UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JEFFERSON MAGALHÃES FRANCESCHINI

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

TRÊS LAGOAS – MS

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CAMPUS DE TRÊS LAGOAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato César da Silva

TRÊS LAGOAS – MS

2020

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

Potenciação e Radiciação de Números Complexos uma Abordagem Geométrica

por

JEFFERSON MAGALHÃES FRANCESCHINI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato César da Silva (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Edivaldo Romanini
UFMS/CPTL

Prof. Dr. José Antônio Menoni
UFMS/CPTL

Outubro de 2020

À Deus,

Aos meus familiares,

Ao professor orientador Renato.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me guiado e dado forças para a busca de mais um objetivo.

A minha família pelo apoio e incentivo.

Ao meu orientador, prof. Dr. Renato César da Silva, pela dedicação, paciência, auxílio e conselhos na elaboração desse trabalho.

Aos professores que muito contribuem para o ensino e formação de seus alunos.

Aos meus colegas de turma pelo companheirismo e por contribuírem com o meu aprendizado.

RESUMO

A presente dissertação tem por objetivo a apresentação do conjunto dos números complexos como uma expansão natural dos conjuntos numéricos anteriormente estudados pelo aluno no decorrer do ensino básico. Também apresentamos uma abordagem intuitiva da potenciação e radiciação de números complexos através da demonstração e aplicação das duas fórmulas de De Moivre. Realizamos uma abordagem geométrica com o uso do software GeoGebra, explorando as operações com números complexos com o intuito de dar um significado para o aluno do conteúdo estudado.

Palavras-chave: Números complexos; De Moivre; GeoGebra.

ABSTRACT

This dissertation aims to present the complex numbers as a natural expansion of the numerical sets previously studied by the student during basic education. We also present an intuitive approach to the potentiation and radication of complex numbers by demonstrating and applying De Moivre's two formulas. We perform a geometric approach with complex numbers in order to give meaning to the student of the studied content.

Keywords: Complex numbers; De Moivre; GeoGebra.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELA

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao estudar a evolução dos conjuntos numéricos durante o ensino básico o aluno acaba tendo a “impressão” de que o conjunto dos números reais engloba todo o “mundo dos números ao qual a matemática está inserida”. Como explicar para o aluno, já no segundo semestre do último ano, que existe um conjunto numérico no qual a equação $x = \pm\sqrt{-1}$ possui solução e que existe um elemento desse conjunto que elevado ao quadrado é igual a -1? Como demonstrar para o aluno aplicabilidades práticas que justifique o estudo de tal conjunto?

Uma das maiores dificuldades ressaltadas por professores do ensino médio no ensino dos números complexos é a de não conseguir mostrar adequadamente as interpretações geométricas da dinâmica envolvida nas operações dos elementos desse conjunto, sendo assim, muitas vezes, apenas explorados os aspectos algébricos dessas operações.

Felizmente, nos dias atuais, já dispomos de recursos tecnológicos acessíveis aos professores e alunos que visam simplificar as demonstrações de proposições e propriedades matemáticas de forma geométrica. Valendo-se dessa ideia, essa dissertação tem como principal objetivo trabalhar a potenciação e radiciação de números complexos de forma algébrica bem como explorar as interpretações geométricas dessas operações através de figuras e do software GeoGebra.

Este texto foi dividido em quatro capítulos:

No capítulo 2 é abordado um pouco das dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo em sala de aula, os tópicos abordados e as competências e habilidades que devem ser adquiridas pelos alunos e a busca por novas abordagens e tecnologias que facilitem o ensino e aprendizagem.

No capítulo 3, introduzimos o estudo dos números complexos através de um resumo de seus aspectos históricos, passando pelos conjuntos numéricos anteriormente estudados, a definição de números complexos como par ordenado de números reais, sua forma algébrica, propriedades e operações até chegar na forma trigonométrica com o objetivo de demonstrar as duas fórmulas de De Moivre.

Vale ressaltar também que, neste capítulo, o estudo do conjunto dos números complexos é feito como uma expansão natural da construção de conjuntos numéricos cada vez mais amplos para que, o aluno, ao ter contato com esse novo conjunto numérico tenha em mente que todas as propriedades e operações realizadas sob os números reais são mantidas neste, já que o conjunto dos números reais é um subconjunto dos números complexos.

No capítulo 4 temos uma abordagem geométrica das operações estudas no texto com o software GeoGebra com o intuito de, além do aluno explorar as interpretações geométricas das operações, também tenha o conhecimento necessário para que possam manipular esse software como forma de apoio ao resolver problemas envolvendo números complexos.

No capítulo 5 temos uma aplicação dos números complexos voltada à geometria com o objetivo de usar a teoria dos números complexos na resolução de problemas geométricos.

2 O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O ensino dos números complexos no ensino médio é, de certa forma, superficial. Isso se dá pela dificuldade que o professor tem em justificar de forma prática o estudo de tal conjunto, já que a aplicação do mesmo se dá em cursos superiores nas várias áreas de exatas. Há também dificuldades em explorar as interpretações das propriedades e operações dos elementos deste conjunto de forma geométrica.

No Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul Ensino Médio (2012), o ensino dos números complexos consta no terceiro bimestre do terceiro ano e compreende os seguintes tópicos:

- operações com números complexos;
- forma trigonométrica;
- operações na forma trigonométrica.

As competências e habilidades que devem ser adquiridas pelos alunos são:

- Reconhecer a necessidade de ampliação do conjunto dos números reais.
- Realizar operações com números complexos e identificar suas partes reais e imaginárias: somar, subtrair, dividir, calcular uma potência, raízes, o conjugado e o módulo de um número complexo.

Assim sendo, o professor atuante no ensino básico já possui um referencial do conteúdo a ser abordado e das competências a serem alcançadas bastando, assim, que se avalie o aprendizado dos alunos e busque formas de facilitar e dinamizar o ensino-aprendizagem de forma que este não se torne mecanizado.

O ensino de conteúdos matemáticos de forma mecanizada faz com que o aluno não desenvolva o raciocínio necessário para a sua assimilação e assim, ao se deparar com situações-problema, esse não consegue fazer a ligação entre o conteúdo ensinado e a aplicabilidade prática do mesmo.

Os PCNs trazem sugestões e orientações no campo metodológico com o intuito de capacitar e aperfeiçoar a prática docente abolindo o ensino mecânico.

> Ao se estabelecer um primeiro conjunto de parâmetros para a organização do ensino de Matemática no Ensino Médio, pretende-se contemplar a necessidade da sua adequação para o desenvolvimento e promoção de alunos, com diferentes motivações, interesses e capacidades, criando condições para a sua inserção num mundo em mudança e contribuindo para desenvolver as capacidades que deles serão exigidas em sua vida social e profissional (BRASIL, 2000, p.40).

A busca por novas abordagens de determinados conteúdos por parte dos professores, faz com que o ensino se torne cada vez mais produtivo e que os alunos tenham uma melhor compreensão dos assuntos abordados em sala de aula.

Atualmente o aluno já se encontra imerso num mundo onde a tecnologia se faz presente em várias áreas do conhecimento humano, o que possibilita uma aprendizagem de forma mais intuitiva, rápida e dinâmica.

A maioria das escolas já possui laboratório de informática onde professores e alunos podem fazer uso de softwares que auxiliem na aprendizagem de conteúdos matemáticos.

> As tecnologias utilizadas no contexto escolar auxiliam a renovação das práticas pedagógicas reforçando sua integração aos processos curriculares. Cabe aos educadores integrar as tecnologias no processo de ensino e de aprendizagem; só assim eles poderão provocar mudanças nas bases do seu fazer pedagógico, promover alterações nos currículos escolares e oferecer condições de aprender ao educando (Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul Ensino Médio 2012, p.42).

No estudo dos números complexos, o uso de recursos tecnológicos que facilitem as interpretações geométricas das propriedades e operações dos elementos desse conjunto faz com que não se tenha uma manipulação algébrica mecânica dos processos, tornando a compreensão de suas operações mais intuitivas e assimiláveis. Uma outra possibilidade é que, dessa forma, o aluno também pode usar os conhecimentos referentes aos números complexos em problemas de geometria.

Com este trabalho pretendemos apresentar uma nova metodologia com o intuito de dar um maior significado através da tecnologia visando um melhor entendimento por parte de aluno.

3 OS NÚMEROS COMPLEXOS

Este capítulo foi baseado nos livros textos Dante (2005), Carmo et. al. (2005), Lima et. al. (2006) e também em vídeos do canal do youtube Portal da Matemática. Mais especificamente, o roteiro para apresentação e desenvolvimento da teoria de números complexos foi baseado no livro Dante (2005) por se tratar de um livro usado no ensino médio. Nesse roteiro foi adicionado ou retirado alguns conteúdos que o autor achou necessário com o intuito de simplificar ou complementar o conteúdo apresentado no mesmo. Os exemplos foram baseados em exemplos dos livros citados com algumas modificações, tanto na forma de apresentá-los quanto nos valores dos números usados.

O tópico sobre radiciação de números complexos foi baseado em vídeos do canal Portal da Matemática por possuir uma abordagem mais simplificada do mesmo.

Algumas dissertações também foram pesquisadas no intuito de buscar novas formas de abordagem de tópicos relacionados a esse conteúdo.

As referências completas e os links dos vídeos se encontram no final dessa dissertação.

3.1 Um pouco da história dos números complexos

Este texto foi elaborado pelo Professor Eloy Ferraz Machado Neto e se encontra no livro Dante (2005) página 443.

“Apesar de encontrarmos menções a uma raiz quadrada de número negativo em autores da Antiguidade, como por exemplo a expressão $\sqrt{81-144}$, que aparece em uma obra de Heron de Alexandria (século I), ou $\sqrt{1849-2016}$, que aparece na tentativa de Diofanto (século III) de resolver a equação $336x^2+24=172x$, foi apenas no século XVI, com os matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente.

Em 1539, Cardano (Girolamo Cardano, 1501-1576) convenceu Tartaglia (Niccolò Fontana Tartaglia, 1499-1557) a revelar seu método de resolver equações cúbicas, sob o juramento de que não o publicaria antes que Tartaglia o fizesse. Ao começar a estudar a fórmula de Tartaglia, Cardano se deparou com raízes de números negativos. Escreveu para Tartaglia, relatando suas dificuldades com tais raízes, mas Tartaglia, arrependido de ter revelado sua fórmula, recusou-se a ajudá-lo. Provavelmente Tartaglia não havia entendido que os números complexos estavam surgindo na Matemática.

Em 1543, Cardano descobriu, ao tomar conhecimento do trabalho de Del Ferro (Scipione Del Ferro, 1465-1526), que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver equações cúbicas. Na óptica de Cardano, isso o desobrigava de seu juramento. Ele havia jurado não revelar a fórmula de Tartaglia, mas não a de Del Ferro. Assim, publicou em 1545 sua obra Ars Magna, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas, além de todo o seu trabalho produzido após seu conhecimento da fórmula de Tartaglia. Cardano e Del Ferro foram creditados pela descoberta, e Tartaglia ficou furioso (hoje em dia, porém, a fórmula que resolve as equações cúbicas é chamada em muitos países de fórmula de Cardano-Tartaglia).

A importância do trabalho de Cardano foi apresentar raízes de números negativos nas aplicações da fórmula para resolver equações cúbicas (os chamados casos irredutíveis). Em uma passagem de Ars Magna, Cardano estuda a divisão do número 10 em duas partes cujo produto seja 40. Esse problema equivale a $x(10-x)=40$, ou seja, $x^2-10x+40=0$, que resulta em $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$. Escreve Cardano: “Desprezando a tortura mental envolvida, e multiplicando $5+\sqrt{-15}$ por $5-\sqrt{-15}$, encontramos $25-(-15)=40$. (...) E assim vai toda a sutileza aritmética, da qual isso, como eu havia dito, é tão sutil quanto inútil”. Nem mesmo Cardano havia entendido exatamente o seu próprio trabalho com essas raízes e, durante muitas décadas, todos os que trabalharam com raízes quadradas de números negativos não o fizeram com fé.

Bombelli (Rafael Bombeli, 1526-1572) estudou profundamente o trabalho de Cardano, principalmente os casos irredutíveis das equações cúbicas, que levavam a raízes de números negativos. Foi o primeiro matemático a definir as regras de adição e multiplicação para raízes de números negativos, escrevendo que $\sqrt{-n}.\sqrt{-n}=-n$. Com suas regras, a fórmula de Cardano-Tartaglia funcionava perfeitamente em qualquer caso, o que o deixava seguro de seus resultados. Foi o primeiro a dar alguma importância aos números complexos.

Cardano não trabalhava com a notação $\sqrt{-15}$, nem Bombelli com $\sqrt{-n}$. Ao longo dos anos, cada matemático que tratava a questão o fazia de um modo diferente. Coube ao suíço Euler (Leonhard Euler, 1707-1783), num trabalho de 1777, mas só publicado em 1794, definir $\sqrt{-1}$ como sendo i, de forma que $i^2=-1$ (como ele mesmo escreveu). Essa mesma notação foi depois usada pelo alemão Gauss (Johann Karl Friedrich Gauss, 1777-1855) em 1801, e, dada a sua autoridade, essa notação acabou tornando-se padrão.

Em 1749, Euler (que já havia usado i para uma quantidade imaginária, mas sem definir seu significado, e até então só trabalhava com $\sqrt{-1}$) mostrou que, se $a+b\sqrt{-1}$ for raiz de uma equação, $a-b\sqrt{-1}$ também será. Mesmo assim,como a maioria até então, Euler ainda era reticente ao trabalhar com os números complexos.

A grande obra a favor dos números complexos apareceu em 1831, na qual Gauss inventou o termo “números complexos”. Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os números complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano cartesiano. Gauss já visualizava os números complexos dessa forma desde 1811. Antes dele, matemáticos como o suíço Argand (Jean Robert Argand, 1768-1822) e o norueguês Wessel (Caspar Wessel, 1745-1818) já haviam escrito sobre a representação geométrica dos complexos no plano, porém a pouca representatividade desses matemáticos fez com que seus trabalhos não alcançassem a notoriedade merecida na época.

Finalmente, em 1837, Hamilton (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865) galgou o último degrau dessas descobertas reconhecendo os números complexos como um par ordenado de números reais (a,b) e escrevendo as definições geométricas de Gauss na forma algébrica.”

3.2 Um pouco sobre conjuntos numéricos

Ao ingressar no ensino básico o primeiro conjunto numérico que o aluno tem contato é o conjunto dos números naturais. Esse conjunto surgiu da necessidade humana de contar e quantificar bens e objetos que faziam parte do ambiente ao qual o homem estava inserido.

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots, n, \dots\}$$

Como sabemos, esse conjunto é fechado para as operações de adição e multiplicação mas não para a subtração. Assim o mesmo pode ser estendido obtendo o conjunto dos números inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1,0,1,2, \dots, n, \dots\}$$

O conjunto dos números inteiros é fechado para a adição, multiplicação e subtração mas não para a divisão, ou seja, nem sempre ao dividir um número inteiro por outro número inteiro teremos como resultado um número inteiro. Assim sendo, este conjunto também foi estendido obtendo assim o conjunto dos números racionais que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador sendo números inteiros.

$$\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b}, com\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}$$

Consideremos agora a equação $x^2 = 2$ cujas soluções são $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Mas $\sqrt{2}$ é um número racional? Ou seja, $\sqrt{2}$ pode ser representado por uma fração com numerador e denominador números inteiros?

Vamos supor que sim e fazer uma simples demonstração a nível de curiosidade.

Supondo que $\sqrt{2}$ é um número inteiro então existem $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = a/b$ com a/b fração irredutível. Logo temos,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade anterior temos:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

o que implica,

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

e logo,

$$2b^2 = a^2$$

Dessa última igualdade concluímos que a^2 é um número par, o que implica a ser um número par. Logo, podemos escrever a como $a = 2k$ com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo a na última igualdade temos,

$$2b^2 = (2k)^2$$

o que implica

$$2b^2 = 4k^2$$

e dividindo ambos os membros da igualdade acima por 2 temos

$$b^2 = 2k^2$$

o que implica b^2 ser um número par e logo, b é um número par.

Como foi suposto que a fração a/b era uma fração irredutível e a e b são números pares chegamos a um absurdo concluindo assim que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Ao conjunto dos números que não podem ser representados por uma fração a/b com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, dá-se o nome de Irracionais e é representado pela letra $\mathbb{I}$.

Um exemplo de número irracional conhecido desde a antiguidade é o número π (PI), que é a razão entre o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro.

Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais temos o conjunto dos números reais que é representado pela letra $\mathbb{R}$.

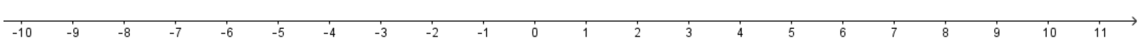
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Logo, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

A representação geométrica dos números reais é a reta real na qual é estipulada uma origem (ponto zero), uma unidade de medida e, a direita da origem temos os números reais positivos e a esquerda os números reais negativos.

Figura 1 - Reta dos números reais.



Fonte: do autor.

Para cada número real há um ponto correspondente na reta e cada ponto da reta corresponde a um número real, ou seja, há uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais.

Notemos agora que, elevando um número real ao quadrado obtemos como resultado um número real positivo, ou seja, se $x \in \mathbb{R}$ então $x^2 \geq 0$. Assim sendo, a equação $x^2 + 1 = 0$ teria solução em $\mathbb{R}$?

Notemos que,

$$x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = -1 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

Ou seja, a equação acima não possui solução em $\mathbb{R}$ pois não existe um número real que elevado ao quadrado resulte -1. Logo, o conjunto dos números reais foi também estendido obtendo assim o conjunto chamado de conjunto dos números complexos, o qual é o objeto de estudo deste capítulo.

3.3 O conjunto dos números complexos

O conjunto dos números complexos, representado pela letra $\mathbb{C}$, é um conjunto de pares ordenados $z = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$ em que estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação como descritas abaixo:

Sejam $z = (a, b)$ e $u = (c, d)$, com a, b, c e d números reais. Temos,

I) Igualdade: $z = u \Leftrightarrow (a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \; e \; b = d$
II) Adição: $z + u = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
III) Multiplicação: $zu = (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

As operações de adição e multiplicação definidas acima satisfazem as seguintes propriedades:

Sejam $z = (a, b), v = (c, d)$ e $w = (e, f)$ números complexos quaisquer, com a, b, c, d, e e f números reais.

3.3.1 Propriedades da adição:

S1) Comutativa: $z + v = v + z$

$$\begin{aligned} z + v &= (a, b) + (c, d) \\ &= (a + c, b + d) \\ &= (c + a, d + b) \\ &= (c, d) + (a, b) \\ &= v + z \end{aligned}$$

S2) Associativa: $[z + v] + w = z + [v + w]$

$$\begin{aligned} [z + v] + w &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) \\ &= (a + c, b + d) + (e, f) \\ &= (a + c + e, b + d + f) \\ &= (a, b) + (c + e, d + f) \\ &= (a, b) + [(c, d) + (e, f)] \\ &= z + [v + w] \end{aligned}$$

S3) Elemento neutro: Existe $z_0 \in \mathbb{C}$ com $z_0 = (0,0)$ tal que $z + z_0 = z_0 + z = z$

$$z + z_0 \overset{\mathbf{S1}}{=} z_0 + z = (0,0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b) = z$$

S4) Inverso aditivo ou oposto: Para $z \in \mathbb{C}$ existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z + z' = z' + z = z_0$

Vamos encontrar z' tal que $z + z' = z' + z = z_0$.

Seja $z' = (a', b')$. Logo,

$z + z' = z_0 \iff (a,b) + (a',b') = (0,0) \iff (a + a', b + b') = (0,0) \iff \begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases} \iff$

$\iff a' = -a$ e $b' = -b$.

Portanto, sendo $z = (a,b)$ um par ordenado de números reais basta fazer $z' = (-a,-b)$.

Assim,

$$z + z' \overset{S1}{=} z' + z = (-a,-b) + (a,b) = (-a + a, -b + b) = (0,0) = z_0$$

3.3.2 Propriedades da multiplicação:

M1) Comutativa: $zv = vz$

$$\begin{aligned} zv &= (a,b)(c,d) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \\ &= (ca - db, bc + ad) \\ &= (ca - db, cb + da) \\ &= (c,d)(a,b) \\ &= vz \end{aligned}$$

M2) Associativa: $[zv]w = z[vw]$

$$\begin{aligned} [zv]w &= [(a,b)(c,d)](e,f) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e,f) \\ &= \big((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e\big) \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \\ &= \big(a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)\big) \\ &= (a,b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a,b)[(c,d)(e,f)] \\ &= z[vw] \end{aligned}$$

M3) Elemento neutro: Existe $z_1 \in \mathbb{C}$ com $z_1 = (1,0)$ tal que $zz_1 = z_1 z = z$

$$zz_1 \overset{M1}{=} z_1 z = (1,0)(a,b) = (1.a - 0.b, 1.b + 0.a) = (a - 0, b + 0) = (a,b) = z$$

M4) Inverso multiplicativo: Para $z \neq (0,0)$ existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que $zz' = z'z = z_1$

Seja$z = (a,b)$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ e mostraremos que existe $z' = (x,y) \in \mathbb{C}$ tal que $zz' = z'z = z_1$. De fato,

$$zz' = (a,b)(x,y) = (1,0) \iff (ax - by, ay + bx) = (1,0) \iff \begin{cases} ax - by = 1\ (I) \\ ay + bx = 0\ (II) \end{cases}$$

De (II) temos,

$$ay + bx = 0 \iff bx = -ay \iff x = \frac{-ay}{b}\ (III)$$

Substituindo (III) em (I) temos,

$$\begin{aligned} ax - by = 1 \quad &\Leftrightarrow a\left(\frac{-ay}{b}\right) - by = 1 \\ &\Leftrightarrow -\frac{a^2y}{b} - by = 1 \\ &\Leftrightarrow -a^2y - b^2y = b \\ &\Leftrightarrow y(-a^2 - b^2) = b \\ &\Leftrightarrow y = \frac{b}{-a^2 - b^2} \\ &y = \frac{-b}{a^2 + b^2} \ (IV) \end{aligned}$$

Substituindo (IV) em (II) temos,

$$\begin{aligned} bx + ay = 0 \quad &\Leftrightarrow bx + a\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow bx - \frac{ab}{a^2 + b^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow bx = \frac{ab}{a^2 + b^2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Portanto,

$$z' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

De fato,

$$\begin{aligned} zz' \quad &\overset{M1}{\cong} z'z \\ &= \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)(a, b) \\ &= \left(\frac{aa}{a^2 + b^2} - \frac{-bb}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{-ba}{a^2 + b^2}\right) \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) \\ &= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab - ab}{a^2 + b^2}\right) \\ &= (1,0) \\ &= z_1 \end{aligned}$$

M5) A multiplicação é distributiva em relação à adição à direita e à esquerda.

I) $z[v + w] = zv + zw$

De fato,

$$
\begin{aligned}
z[v+w] &= (a,b)[(c,d)+(e,f)](a,b)(c+e,d+f) \\
&= \big(a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)\big) \\
&= (ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be) \\
&= (ac-bd+ae-bf, ad+bc+af+be) \\
&= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be) \\
&= (a,b)(c,d)+(a,b)(e,f) \\
&= zv+zw
\end{aligned}
$$

II) $[v+w]z = vz+wz$

$$
\begin{aligned}
[v+w]z &= [(c,d)+(e,f)](a,b) = (c+e,d+f)(a,b) \\
&= \big((c+e)a-(d+f)b, (c+e)b+(d+f)a\big) \\
&= (ca+ea-db-fb, cb+eb+da+fa) \\
&= (ca-db+ea-fb, cb+da+eb+fa) \\
&= (ca-db, cb+da)+(ea-fb, eb+fa) \\
&= (c,d)(a,b)+(e,f)(a,b) \\
&= vz+wz
\end{aligned}
$$

Observemos que:

$$z(v+w) \overset{\boldsymbol{M1}}{\widehat{=}} (v+w)z$$

$$z(v+w) = zv+zw \overset{\boldsymbol{M1}}{\widehat{=}} vz+wz = (v+w)z$$

Notemos que, na expansão do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros as operações de adição e multiplicação realizadas sobre os números naturais no conjunto $\mathbb{Z}$ devem ser as mesmas já conhecidas possibilitando assim que o conjunto dos números naturais seja um subconjunto de $\mathbb{Z}$. O mesmo se dá na expansão do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números racionais e assim por diante.

Para o conjunto dos números complexos temos a mesma ideia. Como os números complexos são pares ordenados de números reais, cada propriedade acima foi demonstrada usando as propriedades da adição e multiplicação de números reais.

Percebemos que ao expandir um conjunto numérico mantém-se as operações e propriedades feitas sobre os elementos do conjunto anterior.

Exemplo: Vamos determinar x e y reais para que se verifique a igualdade $(x,6) = (3,2y)$.

Pela definição de igualdade de números complexos temos:

$$(x,6) = (3,2y) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 6 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Portanto, $x = 3$ e $y = 3$.

Exemplo: Calculemos x e y reais para que se verifique a seguinte igualdade:

$$(3x, -4) + (y, x + y) = (2 - 3)$$

Aplicando a definição de adição e depois de igualdade de números complexos, temos:

$$(3x, -4) + (y, x + y) = (2 - 3) \Rightarrow (3x + y, x + y - 4) = (2, -3)$$

$$\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + y - 4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos $x = 1/2$ e $y = 1/2$.

