UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ-UESC

Jackson Reis dos Santos

O estudo de funções elementares através de suas caracterizações via progressões numéricas

Ilhéus, Bahia
2020

Jackson Reis dos Santos

O estudo de funções elementares através de suas caracterizações via progressões numéricas

Dissertação apresentada ao programa de mestrado profissional em Matemática em Rede nacional-PROFMAT, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática pela universida Estadual de Santa Cruz

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE SANTA CRUZ-UESC

Orientador: Profa. Dra. Fernanda Gonçalves de Paula

Ilhéus, Bahia
2020

S237 Santos, Jackson Reis dos.

O estudo de funções elementares através de suas caracterizações via progressões numéricas / Jackson Reis dos Santos. – Ilhéus, BA: UESC, 2020.

73 f.: il.

Orientadora: Fernanda Gonçalves de Paula.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Inclui referências.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções (Matemática). 3. Séries aritméticas. 4. Séries geométricas. I. Título.

CDD 510.07

JACKSON REIS DOS SANTOS

O ESTUDO DE FUNÇÕES ELEMENTARES ATRAVÉS DE SUAS CARACTERIZAÇÕES VIA PROGRESSÕES NUMÉRICAS

Dissertação apresentada ao Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Estadual de Santa Cruz, para obtenção de Título de Mestre em Matemática, através do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Trabalho aprovado em Ilhéus, 03 de setembro de 2020.

Profa. Dra. Fernanda Gonçalves de Paula – Orientadora - UESC

Prof. Dr. Vinícius Augusto Takahashi Arakawa – UESC

Prof. Me. Gustavo de Souza Melo (CESESB - FACISA)

ILHÉUS – BAHIA

2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao nosso bom Deus por ter me guiado e protegido até aqui durante todos os dias de minha vida.

Agradeço aos meus pais pelo apoio incondicional em todas as etapas da minha vida. Ao meu irmão e a minha irmã por estarem sempre presentes nos momentos bons e nos momentos difíceis da minha vida. A minha esposa e a minha filha que compartilharam e vivenciaram todos os momentos de dificuldades, frustações e alegrias durante o curso de Mestre Profissional em Matemática.

Agradeço também a todos os professores do PROFMAT-UESC em nome da minha orientadora, a professora doutora Fernanda Gonçalves de Paula pelo apoio e dedicação a mim e a todos os colegas de curso.

E por fim, a todos os colegas pelo companheirismo e amizade que fizemos ao longo dessa jornada.

Resumo

Esse trabalho foi desenvolvido para servir como um suporte pedagógico para os professores que trabalham com a disciplina de Matemática nas turmas do 1º Ano do ensino Médio da Educação Básica. Neste trabalho apresentamos duas sequências didáticas sobre função afim e função exponencial utilizando suas caracterizações para que as progressões aritméticas e geométricas possam servir como elementos de transição da linguagem aritmética para a algébrica durante o estudo dessas funções.
Palavras-chave: Progressões, Funções, Sequência Didática

ABSTRACT

This work was developed to serve as a pedagogical support for teachers who work with the discipline of Mathematics in the classes of the 1st year of High School of Basic Education. In this work we present two didactic sequences on affine function and exponential function using their characterizations so that arithmetic and geometric progressions can serve as elements of transition from arithmetic to algebraic language during the study of these functions.

Keywords: Progressions, Functions, Didactic Sequences

Sumário

Introdução

O ensino da Matemática no $1^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio traz grandes desafios aos alunos. É nessa etapa que precisam fazer com mais frequência a transição da linguagem Aritmética para a linguagem Algébrica, em particular durante o estudo das funções polinomiais e exponenciais. Presenciamos muitas dificuldades encontradas por eles durante o estudo dessas funções.

De acordo com os PCN (BRASIL,1998), o estudo de Álgebra na Educação Básica tem por finalidade a procura de padrões de regularidades que fomentem o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, favorecendo a eles a capacidade de generalização e compreensão da linguagem algébrica.

Utilizaremos o estudo sobre padrões e regularidades através das sequências numéricas, apresentando suas classificações e resoluções para darmos um tratamento diferente ao estudo das funções afim, quadrática e exponencial, com o objetivo de aumentar a capacidade de generalização e compreensão da linguagem e do cálculo algébrico, visando minimizar as dificuldades encontradas pelos estudantes durante o estudo dessas funções. Vejamos o que os PCN(BRASIL,2006) falam a respeito do estudo das progressões:

> As progressões aritmética e geométrica podem ser definidas como, respectivamente, funções afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos números naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não as reconhece como funções já estudadas. Devem-se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”).[2]

Essa reflexão nos ajudou a desenvolver esse trabalho, cujo objetivo principal é auxiliar os professores de Matemática que trabalham com as turmas do $1^{\underline{o}}$ ano do Ensino Médio. Desenvolvemos um texto que esperamos que possa proporcionar ao docente clareza e segurança na hora de definir e caracterizar as funções afim e exponencial.

Acreditamos que o estudo da matemática precisa transcender o mundo do números, da álgebra, da geometria e chegar ao mundo real do discente para que ele tenha uma formação cidadã que possibilite-o usar esse conhecimento no exercício de sua cidadania.

No Capítulo 1 justificamos o uso da Sequência Didática como estratégia metodológica que pretende aprimorar o ensino aprendizagem da Matemática.

No Capítulo 2 apresentamos os conceitos preliminares necessários para o bom desenvolvimento do trabalho aqui proposto. Tratam-se das definições de par ordenado, produto cartesiano, plano cartesiano, relação binária, função, sequência numérica, progressão aritmética e a dedução do seu termo geral de maneira recursiva, bem como a demonstração da equação que determina a soma dos seus n primeiros termos, progressão geométrica e a dedução do seu termo geral também de maneira recursiva, bem como a demonstração da equação que determina a soma dos n primeiros termos. O capítulo é finalizado com a definição de recorrências lineares de primeira ordem apresentando alguns exemplos e soluções.

No Capítulo 3 trabalhamos com a função afim, enfatizando a possibilidade de trabalhar este conceito juntamente com progressões aritméticas, justificando as vantagens de se trabalhar desta forma. Demonstramos a conexão existente entre estes dois conceitos e, no final do capítulo, apresentamos a construção de uma sequência didática baseada nas competências e habilidades da BNCC. Nosso objetivo é disponibilizar um material para o professor usar durante o processo ensino aprendizagem dessa função, visando uma melhor compreensão da mesma por parte dos alunos, visto que o grau de dificuldade apresentado por eles durante seus estudos costuma ser muito grande.

No Capítulo 4 abordamos as funções quadráticas, dando ênfase no Teorema de Caracterização das Funções Quadráticas e mostrando sua total relação com as progressões aritméticas. Encerramos o capítulo com uma aplicação desta caracterização na resolução de problemas envolvendo o movimento uniformemente variado.

No Capítulo 5 trabalhamos com a função exponencial com ênfase na sua caracterização que tem como princípio básico transformar uma PA em uma PG. Assim como no Capítulo 2, ao final deste capítulo também é proposta uma sequência didática que valorize esta caracterização tão importante e tão útil na resolução de problemas discretos. Esta sequência didática também foi elaborada com base nas competências e habilidades propostas pela BNCC.

