalho por estarem sempre dispostos a me substituir quando estive ausente durante as avaliações do curso. Aos meus colegas do Curso, aos quais criamos um laço de amizade, onde juntos superamos nossas dificuldades, em especial à Junot Borges pela companhia na estrada, nas idas e vindas dividindo alegrias e frustrações.

Por fim, a todos os Professores do PROFMAT, em especial a minha Orientadora, a Professora Doutora Fernanda Gonçalves por todo o apoio que nunca faltou durante o curso.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho é uma proposta de uma sequência didática para as turmas do 9º ano do Ensino Fundamental II, na qual o Professor de Matemática terá acesso a definições e questões voltadas ao conteúdo de Análise combinatória, conteúdo que é pouco visto durante as séries iniciais do Ensino Fundamental. Esta sequência didática tem por característica o auxílio do jogo de xadrez. Assim o aluno terá contato com esta excelente ferramenta metodológica, propiciando uma relação do conteúdo matemático com as regras do jogo.

Palavras - chave: Questões, Análise Combinatória, Xadrez,

Abstract

This work is a proposal for a didactic sequence for the 9th grade classes of Elementary School II, in which the Mathematics Teacher will have access to definitions and questions related to the content of Combinatorial Analysis, content that is little seen during the initial grades of Teaching Fundamental. This didactic sequence is characterized by the aid of the game of chess. Thus the student will have contact with this excellent methodological tool, providing a relationship of the mathematical content with the rules of the game.

Keywords: Questions, combinatorial analysis, chess

Sumário

Introdução

De maneira geral, a Matemática ensinada nas Escolas é vista pelos alunos como uma ciência distante da realidade. A Matemática está presente em grande parte do nosso cotidiano, independente do nível de complexidade. Entender isso é compreender o mundo à sua volta e poder atuar nele. Para Borba e Skovsmose (2001), tal representação da matemática como ciência exata e precisa, transforma-a em uma linguagem de poder distante da realidade, deixando estudantes inseguros, passivos e desmotivados com relação à aprendizagem da disciplina.

Ao refletir sobre o ambiente escolar e a maneira como a Matemática se desenvolve nesse ambiente, cabe ao Professor da disciplina buscar meios de dar vida a essa Ciência, mostrando que a Matemática está presente em nosso dia a dia de várias maneiras, visto que ela é formada a partir de problemas manifestados da sociedade. Entre os vários conteúdos abordados nas séries finais do Ensino Fundamental, a Análise Combinatória é um exemplo de como a Matemática pode estar ligada diretamente aos problemas cotidianos, seja num jogo ou num determinado dado estatístico.

Em relação ao conceito de Análise Combinatória, na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é proposto aplicar tal conteúdo em todas as séries do Ensino fundamental de forma gradual, a partir da "compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problema propostos, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas" (BRASIL, 2018, p.277). Desta forma, os primeiros problemas envolvendo contagem resolvidos em sala de aula, seriam voltados para o entendimento do conceito de "casos possíveis", para que posteriormente fossem resolvidos aplicando a ideia de princípio multiplicativo e aditivo.

O presente trabalho traz uma sequência didática com o auxilio do jogo de Xadrez, para o Professor de Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental abordar o conteúdo de Análise Combinatória, e está dividido em cinco capítulos.

O Capítulo 1 aborda a fundamentação teórica e a importância de se trabalhar o conteúdo de Análise Combinatória desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, utilizando diferentes metodologias, entre elas o jogo de xadrez .

O Capítulo 2 traz uma explanação sobre o jogo de xadrez, suas regras, os movimentos de cada peça e a relação que o jogo tem com a Matemática.

No Capítulo 3 apresentamos os conceitos inicias dos conteúdos de Análise combinatória, exemplos e aplicações, voltados para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II.

No capítulo 4 é proposta uma sequência didática para explanar o tema de Análise combinatória, propiciando aos estudantes que identifiquem conceitos e estratégias de raciocínio para resolverem problemas dentro do jogo de xadrez.

O Capítulo 5 apresenta as considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.1 Combinatória desde as séries iniciais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) do Ensino Fundamental enfatizam a importância de se trabalhar os conteúdos de Análise Combinatória desde os anos iniciais.

De acordo com os PCN's, em relação ao raciocínio combinatório, no primeiro e segundo ciclo, "os alunos são levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todas os agrupamentos possíveis para depois contá-los" (BRASIL, 1997, p.52). Outra sugestão é por meio de "identificar possíveis maneiras de combinar elementos de uma de uma coleção e de contabilizá-los usando estratégias pessoais" (BRASIL, 1997, p.62). Um exemplo: Dispondo de três sabores de sorvete e dois sabores de cobertura. De quantas maneiras posso montar um sorvete com um sabor e uma cobertura?

Para esse tipo de problema, o aluno poderá encontrar a resposta de diversas maneiras: desenhos, tabelas, árvore de possibilidades, entre outros testes de possibilidades.

Esses conteúdos foram incluídos ao currículo brasileiro, e devem ser trabalhados desde as séries iniciais do Ensino Fundamental até as séries finais do Ensino Médio, de maneira complementar.

A inserção da Análise Combinatória como conteúdo escolar é defendida por Kapur (1970, p.114) que advoga que esse assunto "uma vez que não depende de cálculo, seus problemas podem ser trabalhados em um estágio inicial no currículo escolar. De fato, esse conteúdo tem problemas aplicáveis para todos os níveis". Kapur (1970, p.127) acrescenta que o potencial de problemas combinatórios "[...] juntamente com as estruturas algébricas e transformações geométricas[...] podem fornecer um depósito rico para modernizar e revitalizar o nosso currículo escolar".

Para os anos finais do Ensino Fundamental, os PCN's orientam que o trabalho com a Análise Combinatória não se desenvolva com a definição de termos e nem com o uso de fórmulas. Segundo os PCN's "o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades", favorecendo, assim, o desenvolvimento do raciocínio matemático. Dessa forma, o estudo da Análise Combinatória no Ensino Fundamental ajuda o aluno a desenvolver o raciocínio combinatório de maneira que o mesmo possa enfrentar com mais segurança situações-problema mais complexas e que dependem de uma contagem sistemática. Com este desenvolvimento, o aluno terá à sua disposição uma ferramenta útil para a aprendizagem de Estatística e Probabilidade.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC - BRASIL, 2016) inclui a Análise Combinatória ao apresentar os objetivos curriculares para o 9º ano. Apresenta no campo Estatística e Probabilidade a sugestão de "construir o espaço amostral de experimentos, utilizando o princípio multiplicativo" (BRASIL, 2016, p.136).

> Os problemas de contagem, por exemplo, devem, inicialmente, estar restritos àqueles cujas soluções podem ser obtidas pela descrição de todos os casos possíveis, mediante a utilização de esquemas ou diagramas, e, posteriormente, àqueles cuja resolução depende da aplicação dos princípios multiplicativo e aditivo e do princípio da casa dos pombos. (Base Nacional Comum Curricular, BRASIL, p. 273).

Observam-se as orientações para o trabalho com diferentes estratégias de resolução de problemas combinatórios, evidenciando o princípio multiplicativo. A BNCC traz diferentes estratégias para esse nível de escolaridade, a saber, diagramas de árvores, tabelas e esquemas. Essa orientação converge ao defendido por Borba (2010), quando especifica que, para auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório, os professores podem fazer uso das estratégias desenvolvidas por alunos - como listar todas as possibilidades, fazer desenhos ou diagramas.

1.2 A utilização dos jogos no ensino de Combinatória

Inserir os jogos como metodologia de ensino da matemática é uma forma de propiciar ao estudante o desenvolvimento de suas habilidades de forma lúdica e prazerosa.

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas (BRASIL, 1998, p. 46).

O trabalho com jogos em sala de aula, além de ser prazeroso e divertido, faz com que haja uma aceitação maior no que diz respeito aos conteúdos programados. A Matemática é vista por muitos alunos como uma disciplina difícil, desse modo se tornam desinteressados por ela. Aranão (1996), esclarece que o jogo em sala de aula é um importante recurso metodológico, para desenvolver a capacidade de lidar com informações e criar significados culturais para os conceitos matemáticos.

Os jogos e brincadeiras auxiliam o professor como uma estratégia metodológica para ajudá-los nesse processo. Além de chamar atenção dos alunos, desenvolve a aprendizagem e estimula o raciocínio lógico. Para que o trabalho com jogos dê resultado, contudo, é necessária uma avaliação prévia de quais jogos e como serão utilizados e as finalidades propostas por eles.

Kishimoto (2007) enfatiza que resolução de problema e jogo são elementos semelhantes, pois ambos se unem através do lúdico. Para ela, os diferentes níveis de ensino devem ter caráter lúdico para desestruturar o aluno e leva-los a construção de novos conhecimentos.

A inserção do jogo, combinado com uma boa metodologia do professor, pode levar as aulas de Matemática a ficarem cada vez mais prazerosas e cativante, fazendo com que cada conteúdo matemático seja significativo para o aluno. O jogo por si só não pode ser aplicado de forma solta, apenas como forma de preencher o tempo, deve ser sempre relacionado aos conteúdos estudados ou a serem estudados.

> A ludicidade é uma necessidade do ser humano em qualquer idade e não pode ser vista apenas como diversão". O desenvolvimento do aspecto lúdico facilita a aprendizagem, o desenvolvimento pessoal, social e cultural [...], facilita os processos de socialização, comunicação, expressão e construção do conhecimento. (Santos, 2011, p.12).

Nesse sentido, cabe ao professor procurar propiciar situações que motivem o aluno a ter uma aprendizagem significativa, de acordo com o nível de desenvolvimento cognitivo do aluno, em atividades que possam desafiá-lo, de forma a despertar seu interesse pelo que está sendo ensinado em sala de aula.

1.3 O jogo de xadrez como ferramenta metodológica

Existem diversos contos em relação ao surgimento do jogo de xadrez, mas o mais famoso deles diz que foi criado pelo sábio Indiano Sissa, após o pedido do seu Rei Kaíde, que se sentindo entediado pediu para seus súditos criarem algo para seu entretenimento, e prometeu uma grande recompensa para quem conseguisse esse feito. Sendo Assim, após apresentar o jogo e obter aprovação pelo Rei, Sissa poderia pedir o que quisesse como recompensa. Resolveu aproveitar o formato do tabuleiro (64 casas), e resolveu pedir grãos de trigo, da seguinte maneira: um grão na primeira casa, dois na segunda, quatro na terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade em cada casa, até a ultima. O Rei, como havia prometido, lhe concedeu. Portanto após feito os cálculos, foi verificado que seria impossível, pois a quantidade de trigo não era suficiente. Seriam necessários 18.446.744.073.709.551.615 grãos. Essa lenda pode ser encontrada no livro "O homem que calculava"de Malba Tahan.

No ano de 1986 a Féderation Internationale des Échces (FIDE) e a United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO) criaram o Committee on Chess in Schools (CCS) que teve um grande papel na divulgação do ensino e na democratização do xadrez como instrumento pedagógico.

Em todo o mundo existem projetos de xadrez embasados em estudos que comprovam a melhora no rendimento escolar, concentração e desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos.Um deles é um estudo chinês, que comparou a potência cerebral de jogadores experientes e os novatos. O primeiro time, por ter passado mais tempo no tabuleiro, tem uma memória superior e aprende as coisas com mais facilidade. Entretanto observa-se que essa ferramenta é pouco explorada pelas outras disciplinas, apesar da interdisciplinaridade ser defendida pelos PCN's.

