UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES NO ENSINO MÉDIO

CARLOS GABRIEL GERMANO DE OLIVEIRA

TRÊS LAGOAS – MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

GEOMETRIA ANALÍTICA E VETORES NO ENSINO MÉDIO

CARLOS GABRIEL GERMANO DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS – Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini.

TRÊS LAGOAS – MS

2020

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Geometria Analítica e Vetores no Ensino Médio

por

CARLOS GABRIEL GERMANO DE OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Edivaldo Romanini

Prof. Dr. Edivaldo Romanini (Orientador)
UFMS/CPTL

Renato César da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva
UFMS/CPTL

Prof. Dr. José Antônio Menoni
UFMS/CPTL

Setembro de 2020

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar saúde e força para correr atrás de meus sonhos.

Aos meus familiares e noiva por todo apoio e incentivo nos estudos. Nada teria sentido se não tivesse vocês em minha vida.

A todos professores da UFMS de Três Lagoas, de maneira especial àqueles que lecionaram no Curso do PROFMAT e que foram essenciais no auxílio em busca do conhecimento.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edvaldo Romanini, pela atenção, dedicação, profissionalismo, ajuda e orientação na realização deste trabalho.

A todos colegas de profissão, em especial àquele da Turma do PROFMAT 2018, por toda ajuda, companheirismo e amizade no decorrer do curso.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo de Geometria Analítica com abordagem vetorial no Ensino Médio. Procuramos descrever um pouco da história da Geometria e da Geometria Analítica, para assim despertar o interesse do aluno. Criamos um material específico para o ensino dessa matéria no Ensino Médio, contendo teoria, definições, demonstrações, exemplos e atividades. Este material contém conteúdo simples, como localização de pontos no plano cartesiano e distância entre pontos, até conteúdos com abordagem vetorial, como operações com vetores, aplicações e equações de retas. Adotamos o uso do Software Geogebra nas aulas como forma de atrair o aluno e auxiliar no aprendizado do conteúdo. O trabalho foi realizado com alunos do 3° ano do Ensino Médio de um colégio estadual da cidade de Aparecida do Taboado, MS. Os alunos mostraram empenho e dedicação, além de muito esforço em aprender alguns tópicos da Geometria Analítica com esta abordagem. Os resultados mostram que é possível aplicarmos a abordagem vetorial em Geometria Analítica no Ensino Médio, dando alternativas aos alunos para resolução de problemas e também uma base maior para aqueles que futuramente possam ingressar em cursos superiores na área de exatas.

Palavras Chave: Geometria Analítica, Vetores, Geogebra.

ABSTRAT

This work aims to make a study of Analytical Geometry with a vector approach in High School. We tried to describe a little of the history of Geometry and Analytical Geometry, so as to arouse the student's interest. We created specific material for teaching this subject in high school, containing theory, definitions, demonstrations, examples and activities. This material contains simple content, such as location of points in the Cartesian plane and distance between points, even content with a vector approach, such as vector operations, applications and line equations. We adopted the use of Geogebra Software in class as a way to attract the student and assist in learning the content. The work was carried out with students from the 3rd year of high school at a state school in the city of Aparecida do Taboado, MS. The students showed commitment and dedication, in addition to a lot of effort in learning some topics of Analytical Geometry with this approach. The results show that it is possible to apply the vector approach in Analytical Geometry in High School, giving students alternatives for problem solving and also a greater base for those who may enter higher education in the exact area in the future

Keywords: Analytical Geometry, Vectors, Geogebra.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho visa apresentar uma abordagem vetorial no estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio. O estudo de vetores ocorre no Ensino Médio na matéria de física, onde este auxilia nos cálculos relacionados à Cinemática Vetorial, Dinâmica, Campo Elétrico, entre outros conteúdos. Mesmo sendo utilizados apenas na física no ensino médio, vetores é uma ferramenta matemática, por isso defendemos a ideia da inclusão desse estudo no currículo de matemática no Ensino Médio.

Finalizamos o ensino médio em 2007, onde acreditamos que tivemos uma boa base matemática. Em 2008 iniciamos o terceiro grau no curso de Licenciatura em Matemática. Neste primeiro ano não tivemos muitas dificuldades, visto que a grade do curso era mais direcionada a revisar conteúdos que deveriam ser vistos no ensino médio e nivelar o conhecimento dos alunos. No segundo ano me deparamos com a matéria Vetores e Geometria Analítica, e por não ter visto esta abordagem vetorial na matemática do ensino médio, tivemos certa dificuldade no início. Em conversa informal com colegas da turma naquele período e com colegas de profissão nos dias de hoje, sempre há relatos dessa dificuldade, advinda da não abordagem dessa ferramenta no ensino médio.

Devido à dificuldade relativa ao conceito de vetores no curso superior, tal fato nos motivou a considerar essa abordagem como tema deste trabalho.

Nestes anos atuando como professor de matemática do Ensino Médio da rede pública de Mato Grosso do Sul, seguimos o Referencial Curricular do Ensino Médio, que nos orienta a ensinar, em Geometria Analítica, conteúdos de ponto, reta, circunferência e cônicas. Tanto o referencial quantos os livros, nunca pediram ou trouxeram uma abordagem vetorial no ensino de Geometria Analítica. Por esse motivo tivemos que criar um material para ser usado em sala de aula.

Este trabalho foi desenvolvido com alunos do 3° ano do Ensino Médio de colégio da rede pública de ensino de Mato Grosso do Sul. Dividimos em 4 capítulos, onde no primeiro descrevemos alguns aspectos históricos da Geometria, especificamente da Geometria Analítica, onde levantamos pontos sobre o ensino dessa matéria.

No segundo capítulo temos a parte teórica, definições, demonstrações e exemplos, material esse que usamos diretamente na sala de aula com os alunos. Na grande maioria dos exemplos utilizamos o Software Geogebra como auxílio para o aprendizado.

No terceiro capítulo mostramos a forma com que aplicamos o conteúdo do capítulo 2 em sala de aula. A aplicação foi dividida em 5 partes, com intuito de ter melhor aproveitamento e rendimento dos alunos. Cada uma dessas partes contém atividades e descrição de como foram desenvolvidas.

No último capítulo temos as considerações finais, onde relatamos os resultados que obtivemos em cada uma das 5 partes da nossa aplicação.

Capítulo 1

O ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

1.1 BREVE HISTÓRIA DA GEOMETRIA

As primeiras ideias geométricas podem ter sido originadas de observações subconscientes, feita pelos homens, provenientes da necessidade de se resolver problemas de construções, delimitação de terrenos e plantações, e até mesmo comparar formas e tamanhos.

Segundo Eves [1], a noção de distância foi, sem dúvida, um dos primeiros conceitos geométricos a serem desenvolvidos, e em seguida, a de figuras geométricas, tais como quadrados, retângulos e triângulos.

A palavra Geometria vem do grego Geometrein, onde Geo significa "terra" e metron significa "para medir".

O autor [1] afirma em seu livro que nenhum dado nos permite estimar quantos séculos se passaram até que o homem fosse capaz de elevar a geometria ao status de ciências, mas que o Vale do Rio Nilo, no Egito antigo, foi o local onde isso ocorreu. O rei dividia a terra entre o povo de modo que cada um ficasse com um lote quadrado e impunha tributos a serem pagos anualmente. Quando a terra era tomada pelas águas das cheias, o povo pagava tributos proporcionalmente à quantidade de terra que não estava debaixo d`água.

Com o tempo, devido ao grande número de problemas geométricos que tinha que solucionar, o homem foi capaz de extrair propriedades e relações através da observação, que lhe permitiram separar estes problemas em conjuntos e criar estratégias, tais que, os problemas de um mesmo conjunto poderiam ser resolvidos por um mesmo procedimento geral. Para Eves [1], naquela época a Geometria se transformou em um conjunto de receitas práticas, algumas corretas e outras apenas aproximada.

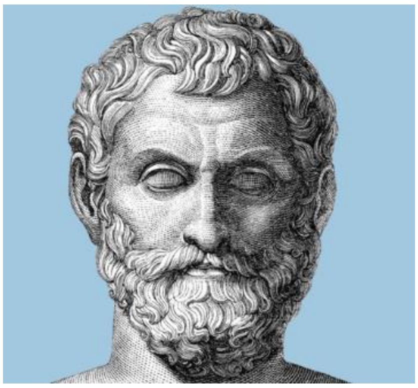
É certo que povos mais antigos, como Babilônios e Egípcios, já utilizavam conhecimentos de natureza geométrica, pois eram registrados nas tábuas de argila cozida e nas pedras e papiros. É provável que povos da Índia e da China antigas tenha utilizados conhecimentos parecidos com dos Babilônios e dos Egípcios, mas, por não termos registros, visto que escreviam em materiais perecíveis, não se tem informações satisfatórias. [1]

Howard Eves [3] afirma:

> "As mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. Novos povos passaram ao primeiro plano, e os desenvolvimentos posteriores da Geometria foram passados aos gregos, que transformaram a matéria em algo muito diferente do conjunto de conclusões empíricas produzido por seus predecessores." (EVES, 1992, p.7)

Inicialmente pelo grego Tales de Mileto (624-546 a.C.), a geometria passou a ser estabelecida como teoria dedutiva [1], ou seja, partindo de princípios reconhecidos como verdadeiros, se estabelece relações com uma segunda proposição para, a partir de raciocínio lógico, chegar à verdade daquilo que propõe. Na figura a seguir apresentamos uma foto do busto de Tales.

Figura 1.1: Tales de Mileto



Fonte: Filosofia na Escola, 2019

Após Mileto, Pitágoras foi o geômetra grego que continuou a sistematização da geometria. Alguns autores indicam a possibilidade de Pitágoras ter sido aluno de Tales, uma vez que este era 50 anos mais velho e morava em Mileto, cidade próxima ao local onde Pitágoras residia [1]. Pitágoras foi o fundador da escola pitagórica, uma irmandade voltada ao estudo de filosofia, matemática e ciências naturais.

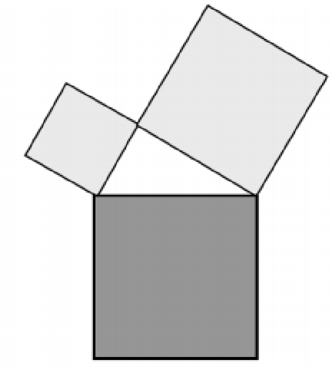
Em geometria, os pitagóricos desenvolveram as propriedades de retas paralelas e usaram-nas para provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos [1].

Segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado [6], os babilônios tinham conhecimento da relação entre os lados de um triângulo retângulo. Não havia demonstração, pois isto estava longe de ser preocupação dos matemáticos da época. Segundo Eves [1], os egípcios também conheciam o triângulo retângulo e faziam usos de suas medidas. Esses povos já sabiam que o triângulo 3, 4, 5 é retângulo, mas que o mesmo acontecia para os triângulos 5,12,13 e 20,21,29. Contudo, a proposição das áreas é atribuída a Pitágoras, e por isso o Teorema recebe seu nome: Teorema de Pitágoras.

De maneira simplista, o enunciado do Teorema de Pitágoras diz: “O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”, onde, em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto e os catetos são os outros dois lados restantes.

A figura a seguir apresenta de maneira geométrica o enunciado do Teorema de Pitágoras.

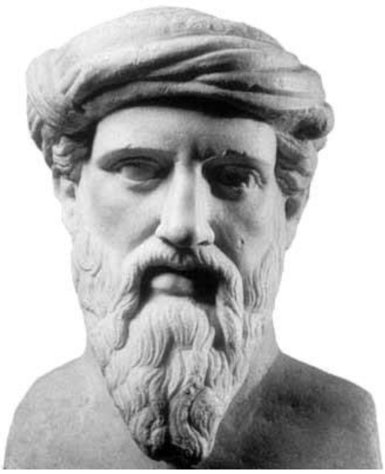
Figura 1.2: Representação geométrica do Teorema de Pitágoras



Fonte: Marconi Coelho, 2019

Na figura a seguir apresentamos uma foto do busto de Pitágoras.

Figura 1.3: Pitágoras



Fonte: BVM-UFAL, 2019

De acordo com Garbi [2], outro matemático importante foi Euclides. Pouco se sabe sobre ele, nem mesmo sobre seu nascimento e sua morte. Acredita-se que tenha estudado na academia de Platão, devido à semelhança existente entre a visão de ambos.

Por volta de 300 a.C., Euclides escreveu sua importantíssima obra, Os Elementos, que, segundo Eves [1], compreendia geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega.

Garbi [2], afirma:

> "Os Elementos, de Euclides, o mais antigo livro de matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos." (GARBI, 2006, p.49).

Na figura a seguir apresentamos uma foto do busto de Euclides.

Figura 1.4: Euclides

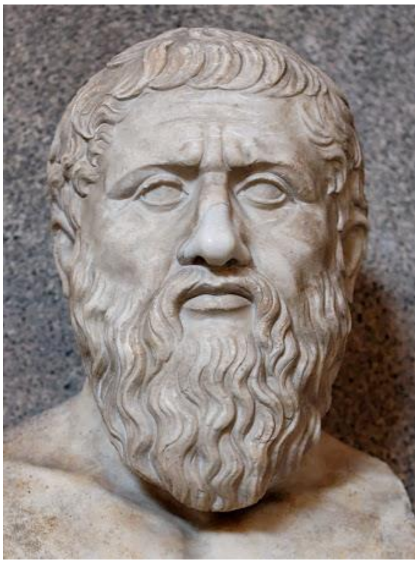
Fonte: Matemático Teca, 2019

Mais tarde, segundo Eves [1], Platão também se interessou pela geometria. Ele era grego, nasceu em 427 a.C. e morreu em 347 a.C., foi um dos mais importantes filósofos de todos os tempos e suas teorias, chamadas de platonismo, concentra-se na distinção de dois mundos: o visível e o invisível. Os grandes matemáticos da época, ou foram alunos de Platão, ou eram seus amigos.

Platão defendia a teoria dos cinco elementos, onde o fogo era o tetraedro, o ar octaedro, a água icosaedro, a terra o cubo e o Universo o dodecaedro, sendo sólidos geométricos regulares. Esses sólidos ficaram conhecidos como “Poliedros de Platão”.

Na figura a seguir apresentamos uma foto do busto de Platão.

Figura 1.5: Platão



Fonte: Conhecimento Científico, 2019.

Como vimos, a geometria surgiu para atender necessidades dos povos antigos. Com o passar dos tempos grandes matemáticos dedicaram suas vidas ao estudo e aprimoramento dessa ciência. Devido a extensa área de estudos, a Geometria foi dividida nas seguintes subáreas:

- Geometria plana: também chamada de Geometria Euclidiana, estuda o plano e o espaço baseando-se nos postulados de Euclides;

- Geometria Espacial: realiza o estudo de figuras tridimensionais. Nessa área é possível calcular o volume de um sólido geométrico;

- Geometria Analítica: relaciona a álgebra e a análise matemática com a geometria.

No próximo tópico veremos um pouco da história da Geometria Analítica.

1.2 A GEOMETRIA ANALÍTICA

Como vimos anteriormente, a Geometria é a área da matemática que estuda as formas, medida e posição de figuras e suas propriedades com o espaço.

A Álgebra é a área da matemática que estuda as equações, operações matemáticas e estruturas algébricas.

Geometria Analítica é a área da matemática que une a geometria e a álgebra [4]. Sua criação é de autoria de René Descartes, conhecido como o "Pai da Matemática Moderna" (**"PENSO, LOGO EXISTO")**, filósofo, físico e matemático francês, que a apresentou em La Géométrie (A Geometria), apêndice de seu tratado O Discurso sobre o Método.

Na figura a seguir apresentamos uma foto de René Descartes.

Figura 1.6: René Descartes

Fonte: Wikipédia, 2019

Descartes queria mostrar na sua obra que um conjunto de termos algébricos poderiam ser facilmente interpretados com pontos, retas e segmentos de reta num plano e dessa forma seria possível resolver problemas algébricos de forma geométrica [5].

O La Géométrie é divido em três partes. A primeira parte contém uma explanação de alguns dos princípios da álgebra geométrica e revela o avanço real em relação aos gregos. Enquanto para eles o produto de duas e três variáveis representam, respectivamente, a área de um retângulo e o volume de um paralelepípedo, para Descartes, x^2 não sugeria uma área, mas sim o quarto termo da proporção $1: x = x : x^2$, que pode ser facilmente representado por um segmento quando se conhece x. Além disso, é possível representar qualquer outra potência, o que os gregos não sabiam fazer. [16]

A segunda parte traz, entre outras coisas, uma classificação de curvas e um método interessante de construir tangentes às curvas.[16]

A terceira parte trata da resolução de equações de grau maior que dois e da regra de sinais de Descartes que determinava limites para o número de raízes positivas e negativas de um polinômio. [16]

A contribuição de Descartes fez com que os indivíduos passassem a enxergar um ponto como um par ordenado de números no plano cartesiano. Dessa forma as retas, os círculos e outras figuras geométricas são representadas por equações em x e y, nascendo dessa forma a geometria analítica, a qual faz uso da álgebra para resolução de problemas geométricos. [17]

Pierre de Fermat foi um matemático francês e também teve sua contribuição para a Geometria Analítica. Dentre essas contribuições, encontramos a equação da reta e da circunferência e uma discussão sobre hipérbole, elipses e parábolas.

Fermat, em 1629, através do seu trabalho de restauração de obras, se propôs a reconstruir o Lugares Planos de Apolônio e obteve um subproduto desse esforço: em 1636 descobriu o princípio fundamental da geometria analítica. Enquanto Descartes partia de um lugar geométrico e então encontrava sua equação, Fermat partia de uma equação e então estudava o lugar correspondente. São esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica. [16]

Essa área da Geometria é muito usada em vários campos de estudos. Podemos destacar: Engenharias (Produção, Elétrica, Mecânica), Geografia, Cartografia e a Astronomia.

Segundo Eves [1], como muitos alunos são consideravelmente mais hábeis como algebristas do que como geômetras, a geometria analítica costuma ser descrita como “estrada real” da geometria.

No próximo item veremos como é o ensino da Geometria Analítica a nível médio no Brasil

1.3 O ENSINO DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Segundo o Art. 35 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional [18], o ensino médio, etapa final da educação básica, tem como uma de suas finalidades a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [19], a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Corroborando o que foi citado anteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio [20], vêm como adequada a abordagem de Geometria Analítica no 3° ano do ensino médio. Segundo os PCN+ [20]:

> [...] ampliaria os aprendizados das séries anteriores com temas mais abrangente que permitissem ao aluno observar e utilizar um grande número de informações e procedimentos, aprofundando sua compreensão sobre o que significa pensar em Matemática e utilizar os conhecimentos adquiridos para análise e intervenção na realidade (PCN+, 2002, p. 128).

O material “Orientações Curriculares para o Ensino Médio”, oferecido pelo MEC apresenta um conjunto de reflexões sobre a prática docente.

Segundo esse material [21], o trabalho com Geometria Analítica permite a articulação entre geometria e álgebra, mas para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométrica, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométrica.

Ainda segundo o material, o estudo de Geometria Analítica no Ensino Médio, deve definir o sistema de coordenadas, trabalhar o significado de uma equação, por exemplo, fazendo o aluno entender que a equação $x = 3$ corresponde a uma reta paralela ao eixo y, estudar equações da reta e do círculo, de maneira que essas equações sejam deduzidas e não simplesmente apresentadas aos alunos [21].

Segundo as OCEM [21]:

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física (OCEM, 2006, p. 77).

Existem muitas grandezas que estão associadas a vetores, estas, são chamadas de grandezas vetoriais. Geralmente o conceito de vetor é iniciado no 1° ano do Ensino médio dentro do Currículo de Física. Apesar do tema vetores aparecer inicialmente nos livros didáticos desta ciência, o conceito de vetor é matemático.

Sobre esta questão, é feita uma observação no livro "Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio", lançado em 2001 pela SBM de autoria do professor Elon Lages Lima, que tem o propósito de destacar pontos fortes e fracos das diversas coleções de livros didáticos utilizados nas escolas brasileiras.

Na análise de um dos livros, Lima [22] faz o seguinte comentário:

> "[...] um dos defeitos deste livro e de todos os livros de Matemática para o ensino médio existentes no mercado é a completa omissão de vetores. Estranhamente, vetores são ensinados nos livros de Física, não nos de Matemática". (Lima, 2001, p.130)

Assim, a abordagem vetorial em Geometria Analítica, não é estudada no ensino médio do Brasil, talvez pela falta deste conteúdo nos livros didáticos da matemática ou pelo fato de não ser cobrado nas Avaliações Externas, nem mesmo no ENEM e nos diversos vestibulares do país.

Como exemplo disso, o 3° ano do ensino médio é avaliado apenas no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Em Matemática são avaliadas habilidades e competências definidas em unidades chamadas descritores, agrupadas em temas que compõem a Matriz de Referência dessa disciplina.

Geometria analítica é tratada nos descritores D6, D7 e D8:

- D6 - Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- D7 - Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta.
- D8 - Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

Observando esses descritores, vemos que não se menciona vetores.

No próximo capítulo, procuramos abordar o conteúdo teórico de geometria analítica, incluindo estudo vetorial desse conteúdo, exemplos, aplicações e uso do software Geogebra para melhor visualização e conexão entre os conceitos algébricos e geométricos.