1 O uso da Sequência Didática no Processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática

As múltiplas transformações sócio-políticas e econômicas aliadas à velocidade como elas ocorrem na sociedade atual fazem com que a construção do conhecimento, ou seja, o processo de ensinar e aprender passe por mudanças substanciais em seus paradigmas, especialmente no que tange às formas de ensino, no caso, a Matemática. O professor que na Pedagogia Tradicional era considerado o detentor do saber e único transmissor do conhecimento, no contexto da atualidade, passa a exercer o papel de mediador, enquanto o aluno que era um mero receptor de aulas expositivas, unilaterais, torna-se protagonista de sua aprendizagem.

No ensino-aprendizagem da Matemática, o professor em suas práticas pedagógicas tende a supervalorizar os conceitos para atender à formalidade e o rigor da ciência matemática em sua natureza axiomática e abstrata, o que nem sempre desperta a devida atenção e aprendizagem de seus alunos. Assim, o professor enfrenta novos desafios, visto que o conhecimento antes limitado a um espaço e tempo exclusivo na escola, ganha uma dimensão pedagógica mais abrangente. A sala de aula se amplia ao mundo virtual ou físico através da pedagogia inovadora, em um movimento híbrido, em que a aprendizagem passa a ser flexível, interativa e colaborativa.

Nesse contexto, é fundamental que o professor procure diversificar o processo de aprender e ensinar Matemática, oportunizando estratégias metodológicas diferenciadas que apoie o seu fazer em sala de aula atingindo assim, o maior número de alunos na compreensão dos conteúdos ministrados e resultados diferentes do ensino tradicional. A utilização das sequências didáticas, de agora em diante, denominada no texto por SD, é uma estratégia que colabora para que os alunos tenham interesse em aprender. Elas devem propor desafios possíveis, organização dos conteúdos, atividades diversificadas onde professor e aluno devem ter conhecimento do tema que está sendo trabalhado. Considerando os objetos de ensino da aprendizagem Matemática, que traz em si a natureza e requer um planejamento sistematizado, minucioso, articulado aos objetivos de ensino, a definição do termo SD em Zaballa, (1998) é pertinente:

> Um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim, conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. (ZABALLA, 1998, p.18)

Para Oliveira (2013), essa ferramenta pedagógica é "...um procedimento simples que compreende um conjunto de atividades conectadas entre si, e prescinde de um planejamento para delimitação de cada etapa e/ou atividade", o que pode proporcionar uma reconfiguração na forma de ensinar e aprender, na construção de novos conhecimentos de maneira progressiva em etapas, contextualizadas e significativas, tornando o ato de aprender mais dinâmico, eficiente e integrado.

O professor ao planejar o aporte teórico metodológico deve ficar atento as suas escolhas e responder às questões do planejamento: O quê ensinar? Para quê? Para quem? Como ensinar? E propor as devidas intervenções com vista a melhoria da aprendizagem e o entendimento de como se aprende. Neste sentido, as sequências "têm a virtude de manter o caráter unitário e reunir toda a complexidade da prática, ao mesmo tempo em que permitem incluir as três fases de toda intervenção reflexiva, quais sejam: o planejamento, aplicação e avaliação" (ZABALLA, 1998, p.27). Essa visão de Zaballa (1998) demarca a unidade indissociável existente no processo educativo, ou seja: começo, meio e fim, aspectos essenciais da SD.

Na perspectiva de Cabral (2013), as SD são atividades ligadas entre si, planejadas para ensinar determinados conteúdos, etapa por etapa, encaixando os conteúdos a um tema que se liga a outro, de modo lógico e organizadas de acordo com os objetivos que se pretende alcançar para aprendizagem dos alunos, envolvendo atividades de avaliação que podem levar dias, semana, bimestre/semestre ou até mesmo durante o ano letivo. O professor deve escolher criteriosamente as atividades que vão compor a SD, atividades estas que devem refletir a intencionalidade do professor em fazer com que os alunos se apropriem de um determinado conhecimento matemático de modo a tornar tais conteúdos o mais sequenciado possível para o aluno. O processo de construção da SD também pode ser útil para o professor ampliar ou adquirir determinado conhecimento, caso ele não tenha completo domínio sobre o mesmo. Vale ressaltar que a SD aparece no início dos nos 80, a partir da Didática da Matemática nos padrões da Engenharia Didática como meio de concretizar os ideais e pressupostos de investigação da escola da Didática da Matemática Francesa. Segundo, Carvalho (2017) a função da SD é ser utilizada como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática e ser utilizada para a elaboração de situações didáticas que configurem um quadro de aprendizagem significativa em sala de aula. Araújo (2013), afirma que o termo SD foi utilizado anteriormente no contexto da aprendizagem de língua escrita, a partir dos trabalhos desenvolvidos por DOLZ et al (2004), cujo centro de interesse das pesquisas era a relação entre linguagem, interação e sociedade. Nesse contexto a SD foi adotada como sendo "um conjunto de atividades escolares organizadas, de maneira sistemática, em torno de um gênero textual oral ou escrito". (ARAUJO, 2014, p.324 apud DOLZ, 2004, p.97).

No Brasil a concepção de SD surge nos documentos oficiais dos Parâmetros Curriculares Nacionais - (PCNs) (1998) como "projetos"e "atividades sequenciadas", com as devidas adequações às necessidades e/ou especificidades do saber disciplinar escolar. Atualmente, as sequências didáticas continuam vinculadas ao estudo do gênero textual, porém, recentemente tem sido utilizada em diversos contextos de aprendizagem e, portanto, ligada a diferentes objetos do conhecimento, inclusive nas áreas de exatas, como no ensino da matemática.

O movimento geral de uma SD parte do mais simples e retorna ao mais complexo, e a produção final dos estudantes objetiva sempre o desenvolvimento das capacidades para o domínio dos temas propostos. A avaliação deve ser contínua, uma vez que avaliar é tentar identificar o que os alunos se apropriaram. Dolz, Noverraz e Schnuewly, (2004) organizaram um esquema da SD ou seja, um quadro descritivo, das etapas de desenvolvimento do trabalho pedagógico com as etapas: Apresentação da Situação, Produção Inicial, Módulos e Produção Final, conforme demonstrado na Figura 1, a seguir:

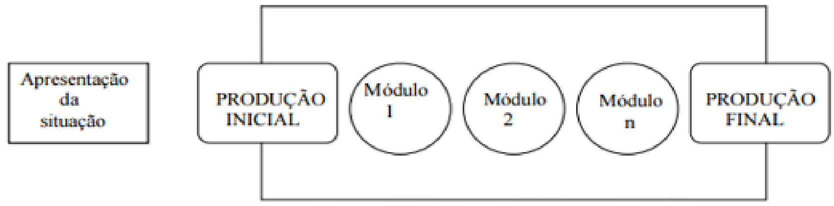

Fig. 1: Esquema da sequência didática ((DOLZ, NOVERRAZ & SCHNEUWLY, 2004, p. 98).

Figura 1 – Modelo de uma SD

O modelo de intervenção de ensino SD, proposto inicialmente pelas investigações no ensino-aprendizagem da Língua Materna, possibilita a interação dos alunos entre si e com o professor, criando um ambiente propício para o desenvolvimento da capacidade argumentativa, na medida em que permite a interlocução verbal: professor - aluno - gênero textual. Isso certamente provoca uma mudança na prática pedagógica do professor e reflexões do aluno durante o percurso da construção do seu conhecimento. Assim como na linguagem, a atividade interativa é um campo de ação imprescindível para a investigação do fenômeno de ensinar e aprender; no ensino de Matemática esse princípio também é fundamental.