> A interdisciplinaridade supõe um eixo integrador, que pode ser o objeto de conhecimento, um projeto de investigação, um plano de intervenção. Nesse sentido, ela deve partir da necessidade sentida pelas escolas, professores e alunos de explicar, compreender, intervir, mudar, prever, algo que desafia uma disciplina isolada e atrai a atenção de mais de um olhar, talvez vários.(BRASIL, 2002, pp. 88-89).

Com base nesses estudos e no fato do jogo desenvolver várias habilidades a nível cognitivo, e outras já citadas anteriormente, Pimenta (2012) afirma que:

> "Em países como a França e Holanda o xadrez já há muito tempo faz parte do currículo escolar como atividade extracurricular. Após sua implantação, percebeu-se um elevado nível de alunos com melhora no coeficiente escolar e uma queda de atendimento a alunos com dificuldades de concentração". (PIMENTA, 2012).

O jogo de xadrez tem o poder de desenvolver habilidades em diversos níveis. Nos aspectos do raciocínio lógico e da análise combinatória, quando o aluno passa a ter contato com o jogo de xadrez ele se depara com diversos exercícios que lhe são propostos, fazendo com que ele busque a melhor combinação dos lances a serem realizados, se confrontando com diversas possibilidades. Seu avanço durante o jogo vai depender de sua decisão tomada a cada lance.

O jogador deve sempre verificar qual o melhor lance a ser realizado naquela posição, este número de lances cresce de acordo com as jogadas, o jogador passa, após certo tempo de prática, a descartar algumas possibilidades já estudadas e, com isso, agiliza sua análise contemplando apenas as possibilidades mais viáveis. Isto reforça a habilidade de observação, reflexão, análise e síntese.

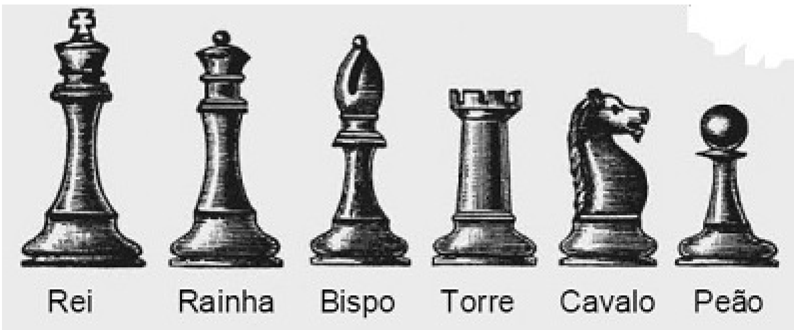
Na análise combinatória o xadrez muito pode contribuir, pois no decorrer da partida o jogador deve ser capaz de calcular com exatidão a manobra que realizará com suas peças, para que depois possa escolher qual o caminho mais rápido e eficaz a ser seguido, para obter maior sucesso. Exploraremos melhor esta contribuição com a proposta da Sequência Didática no capítulo 4.

2 O jogo de xadrez

Neste capítulo faremos a apresentação do jogo de xadrez, suas regras, os movimentos de cada peça e a relação que o jogo tem com a Matemática.

O Jogo de xadrez é um jogo de tabuleiro para dois jogadores, composto por 32 peças divididas entre brancas e pretas. Cada jogador inicia seu jogo com as seguintes peças: oito peões, duas torres, dois cavalos, dois bispos, um rei e uma rainha, totalizando 16 peças.

Figura 1 – Peças

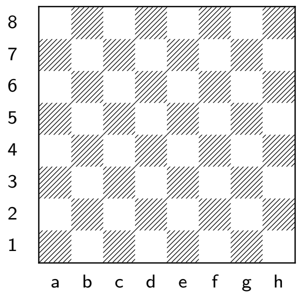


Fonte: https://3.bp.blogspot.com

O Jogo se inicia sempre pelo jogador que possui as peças brancas, mas isso não indica nenhuma vantagem significativa durante o decorrer do jogo. As peças são movidas uma de cada vez, alternando entre os jogadores.

O objetivo do jogo é combinar jogadas de modo a deixar o rei adversário sem escapatória, ou seja, sem nenhuma jogada. Quando uma peça ameaça o rei, essa jogada tem o nome de xeque, e pode acontecer várias vezes ao longo do jogo. Se o rei não conseguir escapar do xeque, então o agressor assegurou seu xeque-mate, e o jogo finaliza neste instante.

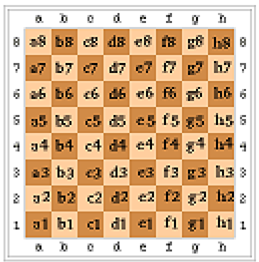
Muitos são os detalhes antes de se iniciar uma partida de xadrez, um deles é a posição do tabuleiro, uma vez que o tabuleiro é composto por 64 casas quadriculadas (32 brancas e 32 pretas) formando linhas colunas e diagonais. Sempre observar que a direita de cada jogador deve-se ter uma casa branca. Como no exemplo:



A partir do momento em que o tabuleiro é posicionado de forma correta, as peças serão dispostas obedecendo à seguinte ordem (linha, coluna): Peças brancas (Peões na linha 2, Torres nas casas **a1 e h1**, Cavalos nas casas **b1 e g1**, Bispos nas casas **c1 e f1**, Rainha na casa **d1** e Rei na casa **e1**. Peças pretas (Peões na linha 7, Torres nas casas **a8 e h8**, Cavalos nas casas **b8 e g8**, Bispos nas casas **c8 e f8**, Rainha na casa **d8** e Rei na casa **e8**.

Veja:

Figura 2



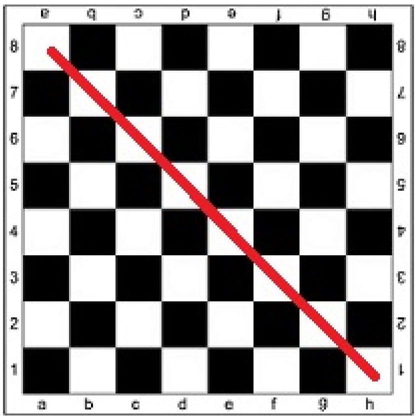
Fonte:https://upload.wikimedia.org/AlgebraicNotationOnChessboard.png

Figura 3 – Disposição das peças

Fonte:Bin im Garten/Focus stacking/

Assim como cada casa do tabuleiro tem sua coordenada (linha, coluna) as diagonais também podem ser nomeadas de acordo com sua casa de início e término. A casa de início é, por convenção, definida como aquela situada na fileira mais inferior. Por exemplo, abaixo está a figura representando a diagonal **h1**$\rightarrow$ **a8**

Figura 4 – diagonal



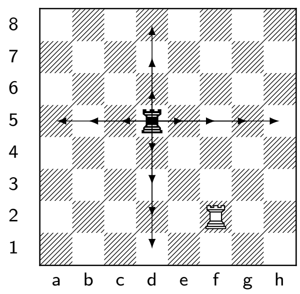
Fonte: O autor

É fácil observar que uma diagonal é sempre composta por casas de mesma cor. A seguir veremos como cada peça se desloca no tabuleiro.

2.1 A Torre

No jogo esta peça é rápida e forte, considerada a fortaleza do castelo. Seu movimento é horizontal ou vertical, livre pelas casas que não estão ocupadas no tabuleiro. O ponto fraco dela é que no início ela está impedida de se movimentar, e para isso é preciso deslocar o peão ou o cavalo que está na sua frente e ao lado, respectivamente, primeiro. O jogador que conseguir dar maior eficácia aos movimentos das torres acaba tendo uma grande vantagem.

Figura 5 – movimento da Torre

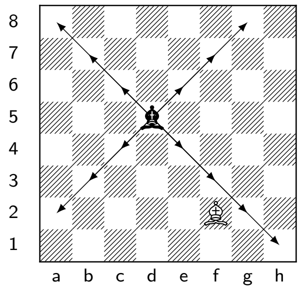


Fonte: O autor

2.2 o Bispo

O Bispo é a peça mais frágil do jogo, pois não é possível dar um xeque-mate apenas com um bispo e um rei. O movimento do bispo é diagonal, livre pelas casas vazias do tabuleiro. Existe uma restrição para o bispo, se ele começar o jogo numa casa branca, assim permanecerá até o final, ou seja ele só poderá se deslocar pelas casas brancas, da mesma forma se ele iniciar numa casa preta, assim permanecerá.

Figura 6 – movimento do Bispo



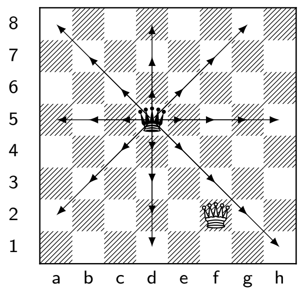
Fonte: O autor

2.3 A Rainha

Uma vez que o poder de uma peça do jogo de xadrez é dado pelo seu movimento ao longo do tabuleiro, a Rainha pode ser considerada a peça mais poderosa. Se ameaçada, a melhor opção é recuar para não perdê-la, pois isso pode atrapalhar de vez a estratégia.

O movimento da Rainha é uma combinação do movimento da Torre com o movimento do Bispo, ela pode se movimentar livremente pela horizontal, vertical ou diagonal, desde que nenhuma casa em seu caminho esteja ocupada por uma peça.

Figura 7 – movimento da Rainha



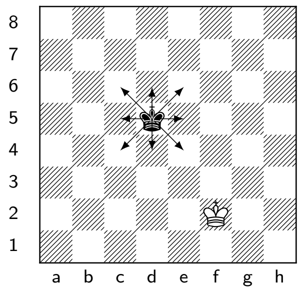
fonte: O autor

Quando a Rainha é posicionada no centro do tabuleiro, como mostra a figura 7, ela consegue cobrir 27 casas no tabuleiro e percorrer 8 direções diferentes, por isso ela é considerada a mais poderosa.

2.4 O Rei

O Rei é a peça mais importante do jogo, a peça mais alta do tabuleiro. Quando ele é atacado, deve-se procurar uma maneira de defendê-lo, colocando uma peça entre ele e a peça que ataca, capturando a peça que o está atacando ou fugindo para uma casa que não esteja ameaçada. Caso não consiga nenhuma das três opções o jogo acaba (xeque-mate). O movimento do Rei é bem limitado, ele pode se movimentar uma única casa por vez em qualquer direção, desde que essa casa não esteja ameaçada. O Rei nunca pode ser colocado em Xeque por si mesmo.

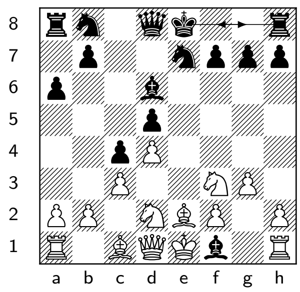
Figura 8 – movimento do Rei



Fonte: O autor

Existe uma combinação de jogada que pode ser efetuada entre o Rei e a Torre, chamada o Roque. É uma jogada especial que pode ser feita para proteger o Rei. Para isso, tanto o Rei quanto a Torre não podem ter sido movimentados ainda, não pode ter nenhuma peça entre eles e a casa destino do Rei não pode estar ameaçada. O movimento consiste no deslocamento lateral do rei na primeira fileira em duas casas na direção da torre com a qual desejar "rocar", e a torre escolhida passa através do rei permanecendo na primeira casa após o "salto".