Capítulo 2

PROPOSTA DE MATERIAL

Seguimos a ideia de fazer uma abordagem da Geometria Analítica com uso de vetores, visto que a grande maioria dos livros didáticos de Matemática para Ensino Médio deixam essa ferramenta de lado.

No Ensino Médio, vetores já são estudados na disciplina de Física, assim, introduzi-los na matemática ajudaria ter uma outra visão da Geometria Analítica e possibilitaria uma maior interdisciplinaridade entre os conteúdos estudados.

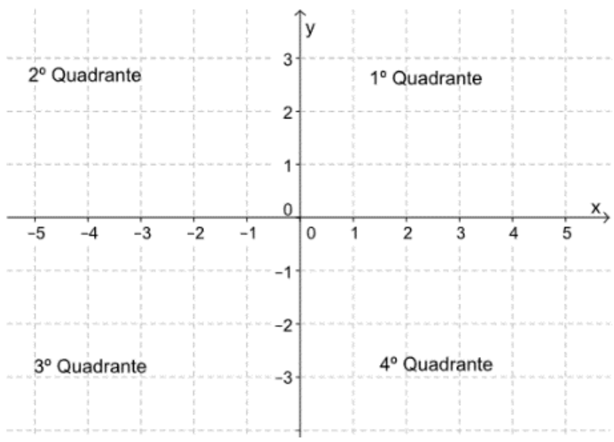
Com intuito de colaborar com o ensino da matemática, o objetivo é elaborar uma proposta de material de Geometria Analítica, tendo a inclusão de vetores, demonstração das fórmulas, a conexão com a física e a resolução de problemas. Procuramos escrever este texto de uma forma simples e clara, com intuito de que o mesmo possa ser utilizado pelos colegas em sala de aula.

2.1 “ESTUDO BÁSICO”

2.1.1 O plano cartesiano

O sistema cartesiano ortogonal é formado por dois eixos perpendiculares entre si (eixo Ox e eixo Oy), que se cruzam em um ponto chamado de origem do sistema, e que determinam o chamado plano cartesiano [7]. O eixo horizontal (Ox) é chamado eixo das abscissas e o eixo vertical (Oy) é o eixo das ordenadas. Os eixos dividem o plano em quatro quadrantes que recebem numeração no sentido anti-horário.

Figura 2.1: Sistema cartesiano ortogonal.



Fonte: Raquel Montezuma, 2019

Escolhido um sistema de eixos ortogonais, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre pontos do plano π e pares ordenados de números reais (a,b) ∈ R^2 da seguinte maneira: Seja P ∈ π, fazemos corresponder ao ponto P um único par ordenado (a,b) ∈ π. Reciprocamente, dado o par ordenado (a,b), fica de maneira única, determinado o ponto P ∈ R^2 .

2.1.2 Localização de um ponto

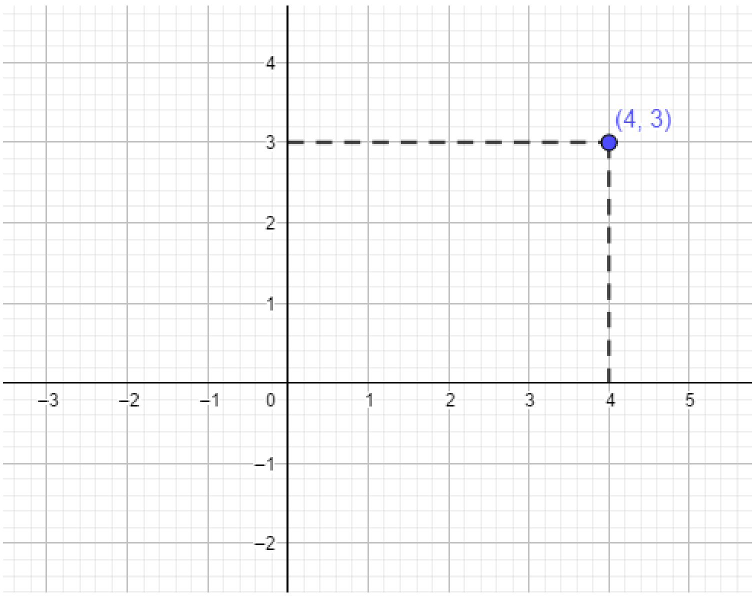
Para localizar um ponto em um plano cartesiano, utilizamos a sequência prática:

- O 1º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das abscissas.
- O 2º número do par ordenado deve ser localizado no eixo das ordenadas.
- No encontro das perpendiculares e paralelas aos eixos O*x* e O*y*, por esses pontos, determinamos o ponto procurado.

Exemplo 1: Localizar o ponto (4, 3) no plano cartesiano.

Solução:

Figura 2.2: Localização de um ponto

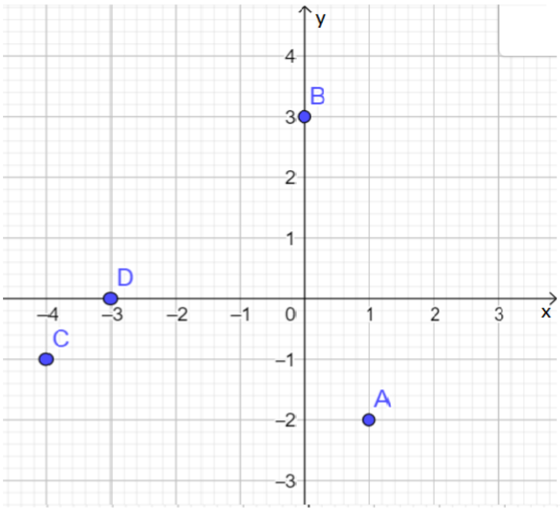


Fonte: O próprio autor.

Exemplo 2: Representar no plano cartesiano, os pontos A (1,-2), B (0,3), C (-4,-1) e D (-3,0).

Solução:

Figura 2.3: Representação de pontos no plano



Fonte: O próprio autor.

Exemplo 3: O ponto P (3m − 3, 8) pertence ao 1º quadrante. Determinar o número real m tal que a abscissa seja o triplo do valor da ordenada.

Solução:

3m - 3 = 3 . 8 ⇒ 3m – 3 = 24 ⇒ 3m = 27 ⇒ m = $\frac{27}{3}$ ⇒ m = 9

Logo P(24,8).

Exemplo 4: Para que valores de a e b o ponto P (2a − 4,b + 5) pertence ao 2º quadrante?

Solução:

- 2a – 4 < 0 ⇒ 2a < 4 ⇒ a < $\frac{4}{2}$ ⇒ a < 2
- b + 5 > 0 ⇒ b > -5

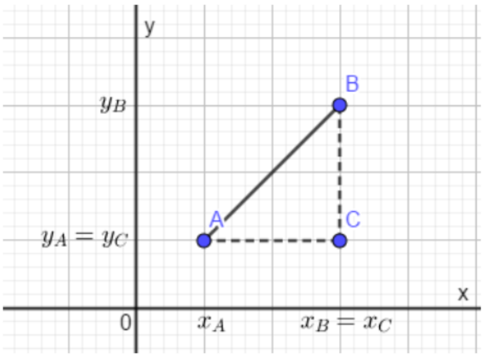
Portanto, a < 2 e b > 5.

2.1.3 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos A e B no plano x0y, é a medida do segmento AB. Em geometria analítica podemos calcular a distância entre dois pontos por meio de suas coordenadas.

Para determinar a distância $d_{A,B}$ entre os pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B), vamos representar tais pontos no plano cartesiano ilustrado na figura a seguir:

Figura 2.4: Distância entre pontos



Fonte: Antônio Alison, 2019.

Temos um triângulo ABC, retângulo em C.

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(d_{A,B}\right)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

Mas AC = $|x_B - x_A|$ e que BC = $|y_B - y_A|$.

Sabendo que $(|x_B - x_A|)^2 = (x_B - x_A)^2$ e $(|y_B - y_A|)^2 = (y_B - y_A)^2$, temos:

$\left(d_{A,B}\right)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ e assim,

$$\boldsymbol{d_{A,B} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Exemplo 5: Calcular a distância entre os pontos A(-1,4) e B(7,10).

Solução: $\mathrm{d_{A,B}} = \sqrt{(\mathrm{x_B} - \mathrm{x_A})^2 + (\mathrm{y_B} - \mathrm{y_A})^2} = \sqrt{(7-(-1))^2 + (10-4)^2} =$
$= \sqrt{(8)^2 + (6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$

Portanto, $d_{A,B} = 10$.

Exemplo 6: O ponto A(3y,y) é equidistante de B(1,2) e C(6,7). Determinar as coordenadas do ponto A.

Solução: $d_{A,B} = d_{A,C} \Rightarrow \sqrt{(1-3y)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(6-3y)^2 + (7-y)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 6y + 9y^2 = 4 - 4y + y^2 = 36 - 36y + 9y^2 + 49 - 14y + y^2 \Rightarrow$

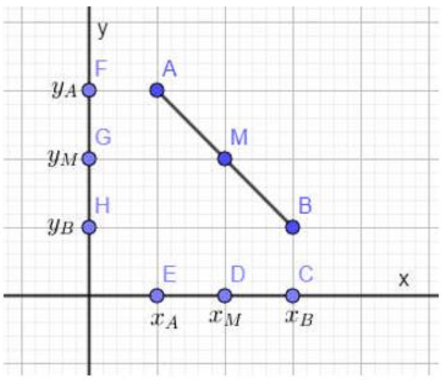
$\Rightarrow 5 - 10y = 85 - 50y \Rightarrow 40y = 80 \Rightarrow y = 2$

$\therefore A(3y,y) \Rightarrow A(6,2)$

2.1.4 Ponto médio de um segmento

Consideremos o segmento de reta de extremos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ e o ponto médio $M(x_M, y_M)$ representado na figura a seguir:

Figura 2.5: Ponto médio de um segmento



Fonte: Antônio Alison, 2019.

Pelo Teorema de Tales, encontramos a seguinte relação entre as abcissas desses pontos:

$AM = MB \Rightarrow ED = DC \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow 2x_M = x_A + x_B \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{x_M = \frac{x_A + x_B}{2}}$

analogamente, encontramos a seguinte relação entre as ordenadas desses pontos:

AM = MB ⇒ HG = GF ⇒ $y_M - y_B = y_A - y_M$ ⇒ $2y_M = y_A + Y_B$ ⇒ ⇒ $\boldsymbol{y_M = \frac{y_A + y_B}{2}}$.

Portanto o ponto médio é dado por $\mathbf{M}\left(\frac{\boldsymbol{x_A + x_B}}{\mathbf{2}} , \frac{\boldsymbol{y_A + y_B}}{\mathbf{2}}\right)$

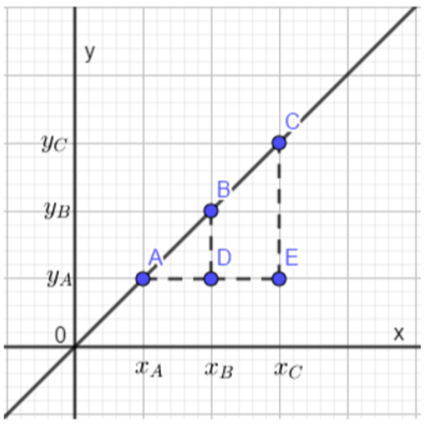
Exemplo 7: Sendo A(-8, 5) e B(14, 3), determinar as coordenadas do ponto médio M do segmento AB.

Solução: $\mathrm{M}\left(\frac{x_A + x_B}{2} , \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{M}\left(\frac{-8 + 14}{2} , \frac{5 + 3}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{M}\left(\frac{6}{2} , \frac{8}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{M}\,(3 , 4)$

2.1.5 Condição de alinhamento entre três pontos

Três pontos A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C) estão alinhados, ou são colineares, quando é possível construir uma reta que passa pelos três pontos.

Figura 2.6: Condição de alinhamento entre três pontos



Fonte: Antônio Alison, 2019.

Os triângulos ACE e ABD são semelhantes. Assim:

$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} \Rightarrow \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_A) = (x_B - x_A)(y_C - y_A) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_C - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y_C - y_A) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B + x_A y_A - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C - x_A y_A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_C y_B - x_C y_A - x_A y_B - x_B y_C + x_B y_A + x_A y_C = 0$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por -1 e reordenando os termos, obtemos:

$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A = 0$ (1)

Mas, pela regra de Sarrus, temos:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A \quad (2)$$

Assim, substituindo (1) em (2), concluímos que três pontos A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C) estão alinhados se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exemplo 8: Verificar se os pontos A(1,1) , B(3,2) e C(5,3) são colineares.

Solução:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 = 5 + 9 - 10 - 3 - 3 = 0$$

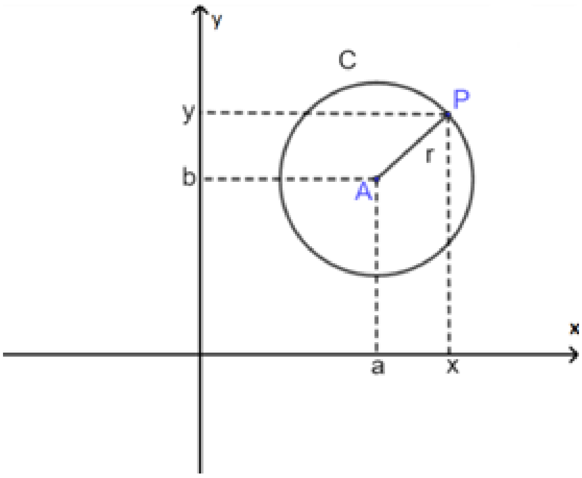
$\therefore$ A, B e C são colineares.

2.1.6 Circunferência

O círculo é uma figura geométrica plana definida como a região limitada por uma circunferência. A circunferência, por sua vez, é um conjunto de pontos equidistantes de um outro ponto chamado centro. A distância entre o centro de uma circunferência e um ponto qualquer pertencente a ela é sempre a mesma, e é chamada de raio [8].

Seja π um plano no R^2. Seja C a circunferência de centro A $\in \pi$ e raio r > 0, assim C={P $\in \pi$ / d(P,A) = r}.

Figura 2.7: Circunferência no Plano



Fonte: Brasil Escola, 2019

Se A(a,b) são as coordenadas do centro de uma circunferência de raio r e P(x,y) pertence à essa circunferência, então:

$d(P,A) = r \quad \Rightarrow \quad d(P,A)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Assim, associamos à circunferência C a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$: Equação Reduzida da Circunferência.

Desenvolvendo a equação reduzida, obtemos a equação geral da circunferência:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2yb + b^2 = r^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \; x^2 + y^2 - 2xa - 2yb + a^2 + b^2 - r^2 = 0$: Equação Geral da Circunferência.

Exemplo 9: Determinar as equações da circunferência de centro (1, 5) e raio 2.

Solução:

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 2^2$: Equação Reduzida da Circunferência.

Desenvolvendo a equação acima, temos:

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x - 10y + 22 = 0$: Equação Geral da Circunferência.

Exemplos 10: Determinar o centro e o raio da circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$.

Solução: Completando quadrados, temos:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 - 4 - 9 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 13 \Rightarrow (x-2)^2 + (y-(-3))^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \Rightarrow$

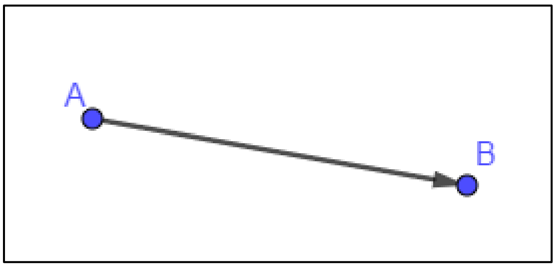
$\Rightarrow$ C(2,-3) e $r = \sqrt{13}$

2.2 VETORES NO PLANO

2.2.1 Segmentos Orientados

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, onde o primeiro é chamado origem do segmento e o segundo chamado de extremidade [9]. O segmento orientado de origem A e extremidade B será representado por AB e, geometricamente, indicado por uma seta que caracteriza visualmente o sentido do segmento.

Figura 2.8: Segmento Orientado AB



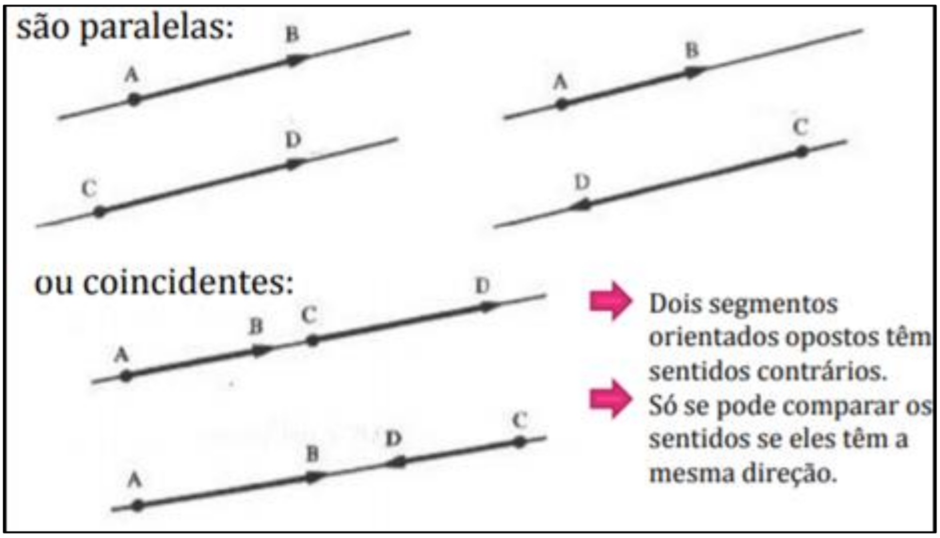
Fonte: O próprio autor.

Um segmento nulo é aquele cuja extremidade coincide com a origem, ou seja, é determinado por um par de pontos coincidentes. Se AB é um segmento orientado, então o segmento orientado BA é o oposto de AB.

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado podemos associar um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação àquela unidade. A medida de segmento orientado AB é o seu comprimento ou seu módulo e é indicado por $\overline{AB}$.

Dados dois segmentos orientado não nulos AB e CD, dizemos que eles têm mesma direção se as retas AB e CD são paralelas ou coincidentes. Os sentidos de dois segmentos só poderão ser comparados se eles tiverem a mesma direção.

Figura 2.9: Segmentos Orientados



Fonte: Profª Aline Paliga, 2019.

Definição 1: Dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Indicamos AB ~ CD [10].

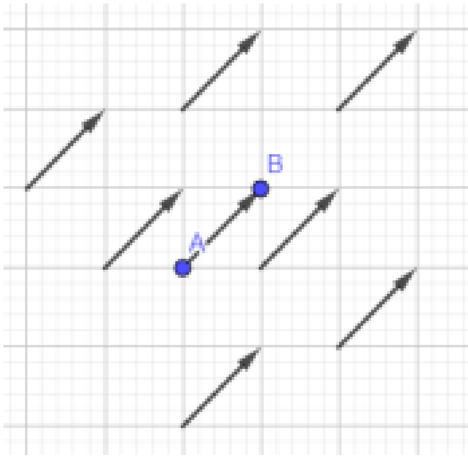
Se os segmentos AB e CD não pertencerem à mesma reta, para que AB seja equipolente a CD, é necessário que AB//CD e AC//BD, isto é, ABCD deve ser um paralelogramo [10].

2.2.2 Vetores

Segundo Winterle [11], dois ou mais segmentos orientados de mesmo comprimento, mesma direção (são paralelos ou colineares) e mesmo sentido são representantes de um mesmo vetor.

Assim, sejam A e B pontos no plano. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ ou $\vec{v} = B - A$ é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB.

Figura 2.10: Representantes de AB

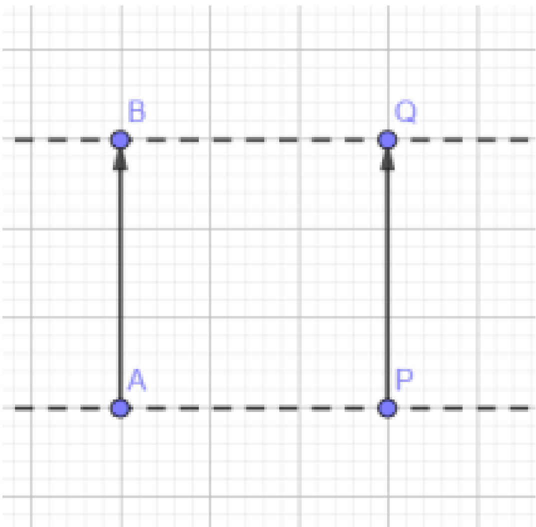


Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

Segundo Winterle [11], dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P, existe um só ponto Q tal que o segmento orientado PQ tem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB. Assim, temos também $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$, de onde vemos que um representante de $\vec{v}$ pode ter sua origem em qualquer ponto do espaço.

Observação: Vemos assim que vetores servem para deslocar pontos.

Figura 2.11: Segmentos orientados equipolentes AB e PQ



Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

Definição 2: Dados os pontos A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B), os números x_B-x_A e y_B-y_A são as coordenadas do vetor $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$, e escrevemos $\vec{v}$ = (x_B - x_A , y_B - y_A) [10].

Observação: as coordenadas de um vetor podem ser determinadas usando qualquer segmento orientado que o represente.

Exemplo 11: Dados A (4,5) e B (-1,2), determinar as coordenadas do vetor $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$.