Desse modo, ao se perceber as possibilidades pedagógicas do ensino pautado na mediação da SD com as devidas adequações às necessidades e/ou especificidades do saber disciplinar escolar, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Matemática, os Capítulos 3 e 5 apresentam as sequências didáticas elaboradas para serem trabalhadas com alunos do 1º Ano do Ensino Médio.

2 Conceitos Preliminares

Neste capítulo faremos uma breve apresentação e discussão de alguns conceitos preliminares que achamos necessários para o bom desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

2.1 Plano cartesiano

René Descartes foi um filósofo, físico e matemático francês que viveu entre os anos de 1596 e 1650, também era conhecido por Renatus Cartesius. Foi considerado o fundador da filosofia moderna e o pai da matemática moderna. Seu reconhecimento matemático, surgiu através da fusão da álgebra com a geometria sugerido por ele. O resultado dessa fusão foi o surgimento da geometria analítica juntamente com a criação dos eixos coordenados, hoje chamado de plano cartesiano em referência ao seu nome.

Definição 2.1.1. *Um par ordenado é um par de elementos que representamos por x e y sendo que a ordem dos mesmos é significativo. Sua representação é da forma (x, y) onde o primeiro elemento é sempre o x e o segundo elemento é sempre o y.*

Definição 2.1.2. *O produto cartesiano de dois conjuntos finitos e não vazios A e B é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,*
$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ e } y \in B\}$

Exemplo 2.1.1. *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$. O produto cartesiano $A \times B$ é representado pelo seguinte conjunto:*
$A \times B$=\{*(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)*\}

Definição 2.1.3. *O plano cartesiano é um sistema de eixos coordenados formado por duas retas numéricas perpendiculares entre si. A reta vertical é representada pelo eixo oy e a reta horizontal pelo eixo ox e são chamados de eixo das ordenadas e eixo das abscissas, respectivamente. O ponto de intersecção entre as duas retas é representado pelo par ordenado $(0, 0)$ e é chamado de origem do plano.*

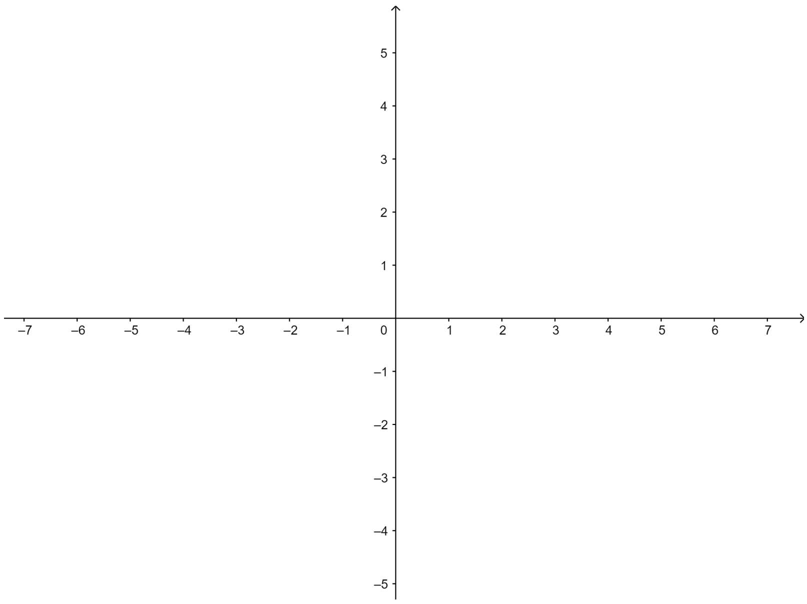

Figura 2 – Plano cartesiano

Definição 2.1.4. *Uma relação binária entre dois conjuntos A e B não vazios é todo subconjunto formado pelos pares ordenados do produto cartesiano de A por B.*

2.2 Função

Na antiguidade a idéia de função aparece em tábuas babilônicas de maneira implícita. Segundo Boyer as primeiras idéias de funções surgem com Nicole Oresme(1323-1382) quando ele descreve graficamente a velocidade em função do tempo de um móvel em movimento uniformemente variado. Para Boyer, foi o matemático alemão Peter Lejeune Dirichlet(1805-1859) quem deu a definição de função mais próxima da que usamos nos dias atuais.

Se uma variável y está relacionada com uma variável x de modo que, sempre que um valor numérico é atribuído a x, existe uma regra de acordo com a qual é determinado um único valor de y, então se diz que y é função da variável independente x.

Somente com a criação da teoria dos conjunto, no final do século XIX, foi possível definir uma função através de um conjunto de pares ordenados. Hoje definimos uma função como se segue:

Definição 2.2.1. *Uma relação binária entre dois conjuntos A e B que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ é chamada de* ***função*** *de A em B e é representada por $f : A \to B$*

Definição 2.2.2. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se crescente se para todos os pontos do seu domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

Definição 2.2.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se decrescente se para todos os pontos do seu domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definição 2.2.4. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se monótona se é crescente ou decrescente no seu domínio.*

Definição 2.2.5. *Uma sequência de números reais é uma função $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que associa cada $n \in \mathbb{N}$ a um único número T_n pertencente aos números reais e chamamos esse número de n-ésimo termo da sequência.*

Para que uma sequência fique bem determinada precisamos conhecer seus termos e a ordem dos mesmos e sua representação é feita colocando seus elementos entre parênteses e de maneira ordenada da seguinte forma: $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ com a_1 sendo o primeiro termo, a_2 o segundo,a_3 o terceiro e a_n o n-ésimo termo.

Exemplo 2.2.1. *Sequência dos números impares positivos (1,3,5,7,...)*
Sequência dos números primos (2,3,5,7,11,...)
Sequência de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,...)

2.3 Progressão aritmética

Definição 2.3.1. *Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ onde a diferença entre um termo qualquer dessa sequência e o seu anterior é sempre constante. Essa constante é chamada de razão e representada normalmente pela letra r.*

$$a_{n+1} - a_n = r \Rightarrow a_{n+1} = a_n + r,$$

com $n \in \mathbb{N}$.

O **termo geral** de uma PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ pode ser encontrado de maneira recursiva. Pela definição temos:

$$\begin{gathered} a_1 \\ a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ . \\ . \\ . \\ a_n = a_{n-1} + r \end{gathered}$$

Somando ambos os lados (soma telescópica) destas igualdades, obtemos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Assim, o termo geral da PA é dado pela equação

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{2.1}$$

A **soma dos n primeiros termos** de uma PA pode ser encontrada da seguinte maneira:
$S_n + S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) + (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$
$2.S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1)$
As parcelas $(a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-1} + a_2)$ são todas iguais a $(a_1 + a_n)$. Vejamos:
$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_1 + (n-2)r) = a_1 + a_1 + (n-1)r = (a_1 + a_n)$. As demais parcelas seguem o mesmo raciocínio. Logo,

$$2S_n = n.(a_1 + a_1 + (n-1)r)$$

$$S_n = \frac{n.(a_1 + a_1 + (n-1)r)}{2}$$

Assim, a equação que determina a soma dos n primeiros termos de uma PA é

$$S_n = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2} \tag{2.2}$$

Definição 2.3.2. *Uma **progressão aritmética de segunda ordem** é uma sequência de números reais onde as diferenças entre termos consecutivos dessa sequência formam uma PA.*

Considere $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma sequência numérica. As diferenças entre seus termos consecutivos será

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= d_1 \\ a_3 - a_2 &= d_2 \\ a_4 - a_3 &= d_3 \\ a_5 - a_4 &= d_4 \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_{n+1} - a_n &= d_n \end{aligned}$$

Se a sequência $(d_1, d_2, d_3, ..., d_n, ...)$ for uma progressão aritmética, então a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ forma uma progressão aritmética de segunda ordem.