Figura 9 – Roque



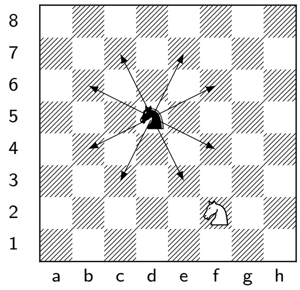
Fonte: O autor

2.5 O Cavalo

O Cavalo é uma peça muito importante no jogo, é a única que pode saltar outras peças. Quando um Rei é ameaçado pelo cavalo ele não tem opção de colocar outra peça como escudo, restando duas opções para escapar do xeque- mate: ou captura o cavalo com outra peça ou foge com o Rei para outra casa não ameaçada.

O movimento do cavalo é complexo, pois ele se movimenta em formato de L pelo tabuleiro em qualquer direção, duas casas na vertical e uma na horizontal, uma casa na vertical e duas na horizontal ou qualquer combinação semelhante.

Figura 10 – movimento do Cavalo



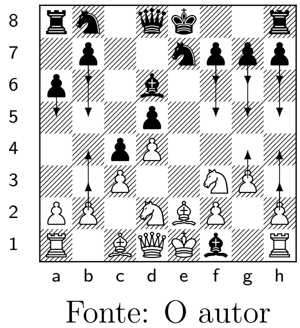
Fonte: O autor

Uma maneira de observar se sua jogada com o cavalo está correta é verificar que ele sempre parte de uma casa de uma cor para outra de cor diferente.

2.6 O Peão

O Peão é a única peça do xadrez que não pode voltar em direção contrária ao movimento. Os peões se movimentam, uma única casa na vertical, para frente, salvo apenas, na primeira jogada de cada um deles, onde poderá saltar uma casa. É também a única peça que captura outra peça com um movimento diferente ao seu habitual. A captura ocorre de forma diagonal, para um lado ou para o outro.

Figura 11 – Movimento do Peão



Fonte: O autor

Durante uma partida de xadrez os Peões, ao atingirem a linha 8 do tabuleiro, transformam-se em qualquer outra peça, excluindo o Rei, movimento chamado de coroação ou promoção; o Peão será substituído imediatamente por outra peça (Cavalo, Bispo, Torre ou Rainha) e deverá ser removido do tabuleiro

2.7 A Matemática por trás do jogo de Xadrez

O Jogo de xadrez é muito utilizado por Professores de Matemática em todo o mundo, como forma de aplicar e relacionar conteúdos da disciplina, levando-os a obterem resultados surpreendentes. Vejamos alguns exemplos:

Assim como a Matemática, o jogo de xadrez é amado e odiado por muitos, por ser visto como um jogo difícil e cheio de regras. Mas não é só esta relação que os dois têm em comum.

Começando pelo tabuleiro, que utiliza a forma geométrica de um quadrado 8x8 que resulta em 8^2= 64 quadrados menores (casas). Já na apresentação do tabuleiro, podem ser trabalhados alguns conceitos de potenciação, figuras geométricas e áreas, desde as séries iniciais.

Cada linha é simbolizada por uma letra (a,b,c,d,e,f,g,h) e cada coluna por um número (1,2,3,4,5,6,7,8), podendo facilmente relacioná-lo com um plano cartesiano de coordenadas (x,y), onde cada casa pode ser um par ordenado. Por exemplo: as casa a3, b4, g6. Desta maneira cada jogada pode ser nomeada, levando o jogador a se localizar de uma melhor forma no tabuleiro.

As progressões também estão presentes no jogo de xadrez. Desde o conto do seu surgimento, em relação ao pedido do criador do jogo, o sábio indiano Sissa, que pediu ao rei um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos de trigo pela segunda casa, quatro pela terceira e assim por diante, até a última casa do tabuleiro. Para calcular a quantidade total, o jogador se depara com a seguinte soma $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^{63}$, que é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica, que pode ser tratado no 1º ano do Ensino Médio.

As diagonais também tem uma relação com as Progressões, pois assim como as casas, elas são nomeadas da seguinte maneira: A diagonal $h1 \rightarrow a8$ é uma diagonal composta pelas casas (h1, g2, f3, e4, d5, c6, b7 e a8) e podemos observar também que muitas dessas casas fazem parte de mais de uma diagonal, levando a relacionar o conteúdo a análise combinatória.

Enfim, vários são os conceitos matemáticos que podem ser trabalhados com o auxílio do jogo de xadrez. Neste trabalho, exploraremos tópicos de Análise combinatória, como veremos mais adiante.

3 CONCEITOS INICIAIS DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Neste capítulo veremos os conceitos inicias dos conteúdos de Análise combinatória exemplos e aplicações, voltados para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II. Este capítulo tem o objetivo de diminuir dificuldades encontradas por professores no ensino e aprendizagem deste conteúdo matemático. Esperamos que sirva de auxílio para que o professor possa trabalhar as atividades que serão propostas na Sequência Didática.

A análise combinatória é a área da Matemática responsável pela análise das possibilidades e das combinações de um evento. É um conjunto de métodos e procedimentos que possibilita contar elementos de um determinado grupo.

À primeira vista pode parecer desnecessária a existência desses métodos, quando pensamos num grupo com quantidade pequena de elementos. Porém, a necessidade de tais métodos faz-se necessária quando tratamos de conjuntos com uma quantidade grande de elementos.

3.1 O Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) consta de duas partes, Parte I e Parte II, ligeiramente diferentes. Antes de enunciar e demonstrar o PFC, precisaremos de dois lemas essenciais para este propósito. Mas antes, vejamos alguns exemplos que nos ajudarão a entender o PFC.

Exemplo 3.1.1. *Seja A um conjunto de números de dois algarismos distintos formados a partir dos dígitos 2,4 e 6. Então:*

$$A = \{24, 26, 42, 46, 62, 64\}$$

e $\#A = 6$, ou seja, o conjunto A tem 6 elementos .

Exemplo 3.1.2. *Seja B o um conjunto formado pelos anagramas da palavra ARI. Então:*

$$B = \{ARI, RAI, IAR, AIR, IRA, RIA\} \quad \#B = 6$$

O conjunto B tem 6 elementos.

Exemplo 3.1.3. *Seja C um conjunto de números de três dígitos, todos distintos, formados a partir dos algarismos: 1,2,3,4,5,6,7,8. Então:*

$$C = \{123, 124, 125, ..., 875, 876\}$$

Pode-se perceber que é bem trabalhoso escrever todos os elementos desse conjunto e depois numerá-los, corre-se o risco de esquecer algum elemento ou repetí-los. Por isso, abaixo veremos técnicas que nos permitirão chegar ao resultado exato, e poderemos concluir que o conjunto C tem 336 elementos.

Lema 3.1. *Consideremos os conjuntos* $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ *e* $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$. *Podemos formar* $m \cdot n$ *pares ordenados* (a_i, b_j) *onde* $a_i \in A$ *e* $b_j \in B$.

Demonstração

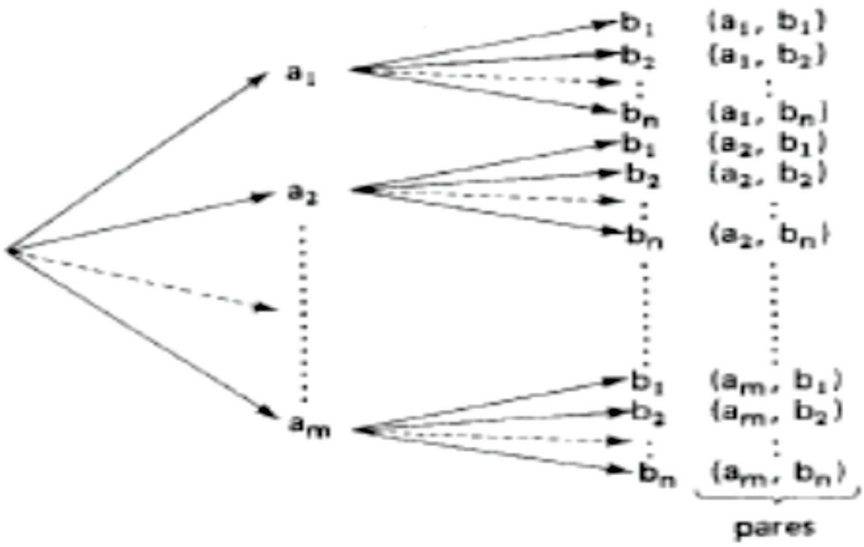
Fixamos o primeiro elemento do par e façamos variar o segundo. Temos:

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \cdots, (a_1, b_n) \to n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_2, b_n) \to n \text{ pares} \\ \quad \vdots \quad , \quad \vdots \quad , \quad \cdots , \quad \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \cdots, (a_m, b_n) \to n \text{ pares} \end{cases}$$

O número de pares ordenados é então $\underbrace{n + n + \cdots + n}_{m \text{ vezes}} = m \cdot n$

Uma outra forma de visualizarmos os pares ordenados é através do diagrama abaixo, conhecido como *diagrama sequência* ou *diagrama da árvore.*

Figura 12



Fonte: retirada do livro: Fundamentos de Matemática elementar 5

Em notação matemática, vamos considerar que um determinado evento possa ser realizado em duas etapas, digamos, de m e n maneiras distintas. Então o total de possibilidades será calculado multiplicando m por n, $(m \cdot n)$.

A seguir um exemplo resolvido utilizando o diagrama da Árvore para que possamos entender o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Exemplo 3.1.4. *Jeniffer irá participar da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale compras no valor de R\$1000,00. Ganhará o desafio o primeiro participante que conseguir fazer o maior número de combinações como kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisetas de cores distintas, quatro saias e dois pares de sapatos de cores distintas do tipo salto alto. De quantas maneiras diferente Jeniffer poderá combinar todo o vestuário que está no kit de roupa?*

Figura 13

Fonte: Retirada do site https://www.infoescola.com, 2020

Quando realizamos a contagem verificamos que tem 48 combinações possíveis. Como veremos mais adiante, outra maneira de chegar a esse resultado é por meio do Princípio Fundamental da Contagem, que estabelece que:

(total de camisetas)$\times$ (total de saias) $\times$ (total pares de sapatos) $=$ total de combinações possíveis.

$$6 \times 4 \times 2 = 48$$

Portanto, é possível fazer 48 combinações diferentes de roupas utilizando o kit oferecido pela loja.

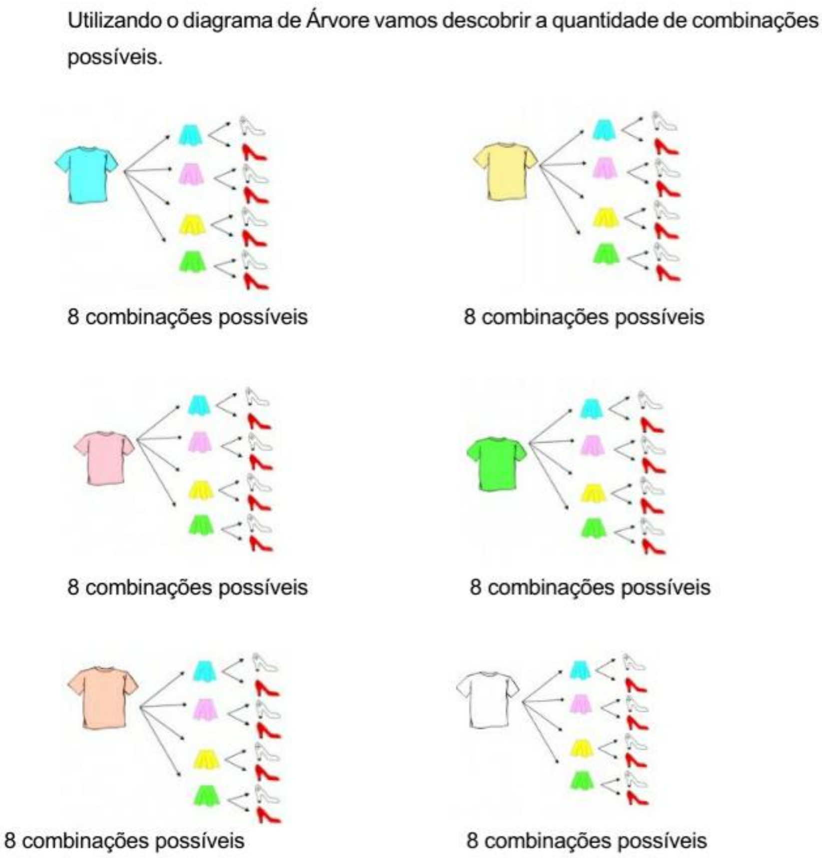
Lema 3.2. *O número de pares ordenados* (a_i,a_j) *tais que* $a_i, a_j \in A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$, *e* $a_i \neq a_j$ *(para* $i \neq j$*) é* $m(m-1)$.