Fazendo a verificação temos:

$$\begin{aligned} (3x, -4) + (y, x + y) = (2 - 3) \quad &\Rightarrow \left(3.\frac{1}{2}, -4\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = (2 - 3) \\ &\Rightarrow \left(\frac{3}{2}, -4\right) + \left(\frac{1}{2}, 1\right) = (2 - 3) \\ &\Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, -4 + 1\right) = (2 - 3) \\ &\Rightarrow \left(\frac{4}{2}, -3\right) = (2 - 3) \\ &\Rightarrow (2, -3) = (2 - 3) \end{aligned}$$

Portanto, $x = 1/2$ e $y = 1/2$.

3.3.3 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

O número complexo $(a, 0)$ é identificado com o número real a, o que pode ser escrito como:

$$(a, 0) \Leftrightarrow a$$

Ao fazer essa identificação, constatamos que $\mathbb{R}$ é subconjunto de $\mathbb{C}$, ou seja, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e corresponde aos pares ordenados que têm a ordenada igual a zero.

As definições de adição e multiplicação e suas propriedades comportam-se para o números complexos da forma $(a, 0)$ como se fossem números reais a.

3.3.4 A unidade imaginária

O número complexo $(0,1)$ é chamado de unidade imaginária e indicado por i sendo um número complexo não real.

Notemos que:

$$i^2 = i.i = (0,1)(0,1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1,0) = -1$$

Portanto i^2 é um número real tal que $i^2 = -1$, que é a característica fundamental da unidade imaginária.

3.3.5 A forma algébrica dos números complexos

Um número complexo qualquer $z = (a, b)$ pode ser escrito como $z = a + bi$. Vejamos que:

$$z = (a, b) = (a + 0, b + 0) = (a, 0) + (0, b) \quad (I)$$

Mas, $(0, b) = (b, 0)(0,1) \quad (II)$

De fato, $(b, 0)(0,1) = (b.0 - 0.1, b.1 + 0.0) = (0, b)$

Temos também que $(a, 0) = a$ e $(b, 0) = b \quad (III)$

Substituindo (II) e (III) em (I) temos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = \underbrace{(a, 0)}_{a} + \underbrace{(b, 0)}_{b}\underbrace{(0,1)}_{i} = a + bi$$

Logo, todo número complexo pode ser escrito de maneira única:

$$z = a + bi \, \{a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \; e \; i^2 = -1\}$$

Essa é a forma algébrica ou forma binomial de escrever um número complexo. Um número complexo escrito nessa forma tem duas partes:

$$z = \underbrace{a}_{\substack{parte\ real \\ de\ z}} + \underbrace{b\,i}_{\substack{parte \\ imaginária \\ de\ z}}$$

a é a parte real de z e denotado por $Re(z) = a$

b é a parte imaginária de z e denotado por $Im(z) = b$

Observemos que se $b = 0$ temos $z = a$ que é um número real e, se $a = 0$ e $b \neq 0$ temos $z = bi$, que é um número imaginário puro.

Observação: Não podemos dizer que um número complexo é maior que outro número complexo, ou seja, entre os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ não existe relação de ordem.

3.3.6 Adição e subtração de números complexos na forma algébrica

I) Adição

Para adicionar dois números complexos na forma algébrica basta somar a parte real do primeiro a parte real do segundo e somar a parte imaginária do primeiro a parte imaginária do segundo.

Sejam $z = (a, b)$ e $v = (c, d)$. Temos,

$$z + v = (a + bi) + (c + di) = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Exemplo:

Sejam $u = 2 + 4i$ e $w = 1 - 2i$

$$\begin{aligned} u + w &= (2 + 4i) + (1 - 2i) \\ &= 2 + 4i + 1 - 2i \\ &= (2 + 1) + (4 - 2)i \\ &= 3 + 2i \end{aligned}$$

Portanto, $z + v = 3 + 2i$.

II) Subtração

Na subtração de dois números complexos na forma algébrica basta subtrair da parte real do primeiro a parte real do segundo e subtrair da parte imaginária do primeiro a parte imaginária do segundo.

Sejam $z = (a, b)$ e $v = (c, d)$. Temos,

$$z - v = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo:

Sejam $u = 5 - 7i$ e $w = -1 - 6i$

$$\begin{aligned} u - w &= (5 - 7i) - (-1 - 6i) \\ &= 5 - 7i + 1 + 6i \\ &= (5 + 1) + (-7 + 6)i \\ &= 6 - 6i \end{aligned}$$

3.3.7 Multiplicação de números complexos na forma algébrica

Na multiplicação de números complexos na forma algébrica, basta aplicar a mesma propriedade distributiva usada na multiplicação de binômios, observando que i^2 é um número real e vale -1.

Sejam $z = (a, b)$ e $v = (c, d)$. Temos,

$$zv = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:

Sejam $u = 2 + i$ e $w = -6 - 3i$

$$\begin{aligned} uw &= (2 + i)(-6 - 3i) \\ &= 2(-6) + 2(-3i) + i(-6) + i(-3i) \\ &= -12 - 6i - 6i - 3i^2 \\ &= -12 + 3 - 6i - 6i \\ &= -9 - 12i \end{aligned}$$

Notemos que, usando a forma algébrica, as operações de adição, subtração e multiplicação se tornam mais intuitivas do que com a representação por pares ordenados.

3.3.8 Potências de i

Seja i a unidade imaginária. Logo, temos as seguintes potências de i:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 & i^8 = i^4 i^4 = 1.1 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^4 i = 1i = i & i^9 = i^4 i^4 i = 1.1.i = i \\ i^2 = -1 & i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1 & i^{10} = i^4 i^4 i^2 = 1.1.(-1) = -1 \\ i^3 = i^2 i = (-1)i = -i & i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i & i^{11} = i^4 i^4 i^3 = 1.1.(-i) = -i \end{array}$$

Notemos que as potências de i vão em ciclos de quatro elementos: $1, i, -1, -i$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, existe uma maneira prática para determinar i^n. De fato, como $n \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4q + r$, ou seja, divisão de n por 4. Assim, temos:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = (1)^q.i^r = 1.i^r = i^r$$

Portanto, $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Para expoentes inteiros negativos procedemos da mesma maneira lembrando que, sendo $n \in \mathbb{N}^*$, teremos

$$i^{-n} = \frac{1}{i^n} = \frac{1}{i^r} = i^{-r}$$

Exemplos:

Vamos calcular o valor de i^{78982}.

Basta determinar o resto da divisão de 78982 por 4.

Para determinar o resto da divisão de um número por 4 basta determinar o resto da divisão do número formado pelos dois últimos algarismos, que neste caso é 82.

O resto da divisão de 82 por 4 é 2. Logo,

$$i^{67581} = i^2 = -1$$

Vamos resolver a equação $x^2 + 2x + 10 = 0$.

Temos,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

que é impossível em $\mathbb{R}$.

Resolvendo a equação em $\mathbb{C}$ temos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(-1)36}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{i^2 36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

Logo,

$$x' = -1 + 3i \text{ e } x'' = -2 - 3i$$

Fazendo a verificação das raízes complexas encontradas temos:

$$(-1 + 3i)^2 + 2(-1 + 3i) + 10 = 1 - 6i + 9i^2 - 2 + 6i + 10 = 0$$

$$(-1 - 3i)^2 + 2(-1 - 3i) + 10 = 1 + 6i + 9i^2 - 2 - 6i + 10 = 0$$

Portanto, as soluções complexas da equação $x^2 + 2x + 10 = 0$ são $x = -1 + 3i$ ou $x = -1 - 3i$.

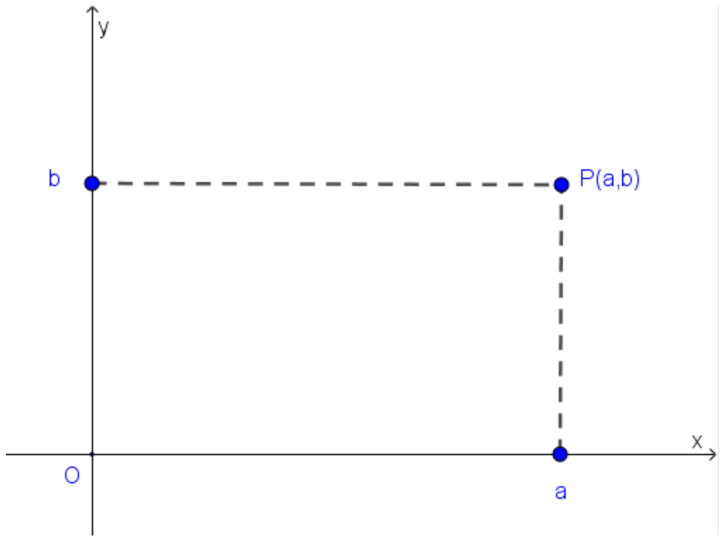
Para que seja definida a divisão de números complexos na forma algébrica precisamos primeiro definir o conjugado de um número complexo.

3.3.9 Representação geométrica dos números complexos

A cada número complexo $z = a + bi$ está associado o par de números reais (a, b) e a cada par de números reais (a, b) está associado a um único ponto do plano. Logo, há uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os números complexos. Assim, podemos associar a cada número complexo $z = a + bi$ o ponto P do plano de coordenadas a e b, isto é, $P(a, b)$.

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. O ponto $P(a, b)$ é chamado de afixo do número complexo $z = a + bi$.

Figura 2 - Representação geométrica dos números complexos.



Fonte: do autor, baseado em DANTE; Vol único, 2005, p.435

No plano de Argand-Gauss o eixo das abscissas é chamado de eixo real, uma vez que seus pontos são os afixos dos números reais ou seja, os números complexos com ordenada igual a zero. O eixo das ordenadas é chamado de eixo imaginário, uma vez que seus pontos são os afixos dos números imaginários puros ou seja, os números complexos com abscissa igual a zero. Os números complexos $a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ pertencem a um dos quatro quadrantes de acordo com os sinais de a e b.

Exemplo: vamos representar os seguintes números complexos no plano cartesiano.

$$z_1 = 3,\ z_2 = 4i,\ z_3 = 7 + 2i,\ z_4 = -3 + 5i \text{ e } z_5 = -1 - 2i.$$

Notemos que:

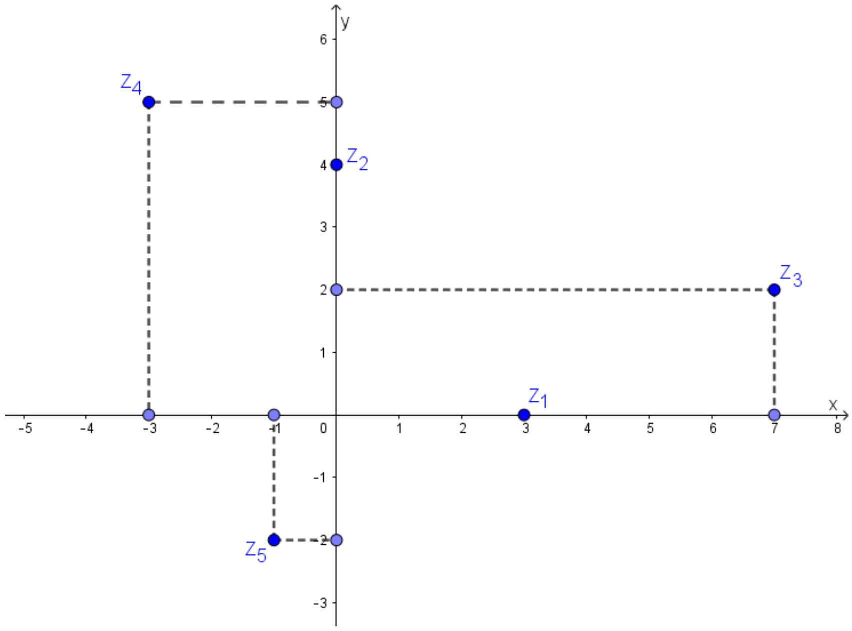
$z_1 = 3$ corresponde ao par ordenado $(3,0)$

$z_2 = 4i$ corresponde ao par ordenado $(0,4)$

Os demais números z_3, z_4 e z_5 correspondem aos pares ordenados $(7{,}2), (-3{,}5)$ e $(-1, -2)$, respectivamente.

Logo, no plano complexo temos:

Figura 3 - Representação geométrica dos números complexos do exemplo acima.



Fonte: do autor

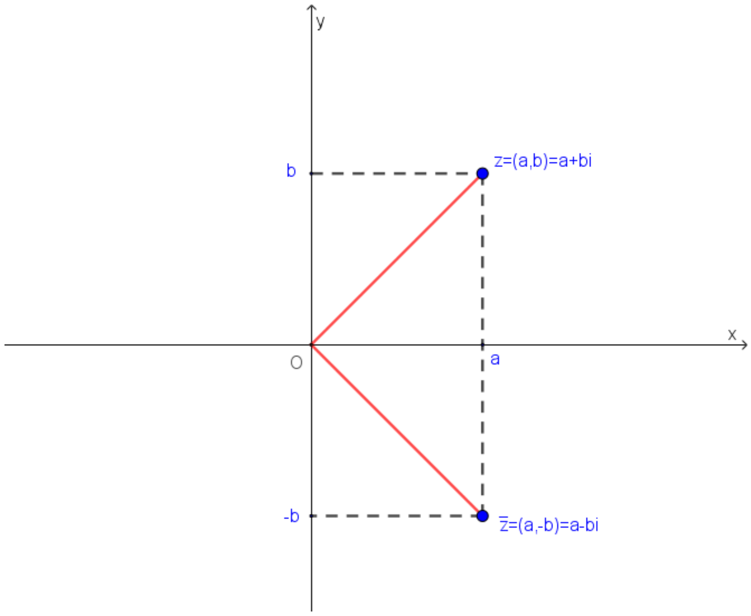
3.3.10 Conjugado de um número complexo

O conjugado de um número complexo $z = (a, b) = a + bi$ é o número complexo $\overline{z} = (a, -b) = a - bi$, ou seja, para obter o conjugado de um número complexo basta trocar o sinal da sua parte imaginária.

3.3.10.1 Interpretação geométrica do conjugado de um número complexo

Geometricamente, o conjugado $\overline{z}$ de um número complexo z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo Ox ou, $\overline{z}$ é a reflexão de z em relação ao eixo horizontal.

Figura 4 - Representação geométrica do conjugado de um número complexo.



Fonte: do autor, baseado em DANTE; Vol único, 2005, p.436

3.3.10.2 Propriedades do conjugado de um número complexo

C1) Se $z = a + bi$ então $z\bar{z} = a^2 + b^2$ (que é um número real positivo ou nulo)

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

C2) Para o número complexo z temos: $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ é um número real

De fato, se $z = \bar{z}$ então $a + bi = a - bi$ e igualando as partes reais e imaginárias temos $a = a$ e $b = -b$ o que implica $a = a$ e $2b = 0$. Assim temos $a = a$ e $b = 0$ o que implica z ser um número real.

Por outro lado, se $z = a + bi$ é um número real então $b = 0$ o que implica

$z = a + 0.i = a - 0.i = \bar{z}$.

C3) Se z e v são números complexos então: $\overline{z + v} = \bar{z} + \bar{v}$

Sejam $z = a + bi$ e $v = c + di$ números complexos com a, b, c e d números reais. Temos,

$$\begin{aligned}
\overline{z + v} &= \overline{(a + bi) + (c + di)} \\
&= \overline{(a + c) + (b + d)i} \\
&= (a + c) - (b + d)i \\
&= a + c - bi - di \\
&= (a - bi) + (c - di) \\
&= \bar{z} + \bar{v}
\end{aligned}$$

C4) Se z e v são números complexos então: $\overline{zv} = \bar{z}\bar{v}$

Sejam $z = a + bi$ e $v = c + di$ números complexos com a, b, c e d números reais. Temos,

$$
\begin{aligned}
\overline{zv} &= \overline{(a+b\imath)(c+d\imath)} \\
&= \overline{ac+ad\imath+bc\imath+bd\imath^2} \\
&= \overline{ac+ad\imath+bc\imath-bd} \\
&= \overline{(ac-bd)+(ad+bc)\imath} \\
&= (ac-bd)-(ad+bc)i \\
&= ac-bd-adi-bci \\
&= ac-adi-bci+bd(-1) \\
&= ac-adi-bci+bdi^2 \\
&= (a-bi)(c-di) \\
&= \bar{z}\bar{v}
\end{aligned}
$$

Exemplo:

Vamos determinar o número complexo z tal que $3z+2=5\bar{z}+7i$.

Consideremos $z=a+bi$. Então

$$
\begin{aligned}
3z+2=5\bar{z}+7i \quad &\Leftrightarrow 3(a+bi)+2=5(a-bi)+7i \\
&\Leftrightarrow 3a+3bi+2=5a-5bi+7i \\
&\Leftrightarrow (3a+2)+3bi=5a+(7-5b)i
\end{aligned}
$$

Igualando as partes reais e imaginárias temos:

$$3a+2=5a \Longrightarrow 2a=2 \Longrightarrow a=1$$

$$3b=7-5i \Longrightarrow 8b=7 \Longrightarrow b=\frac{7}{8}$$

Logo,

$$z=1+\frac{7}{8}i$$

3.3.11 Divisão de números complexos na forma algébrica

Sejam $z=a+bi$ e $v=c+di$ números complexos com a,b,c e d números reais com $v\neq 0$.

O quociente entre dois números complexos, com o segundo diferente de zero, é dado por:

$$\frac{z}{v}=\frac{z\bar{v}}{v\bar{v}}$$

Ou seja, para dividir dois números complexos na forma algébrica multiplicamos numerador e denominador pelo conjugado do denominador. Notemos, pela propriedade (C1) do conjugado que, ao proceder dessa forma teremos uma nova fração onde o denominador é um número real.

Exemplo:

Vamos efetuar a divisão entre os números complexos $z = 5 + i$ e $v = 1 - 2i$. Temos que

$$\frac{z}{v} = \frac{z\bar{v}}{v\bar{v}} = \frac{(5+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{5.1 + 5.2i + i.1 + i.2i}{1^2 + 2^2} = \frac{5 + 10i + i + 2i^2}{1+4} =$$

$$= \frac{5 - 2 + 11i}{5} = \frac{3 + 11i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$$

Logo,

$$\frac{z}{v} = \frac{3}{5} + \frac{11}{5}i$$

3.3.12 Potenciação de números complexos na forma algébrica

A potenciação de números complexos na forma algébrica é realizada da mesma forma que na potenciação de polinômios.

Sejam $z = a + bi, u = c - di$ com a, b, c e d números reais e $n \in \mathbb{N}$. Temos,

$$z^n = (a + bi)^n = \underbrace{(a + bi)(a + bi) \dots (a + bi)}_{n\ fatores}$$

$$u^n = (c - ci)^n = \underbrace{(c - di)(c - di) \dots (c - di)}_{n\ fatores}$$

Se o número complexo $z = a + bi$ possui sua parte imaginária nula, ou seja, $b = 0$, a potenciação se dá como com os números reais. Logo temos que,

$$z^n = (a + 0i)^n = a^n$$

Se o número complexo $z = a + bi$ possui sua parte real nula, ou seja, $a = 0$, temos,

$$z^n = (0 + bi)^n = (bi)^n = b^n i^n$$

Para números complexos escritos na forma algébrica com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ podemos também fazer uso de produtos notáveis. Exemplo,

$$\begin{aligned} z^2 &= (a + bi)^2 \\ &= (a)^2 + 2(a)(bi) + (bi)^2 \\ &= a^2 + 2abi + b^2 i^2 \\ &= (a^2 - b^2) + 2abi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2 &= (c - di)^2 \\ &= (c)^2 - 2(c)(di) + (di)^2 \\ &= c^2 - 2cdi + d^2 i^2 \\ &= (c^2 - d^2) - 2cdi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (a+bi)^3 \\ &= (a)^3 + 3(a)^2(bi) + 3(a)(bi)^2 + (bi)^3 \\ &= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 \\ &= (a^3 - b^3i - 3ab^2) + 3a^2bi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3 &= (c-di)^3 \\ &= (c)^3 - 3(c)^2(di) + 3(c)(di)^2 - (di)^3 \\ &= c^3 - 3c^2di + 3cd^2i^2 - d^3i^3 \\ &= (c^3 - d^3i - 3cd^2) - 3c^2di \end{aligned}$$

Exemplo:

Para $z = 2 + 3i$. Temos,

$$\begin{aligned} z^2 &= (2+3i)^2 \\ &= (2)^2 + 2.2.3i + (3i)^2 \\ &= 4 + 12i + 9i^2 \\ &= 4 - 9 + 12i \\ &= -5 + 12i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= (2+3i)^3 \\ &= (2)^3 + 3.(2)^2.3i + 3.2.(3i)^2 + (3i)^3 \\ &= 8 + 36i + 54i^2 + 27i^3 \\ &= 8 - 54 + 36i - 27i \\ &= -46 + 9i \end{aligned}$$

De forma alternativa, podemos calcular potências de números complexos na sua forma algébrica (com $a \neq 0$ e $b \neq 0$) com expoente natural recorrendo ao ***Binômio de Newton***.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n, com\ a, b \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}$$

Exemplo:

Seja $z = 2 + i$. Temos,

$$z^4 = (2+i)^4 = \binom{4}{0} 2^4 i^0 + \binom{4}{1} 2^3 i^1 + \binom{4}{2} 2^2 i^2 + \binom{4}{3} 2^1 i^3 + \binom{4}{4} 2^0 i^4$$

Mas,

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!\,(4-4)!} = \frac{4!}{4!\,0!} = 1$$

Logo,

$$\begin{aligned} z^4 &= (2+i)^4 \\ &= 1.2^4.i^0 + 4.2^3.i^1 + 6.2^2.i^2 + 4.2^1.i^3 + 1.2^0.i^4 \\ &= 16 + 32i - 24 - 8i + 1 \\ &= -7 + 24i \end{aligned}$$

3.3.13 Radiciação de números complexos na forma algébrica

Vamos tentar desenvolver a idéia de raiz quadrada de um número complexo escrito na forma algébrica.

Seja $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos calcular $\sqrt{z}$.

Queremos encontrar um complexo $v = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt{z} = v$. Temos,

$$\sqrt{a+bi} = x + yi$$

Elevando ambos os membros ao quadrado temos,

$$\left(\sqrt{a+bi}\right)^2 = (x+yi)^2$$

Desenvolvendo a igualdade acima temos,

$$a + bi = x^2 + 2xyi + y^2i^2$$

Como $i^2 = -1$ temos,

$$a + bi = (x^2 - y^2) + (2xy)i$$

Igualando as partes reais e imaginárias temos,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \quad (I)$$

Como exemplo, vamos calcular a raiz quadrada de $w = 3 + 4i$. Substituindo os valores em (I) temos,

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (II) \\ 2xy = 4 & (III) \end{cases}$$

De (III) temos que $y = 2/x$. Substituindo em (II) temos,

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \Longrightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Longrightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0\ (IV)$$

Fazendo $u = x^2$ e substituindo em (IV) temos,

$$
\begin{aligned}
u^2 - 3u - 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} \\
&\Leftrightarrow u = \frac{3 \pm 5}{2}
\end{aligned}
$$

As raízes são,

$$u' = 4 \text{ e } u'' = -1$$

De $x^2 = u$ temos,

$$x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2 \text{ e } x^2 = -1$$

e como $x \in \mathbb{R}$ temos que não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 = -1$.

Portando, os valores de x são $x = 2$ ou $x = -2$.

Substituindo os valores de x em (III) temos,

$Para\ x = 2\ temos\ 2.2.y = 4 \Longrightarrow y = 1$

$Para\ x = -2\ temos\ 2(-2)y = 4 \Longrightarrow y = -1$

Logo, temos dois números complexos que são raízes quadradas de $w = 3 + 4i$ que são $w_1 = 2 + i$ e $w_2 = -2 - i$.

De fato. Elevando ambos os números ao quadrado obtemos:

$$w_1{}^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i = w$$

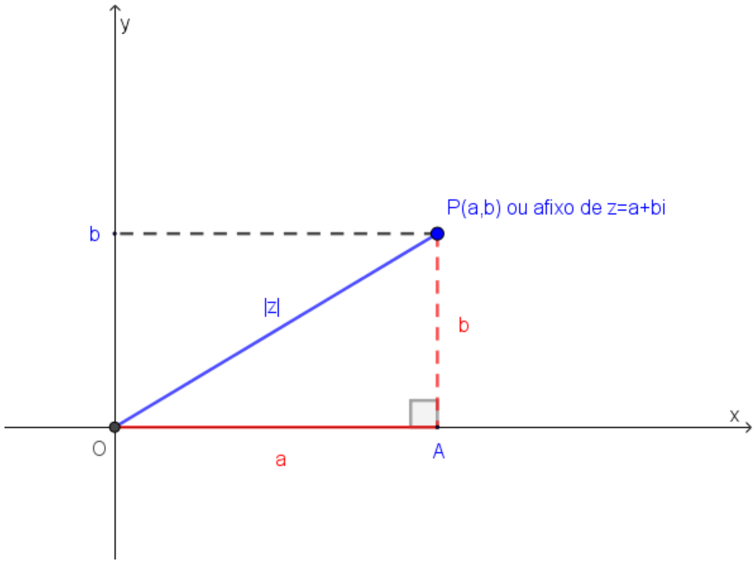
$$w_2{}^2 = (-2 - i)^2 = [(-1)(2 + i)]^2 = (-1)^2(2 + i)^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i + i^2 = 3 + 4i = w$$

Observemos que o cálculo das operações de potenciação e radiciação de números complexos em sua forma algébrica podem se tornar bastante trabalhosos. Mais a frente, veremos como minimizar esses cálculos através da primeira e segunda fórmula de De Moivre. Esse é o objetivo deste capítulo.