Solução: Temos x_A=4, y_A=5, $x_B = -1$ e y_B=2

Substituindo esses valores em $\vec{v}$ = (x_B - x_A , y_B - y_A), temos:

$\vec{v}$ = ($-1 - 4$, 2 – 5)

$\vec{v}$ = (-5 , -3)

Exemplo 12: Dados A (-3,4), B (1,-3) e sabendo que O é o ponto da origem, determinar P, tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solução: $\overrightarrow{AB}$ = (x_B - x_A , y_B - y_A) = (1 – (-3) , -3 - 4) = (4 , -7)

Tomando P (x,y) , temos:

$\overrightarrow{OP}$ = (x_P - x_O , y_P - y_O) = (x – 0 , y – 0) = (x,y)

Assim, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ ⇒ (x,y) = (4 , -7) ⇒ P (4 , -7)

Segundo Winterle [11], " dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são iguais, e indicamos por $\vec{u}$ = $\vec{v}$, se tiverem mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido.

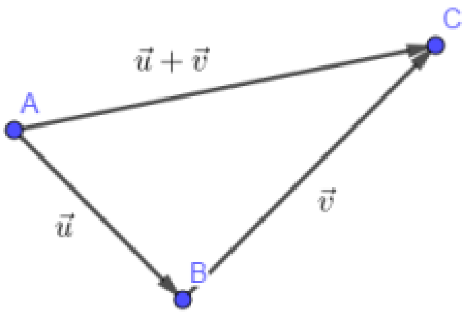
2.2.3 Operações com vetores

2.2.3.1 Adição de vetores

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u}$ + $\vec{v}$ pretendemos encontrar. Tomemos um ponto A qualquer e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Tomemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$.

O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, o vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB}$+ $\overrightarrow{BC}$ = $\overrightarrow{AC}$ [10].

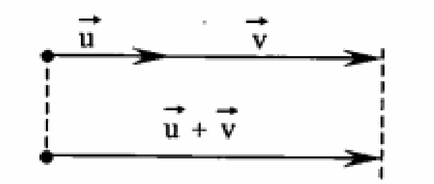
Figura 2.12: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

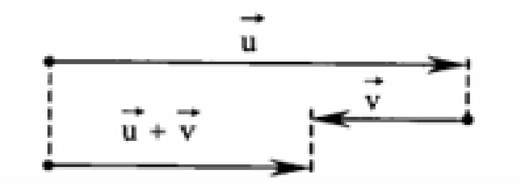
Se $\vec{u}$ // $\vec{v}$, a maneira de se obter o vetor $\vec{u}$ + $\vec{v}$ é a mesma ilustrada na figura 2.13 quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem mesmo sentido e na figura 2.14 quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tem sentido opostos

Figura 2.13: $\vec{u}$ // $\vec{v}$, com mesmo sentido



Fonte: Winterle, 2000.

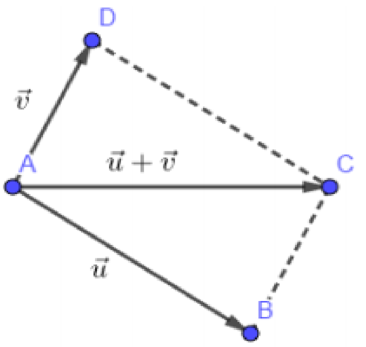
Figura 2.14: $\vec{u}$ // $\vec{v}$, com sentido opostos



Fonte: Winterle, 2000.

Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ segmentos orientados de mesma origem. Neste caso, para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$, completamos o paralelogramo ABCD (figura 2.15). O segmento orientado de origem A, que corresponde à diagonal do paralelogramo, é o vetor $\vec{u} + \vec{v}$, ou seja, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Figura 2.15: Completando Paralelogramo



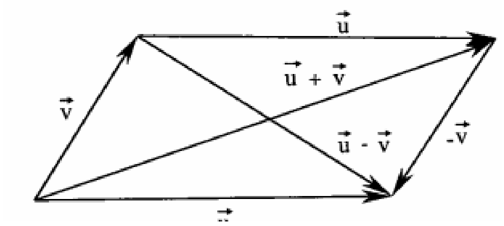
Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

2.2.3.2 Diferença de vetores

O vetor $\vec{u}$ + (- $\vec{v}$), que pode ser indicado como $\vec{u}$ - $\vec{v}$, é chamado diferença entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ [11].

Na figura 2.16 a seguir, o paralelogramo determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ nos mostra que a soma $\vec{u}$ + $\vec{v}$ é representada por umas das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u}$ - $\vec{v}$ é representada pela outra diagonal.

Figura 2.16: Diferença entre vetores

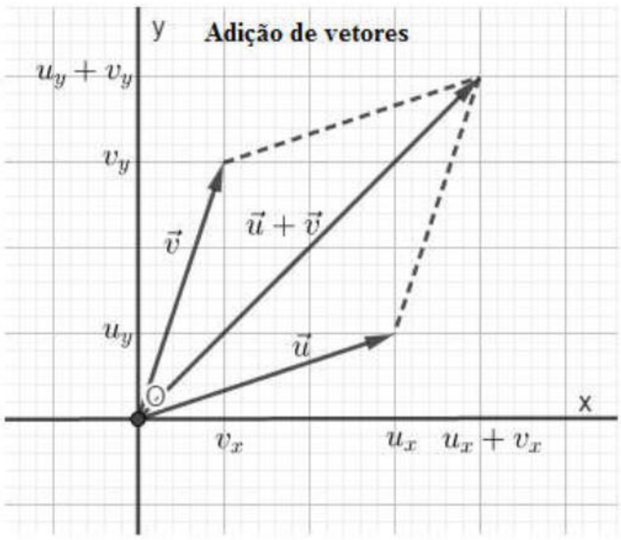


Fonte: Winterle, 2000.

2.2.3.3 Adição de vetores em coordenadas

Sejam $\vec{u} = (u_x , u_y)$ e $\vec{v} = (v_x , v_y)$ vetores do plano expressos em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais xOy. Então, $\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x\ ,\ u_y\ + v_y)$.

Figura 2.17: Adição de vetores em coordenadas.



Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

2.2.3.4 Multiplicação de Número Real por um Vetor

Segundo Winterle [11], dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, chamamos multiplicação do número real α pelo vetor $\vec{v}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que :

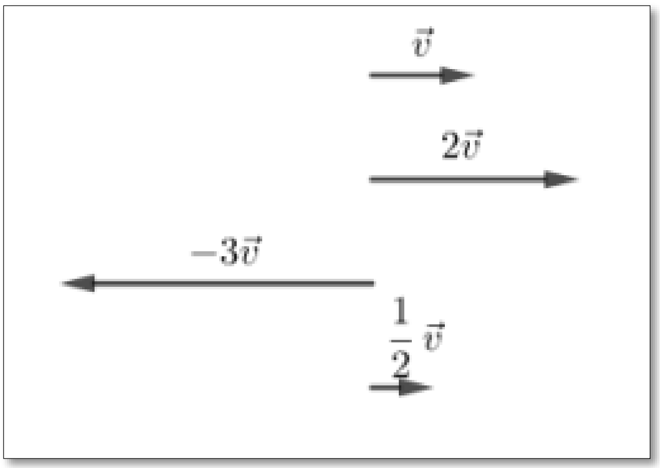
a) Módulo : $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$. Ou seja, o comprimento $\alpha\vec{v}$ é igual ao comprimento de $\vec{v}$ multiplicado por $|\alpha|$;

b) Direção : $\alpha\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$;

c) Sentido : $\alpha\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $\alpha > 0$ e contrário se $\alpha < 0$.

Na figura 2.18 a seguir apresentamos o vetor $\vec{v}$ e alguns de seus multiplos.

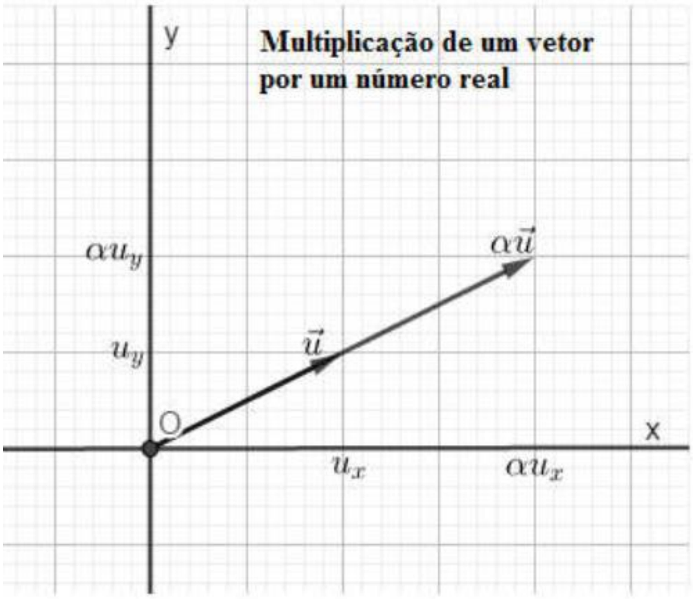
Figura 2.18: Múltiplos de $\vec{v}$



Fonte: Winterle, 2000.

Seja $\vec{u}$ = $(u_x \, , u_y)$ um vetor do plano expresso em termos de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais xOy e $\alpha \in$ R, assim definimos que $\alpha\vec{u}$ = $(\alpha u_x \, , \alpha u_y)$.

Figura 2.19: Multiplicação de vetor por número real.

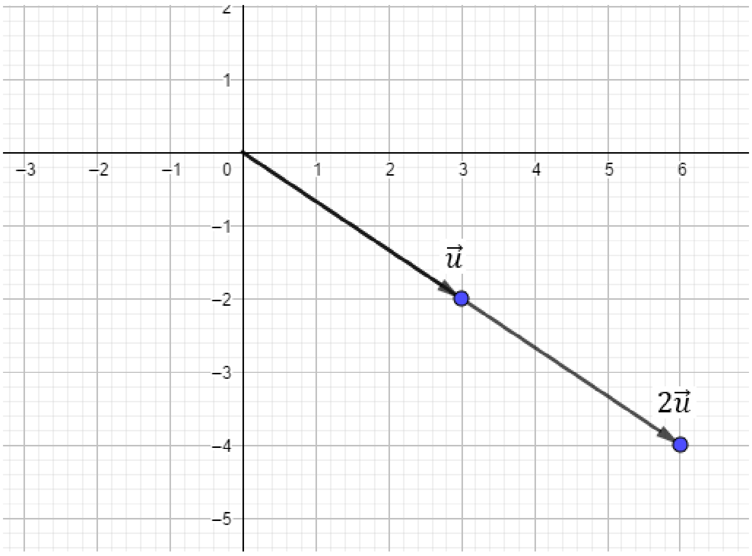


Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

Exemplo 13: Dados os vetores $\vec{u}$ = (2 , 5) e $\vec{v}$ = (4 , −3), determinar $\vec{u}$ + $\vec{v}$ e $\vec{u}$ - $\vec{v}$.
Solução: Temos que u_x = 2 , u_y = 5 , v_x = 4 e v_y = -4. Assim:
$\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (2 , 5) + (4 , -3) = (2+4 , 5 +(-3)) = (6 , 2)
$\vec{u}$ - $\vec{v}$ = (2 , 5) - (4 , -3) = (2 , 5) + (-4 , 3) = (2+(-4) , 5+3) = (-2 , 8)

Exemplo 14: Determinar 2$\vec{u}$, sabendo que $\vec{u}$ = (3 , -2)
Solução: 2$\vec{u}$ = 2. (3, -2) = (2.3 , 2.(-2)) = (6 , -4)

Figura 2.20: Vetor $2\vec{u}$



Fonte: O próprio autor.

2.2.3.5 Norma ou módulo de um vetor

A norma ou comprimento de um vetor $\vec{v}$ é o número $\|\vec{v}\|$ dado pelo comprimento de um segmento representante de $\vec{v}$ [10].

Observação:

a) A norma de um vetor independe da escolha do segmento representante. Assim, se $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{CD}$, então

AB ≡ CD e, portanto, d (A, B) = d (C, D) = $\|\vec{v}\|$

b) Se A = $(x_A\,, y_A)$, B = $(x_B\,, y_B)$ e $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$, então $\|\vec{v}\|$ = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

c) Se P = (x,y) é o ponto tal que $\vec{v}$ = $\overrightarrow{OP}$, sendo O a origem, então
$\|\vec{v}\|$ = d(O,P) = $\sqrt{x^2 + y^2}$

Exemplo 15: Dados A (-1,3) e B (5,2), determinar a norma do vetor $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$.
Solução:
Temos que $\|\vec{v}\|$ = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ = $\sqrt{(5-(-1))^2 + (2 - 3)^2}$ =
= $\sqrt{6^2 + (-1)^2}$ = $\sqrt{37}$

2.2.4 Condição de alinhamento entre três pontos (estudo vetorial)

Utilizando a notação e o conceito de vetores podemos dizer que, considerando os pontos A $(x_A\ , y_A)$, B $(x_B\ , y_B)$ e C $(x_C\ , y_C)$, os três pontos estão alinhados ou, o ponto B pertence à reta que para por A e C se, e somente se, $\overrightarrow{AB}$ = λ$\overrightarrow{BC}$, para algum λ ϵ R [12].

Exemplo 16: Determinar se os pontos A = (1,2), B= (3,5) e C = (5,8) estão alinhados [12].
Solução:
Para estarem alinhados precisamos que exista λ tal que $\overrightarrow{AB}$ = λ$\overrightarrow{BC}$.
$\overrightarrow{AB}$ = λ$\overrightarrow{BC}$
B - A = λ (C - B)
(3 , 5) – (1 , 2) = λ [(5 , 8) – (3 , 5)]
(2 , 3) = λ (2 , 3)
Bastar tomar λ=1 e a igualdade acima será satisfeita.
Portante A, B e C estão alinhados.

2.2.5 Ângulo entre vetores

O ângulo entre os vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o menor ângulo entre os segmentos representantes AB e AC de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente. Designamos < ($\vec{u}$, $\vec{v}$) a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

2.2.6 Produto interno ou produto escalar

Segundo Delgado, Drensel e Crissaff [13], o produto interno é uma operação que associa a cada par de vetores um escalar.

Definição 3: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ é o ângulo entre eles, então, o produto interno de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, designado por < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > ou $\vec{u}$. $\vec{v}$, é dado por:
< $\vec{u}$, $\vec{v}$ > = $\|\vec{u}\|$. $\|\vec{v}\|$. cos θ [10]

Na proposição a seguir vamos obter o produto interno entre dois vetores através de suas coordenadas em relação a um sistema de eixos ortogonais.

Proposição: Sejam $\vec{u} = (x_u , y_u)$ e $\vec{v} = (x_v , y_v)$, dois vetores do plano. Então:

$< \vec{u} , \vec{v} > = x_u x_v + y_u \, y_v$ [10]

Demonstração: Se um dos vetores $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, temos que $< \vec{u} , \vec{v} > = 0$ e também que $x_u x_v + y_u \, y_v = 0$. Logo a proposição é satisfeita.

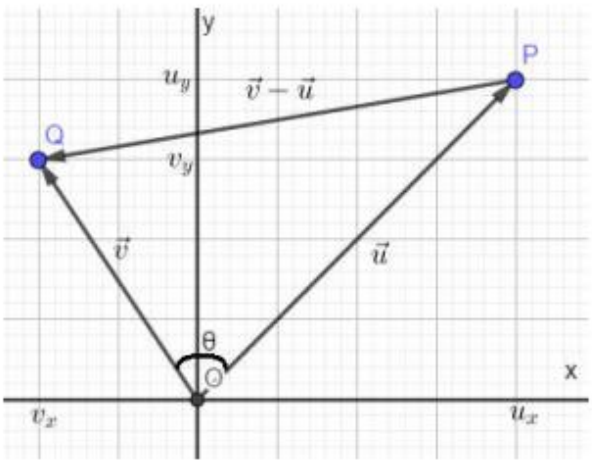
Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ vetores não nulos, com P = (x_u , y_u) e Q = (x_v , y_v). Então, como mostra a figura a seguir,
$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{v} - \vec{u} = (x_v - x_u \; , \; y_v - y_u)$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo OPQ, obtemos:
$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 \, \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$, (1)
onde θ é o ânguo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
Sabemos que ,
$< \vec{u} , \vec{v} > = \|\vec{u}\| \, . \, \|\vec{v}\| \, . \cos\theta$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:
$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2 < \vec{u} , \vec{v} >$
$2 < \vec{u} , \vec{v} > = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2$
$2 < \vec{u} , \vec{v} > = (x_u^2 + y_u^2) + (x_v^2 + y_v^2) - [(x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2]$
$2 < \vec{u} , \vec{v} > = x_u^2 + y_u^2 + x_v^2 + y_v^2 - x_v^2 + 2x_u x_v - x_u^2 - y_v^2 + 2y_u y_v - y_u^2$
$2 < \vec{u} , \vec{v} > = 2x_u x_v + 2y_u y_v$
$2 < \vec{u} , \vec{v} > = 2 \, (x_u x_v + y_u y_v)$
$< \vec{u} , \vec{v} > = x_u x_v + y_u y_v$

Portanto,
$< \vec{u} , \vec{v} > = \|\vec{u}\| \, . \, \|\vec{v}\| \, . \cos\theta = x_u x_v + y_u y_v$

Figura 2.21: Diferença $\vec{v} - \vec{u}$



Fonte: Fonte: Antônio Alison, 2019.

Observação:
O sinal de $< \vec{u}\ , \vec{v} >$ é o mesmo de cos θ, assim temos:
1) $< \vec{u}\ , \vec{v} > \ > 0 \leftrightarrow \cos\theta > 0 \leftrightarrow 0° \leq \theta \leq 90°$
2) $< \vec{u}\ , \vec{v} > \ < 0 \leftrightarrow \cos\theta < 0 \leftrightarrow 90° < \theta \leq 180°$
3) $< \vec{u}\ , \vec{v} > \ = 0 \leftrightarrow \cos\theta = 0 \leftrightarrow \theta = 90°$

Com isso, dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $< \vec{u}\ , \vec{v} > = 0$, ou seja, o ângulo entre eles é 90°.

Exemplo 17: Dados $\vec{u}$ = (3 , -2) e $\vec{v}$ = (2 , 5), determinar $< \vec{u}\ , \vec{v} >$.

Solução: Temos que x_u= 3 , y_u= -2, x_v = 2 e y_v = 5.

Substituindo esses valores em $< \vec{u}\ , \vec{v} > = x_u x_v + y_u y_v$, temos:

$$< \vec{u}\ , \vec{v} > = 3.2 + (-2).5$$
$$< \vec{u}\ , \vec{v} > = 6 - 10$$
$$< \vec{u}\ , \vec{v} > = -4$$

Exemplo 18: Dados os vetores $\vec{u}$ = (2 , 2) e $\vec{v}$ = (0 , 2), calcular o ângulo entre eles.
Solução:
Calculando a norma de cada vetor e o produto entre as normas:
$||\vec{u}|| = \sqrt{(2^2 + 2^2)}$
$||\vec{u}|| = \sqrt{(4 + 4)}$
$||\vec{u}|| = \sqrt{8}$

$||\vec{v}|| = \sqrt{(0^2 + 2^2)}$
$||\vec{v}|| = \sqrt{(0 + 4)}$
$||\vec{v}|| = \sqrt{4}$

$||\vec{u}|| \ . \ ||\vec{v}|| = \sqrt{8} \ . \sqrt{4}$
$||\vec{u}|| \ . \ ||\vec{v}|| = \sqrt{32}$
$||\vec{u}|| \ . \ ||\vec{v}|| = 4\sqrt{2}$

Calculando o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:
$< \vec{u}\ , \vec{v} > \ = \ 2 \ . \ 0 + 2 \ . \ 2$
$< \vec{u}\ , \vec{v} > = 4$

Mas $< \vec{u}\ , \vec{v} > = ||\vec{u}|| \ . \ ||\vec{v}|| \ . \cos\theta$, logo:
$\cos\theta = \dfrac{< \vec{u}\ ,\vec{v} >}{||\vec{u}|| \ .||\vec{v}||}$

$\cos\theta = \dfrac{4}{4\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = 45°$

2.2.7 Vetor unitário

Um vetor é chamado unitário se sua norma é igual a 1.

Seja v um vetor, onde $\|\vec{v}\| \neq 1$, o vetor $\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário, chamado de normalizado [14].

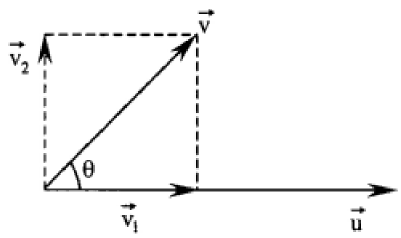
Exemplo 19: Determinar o normalizado do vetor $\vec{v} = (4\ , -3)$.
Solução:
Como $\|\vec{v}\| = \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$, o normalizado de $\vec{v}$ é o vetor:
$\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{1}{5} \cdot (4\ , -3) = \left(\dfrac{4}{5}\ , \dfrac{-3}{5}\right)$

2.2.8 Projeção ortogonal de um vetor sobre outro

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e θ o ângulo entre eles. Tomemos $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$ [11].