Demonstração:

Fixemos o primeiro elemento do par, e façamos variar o segundo. Teremos:

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1,a_2),(a_1,a_3),\cdots,(a_1,a_m) \rightarrow (m-1) \text{ pares} \\ (a_2,a_1),(a_2,a_3),\cdots,(a_2,a_m) \rightarrow (m-1) \text{ pares} \\ \quad \vdots \quad , \quad \vdots \quad , \quad \cdots, \quad \vdots \\ (a_m,a_1),(a_m,a_2),\cdots,(a_m,a_{m-1}) \rightarrow (m-1) \text{ pares.} \end{cases}$$

Figura 14



Fonte: Retirada do site https://www.infoescola.com, 2020

Logo, o número de pares ordenados será :

$$\underbrace{(m-1)+(m-1)+\cdots+(m-1)}_{m \text{ vezes}} = m \cdot (m-1)$$

Exemplo 3.1.5. *Quantos números com dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$*?*

Solução: Cada número pode ser considerado um par de dígitos (a, b) onde $a \in \{1, 2, 3, \cdots, 8\}$, $b \in \{1, 2, 3, \cdots, 8\}$ e $a \neq b$,. Assim, pelo Lema anterior, o resultado procurado será $8 \cdot 7 = 56$.

Finalmente, temos condições de enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1 (Parte I - Princípio Fundamental da Contagem)**.** *Sejam* $A_1, \cdots, A_r$ *conjuntos não vazios e finitos. Seja* $\#A_i = n_i$ *a cardinalidade do conjunto* A_i*, para* $i = 1, \cdots, r$*. O conjunto*

$$A = \{(a_1, \cdots, a_r) : a_i \in A_i\}$$

tem cardinalidade $\#A = n_1 \cdot n_2 . \cdots . n_r$*.*

Demonstração: Aplicaremos o Principio de Indução Finita sobre r . Para $r = 2$, teremos, pelo Lema (3.1), que o número de r-uplas ordenadas é $n_1 \cdot n_2$, isto é, $\#A = n_1 \cdot n_2$, isto prova a nossa base de indução.

Suponha agora que tenhamos $(r-1)$ conjuntos não-vazios e finitos, $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$. Por hipótese de indução $\#A\{(a_1, a_2, \cdots, a_{r-1})\}$ é $n_1.n_2.\cdots.n_{r-1}$. Vamos provar agora que o resultado é válido para r conjuntos $r \geq 2$. Tomemos as sequências de $(r-1)$ elementos, $(a_1, a_2, .\cdots.a_{r-1})$, onde todo $a_i \in A_i$ para $i = 1, \cdots, r-1$. Observe agora que cada r-upla $(a_1, \cdots, a_r)$ consiste em um par formado por uma $(r-1)$-upla $(a_1, a_2, .\cdots.a_{r-1})$ e um elemento a_r pertencente ao conjunto A_r. Logo, de acordo com o Lema (3.1), o número de sequências do tipo $(a_1, a_2, .\cdots.a_r)$ será $(n_1.n_2.\cdots.n_{r-1}) \cdot n_r = n_1.n_2.\cdots.n_{r-1}.n_r$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 3.1.6. *Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?*

Solução: Indiquemos por K o resultado cara e C o resultado coroa. Queremos o número de triplas ordenadas (a, b, c) onde $a \in \{K, C\}$, $b \in \{K, C\}$ e $c \in \{K, C\}$, logo, o resultado procurado é:

$$2.2.2 = 8$$

Teorema 3.2 (Parte II - O Princípio Fundamental da Contagem)**.** *Seja A um conjunto não-vazio e finito, com n elementos $(n \geq 2)$. Então, o conjunto:*

$$X = \{(a_1, \cdots, a_r) : a_i \in A \text{ e } a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j, \text{ onde } 1 \leq i,\ j \leq r\}$$

tem cardinalidade $\#X = n.(n-1).(n-2).\cdots(n-(r-1))$.

Demonstração: Aplicaremos o Princípio de Indução Finita sobre r. Para o caso em que $r = 2$, temos pelo Lema (3.2) que o número de r-uplas ordenadas será $n.(n-1)$, ou seja $2.1 = 2$. Isso prova a base de indução. Agora vamos assumir que o resultado vale para r e vamos demonstrar que vale para $r+1$. Segue da hipótese de indução que o conjunto:

$$X^* = \{(a_1, \cdots, a_r) : a_i \in A \text{ e } a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j\}$$

tem cardinalidade $\#X^* = n.(n-1).(n-2).\cdots.[n-(r-1)]$.Observamos agora que cada $(r+1)$-upla $(a_1, \cdots, a_{r+1})$ consiste de um par ordenado formado por uma r-upla $(a_1, \cdots, a_r)$ ∈X* e um elemento a_{r+1} pertencente ao conjunto A. Logo, de acordo como Lema (3.1), o número de $(r+1)$-uplas do tipo $(a_1, \cdots, a_{r+1})$ será:

$\#X^* = \#A.n.(n-1).(n-2).\cdots.[n-(r-1)]$ e portanto

$$\#X^* = (n+1).n.(n-1).(n-2).\cdots.[n-(r-1)]$$

,

Como queríamos demonstrar.

Exemplo 3.1.7. *De quantas maneiras três pessoas podem ficar em fila indiana?*

Solução:

Cada modo corresponde a uma tripla ordenada de pessoas. Desta forma, o resultado procurado é:

$3.2.1 = 6$.

Exemplo 3.1.8. *Um shopping center possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do shopping center, pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?*

Solução:

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (PFC), a pessoa terá $5.4.3 = 60$ maneiras de atingir o segundo pavimento do shopping.

3.2 Arranjos e Permutações

Veremos agora como o Princípio Fundamental da Contagem tem consequências diretas nas fórmulas matemáticas que conhecemos como arranjos e permutações.

Definição 3.2.1 (Arranjo)**.** *Seja M um conjunto com n elementos, digamos $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Chamamos de arranjo dos n elementos tomados p a p, $(1 \leq p \leq n)$ a qualquer sequência de p elementos formada com elementos de M todos distintos.*

Exemplo 3.2.1. *Considere o conjunto $M = \{a, b, c, d\}$. Os arranjos dos quatro elementos de M tomados dois a dois, são os pares ordenados (x, y) formados com elementos distintos de M. Pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte II), o número de pares ordenados é:* $4.3 = 12$.

Fórmula do número de Arranjos

Seja $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e indiquemos por $A_{n,p}$ o número de arranjos dos n elementos tomados p a p.

Pelo Princípio Fundamental da Contagem (parte II), o número de arranjos $A_{n,p}$ será:

$$\mathrm{A}_{n,p} = \underbrace{n.(n-1).\cdots.[n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}$$

Em particular, se $p = 1$, é fácil perceber que $A_{n,1} = n$.

Notemos ainda que, de acordo com a definição de arranjo, temos necessariamente que $1 \leq p \leq n$.

Exemplo 3.2.2. *De um baralho de 52 cartas, são retiradas 3 cartas, sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis de se obter?*

Solução:

Notemos que cada resultado é uma tripla ordenada de cartas (x, y, z) onde x é a primeira carta retirada, y a segunda e z a terceira. Observemos que x, y, e z são todas distintas, visto que as retiradas são sem reposição. Logo, o resultado que queremos é o arranjo de 52 elementos 3 a 3, isto é:

$$\mathrm{A}_{52,3} = \underbrace{52 \cdot 51 \cdot 50}_{\text{3 fatores}} = 132600 \text{ sequências.}$$

Definição 3.2.2 (Permutação)**.** *Seja M um conjunto com n elementos, digamos,* $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. *Chamamos de permutação dos n elementos a todo arranjo em que* $p = n$

Exemplo 3.2.3. *Seja* $M = \{a, b, c\}$. *As permutações dos elementos de M, são todos os arranjos constituídos de 3 elementos. São eles:*

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, b, a), (b, c, a), (a, c, b), (c, a, b).$$

Fórmula do número de Permutações Seja M o conjunto $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Denotaremos por P_n o número de permutações dos n elementos de M. Então, pela definição e pela fórmula do número de arranjos, concluímos que:

$$P_n = A_{n,n} = n.(n-1).(n-2).\cdots.3.2.1$$

No exemplo anterior, tínhamos $n = 3$, logo $P_3 = 3.2.1 = 6$.

Se $n = 1$, é fácil perceber que $P_1 = 1$.

Exemplo 3.2.4. *De quantas formas 6 pessoas podem se posicionar em fila indiana?*

Solução:

Notemos que cada forma de ficar em fila indiana, é uma permutação das 6 pessoas. O número de modos dessas pessoas ficarem em fila indiana é dado por:

$$P_6 = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Definição 3.2.3 (Permutação com repetição). *A permutação com repetição é um tipo de permutação em que existem elementos repetidos.*

Exemplo 3.2.5. *Qual a quantidade de anagramas da palavra ANA?*

Solução;

Permutando as letras da palavra ANA temos:

ANA

AAN

NAA

Logo, são 3 anagramas.

Podemos calcular a quantidade de permutações com repetições aplicando a seguinte fórmula:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3\cdots} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...}$$

onde:

$P_n^{n_1,n_2,n_3,\cdots}$= *Quantidade de permutações*

n = *quantidade de elementos*

$n_1, n_2, n_3, ...$ = *elementos repetidos*

Exemplo 3.2.6. *Calcular a quantidade de anagramas que podem ser formadas com as letras da palavra MATEMATICA:*

Solução

Como na palavra MATEMATICA possui letras repetidas, então utilizaremos a fórmula de permutação com repetição:

$$P_n^{n_1,n_2,n_3\cdots} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...}$$

Onde:

n= 10 elementos (quantidade de letras da palavra)

$n_1 = 2$ *(duas letras M)*

$n_2 = 2$ *(duas letras T)*

$n_3 = 3$ *(três letras A)*

Desta forma temos a seguinte solução:

$$P_{10}^{2,2,3} = \frac{10!}{2!2!3!}$$

$$P_{10}^{2,2,3} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.2.1.3.1} = 151200 \ anagramas$$

Afim de simplificar as fórmulas do número de arranjos e do número de permutações, vamos definir o símbolo fatorial.

Definição 3.2.4 (Fatorial)**.** *Seja n um número inteiro não negativo ($n \in \mathbb{N}$). Definimos o fatorial de n e indicamos por $n!$ através da relação:*

$$n! = n.(n-1).(n-2).\cdots.3.2.1,$$

para todo $n \geq 2$, $1! = 1$ e $0! = 1$.