3.3.14 Módulo de um número complexo

O módulo de um número complexo, geometricamente, é a distância da origem do sistema de coordenadas O ao afixo de z.

Figura 5 - Interpretação geométrica do módulo de um número complexo.



Fonte: do autor, baseado em DANTE; Vol único, 2005, p.437

Observemos o triângulo OAP, retângulo em A. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OAP, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Portanto, dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se módulo de z e indica-se por $|z|$ o número real positivo ou nulo dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Observemos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos.

Exemplo:

Vamos determinar o módulo do número complexo $z = 5 + i$.

Temos, $|z| = |5 + i| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$

Seja $z = a + bi$ e $u = c + di$ números complexos escritos em sua forma algébrica com a, b, c e d números reais e vamos demonstrar as seguintes propriedades listadas abaixo.

1) O módulo de um número complexo é um número real sempre maior ou igual a zero.

Observemos que: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Mas $a^2 \geq 0$ e $b^2 \geq 0$ e portanto $a^2 + b^2 \geq 0$ e logo $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.

$$|z| = 0 \text{ se e somente se } a^2 = b^2 = 0.$$

$\therefore\ |z| \geq 0$

2) O produto de um número complexo pelo seu conjugado é igual ao quadrado do módulo desse mesmo número:

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2 = z\bar{z}$$

$\therefore\ z\bar{z} = |z|^2$

3) O módulo de um número complexo é igual ao módulo do seu conjugado:

$$|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$$

$\therefore\ |z| = |\bar{z}|$

4) O módulo do produto entre dois números complexos é igual ao produto dos módulos desses mesmos números:

$$\begin{aligned}
|zu| &= |(a+bi)(c+di)| \\
&= |ac+adi+bci+bdi^2| \\
&= |ac-bdi+(ad+bc)i| \\
&= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} \\
&= \sqrt{(ac)^2-2(ac)(bd)+(bd)^2+(ad)^2+2(ad)(bc)+(bc)^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} \\
&= \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)}.\sqrt{(c^2+d^2)} \\
&= |z||u|
\end{aligned}$$

$\therefore\ |zu| = |z||u|$

5) O módulo do quociente entre dois números complexos é igual ao quociente dos módulos entre esses mesmos números.

$$\left|\frac{z}{v}\right| = \sqrt{\frac{a+bi}{c+di}} = \frac{\sqrt{a+bi}}{\sqrt{c+di}} = \frac{|z|}{|v|}$$

$\therefore\ \left|\frac{z}{u}\right| = \frac{|z|}{|u|}$

3.3.15 Forma trigonométrica ou polar de um número complexo

Veremos agora como escrever um número complexo em sua forma trigonométrica. Lembremos que um número complexo $z = a + bi$ é representado por um ponto do plano de coordenadas (a, b) que são as coordenadas cartesianas do ponto z. Esse mesmo ponto pode ser representado por suas coordenadas polares, que são: o módulo de z e o argumento de z.

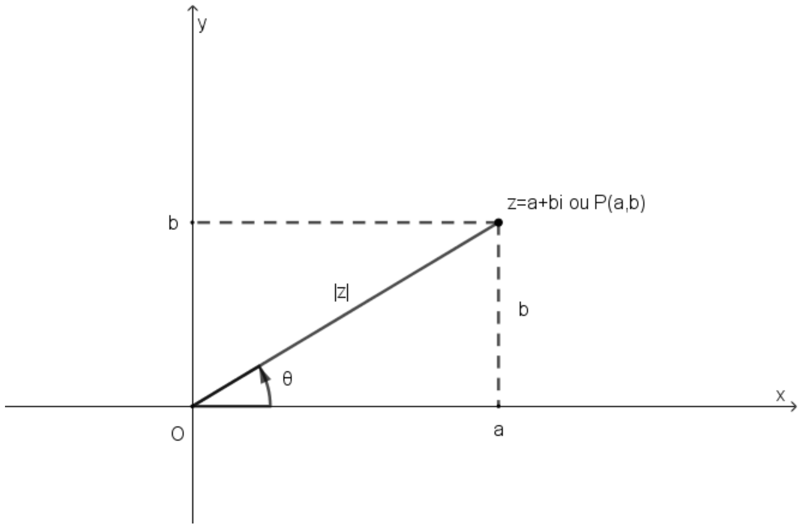
Como já vimos, o módulo de z é a distância da origem do sistema de coordenadas O ao afixo de z ou ao ponto P.

O argumento de z, indicado por $arg(z)$, é o ângulo θ, com $0 \leq \theta < 2\pi$, que o segmento OP forma com o semi-eixo positivo dos x no sentido anti-horário.

Os números $|z|$ e θ são as coordenadas polares do ponto $P(a, b)$ do plano.

Observemos a figura abaixo onde (a, b) representa as coordenadas cartesianas do ponto P, θ representa o ângulo que o segmento OP forma com o semi-eixo positivo dos x no sentido anti-horário e $|z|$ representa a distância do ponto P a origem dos sistema de coordenadas.

Figura 6 - Forma trigonométrica de um número complexo.



Fonte: do autor, baseado em DANTE; Vol único, 2005, p.438

Sendo $z = a + bi$ um número complexo em sua forma algébrica, com $z \neq 0$, temos que o módulo de z é dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O argumento de z é dado por:

$$\arg(z) = \theta$$

Aplicando as razões $seno$ e cosseno do ângulo θ no triângulo retângulo da figura acima temos:

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|cos(\theta)$$

$$sen(\theta) = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|sen(\theta)$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$ temos

$$z = a + bi = |z|cos(\theta) + |z|sen(\theta)i = |z|(cos(\theta) + isen(\theta))$$

Portanto, a forma trigonométrica ou forma polar de z é dada por:

$$z = |z|(cos(\theta) + isen(\theta))$$

Exemplo: Vamos determinar a forma trigonométrica e a representação geométrica do número complexo $z = \sqrt{3} + i$.

Nesse caso temos que $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$.

Vamos calcular a norma de z.

$$|z| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen(\theta) = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{2}$$

Lembrando que $0 \leq \theta < 2\pi$.

Olhando a tabela de senos e cossenos dos ângulos notáveis vemos que $\theta = \pi/6$.

Tabela 1 – senos e cossenos dos ângulos notáveis.

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$seno$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$cosseno$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Fonte: do autor.

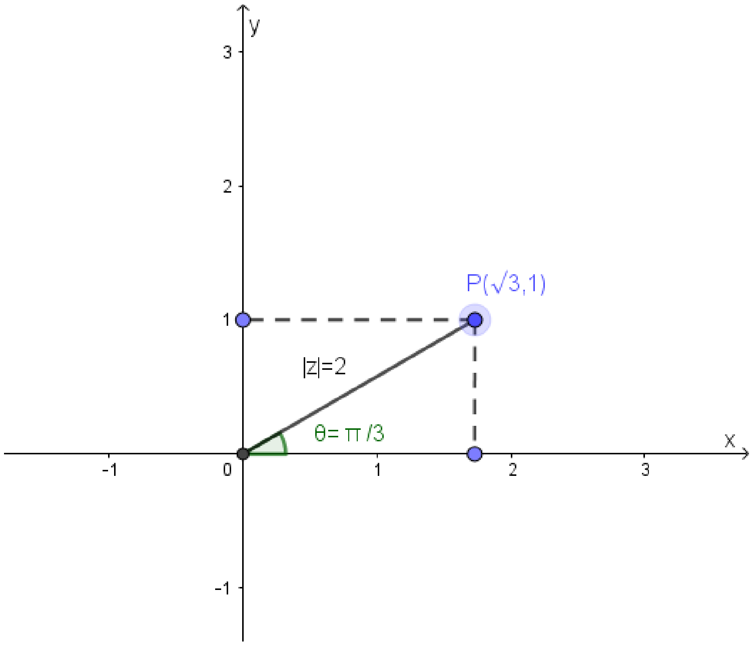
Portanto, $\theta = \arg(z) = \pi/6$.

Logo, a forma trigonométrica de z é dada por:

$$z = |z|(\cos(\theta) + isen(\theta)) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

Abaixo vemos a representação geométrica de $z = \sqrt{3} + i$.

Figura 7 - Representação geométrica de $\boldsymbol{z = \sqrt{3} + i}$.



Fonte: do autor.

Fazendo a verificação temos:

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= 2.\frac{\sqrt{3}}{2} + 2.\frac{1}{2}i \\ &= \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

3.3.16 Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Sejam os números complexos $z = |z|(\cos(\alpha) + isen(\alpha))$ e $v = |v|(\cos(\beta) + isen(\beta))$ escritos na forma trigonométrica. Temos que

$$\begin{aligned} zv &= |z|\big(\cos(\alpha) + isen(\alpha)\big)|v|(\cos(\beta) + isen(\beta)) \\ &= |z||v|\big(\cos(\alpha) + isen(\alpha)\big)(\cos(\beta) + isen(\beta)) \\ &= |z||v|(\cos(\alpha)\,con(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)i + sen(\alpha)\cos(\beta)\,i + sen(\alpha)sen(\beta)i^2) \\ &= |z||v|(\cos(\alpha)\,con(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta) + i(sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)\cos(\alpha)) \\ &= |z||v|(\cos(\alpha+\beta) + isen(\alpha+\beta)) \end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)\cos(\beta)$$

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) + sen(\beta)\cos(\alpha)$$

Portanto, o produto de dois números complexos escritos na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores reduzida à primeira volta, ou seja, $(0 \leq \arg(zv) < 2\pi)$.

Exemplo:

Sejam

$$u = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

e

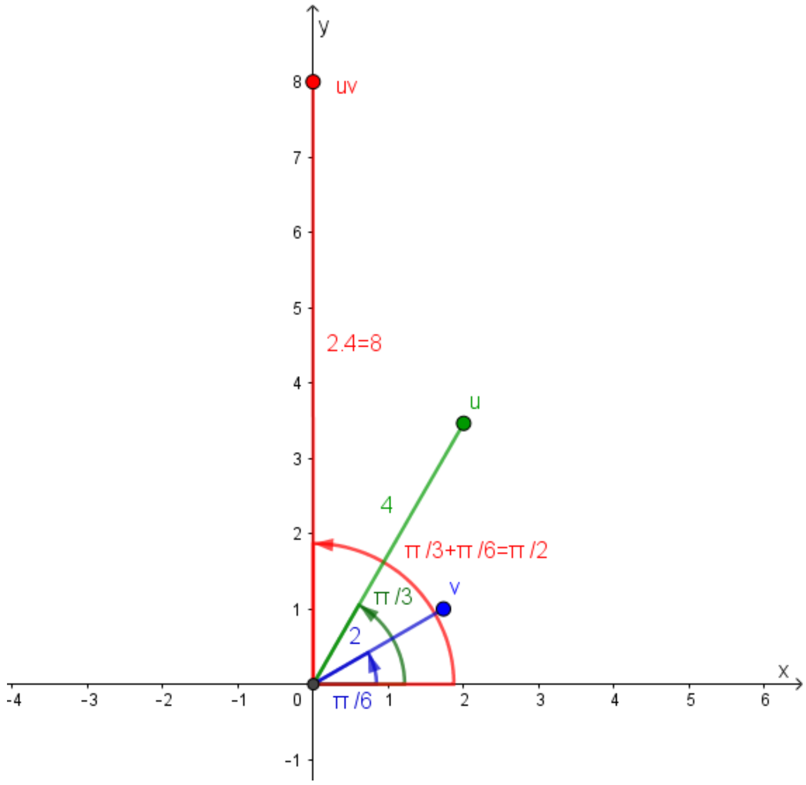
$$v = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

e vamos calcular uv.

$$\begin{aligned}
uv \quad &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 4.2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{6}\right)\right) \\
&= 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Fazendo a interpretação geométrica do produto uv temos,

Figura 8 – Interpretação geométrica do produto $\boldsymbol{uv}$.



Fonte: do autor, baseado em DANTE; Vol único, 2005, p.439.

Notemos que, em uv houve uma rotação positiva a u de um ângulo igual ao ângulo de v, ou seja, houve uma rotação de $\pi/6$ a u no sentido anti-horário. Como o argumento de u era $\pi/3$ e u recebeu uma rotação de $\pi/6$, o produto uv passou a ter argumento igual a $\pi/2$, ou seja,

$$\arg(uv) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

Observemos também que: $|u||v| = 4.2 = 8 = |uv|$ que corresponde a propriedade (4) de módulo de um número complexo anteriormente demonstrada neste texto.

3.3.17 Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Na divisão de números complexos na forma trigonométrica fazemos como na divisão de números complexos na forma algébrica, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

Sejam os números $z = |z|(\cos(\alpha) + isen(\alpha))$ e $v = |v|(cos(\beta) + isen(\beta))$ números complexos escritos em sua forma trigonométrica com $v \neq 0$. Logo,

$$\frac{z}{v} = \frac{z\bar{v}}{v\bar{v}}$$
$$= \frac{|z|(\cos(\alpha) + isen(\alpha))}{|v|(cos(\beta) + isen(\beta))}\frac{|v|(cos(\beta) - isen(\beta))}{|v|(cos(\beta) - isen(\beta))}$$

$$= \frac{|z|(\cos(\alpha) + isen(\alpha))}{|v|(cos(\beta) + isen(\beta))} \frac{(cos(\beta) - isen(\beta))}{(cos(\beta) - isen(\beta))}$$

$$= \frac{|z|(\cos(\alpha)cos(\beta) - isen(\beta)\cos(\alpha) + sen(\alpha)cos(\beta)i - sen(\alpha)sen(\beta)i^2)}{|v|(sen^2(\alpha) + con^2(\beta))}$$

$$= \frac{|z|(\cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta) + i(sen(\alpha)cos(\beta) - sen(\beta)\cos(\alpha)))}{|v|(sen^2(\alpha) + con^2(\beta))}$$

$$= \frac{|z|}{|v|}(\cos(\alpha - \beta) + isen(\alpha - \beta)$$

Lembrando que,

$$sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) - sen(\beta)\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)cos(\beta) + sen(\alpha)sen(\beta)$$

Portanto, o quociente de dois números complexos na forma trigonométrica, com o segundo diferente de zero, é o número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos e cujo argumento é a diferença dos argumentos dos dois números na ordem dada, reduzida a primeira volta $(0 \leq \arg(z/v) < 2\pi)$.

Exemplo:

Sejam

$$u = 3\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

e

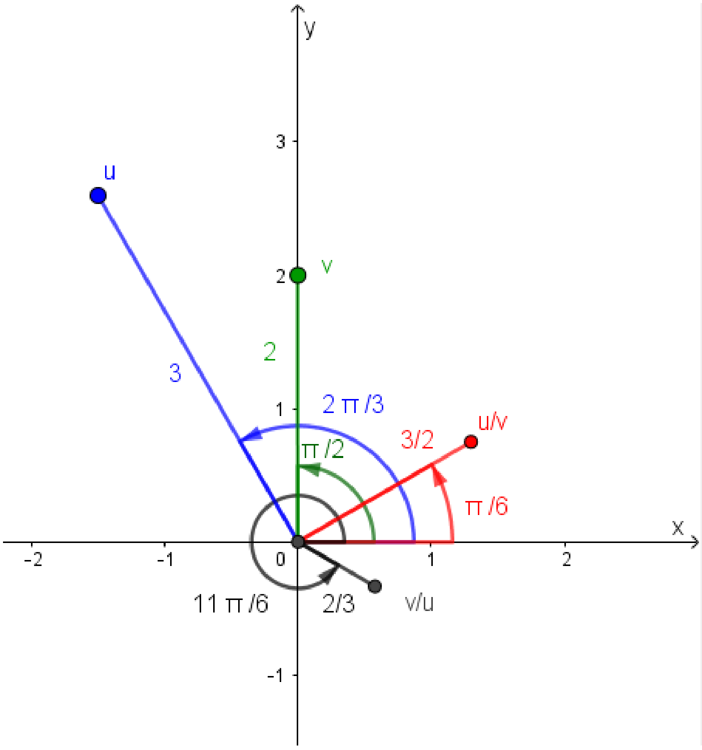
$$v = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

e vamos calcular u/v.

$$\begin{aligned}
\frac{u}{v} &= \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{6} - \frac{3\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$

Fazendo a interpretação geométrica da divisão u/v temos,

Figura 9 – Interpretação geométrica dos quocientes $\boldsymbol{u}/\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}/\boldsymbol{u}$.



Fonte: do autor.

Notemos que, em u/v houve uma rotação negativa a u de um ângulo igual ao ângulo de v, ou seja, houve uma rotação de $\pi/2$ a u no sentido horário. Como o argumento de u era $2\pi/3$ e u recebeu uma rotação negativa de $\pi/2$, o quociente u/v passou a ter argumento igual a $\pi/6$, ou seja,

$$\arg\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Observemos também que:

$$\frac{|u|}{|v|} = \frac{3}{2} = \left|\frac{u}{v}\right|$$

que corresponde a propriedade (5) de módulo de um número complexo anteriormente demonstrada neste texto.

Notemos também que, diferentemente da multiplicação entre números complexos na forma trigonométrica, $u/v \neq v/u$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{v}{u} &= \frac{2}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

Como vemos na figura acima, em v/u houve uma rotação negativa a v de um ângulo igual ao ângulo de u, ou seja, houve uma rotação negativa de $2\pi/3$ a u. Como argumento de u era $\pi/2$ e u recebeu uma rotação negativa de $2\pi/3$, o quociente v/u passou a ter argumento igual a $11\pi/6$, ou seja,

$$\arg\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

O módulo de v/u é $2/3$.

Observemos que $11\pi/6$ é o ângulo côngruo de $-\pi/6$ tal que $0 \leq 11\pi/6 < 2\pi$.

3.3.18 Potenciação de complexos na forma trigonométrica – a fórmula de De Moivre.

Seja um número complexo $z = a + bi$ escrito na forma trigonométrica

$z = |z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)$.

Temos:

$\big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)$ fórmula de De Moivre.

Vamos demonstrar que a igualdade acima é sempre válida para qualquer número inteiro usando como base o método de multiplicação de números complexos na forma trigonométrica.

Primeiramente, vamos demonstrar a igualdade para os números inteiros positivos. Logo,

$$para\ n = 1\ temos \quad z^1 = |z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)$$

$$\begin{aligned} para\ n = 2\ temos \quad z^2 &= zz \\ &= |z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big) \\ &= |z||z|\big(\cos(\theta+\theta) + isen(\theta+\theta)\big) \\ &= |z|^2\big(\cos(2\theta) + isen(2\theta)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} para\ n = 3\ temos \quad z^3 &= z^2 z \\ &= |z|^2\big(\cos(2\theta) + isen(2\theta)\big)|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big) \\ &= |z|^2|z|\big(\cos(2\theta+\theta) + isen(2\theta+\theta)\big) \\ &= |z|^3\big(\cos(3\theta) + isen(3\theta)\big) \end{aligned}$$

Supondo a igualdade válida para um certo $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$, vamos provar que a igualdade vale para $n + 1$.

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z \\ &= |z|^n\big(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big) \\ &= |z|^n|z|\big(\cos(n\theta+\theta) + isen(n\theta+\theta)\big) \end{aligned}$$

$$= |z|^{n+1}\Big(\cos\big((n+1)\theta\big) + isen\big((n+1)\theta\big)\Big)$$

Portanto a igualdade é válida para os números inteiros positivos.

Vamos demonstrar agora a igualdade para os números inteiros negativos.

Seja n um número inteiro positivo. Logo,

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^{-n} \\ &= \frac{1}{\big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^{n}} \\ &= \frac{\cos(0) + isen(0)}{\big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^{n}} \\ &= \frac{\cos(0) + isen(0)}{|z|^{n}\big(\cos(n\theta) + isen(n\theta)\big)} \\ &= \frac{1}{|z|^{n}}\big(\cos(0 - n\theta) + isen(0 - n\theta)\big) \\ &= |z|^{-n}\big(\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)\big) \end{aligned}$$

Portanto, a igualdade é válida também para os números inteiros negativos.

Para $n = 0$ podemos justificar a igualdade como

$$\begin{aligned} \big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^{0} &= \big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^{1-1} \\ &= \frac{|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)}{|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)} \\ &= 1\big(\cos(\theta - \theta) + isen(\theta - \theta)\big) \\ &= 1\Big(\cos\big(\theta(1-1)\big) + isen\big(\theta(1-1)\big)\Big) \\ &= 1\big(\cos(0.\theta) + isen(0.\theta)\big) \\ &= 1\big(\cos(0) + isen(0)\big) \\ &= 1(1 + 0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

E portanto,

$$z^{0} = \big[|z|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)\big]^{0} = |z|^{0}\big(\cos(0.\theta) + isen(0.\theta)\big) = 1$$

Concluindo, a potência de ordem n de um número complexo escrito na forma trigonométrica é o número complexo cujo módulo é igual ao módulo do número elevado a n e cujo argumento é igual ao argumento do número multiplicado por n, reduzido à primeira volta $(0 \leq \arg(z^{n}) < 2\pi)$.

Portanto, dado o número complexo $z = a + bi$, temos que $z = |z|\left(cos(\alpha) + isen(\alpha)\right)$ em sua forma trigonométrica e z^n é dado por $z^n = |z|^n\left(\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)\right)$.

Exemplo: Vamos calcular a potência $(-2 + 2i)^6$.

Como vimos anteriormente na potenciação de números complexos na forma algébrica, podemos multiplicar $(-2 + 2i)$ por ele mesmo usando seis fatores. Podemos também desenvolver a expressão $(-2 + 2i)^6$ usando o binômio de Newton. Uma terceira maneira, e que facilita o cálculo, é escrever o número complexo $(-2 + 2i)$ na forma trigonométrica e usar a fórmula de De Moivre e, logo após o cálculo, escrever o novo número complexo em sua forma algébrica. Vejamos um exemplo:

Seja $z = -2 + 2i$

O módulo de z é dado por: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

O $\cos(\theta)$ e o $sen(\theta)$ são dados por:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{-2}{|z|} = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ sen(\theta) = \dfrac{2}{|z|} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \leq \arg(z) < 2\pi \end{cases}$$

Então,

$$\theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{4}$$

Portanto,

$$z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Logo,

$$\begin{aligned} z &= (-2 + 2i)^6 \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(6.\frac{3\pi}{4}\right) + isen\left(6.\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^6\left(\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Mas,

$$(2\sqrt{2})^6 = (2)^6(2^{\frac{1}{2}})^6 = 2^6 2^{\frac{6}{2}} = 2^6 2^3 = 2^9$$

$$\frac{9\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2(2)\pi$$

Logo, $9\pi/2$ corresponde a duas voltas mais $\pi/2$, ou seja, $9\pi/2$ é côngruo a $\pi/2$.

Portanto,

$$z^6 = (-2+2i)^2 = 2^9\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Na forma algébrica temos:

$$z^6 = (-2+2i)^6 = 2^9\big(0 + i(1)\big) = 2^9.0 + 2^9 i = 2^9 i = 512i$$

Logo, $z^6 = 512i$

Portanto, para simplificar a potenciação de um número complexo $u = a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, basta escrevê-lo na forma trigonométrica, aplicar a primeira fórmula de De Moivre e converter o novo número para a forma algébrica.

Exemplo: Vamos fazer a interpretação geométrica da potenciação do seguinte número complexo: $u = 1 + i$

Escrevendo u em sua forma trigonométrica temos:

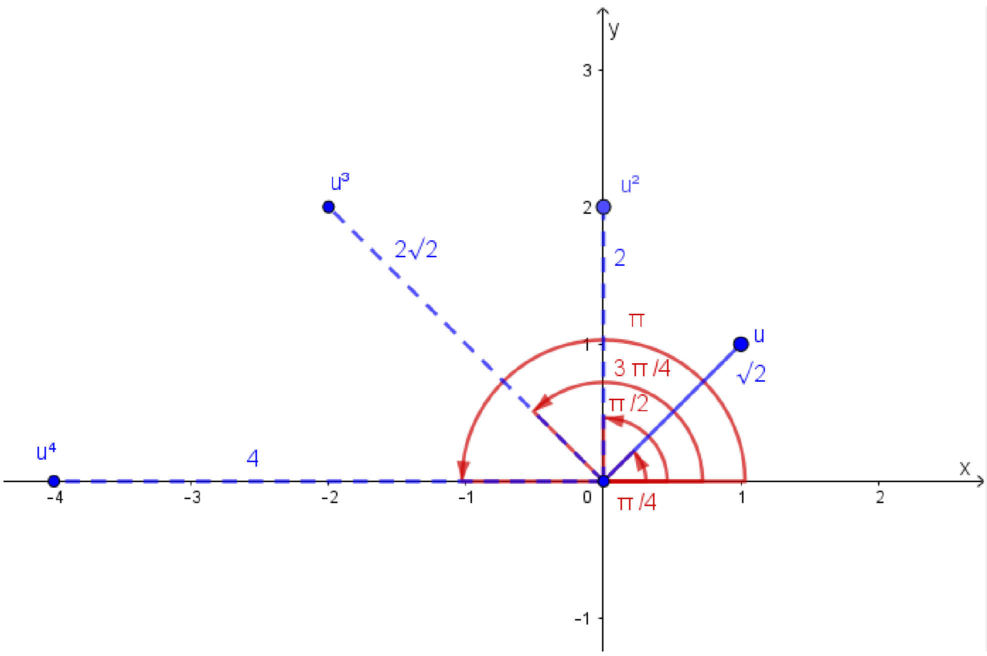
$$u = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Assim vemos que:

$$\begin{cases} |u| = \sqrt{2} \\ \arg(u) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Observemos a figura a seguir:

Figura 10 – Interpretação geométrica da potenciação do complexo $\boldsymbol{u = 1 + i}$.