Exemplo 2.3.1. *São exemplos de PA de segunda ordem as seguintes sequências:*

1. *(1,4,9,16,25,...)*
2. *(2,5,10,17,26,...)*
3. *(0,3,8,15,24,...)*
4. *(2,8,18,32,50,...)*

As diferenças entre os termos consecutivos da sequência do exemplo-1 são (3,5,7,9,...) e essa sequência formada por essas diferenças representam uma P.A de primeira ordem.

2.4 Progressão geométrica

Definição 2.4.1. *Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ *onde a razão entre um termo qualquer dessa sequência pelo seu antecessor é sempre constante. Essa constante chamamos de razão da PG e normalmente é representada pela letra* q *com* $q \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \Rightarrow a_n = a_{n-1}.q$$

com $n \in \mathbb{N}$

O **termo geral** de uma PG pode ser encontrado de forma recursiva, como se segue:

$$\begin{gathered} a_1 \\ a_2 = a_1.q \\ a_3 = a_2.q \\ a_4 = a_3.q \\ . \\ . \\ . \\ a_n = a_{n-1}.q \end{gathered}$$

Multiplicando ambos os lados, temos $a_n = a_1.q^{n-1}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{R}$. Logo, o termo geral de uma PG é dado por

$$a_n = a_1.q^{n-1}. \tag{2.3}$$

A soma dos n primeiros termos de uma PG pode ser encontrada como se segue. Inicialmente, note que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \tag{2.4}$$

Multiplicando os dois lados da igualdade acima por $q > 0$, temos:

$$q.S_n = q.(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n)$$
$$q.S_n = a_1.q + a_2.q + a_3.q + ... + a_{n-1}.q + a_n.q$$

$$q.S_n = a_2 + a_3 + ... + a_n + a_n.q \tag{2.5}$$

Subtraindo a equação (2.4) da equação (2.5) temos:

$$\begin{gathered}
q.S_n - S_n = (a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n + a_n.q) - (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n) \\
S_n(q-1) = (a_2 - a_2) + (a_3 - a_3) + ... + (a_{n-1} - a_{n-1}) + (a_n - a_n) + a_n.q - a_1 \\
S_n(q-1) = a_n.q - a_1 \\
S_n(q-1) = a_1.q^{n-1}.q - a_1 \\
S_n(q-1) = a_1.q^n - a_1 \\
S_n(q-1) = a_1.(q^n - 1) \\
S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q-1}
\end{gathered}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos de uma PG é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q-1}. \tag{2.6}$$

3 Função Afim

Nesse capítulo apresentaremos a definição, o gráfico e a caracterização da função afim para que o professor tenha a oportunidade de trabalhar de maneira conjunta as progressões aritméticas com a função afim. A transformação de uma PA em outra PA é uma propriedade específica da função afim que veremos na seção (3.1). A BNCC nos traz a importância de associarmos a progressão aritmética a uma função afim de domínio discreto, ou seja, o domínio sendo o conjunto dos números naturais. Nos livros didáticos de matemática do ensino médio encontramos essa abordagem no capítulo referente às progressões geométricas. Porém, nos capítulos que tratam da função afim não encontramos esta caracterização.

A construção dos gráficos da PA e da função afim é uma metodologia importante para que o aluno perceba a familiaridade entre esses dois modelos matemáticos que se aplicam na resolução de problemas de várias áreas do conhecimento. Na Física por exemplo, as posições de um objeto móvel em função do tempo(t) com $t \in \mathbb{N}$ formam uma PA de razão constante. Agora, se o tempo t pertencer ao conjunto dos números reais não negativos, a posição do objeto móvel em função do tempo será representada por uma função afim com domínio $\mathbb{R}_+$.

O professor terá, no final desse capítulo, uma sugestão de Sequência Didática para que possa trabalhar a função afim usando sua caracterização e conexões com as progressões aritméticas. Esperamos que tal sequência seja útil na resolução de problemas que necessite, de uma transição da linguagem aritmética para algébrica, como por exemplo na determinação da expressão algébrica que representa a lei de uma função afim.

3.1 Caracterização da função afim

Definição 3.1.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax + b$ com a e b reais e $a \neq 0$ é chamada de função afim ou função polinomial do primeiro grau.*

O coeficiente b é o valor inicial da função, ou seja, $b = f(0)$. O coeficiente a pode ser determinado através de dois valores distintos $f(x_1)$ e $f(x_2)$ de pontos distintos de f para x_1 e x_2 arbitrários.

Dada uma função afim $f(x) = ax + b$ e dois pontos distintos x_1 e x_2, temos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Logo:

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a.(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Portanto, o coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ pode ser encontrado se conhecermos o valor da função em dois pontos x_1 e x_2 arbitrários do domínio.

O **gráfico de uma função afim** é uma reta r não-vertical, ou seja, não paralela ao eixo Oy. Sendo a função f definida por $f(x) = ax + b$, o coeficiente $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ é a taxa de crescimento de f e também é o coeficiente angular da reta r, ou seja, a tangente do ângulo que a reta r forma com o eixo Ox.
O coeficiente b geometricamente é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy.

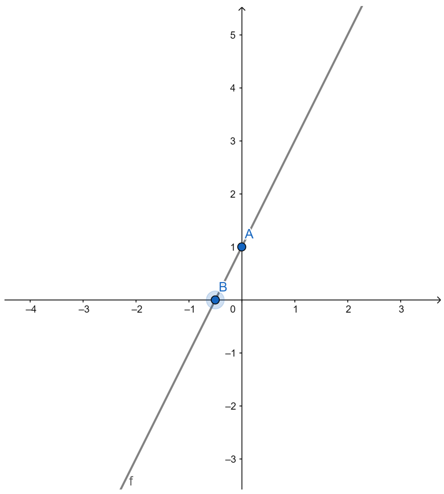

Figura 3 – f(x)=2x+1

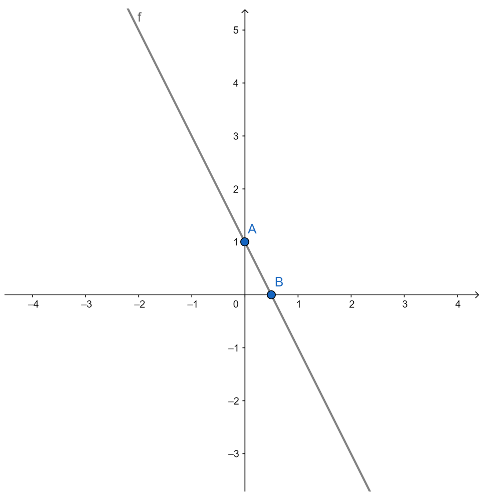

Figura 4 – f(x)=-2x+1

Os pontos A e B são os pontos de interseção do gráfico de f com os eixos Oy e Ox respectivamente.