Exemplo 3.2.7.

$$3! = 3.2.1 = 6$$

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

O cálculo de $n!$ fica mais difícil a medida que n aumenta (por exemplo, $10! = 3628800$). Entretanto, muitos desses cálculos podem ser facilitados se notarmos que:

$$(n+1)! = (n+1).\underbrace{n.(n-1).\cdots.3.2.1}_{n!} = (n+1).n!$$

Exemplo 3.2.8. *a)* $\dfrac{20!}{18!} = \dfrac{20.19.18!}{18!} = 20.19 = 380$

b) $\dfrac{50!}{2!.48!} = \dfrac{50.49.48!}{2.1.48!} = \dfrac{50.49}{2} = 1225$

Vejamos agora a definição de combinação, bem como exemplos e a fórmula para o cálculo do número de combinações.

3.3 Combinações Simples

Seja M um conjunto com n elementos, isto é,
$M = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. Chamamos de combinações simples dos n elementos, tomados p a p, aos subconjuntos de M constituídos de p elementos.

Aqui, vale ressaltar a diferença entre uma combinação (que é um conjunto) e um arranjo (que é uma sequência). Notemos que, numa combinação, não importa a ordem dos elementos, enquanto num arranjo, a ordem que os elementos se apresentam diferenciam a sequência.

Exemplo 3.3.1. *Considere o conjunto* $M = \{a, b, c, d\}$*. As combinações destes* 4 *elementos, tomados dois a dois, são os subconjuntos:*

$$\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{a, d\}.$$

Podemos observar que $\{a, b\} = \{b, a\}$ *pois, de acordo com a definição, combinação é um conjunto, portanto, não depende da ordem dos elementos.*

Cálculo do número de combinações

Na combinação simples, a ordem dos elementos não é relevante. São arranjos que se diferenciam apenas pela natureza de seus elementos.

Sendo um conjunto M, formado por n elementos, denotamos por $C_{n,p}$ o número de subconjuntos de M com p elementos. Podemos calcular a quantidade desses subconjuntos a partir da fórmula:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

para $n > p$ e $C_{n,p} = 1$ para $n = p$.

No exemplo 3.2.9, em que M é um conjunto formado por 4 elementos, temos que o total de subconjuntos formados por 2 elementos é dado pela combinação de 4 elementos combinados 2 a 2. Utilizando a fórmula acima, teremos:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = \frac{12}{2} = 6.$$

Exemplo 3.3.2. *Em um curso de língua estrangeira estudam trinta alunos. O coordenador do curso quer formar um grupo de três alunos para realizar um intercâmbio em outro país. Quantas possíveis equipes podem ser formadas?*

O número de possíveis grupos pode ser dado pela expressão:

$$C_{30,3} = \frac{30!}{3!(30-3)!} = \frac{30.29.28.27!}{3.2.1.27!} = \frac{24360}{6} = 4060.$$

Exemplo 3.3.3. *Sabendo que um time de futebol de salão é composto por 5 jogadores. De quantas maneiras posso formar um time, dispondo de 8 jogadores?*

Independente da ordem escolhida dos jogadores, o time será o mesmo, então trata-se de um problema de combinação. Logo:

$$C_{8,5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8.7.6.5!}{5!3.2.1} = \frac{336}{6} = 56 \; times$$

4 PROPOSTA DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo será proposta uma sequência didática para as turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, para assimilar os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem, fatorial, Arranjos, Permutação e Combinação simples. Pretendemos auxiliar o aluno no entendimento dos conceitos iniciais da Análise Combinatória, ao tempo em que correlacionamos os mesmos com o jogo de xadrez.

Esta sequência é composta de três etapas: na primeira etapa, o Professor irá abordar todas as regras e movimentos de cada peça do xadrez, e terá duração de duas aulas de 50 minutos. Na segunda etapa, serão abordados os conceitos iniciais da análise combinatória, de maneira dialogada e através de resolução de problemas. Esta etapa terá duração de quatro aulas de 50 minutos. Na terceira etapa, utilizaremos o jogo de xadrez para por em prática todos os conhecimentos adquiridos nas aulas anteriores. Aqui, os alunos irão se deparar com várias questões que envolvem a análise combinatória e o xadrez.

4.1 Primeira etapa - Aprendendo a jogar xadrez

PÚBLICO ALVO: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

CONTEÚDO GERAL: REGRAS E MOVIMENTOS DO XADREZ

OBJETIVO GERAL: Levar o aluno a ter acesso ao jogo de xadrez, como instrumento educacional, fazendo com que desenvolva seu raciocínio lógico e intelectual.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

$\Rightarrow$ Propiciar a prática do xadrez;

$\Rightarrow$ Desenvolver habilidades de atenção, memória e raciocínio lógico;

$\Rightarrow$ Contribuir para o desenvolvimento humano, em busca de qualidade de vida;

$\Rightarrow$ Diminuir taxas de reprovação e evasão escolar;

$\Rightarrow$ Contribuir como subsídio às outras disciplinas;

METODOLOGIA: Na primeira aula será dado para cada aluno um questionário simples em relação ao seu conhecimento sobre o xadrez, em seguida será exibido num slide o tabuleiro do jogo de xadrez, a quantidade de peças,a forma como é montada cada uma delas e seus movimentos. Na segunda aula, será distribuído os tabuleiros para os alunos, que em dupla poderão montar e começar efetuando as primeiras jogadas.

Conteúdo do slide:

O tabuleiro de xadrez;

Os movimentos de cada peça;

Como iniciar a partida?

Como capturar uma peça?

O que é um xeque?

O que é um xeque-mate?

O que é um Roque?

Promoção do peão;

Quando ocorre empate;

MATERIAIS:

Data show e tabuleiros de xadrez

DURAÇÃO: Duas aulas de 50 minutos

AVALIAÇÃO:

Será avaliado cada aluno por meio de observação em relação ao desenvolvimento ao longo do jogo.

Questionário

1. Alguma vez você já jogou xadrez?

   a) Sim

   b) Não

2. Você conhece as peças do jogo de xadrez?

   a) Sim, todas

   b) Não

   c) Apenas algumas

3. Você conhece as regras do jogo de xadrez?

   a) Sim

   b) Não

   c) Apenas algumas

4. Você acha que a matemática ensinada na escola é importante e útil para o seu dia-a-dia? Explique.

5. Algum professor seu de matemática já utilizou algum jogo nas aulas?

6. Você acredita que aprender e jogar xadrez pode lhe ajudar com a Matemática? Por quê?

4.2 Segunda etapa - Análise Combinatória

Nesta etapa será explicado, de maneira dialogada, os principais conceitos da análise combinatória. Também será proposto, em cada aula, que o aluno resolva uma lista de questões para fixação do conteúdo, que será corrigido na aula seguinte, com o intuito de que o aluno desenvolva as próximas etapas sem maiores dificuldades.

PLANEJAMENTO:

PÚBLICO ALVO: Alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

CONTEÚDO GERAL: Análise Combinatória.

CONTEÚDOS ESPECÍFICOS:

⇒ Princípio Fundamental da Contagem;

⇒ Arranjos e Permutações;

⇒ Fatorial;

⇒ Combinações.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: As quatro operações elementares (Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão).

OBJETIVO GERAL:

Compreender que a Análise Combinatória está inserida no nosso meio, como um ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente em escolher, agrupar e contar os elementos de um conjunto. Possui aplicação direta no cálculo das probabilidades, sendo instrumento de vital importância para as ciências aplicadas, como a Medicina, a Engenharia e a Estatística entre outras.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

⇒ Utilizar o Principio multiplicativo para resolver problemas de contagem;

⇒ Resolver Problemas de Contagem utilizando noções de Arranjos;

⇒ Diferenciar Arranjos Simples e Combinações;

⇒ Desenvolver o Raciocínio Lógico;

⇒ Utilizar fórmulas para resolver problemas de combinações simples.

METODOLOGIA:

Inicialmente, deve-se propor o seguinte desafio: "Dispondo dos algarismos $0, 1, 2, ..., 9$, quantas são as possíveis senhas de quatro dígitos?". A partir daí, abordar todos os casos possíveis para o problema, explorando assim o conhecimento prévio dos alunos, promovendo o relacionamento entre os alunos e a discussão de ideias.

Fazer a explanação teórica do conteúdo proposto, seguido de exemplos e exercícios para uma melhor fixação do mesmo.

MATERIAIS:

Quadro branco, Data show, pincel, apagador , livro didático e o jogo de Xadrez.

DURAÇÃO:

8 aulas com 50 minutos cada

⇒ 1ª e 2ª aula (Princípio Fundamental da Contagem);

⇒ 3ª e 4ª aula (Fatorial e Permutações);

⇒ 5ª e 6ª aula (Arranjos);

⇒ 7ª e 8ª aula (Combinações);

AVALIAÇÃO:

Observar a participação dos alunos no decorrer das aulas. Analisar o processo ensino aprendizagem dos mesmos e avaliar a compreensão e o domínio do conteúdo através das atividades escritas.

4.2.1 Atividade para a primeira aula da segunda etapa

1. **Dispondo dos algarismos 0,1,2,...,9 , quantas são as possíveis senhas de quatro dígitos"?**

Solução:

Como a senha pode se iniciar com qualquer um dos 10 algarismos, então teremos 10 opções para o primeiro dígito.

Observa-se também que a senha pode ter algarismos repetidos, ou seja, as senhas 0000, 1111, ..., 9999, são senhas possíveis. Desta forma teremos 10 maneiras de escolha de um algarismo para cada dígito.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem teremos $10.10.10.10 = 10000$ *senhas possíveis.*

2. **Em uma competição de xadrez existem 8 jogadores. De quantas formas diferentes poderá ser formado o pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares)?**

   Como, na primeira aula, não foi passada nenhuma fórmula para os alunos ainda, espera-se a seguinte solução:

   Solução:

   Os alunos irão observar que a primeira posição desse pódio pode ser formada por qualquer um dos 8 jogadores.

   Após a escolha da primeira posição restarão 7 jogadores para a segunda posição e 6 para a terceira.

   Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem teremos $8.7.6 = 336$ *formas.*

3. **Uma lanchonete tem uma promoção de combo com preço reduzido em que o cliente pode escolher 4 tipos diferentes de sanduíches, 3 tipos de bebida e 2 tipos de sobremesa. Quantos combos diferentes os clientes podem montar?**

   Assim como os problemas anteriores, espera-se que os alunos utilizem o Princípio Fundamental da Contagem.

   Solução:

   Como o combo é composto por um sanduíche, uma bebida e uma sobremesa. Temos 4 opções para a escolha do sanduíche, 3 opções para a escolha da bebida e 2 opções para a escolha da sobremesa.