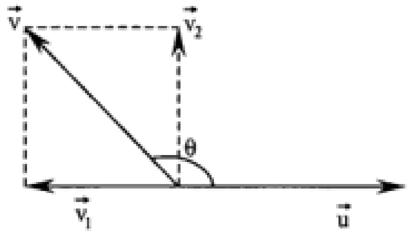
As figuras 2.22 e 2.23 a seguir, ilustram as duas situações possíveis, podendo ser θ agudo ou obtuso.

Figura 2.22: Ângulo θ agudo



Fonte: Winterle, 2000.

Figura 2.23: Ângulo θ obtuso



Fonte: Winterle, 2000.

O vetor $\vec{v}_1$ é chamado projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e indicado por $\vec{v}_1 = Proj_{\vec{u}}\, \vec{v}$.

Sendo $\vec{v}_1 /\!/ \vec{u}$, temos $\vec{v}_1 = \propto \vec{u}$, e como $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = \vec{v} - \propto \vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, vem que

$$(\vec{v} - \propto \vec{u}).\vec{u} = 0 \quad \text{ou}$$
$$\vec{v}.\vec{u} - \propto \vec{u}.\vec{u} = 0 \quad \text{e}$$
$$\propto = \frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}$$

Portanto, sendo $\vec{v}_1 = \propto \vec{u}$, concluímos que $Proj_{\vec{u}}\, \vec{v} = \left(\frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\right).\vec{u}$ [11].

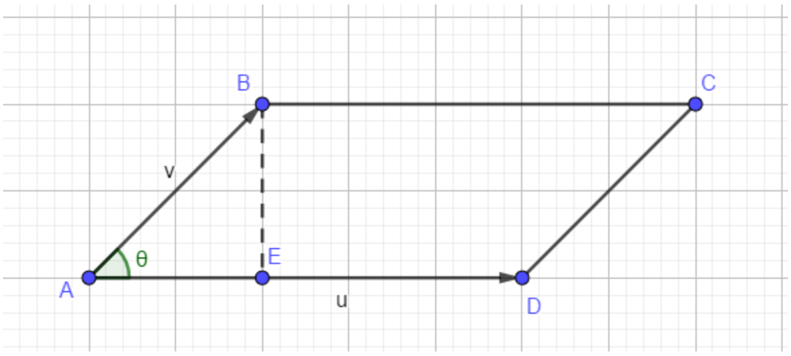
Exemplo 20: Determinar o vetor projeção de $\vec{v} = (2,4)$ sobre $\vec{u} = (2,2)$.
Solução:
Temos
$\vec{v} \,.\, \vec{u} = 2.2 + 4.2 = 4 + 8 = 12$
$\vec{u} \,.\, \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$

Logo
$Proj_{\vec{u}}\, \vec{v} = \left(\frac{\vec{v}.\vec{u}}{\vec{u}.\vec{u}}\right).\vec{u} = \frac{12}{8} \,.\, (2,2) = \left(\frac{24}{8} \,,\, \frac{24}{8}\right) = (3,3)$

2.2.9 Área de paralelogramos e triângulos

Consideremos o paralelogramo ABCD da figura a seguir.

Figura 2.24: Paralelogramo ABCD



Fonte: O próprio autor

A área de ABCD é obtida multiplicando a medida da base |AD| pela altura |EB|. Se θ=BÂC, então:

sen $\theta = \frac{|EB|}{|AB|}$

|EB| = |AB| . sen θ

E portanto,

Área ABCD = |AB|. |AC| . sen θ (1)

Para obter a área do paralelogramo ABCD usando vetores e produto interno, consideremos $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Temos que

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}$$

$$\sqrt{1 - sen^2\,\theta} = \frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}$$

$$1 - sen^2\,\theta = \left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2 \qquad (2)$$

Mas de (1) temos que

$$\text{sen}^2\,\theta = \left(\frac{A}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2 \qquad (3)$$

substituindo (3) em (2),

$$1 - \left(\frac{A}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2 = \left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2$$

$$\left(\frac{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2 - \left(\frac{A}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2 = \left(\frac{\vec{u}\,.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,.\|\vec{v}\|}\right)^2$$

$$(\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|)^2 - A^2 = (\vec{u}\,.\,\vec{v})^2$$

$$A^2 = (\|\vec{u}\|\,.\,\|\vec{v}\|)^2 - (\vec{u}\,.\,\vec{v})^2$$

$$A^2 = \|\vec{u}\|^2.\,\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\,.\,\vec{v})^2$$

Se $\vec{u} = (x_u\ , y_u)$ e $\vec{v} = (x_v\ , y_v)$ em relação a um sistema de eixos ortogonais de centro O, então
$\|\vec{u}\|^2 = x_u^2 + y_u^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x_v^2 + y_v^2$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v$

e portanto,

$$A^2 = \left(x_u^2 + y_u^2\right)\left(x_v^2 + y_v^2\right) - \left(x_u x_v + y_u y_v\right)^2$$

$$A^2 = x_u^2 x_v^2 + x_u^2 y_v^2 + y_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 - x_u^2 x_v^2 - 2\, x_u x_v y_u y_v - y_u^2 y_v^2$$

$$A^2 = x_u^2 y_v^2 + y_u^2 x_v^2 - 2\, x_u x_v y_u y_v$$

$$A^2 = (x_u y_v)^2 - 2\, x_u x_v y_u y_v + (y_u x_v)^2$$

$$A^2 = (x_u y_v - y_u x_v)^2$$

$$A = x_u y_v - y_u x_v$$

$$A = \det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$$

Assim, a área do paralelogramo ABCD, cujos lados adjacentes são representados por $\vec{u} = (x_u\ , y_u)$ e $\vec{v} = (x_v\ , y_v)$, é igual ao módulo do determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, respectivamente:

$$A = \left|\det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}\right|$$

Podemos dividir o paralelogramo ABCD em dois triângulos congruentes ABC e CDA. Logo Área (ABC) = Área (CDA). Com isso:

$$\text{Área (ABCD)} = 2.\ \text{Área(ABC)} = \left|\det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}\right|$$

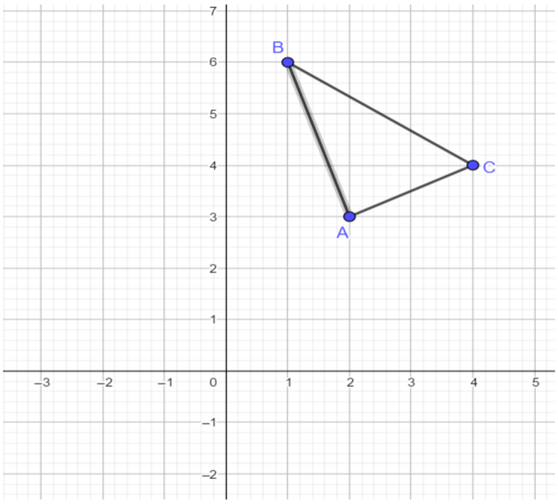
Portanto,

$$\text{Área(ABC)} = \frac{1}{2} \cdot \left|\det \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}\right| \qquad [10]$$

Exemplo 21: Calcular a área do triângulo de vértices A = (2,3), B = (1,6) e C = (4,4).

Solução:

Figura 2.25: Triângulo ABC



Fonte: O próprio autor

Tomando $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, então $\vec{u}$ = B – A = (-1,3) e $\vec{v}$ = C – A = (2,1). Assim

Área(ABC) = $\frac{1}{2} . \left| \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right|$

Área(ABC) = $\frac{1}{2} . |-1.1 - 2.3|$

Área(ABC) = $\frac{1}{2} . |-1 - 6|$

Área(ABC) = $\frac{1}{2} . |-7|$

Área(ABC) = $\frac{7}{2}$

2.2.10 Uma Aplicação na Física

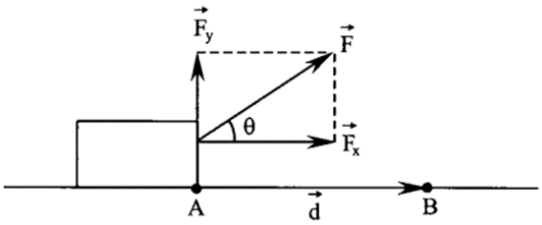
Segundo Winterle [11], o produto interno (escalar) é uma importante ferramenta matemática para a Física, uma vez que inúmeras grandezas físicas são definidas com seu emprego, como por exemplo, o trabalho de uma força.

Dizemos que existe trabalho quando uma força aplicada em um corpo provoca o deslocamento desse corpo.

Segundo Winterle [11], o trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ ao longo de um determinado deslocamento $\vec{d}$ é definido como o produto interno desta força pelo deslocamento efetuado pelo corpo no qual a força está aplicada.

Pela figura 2.26, podemos observar que a componente da força $\vec{F}$ que realiza o trabalho é $\overrightarrow{F_x}$ paralela ao deslocamento $\overrightarrow{AB} = \vec{d}$.

Figura 2.26: Componente $\overrightarrow{F_x}$ realizando trabalho.



Fonte: Winterle, 2000.

Assim, $|\overrightarrow{F_x}| = |\vec{F}| \,.\, \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre a força e o deslocamento.

A grandeza física trabalho, notada por W, é uma grandeza escalar e tem como unidade no SI o joule, notado por J, onde 1J = 1N . 1m

A expressão para cálculo do trabalho W é

W = $\vec{F} \,.\, \vec{d}$ ou W = $|\vec{F}|\,|\vec{d}| \cos\theta$

Exemplo 22: (PUC-BA) A força F de módulo 30N atua sobre um objeto formando um ângulo constante de 60° com a direção do deslocamento do objeto. Se d=10m, qual o trabalho realizado pela força F, em Joules?

Solução:

W = $|\vec{F}|\,|\vec{d}| \cos\theta = |30|\,|10| \cos 60° = 30 \,.\, 10 \,.\, \frac{1}{2} = 150$ J

Portando, W = 150 J.

Exemplo 23: Uma caixa de 6Kg é levantada de uma altura de 3m, a partir do repouso, por uma força aplicada vertical de 80N. Qual o trabalho realizado sobre a caixa pela força aplicada?

Solução: Neste caso o ângulo θ entre a força e o deslocamento é 0°, assim,

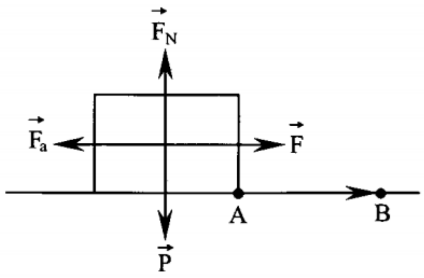
W = $|\vec{F}|\,|\vec{d}| \cos|\vec{d}| = |80| \,.\, |3| \,.\, \cos 0° = 240$ J

Portanto, W = 240 J.

Exemplo 24 : Calcular o trabalho realizado pelas forças constantes, $\vec{F}$, $\overrightarrow{F_a}$, $\overrightarrow{F_N}$ e $\vec{P}$ e pela força resultante, para deslocar o bloco de A até B, sabendo que $|\vec{F}|$= 12N, $|\overrightarrow{F_a}|$= 9N, $|\overrightarrow{F_N}|$= 4N, $|\vec{P}|$= 4N, $\vec{d}$ = $\overrightarrow{AB}$ e $|\vec{d}|$= 15m [11].

Solução:

Figura 2.27: Forças aplicadas no bloco



Fonte: Winterle, 2000.

a) W_F = $|\vec{F}|$ $|\vec{d}|$ cos θ

com θ = 0°, temos

W_F = 12N . 15m . 1 = 180J

b) W_{F_a} = $|\overrightarrow{F_a}|$ $|\vec{d}|$ cos θ

como θ = 180°, temos

W_{F_a} = 9N . 15m . (-1) = - 135 J

c) W_{F_N} = $|\overrightarrow{F_N}|$ $|\vec{d}|$ cos θ

como θ = 90°, temos

W_{F_N} = 4N . 15m . 0 = 0 J

d) W_P = $|\vec{P}|$ $|\vec{d}|$ cos θ

como θ = 90°, temos

W_P = 4N . 15m . 0 = 0 J

e) Seja W_R o trabalho resultante.

Assim, W_R = W_F + W_{F_a} + W_{F_N} + W_P = 180J + (-135J) + 0J + 0J = 45J

Portanto W_R = 45 J.

2.3 EQUAÇÕES DA RETA

Dividiremos este estudo em duas partes:

a) sem uso de vetores:

Equação Geral da Reta

Equação Reduzida da Reta

Equação Segmentária da Reta

b) com uso de vetores:

Equação Vetorial da Reta

Equação Paramétrica da Reta

Equação Cartesiana ou Geral da Reta

2.3.1 Equação Geral da Reta

Segundo Iezzi [15], toda reta r do plano cartesiano pode ser expressa por uma equação do tipo ax + by + c = 0 , onde:

- a, b e c são números reais;
- a e b não são simultaneamente nulos.

Para obter a equação geral da reta r, sejam A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) dois pontos de r. Usando a condição de alinhamento de A e B com um ponto genérico P (x,y) de r, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad xy_a + yx_b + x_a y_b - x_b y_a - y_b x - y x_a = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(y_a - y_b)\, x + (x_b - x_a)\, y + (x_a y_b - x_b y_a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0$$

chamada equação geral da reta r.

2.3.2 Equação Reduzida da Reta

A equação reduzida da reta pode ser obtida diretamente da equação geral ax + by + c = 0, se b $\neq$ 0:

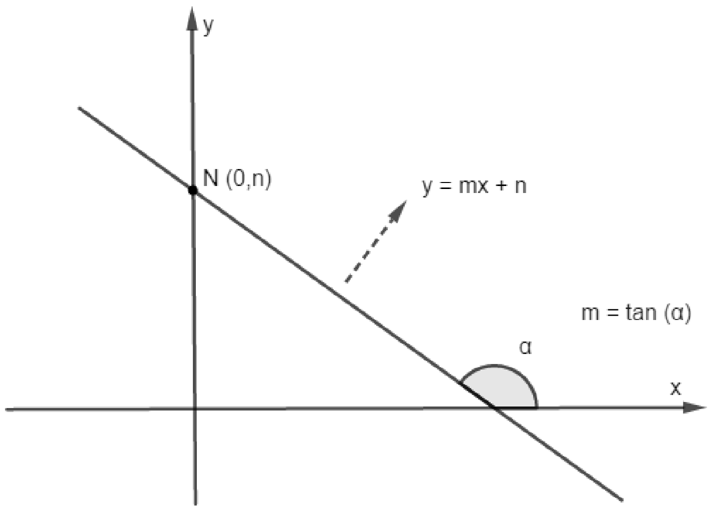
$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right)$, fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$, a equação pode ser escrita como :

$$y = mx + q,$$

que é denominada equação reduzida da reta r.

Na equação reduzida da reta, o coeficiente m é chamado de coeficiente angular e o coeficiente n é chamado de coeficiente linear. O coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy e o coeficiente angular dessa reta é igual a tangente de α, onde α é o ângulo de inclinação da reta, a ser medido do eixo Ox para a reta r, no sentido anti-horário.

Figura 2.28: Equação reduzida da reta



Fonte: O próprio autor

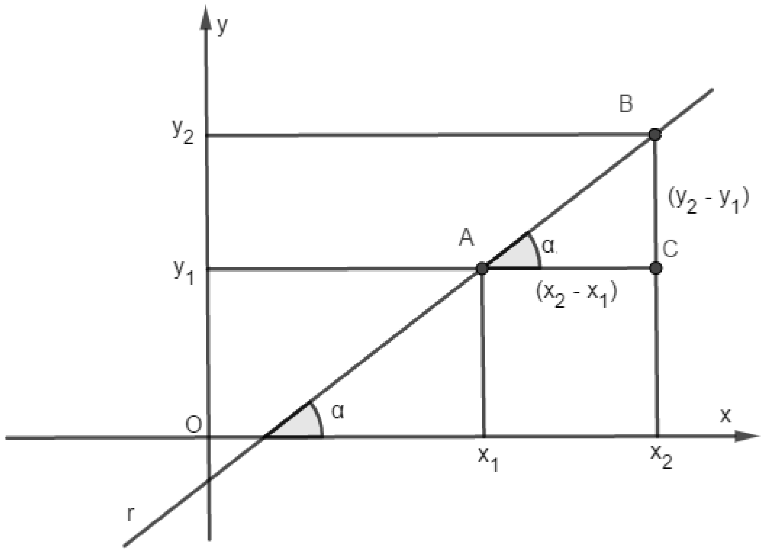
Segundo Iezzi [15], temos três formas para calcular o coeficiente angular de uma reta:

1) conhecendo o ângulo de inclinação (α):
   como m = tg (α), temos:
   i) se α é agudo, então m é positivo
   ii) se α é obtuso, então m é negativo
   iii) se α é nulo, então m é nulo
   iv) se α é reto, então não se define m

2) Conhecendo as coordenadas de dois pontos:

Seja o triangulo retângulo ABC, onde seus catetos são (y_2 - y_1) e (x_2 - x_1). Assim temos:
m = tg (α) = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, com $x_2 \neq x_1$.

Figura 2.29: Coeficiente Angular da Reta



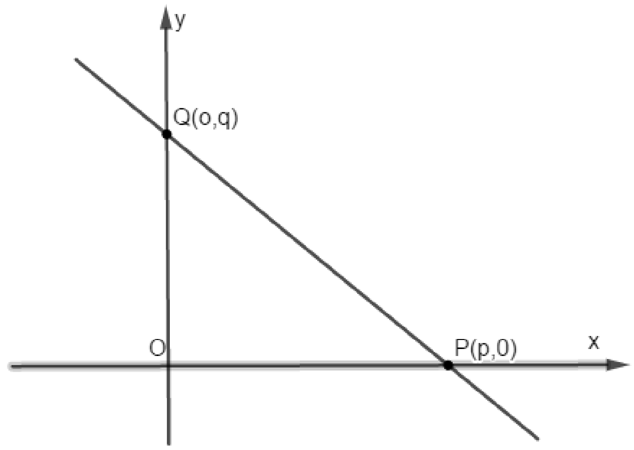
Fonte: O próprio autor

3) conhecendo a equação geral ax + by + c = 0, :
m = - $\frac{a}{b}$, com b $\neq$ 0

2.3.3 Equação Segmentária da Reta

Seja r uma reta que cruza os eixos cartesianos nos pontos (0,q) e (p,0).

Figura 2.30: Equação Segmentária da Reta



Fonte: O próprio autor

Escrevendo a equação da reta r, temos:

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{q}x + \mathrm{p}y - \mathrm{pq} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{q}x + \mathrm{p}y = \mathrm{pq}$

dividindo ambos lados da igualdade por pq, obtemos a equação segmentaria da reta:

$$\frac{x}{\mathbf{p}} + \frac{y}{\mathbf{q}} = 1$$

Exemplo 25: Determinar a equação da reta de 135° de inclinação e que passa pelo ponto A (1,4).

Solução:

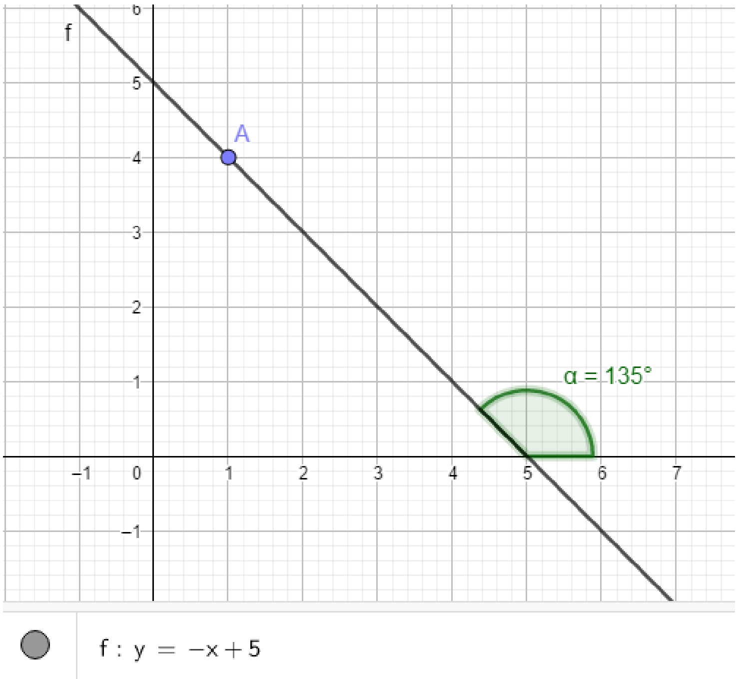
m = tg 135° = - 1

mas, m = $\frac{y - y_a}{x - x_a}$, entao :

$- 1 = \frac{y-4}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y - 4 = -1\,(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 5$ (Reduzida)

Na figura 2.31 a seguir, temos a representação da reta y = -x + 5 no Geogebra, verificando que ela passa por A (1,4) e tem 135º de inclinação

Figura 2.31: Reta y = - x + 5



Fonte: O próprio autor

Exemplo 26: Obter a equação da reta que passa por A (4,3) e B (0,7).