Teorema 3.1 (Caracterização de Função Afim)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \phi(h)$ depender apenas de h, e não de x, então f é uma função afim.*

A demonstração deste teorema, é uma aplicação do Teorema Fundamental da Proporcionalidade.
Supondo que f seja uma função crescente. Então $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ também é crescente, com $\phi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer h, k $\in \mathbb{R}$ temos
$\phi(h + k) = f(x + h + k) - f(x)$
$\phi(h + k) = f((x + k) + h) - f(x + k) + f(x + K) - f(x)$
$\phi(h + k) = \phi(h) + \phi(k)$
Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \phi(1)$, tem-se $\phi(h) = a.h$ para todo h $\in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x + h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo x $\in \mathbb{R}$.

3.2 A função afim e a progressão aritmética

Vamos enunciar e demonstrar uma interessante relação existente entre funções afins e progressões aritméticas, foco deste capítulo.

Proposição 3.1. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, ou seja, uma função afim e $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ uma progressão aritmética de razão r, então os pontos $y_i = f(x_i)$, com $i = 1, 2, ...$ também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é $a.r$. Reciprocamente, se uma função monótona $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_i, ...$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_i = f(x_i), ...,$ então f é uma função afim.*

Demonstração: Inicialmente provemos que a sequência $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, ... ,$y_i = f(x_i)$, ... é uma PA. De fato,

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b)$$
$$y_{i+1} - y_i = a.(x_{i+1} - x_i)$$
$$y_{i+1} - y_i = a.r$$

Assim, $(y_1, y_2, ..., y_i, ...)$ é uma progressão aritmética de razão $a.r$.

Para mostrar a recíproca, considere $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, a qual transforma qualquer progressão aritmética em outra progressão aritmética, e tem a propriedade $g(0) = 0$. Mostremos que g é função linear.
Para todo $x \in \mathbb{R}$, os números $-x, 0, x$ formam uma progressão aritmética. Logo, o mesmo ocorre com os números $g(-x), 0, g(x)$. Assim:

$$0 - g(-x) = g(x) - 0,$$

ou seja, $g(-x) = g(x)$. Consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números $0, x, 2x, ..., nx$ formam uma progressão aritmética. Note que o mesmo ocorre com suas imagens $g(0)$, $g(x)$, $g(2x)$, ..., $g(nx)$. Sabemos que a razão desta sequência pode ser obtida tomando a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos. Logo esta razão é $g(x)$ pois $g(x) - g(0) = g(x)$ e $g(nx) = ng(x)$. Finalmente, se n é um inteiro negativo, então $-n \in \mathbb{N}$ e $g(nx) = -g(-nx) = -(-n.g(x)) = n.g(x)$. Assim, $g(nx) = n.g(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, segue que g é linear, digamos $g(x) = ax$. Considerando $f(0) = b$, temos que $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é uma função afim.

Vimos que a função afim caracteriza-se por transformar uma progressão aritmética em outra progressão aritmética. Essa propriedade particular da função afim é pouco vista nos livros didáticos do Ensino Médio. Fazendo o estudo da função afim associada ao estudo da progressão aritmética, acreditamos que o aluno desenvolverá competências e habilidades necessárias para a resolução de problemas que precise de uma modelagem matemática envolvendo proporcionalidade.

O exemplo abaixo foi cobrado no Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT (2019.2) sendo uma aplicação direta do teorema da caracterização da função afim.

Exemplo 3.2.1. *Dadas as progressões aritméticas* $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ *e* $(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$, *mostre que existe uma e somente uma, função afim* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que* $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, ..., f(a_n) = b_n, ...$.

Solução: Sejam r_a e r_b as razões das PAs $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ e $(b_1, b_2, ..., b_n, ...)$, respectivamente. Então $a_n = a_1 + (n-1).r_a$ e $b_n = b_1 + (n-1).r_b$

Vamos definir a função afim $f(x) = ax + b$ colocando $a = \dfrac{r_b}{r_a}$ e $b = b_1 - \dfrac{r_b}{r_a}a_1$.

Dessa forma, $f(x) = \dfrac{r_b}{r_a}x + b_1 - \dfrac{r_b}{r_a}a_1$.

Agora note que, definindo f como acima, temos:

$$f(a_1) = \frac{r_b}{r_a}a_1 + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1 = b_1$$

e, mais geralmente,

$$f(a_n) = \frac{r_b}{r_a}a_n + b_1 - \frac{r_b}{r_a}a_1 = \frac{r_b}{r_a}(a_n - a_1) + b_1 = \frac{r_b}{r_a}(a_1 + (n-1).r_a - a_1) + b_1 = (n-1)r_b + b_1 = b_n$$

Assim, a existência da função afim está garantida. A unicidade é óbvia pois só existe uma função afim tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$.

Exemplo 3.2.2. *A tabela abaixo representa algumas imagens de uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Encontre a lei de formação desta função.*

x	f(x)
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17

Solução: Como a função f está transformando uma progressão aritmética em outra progressão aritmética, podemos afirmar que essa função é afim e portanto do tipo $f(x) = ax + b$. Para que sua lei fique determinada basta encontrarmos os coeficientes a e b. O coeficiente a será

$$a = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 8 - 5 = 3$$

que é a razão da PA $(5, 8, 11, 14, 17)$, e o coeficiente b será

$$f(1) = 3.1 + b \Rightarrow b = 5 - 3 \Rightarrow b = 2,$$

ou seja, o coeficiente b é a diferença entre o primeiro termo e a razão da PA. Portanto a lei dessa função é $f(x) = 3x + 2$.

Observação 1. *Quando os elementos do domínio da função formarem uma progressão aritmética de razão igual a 1, basta encontrarmos o primeiro termo e a razão da progressão aritmética formada pelas imagens da função para encontrarmos os coeficientes a e b da função f.*

Exemplo 3.2.3. *A tabela abaixo representa algumas imagens de uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

x	f(x)
1	2
3	8
5	14
7	20
9	26

Encontre a lei de formação desta função.

Solução: A função será afim, com $f(x) = ax + b$, já que ela transforma uma PA em outra PA. A tabela diz que $f(1) = 2$, $f(3) = 8$, $f(5) = 14$, $f(7) = 20$ e $f(9) = 26$. Passando esses valores para a linguagem de sequência, temos $a_1 = 2, a_3 = 8, a_5 = 14, a_7 = 20$ e $a_9 = 26$. Esses termos seriam de uma PA com os termos pares suprimidos. Note que o segundo termo dessa PA pode ser calculado encontrando a média aritmética entre o a_1 e o a_3, ou seja, $a_2 = 5$. Portanto, a razão dessa PA será $r = 3$, que representa a taxa de variação da função f. Vale ressaltar que uma PA é uma função de domínio discreto, isso porque na hora de determinarmos o coeficiente b da função f, precisamos encontrar o valor de $f(0)$, que na PA seria o termo a_0.

Como $a = \dfrac{f(1) - f(0)}{1 - 0} \Rightarrow f(0) = f(1) - a = 2 - 3 = -1 = b$, e daí $f(x) = 3x - 1$.

Os exemplos (3.2.2) e (3.2.3) nos mostram que o professor pode fazer o estudo da função afim através da progressão aritmética, utilizando-a no processo de transição da linguagem aritmética para a linguagem algébrica.

Na próxima seção, apresentamos uma sugestão de Sequência Didática que pode ser utilizada para trabalhar o conceito de função afim na resolução de problemas, usando sua caracterização e relações com as progressões aritméticas.