   Logo teremos, $4.3.2 = 24$ *combos diferentes.*

4. **Uma prova possui 5 questões de múltipla escolha, onde cada uma possui 4 opções distintas. De quantas maneiras a prova pode ser resolvida?**

   Solução: Os alunos irão observar que para cada questão temos 4 opções, logo pelo Princípio Fundamental da Contagem teremos $4.4.4.4.4 = 1024$ *maneiras.*

4.2.2 Atividade para terceira aula da segunda etapa

1. **Resolva:**

   a) $5!$

   b) $7!$

   c) $\frac{6!}{3!}$

   d) $\frac{10!}{6!}$

   e) $\frac{50!}{48!}$

   Solução:

   a) temos que $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

   b) $7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5040$

   c) temos que $\frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$

   d) temos que $\frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040$

   e) temos que $\frac{50!}{48!} = \frac{50.49.48!}{48!} = 50.49 = 2450$

2. **Simplifique a expressão:**

$$\frac{n!}{(n-2)!}$$

   Solução:

   Temos que
   $$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n.$$

3. **Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA?**

   Solução: Na palavra ESCOLA não temos letras repetidas, então basta permutar as 6 letras da palavra, logo a quantidade de anagramas é: $P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$ *anagramas.*

4. **Quantos são os anagramas da palavra BANANA?**

   Solução: Como a palavra BANANA possui 2 letras que se repetem, a letra A repete três vezes e a letra N repete duas vezes. Devemos então calcular a quantidade de anagramas da seguinte maneira: $\frac{6!}{3!2!} = \frac{6.5.4.3!}{3!2!} = \frac{6.5.4}{2.1} = \frac{120}{2} = 60$ *anagramas.*

5. **Dispondo de um banco com 5 lugares, de quantos modos 5 pessoas podem se sentar para tirar uma foto?**

   Solução: Como cada pessoa pode se sentar em qualquer lugar desse banco, para sabermos de quantos modos elas podem se sentar, basta permutar essas 5 pessoas, então teremos: $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1=$ *120 modos.*

4.2.3 Atividade para quinta aula da segunda etapa

1. **Uma família é composta por seis pessoas (pai, mãe e quatro filhos) que nasceram em meses diferentes do ano. Calcule as sequências dos possíveis meses de nascimento dos membros dessa família.**

   Solução: Sabemos que 1 ano é composto de 12 meses, então devemos determinar o número de sequência através do arranjo de 12, tomados 6 a 6.

   Como temos 12 elementos tomados 6 a 6, então:

   $$A_{12,6} = 12.11.10.9.8.7 = 665280.$$

   Logo, temos 665280 sequências possíveis.

2. **Em uma urna de sorteio de prêmios existem dez bolas enumeradas de 0 a 9. Determine o número de possibilidades existentes num sorteio cujo prêmio é formado por uma sequência de 6 algarismos.**

   Solução: Como são 10 bolas numeradas de 0 a 9, devemos escolher 6 entre as 10.

   Como temos 10 elementos tomados 6 a 6, então:

   $$A_{10,6} = 10.9.8.7.6.5 = 151200.$$

   Logo, o sorteio terá 151200 possibilidades de sequências de 6 algarismos.

3. **(PM SC – Cesiep 2011) Em uma corrida com 10 atletas competindo, pergunta-se: de quantos modos distintos podem ser conquistadas as medalhas de Ouro, Prata e Bronze?**

   Solução: Como a ordem para as 3 primeiras posições importa, utilizaremos a fórmula de arranjos simples de 10 elementos tomados 3 a 3.

   $$A_{10,3} = 10.9.8 = 720.$$

   Logo, teremos 720 modos distintos.

4. **(Liquigás – CESGRANRIO 2012) Em uma pequena sala de projeção, há cinco cadeiras dispostas em linha, lado a lado, e numeradas de 1 a 5.**

   Figura 15

   Fonte: Retirada do site https://cdn-0.sabermatematica.com.br , 2020

   Quatro pessoas vão ocupar quatro dessas cadeiras. As possíveis ocupações das cadeiras distinguem-se não só pela cadeira vazia, mas, também, pela disposição das pessoas nas cadeiras ocupadas.De quantos modos as cadeiras podem ser ocupadas pelas quatro pessoas?

   Solução: Essa questão consiste da escolha de 4 lugares entre as 5 cadeiras possíveis. Como a ordem dos lugares é importante, utilizaremos a fórmula de arranjos simples de 5 elementos tomados 4 a 4. Dessa forma, teremos:

   $$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5.4.3.2.1!}{1!} = 5.4.3.2 = 120.$$

   Logo, teremos 120 modos distintos.

4.2.4 Atividade para sétima aula da segunda etapa

1. **Em uma turma com 20 alunos, de quantas maneiras eu posso escolher um grupo com 5 alunos para apresentar um trabalho?**

Solução: Como a ordem dos componentes desse grupo não importa, então temos um problema de combinação. Devemos tomar 20 elementos escolhidos 5 a 5. Utilizaremos a fórmula de combinação simples de n elementos combinados p a p.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Assim, teremos:

$$C_{20,5} = \frac{20!}{5!(20-5)!} = \frac{20.19.18.17.16.15!}{5!15!} = \frac{20.19.18.17.16}{5.4.3.2.1} = \frac{1860480}{120} = 15504.$$

Ou seja, de 15504 maneiras.

2. **Um pesquisador científico precisa escolher três cobaias, num grupo de oito cobaias. Determine o número de maneiras que ele pode realizar a escolha.**

   Solução: Como a ordem das cobaias não importa, trata-se de um problema de combinação de 8 elementos escolhidos 3 a 3. Logo:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8.7.6.5!}{3!5!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = \frac{336}{6} = 56 \ maneiras.$$

3. **De quantas formas podemos escolher 4 cartas num baralho de 52 cartas sem levarmos em consideração a ordem das mesmas?**

   Solução: Como a ordem das cartas não é relevante, então temos um problema de combinação de 52 elementos escolhidos 4 a 4, logo:

$$C_{52,4} = \frac{52!}{4!(52-4)!} = \frac{52.51.50.49.48!}{4!48!} = \frac{52.51.50.49}{4.3.2.1} = \frac{6497400}{24} = 270725 \ formas.$$

4. **Um Professor de Matemática aplicou uma prova contendo 10 questões, onde o aluno precisava escolher 6 delas para responder. De quantas maneiras o aluno poderia fazer tal escolha?**

   Solução: A ordem da escolha das questões não importa, ou seja, é um problema de combinação simples de 10 elementos escolhidos 6 a 6. Logo:

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!4!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = \frac{5040}{24} = 210 \ maneiras.$$

4.3 Terceira etapa

Nessa etapa abordaremos o jogo de Xadrez, com o intuito de promover uma melhor assimilação dos conceitos e fórmulas da Análise Combinatória, vistos nas últimas aulas.

A seguir veremos questões problemas de Análise combinatória aplicadas no jogo de xadrez.

PLANEJAMENTO:

CONTEÚDO: O jogo de xadrez e análise combinatória

OBJETIVO GERAL:

Relacionar os conceitos de análise combinatória ao jogo de xadrez,

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

⇒ Praticar jogadas de xadrez;

⇒ Calcular possibilidades da jogada inicial;

⇒ Simular xeque-mate em poucas jogadas;

⇒ Fixar conteúdos da análise combinatória;

METODOLOGIA

O Professor irá distribuir um tabuleiro de xadrez, para cada dupla. e no data show será projetada as questões. Em algum momento durante as partidas, serão simuladas jogadas, levando o aluno a pausar o jogo para calcular e observar as possibilidades de jogadas.

MATERIAL:

Tabuleiros de xadrez, datashow, caderno de anotações, caneta, lápis.

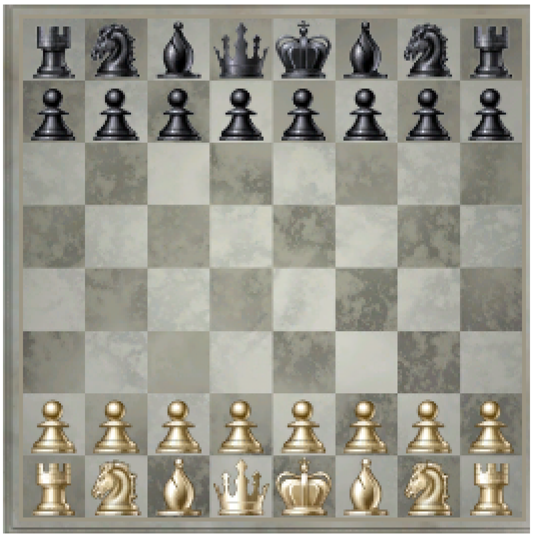
DURAÇÃO: Duas aulas de 50 minutos

AVALIAÇÃO Os alunos serão avaliados pela produção e resolução das situações problema durante as partidas.

4.3.1 Atividade - Xadrez e Combinatória

1. **Ao iniciar o jogo de xadrez, o jogador que possui as peças brancas irá fazer a primeira jogada, ele possui as seguintes opções para iniciar o jogo: Qualquer Peão da linha 2 ou os cavalos situados em b1 e g1, já que de acordo com as regras do xadrez, os cavalos são as únicas peças que podem saltar outras peças. De quantas maneiras poderá ser feita essa primeira jogada?**

Figura 16 – Primeira jogada



Fonte: O autor

Solução: O Jogo poderá ser iniciado movimentando um dos oito peões ou um dos dois cavalos. Os alunos irão observar que cada peão poderá iniciar a partida de duas maneiras possíveis, ou eles se deslocam uma casa para a frente ou se deslocam duas casas.Sendo assim, a quantidade de maneiras para iniciar o jogo com um dos peões é 16. Os cavalos terão duas opções de saída, cada um deles. Portanto, após observarem o tabuleiro espera-se que o aluno conclua que há 20 maneiras de iniciar uma partida de xadrez.

Figura 17 – Iniciando o jogo

(a) 2 jogadas possíveis cada peão

(b) 2 jogadas possíveis cada cavalo

Fonte: O autor

2. **Retornando à questão anterior e combinando as jogadas iniciais entre brancas e pretas, de quantas maneiras é possível fazer a primeira jogada?**

Solução: Neste caso, a cada jogada das peças brancas também será feita uma jogada com as peças pretas. Já vimos na questão anterior que o jogador tem 20 possibilidades de iniciar o jogo. Como os dois eventos (jogar uma peça branca e jogar uma peça preta) são eventos independentes, então pelo Principio Fundamental da Contagem, teremos um total de $20 \cdot 20 = 400$ *maneiras.*

Figura 18 – Uma jogada possível

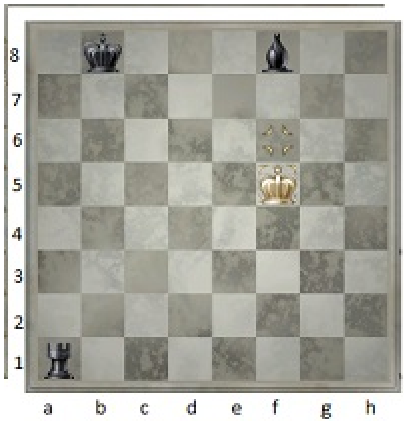
Fonte: O autor

Comentário: Os alunos começarão a relacionar conteúdos de análise combinatória com as jogadas do xadrez.

Na primeira questão, o objetivo inicial é que o aluno descreva cada jogada possível de se fazer, de modo que ele consiga observar todas as possibilidades. Já na segunda questão, a ideia principal é fazer com que o aluno desenvolva o conceito de eventos independentes e efetue cálculos utilizando o Principio Fundamental da Contagem, pois descrever todas as 400 jogadas possíveis seria muito trabalhoso.