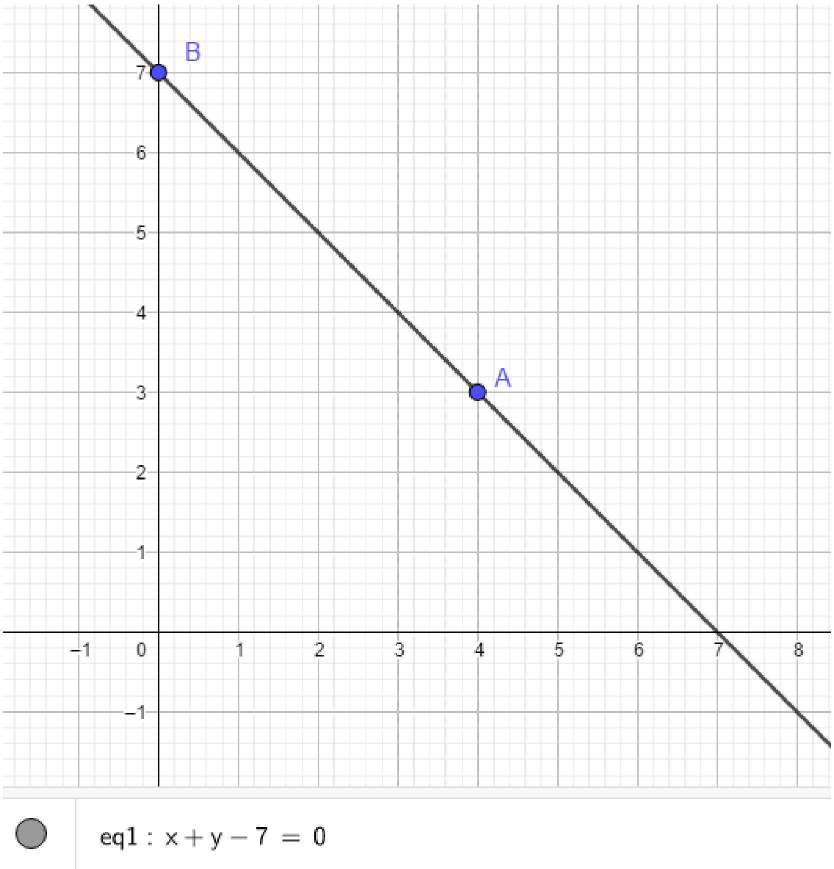
Solução:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 28 - 7x - 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad -4x - 4y + 28 = 0 \quad \xRightarrow[:(-4)]{}$$

$\Rightarrow$ x + y -7 = 0 (Geral)

Na figura 2.32 a seguir, temos a representação da reta x + y - 7 = 0 no Geogebra, verificando que ela passa pelos pontos A (4,3) e B (0,7).

Figura 2.32: Reta x + y – 7 = 0



Fonte: O próprio autor

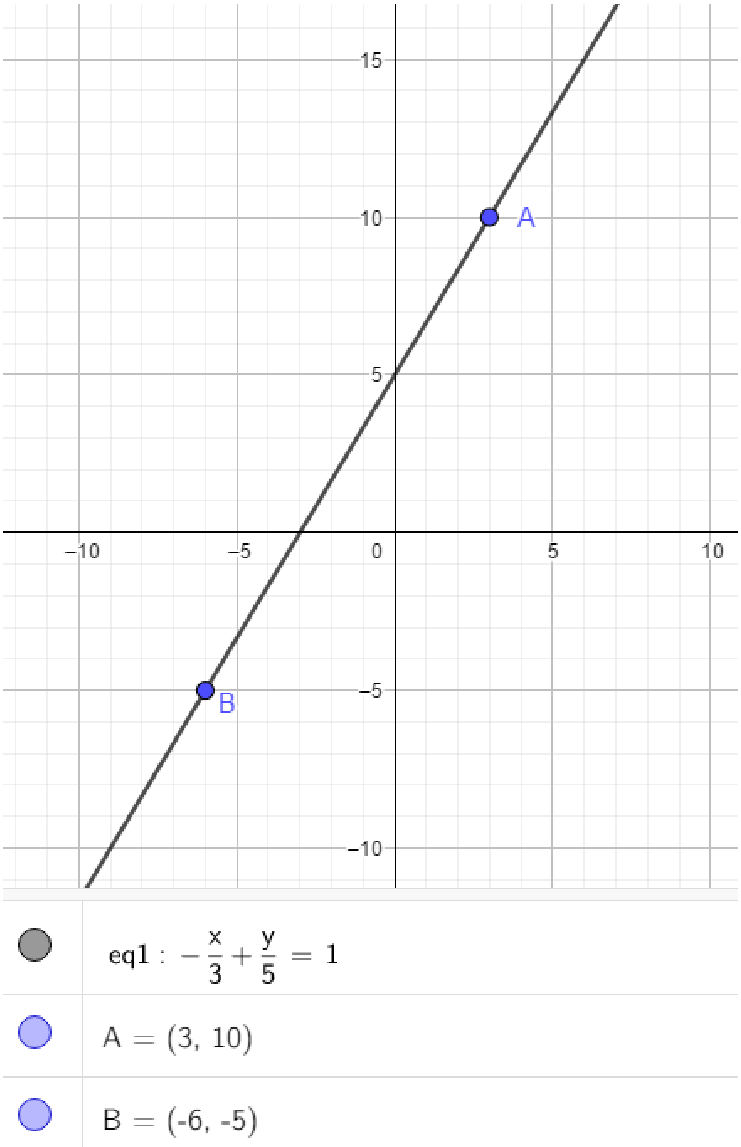
Exemplo 27: Dados A (3,10) e B (-6,-5), determinar a equação segmentária da reta AB.

Solução: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ -6 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ⇒ 10x - 6y - 15 + 60 + 5x - 3y = 0 ⇒ 15x -9y + 45 = 0 ⇒

⇒ 15x – 9y = - 45 ⇒ $\frac{15x}{-45} - \frac{9y}{-45} = \frac{-45}{-45}$ ⇒ $-\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$

Na figura 2.33 a seguir, temos a representação da reta $-\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$, verificando que passa por A (3,10) e B (-6,-5).

Figura 2.33 : Reta $-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$



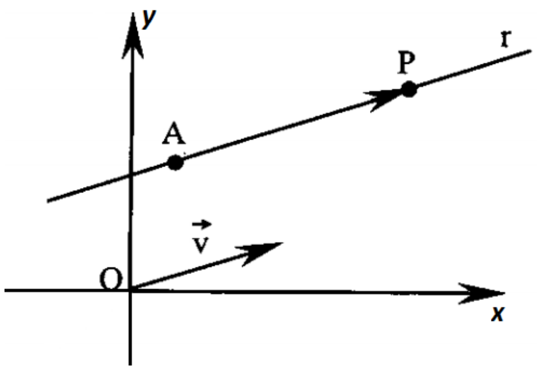
Fonte: O próprio autor

2.3.4 Equação Vetorial da Reta

Consideremos um ponto A (x_a, y_a) e um vetor não nulo $\vec{v} = (x_v, y_v)$. Só existe uma reta que passa por A e tem direção de $\vec{v}$. Um ponto P (x,y) pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v} \quad \Rightarrow \quad P - A = t\vec{v} \quad \Rightarrow \quad P = A + t\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (x_a, y_a) + t(x_v, y_v),\ t \in R.$$

Figura 2.34: Equação Vetorial da Reta



Fonte: Winterle, 2000.

Qualquer uma das equações acima é denominada equação vetorial de r.

O vetor $\vec{v}$ é chamado vetor diretor da reta r e t é denominado parâmetro.

2.3.5 Equações Paramétricas da Reta

Da equação vetorial da reta (x,y) = (x_a, y_a) + t$(x_v\ , y_v)$, temos:

(x,y) = (x_a, y_a) + t$(x_v\ , y_v)$

(x,y) = $(x_a + tx_v\ , y_a + ty_v)$,

pela condição de igualdade, obtemos:

$$\begin{cases} x = \ x_a + x_v\, t \\ y = \ y_a + \ y_v\, t \end{cases}$$

que são denominadas equações paramétricas da reta.

Exemplo 28: Determinar a equação vetorial da reta r que passa pelo ponto A (2,-1) e é paralela ao vetor $\vec{v}$ = (-1 , 5).

Solução:

Como $\vec{v}$ é paralelo à reta r, $\vec{v}$ é o vetor diretor da reta r.

Tomemos P ∈ r, tal que P = (x,y).

Temos então que P = A + t$\vec{v}$ ⇒ (x,y) = (x_a, y_a) + t$(x_v\ , y_v)$ ⇒

⇒ (x,y) = (2 , -1) + t (-1 , 5), que é a equação vetorial da reta r.

Exemplo 29: Considerar os pontos A = (3,2) e B = (1,4).

a) Obter a equação paramétrica da reta r que passa pelos pontos A e B.

b) Encontrar o ponto P ∈ r associado ao parâmetro 3.

Solução:

a) temos $\vec{v}$ = $\overrightarrow{AB}$ = B – A = (1,4) – (3,2) = (1-3 , 4-2) = (-2,2)

Seja P = (x,y) ∈ r , e consideremos o ponto A:

$$\begin{cases} x = x_a + x_v\, t \\ y = y_a + y_v\, t \end{cases},$$

assim:

$$\begin{cases} x = 3 - 2\,t \\ y = 2 + 2\,t \end{cases}, \quad t \in r$$

b) Para encontrarmos P associado ao parâmetro t = 3, basta substituir o valor de t nas equações paramétricas de r encontradas acima:

$x = 3 - 2\,.3 = 3 - 6 = -3$ e $y = 2 + 2\,.2 = 2 + 4 = 6$.

Logo P (-3,6)

2.3.6 Equações Cartesiana ou Geral da Reta

Seja r a reta que passa pelo ponto A (x_A, y_A) e é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (x_V\ , y_V) \neq (0,0)$. Então:

P = (x,y) ∈ r $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP} \perp \vec{v}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}.\,\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x - x_a\ , y - y_a)\,.\,(x_v\ , y_v) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x_v\,(x - x_a) + y_v\,(y - y_a) = 0$

$\Leftrightarrow$ $x_v\,x + y_v\,y = x_v\,x_a + y_v\,y_a$

$\Leftrightarrow$ $x_v\,x + y_v\,y = c$, onde $c = x_v\,x_a + y_v\,y_a$

A equação cartesiana ou geral da reta r é r: $x_v\,x + y_v\,y = c$

Observação: O vetor $\vec{v}$ é chamado de vetor normal a r

Exemplo 30: Seja r a reta que passa pelo ponto A (2,5) e é perpendicular ao vetor $\vec{v}$ = (1,3) Determinar a equação geral da reta.

Solução:

Como $\vec{v} \perp$ r , devemos ter 1x + 3y = c

O valor de c é calculado sabendo que A (2,5) ∈ r, isto é,

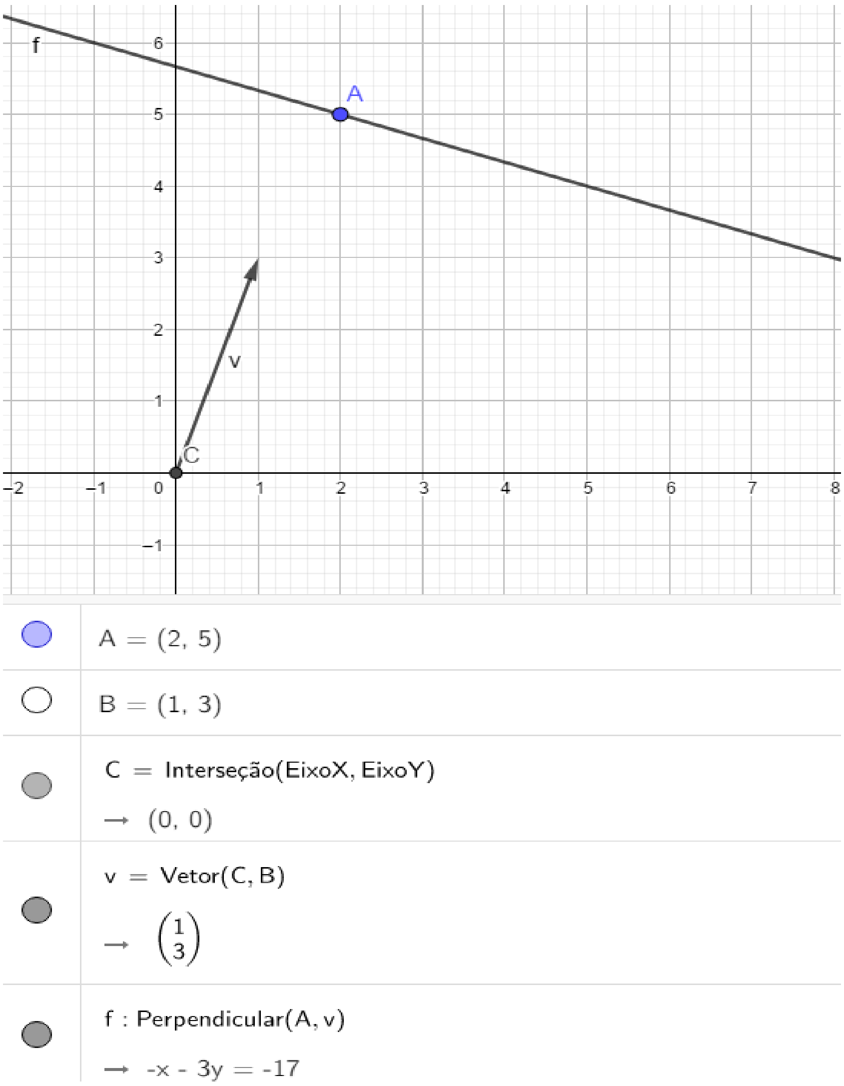
c = 1.2 + 3.5 = 17

Portanto, a equação geral da reta é

r: x + 3y = 17

Na figura 2.35 a seguir, representamos no Geogebra o ponto A (2,5), o vetor $\vec{v}$ = (1,3) e a perpendicular ao vetor $\vec{v}$ e que passa por este ponto A.

Figura 2.35: Reta r perpendicular ao vetor $\vec{v}$



Fonte: O próprio autor

2.3.7 Posições Relativas entre Retas no Plano

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff [13], duas retas r e s no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

a) coincidentes: quando são iguais, isto é, r = s ;

b) Paralelas: quando não se intersectam, isto é, $r \cap s = \emptyset$. Neste caso, escrevemos $r /\!/ s$;

c) concorrentes: quando se intersectam em um ponto, isto é, $r \cap s = \{P\}$.

Sejam as reta r: ax + by = c e s: a´x + b´y = c´, onde os vetores $\vec{u}$ = (a,b) e $\vec{v}$ = (a´ , b´) são os vetores normais de r e s, respectivamente. Assim:

a) r e s são coincidentes se, e somente se, existe $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, tal que (a´ , b´) = λ (a,b) e c´= λ c

b) r e s são paralelas se, e somente se, existe $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, tal que (a´ , b´) = λ (a,b) e c´ ≠ λ c

c) r e s são concorrente se, e somente se, $\forall\ \lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, (a´ , b´) ≠ λ (a,b).

Observação: Um caso especial de concorrência é a perpendicularidade: as reta r e s serão perpendiculares se, e somente se, o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual a zero, ou seja,

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ = a . a´+ b . b` = 0

Exemplo 31: Determinar a posição relativa entre as retas r: 2x + 3y = 2 e s: 3x - 2y = 8 .

Solução: Os vetores normais de r e s são, respectivamente, $\vec{u}$ = (2,3) e $\vec{v}$ = (3,-2).

Observamos que não existe λ ≠ 0, tal que

(2,3) = λ (3,-2).

Logo as retas são concorrentes.

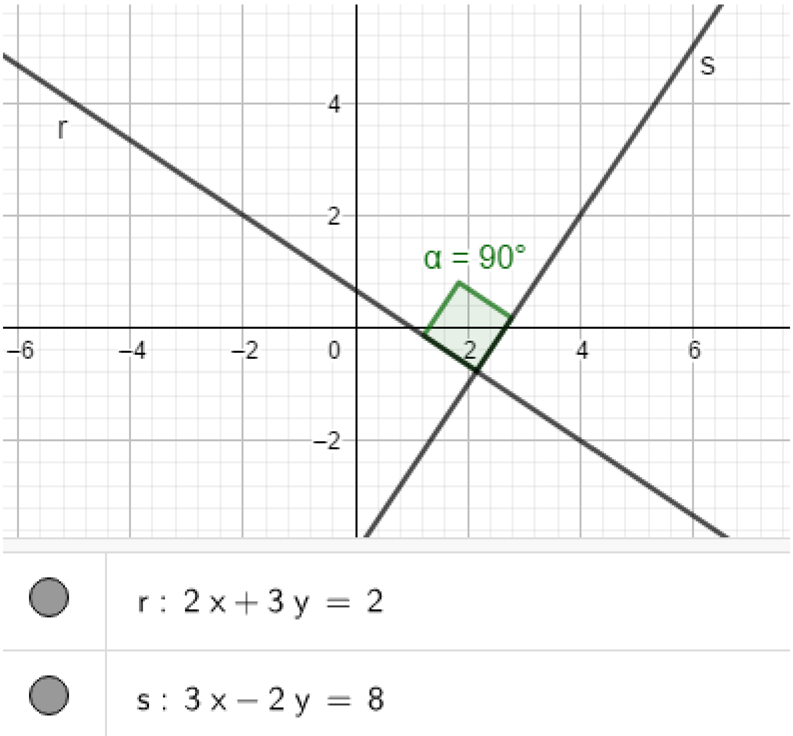
Mas,

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ = 2 . 3 + 3 . (-2) = 0.

Portanto, as retas r e s são perpendiculares.

Na figura 2.36 a seguir, temos as retas r: 2x + 3y = 2 e s: 3x - 2y = 8 representadas no Geogebra, verificando que são ortogonais.

Figura 2.36: Retas r e s ortogonais



Fonte: O próprio autor

Neste capítulo foi apresentado uma proposta de material de Geometria Analítica para ser utilizada em sala de aula. Assim, destacamos a teoria, algumas demonstrações, exemplos e aplicações. Para um melhor aproveitamento do conteúdo visto, fizemos a divisão em 5 parte:

- Parte 1: Localização e representação de ponto no plano, distância entre pontos, ponto médio de segmento e condição de alinhamento entre três pontos;
- Parte 2: Circunferência;
- Parte 3: Operações com vetores, condição de alinhamento entre três pontos através de estudo vetorial, ângulo entre vetores, produto interno, vetor unitário, projeção ortogonal de um vetor sobre outro e área de paralelogramos e triângulos;
- Parte 4: Aplicação de vetores em física;
- Parte 5: Equações da reta e posições relativas de retas no plano.

No próximo capítulo apresentaremos as atividades desenvolvidas em sala de aula em cada uma dessas partes.

Capítulo 3

APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

As atividades contidas neste capítulo foram desenvolvidas no terceiro ano do ensino médio de uma escola pública. Utilizamos como referência o material contido no capítulo 2 deste trabalho juntamente com uso de folha quadriculada e o software Geogebra.

Iniciamos o conteúdo de Geometria Analítica apresentando aos alunos 3 vídeos, utilizando o projetor em sala de aula.

Os vídeos são simples e curtos, mas tem a finalidade de fazer os alunos irem se familiarizando com o conteúdo que seria abordado na sequência.

O primeiro vídeo, encontrado no link https://www.youtube.com/watch?v=0LSy6MnOlHU, trata do Conceito e História da Geometria.

O segundo vídeo, encontrado no link https://www.youtube.com/watch?v=dyLv-f934Sc, nos fala sobre a História da Geometria Analítica.

No terceiro vídeo, temos exemplos de onde podemos encontrar a geometria analítica no cotidiano. Este vídeo é encontrado no link https://www.youtube.com/watch?v=UabSoSN_bik .

Após os vídeos, apresentamos aos alunos o software Geogebra, que é uma grande ferramenta para o ensino e estudo da Geometria Analítica. Com o aplicativo aberto, introduzimos a noção de plano cartesiano e eixos cartesiano, e explicamos algumas ferramentas simples, como: colocar pontos no plano, traçar segmentos e retas a partir de dois pontos, construir polígonos e circunferências.

Como o laboratório de informática da escola era pequeno e com poucas máquinas, infelizmente os alunos não puderam manusear de maneira significativa o software. Dessa maneira, adotamos em nossas aulas a folha quadriculada como material de apoio.

Relataremos a seguir algumas atividades que foram desenvolvidas em sala de aula com essa turma.

Parte 1 – Atividades relacionadas a localização e representação de ponto no plano, distância entre pontos, ponto médio de segmento e condição de alinhamento entre três pontos.

Material: Folha quadriculada, projetor multimídia e Geogebra.

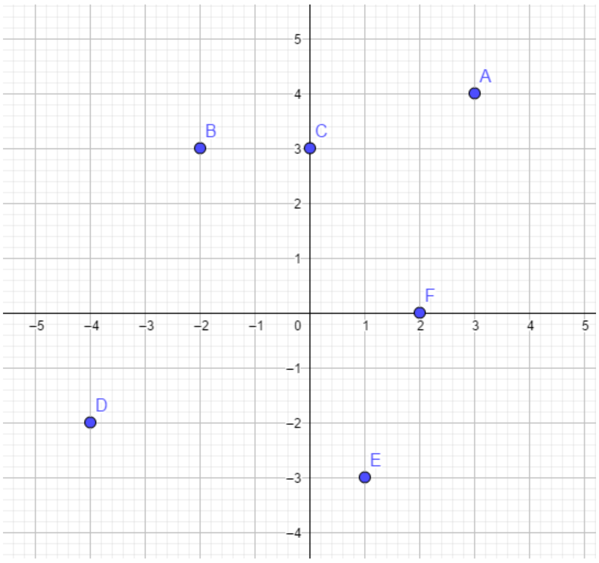
Público Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 aulas de 50 minutos cada.