Fonte: do autor.

Notemos que:

$$\arg(u^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad |u^2| = (\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\arg(u^3) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 3.\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \text{e} \quad |u^3| = (\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\arg(u^4) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 4.\frac{\pi}{4} = \pi \quad \text{e} \quad |u^4| = (\sqrt{2})^4 = \sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$$

Podemos ver que, geometricamente, na figura acima, na potenciação de um número complexo em sua forma trigonométrica temos que seu argumento é multiplicado pelo expoente e seu módulo fica elevado a esse mesmo expoente.

3.3.19 Radiciação de complexos na forma trigonométrica (segunda fórmula de De Moivre).

A segunda fórmula de De Moivre é usada para encontrar as raízes de números complexos escritos na forma trigonométrica.

Vamos novamente desenvolver a idéia de raiz enésima de um número complexo a partir dos números reais.

Consideremos $\sqrt{16}$. No conjunto dos números reais temos $\sqrt{16} = y$ onde y é solução não-negativa da equação $x^2 = 16$, então $x = \pm 4$ e $y = 4$. Logo, no conjunto dos números reais temos que $\sqrt{16} = 4$.

Vamos considerar agora $\sqrt{-16}$.

$\sqrt{-16} = y$ onde y é solução não-negativa da equação $x^2 = -16$

No conjunto dos números reais o quadrado de qualquer número sempre será um número não negativo. Portanto, $\nexists\, x \in \mathbb{R};\ x^2 = -16$.

Observemos que, em $\mathbb{C}$ $i^2 = -1$, ou seja, elevamos um número complexo ao quadrado e obtemos como resultado um número real negativo.

Notemos que:

$$(4i)^2 = (0{,}4)^2 = (0{,}4)(0{,}4) = (0.0 - 4.4{,}0.4 + 4.0) = (-16{,}0) = -16$$

e que

$$\begin{aligned}(-4i)^2 &= (0,-4)^2 \\ &= (0,-4)(0,-4) \\ &= (0.0 - (-4).(-4), 0.(-4) + (-4).0) \\ &= (-16{,}0) \\ &= -16\end{aligned}$$

Ou seja, em $\mathbb{C}$ temos dois números que elevados ao quadrado obtemos como resultado -16 e, portanto, $\sqrt{-16} = \pm 4i$.

Vamos agora, como exemplo, calcular qual seria $\sqrt[3]{8}$.

Em $\mathbb{R}$ temos $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$.

Vamos calcular $\sqrt[3]{8}$ em $\mathbb{C}$.

Notemos que, ao calcular $\sqrt[3]{8}$ em $\mathbb{C}$ queremos encontrar $u \in \mathbb{C}$ que, escrito em sua forma trigonométrica é $u = |u|\big(\cos(\theta) + isen(\theta)\big)$, tal que $u = \sqrt[3]{8}$ ou seja, $u^3 = 8$.

Pela primeira fórmula de De Moivre temos $u^3 = |u|^3\big(\cos(3\theta) + isen(3\theta)\big)$ e, escrevendo 8 em sua forma trigonométrica temos $8 = 8\big(\cos(0) + isen(0)\big)$.

De $u^3 = 8$, temos

$$|u|^3\big(\cos(3\theta) + isen(3\theta)\big) = 8\big(\cos(0) + isen(0)\big)$$

Temos, portanto, a igualdade de dois números complexos na forma trigonométrica. Seus módulos tem que ser iguais e seus argumentos tem que ser arcos côngruos. Logo,

$$|u|^3 = 8 \Longrightarrow |u| = \sqrt[3]{8} \Longrightarrow |u| = 2 \quad \text{e} \quad 3\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto,

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

e as raízes são dadas por

$$u_k = 2\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores para k temos:

para	$k = 0$	temos	$\theta = 0$	o que implica	$u_0 = 2\big(\cos(0) + isen(0)\big)$
para	$k = 1$	temos	$\theta = \frac{2\pi}{3}$	o que implica	$u_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
para	$k = 2$	temos	$\theta = \frac{4\pi}{3}$	o que implica	$u_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

Observemos que:

Para $k = 3$ teremos a mesma solução encontrada para $k = 0$.

$$k = 3 \Longrightarrow \theta = \frac{6\pi}{3} = 2\pi \equiv 0$$

Para $k = 4$ teremos a mesma solução encontrada para $k = 1$.

$$k = 4 \Longrightarrow \theta = \frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi \equiv \frac{2\pi}{3}$$

Para $k = 5$ teremos a mesma solução encontrada para $k = 2$.

$$k = 5 \Longrightarrow \theta = \frac{10\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi \equiv \frac{4\pi}{3}$$

Mais a adiante provaremos que, se continuarmos atribuindo valores inteiros para k encontraremos valores de θ côngruos a $0, 2\pi/3$ ou $4\pi/3$ obtendo assim os mesmos números complexos u_0, u_1 ou u_2.

Portanto, a equação $u^3 = 8$ em $\mathbb{C}$ possui somente três soluções: u_0, u_1 ou u_2 e, portanto, u_0, u_1 e u_2 são as raízes cúbicas de 8 no conjunto dos números complexos.

Fazendo a verificação das soluções temos:

$$u_0{}^3 = 2^3\big(\cos(3.0) + isen(3.0)\big) = 8\big(\cos(0) + isen(0)\big) = 8(1+0) = 8$$

$$u_1{}^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3.2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{3.2\pi}{3}\right)\right) = 8\big(\cos(2\pi) + isen(2\pi)\big) = 8(1+0) = 8$$

$$u_2{}^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{3.4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{3.4\pi}{3}\right)\right) = 8\big(\cos(4\pi) + isen(4\pi)\big) = 8(1+0) = 8$$

Escrevendo as soluções em sua forma algébrica temos:

$u_0 = 2\big(\cos(0) + isen(0)\big) = 2(1+0) = 2$ (solução inicialmente encontrada em $\mathbb{R}$)

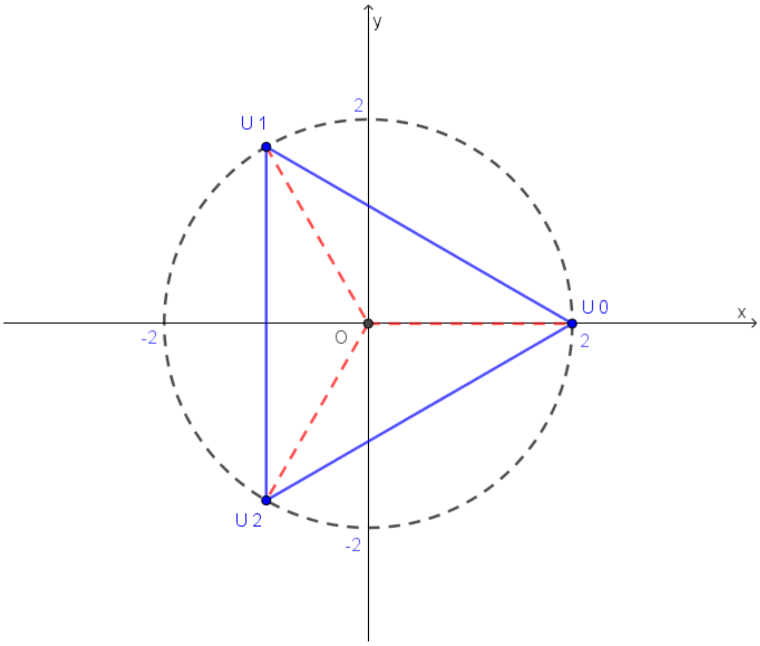
$$u_1 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$u_2 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -1 - \sqrt{3}i$$

Portanto, escritos na forma algébrica temos: $u_0 = 2, u_1 = -1 + \sqrt{3}i$ e $u_2 = -1 - \sqrt{3}i$.

Vamos ver a representação geométrica de u_0, u_1 e u_2.

Figura 11 – Interpretação geométrica das raízes cúbicas de 8 em $\mathbb{C}$.



Fonte: do autor, baseado vídeo do canal Portal da Matemática no youtube.

Observemos que u_0, u_1 e u_2 tem o mesmo módulo e, portanto, estão sobre uma mesma circunferência de raio 2.

Como u_0 tem argumento 0, temos que u_0 está no eixo real.

Como u_1 tem argumento $2\pi/3$, temos que u_1 está no 2º quadrante.

Como u_2 tem argumento $4\pi/3$, temos que u_2 está no 3° quadrante.

Observemos também que u_0, u_1 e u_2 formam uma progressão aritmética de razão $2\pi/3$, o que faz com que os pontos u_0, u_1 e u_2 estejam igualmente espaçados.

De fato,

$$0+\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\frac{6\pi}{3}=2\pi\equiv 0$$

Logo, unindo esses pontos temos que o triângulo $u_0u_1u_2$ é eqüilátero.

Através da ideia anteriormente desenvolvida vamos responder a seguinte pergunta:

Para todo $w \in \mathbb{C}$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^n = w$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$?

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Expressando z e w em sua forma trigonométrica temos:

$$\begin{cases} z = |z|\big(\cos(\alpha) + isen(\alpha)\big) \\ w = |w|\big(\cos(\beta) + isen(\beta)\big) \end{cases}$$

Logo,

$$z^n = w$$

$$|z|^n\big(\cos(n\alpha) + isen(n\alpha)\big) = |w|\big(\cos(\beta) + isen(\beta)\big)$$

Temos, assim, uma igualdade de números complexos na forma trigonométrica. Seus módulos tem que ser iguais e seus argumentos tem que ser arcos côngruos. Logo,

$$\begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

o que implica:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \alpha = \dfrac{\beta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Observemos que z não é único, ou seja, para cada valor de $k \in \mathbb{Z}$ teremos um z. Logo

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

Assim, cada z_k será uma raiz enésima de w.

Portanto, as raízes enésimas de w são da forma z_k.

$$\sqrt[n]{w} = z_k \Rightarrow \sqrt[n]{|w|\big(\cos(\beta) + isen(\beta)\big)} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo valores para k observamos que:

para $k = 0$ Temos $z_0 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta}{n}\right)\right)$

para $k = n$ Temos $z_n = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta}{n} + 2\pi\right) + isen\left(\frac{\beta}{n} + 2\pi\right)\right)$

Como β/n é côngruo a $(\beta/n) + 2\pi$, temos que para $k = 0$ e $k = n$ chegaríamos a mesma raiz.

para $k = 1$ temos $z_1 = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2\pi}{n}\right)\right)$

para $k = n + 1$ temos z_{n+1}

$$\begin{aligned} &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2(n+1)\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2(n+1)\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2n\pi + 2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2n\pi + 2\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2\pi}{n} + 2\pi\right) + isen\left(\frac{\beta + 2\pi}{n} + 2\pi\right)\right) \end{aligned}$$

E novamente, como $(\beta + 2\pi)/n$ é côngruo a $[(\beta + 2\pi)/n] + 2\pi$, temos que para $k = 1$ e $k = n + 1$ chegaríamos a mesma raiz.

Embora possamos atribuir infinitos valores para k encontraremos um número finito de raízes.

De fato, generalizando temos:

Sejam k, n, q e r números inteiros e não negativos. Temos que $k \geq n$ pode ser escrito como $k = nq + r$, com $0 \leq r \leq n - 1$.

Temos:

para $k = r$ temos $z_r = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2r\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2r\pi}{n}\right)\right)$

para $k = nq + r$ temos

$$\begin{aligned} z_{rq+r} &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2(nq + r)\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2(nq + r)\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2nq\pi + 2r\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2nq\pi + 2r\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2r\pi}{n} + \frac{2nq\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2r\pi}{n} + \frac{2nq\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2r\pi}{n} + 2q\pi\right) + isen\left(\frac{\beta + 2r\pi}{n} + 2q\pi\right)\right) \end{aligned}$$

E como $[(\beta + 2r\pi)/n] + 2q\pi$ é côngruo a $(\beta + 2r\pi)/n$ temos que para $k = r$ e $k = nq + r$ chegaríamos a mesma raiz.

Para $k = -1, -2, -3, \ldots$, temos:

Seja k um número inteiro negativo e q, r e n números positivos com $-n \leq -r \leq -1$.

Temos que $k < -n$ pode ser escrito como $k = n(-q) - r$.

para $-k = -r$ temos $z_{-r} = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta - 2r\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta - 2r\pi}{n}\right)\right)$

Para $-k = n(-q) - r$ temos,

$$\begin{aligned} z_{n(-q)-r} &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2(n(-q) - r)\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2(n(-q) - r)\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta - 2nq\pi - 2r\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta - 2nq\pi - 2r\pi}{n}\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta - 2r\pi}{n} - \frac{2nq\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta - 2r\pi}{n} - \frac{2nq\pi}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta - 2r\pi}{n} - 2q\pi\right) + isen\left(\frac{\beta - 2r\pi}{n} - 2q\pi\right)\right)$$

e como $[(\beta - 2r\pi)/n] - 2q\pi$ é côngruo a $(\beta - 2r\pi)/n$ temos que para $k = -r$ e $k = n(-q) - r$ chegaríamos a mesma raiz.

Portando, um número complexo terá sempre n raízes distintas com $k \in \mathbb{Z}$ e

$k = 0,1,2, \ldots, n-1.$

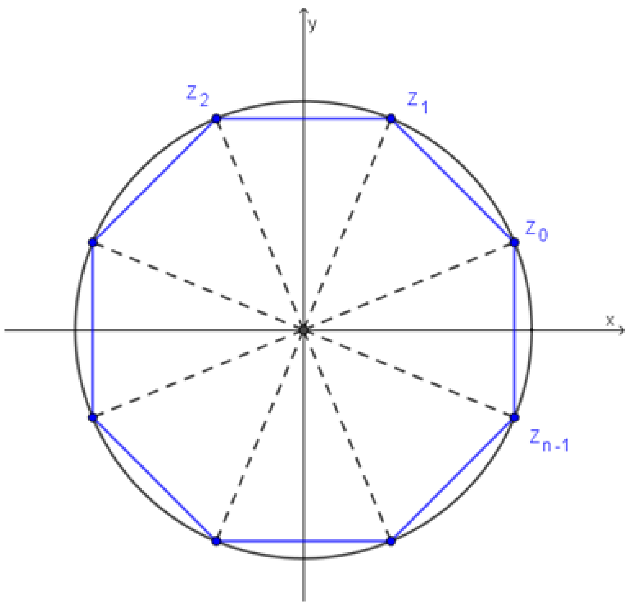
Logo temos,

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\beta + 2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\beta + 2k\pi}{n}\right)\right), k \in \mathbb{Z}\ e\ k = 0,1,2, \ldots, n-1$$

que é conhecida como segunda fórmula de De Moivre.

Observemos também que, como todas as raízes terão o mesmo módulo, geometricamente as suas imagens, no plano de Argand Gauss, estarão sobre uma mesma circunferência e que, a medida que vamos atribuindo valores consecutivos para k teremos que os argumentos de z_k formarão uma progressão aritmética de razão $2\pi/n$, o que fará com que as imagens estejam igualmente espaçadas. Logo, ligando os pontos que representam as imagens de z_k teremos um polígono regular de n lados.

Figura 12 – Interpretação geométrica da raiz n-ésima de um número complexo.



Fonte: do autor, baseado vídeo do canal Portal da Matemática no youtube.

Exemplo: Vamos calcular $\sqrt[4]{i}$.

Seja $z = i$. Escrevendo z em sua forma trigonométrica temos:

$$z = \left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre temos:

$$\sqrt[4]{z} \;= \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}\right)\right), para\ k \in \mathbb{Z}\ e\ k = 0{,}1{,}2{,}3$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right), para\ k \in \mathbb{Z}\ e\ k = 0{,}1{,}2{,}3$$

Portanto,

$$z_k = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right)\right), k \in \mathbb{Z}\,, k = 0{,}1{,}2{,}3$$

para $k = 0$ temos $z_0 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

para $k = 1$ temos $z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)$

para $k = 2$ temos $z_2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right)$

para $k = 3$ temos $z_3 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right) + isen\left(\frac{13\pi}{8}\right)\right)$

Vamos fazer a representação geométrica das raízes de $z = i$.

Como todas as raízes tem módulo igual a 1 as imagens estão sobre uma circunferência unitária.

Dividindo a circunferência em 16 partes iguais temos:

$$\frac{\overbrace{2\pi}^{\substack{circunferencia \\ toda}}}{16} = \frac{\pi}{8}$$

Temos que:

$\frac{\pi}{8}$ corresponde a imagem de z_0

$\frac{5\pi}{8}$ corresponde a imagem de z_1

$\frac{9\pi}{8}$ corresponde a imagem de z_2

$\frac{13\pi}{8}$ corresponde a imagem de z_3

Os pontos $\pi/8\,, 5\,\pi/8\,, 9\pi/8$ e $13\pi/8$ formam uma progressão aritmética de razão $4\pi/8$, motivo pelo qual esses pontos estão igualmente espaçados na circunferência.

Observemos que o ponto $(0,1)$ corresponde a unidade imaginária e que o módulo das raízes é igual a 1. Elevando as raízes a quarta potência seu módulo não sofre alteração.

Quando elevamos z_0 a quarta potência estamos multiplicando o seu argumento por 4 e teremos:

$$4.\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$$

que corresponde a i.

Quando elevamos z_1 a quarta potência estamos multiplicando o seu argumento por 4 e teremos:

$$4.\frac{5\pi}{8}=\frac{5\pi}{2}=\frac{4\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi\equiv\frac{\pi}{2}$$

que corresponde a i.

Quando elevamos z_2 a quarta potência estamos multiplicando o seu argumento por 4 e teremos:

$$4.\frac{9\pi}{8}=\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+4\pi\equiv\frac{\pi}{2}$$

que corresponde a i.

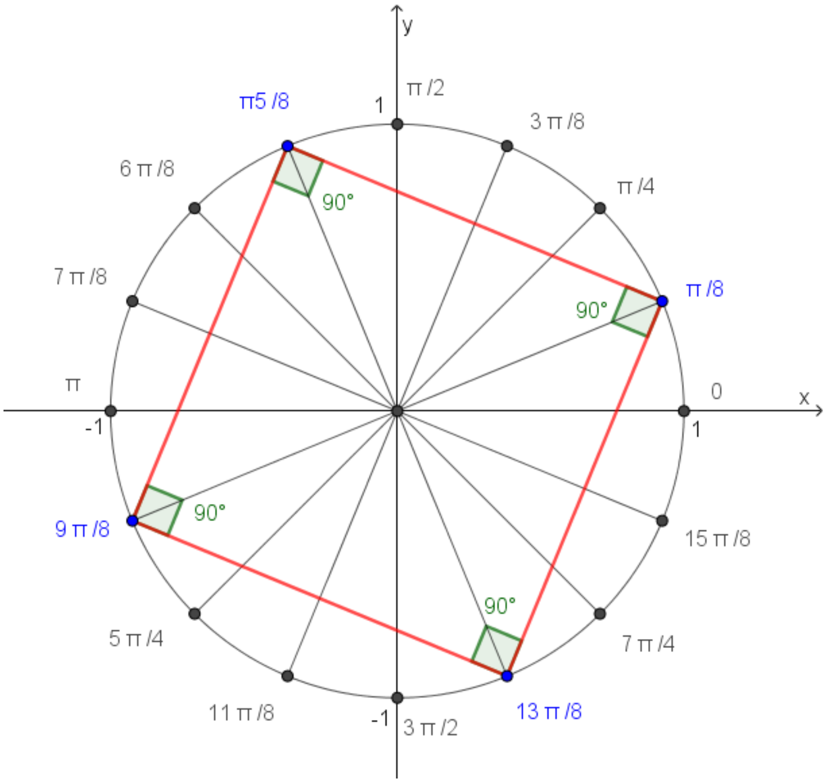
Quando elevamos z_3 a quarta potência estamos multiplicando o seu argumento por 4 e teremos:

$$4.\frac{13\pi}{8}=\frac{13\pi}{2}=\frac{12\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+6\pi\equiv\frac{\pi}{2}$$

que corresponde a i.

Ligando os pontos correspondentes as quatro raízes obtemos um quadrilátero regular, ou seja, um quadrado.

Figura 13 – Interpretação geométrica das raízes quartas de $\boldsymbol{i}$.



Fonte: do autor, baseado vídeo do canal Portal da Matemática no youtube.

Exemplo: Seja $A = (-\sqrt{3}, 1)$ um ponto do plano. Encontre os pontos B, C e D tais que:

i) $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OD}$, sendo O a origem do sistema de coordenadas.
ii) $ABCD$ seja um quadrado.

Solução:

Observemos que o ponto A pertence ao segundo quadrante. Identificando o ponto $A = (-\sqrt{3}, 1)$ com o número complexo $z = -\sqrt{3} + i$ temos:

$$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

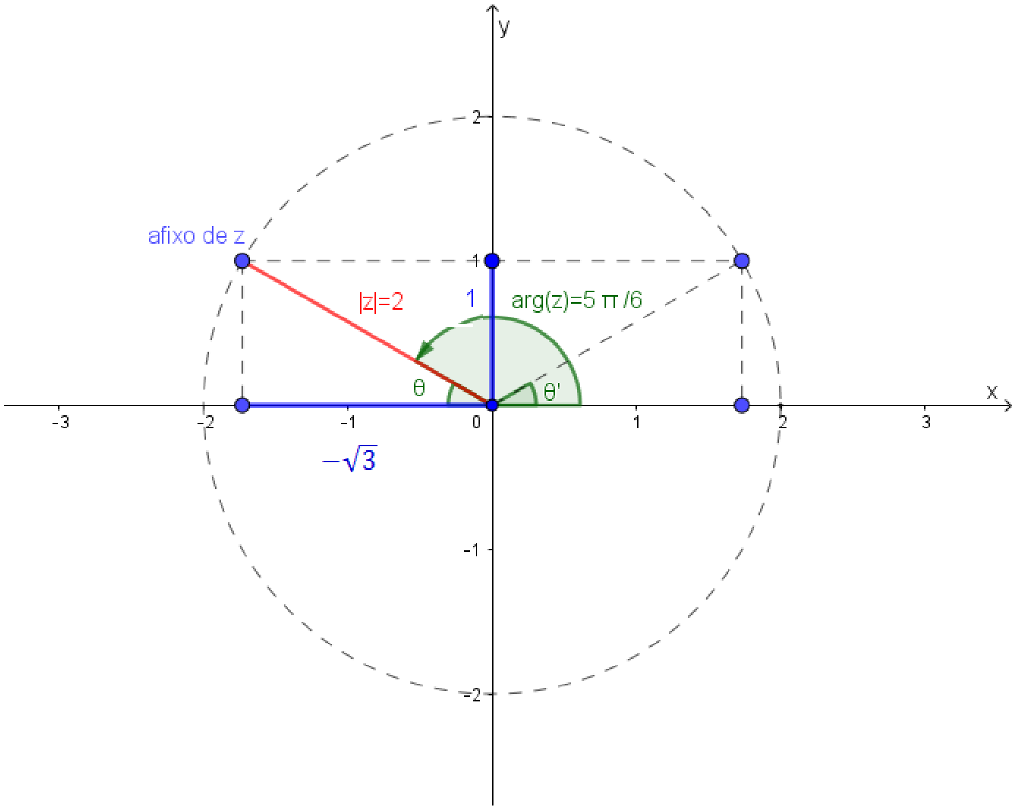
$$\cos(\theta) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sen(\theta) = \frac{1}{2}$$

Fazendo a redução ao primeiro quadrante temos que o ângulo cujo seno vale $1/2$ e o cosseno vale $\sqrt{3}/2$ é o ângulo notável $\pi/6$. Logo,

$$\arg(z) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Figura 14 – Interpretação geométrica do afixo de $\boldsymbol{z}$.



Fonte: do autor.

Escrevendo z em sua forma trigonométrica temos:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

Observemos que a distância que o ponto A se encontra da origem é 2. Como todos os pontos estão a mesma distância da origem, temos que esses pontos estão sobre uma mesma circunferência de raio 2. Portanto, esses números são raízes quartas de um número complexo e uma de suas raízes é conhecida.

Logo, queremos encontrar o número complexo u no qual uma de sua raízes quartas é

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

Temos $u = z^4$. Mas,

$$\begin{aligned} z^4 &= \left[2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right]^4 \\ &= 2^4\left(\cos\left(\frac{4.5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{4.5\pi}{6}\right)\right) \end{aligned}$$

$$= 16\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$$

Portanto,

$$u = 16\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)$$

Calculando as raízes quartas de u temos:

$$\sqrt[4]{u} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right)}$$

$$= \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\frac{10\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\frac{10\pi}{3} + 2k\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{10\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{10\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

Portanto,

$$\sqrt[4]{u} = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right)\right), k \in \mathbb{Z}\,, k = 0,1,2,3$$

para $k = 0$ temos u_0 $= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$

para $k = 1$ temos u_1 $= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{8\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

para $k = 2$ temos u_2 $= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

para $k = 3$ temos u_3 $= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}\right)\right)$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{14\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{14\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{6\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right)\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Portanto, as raízes são:

$$u_0 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$u_1 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

$$u_2 = 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right)$$

$$u_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Observemos que as raízes estão em progressão aritmética de razão $\pi/2$.