3. **Na situação abaixo, a Torre preta está na posição a1. Considerando que o objetivo é capturar o Rei da posição f5, quantos são os caminhos possíveis de a Torre chegar até o Rei, de modo que a cada movimento ela avance em direção ao Rei?**

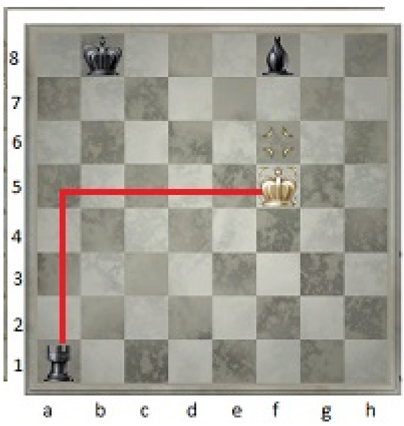
Figura 19 – torre posição a1



Fonte: O autor

Solução: *O movimento da Torre é sempre vertical ou horizontal, o movimento* ***a1*** $\rightarrow$ ***a5*** *é uma solução. Chamaremos de v as casas na vertical e h as casas na horizontal. Nesta solução os alunos irão observar que a torre passou por 4 casas verticais e 5 casas horizontais, podemos representar pela sequência vvvvhhhhh.*

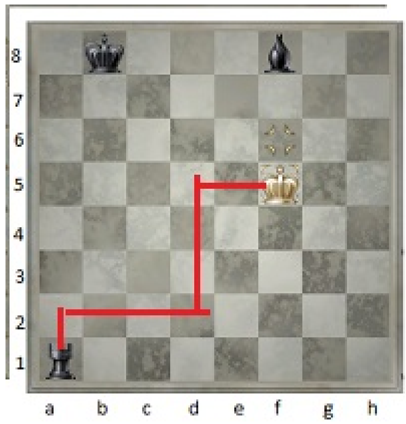
Figura 20 – uma solução



Fonte: O autor

Observa-se que qualquer caminho escolhido formará uma sequência com quatro letras v e 5 letras h. Por exemplo, o caminho vhhhvvvhh é representado pela figura:

Figura 21 – vhhhvvvhh



Fonte: O autor

Com isso, podemos chegar à solução desejada usando combinação simples. Como a torre terá que passar por 9 casas, sendo 4 verticais e 5 horizontais, então será uma combinação de 9 elementos. Escolhem-se 4, uma vez determinado os movimentos verticais, ficarão determinados os horizontais e vice e versa.

Teremos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9.8.7.6.5!}{4!5!} = \frac{9.8.7.6}{4.3.2.1} = \frac{3024}{24} = 126 \ \textit{caminhos}$$

Outra forma de chegar ao resultado é calculando o total de Anagramas da palavra vvvvhhhhh, que seria calcular uma permutação com repetição. Desta forma teríamos:

$P_9^{4,5} = \frac{9!}{4!5!} = 126$

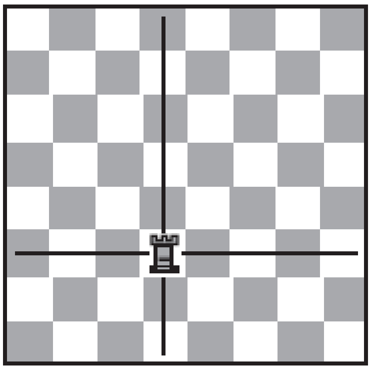
Chegaríamos ao mesmo resultado.

Comentário No jogo de xadrez, o jogador deve sempre imaginar várias jogadas a frente, fazendo uma previsão de todas as possibilidades. Uma questão como essa leva o jogador de xadrez a se questionar qual o caminho mais vantajoso, de modo a obter sucesso durante a partida.

4. **O Xadrez é jogado por 2 jogadores. Cada jogador tem um total de 16 peças (brancas ou pretas). Nesta questão vamos utilizar somente a Torre, uma das peças do xadrez. O movimento da torre é por qualquer casa ao**

longo da coluna ou linha que ocupa, para frente ou para trás, conforme a figura abaixo:

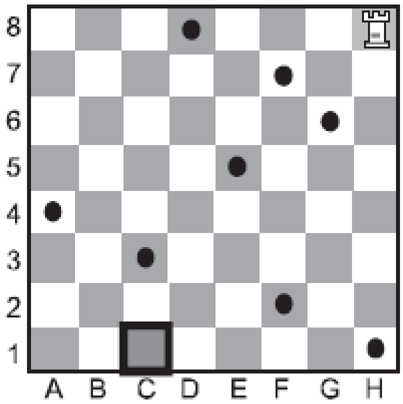
Figura 22



Fonte:Retirada do site: https://sites.google.com/site/blogprofwarles/img7ENEMmat2009.png

O objetivo é chegar na casa c1 sem passar por cima dos pontos pretos. Considerando o movimento da torre. Qual a quantidade mínima de movimentos?

Figura 23

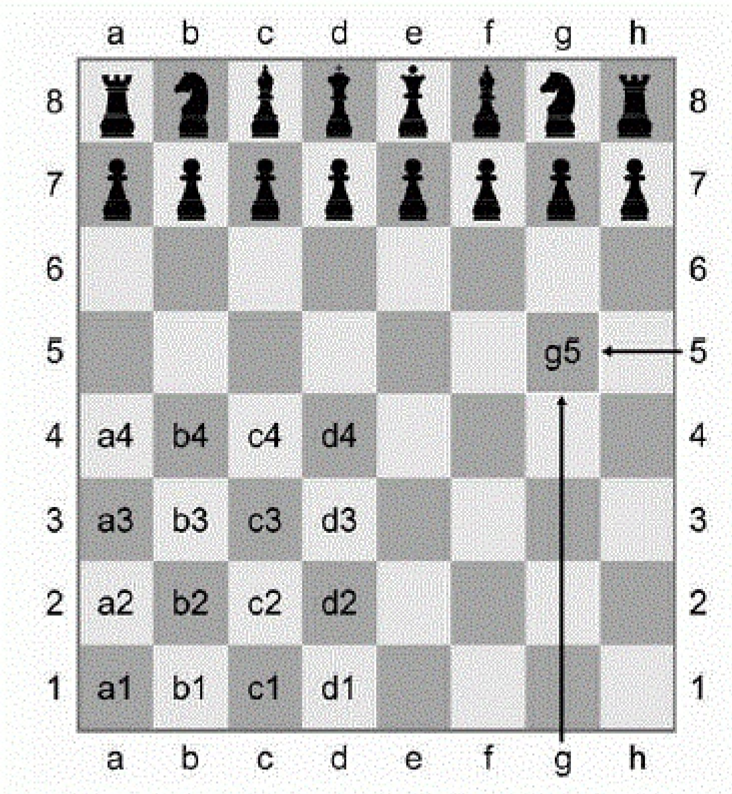


Fonte: Retirado do site: https://sites.google.com/site/blogprofwarles/img8ENEMmat2009.png

Solução: Os alunos irão visualizar todos os movimentos possíveis para a torre chegar na casa c1. Por exemplo: Inicialmente a torre tem 2 opções para iniciar, ou parte na horizontal ou vertical. O movimento ***H8→E8, E8→E6 , E6→D6, D6→D1 e D1→C1*** *é uma solução possível, porém são efetuados 5 movimentos. Os alunos devem observar que quanto maior for a distância percorrida pela torre no tabuleiro, menos movimento ela vai fazer. Por exemplo:* ***H8→H2, H2→G2, G2→G1 e G1→C1*** *é uma solução com 4 movimentos e é a menor quantidade de movimentos possíveis para a torre partir da casa H8 e chegar na casa C1.*

5. **A figura abaixo mostra a disposição das peças pretas do xadrez, na linha 7 todos os peões e na linha 8 o restante das peças: 2 torres, 2 cavalos, 2 bispos, 1 rainha e 1 rei. Qual o total de disposições possíveis para essas oito peças de modo a distribuí-las na linha 8 do tabuleiro?**

Figura 24



Fonte: retirada do site: https://www.estudegratis.com.br

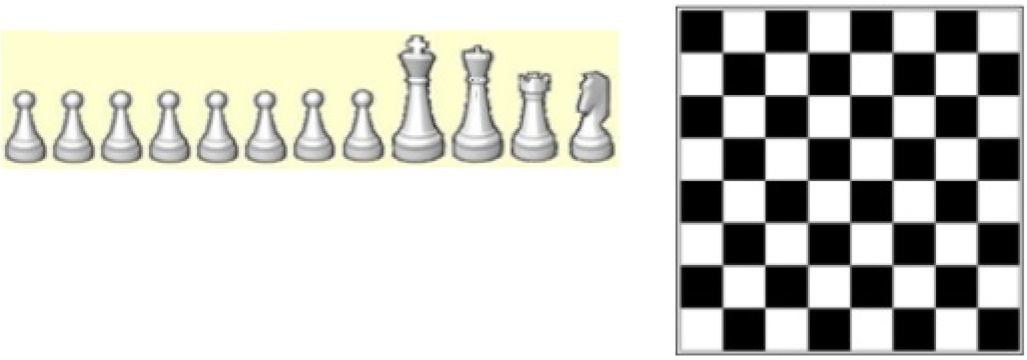
Solução: Como temos 2 torres (T), 2 cavalos (C), 2 bispos (B), 1 rainha (Q) e um rei (R) , podemos imaginar esses problema como o total de anagramas da palavra TTCCBBQR que é a permutação de 8 elementos com repetição. Dessa forma a solução é:

$$\frac{8!}{2!2!2!} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2.1.2.1.2.1} = 5040$$

Logo serão 5040 disposições.

6. **Considere um tabuleiro de xadrez como o representado na figura abaixo. Supondo que qualquer peça pode ocupar qualquer lugar, a quantidade de formas diferentes que podem ser dispostos no tabuleiro oito peões brancos (iguais entre si) e, a seguir, as demais peças (uma torre, um cavalo, o rei e a rainha), é:**

Figura 25



Fonte: Retirada do site: https://como-jogar.blogspot.com.br

a) $C_{64,12} \times 12!$

b) $A_{64,8} \times C_{64,8}$

c) $C_{64,8} \times A_{56,4}$

d) $C_{64,8} \times A_{64,8}$

e) $C_{64,8} \times 8! \times C_{64,4}$

Solução: Primeiramente vejamos que o tabuleiro de xadrez é composto por 64 casas. Como os peões são todos iguais então a ordem entre eles não importa, logo trata se de um problema de Combinação de 64 elementos escolhidos 8 a 8 ($C_{64,8}$. Em seguida iremos dispor as quatro peças (torre, cavalo, rei e rainha) nas casas restantes (56). Como as peças são diferentes e sua posição no tabuleiro é importante, então trata-se de um problema de Arranjo simples de 56 elementos escolhidos 4 a 4 ($A_{56,4}$). Logo a solução será:

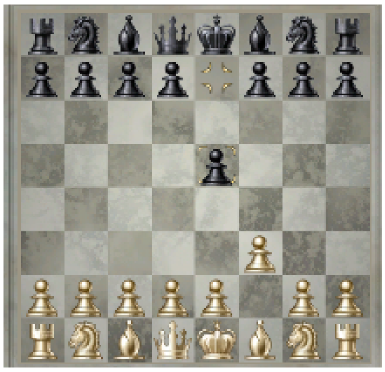
Alternativa c) $C_{64,8} \times A_{56,4}$

7. **As partidas de xadrez costumam durar bastante tempo, porém é possível que a partir de uma combinação de jogadas ela acaba em poucos movimentos. Nesta atividade os alunos irão descrever todos os movimentos possíveis para que uma partida termina em 2 movimentos das peças pretas.**

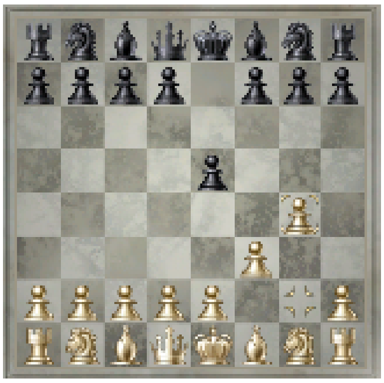
Solução: *Os alunos irão fazer várias observações e tentativas até chegar a solução da quantidade de maneiras que as pretas consigam um xeque-mate com duas jogadas. Os movimentos serão: brancas, peão **f3**; pretas, peão **e5**; brancas, peão **g4**; pretas, rainha **h4***