3.3 Sequência didática

Área do conhecimento: Matemática

Público alvo: Alunos do 1º Ano do Ensino Médio

Conteúdo: Progressão Aritmética e Função Afim

Tempo previsto: 10 aulas de cinquenta minutos cada

Recursos: Papel milimetrado, régua, piloto e quadro branco

Competência Específica

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades:

• EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

• EM13MAT507: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Primeiro momento:

1. O professor deve entregar a Atividade 1 para que os alunos resolvam de maneira individual.
2. Abrir um diálogo para saber se houve dificuldades na resolução da Atividade.
3. Fazer a correção da Atividade.
4. Definir o que é uma progressão aritmética.

O objetivo dessa Atividade 1 é trabalhar padrões númericos para definir que em toda PA a diferença entre dois termos consecutivos a partir do segundo é sempre constante, ou seja, $a_{n+1} - a_n = r$, onde a constante r é chamada de razão da PA.

Segundo momento:

1. O professor determinará de maneira recursiva o termo geral de uma PA (página 12).
2. Aplicar a Atividade 2, instruindo os alunos a formarem duplas para resolvê-la.
3. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas.

A finalidade dessa atividade é trabalhar o raciocínio recursivo e a aplicar a soma telescópica na determinação do termo geral de uma P.A

Terceiro momento:

1. Definir que a ordem dos termos de uma PA será representada pelo eixo horizontal $(0x)$ e o valor dos termos pelo eixo vertical $(0y)$.
2. Representar os termos de uma PA no plano cartesiano.
3. Aplicar a Atividade 3 (para esta Atividade, será necessário o uso do papel milimetrado).

O objetivo da Atividade 3 é mostrar através do plano cartesiano que uma PA pode ser representada por uma função de domínio discreto.

Quarto momento:

1. Aplicar a Atividade 4
2. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas

O objetivo da Atividade 4 é utilizar o termo geral da PA para fazer a transição da linguagem algébrica para a aritmética na resolução de problemas.

Quinto momento

1. Definir uma função afim (página 16).
2. Mostrar que toda função afim transforma uma PA em outra PA (página 18)
3. Aplicar a Atividade 5.
4. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas

O objetivo dessa Atividade é mostrar para o aluno a caracterização da função afim.

Sexto momento

1. Definir o gráfico de uma função afim (página 17).
2. Aplicar a Atividade 6.
3. Comparar o gráfico de uma função afim de domínio real com o gráfico de uma função afim de domínio discreto, que representa uma PA.

O objetivo dessa Atividade é mostrar graficamente a relação de igualdade entre a taxa de variação da função de domínio real e a razão da PA representada pela função de domínio discreto.

Sétimo momento

1. Aplicar a Atividade 7.
2. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas

O objetivo dessa Atividade é resolver problemas de função afim usando sua caracterização vista anteriormente.

ATIVIDADE 1

Encontre os termos que faltam na tabela abaixo

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	5	7	9	11	...	...	...

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	7	12	17	22	...	...	...

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	20	17	14	11	8	...	...	...

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	-3	-7	-11	-15	-19	...	...	...

e)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	20	20	20	20	20	...	...	...

f)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	-8	-3	2	7	12	...	...	...

g)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	70	60	50	40	30	...	...	...

h)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	...	...	...

ATIVIDADE 2

Encontre de maneira recursiva o termo geral das Progressões Aritmética abaixo.

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	5	7	9	11	...	...	...

Resolução:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 2 \\ a_3 &= a_2 + 2 \\ a_4 &= a_3 + 2 \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_n &= a_{n-1} + 2 \end{aligned}$$

Fazendo a soma telescópica, encontraremos

$$a_n = 3 + (n-1).2 \Rightarrow a_n = 2n + 1$$

O aluno pode ter dificuldade em compreender porque os termos $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ somem na hora que fazemos a soma telescopica. Para superar essa dificuldade, o professor pode escrever esse somatório da seguinte forma

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + 3 + 2 + 2 + ... + 2$

Agora basta mostrar que os termos $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1}$ aparecem em ambos os lados da equação, por isso eles se anulam e o fator 2 é somado $(n-1)$ vezes.

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	7	12	17	22	...	...	...

Resolução:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_1 + 5 \\ a_3 &= a_2 + 5 \\ a_4 &= a_3 + 5 \end{aligned}$$

$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} + 5$$

Fazendo a soma telescópica, teremos:

$$a_n = 2 + (n-1).5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$$

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	20	17	14	11	8	...	...	...

Resolução:

$$a_1 = 20$$
$$a_2 = a_1 - 3$$
$$a_3 = a_2 - 3$$
$$a_4 = a_3 - 3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} - 5$$

Fazendo a soma telescópica, teremos:

$$a_n = 20 + (n-1).(-3) \Rightarrow a_n = -3n + 23.$$

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	70	60	50	40	30	...	...	...

Resolução:

$$a_1 = 70$$
$$a_2 = a_1 - 10$$
$$a_3 = a_2 - 10$$
$$a_4 = a_3 - 10$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} - 10$$

Fazendo a soma telescópica, teremos:

$$a_n = 70 + (n-1).(-10) \Rightarrow a_n = -10n + 80.$$

ATIVIDADE 3

Represente os termos das progressões aritméticas abaixo no plano cartesiano.

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	5	7	9	11	...	...	...

Resolução:

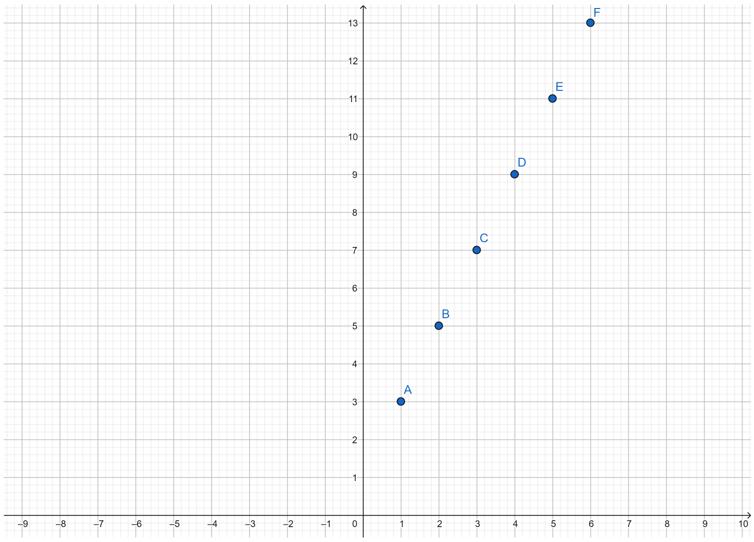

Figura 5 – $a_n = 2n + 1$

Na hora da construção do gráfico, o professor deve orientar o aluno a colocar a ordem dos termos no eixo horizontal, ou seja, eixo $(0x)$ e o valor dos termos no eixo vertical, ou seja, no eixo $(0y)$.

Após os alunos colocarem os pontos no plano cartesiano, o professor deve orientá-los a não ligar os pontos, argumentando que a progressão aritmética é uma função de domínio discreto, ou seja, ela associa um número natural a um número real. Por isso, seu gráfico é formado por um conjunto de pontos apenas. Caso contrário, os alunos poderiam ligar os pontos e iriam obter, erroneamente, uma reta como o gráfico de uma PA.

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	7	12	17	22	...	...	...