Escrevendo as raízes em sua forma algébrica temos:

$$\begin{aligned} u_0 &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= -\sqrt{3} + i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2 &= 2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\
&= \sqrt{3} - i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_3 &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= 1 + \sqrt{3}i
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$u_0 = -\sqrt{3} + i$$

$$u_1 = -1 - \sqrt{3}i$$

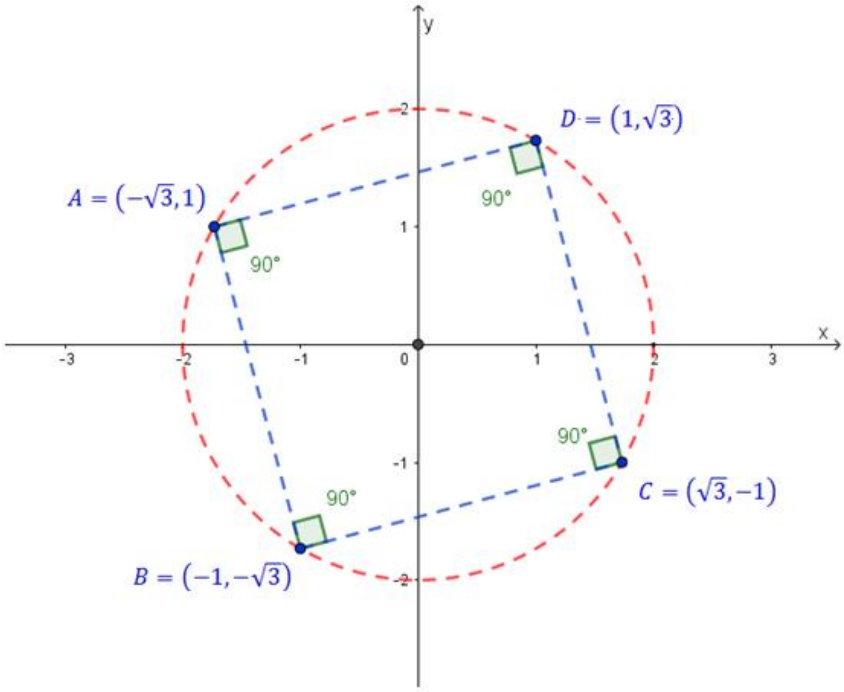
$$u_2 = \sqrt{3} - i$$

$$u_3 = 1 + \sqrt{3}i$$

E os pontos são:

$A = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$; $B = \left(-1, -\sqrt{3}\right)$; $C = \left(\sqrt{3}, -1\right)$ e $D = \left(1, \sqrt{3}\right)$

Figura 15 – Representação geométrica dos pontos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$.



Fonte: do autor.

No próximo capítulo veremos, no software GeoGebra, algumas das operações com números complexos estudadas neste capítulo.

4 TRABALHANDO NÚMEROS COMPLEXOS NO GEOGEBRA

Este capítulo tem como objetivo a utilização do software GeoGebra no estudo de números complexos em sua forma algébrica e trigonométrica proporcionando ao aluno uma visão geométrica e mais significativa de algumas operações estudadas no texto.

Ao utilizar a metodologia padrão, lousa e giz, o professor enfrenta dificuldades para ilustrar geometricamente tais operações o que pode ser resolvido com softwares que auxiliem no ensino da matemática.

A visão geométrica das operações com números complexos no GeoGebra facilita o aprendizado por parte do aluno que, ao construir, visualizar e manipular as construções, tem agora uma maior compreensão ao tratar os números complexos como entes geométricos.

Será exposto neste capítulo apenas os comandos referentes ao estudo de alguns exemplos de operações com números complexos.

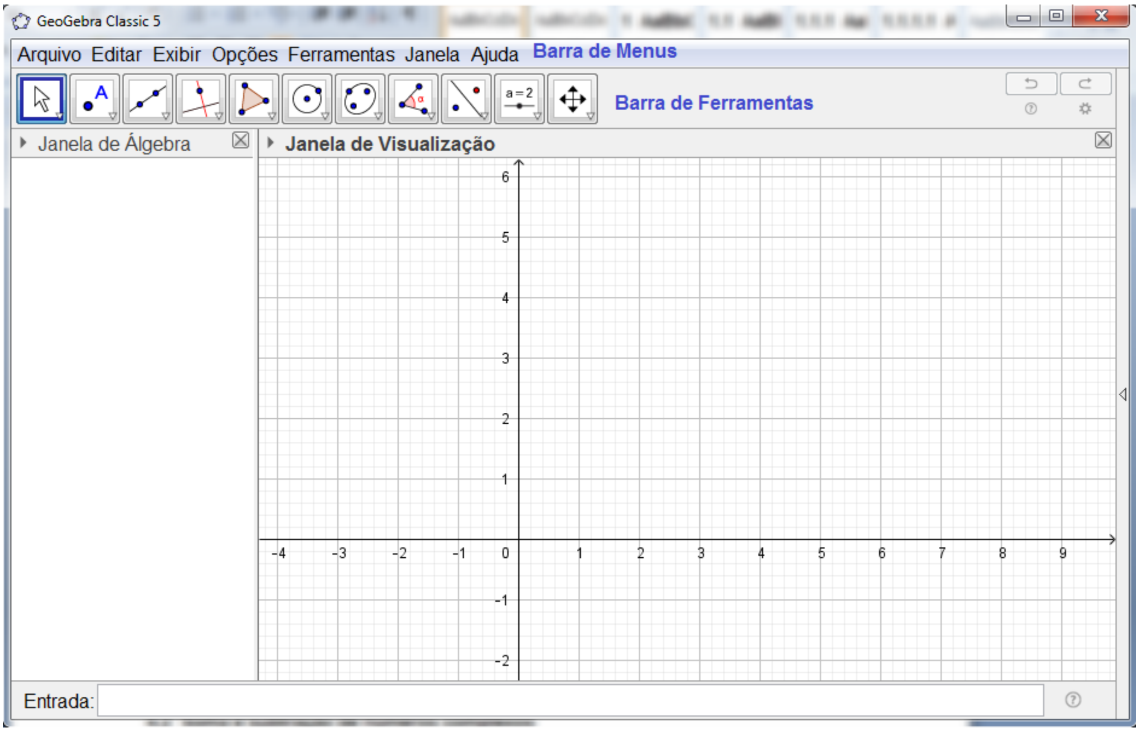
A versão do GeoGebra usada neste capítulo é a 5.0.526.0-d e o link para download consta no final dessa dissertação.

Este capítulo foi desenvolvido com base em exemplos do site GeoGebra, O Geogebra, nos vídeos “Los Números Complejos, com GeoGebra. Vídeo 1. Revisado”, “Los Números Complejos. Vídeo 2. Primeros pasos com la forma Polar”, “Los Números Complejos. Vídeo 4. Raíces de um número Complejo com GeoGebra” e “raíces de números complejos en geogebra” e na dissertação Melo, Ledivaldo 2015. As referências completas e os links dos vídeos se encontram no final dessa dissertação.

4.1 Apresentação da Janela do GeoGebra

Na figura a seguir vemos a janela do GeoGebra.

Figura 16 – Janela do GeoGebra.



Fonte: do autor.

A “Barra de Menus” disponibiliza opções para configurações gerais do aplicativo.

A “Barra de Ferramentas” disponibiliza todas as ferramentas que o GeoGebra possui para as construções geométricas.

A “Janela de Álgebra” apresenta a descrição algébrica dos objetos construídos.

A “Janela de Visualização” apresenta os objetos geométricos construídos.

O campo “Entrada” é usado para digitação de expressões e comandos.

Vamos desenvolver algumas atividades com números complexos na forma algébrica e trigonométrica.

4.2 Soma e subtração de números complexos

Para o desenvolvimento dessa atividade é necessário que o aluno reconheça um número complexo como par ordenado de números reais e estes como pontos do plano, além de saber escrever um número complexo em sua forma algébrica. É necessário também que o aluno saiba somar e subtrair números complexos em sua forma como par ordenado de números reais e em sua forma algébrica.

Primeiramente, vamos fazer a representação de números complexos na forma algébrica. No campo “Entrada” digite $u = 4 + i$ e pressione ENTER.

Figura 17 - Entrada do número complexo $\boldsymbol{u = 4 + i}$.

Fonte: do autor.

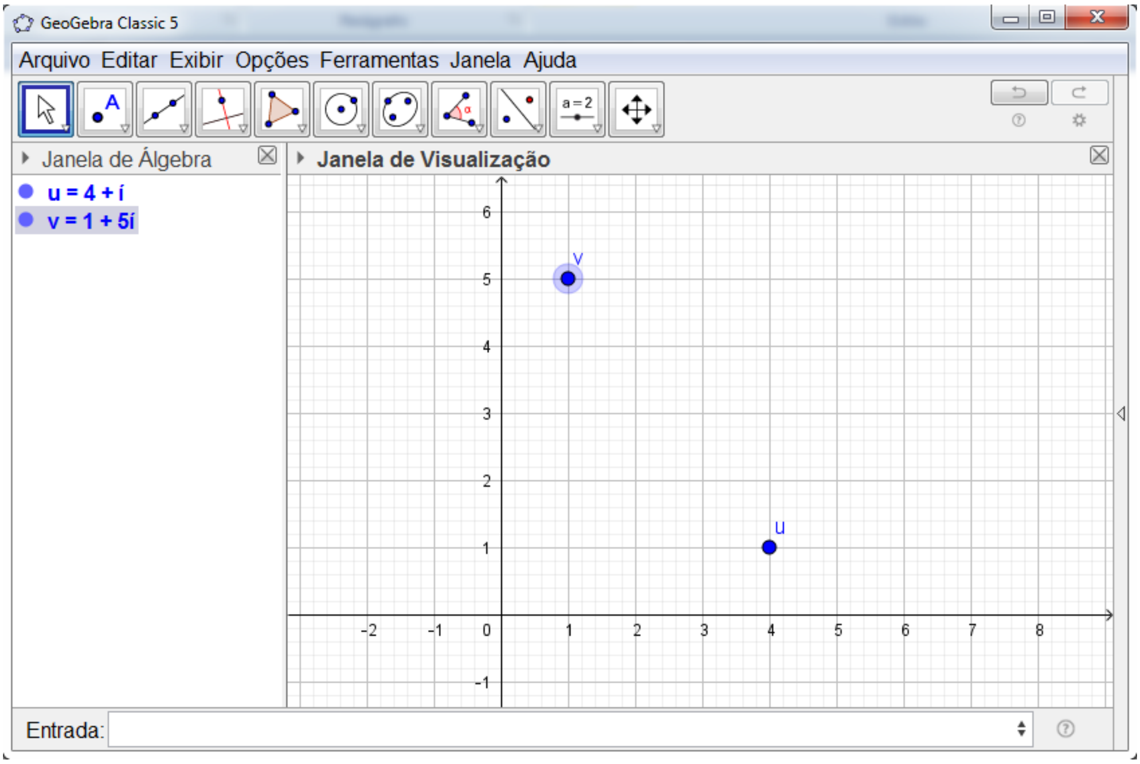
Em seguida, digite no campo de “Entrada” $v = 1 + 5i$ e pressione ENTER.

Figura 18 - Entrada do número complexo $\boldsymbol{v = 1 + 5i}$.

Fonte: do autor.

Os números complexos serão apresentados na tela do programa como mostra a figura a seguir:

Figura 19 – Representação dos números complexos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

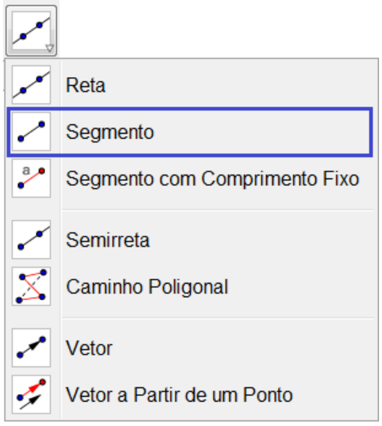


Fonte: do autor.

Notemos que na “Janela de Álgebra” o número complexo é representado em sua forma algébrica e na “Janela de Visualização” o número complexo é representado por um ponto e uma letra.

Observemos que na barra de ferramentas, em cada um dos “botões” há uma pequena seta que, clicando sobre ela, abrirá uma lista de opções para a seleção de outras ferramentas. Vamos utilizar a ferramenta “Segmento”.

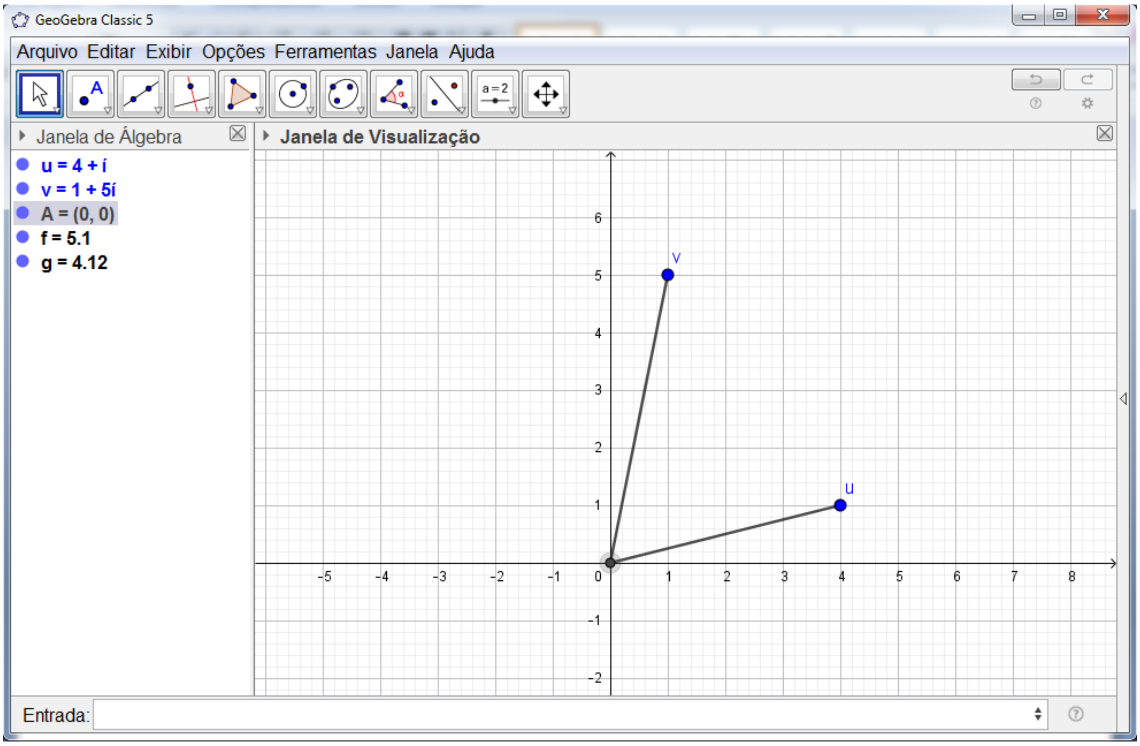
Figura 20 – Lista de ferramentas.



Fonte: do autor.

Selecionada a ferramenta “Segmento”, trace segmentos do ponto $(0,0)$ aos números complexos u e v, clicando no ponto $(0,0)$ e logo em seguida clicando no ponto que representa o número complexo desejado. A janela se apresentará como na figura a seguir.

Figura 21 – Representação dos segmentos referentes ao complexos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.



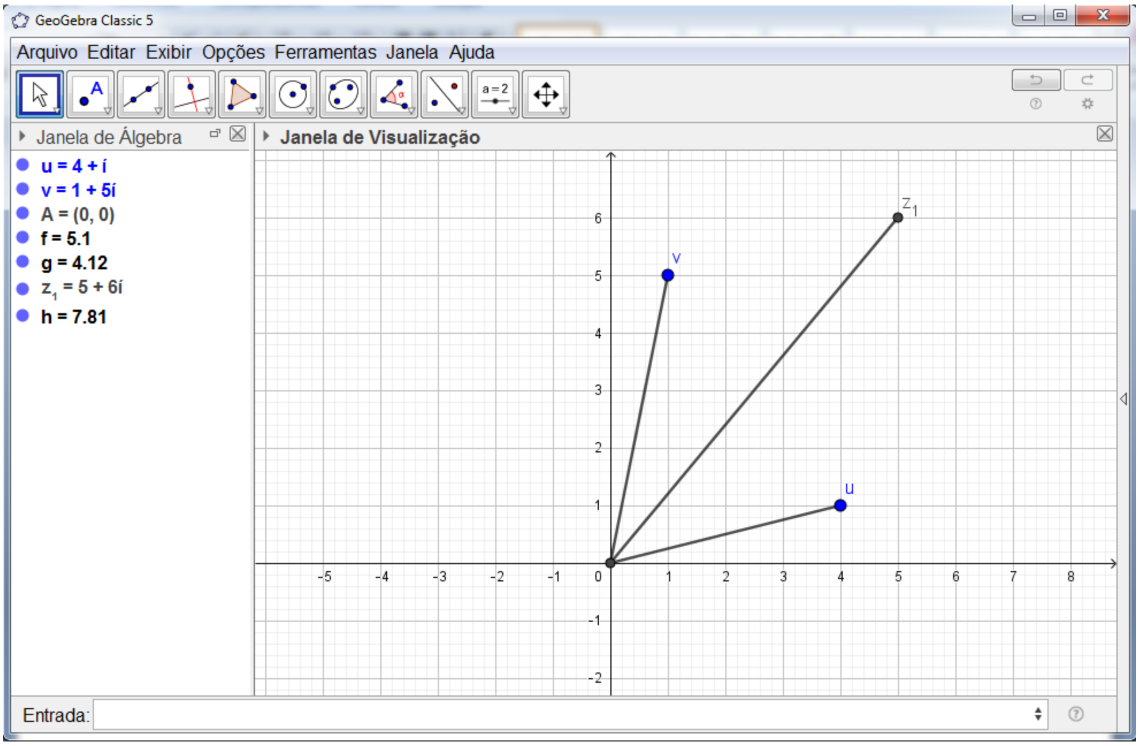
Fonte: do autor.

No campo “Entrada” digite $u + v$ e pressione “ENTER”. Notemos que é criado o ponto z_1 na “Janela de visualização” e na “Janela de Álgebra” temos a forma algébrica do número complexo “$u + v = z_1$”.

Utilizando a ferramenta segmento, tracemos um segmento do ponto $(0,0)$ ao ponto z_1.

A janela será apresentada como na figura a seguir.

Figura 22 – Representação geométrica da soma $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.



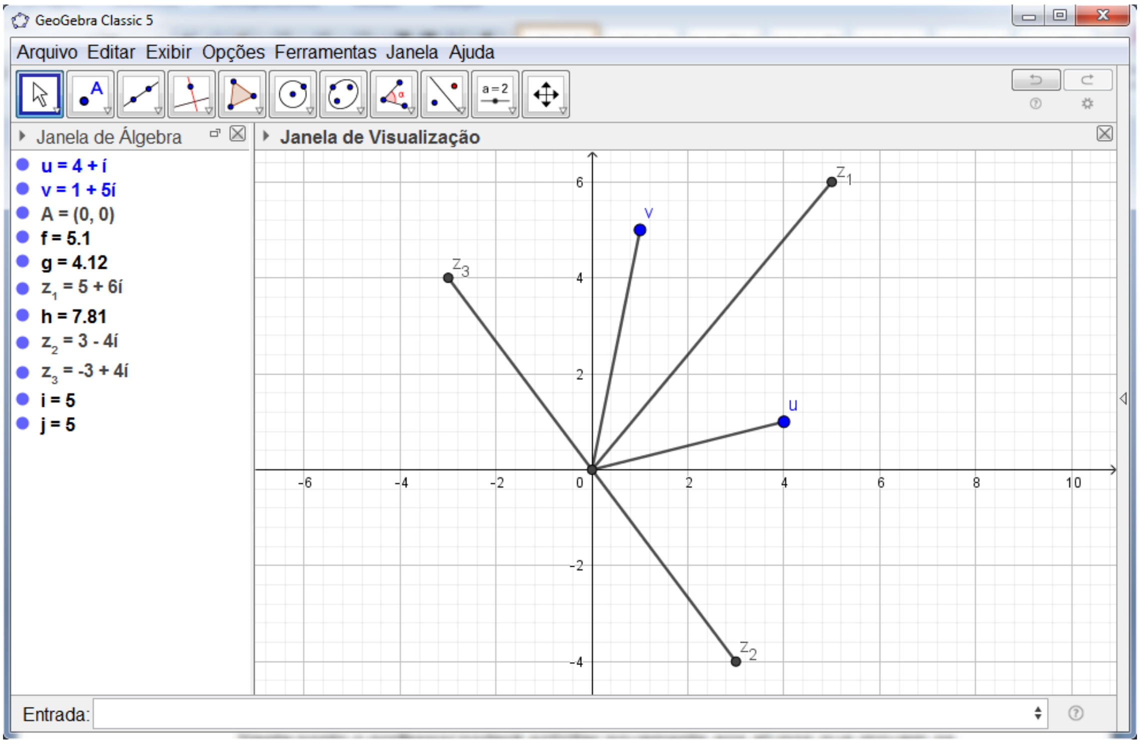
Fonte: do autor.

Neste ponto o professor pode fazer comentários sobre a soma das partes reais e imaginárias dos complexos u e v e as coordenadas do ponto z_1 no plano cartesiano.

No campo "Entrada" digite $u - v$ e pressionar "ENTER". Será criado o ponto z_2. Logo em seguida, digite $v - u$ no campo "Entrada" e pressione "ENTER". Será criado o ponto z_3. Trace os segmentos correspondentes a estes pontos.

A janela se apresentará como na próxima figura a seguir.

Figura 23 – Representação geométrica de $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}$.



Fonte: do autor.

Neste ponto o professor poderá solicitar novamente aos alunos que movam os pontos u e v e fazer comentário sobre o que ocorre com os pontos z_2 e z_3.

4.3 Interpretação geométrica do conjugado e do simétrico de um número complexo

Para o desenvolvimento dessa atividade é necessário que o aluno saiba definir o simétrico e o conjugado de um número complexo.

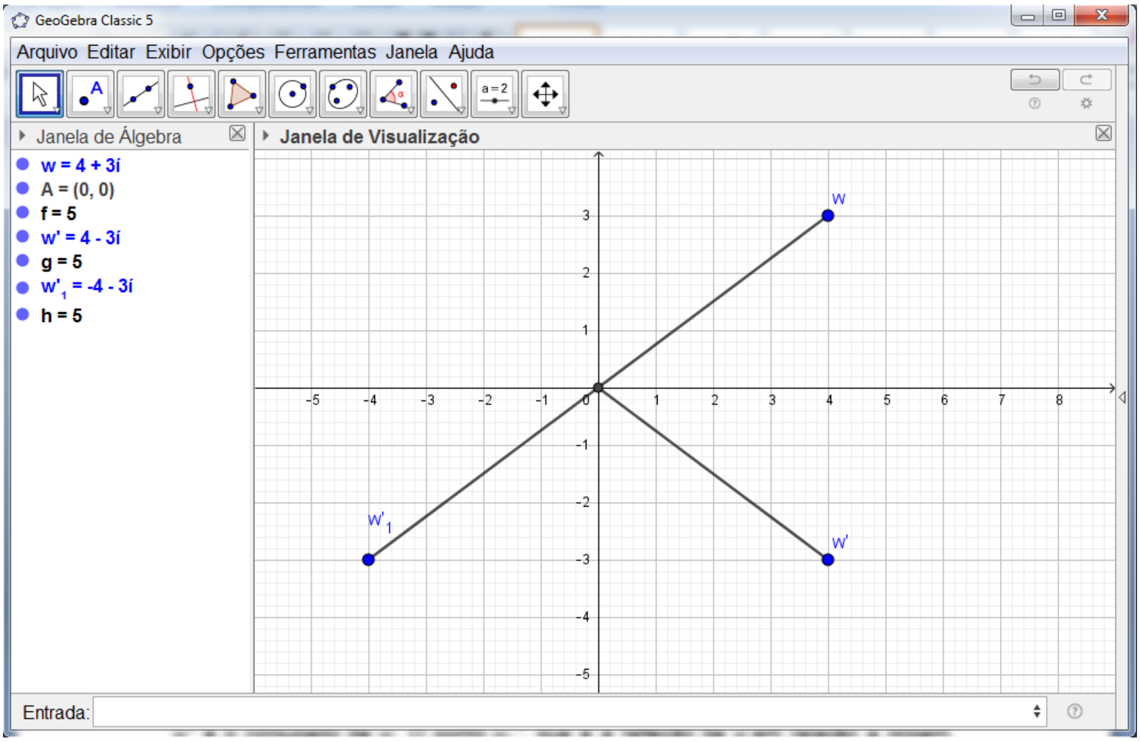
Vamos iniciar um novo arquivo clicando no menu "Arquivo" e no comando "Novo". Será apresentada uma janela perguntado se você deseja salvar o arquivo. Clique no botão "não gravar". Será iniciado um novo arquivo.

No campo "Entrada" digite $w = 4 + 3i$ e pressionar "ENTER". Trace um segmento do ponto $(0,0)$ ao ponto w.