Atividade 1.1 - Representar os pontos A(3,4) , B(-2,3), C(0,3) , D(-1,-6), E(1,-5) e F(2,0) em folha quadriculada e informar a qual quadrante pertencem.

Desenvolvimento: Os alunos construíram o plano cartesiano na folha quadriculada, representaram os pontos neste plano e informaram o quadrante que cada ponto pertence. Logo após, representamos os pontos no Geogebra, e assim os alunos puderam verificar se o que fizeram estava correto. A representação na folha quadriculada, deveria ser igual à representação a seguir, feita no Geogebra.

Figura 3.1: Resultado Atividade 1.1



Fonte: O próprio autor

A – 1° quadrante
B – 2° quadrante
C – pertence ao eixo das ordenadas
D – 3 ° quadrante
E – 4° quadrante
F – pertence ao eixo das abscissas

Atividade 1.2 - (UFRGS) Se um ponto P do eixo das abcissas é equidistante dos pontos A(1, 4) e B(–6, 3), a abscissa de P vale:

a) –2 b) –1 c) 0 d) 1 e) 3

Desenvolvimento: Primeiramente o aluno precisa verificar que se P pertence ao eixo das abscissa, P é da forma: P(x,0).

Em seguida, verificar que $d_{A,P}$ = $d_{B,P}$, e assim determinar o valor da abscissa x. Uma das maneiras para encontrar o valor da abscissas de P está a seguir:

$$d_{P,A} = d_{P,B}$$

$$\sqrt{(\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{x_P})^2 + (\boldsymbol{y_A} - \boldsymbol{y_P})^2} = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_P})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_P})^2}$$

$$\sqrt{(1-x)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-6-x)^2 + (3-0)^2}$$

$$(1-x)^2 + (4)^2 = (-6-x)^2 + (3)^2$$

$$1 - 2x + x^2 + 16 = 36 + 12x + x^2 + 9$$

$$1 - 2x + 16 = 36 + 12x + 9$$

$$1 + 16 - 36 - 9 = 12x + 2x$$

$$-28 = 14x$$

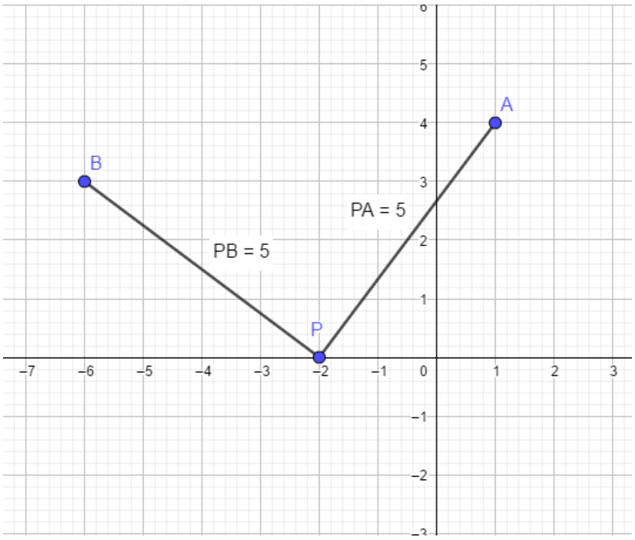
$$x = \frac{-28}{14}$$

$$x = -2$$

Portanto a resposta certa é a alternativa “a”.

Após encontrar o valor do x, representamos os pontos A, B e P no Geogebra e verificarmos que $d_{A,P}$ = $d_{B,P}$.

Figura 3.2: Verificação Atividade 1.2



Fonte: O próprio autor

Atividade 1.3 - (UFPI) A medida do perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos (1,1), (1,3) e (2,3) é:

a) $3 + \sqrt{5}$ b) $3 + 2\sqrt{5}$ c) $3 + 3\sqrt{5}$ d) $3 + 4\sqrt{5}$ e) $3 + 5\sqrt{5}$

Desenvolvimento: Nominamos A(1,1), B(1,3) e C(2,3) e determinamos $d_{A,B}$, $d_{B,C}$ e $d_{C,A}$. Em seguida, somamos os valores das distâncias para determinar o perímetro do triângulo. Uma das maneiras de resolução está a seguir:

$$d_{A,B} = \sqrt{(\boldsymbol{x_B} - \boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B} - \boldsymbol{y_A})^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(0)^2 + (2)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$d_{B,C} = \sqrt{(\boldsymbol{x_C} - \boldsymbol{x_B})^2 + (\boldsymbol{y_C} - \boldsymbol{y_B})^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$d_{C,A} = \sqrt{(\boldsymbol{x_A} - \boldsymbol{x_C})^2 + (\boldsymbol{y_A} - \boldsymbol{y_C})^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Perímetro = $d_{A,B} + d_{B,C} + d_{C,A} = 2 + 1 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$

Portanto a resposta certa é a alternativa "a".

Atividade 1.4 - Quais são os possíveis valores de c para que os pontos (c , 3), (2 , c) e (14, -3) sejam colineares?

Desenvolvimento: Após verificar a teoria 2.1.5 e o exemplo 8, sabemos que para 3 pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ serem colineares, precisamos que $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$
Tomamos então A(c,3), B(2,c) e C(14,-3) e substituímos na matriz acima. Obtivemos:

$$\begin{vmatrix} c & 3 & 1 \\ 2 & c & 1 \\ 14 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvemos o determinante acima e encontramos possíveis valores de c.

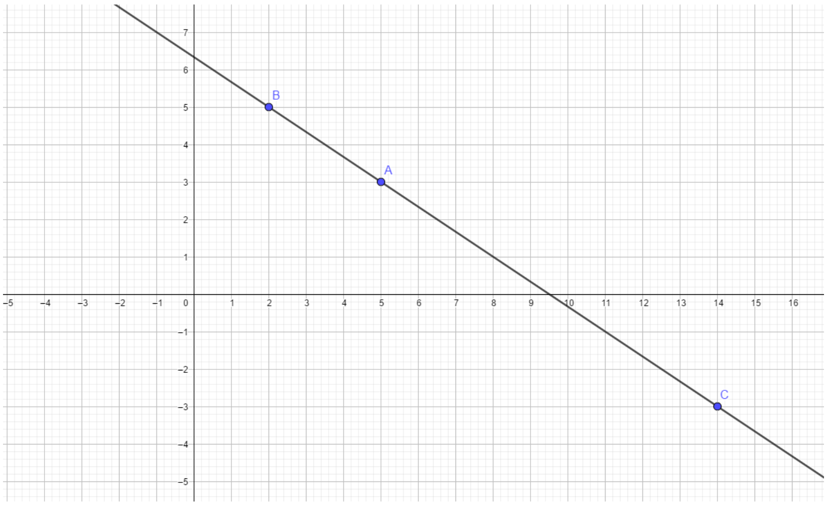
A seguir temos uma maneira para encontrar valores de c resolvendo o determinante:

$$\begin{vmatrix} c & 3 & 1 \\ 2 & c & 1 \\ 14 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 + 42 - 6 - 14c - 6 + 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad c^2 - 11c + 30 = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ c = 5 ou c = 6

Para c=5, temos os ponto A(5,3), B(2,5) e C(14,-3). Na Figura 3.3, temos a representação desses pontos no Geogebra, para assim verificar se realmente são colineares.

Figura 3.3: Colinearidade pra c=5

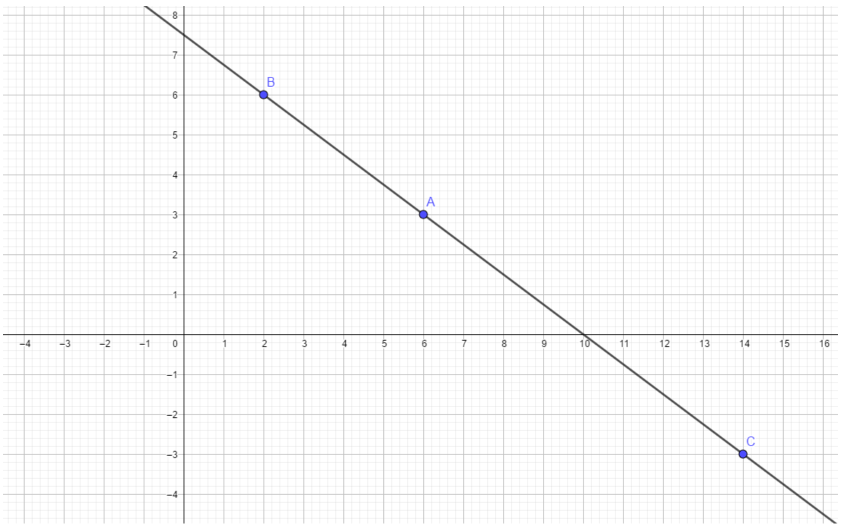


Fonte: O próprio autor

Foi observado que por A, B e C passava uma mesma reta, confirmando que são colineares para c =5.

Tomando agora c=6, temos os ponto A(6,3), B(2,6) e C(14,-3). Na Figura 3.4, temos a representação desses pontos no Geogebra, para assim verificar se realmente são colineares

Figura 3.4: Colinearidade para c=6



Fonte: O próprio autor

Também foi observado que por A, B e C passava uma mesma reta, confirmando que são colineares para c = 6.

Atividade 1.5 - Calcular a distância entre os pontos P e Q dados em cada caso a seguir:

a) P(2 , 5) e Q(– 5, – 2).

b) P(2 , 5) e Q'(1 , -2)

Desenvolvimento: Substituímos as coordenadas dos pontos P e Q na fórmula demonstrada no item 2.1.3.

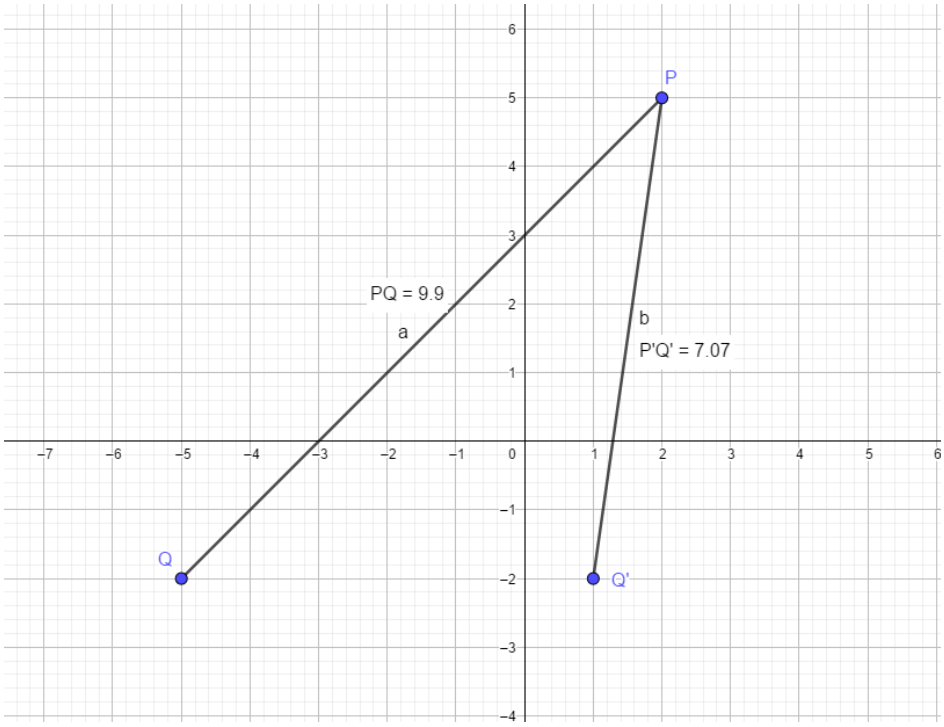
A seguir temos o cálculo da distância entre P e Q em cada caso:

a) $d_{P,Q} = \sqrt{(\boldsymbol{x}_Q - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{P}})^2 + (\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{P}})^2} = \sqrt{(-5-2)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \cong 9{,}9$

b) $d_{P,Q'} = \sqrt{(\boldsymbol{x}_{Q'} - \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{P}})^2 + (\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{Q'}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{P}})^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \cong 7{,}07$

Representamos cada caso no Geogebra para verificar se o resultado encontrado estava correto. A representação está na figura 3.5 a seguir:

Figura 3.5: Distância entre pontos P e Q e pontos P e Q'



Fonte: O próprio autor

Atividade 1.6 - Em cada caso a seguir, determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de extremidades A e B:

a) A(1 , 4) e B(5, -2);

b) A(2 , -4) e B(6, 6);

Desenvolvimento: Substituímos as coordenadas dos pontos A e B na fórmula demonstrada no item 2.1.4.

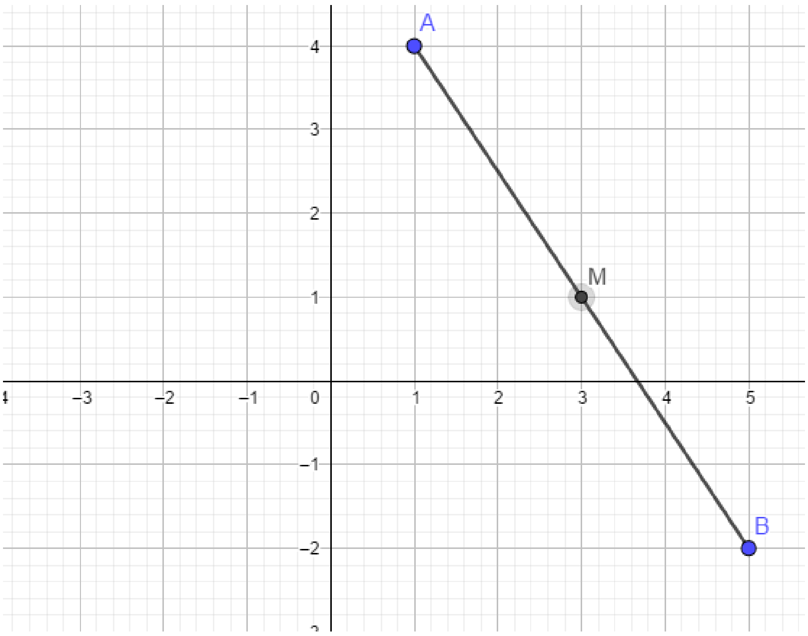
A seguir temos o cálculo das coordenadas do ponto médio do segmento determinado por A e B em cada caso:

a) $\mathbf{M}\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{M}\left(\frac{1+5}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{M}\left(\frac{6}{2}, \frac{2}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{M}\,(3\,,1)$

b) $\mathbf{M}\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{M}\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-4+6}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{M}\left(\frac{8}{2}, \frac{2}{2}\right) \Rightarrow \mathbf{M}\,(4\,,1)$

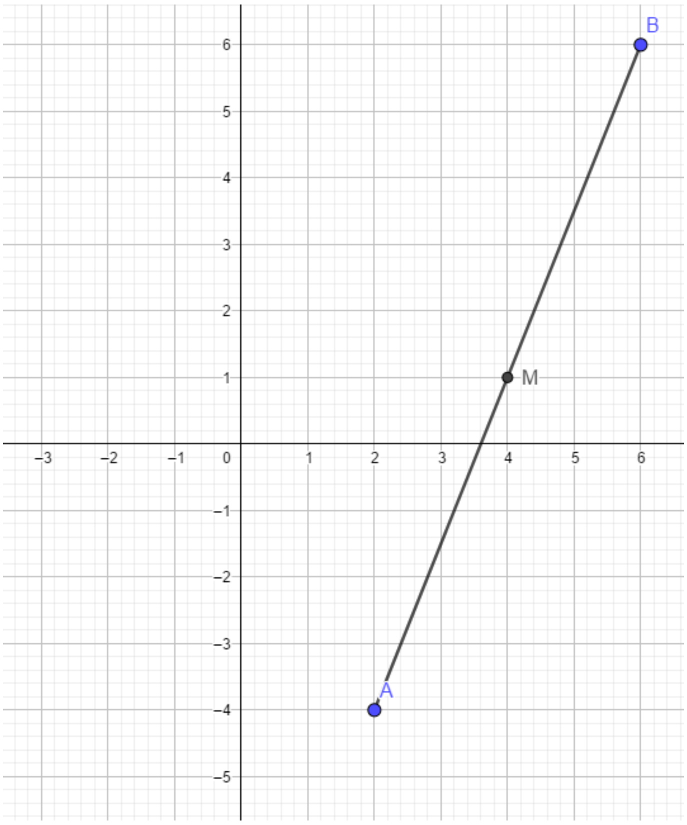
A seguir, temos na figura 3.6 a representação da atividade 1.5 a) e na figura 3.7 a representação da atividade 1.5 b).

Figura 3.6: representação do segmento AB (a) e seu ponto médio M.



Fonte: O próprio autor

Figura 3.7: Representação do segmento AB (b) e seu ponto médio M.



Fonte: O próprio autor

Atividade 1.7 - Verificar se são colineares (alinhados) os pontos A(0, 1), B(-3, 2) e C(4, 3).

Desenvolvimento: Seguindo a demonstração feita no item 2.1.5, temos que três pontos A, B e C, são colineares se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Substituímos as coordenadas de A, B e C na matriz e verificamos o resultado de seu determinante.

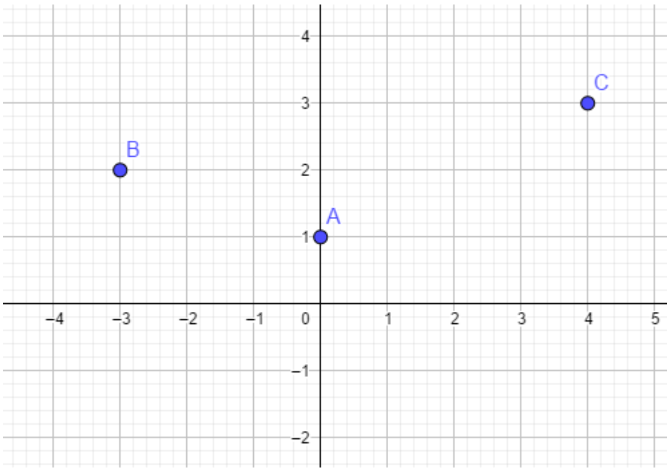
A seguir temos uma maneira de calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4 - 9 - 8 + 0 + 3 = -10$$

Como o determinante é diferente de zero, concluímos que os pontos A, B e C não são colineares.

Na figura 3.8, temos a representação dos pontos A, B e C, onde podemos verificar que realmente não são colineares.

Figura 3.8 : Verificação da não colinearidade entre A, B e C.



Fonte: O próprio autor

Parte 2 – Atividades relacionadas à circunferência.

Material: Folha quadriculada, projetor multimídia e Geogebra.

Público Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 1 aula de 50 minuto .

Atividade 2.1 - (UFRGS) A equação do círculo que passa na origem e tem como coordenadas do centro o ponto P(–3, 4) é:

Desenvolvimento: Nesta atividade, foi pedido aos alunos para encontrarem as equações reduzida e geral da circunferência. Primeiramente, determinamos a medida do raio dessa circunferência, e em seguida utilizamos o conceito demonstrado no item 2.1.6 para encontrar as equações.

A seguir temos uma maneira para resolver a atividade:

A origem O(0,0) é um ponto da circunferência. Assim o raio r é igual à distância entre O e P.

r = $d_{O,P} = \sqrt{(\boldsymbol{x_P} - \boldsymbol{x_O})^2 + (\boldsymbol{y_P} - \boldsymbol{y_O})^2} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

Substituindo as coordenadas do centro da circunferência e o raio em $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, obtemos:

$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2$ (Equação Reduzida)

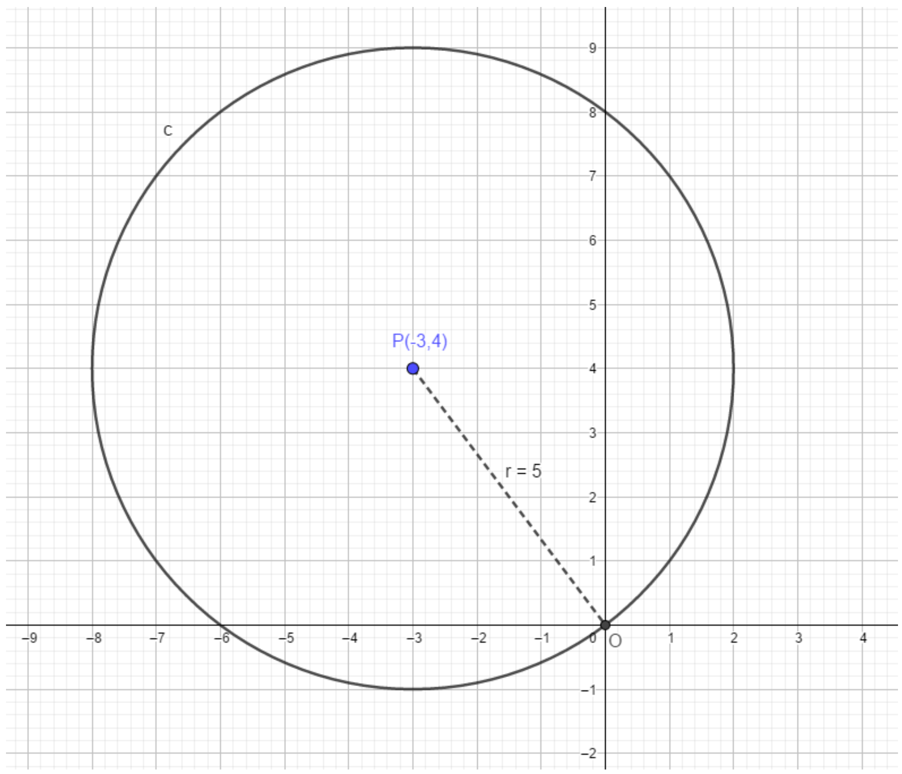
Desenvolvendo a equação reduzida:

$(x+3)^2+(y-4)^2=5^2 \Rightarrow x^2+6x+9+y^2-8y+16=25 \Rightarrow x^2+y^2+6x-8y=0$

onde $x^2+y^2+6x-8y=0$ é a Equação Geral da Circunferência.