Resolução:

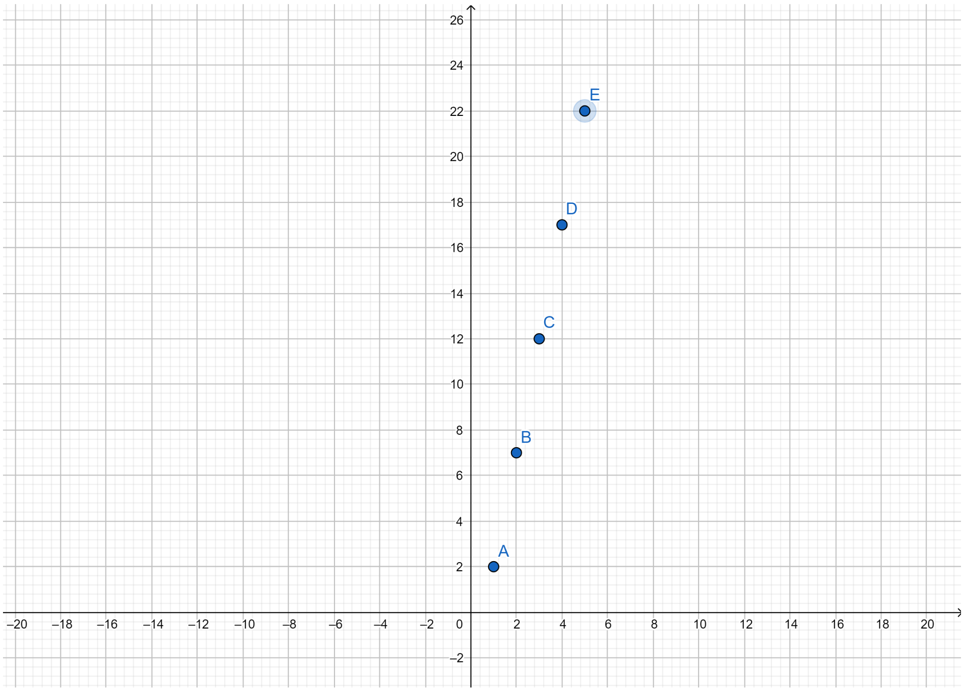

Figura 6 – Termo geral: $a_n = 5n - 3$

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	20	17	14	11	8	...	...	...

Resolução:

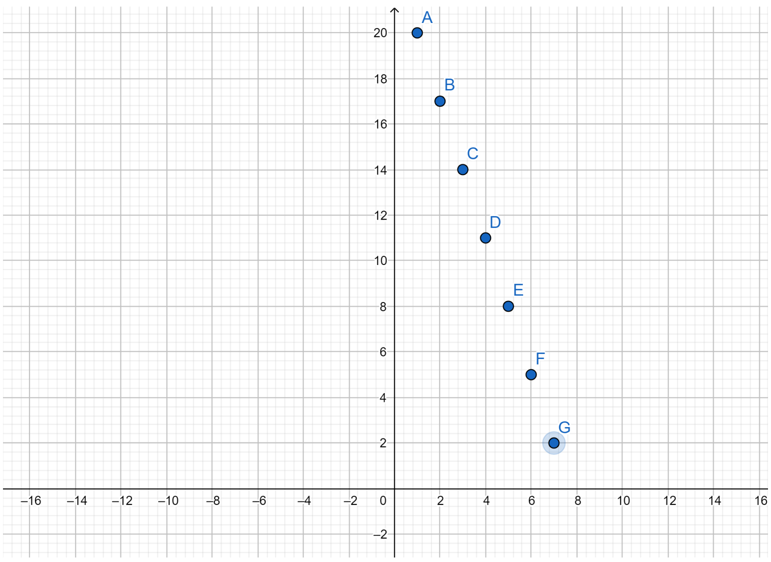

Figura 7 – Termo geral: $a_n = -3n + 23$

Atividade 4

1. Encontre o centésimo termo da sequência representada na tabela abaixo

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	7	12	17	22	...	...	...

Resolução:

$a_{100} = a_1 + 99r$

$a_{100} = 2 + 99.5$

$a_{100} = 497$

2. O termo geral de uma PA é $a_n = 3n + 5$, com $n \in \mathbb{N}$. Determine os termos:

a) a_1

b) a_9

c) a_{21}

Resolução:

a) $a_1 = 3.1 + 5 = 8$

b) $a_9 = 3.9 + 5 = 32$

c) $a_{21} = 3.21 + 5 = 68$

3. O termo geral de uma PA é $a_n = -6n + 13$. Determine as seguintes diferenças:

a) $a_2 - a_1$

b) $a_7 - a_6$

c) $a_{100} - a_{99}$

Resolução:
Note que as diferenças solicitadas são sempre entre dois termos consecutivos. Assim, por definição, cada diferença é a razão PA.

a) $a_2 - a_1 = -6$

b) $a_7 - a_6 = -6$

c) $a_{100} - a_{99} = -6$

4. O ano bissexto ocorre a cada 4 anos porque a terra gasta 365 dias, cinco horas, 48 minutos e 46 segundos para dr uma volta completa em torno sol. Essa diferença de quase 6 horas em quatro anos corresponde a aproximadamente 24 horas. Por isso, a cada quatro anos acrescentamos mais um dia no mês de fevereiro para corrigirmos essa diferença. O mês de fevereiro foi escolhido pelos Romanos por ser o mês mais curto do ano.
Quantos anos bissexto teremos entre 2020 e 2096, sabendo que tanto 2020 quanto 2220 são bissextos?

Resolução:

Os anos bissextos formam uma PA de razão 4 e primeiro termo $a_1 = 2020$. Logo, seu termo geral será:

$a_n = 4n + 2016$

$2096 = 4n + 2016$

$80 = 4n$

$20 = n$

Portanto, teremos 20 anos bissextos de 2020 a 2096.

ATIVIDADE 5

Nas tabelas abaixo, os valores de $x \in \mathbb{R}$ representam o domínio e $f(x) \in \mathbb{R}$ suas respectivas imagens de uma função f, sendo $f(x) = ax + b$, encontre os coeficientes a e b da função f .

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	5	7	9	11	...	...	...

Resolução:

$a = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 5 - 3 = 2$

Sabemos que $b = f(0)$ e $\frac{f(1)-f(0)}{(1-0)} = f(1) - f(0) = a = 2$. Logo, $b = f(0) = f(1) - 2 = 3 - 2 = 1$.

Asim, a lei da função é $f(x) = 2x + 1$

Se analisarmos os valores das imagens da função, veremos que estes formam uma PA de razão 2 e primeiro termo igual a 3. Caso existisse o termo de ordem zero na sequência $(3, 5, 7, 9, 11, ...)$ ele seria o número 1. Portanto, a taxa de variação, ou seja, o coeficiente a dessa função corresponde à razão desta PA, e o coeficiente b corresponde à diferença do primeiro termo pela razão da PA. É fundamental mostrar ao aluno que toda função afim transforma uma PA em outra PA.

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	7	12	17	22	...	...	...

Resolução:

Analisando os valores das imagens da função, vemos que elas formam uma sequência de razão 5 e primeiro termo igual a 2. Utilizando o raciocínio da questão anterior temos que $a = 5$ e $b = 2 - 5 = -3$. A lei dessa função será $f(x) = 5x - 3$.

c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	20	17	14	11	8	...	...	...

Resolução:

Analisando os valores das imagens da função, vemos que estas formam uma progressão aritmética de razão -3 e primeiro termo igual a 20. Logo, $a = -3$ e $b = 20 - (-3) = 23$. A lei dessa função será $f(x) = -3x + 23$.