Selecione a ferramenta "Reflexão em Relação a uma Reta", de um clique no ponto w e um clique no eixo Ox. Será criado o ponto w'. Agora, selecione a ferramenta "Reflexão em Relação a um Ponto", dê um clique no ponto w e um clique no ponto $(0,0)$, origem do sistema cartesiano, será criado o ponto $w_1{}'$. Trace os segmentos correspondentes a esses pontos.

A janela deve se apresentar como na figura a seguir.

Figura 24 – Representação geométrica do conjugado e do simétrico do complexo $\boldsymbol{w}$.



Fonte: do autor.

O ponto $w' = 4 - 2i$ é a reflexão de $w = 4 + 2i$ em relação ao eixo Ox ,ou seja, w' é o conjugado de w. O ponto $w_1{}'$, que é a reflexão de w em relação a origem, representa o simétrico de w ,ou seja, $-w$.

Neste momento, o professor pode solicitar aos alunos que movam o ponto w e observem como se comportam os pontos w' e $w_1{}'$.

4.4 Multiplicação e divisão de números complexos

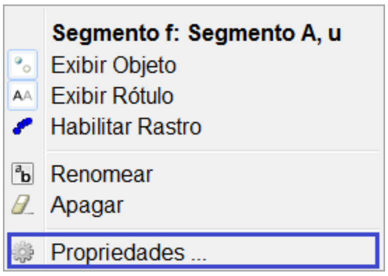
Para o desenvolvimento dessa atividade é necessário que o aluno saiba multiplicar e dividir números complexos em sua forma algébrica e trigonométrica e reconheça a interpretação geométrica do módulo de um número complexo.

Iniciemos um novo arquivo.

Entre com os números complexos $u = 1 + i$ e $v = 1 + 4i$. Serão criados os pontos u e v. Selecione a ferramenta “Segmento”. Crie segmentos do ponto $(0,0)$ aos pontos u e v da mesma forma como feito anteriormente. Vemos que na “Janela de Visualização” cada segmento é identificado por uma letra. No nosso exemplo, o segmento referente ao ponto u foi identificado com a letra f e o segmento referente ao ponto v foi identificado com a letra g.

Clique sobre a letra f com o botão direito do mouse e em “Propriedades”. Na “Janela de Visualização” será apresentada a janela a seguir.

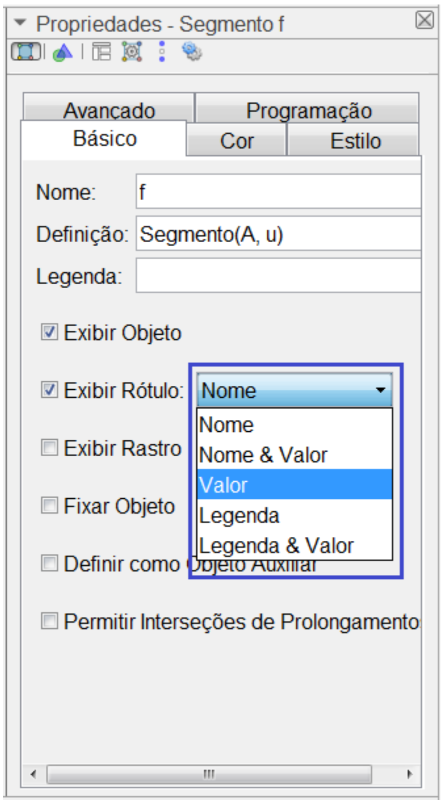
Figura 25 – Menu rápido referente ao segmento f.



Fonte: do autor.

Clique em “Propriedades”. Será apresentada, no lado direito da janela do GeoGebra, a janela apresentada abaixo que corresponde as propriedades referentes ao objeto selecionado que, no nosso caso, é o segmento referente ao ponto u.

Figura 26 - Janela de propriedades do segmento f

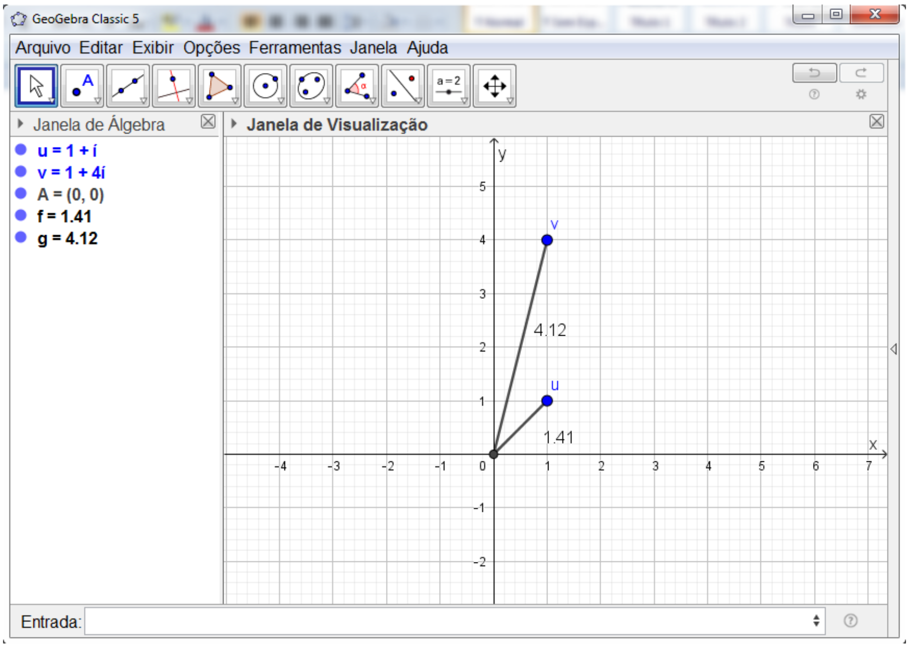


Fonte: do autor.

Clique na caixa de opção à direita de “Exibir Rótulo” e selecione a opção “Valor”. Faça o mesmo com o segmento referente ao ponto v.

Observemos a figura a seguir:

Figura 27 – Medidas dos segmentos referentes aos pontos $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{u}$.



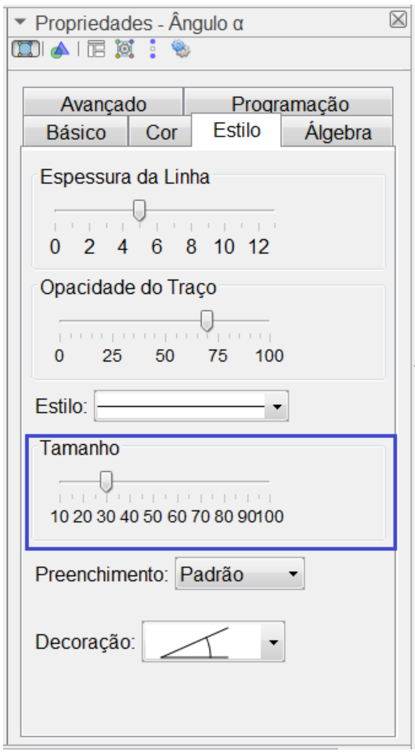
Fonte: do autor.

O número apresentado representa a medida do segmento. No nosso exemplo, representa o módulo do número complexo ao qual está ligado.

Neste ponto o professor pode solicitar aos alunos que façam os cálculos e verifiquem se o valor apresentado realmente corresponde ao módulo dos números complexos u e v.

Na barra de ferramentas, selecione a ferramenta “Ângulo”. Dê um clique no eixo Ox e no segmento referente ao ponto u. Será apresentado o ângulo, medido no sentido anti-horário, que o segmento referente ao ponto u faz com o eixo horizontal. Faça o mesmo com o segmento referente ao ponto v. Através das propriedades do ângulo, na guia “Estilo” ajuste o tamanho do mesmo na opção “Tamanho”.

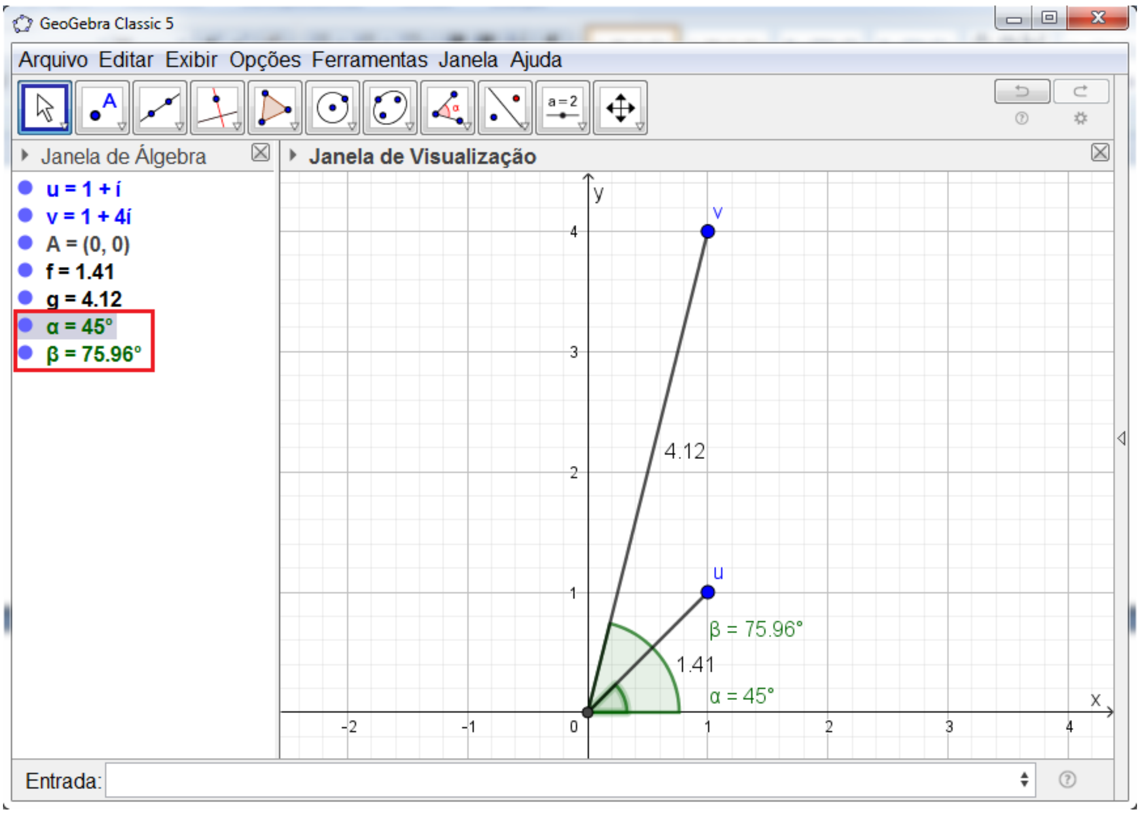
Figura 28 - Janela de propriedades do ângulo $\boldsymbol{\alpha}$.



Fonte: do autor.

Observemos a figura a seguir:

Figura 29 - Representação dos ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.



Fonte: do autor.

Notemos que os ângulos α e β também são apresentados na “Janela de Álgebra”. Para ocultá-los na “Janela de Visualização” basta clicar no círculo azul referente ao ângulo em questão na “Janela de Álgebra”.

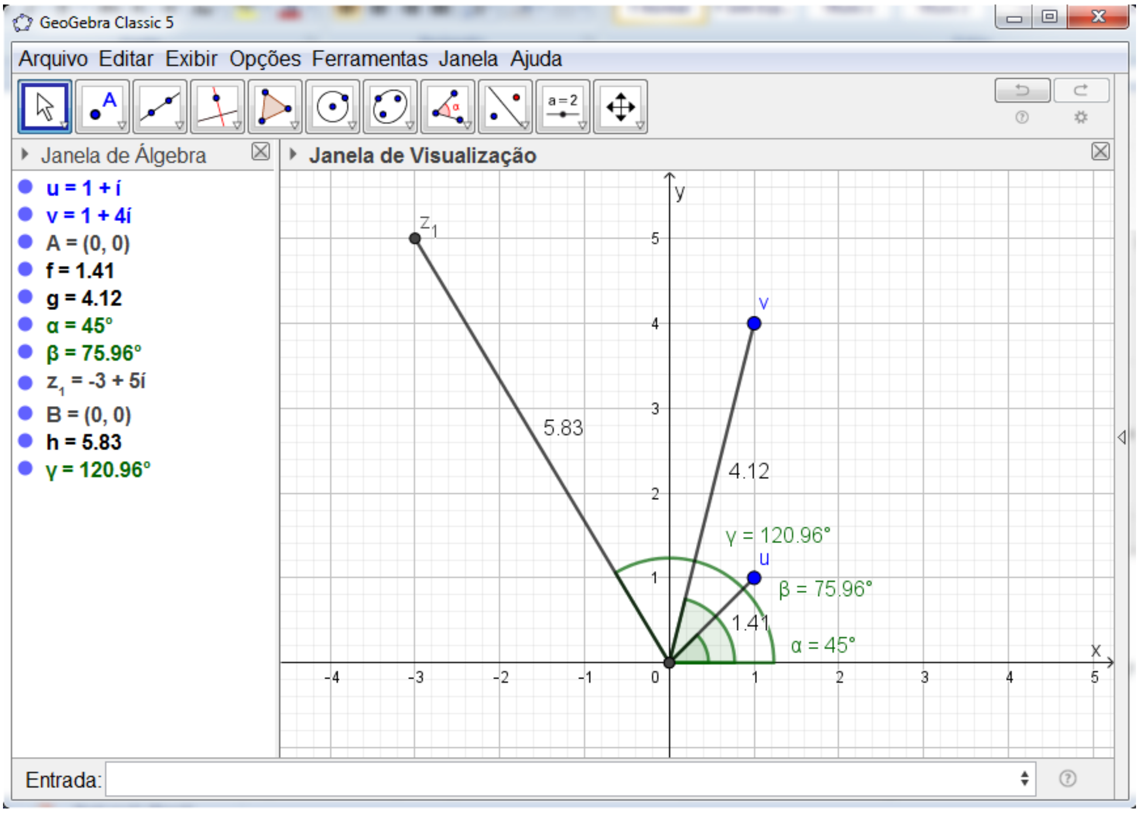
Vamos calcular o produto entre u e v.

No campo “Entrada” digite $u * v$ e pressione “ENTER”.

Será criado o ponto z_1. Trace o segmento referente a esse ponto e configure-o para que seja apresentada a sua medida. Use a ferramenta “Ângulo” para definir o ângulo entre esse segmento e o eixo Ox.

Observemos a figura a seguir:

Figura 30 - Representação geométrica do produto $\boldsymbol{uv}$.



Fonte: do autor.

Neste ponto o professor pode fazer comentários sobre o produto dos números complexos u e v bem como solicitar aos alunos que verifiquem se o ângulo γ, referente ao ponto z_1 equivale a soma dos ângulos α e β, referentes aos pontos u e v e também, se a medida do segmento referente ao ponto z_1 equivale ao produto das medidas dos segmentos referentes aos pontos u e v. Também poderá ser solicitado aos alunos que movam os pontos u e v e observem o que ocorre com o ponto z_1.

No campo “Entrada” digite u/v e pressione “ENTER”. Logo após digite v/u e pressione “ENTER”.

Use as ferramentas “Segmento” e “Ângulo” para definir a medida e os ângulos referentes aos pontos criados como feito anteriormente.

Neste ponto, novamente o professor pode fazer comentários sobre a divisão de números complexos, pedir para que os alunos verifiquem se o ângulo correspondente a u/v é igual a diferença entre os ângulos de ambos bem como verificar se o comprimento do segmento referente ao complexo u/v é o quociente entre os comprimentos dos segmentos referentes aos mesmo. Poderá fazer o mesmo para o complexo v/u e solicitar que os alunos movam os pontos referentes aos complexos u e v.

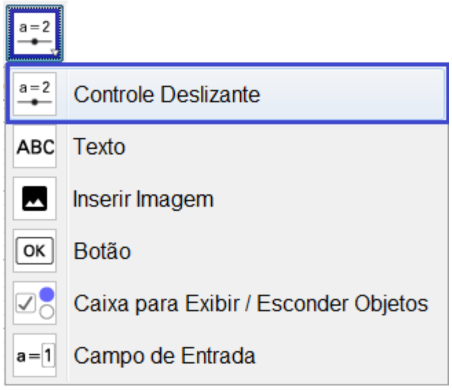
4.5 Manipulando as partes reais e imaginárias de um número complexo e multiplicação de um número complexo por uma constante.

Ao desenvolver essa atividade o aluno deverá saber qual é a parte real e qual é a parte imaginária de um número complexo.

Iniciemos um novo arquivo.

Selecione a ferramenta "Controle Deslizante".

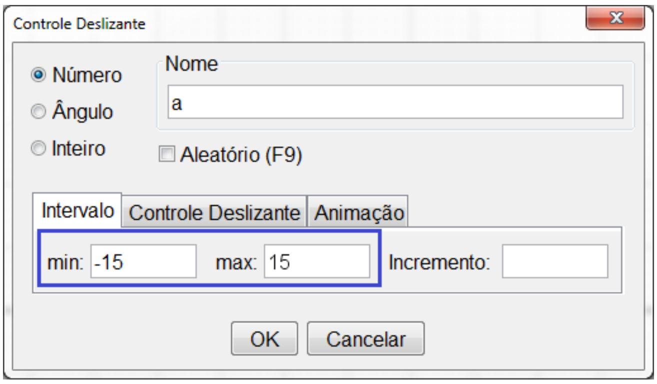
Figura 31 - Lista de ferramentas.



Fonte: do autor.

De um clique na "Janela de Visualização". Será exibida uma caixa de diálogo como na figura a seguir.

Figura 32 - Caixa de diálogo Controle Deslizante.



Fonte: do autor.

No campo "min:" digite -15 e em "max:" digite 15 e clique em "OK".

Insira mais um controle deslizante e configure-o da mesma forma como feito anteriormente.

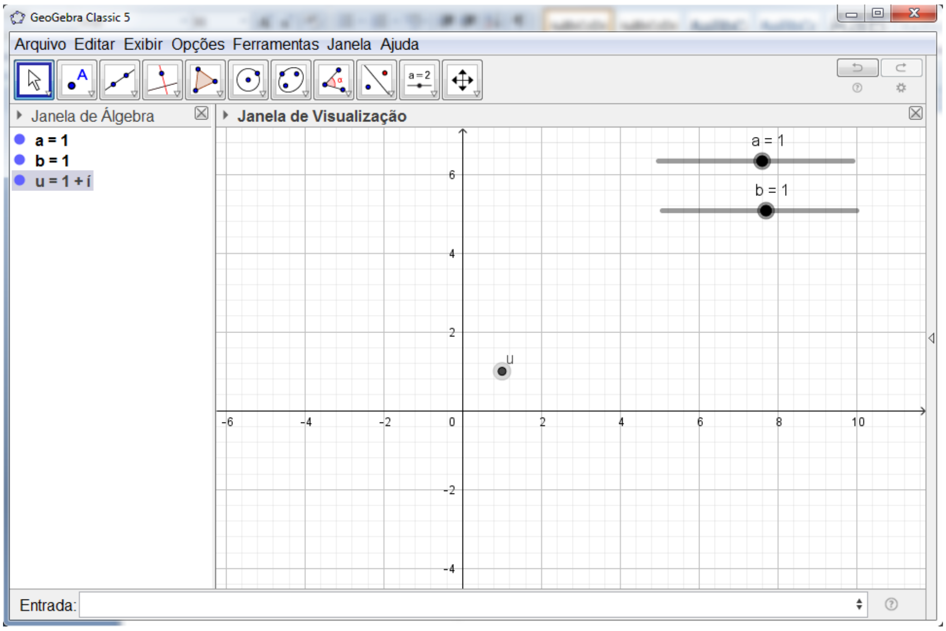
Serão criados dois controles deslizantes na “Janela de Visualização”, um deles identificado pela letra “a” e ou outro identificado pela letra “b”.

No campo “Entrada” digite $u = a + b * i$ e pressione “ENTER”.

Observação: podemos mudar a disposição dos objetos na “Janela de Visualização”. Para isso, basta clicar sobre eles e arrastá-los para a posição desejada. Podemos também excluir objetos, para isso, basta selecioná-los na “Janela de Visualização” ou na “Janela de Álgebra” e pressionar “Delete” no teclado.

A janela deverá se mostrar como na figura a seguir:

Figura 33 – Visualização do complexo $\boldsymbol{u}$ e controles deslizantes a e b.



Fonte: do autor.

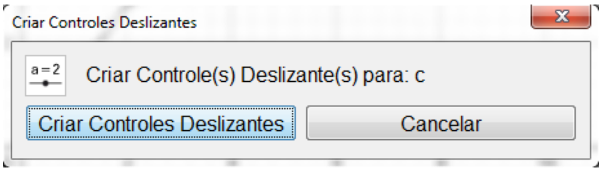
Neste ponto, o professor poderá solicitar aos alunos que alterem os valores dos controles deslizantes e observem o que ocorre com o ponto u. O aluno irá perceber que, ao mover o “Controle Deslizante” referente a coordenada x o ponto u se move na horizontal e, ao mover o “Controle Deslizante” referente a coordenada y o ponto u se move na vertical.

Trace o segmento referente ao ponto u.

No campo entrada digite “c” e pressione “ENTER”.

Abrirá a janela “Criar Controles Deslizantes” como na imagem abaixo.

Figura 34 - Janela Criar Controles Deslizantes.



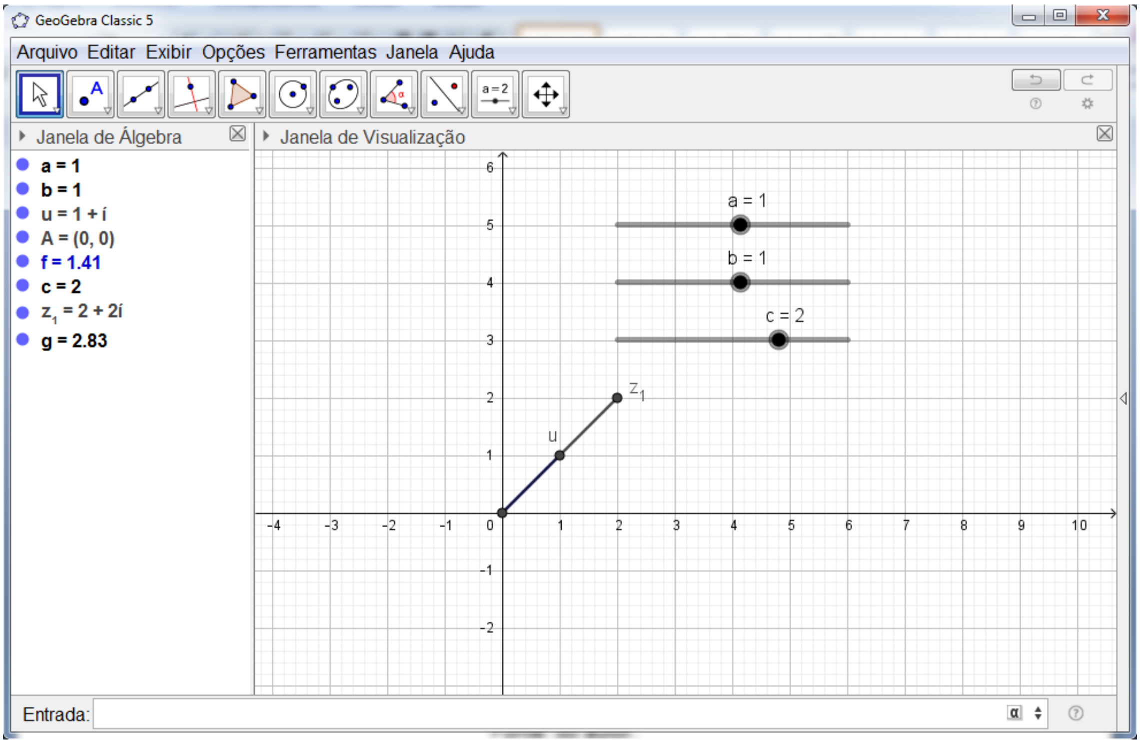
Fonte: do autor.

Clique no botão “Criar Controles Deslizantes”. Será criado o controle deslizante na “Janela de Visualização”.

Posicione os dois primeiros controles deslizantes na posição 1 e o novo na posição 2.

No campo entrada digite “$u * c$” e pressione “ENTER”. Será criado o ponto z_1. Trace o segmento referente ao ponto z_1. Observemos a imagem a seguir:

Figura 35 - Visualização geométrica do produto do complexo $\boldsymbol{u}$ pela constante $\boldsymbol{c}$.



Fonte: do autor.

Mova o controle deslizante identificado pela letra “c” observando o comportamento do ponto z_1. Nesse caso estamos multiplicando o complexo u por uma constante.

Neste ponto o professor poderá fazer comentários sobre o que ocorre com o complexo z_1 quando se move o controle deslizante identificado pela letra “c”.

4.6 Rotação de um ponto em relação a origem

Para desenvolver essa atividade o aluno deverá saber multiplicar números complexos em sua forma algébrica e trigonométrica. Também deverá conhecer os conceitos envolvidos nessa operação, bem como saber o que são o argumento e o módulo de um número complexo.

Iniciemos um novo arquivo.