Na figura 3.9, temos a representação da circunferência com centro P(-3,4) e que passa pela origem.

Figura 3.9: Circunferência de centro P(-3,4) e raio 5.



Fonte: O próprio autor

Atividade 2.2 - Determinar o centro e o raio da circunferência $x^2+y^2-2x+8y+8=0$

Desenvolvimento: Completando o quadrado encontramos a forma da equação reduzida da circunferência. Através da equação reduzida conseguimos determinar o centro e o raio da circunferência. A seguir temos uma maneira de completar quadrados e assim resolver a atividade:

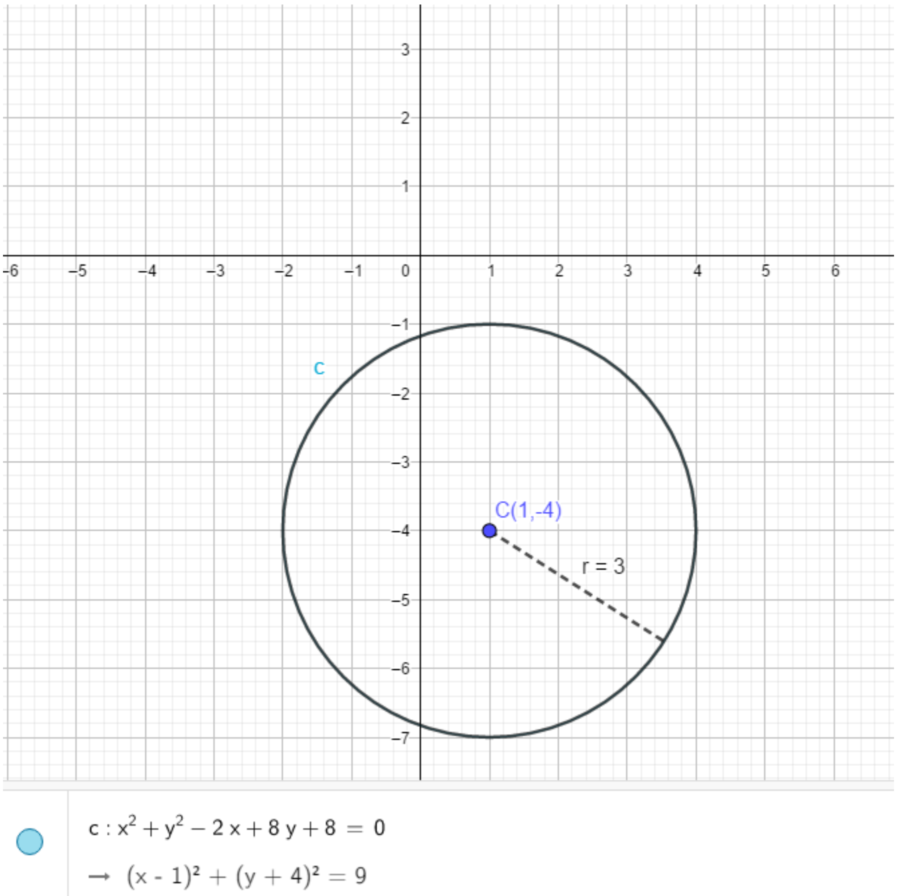
$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + 8 - 1 - 16 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + 8 - 1 - 16 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 + (y+4)^2 = 16 + 1 - 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-(-4))^2 = 9 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-(-4))^2 = 3^2 \Rightarrow C(1,-4)$ e $r = 3$

Na figura 3.10 a seguir, representamos no Geogebra a circunferência $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$ e verificamos que realmente o centro é C(1,-4) e o raio é r=3.

Figura 3.10: Circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$



Fonte: O próprio autor

Parte 3 – Atividades relacionadas à operações com vetores, condição de alinhamento entre três pontos através de estudo vetorial, ângulo entre vetores, produto interno, vetor unitário, projeção ortogonal de um vetor sobre outro e área de paralelogramos e triângulos.

Material: Folha quadriculada, projeto multimídia e Geogebra.

Público Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 4 aulas de 50 minutos cada.

Atividade 3.1 – Sejam os pontos A(1,2), B(3,1) e C(4,0). Determinar as coordenadas do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e as coordenadas de D tal que $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Desenvolvimento: Encontramos o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ usando a definição 2 do item 2.2.2 e tomamos D(d_1, d_2). Como queremos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então usamos a mesma definição e encontramos as coordenadas de D.

A seguir temos uma maneira de resolver a atividade: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$ = (3-1 , 1-2) = (2 , -1)

Como temos D(d_1, d_2), assim:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ⇔ AB ≡ CD

⇔ (2 , -1) = ($d_1 - 4$, $d_2 - 0$)

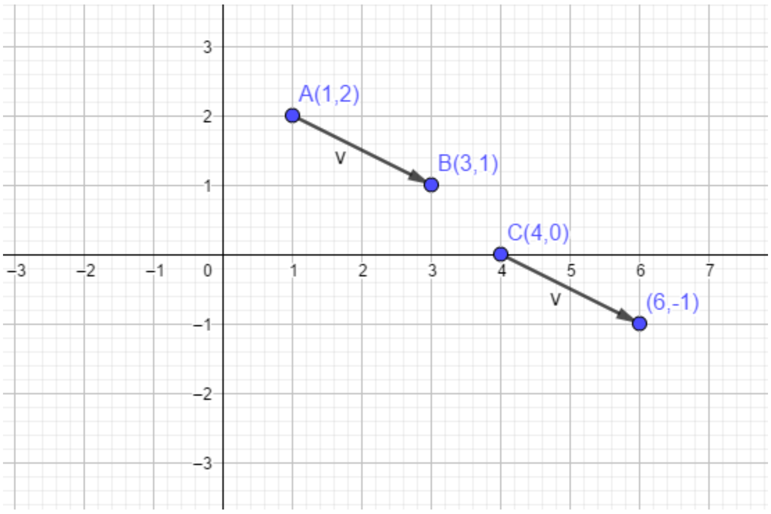
⇔ 2 = $d_1 - 4$ e -1 = $d_2 - 0$

⇔ $d_1 = 2 + 4 = 6$ e $d_2 = -1$

Portanto, encontramos D(6 , -1).

Na figura 3.11 a seguir, podemos verificar $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Figura 3.11: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.2 – Dados os vetores $\vec{v}$ = (3 , 4) , $\vec{u}$ = (2, -2) e $\vec{t}$ = (-1,5), determinar $\vec{w} = 2.\vec{v} + \vec{u} - 3 .\vec{t}$ e representar na folha quadriculada, partindo da origem.

Desenvolvimento: Utilizamos o conhecimento adquirido no item 2.2.3 deste trabalho para resolver a atividade 3.2.

A seguir, temos uma resolução da atividade:

$2 \cdot \vec{v} = 2 \cdot (3,4) = (6,8)$

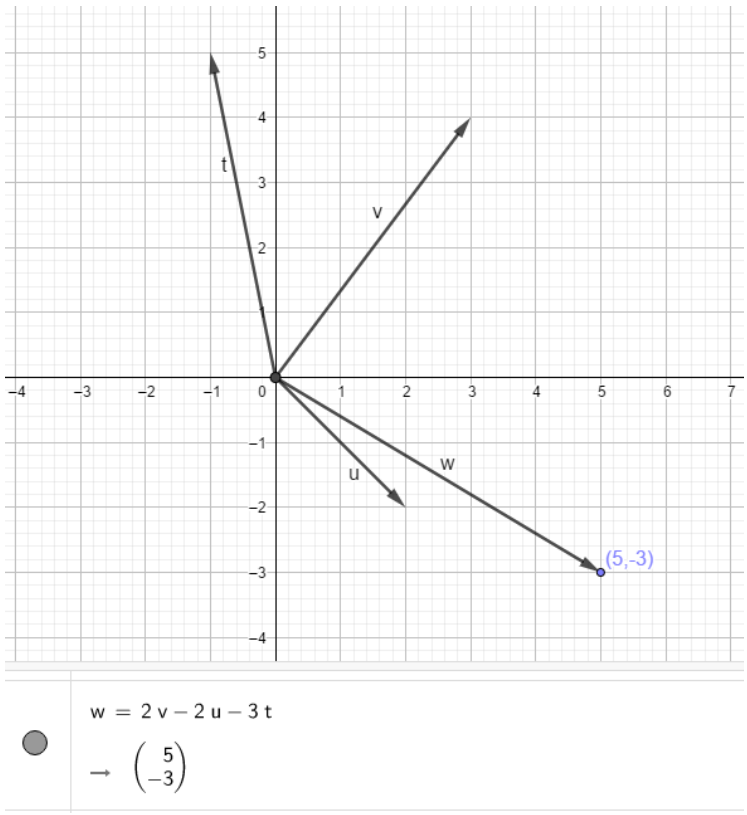
$2 \cdot \vec{u} = 2 \cdot (2,-2) = (4,-4)$

$3 \cdot \vec{t} = 3 \cdot (-1,5) = (-3,15)$

Assim,
$\vec{w} = 2.\ \vec{v} - 2.\vec{u} - 3 \cdot \vec{t} = (6,8) - (4,-4) - (-3,15) = (6-4+3\ ,\ 8+4-15) = (5,-3)$

Na figura 3.12, temos a representação do vetor $\vec{w} = 2.\ \vec{v} - 2.\vec{u} - 3 \cdot \vec{t}$, onde verificamos que realmente $\vec{w} = (5,-3)$.

Figura 3.12: Representação de $\vec{w} = 2.\ \vec{v} - 2.\vec{u} - 3 \cdot \vec{t}$



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.3 – Dados A(-1,2) e B(4,1), determinar a norma do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

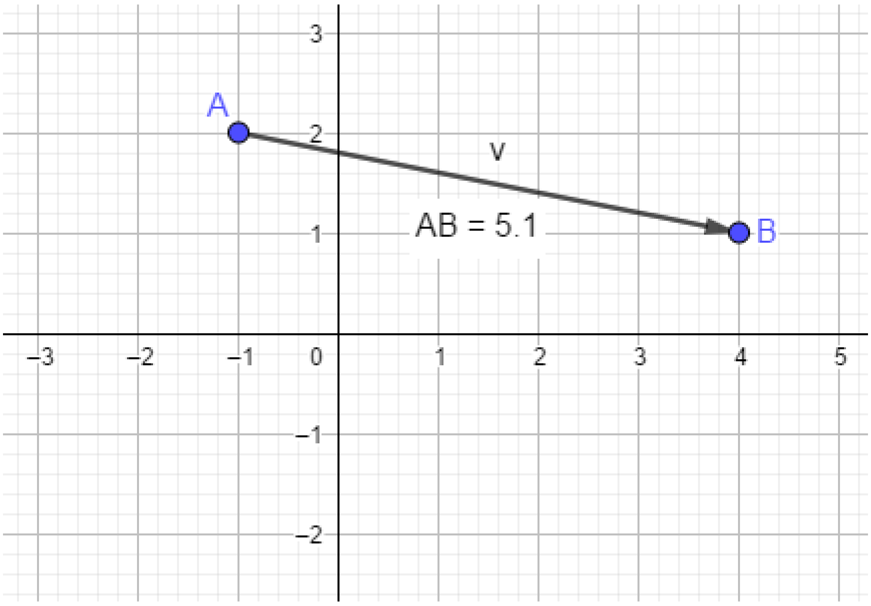
Desenvolvimento: Através do item 2.2.3.5, vemos que $\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. Substituímos as coordenadas de A e B na fórmula e encontramos $\|\vec{v}\|$.

A seguir temos a resolução do exercício:

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \cong$ 5,1

Na figura 3.13 a seguir, temos a representação de $\vec{v}$ no Geogebra e a sua norma:

Figura 3.13: Vetor $\vec{v}$ e sua norma.



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.4 – Verificar, usando estudo vetorial, se os pontos A(0, 1), B(-3, 2) e C(4, 3) são colineares.

Desenvolvimento: Pela teoria do item 2.2.4, A, B e C são colineares se, e somente se, $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{BC}$. Encontramos então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ e verificamos se um era múltiplo do outro.

A seguir temos uma resolução da atividade:

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (-3, 2) - (0, 1) = (-3 – 0 , 2 -1) = (-3,1)

$\overrightarrow{BC}$ = C – B = (4, 3) - (-3, 2) = (4 + 3 , 3 – 2) = (7,1)

Mas não há λ, tal que (-3,1) = λ. (7,1), de onde concluímos que A, B e C não são colineares.

Atividade 3.5 – Determinar < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > , dados $\vec{u}$ = (-5 , -3) e $\vec{v}$ = (-1 , 2).

Desenvolvimento: Temos que x_u= -5 , y_u= -3, x_v = -1 e y_v = 2.

Basta substituirmos esses valores em < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > = $x_u x_v$ + $y_u y_v$.

Assim:

$$< \vec{u} , \vec{v} > = -5.(-1) + (-3).2$$
$$< \vec{u} , \vec{v} > = 5 - 6$$
$$< \vec{u} , \vec{v} > = -1$$

Atividade 3.6 – Determinar x ∈ R de modo que o produto interno dos vetores $\vec{u}$ = (4 , -3) e $\vec{v}$ = (x , 1) seja igual a 5 [14].

Desenvolvimento: Temos que < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > = 5 , x_u= 4, y_u= -3, y_v = 1 e precisamos encontrar x_v= x.

Basta substituirmos esses valores em < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > = $x_u x_v$ + $y_u y_v$.

Assim : < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > = 5 = 4 . x – 3 . 1 ⇔ 8 = 4x ⇔ x = 2

Atividade 3.7 – Dados os vetores $\vec{u}$ = (1 , 1) e $\vec{v}$ = (0 , 3), calcular o ângulo entre eles.

Desenvolvimento: Calculamos a norma de cada vetor, produto entre as normas e o produto interno entre os vetores. Em seguida, substituímos os valores encontrados na equação < $\vec{u}$, $\vec{v}$ > = $||\vec{u}||$. $||\vec{v}||$. cos θ , e encontramos θ. A seguir temos os cálculos para resolução da atividade.

$||\vec{u}|| = \sqrt{(1^2 + 1^2)}$
$||\vec{u}|| = \sqrt{(1 + 1)}$
$||\vec{u}|| = \sqrt{2}$

$||\vec{v}|| = \sqrt{(0^2 + 3^2)}$
$||\vec{v}|| = \sqrt{(0 + 9)}$
$||\vec{v}|| = \sqrt{9}$

$||\vec{u}|| . ||\vec{v}|| = \sqrt{2} . \sqrt{9}$
$||\vec{u}|| . ||\vec{v}|| = \sqrt{18}$
$||\vec{u}|| . ||\vec{v}|| = 3\sqrt{2}$

Calculando o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$< \vec{u} , \vec{v} > \; = \; 1 . 0 + 1 . 3$

$< \vec{u} , \vec{v} > = 3$

Usando a equação $< \vec{u} , \vec{v} > = \|\vec{u}\| \, . \, \|\vec{v}\| \, . \cos \theta$, temos:

$\cos \theta = \dfrac{< \vec{u} , \vec{v} >}{\|\vec{u}\| \, . \|\vec{v}\|}$

$\cos \theta = \dfrac{3}{3\sqrt{2}}$

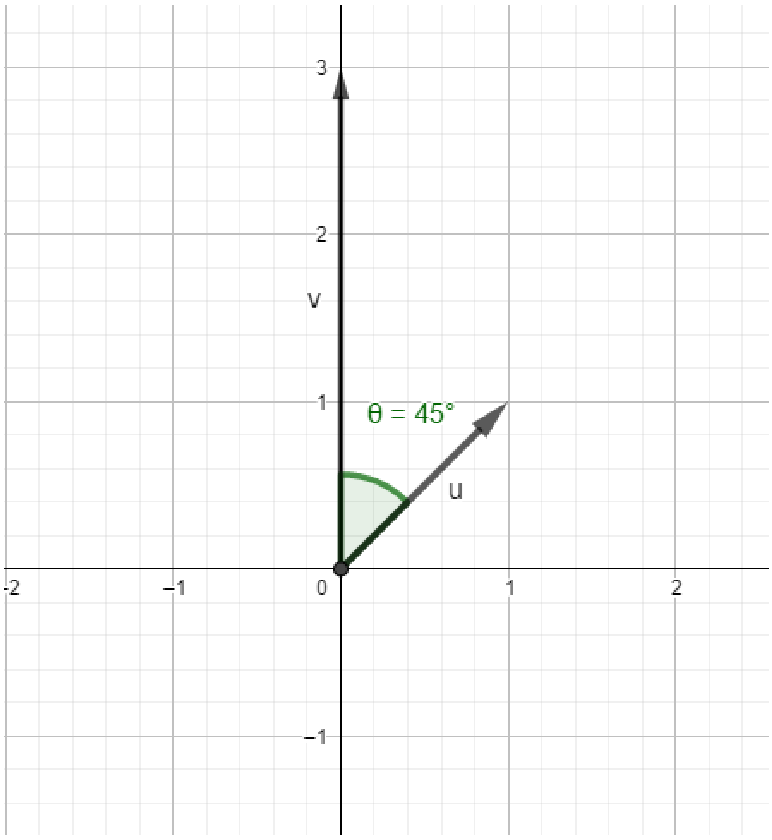
$\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta = 45°$

Na figura 3.14 a seguir, representamos no Geogebra os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e encontramos ângulo formado entre eles.

Figura 3.14: Ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.8 – Determinar o normalizado do vetor $\vec{v}$ = (3 , -2) [14]

Desenvolvimento: Temos, pelo item 2.2.7, que normalizado de $\vec{v}$ é o vetor unitário com mesma direção e sentido de $\vec{v}$, e é determina do pela razão entre $\vec{v}$ e sua norma. Pelo item 2.2.3.5, temos que $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Substituindo x e y na equação e encontramos a norma de $\vec{v}$:

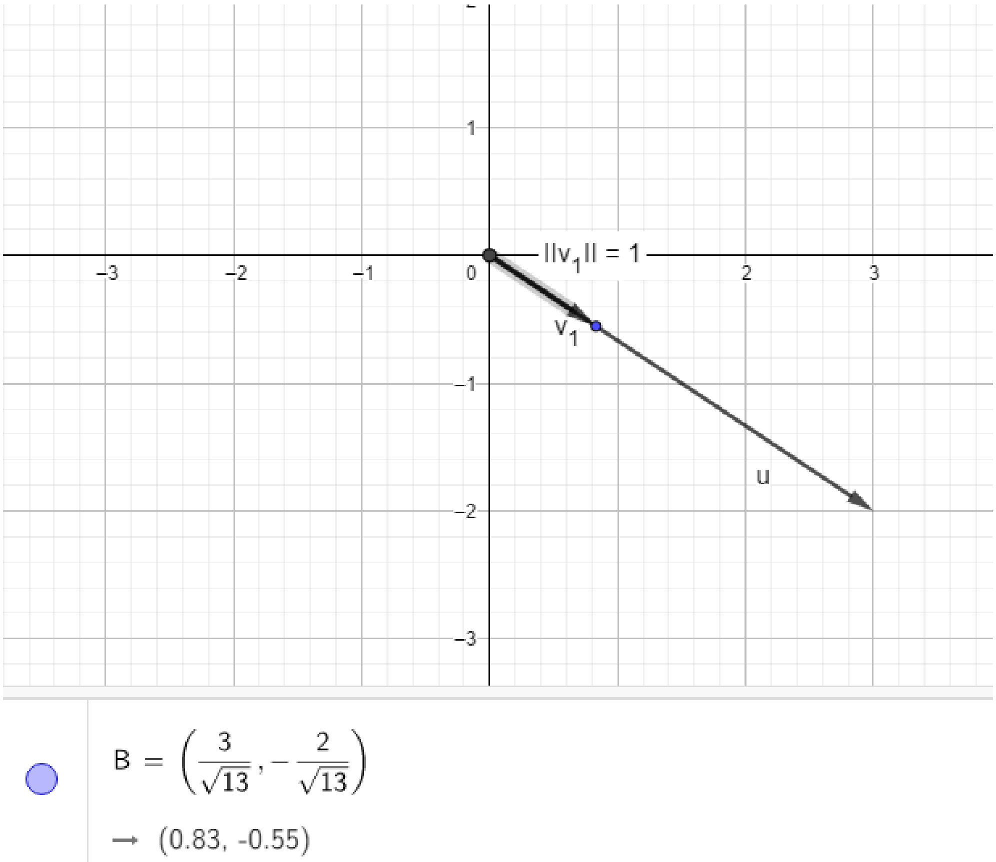
$\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

Fizemos então a razão de $\vec{v}$ e por sua norma, e encontramos o normalizado de $\vec{v}$:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot (3 , -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}} , \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$$

Na Figura 3.15 a seguir, representamos o vetor $\vec{v}$ e sua norma e também o vetor normalizado $\vec{v}_1$.