Figura 26 – xeque-mate em 2 jogadas

(a) peão f3



(b) peão e5



(c) peão g4

(d) rainha h4

Fonte: O autor

8. **O Rei é a peça mais importante do xadrez, porém seus movimentos são muito limitados, podendo se movimentar uma única casa em qualquer direção, e um Rei nunca pode dar xeque em outro. Desta forma, de quantas maneiras é possível situar dois Reis (um preto e um branco) no tabuleiro?**

Figura 27 – Dois Reis no tabuleiro

Fonte: O autor

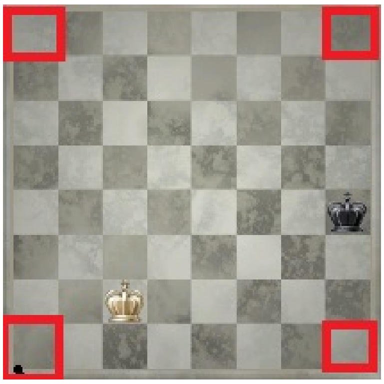
Solução: *Como cada Rei não pode entrar na área onde o outro se movimenta, ou seja nas casas adjacentes a ele, então podemos pensar esse problema da seguinte maneira: Analisando três posições diferentes para o Rei , no canto, nas laterais ou nas casas centrais do tabuleiro. Estando o rei preto em um dos cantos, cada casa do canto teria 3 casas adjacentes onde o outro não poderia estar, ou seja seriam 4 casas a menos no tabuleiro para o rei branco, restando 60 casas, mas isso pode ser feito de 4 maneiras, pois são 4 cantos no tabuleiro (4 . 60 = 240 formas de dispor os reis).*

Se o rei preto estiver localizado numa casa lateral, isso poderá ser feito de 24 maneiras, e cada uma delas terá 5 casas adjacentes onde o rei branco não poderá estar, restaria 58 casas. Desta forma teríamos 24 . 58 = 1392 modos de dispor os reis.

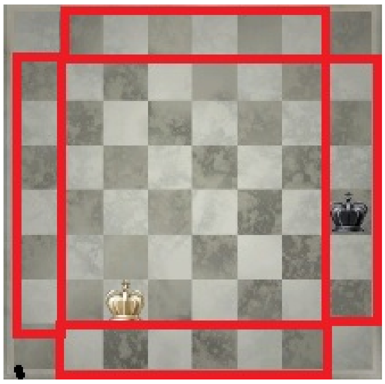
Se o rei preto ocupar uma das 36 casas centrais, onde cada uma delas tem 8 casas adjacentes onde o rei branco não poderia estar, restaria 55 casas para dispor o rei branco. Haveria portanto 36 . 55 = 1980 modos de dispor os reis.

Portanto a resposta é: $240 + 1392 + 1980 = 3612$ formas de dispor 2 reis diferentes no tabuleiro.

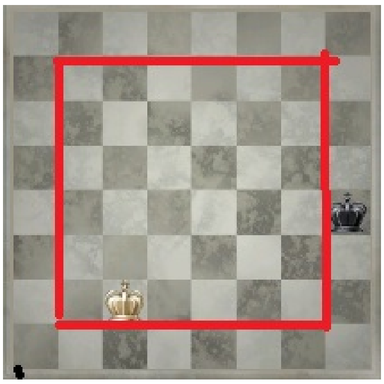
Figura 28



(a) 4 casas nos cantos



(b) 24 casas laterais



(c) 36 casas centrais

Fonte: O autor

Comentário: Numa situação como essa durante uma partida, é decretada empate, uma vez que não é possível nenhum Rei dar xeque-mate em outro.

9. **No xadrez, os peões são consideradas as peças mais frágeis, no entanto existe uma jogada chamada de promoção do peão, caso ele consiga atingir a outra extremidade do tabuleiro, poderá ser substituído por qualquer peça do jogo, com exceção do Rei. Normalmente os jogadores escolhem a Rainha por ser a peça mais forte. Nesta atividade os alunos irão calcular de quantas maneiras é possível:**

a) dispor 8 rainhas no tabuleiro.

b) dispor 8 rainhas no tabuleiro, de forma que nenhuma esteja atacando a outra na linha ou coluna.

Figura 29

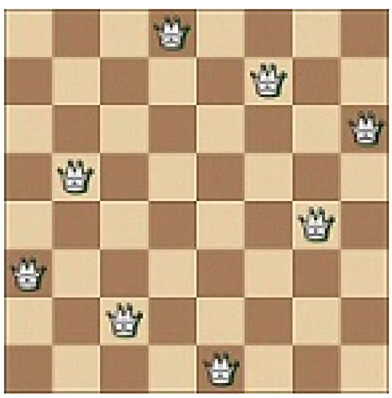
Fonte: Retirada do site: https://img2.gratispng.com

Solução item a): *Os alunos irão situar de diversas maneiras as 8 rainhas no tabuleiro e anotar os resultados. A partir de um certo momento, essa contagem vai ficando cada vez mais difícil, pois se trata de um número muito grande de combinações. Uma forma de resolver esse problema é por meio de combinações simples, já que a ordem das rainhas no tabuleiro não importa, pois são todas iguais.*

Como no tabuleiro são 64 casas, o problema consiste em escolher 8 dessas casas. Logo, teremos uma combinação simples de 64 para escolher 8. Utilizando a fórmula de combinação simples, teremos:

$$C_{64,8} = \frac{64!}{8!(64-8)!} = \frac{64.63.62.61.60.59.58.57.56.55.54.53.52!}{8!52!} =$$
$$= \frac{64.63.62.61.60.59.58.57.56.55.54.53}{8.7.6.5.4.3.2.1} = 4426165368 \; maneiras.$$

Figura 30 – Uma solução



Fonte:Retirada do site: https://www.somatematica.com.br/desafios/xadrez2.jpg

Solução item b): *Espera-se que os alunos façam diversas tentativas a fim de conseguirem visualizar algumas possibilidades. A Rainha é uma peça muito poderosa do xadrez, quanto mais ela se aproxima do centro mais alcance de ataque ela terá sobre o tabuleiro, chegando até a atacar 27 casas de uma só vez . Com isso colocar 8 rainhas no mesmo tabuleiro não é um trabalho tão simples.*

Figura 31 – Rainha no centro

Fonte: O autor

Como cada rainha não deve estar na linha ou coluna de ataque da outra, colocaremos primeiramente uma em cada coluna, cada uma delas terá 8 maneiras de ocupar uma casa na coluna. Pelo principio fundamental da contagem isso pode ser feito de $8.8.8.8.8.8.8.8 = 16777216$ *maneiras.*

Para resolver o problema de uma rainha atacar a outra na linha e coluna, elas serão dispostas de maneira que cada uma delas ocupa uma linha e uma coluna, como na figura:

Figura 32 – 8 Rainhas

Fonte: O autor

Essa situação acima pode ser calculada utilizando a ideia de permutação, como cada rainha irá ocupar uma linha e uma coluna. Para situar a primeira rainha no tabuleiro teremos 8 opções de escolha, para a segunda rainha, não pode ocupar a mesma linha e coluna da primeira, então restarão 7 opções de escolha, e assim por diante até a última rainha que só terá 1 opção. Desta forma teremos:

$P_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$ maneiras

Portanto existem 40320 maneiras de dispor 8 rainhas no tabuleiro de forma que nenhuma ataca a outra nas linhas e colunas.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a vida escolar, o aluno tem contato com diversas ferramentas pedagógicas, de maneira a facilitar seu entendimento em relação ao conteúdo exposto pelo professor. E pensando nisto, observando a dificuldade que muitos professores encontram em aplicar o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Fundamental, levando em conta que a BNCC propõe a aplicação deste conteúdo desde as séries iniciais e concordando que o aluno não deve mudar de nível sem conhecer tal conteúdo, é que este trabalho deu início.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para a explanação do conteúdo de Análise Combinatória, onde o público alvo são alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, com o auxílio do jogo de xadrez.

Na primeira parte deste trabalho fizemos um embasamento teórico em relação à necessidade de se trabalhar o conteúdo de Análise Combinatória desde as séries iniciais de maneira gradual, ou seja, a cada série o aluno teria contato com o conteúdo e sempre adicionando algo mais.

Na segunda parte, foi exposto o jogo de xadrez como uma ferramenta metodológica para auxiliar professores no processo ensino aprendizagem, a relação que o jogo tem com a Matemática, suas regras e movimentos de cada peça.

Na terceira parte, foram expostos os principais conceitos de Análise combinatória (Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, arranjos, fatorial e combinação simples). Os exemplos escolhidos foram uma forma de facilitar o entendimento do aluno, uma vez que ao longo do Ensino Médio, ele terá contato com esse conteúdo de maneira mais abrangente.

Em seguida, apresentamos uma sequência didática, dividida em três etapas . Na primeira etapa, o aluno teria o contato com o jogo de xadrez, e de forma prática iria desenvolver suas habilidades no que diz respeito ao jogo. Na segunda etapa, dividida em 8 aulas, cada aula foi pensada para que o professor pudesse explicar parte do conteúdo e aplicar uma lista de questões para fixar as ideias. Acreditamos que oito aulas são suficientes para introduzir e exercitar o conteúdo principal da Análise Combinatória (voltada para o 9º ano). A terceira etapa ficou reservada para inserir o jogo de xadrez e resolver questões do conteúdo visto nas aulas anteriores.

A ideia de complementar a sequência didática e acrescentar o jogo de xadrez como instrumento metodológico, se deu a partir do momento em que observamos como várias ideias matemáticas (e principalmente de combinatória) podem ser exploradas nesse jogo. A partir do uso do xadrez, os alunos teriam a possibilidade de relacionar conceitos de Análise combinatória ao jogo e resolver problemas para fixar os conteúdos vistos durante as aulas teóricas.

Portanto, espera-se que toda a ideia exposta neste trabalho, leve o aluno do Ensino Fundamental para o Ensino Médio com os conceitos principais da Análise Combinatória formados.

Referências

Hazzan, S. Fundamentos de matemática elementar, 5: combinatória, probabilidade. Brasil: Atual.2004

SILVA, W. da.Processos cognitivos no jogo de xadrez. 2004. f. 196. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná –UFPR, Curitiba, 2004.

TAHAN, Malba, O homem que calculava: romance. Aventuras de um singular calculista persa, Editora Saraiva, 1949.

EADE, James. Xadrez para leigos, 2ª edição, Rio de Janeiro: Alta books, 2010.

Allison, G .; Yee, CN; McGaughey, M. (1988). "Três NxN Rainhas Problemas Dimensional". Departamento de Ciência da Computação da Universidade Monash, na Austrália. 1988.

ALVES, Vanderli de Araújo. Sobre o princípio fundamental da contagem. 2015. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015.

GOUVEIA, Rosimar. Toda matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-analise-combinatoria/. Acessado em: 15 de maio de 2020.

RAMOS, Danielle de Miranda. "Arranjo simples "; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/arranjo-simples.htm. Acessado em: 15 de maio de 2020.

JORDON, About. Exercícios resolvidos de arranjos. Saber matemática. Disponível em: https://sabermatematica.com.br/exercicios-resolvidos-arranjos-simples.html. Acessado em 15 de maio de 2020.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC. Acesso em: 20 de abril de 2020.