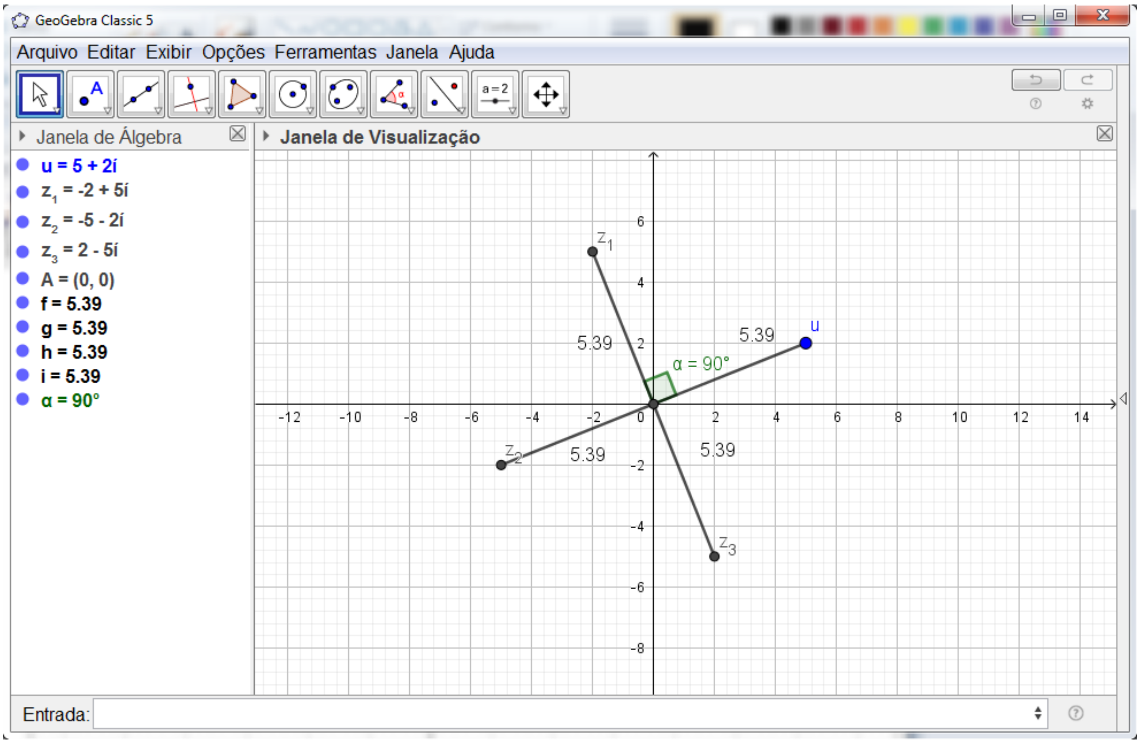
No campo "Entrada" digite $u = 5 + 2i$ e pressione "ENTER".

Digite também, no campo "Entrada" os comandos: $u * i$, $u * (-1)$ e $u * (-i)$ e pressione ENTER após cada comando.

Trace os segmentos referentes aos pontos u, z_1, z_2 e z_3 e configure-os de modo que seja exibido o comprimento de cada um deles.

Observemos a imagem a seguir:

Figura 36 - Visualização geométrica da rotação do complexo $\boldsymbol{u}$.



Fonte: do autor.

Como sabemos, o módulo de cada um dos números complexos i, -1 e $-i$ é 1. Logo, multiplicando o complexo u por cada um dos complexos acima teremos que u manterá seu módulo com a mesma medida e sofrerá uma rotação no sentido anti-horário igual ao argumento do complexo $i, -1$ ou $-i$.

Neste ponto, o professor poderá fazer comentários sobre a rotação do complexo u bem como utilizar a ferramenta "Ângulo" para verificar o ângulo de rotação de cada um dos números complexos z_1, z_2 e z_3 em relação ao complexo u.

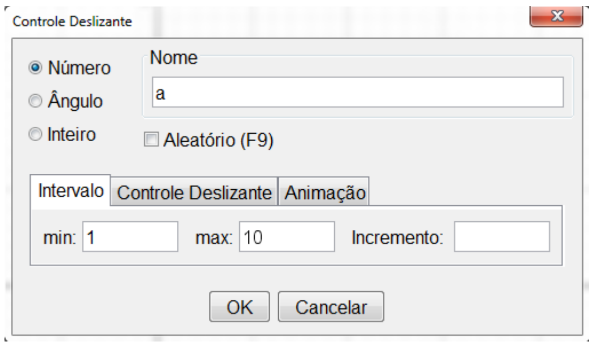
4.7 Rotação de um ponto em relação a origem com controle deslizante e potenciação de um número complexo.

Para desenvolver essa atividade o aluno deverá ter os conhecimentos requeridos na atividade anterior e também a potenciação de números complexos em sua forma algébrica e trigonométrica.

Iniciemos um novo arquivo.

Insira um controle deslizante na “Janela de Visualização” e configure-o como na figura a seguir.

Figura 37 - Janela Controle Deslizante.

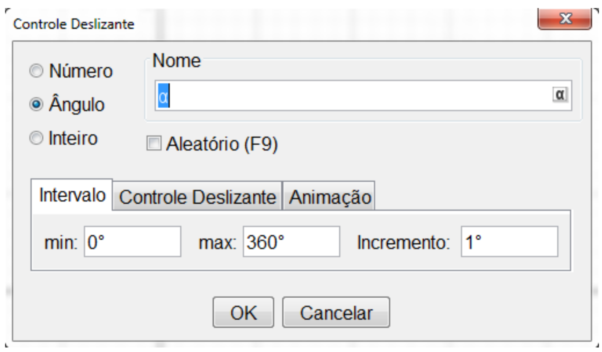


Fonte: do autor.

No campo “min” digite 1 e no campo “max” digite 10 e clique no botão “OK”.

Insira outro controle deslizante e configure-o como na imagem abaixo e clique em “OK”.

Figura 38 - Janela Controle Deslizante.



Fonte: do autor.

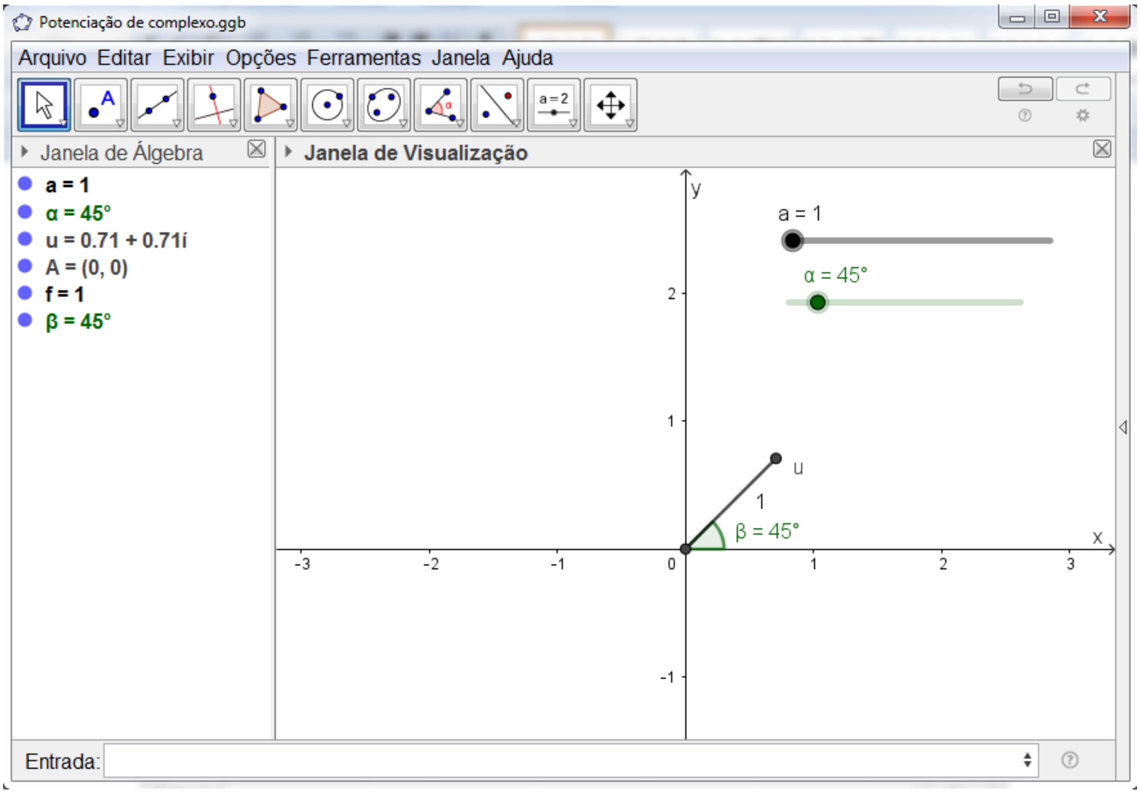
No campo “Entrada” digite $u = a * \left(\cos(\alpha) + i * sen(\alpha)\right)$ e pressione “ENTER”.

Insira um segmento da origem ao ponto u e configure-o para que seja apresentado o comprimento do mesmo.

Usando a ferramenta “Ângulo” defina o ângulo entre o eixo horizontal e o segmento referente ao complexo u.

A janela deve se apresentar como na imagem a seguir:

Figura 39 - Visualização geométrica do complexo $\boldsymbol{u}$ e controles deslizantes.

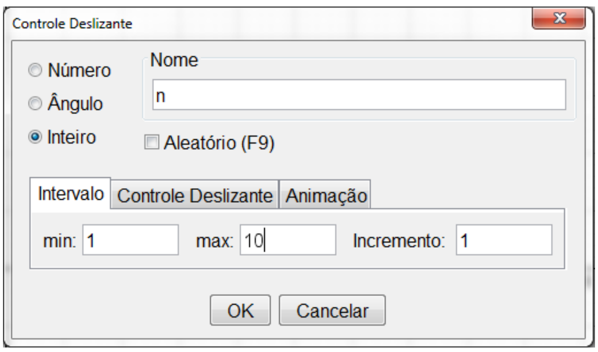


Fonte: do autor.

Neste ponto o professor pode solicitar aos alunos que movam os controles deslizantes e observem o que ocorre com o ponto referente ao complexo u verificando seu módulo e o ângulo de rotação.

Vamos inserir mais um controle deslizante e configurá-lo como na imagem a seguir.

Figura 40 - Janela Controle Deslizante.



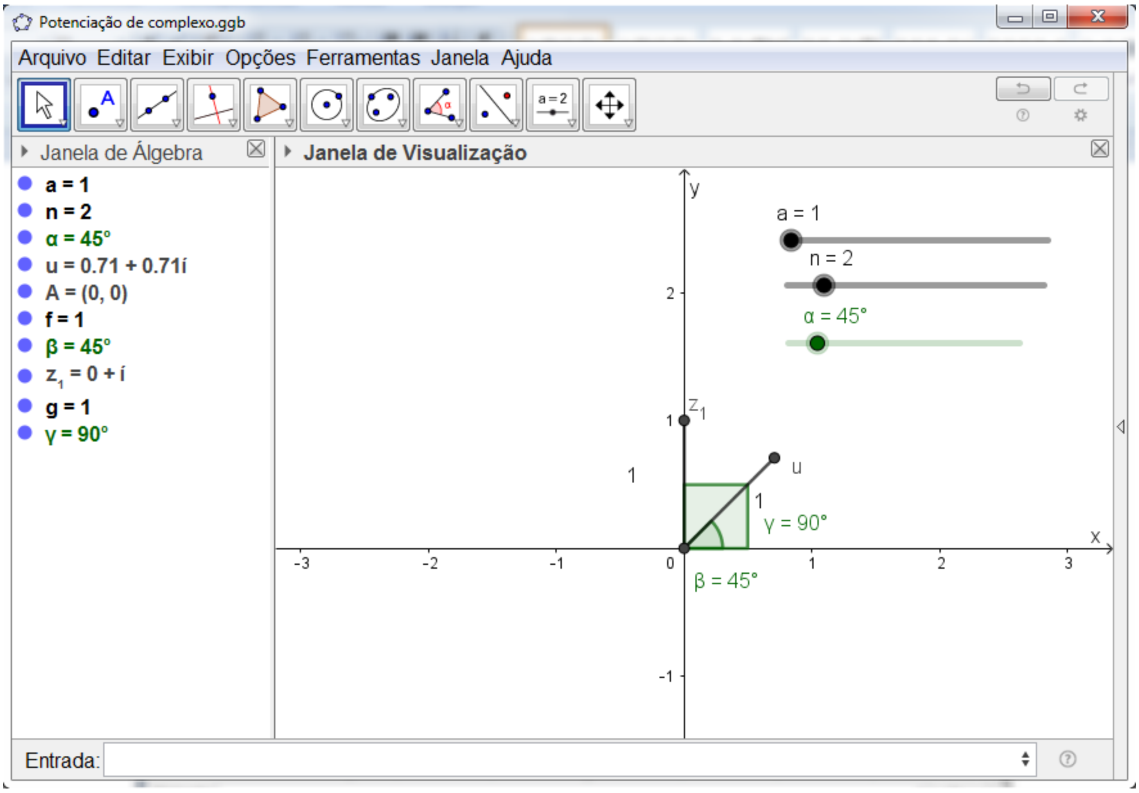
Fonte: do autor.

No campo “Entrada” digite u^n e pressione “ENTER”.

Será criado o ponto z_1. Trace o segmento e o ângulo correspondente a este ponto e configure-os como feito anteriormente com o ponto u.

A janela se apresentará como na imagem a seguir:

Figura 41 - Visualização geométrica da potenciação do complexo $\boldsymbol{u}$.

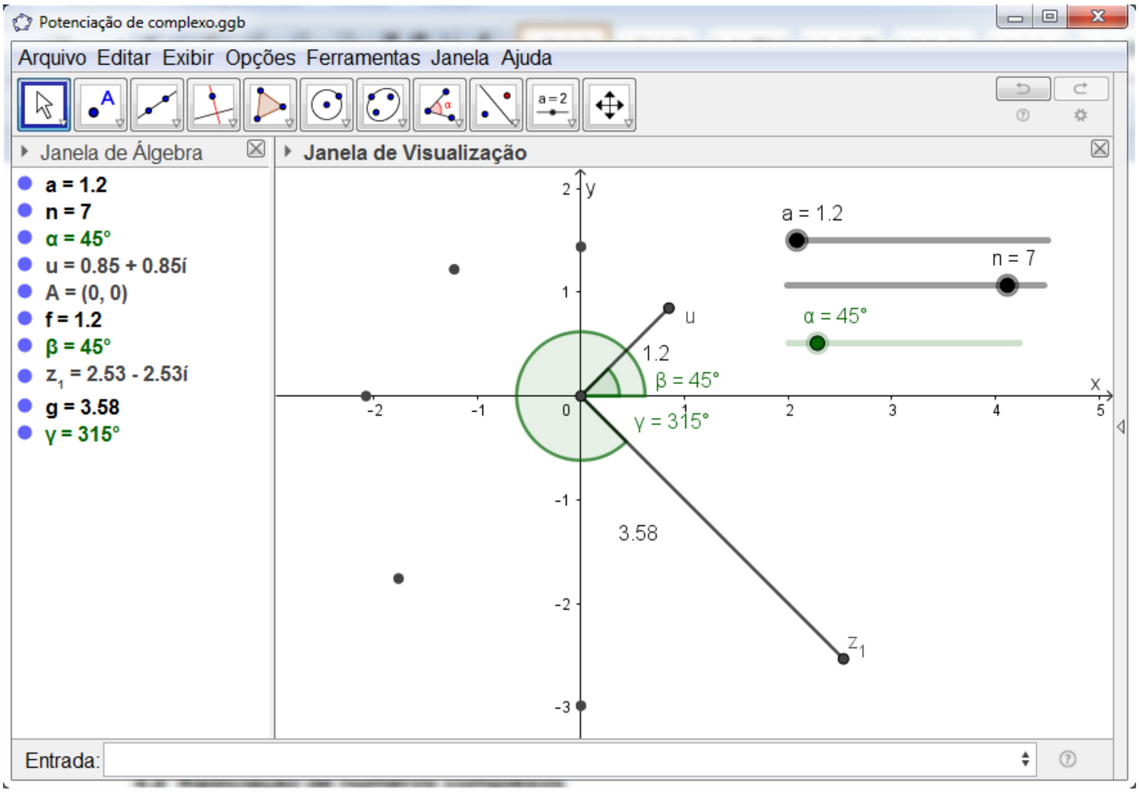


Fonte: do autor.

Neste ponto, o professor poderá solicitar aos alunos que movam os controles deslizantes e observem o que ocorre com o ponto z_1, bem como verificar se o módulo de z_1 corresponde a potência $|u|^n$ e se o ângulo de z_1 corresponde a $n arg(z_1)$.

Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto z_1 e na opção “Habilitar Rastro” o aluno terá uma melhor visualização das potências do complexo u como ilustra a imagem a seguir:

Figura 42 - Visualização geométrica das potências do complexo $\boldsymbol{u}$.



Fonte: do autor.

4.8 Radiciação de números complexos

Para o desenvolvimento dessa atividade o aluno deve saber o processo de radiciação de números complexos em sua forma trigonométrica.

Iniciemos um novo arquivo.

Vamos visualizar neste exemplo o que seria a raiz n-ésima de um número complexo no GeoGebra.

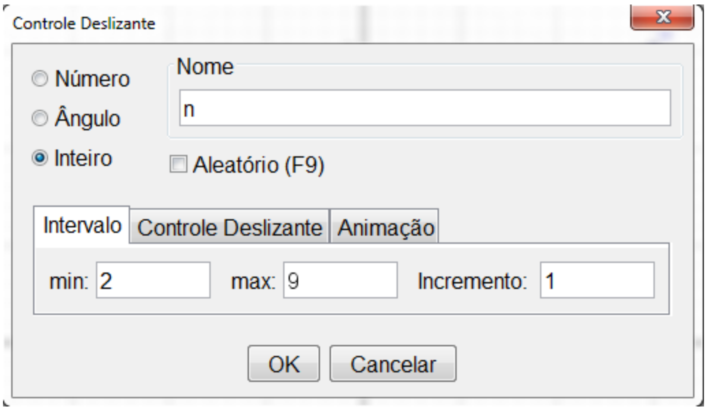
No campo “Entrada” digite $u = 3 + 3i$ e pressione “ENTER”. Logo após, digite também $O = (0{,}0)$ e pressione “ENTER”.

Trace o seguimento referente ao ponto u e configure-o de forma que seja apresentado o seu comprimento e na cor azul.

Determine também o ângulo entre esse segmento e o eixo horizontal e configure também esse ângulo na cor azul.

Insira um controle deslizante e configure como na figura abaixo:

Figura 43 - Janela Controle Deslizante.



Fonte: do autor.

Selecione a ferramenta “Círculo dado Centro e Raio” e dê um clique no ponto O. Na caixa de diálogo apresentada digite: $f\char`^(1/n)$ e pressione “ENTER”.

Configure a circunferência na cor verde e tracejado.

Selecione a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” e dê um clique na interseção da circunferência com o eixo positivo Ox. Será criado o ponto A.

Selecione a ferramenta “Rotação em Torno de um Ponto” e dê um clique no ponto A e em seguida no ponto O. Na caixa de diálogo exibida digite α/n e clique em “OK”. Será criado o ponto A' na circunferência. Trace um seguimento do ponto O ao ponto A' e configure-o para que seja exibido o seu comprimento e na cor vermelha. Defina também o ângulo entre o eixo horizontal e o segmento referente ao ponto A' e configure-o na cor vermelha e ajuste o seu tamanho.

Oculte a exibição do ponto A.

Vamos criar 7 pontos sobre a circunferência:

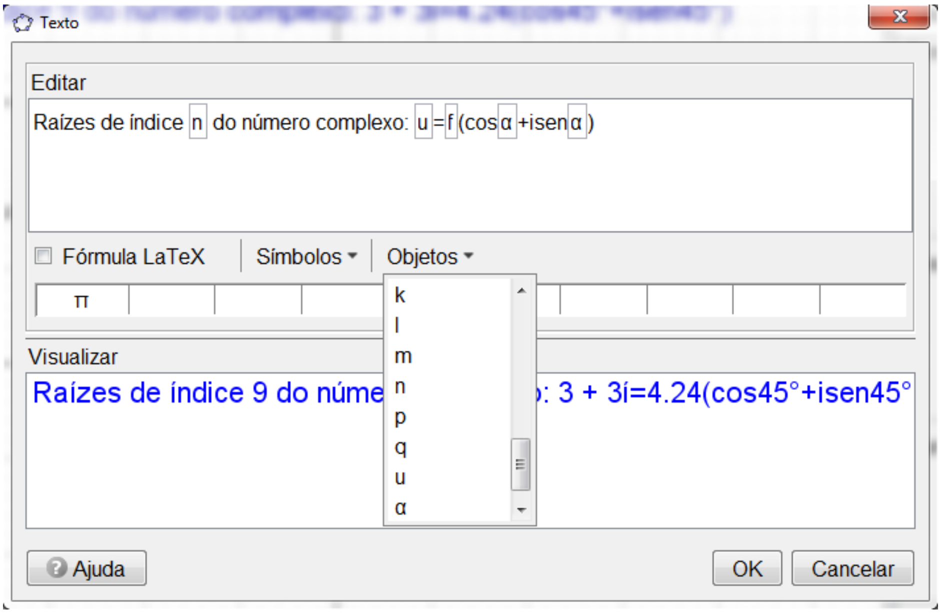
Para o primeiro ponto selecione a ferramenta “Rotação em torno de um ponto”, clique no ponto A' e logo em seguida no ponto O. Digite na caixa de diálogo exibida 360º/n clicando em “OK”. Para os demais pontos aja da mesma forma digitando na caixa de diálogo exibida para cada um dos pontos os seguintes valores: 720º/n, 1080º/n, 1440º/n, 1800º/n e 2160º/n clicando em “OK” logo em seguida.

Observação: Ao criar 7 pontos teremos a raiz quadrada, cúbica, quarta, quinta, sexta, sétima e oitava do complexo u. Para se ter mais raízes basta criar mais pontos adicionando-se 360º ao último ângulo.

Posicione o controle deslizante na posição 8 e trace segmentos do ponto O a cada um desses novos pontos criados sobre a circunferência e configure cada um desses segmentos na cor vermelha, estilo tracejado e oculte o rótulo referente a esses segmentos. Oculte o rótulo de cada um dos pontos que estão sobre a circunferência, inclusive o rótulo referente ao ponto A'.

Selecione a ferramenta “Texto” e dê um clique na “Janela de Visualização”. Será exibida a janela baixo:

Figura 44 - Visualização da janela Texto.

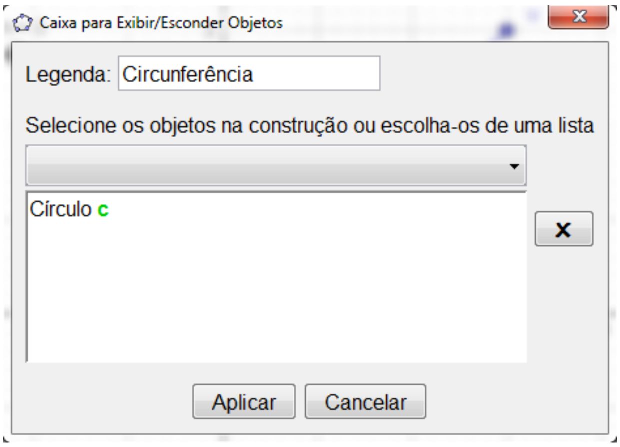


Fonte: do autor.

No campo “Editar” digite o texto como na imagem acima inserindo os objetos selecionando-os na lista “Objetos” e logo em seguida clique em “OK”.

Selecione a ferramenta “Caixa para Exibir/Esconder Objetos” e clique na “Janela de Visualização”. Será exibida a janela abaixo:

Figura 45 - Visualização da janela Exibir/Esconder Objetos.



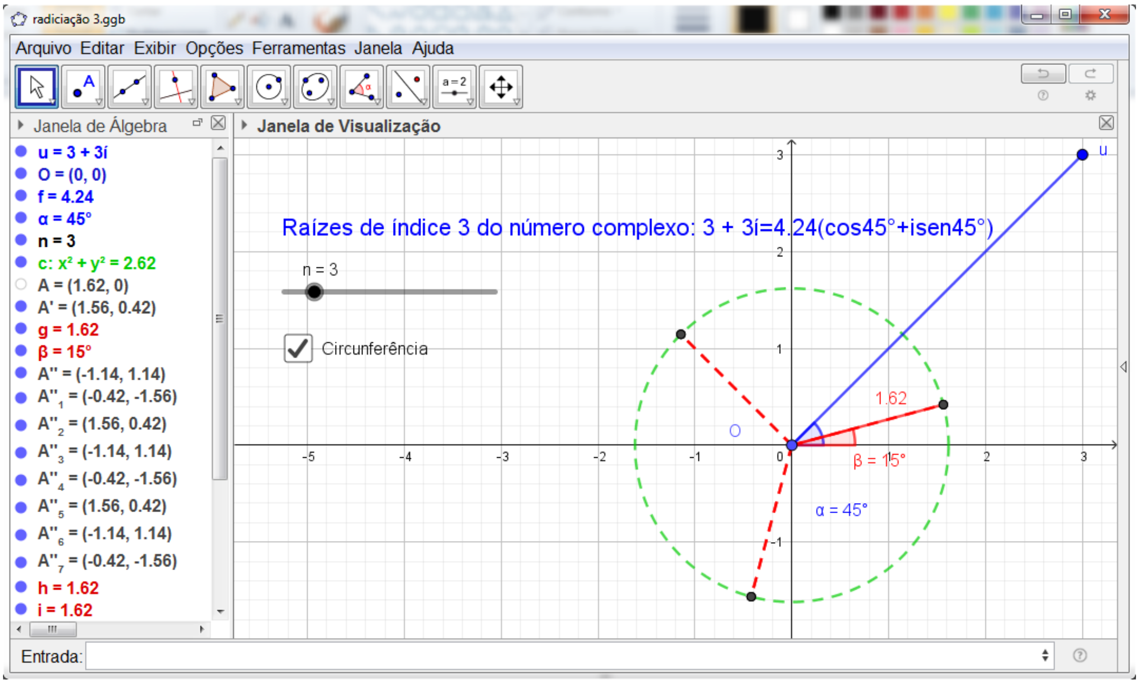
Fonte: do autor.