Figura 3.15: Normalizado de $\vec{v}$.



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.9 – Determinar a projeção ortogonal de $\vec{u}$ = (3,2) na direção do vetor $\vec{v}$ = (2,2).

Desenvolvimento: Encontramos o produto interno entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{v}$, e em seguida substituímos os resultado na equação $Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}\right).\,\vec{v}$.

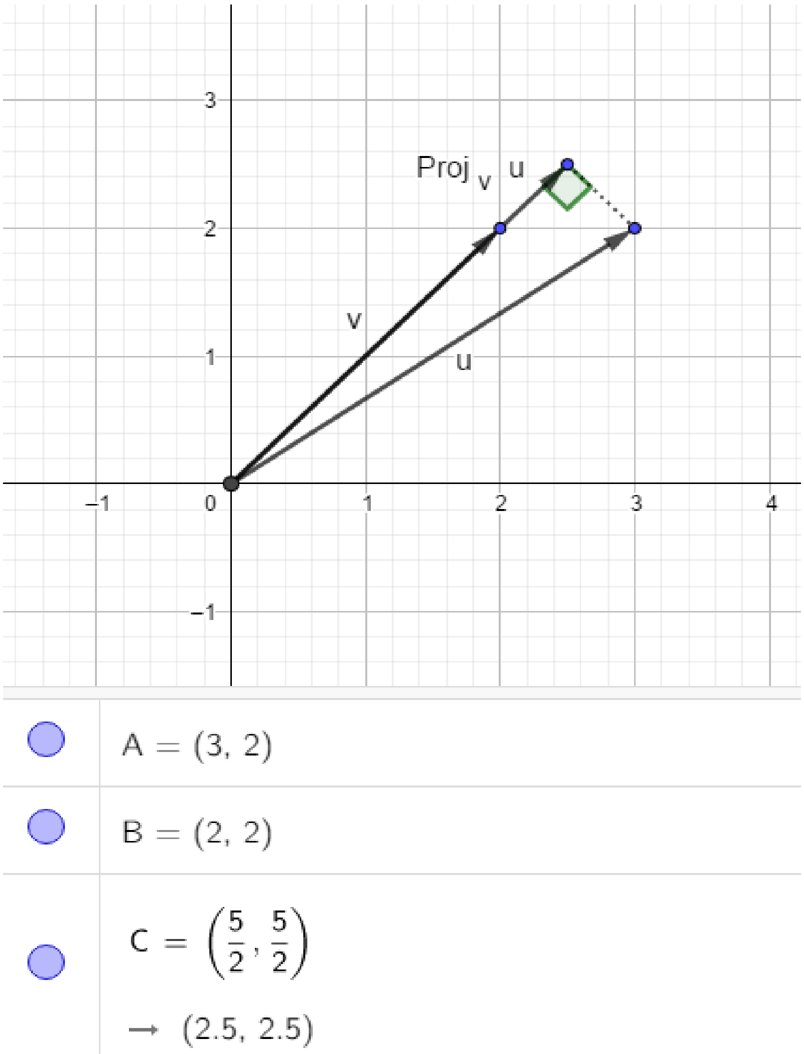
A seguir temos a resolução da atividade:

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = 3.2 + 2.2 = 6 + 4 = 10$
$\vec{v}\,.\,\vec{v} = \|\vec{v}\|^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$

Logo
$Proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\vec{v}.\vec{v}}\right).\,\vec{v} = \frac{10}{8}\,.\,(2,2) = \left(\frac{20}{8}\,,\,\frac{20}{8}\right) = \left(\frac{5}{2}\,,\,\frac{5}{2}\right)$

Na figura 3.16 a seguir, temos a representação dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $Proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$:

Figura 3.16: $Proj_{\vec{v}}\,\vec{u}$



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.10 – Determinar a área do paralelogramo ABCD. Onde A (1,2), B (3,1) e C (4,1) [14].

Desenvolvimento: Encontramos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e substituímos suas coordenadas na equação obtida no item 2.2.9.

Abaixo temos a resolução da atividade:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ = B – A = (3,1) – (1,2) = (2,-1)

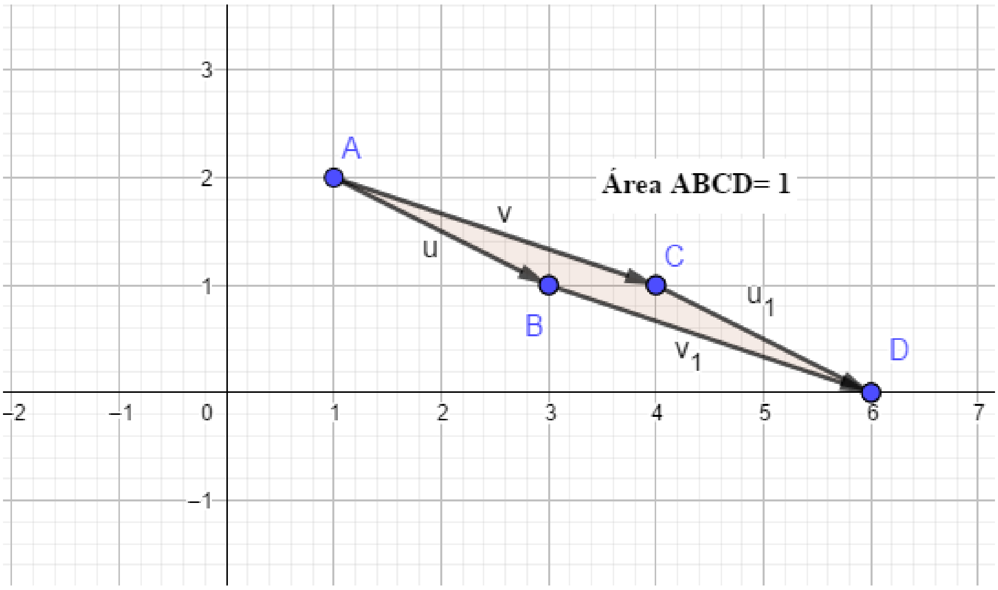
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ = C – A = (4,1) – (1,2) = (3,-1)

Sabendo que A = $\left|\det\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}\right|$, temos:

A = $\left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\right| = |-2-(-3)| = |1| = 1$

Na figura 3.17 a seguir, construímos o paralelogramo ABCD e calculamos sua área no Geogebra.

Figura 3.17: Área do paralelogramo ABCD.



Fonte: O próprio autor

Atividade 3.11 – Calcular a área do triângulo de vértices A (4,2), B (6,1) e C (3,2) [14].

Desenvolvimento: Encontramos os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e substituímos suas coordenadas na equação obtida no item 2.2.9. A seguir temos uma resolução para a atividade:

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ = B – A = (6,1) – (4,2) = (2,-1)

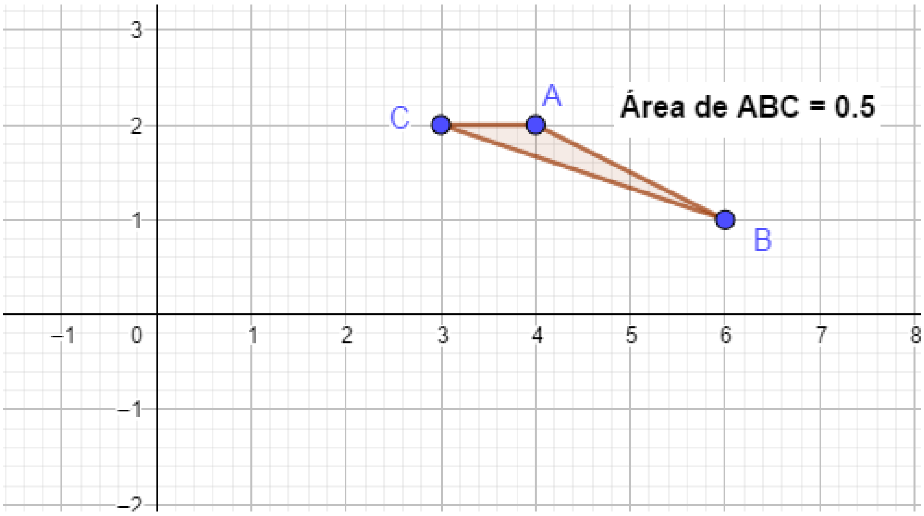
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ = C – A = (3,2) – (4,2) = (-1,0)

Sabendo que A = $\left|\det\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}\right|$, temos:

A = $\frac{1}{2}$. $\left|\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}.\,|0-1| = \frac{1}{2}.\,|-1| = \frac{1}{2}$

Na figura 3.18 a seguir, construímos o triângulo ABC e calculamos sua área no Geogebra.

Figura 3.18: Área do triângulo ABC



Fonte: O próprio autor

Parte 4 – Atividades relacionadas à aplicação de vetores em física.

Público Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio.

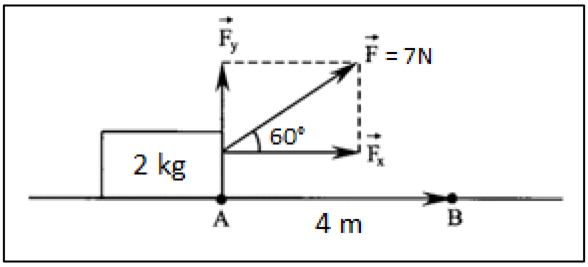
Tempo de desenvolvimento: 2 aulas de 50 minutos cada.

Atividade 4.1 – (UESPI) Um bloco de 2 Kg é puxado com velocidade constante por uma distância de 4m em um piso horizontal por uma corda que exerce uma força de 7N fazendo um ângulo de 60° acima da horizontal. Sabendo que cos 60° = 0,5 e sem 60° = 0,86, o trabalho executado pela corda sobre o bloco é de:

a) 14 J b) 24 J c) 28 J d) 48,1 J e) 56 J

Desenvolvimento: Fizemos a representação do enunciado e obtivemos a figura 3.19 a seguir:

Figura 3.19: Representação do bloco e força puxando.



Fonte: O próprio autor

Sabemos, pelo item 2.2.10, que W = $|\vec{F}|\ |\vec{d}|$ cos θ.

Substituindo, encontramos o valor do trabalho W:

W = $|\vec{F}|\ |\vec{d}|$ cos θ

W = |7| |4| cos 60°

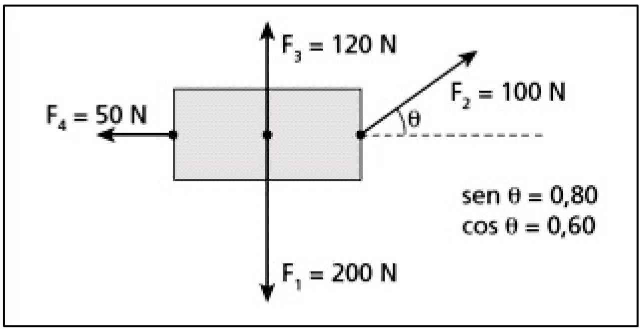
W = 7 . 4 . 0,5

W = 14 J

Assim encontramos "a" como alternativa correta.

Atividade 4.2 – O bloco da figura está incialmente em repouso, livre da ação de forças externas. Em dado instante, aplicamos sobre ele o sistema de forças indicado, constituído por F_1, F_2, F_3 e F_4, de modo que F_1 e F_3 sejam perpendiculares a F_4.

Figura 3.20: Representação do bloco e forças atuando



Fonte: O próprio autor

Sendo W_1, W_2, W_3 e W_4, respectivamente, os trabalhos de F_1, F_2, F_3 e F_4 para um deslocamento de 5 m, calcular W_1, W_2, W_3 e W_4.

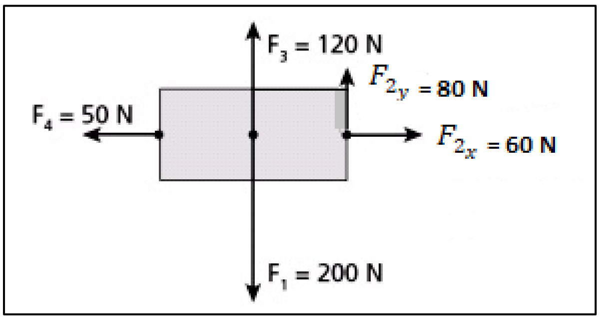
Desenvolvimento: Fizemos a decomposição F_2:

$F_{2_x} = F_2 . \cos\theta = 100 . 0{,}60 = 60$ N

$F_{2_y} = F_2 . \text{sen}\,\theta = 100 . 0{,}80 = 80$ N

e assim obtivemos:

Figura 3.21: Representação do bloco e forças



Fonte: O próprio autor

Temos que $F_1 = F_3 + F_{2_y}$ e que $F_{2_x} > F_4$, de onde concluímos que o deslocamento é para a direita.

Forças perpendiculares ao deslocamento não realizam trabalho, pois $\theta = 90°$ e $\cos 90° = 0$, portanto chegamos que $W_1 = W_3 = 0$.

Calculamos então o trabalho realizado por F_{2_x} e F_4:

$W_2 = |\overrightarrow{F_{2_x}}|\,|\vec{d}|\cos\theta = 60 . 5 . 1 = 300$ J

$W_4 = |\overrightarrow{F_4}|\,|\vec{d}|\cos\theta = 50 . 5 . (-1) = -250$ J

Parte 5 – Atividades relacionadas a equações da reta e posições relativas de retas no plano.

Material: Folha quadriculada, projeto multimídia e Geogebra.

Público Alvo: Alunos do 3° ano do Ensino Médio.

Tempo de desenvolvimento: 2 aulas de 50 minutos cada.

Atividade 5.1 – Determinar a equação geral, reduzida e segmentária da reta que passa pelos pontos A (3,-3) e B (1,3).

Desenvolvimento: Pelo item 2.3.1, dois pontos A e B são colineares se, e somente se, $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$. Substituímos as coordenadas de A e B na matriz e resolvemos o determinante, encontrando então a equação geral. Isolando y na equação geral, encontramos a equação reduzida. Isolando o coeficiente sem incógnita da equação geral e dividindo toda equação resultante pelo mesmo valor desse coeficiente, encontramos a equação segmentária.

A seguir temos uma maneira de encontrar as equações pedidas nesta atividade:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + y + 9 + 3 - 3x - 3y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x - 2y + 12 = 0 \underset{:2}{\Rightarrow} -3x - y + 6 = 0 \quad \text{(GERAL)}$$

Isolando y na equação geral, encontramos a equação reduzida:

$$-3x - y + 6 = 0 \Rightarrow y = -3x + 6 \quad \text{(REDUZIDA)}$$

Utilizando a equação geral, isolamos o coeficiente sem incógnita e dividimos toda equação por esse mesmo coeficiente, encontrando a equação segmentária:

$$-3x - y + 6 = 0 \Rightarrow -3x - y = -6 \xrightarrow[:(-6)]{} \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{(SEGMENTÁRIA)}$$

Atividade 5.2 – Sejam os pontos A (4,1) e B (-1,2).

(a) Obter a equação paramétrica da reta r que passa pelos pontos A e B.

(b) Encontrar o ponto P ∈ r associado ao parâmetro 2 [14].

Desenvolvimento:

(a) Para encontrar a equação paramétrica da reta r que passa por AB, precisamos de um vetor $\vec{v}$ que tenha a mesma direção de r. Tomamos então:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ = B – A = (-1,2) – (4,1) = (-5,1)

Tomamos P (x,y) ∈ r, de onde vem que:

$\overrightarrow{AP}$ = t $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ P – A = t $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ P = A + t $\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow$ (x,y) = (4,1) + t (-5,1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (x,y) = (4 – 5t , 1 + t) $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = 4 - 5\,t \\ y = 1 + t \end{cases}$, t ∈ R .

(b) Substituímos t=2 nas equações paramétricas encontradas no item “a”:

x = 4 – 5.2 = 4 – 10 = -6 e y = 1 + 2 = 3

Logo, P (- 6,3)

No próximo capítulo apresentaremos as considerações finais sobre este trabalho realizado com a turma do terceiro ano do ensino médio.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do trabalho foi incluir o estudo de vetores na geometria analítica no ensino médio. Como vetores está no currículo de física no ensino médio, optamos por inclui-lo também na matemática, ajudando o aluno ter uma maior compreensão do conteúdo e também dando uma base maior àqueles que ingressem em cursos na área de exatas.

Na primeira parte do trabalho tivemos bons resultados, já que a maioria dos alunos tinham conhecimento de plano cartesiano, assim conseguiram compreender rapidamente a teoria e os exemplos, o que facilitou na resolução das atividades propostas. O uso do Geogebra na correção dos exercícios fez com que os alunos se esforçassem para chegar nos valores corretos e assim verem suas figuras nas folhas quadriculas semelhantes às figuras que fizemos no software.

Na segunda parte alguns alunos tiveram um pouco de dificuldade para compreenderem o processo de completar quadrados, conteúdo que é aprendido no ensino fundamental. Além dos exemplos do capítulo 2 desse trabalho, tivemos que fazer outros exemplos, revisando esse caso de fatoração e ajudando a relembrar esse conteúdo já visto.

A terceira parte foi sem dúvidas a mais desafiadora. Auxiliamos os alunos em todas as atividades, tentando mostrar quais exemplos eram parecidos e perguntando a eles qual maneira achavam a mais fácil para iniciar as atividades. Tiveram facilidade para encontrarem um vetor a partir de dois pontos dados e para fazerem as operações básicas com vetores. No produto interno entre vetores tivemos um pouco mais de dificuldade. As atividades 7, 8 e 9 foram as que tiveram o desempenho mais baixo. Nas atividades 10 e 11, por serem aplicação de determinantes, conteúdo que haviam visto no ano anterior, a turma teve ótimo desempenho.

A atividade 1 da quarta parte, por ser bem parecida com o exemplo, não tivemos dificuldades. Na segunda atividade dessa parte, auxiliamos na decomposição da força F_2 e em seguida a turma conseguiu encontrar o trabalho das forças.

A última parte de nossas atividades foi direcionada como trabalho em dupla. A atividade 1, sem uso de vetor, os resultados foram melhores do que a parte 2, que tinha uso de vetor.

Pelo pouco tempo dentro do bimestre, já que a grade curricular é extensa, não conseguimos estudar cônicas.

De maneira geral, percebemos que os alunos sentiram-se motivados com o estudo de Geometria Analítica com abordagem vetorial no ensino médio. Acreditamos que isso se deu pelo fato da mesma não estar inclusa na programação das escolas. Quando fazíamos as correções das atividades, observamos que os alunos mostraram boa aceitação das aulas com uso do Geogebra. Apesar de não fazerem o manuseio do software, os mesmo tiveram bom rendimento nas atividades propostas em que foi utilizado o Geogebra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] EVES, Howard. Geometria: Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Geometria Tradução Higino H Domingues. São Paulo,1997.

[2] GARBI, Gilberto Geraldo. A Rainha das Ciências. Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

[3] EVES, Howard. Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria, v.3. São Paulo,1992.

[4] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: Contextos e aplicações. 3º Ano - 4. ed. – São Paulo: Ática, 2011.

[5] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática: tradução: Elza F. Gomide. 1.ed.São Paulo: Edgard Blücher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974.

[6] LIMA; CARVALHO; WAGNER; MORGADO. A Matemática do Ensino Médio. Volume 1, Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, 2006.

[7] Conexões com a Matemática. Editora Moderna, 3ª Edição, São Paulo, 2016.

[8] Brasil Escola.

Disponível em <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/como-encontrar-centro-umacircunferencia.htm#:~:text=O%20c%C3%ADrculo%20%C3%A9%20uma%20figura,um%20outro%20ponto%20chamado%20centro.&text=Essa%20equa%C3%A7%C3%A3o%20envolve%20um%20ponto,e%20o%20raio%20(R)>. Acesso em 10/07/2019.

[9] Só Matemática.

Disponível em <https://www.somatematica.com.br/emedio/vetores/vetores.php>. Acesso em 12/07/2019.

[10] MARTINS, Antônio Alison. Geometria Analítica e Vetores: uma análise com estudantes do ensino superior. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Maranhão, 2018.

[11] WINTERLE, Paulo. Vetores e Geometria Analítica. São Paulo, 2000.

[12] DIAS, Alexandre Salvatore. A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no ensino médio. Dissertação de Mestrado. UNIRIO, 2018.

[13] DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. Geometria Analítica. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[14] DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. Geometria Analítica. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[15] IEZZI, Gelson. Fundamentos da Matemática Elementar. Geometria Analítica. Atual Editora. São Paulo, 1979.

[16] O Início da Geometria Analítica. Texto de Fernanda Buhrer Rizzato.

Disponível em < http://www.matematica.br/historia/ganalitica.html>. Acesso em 27/06/2020.

[17] SILVA, Sergio Ferreira. Geometria Analítica: caminhos para aprendizagem. Dissertação de Mestrado. PUC-RJ, 2015.

[18] Lei de Diretrizes e Bases. Disponível em <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em 12/07/2020.

[19] Parâmetros Curriculares Nacionais. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf>. Acesso em 12/07/2020.

[20] Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 12/07/2020

[21] Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 12/07/2020.

[22] LIMA, Elon Lages. Exame de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de janeiro, 2001.