No campo legenda digite “Circunferência” e na lista “Selecione os objetos na construção ou escolha-os de uma lista” selecione “Círculo c” e clique em “Aplicar”.

Ajuste a posição dos objetos na janela “Janela de visualização”.

A janela se apresentará como na imagem abaixo:

Figura 46 - Visualização geométrica a radiciação do complexo $\boldsymbol{u}$.



Fonte: do autor.

Observemos que o ponto referente ao segmento vermelho não tracejado representa a raiz n-ésima do número complexo para $k = 0$.

Neste ponto o professor pode fazer comentários sobre a interpretação geométrica das raízes do número complexo u, pode solicitar aos alunos que movam o ponto referente ao complexo u, movam o controle deslizante e ocultem a exibição da circunferência através do controle inserido. O professor pode também fazer uma explicação detalhada do porque é possível obter as raízes do complexo u através deste método de construção.

5 APLICAÇÕES À GEOMETRIA

Este capítulo foi baseado em Dante (2005), com algumas modificações do autor. Nossa intenção é mostrar aplicações da teoria de números complexos à geometria como a rotação de um ponto em relação a origem, rotação de um ponto em relação a um outro ponto e a reflexão de figuras geométricas quanto a origem e aos eixos coordenados.

O professor poderá ministrar os conhecimentos desse capítulo em sala de aula ou no laboratório de informática da escola e deixar como atividade o desenvolvimento dos exemplos citados neste, já que, após a exposição do capítulo anterior o aluno já terá conhecimentos necessários para o desenvolvimento dos exemplos no GeoGebra.

5.1 Rotação de um ponto em relação a origem

Na multiplicação de números complexos na forma trigonométrica multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Logo, para se rotacionar um ponto (a, b) em relação à origem em α graus, basta multiplicar o número complexo $a + bi$ pelo complexo $1\big(\cos(\alpha) + isen(\alpha)\big)$.

Como exemplo, vamos encontrar as novas coordenadas do ponto $A = (5,2)$ após uma rotação de $90º, 180º$, e $270º$ no sentido anti-horário em relação à origem.

O ponto $A = (5,2)$ representa geometricamente o número complexo $u = 5 + 2i$.

Para termos uma rotação de $90º, 180º$ e $270º$ do número complexo u no sentido anti-horário em relação à origem devemos multiplicá-lo pelos seguintes números complexos escritos em sua forma trigonométrica:

$$v_1 = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$ corresponde a rotação de $90º$

$$v_2 = 1\big(\cos(\pi) + isen(\pi)\big)$$ corresponde a rotação de $180º$

$$v_3 = 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$ corresponde a rotação de $270º$

Escrevendo v_1, v_2 e v_3 em sua forma algébrica temos:

$$v_1 = i \qquad v_2 = -1 \qquad v_3 = -i$$

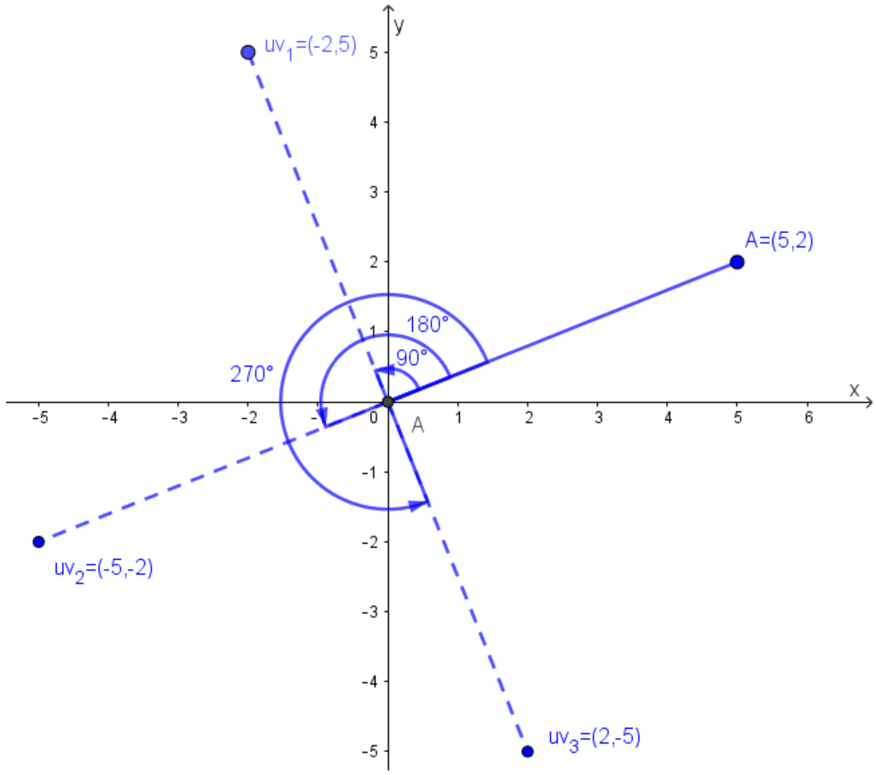
Logo, para termos as rotações mencionadas anteriormente devemos multiplicar u pelos números complexos v_1, v_2 e v_3 escritos em sua forma algébrica, respectivamente. Assim temos,

$uv_1 = -2 + 5i$ que corresponde ao ponto $(-2,5)$

$uv_2 = -2 - 5i$ que corresponde ao ponto $(-5, -2)$

$uv_1 = 2 - 5i$ que corresponde ao ponto $(2, -5)$

Figura 47 - Rotação do ponto $\boldsymbol{A}$ em torno da origem.

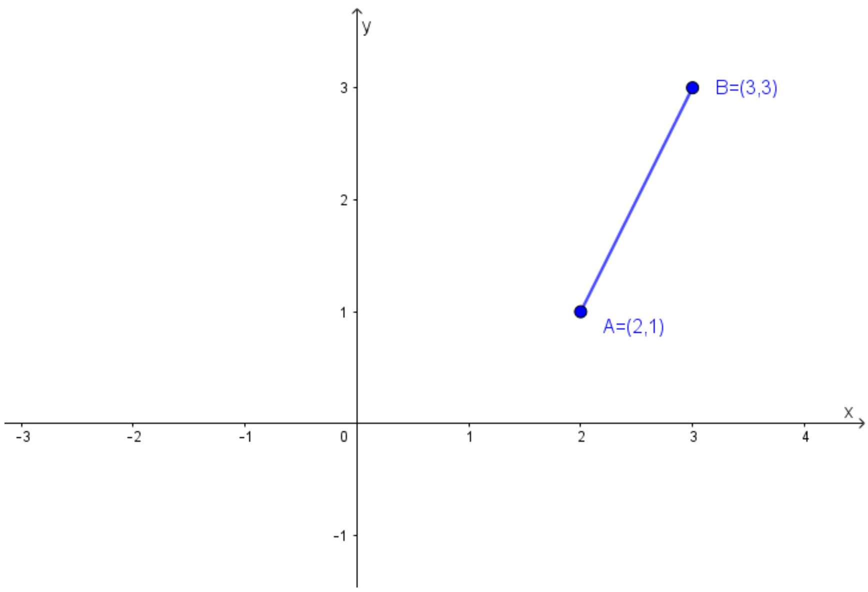


Fonte: do autor.

5.2 Rotação de um ponto em relação a um outro ponto

Vamos agora fazer a rotação de um segmento não centrado na origem. Seja o segmento AB com $A = (2,1)$ e $B = (3,3)$.

Figura 48 – Segmento $\boldsymbol{AB}$.



Fonte: do autor.

Primeiramente faremos a rotação de um ângulo de $90º$ no sentido anti-horário do segmento AB em relação ao ponto A.

Notemos que o ponto $A = (2,1)$ e o ponto $B = (3,3)$ representam geometricamente os complexos $u = 2 + i$ e $v = 3 + 3i$ respectivamente. Como a rotação é em torno do ponto A, devemos rotacionar apenas o número complexo w que equivale à diferença $v - u$ e depois somá-lo novamente a u. Nesse caso $w = v - u = 1 + 2i$.

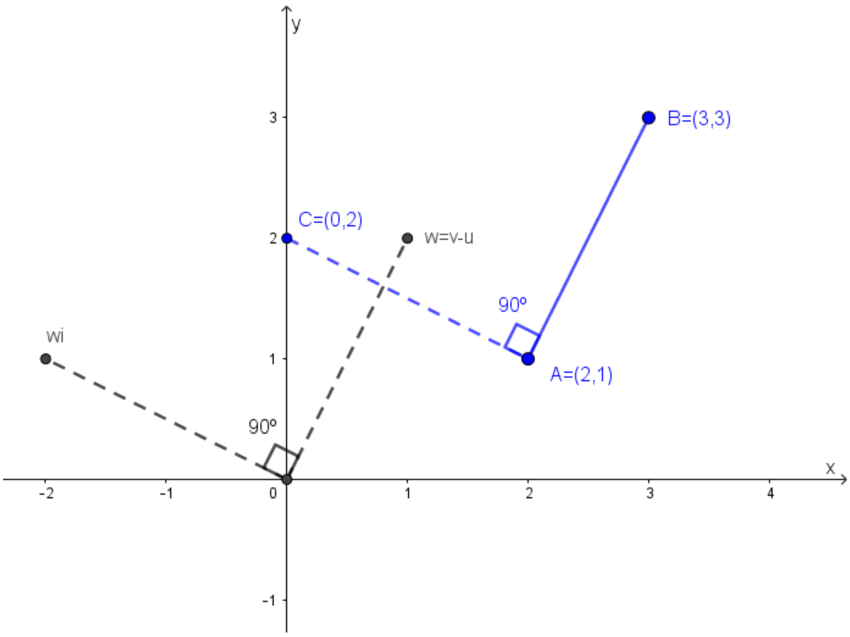
Para haver uma rotação de $90º$ devemos multiplicar w por i. Temos que,

$wi = (1 + 2i)i = i + 2i^2 = -2 + i$

Fazendo a soma $wi + u$ teremos:

$wi + u = (-2 + i) + (2 + i) = 2i$ que corresponde ao ponto $C = (0,2)$.

Figura 49 - Rotação do segmento $\boldsymbol{AB}$ em relação ao ponto $\boldsymbol{A}$.



Fonte: do autor.

Agora faremos uma rotação de um ângulo de $90º$ no sentido anti-horário do segmento AB em relação ao ponto B.

Como a rotação é em torno do ponto B, devemos rotacionar apenas o número complexo t que equivale à diferença $u - v$ e depois somá-lo novamente a v. Nesse caso, $t = u - v = -1 - 2i$.

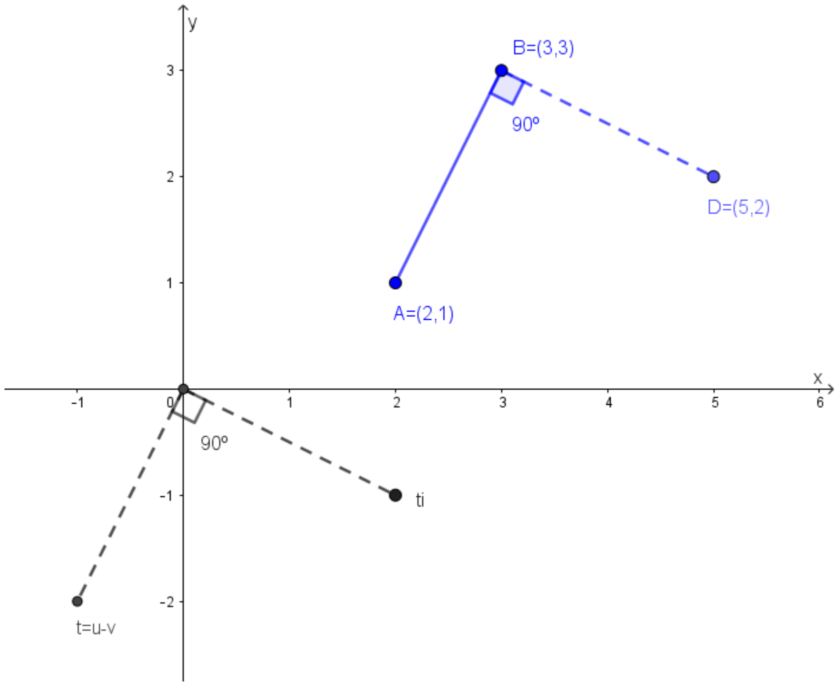
Para haver uma rotação de $90º$ multiplicamos t por i. Temos que,

$ti = (-1 - 2i)i = -i - 2i^2 = 2 - i$

Fazendo a soma $ti + v$ teremos:

$ti + v = (2 - i) + (3 + 3i) = 5 + 2i$ que corresponde ao ponto $D = (5,2)$

Figura 50 - Rotação do segmento $\boldsymbol{AB}$ em relação ao ponto $\boldsymbol{B}$.



Fonte: do autor.

5.3 Reflexão de figuras geométricas quanto a origem e aos eixos coordenados

Esse problema foi criado pelo autor com o objetivo de usar a rotação de segmentos para resolver problemas de geometria e apresentar a reflexão de figuras geométricas quanto a origem e aos eixos coordenados.

Consideremos o segmento CD, com $C = (1,1)$ e $D = (5,1)$ e vamos encontrar um ponto E do primeiro quadrante tal que os pontos CDE seja um triângulo eqüilátero. Como o triângulo CDE é eqüilátero então temos que seus lados são congruentes e a medida dos seus ângulos internos são iguais a $60°$. Assim sendo, basta rotacionar o segmento CD no sentido anti-horário em relação ao ponto C de um ângulo de $60°$.

Os pontos C e D representam geometricamente os números complexos $u = 1 + i$ e $v = 5 + i$.

Como a rotação é em torno do ponto C, devemos rotacionar apenas o número complexo t que equivale à diferença $v - u$ e depois somá-lo novamente a u. Nesse caso $t = v - u = 4$.

Para uma rotação de $60°$ devemos multiplicar t pelo seguinte número complexo, escrito em sua forma trigonométrica, $z = 1\big(\cos(\pi/3) + isen(\pi/3)\big)$ que, escrito em sua forma algébrica nos dá:

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Logo,

$$tz = 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

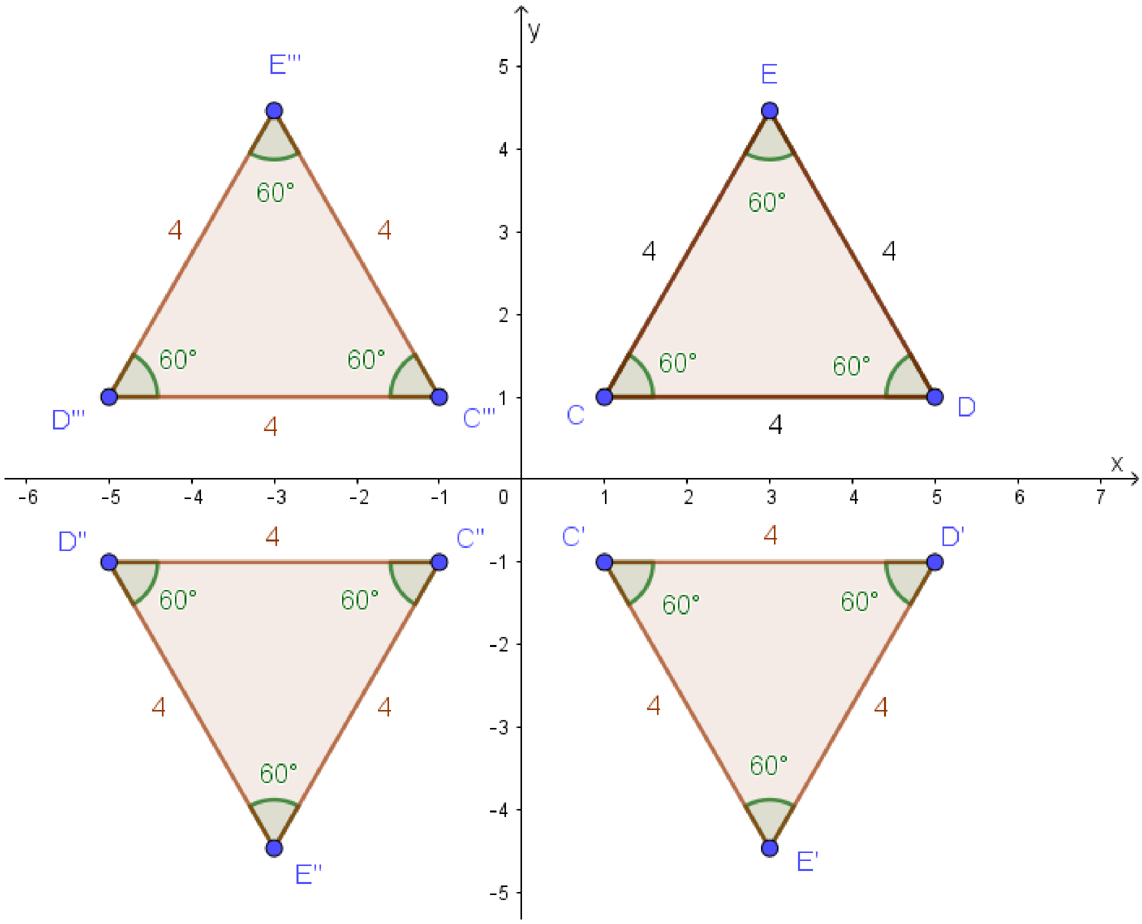
Somando esse novo número complexo a u temos

$$u + tz = (1 + i) + \left(2 + 2\sqrt{3}i\right) = 3 + \left(2\sqrt{3} + 1\right)i$$

Logo, o ponto no primeiro quadrante procurado é $E = (3, 2\sqrt{3} + 1)$.

Observemos a figura a seguir:

Figura 51 – Visualização do ponto $\boldsymbol{E}$ procurado e a reflexão em relação a origem, ao eixo $\boldsymbol{Ox}$ e ao eixo $\boldsymbol{Oy}$ do triângulo $\boldsymbol{CDE}$.



Fonte: do autor.

No primeiro quadrante temos o triângulo CDE procurado e os pontos C, D e E correspondem aos números complexos $u = 1 + i$, $v = 5 + i$ e $w = 3 + (2\sqrt{3} + 1)i$.

No quarto quadrante temos a reflexão do triângulo CDE em relação ao eixo horizontal. Os pontos C', D' e E' correspondem aos conjugados dos números complexos u, v e w. Para obtê-los, basta trocar o sinal de suas partes imaginárias.

No terceiro quadrante temos a reflexão do triângulo CDE em relação a origem do sistema de coordenadas. Os pontos C'', D'' e E'' correspondem aos simétricos dos números complexos u, v e w. Para obtê-los, basta trocar o sinal de suas partes reais e imaginárias.

No segundo quadrante temos a reflexão do triângulo CDE em relação ao eixo vertical. Para obter os pontos C''', D''' e E''' basta trocar o sinal da parte real dos números complexos u, v e w.

Como forma de verificar a eficiência do emprego da metodologia de ensino de números complexos exposto neste texto foi elaborada uma proposta de atividade avaliativa ao aluno a qual se encontra no APÊNDICE A dessa dissertação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática, por muitas vezes, é ensinada de forma mecanizada não se desenvolvendo a construção de uma ideia para se chegar a resolução de um problema. Assim, o aluno perde o interesse pelo raciocínio matemático que, partindo do que já é conhecido tenta-se chegar a construção de um novo conhecimento.

Um exemplo disso seria: Definidas as propriedades e operações com números complexos o que seria a raiz n-ésima de um número complexo na forma trigonométrica? Partindo do que já sabemos, a multiplicação, divisão, potenciação de números complexos na forma trigonométrica e a radiciação de números reais, vamos tentar desenvolver a ideia do que seria a raiz quadrada de um número complexo escrito em sua forma trigonométrica... e dessa forma, seria demonstrada a segunda fórmula de De Moivre.

Apesar dessa dissertação ter como proposta principal a potenciação e radiciação de números complexos em sua forma trigonométrica, ela também foi desenvolvida visando uma abordagem menos mecanizada dessa teoria.

A dissertação também apresentou demonstrações de algumas propriedades da teoria dos números complexos com o intuito de aguçar o interesse do aluno pelo raciocínio matemático demonstrativo.

O trabalho com o software GeoGebra visou ampliar a visão do aluno e proporcionar um significado a respeito das interpretações geométricas das operações com números complexos e, em especial, a potenciação e radiciação. Este trabalho teve por objetivo apresentar o GeoGebra para os alunos para que esses, através das várias tecnologias disponíveis hoje, possam usá-lo como auxílio no estudo da matemática e acreditamos que esse objetivo foi atingido.

Espero que a presente dissertação tenha cumprido com o objetivo de atingir uma abordagem mais simplificada, tenha facilitado a compreensão das operações com números complexos através da exploração de seus aspectos geométrico e que, de alguma forma, possa contribuir para o ensino básico de nossos alunos.

REFERÊNCIAS

DANTE, L, R. **Matemática**: Volume único. 1. Edição. Volume único. São Paulo: Ática, 2005.

Carmo, M. P.; Morgado, A. C.; Wagner, E. **Trigonometria:** Números Complexos. 3. Edição. Rio de Janeiro: SBM 2005.

Lima, E. L.; Carvalho, P. C. P.; Wagner, E.; Morgado, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 3. 6. Edição. Rio de Janeiro: SBM 2006.

Radiciação de números complexos através de exemplos:

https://www.youtube.com/watch?v=TsGGoEJGhdk ; Canal Portal da Matemática OBMEP.

Fórmula para a radiciação de números complexos:

https://www.youtube.com/watch?v=xQrCi0r_P6E ; Canal Portal da Matemática OBMEP.

GeoGebra: https://www.geogebra.org/

O Geogebra: https://ogeogebra.com.br/site/

Geogebra online: https://www.geogebra.org/m/B3cSaYGJ

GeoGebra 6.0.606: https://geogebra.br.uptodown.com/windows

Los Números Complejos con GeoGebra. Vídeo 1. Revisado.:

https://www.youtube.com/watch?v=oKJHcdrVL50; Canal Oscar Bellon.

Los Números Complejos. Vídeo 2. Primeros pasos con la forma Polar.:

https://www.youtube.com/whatch?v=uMBP0951f9g; Canal Oscar Bellon.

raíces de números complejos en geogebra:

https://www.youtube.com/watch?v=JpsLSWOt09A ; Canal Oscar Bellon.

MATO GROSSO DO SUL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO. Referencial Curricular Ensino Médio. Secretaria de Educação do Estado de Mato Grosso do Sul. Campo Grande: Alvorada, 2012. 264 p.

Melo, Ledivaldo Gomes de. UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA DO ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS. Maceió: UFAL, 2015

Ocanha, Mariane. UMA INTRODUÇÃO A TRIGONOMETRIA COM APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA. Três Lagoas: UFMS, 2016.

Pereira, Felipe de Oliveira. NÚMEROS COMPLEXOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA. Rio de Janeiro: UFRJ, 2016.

Silva, Samuel Macedo da. NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM MATRICIAL. Boa Vista: UFRR, 2017.

Oliveira, Marcos Paulo de. NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM INVESTIGATIVA NA SALA DE AULA. Campos dos Goytacazes: UENF – RJ, 2015.

A ATIVIDADES AO ALUNO

O objetivo desta atividade é testar os conhecimentos adquiridos pelos alunos em relação ao material exposto no texto.

Cada aluno receberá uma folha e poderá discutir as soluções dos problemas em grupo, assim como usar o GeoGebra como ferramenta auxiliar na resolução dos mesmos.

Nome:____ Série: _________

1) Sejam os números complexos $u = (1,2), v = (-1,2), w = (-3,-5)$ e $t = (0,-2)$ escritos como pares ordenados de números reais. Apresente cada um desses números no plano cartesiano e escreva-os na forma algébrica.

2) Utilizando os números complexos do exercício (1) escritos em sua forma algébrica calcule:

a) $u + v$
b) $w - u$
c) $u.v$
d) $v.t$
e) u/v
f) w/t
g) w^2
h) t^3
i) $u^2.t$
j) $u.v.w$

3) Escreve cada um dos números complexos do exercício (1) na forma trigonométrica e calcule:

a) $u.v$ b) $v.t$ c) u/v d) w/t

Compare os resultados com os resultados do exercício (2).

4) Calcule as seguintes potências e apresente os resultados na forma algébrica:

a) u^9
b) v^5
c) w^4

5) Calcule a raiz quadrada, a raiz cúbica e a raiz quarta de u e confira o resultado com o exemplo de radiciação de números complexos construído no GeoGebra.

6) Por qual número complexo, escrito em sua forma algébrica, devemos multiplicar u para que se tenha uma rotação no sentido anti-horário em relação a origem de:

a) 45º?

b) 180º?

c) 270º?