Atividade 6

As tabelas abaixo apresentam elementos do conjunto domínio e suas respectivas imagens de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Construa o gráfico dessas funções.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	3	5	7	9	11	...	...	...

Resolução:

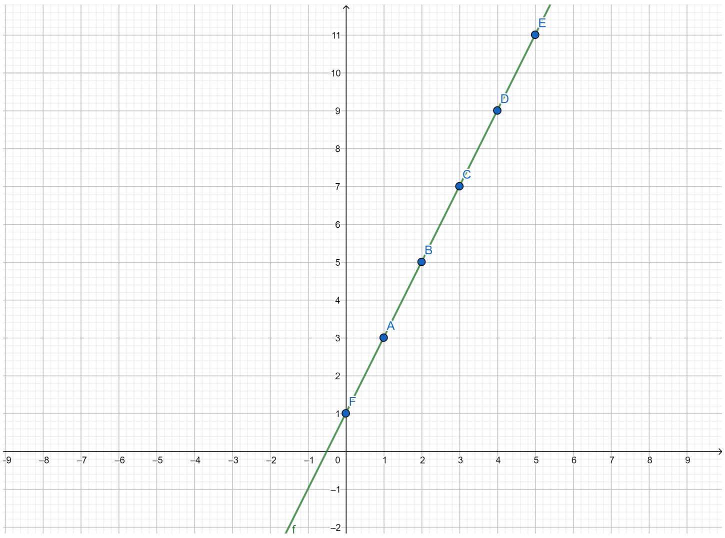

Figura 8 – $f(x) = 2x + 1$

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	7	12	17	22	...	...	...

Resolução:

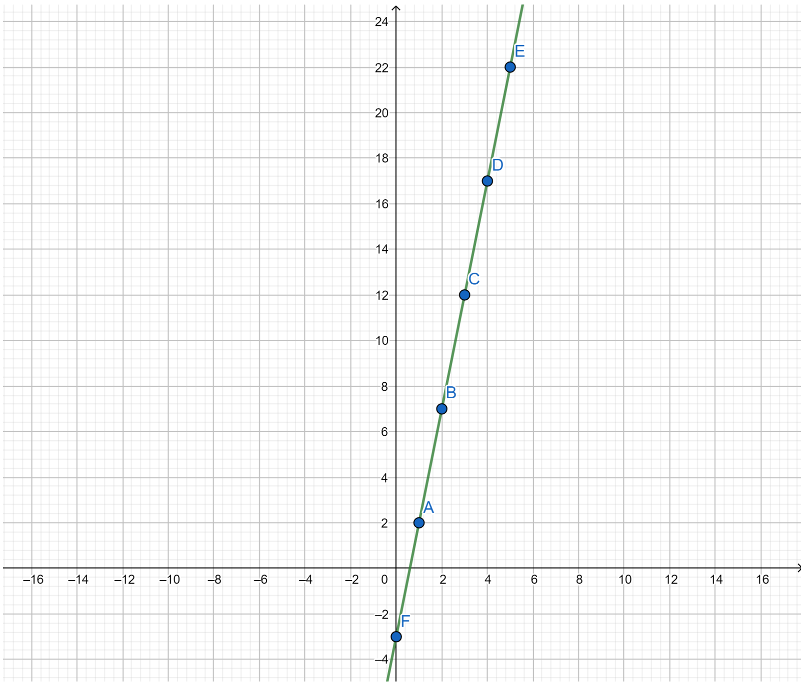

Figura 9 – $f(x) = 5x - 3$

c)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	20	17	14	11	8	...	...	...

Resolução:

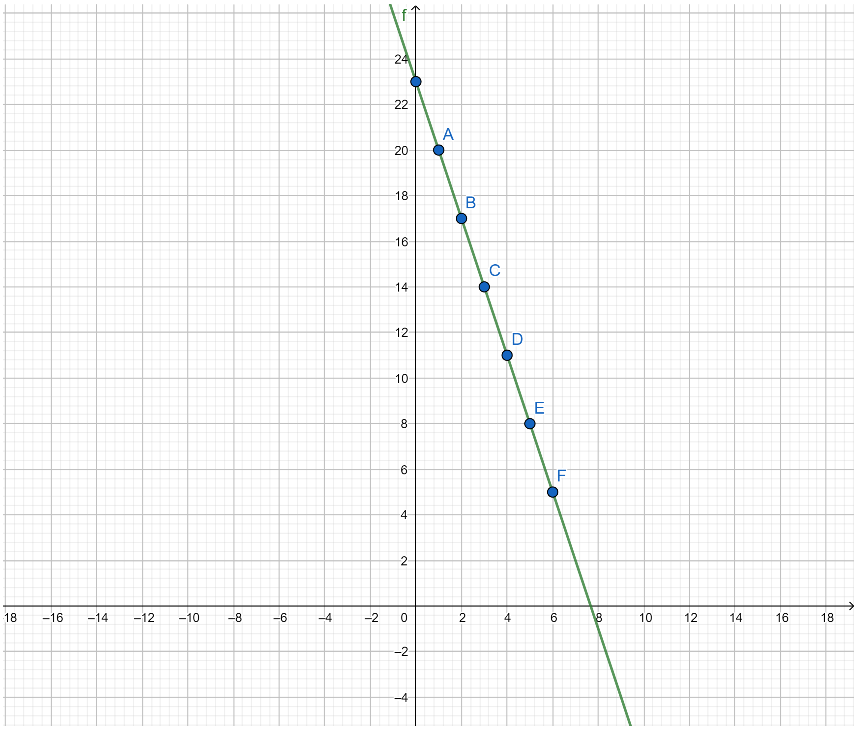

Figura 10 – $f(x) = -3x + 23$

Atividade 7

1. Em uma corrida de táxi, o passageiro paga um valor fixo que é chamado de bandeira (representa uma taxa pelo uso do serviço), acrescido de um valor que depende da quantidade de quilômetros rodados. Considere que em uma corrida de táxi a bandeira seja R$5,20 (cinco reais e vinte centavos) e o valor por quilômetro rodado seja de R$4,00 (quatro reais).

a) Preencha a tabela abaixo com o valor a ser pago por uma corrida de táxi de acordo com a distância percorrida.

Quilômetros percorrido	0	1	2	3	4	5	6	7
Valor pago em R$								

b) Chamando de x a quantidade de quilômetros rodados e de $v(x)$ o valor pago por x quilômetros rodados, escreva uma relação que represente o valor $v(x)$ a ser pago em função da quantidade x de quilômetros rodados.

Resposta: $v(x) = 4x + 5,20$.

c) Utilize a relação que foi encontrada no item anterior para calcular o valor a ser pago por uma corrida de 25km.

Resolução: $v(25) = 4.25 + 5,20 = 100 + 5,20 = 105,20$

d) Um passageiro pagou cinquenta e sete reais e vinte centavos por uma corrida. De quantos quilômetros foi esse corrida?

Resolução: $57,20 = 4x + 5,20$

$52,00 = 4x$

$13 = x$

2. A tabela abaixo representa uma função afim $f(x) = ax + b$. Complete a tabela com as imagens que estão faltando.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$			1				9	

Resolução:

$$\begin{gathered}
a = \frac{f(6) - f(2)}{(6-2)} = \frac{9-1}{4} = 2 \\
f(1) = f(2) - 2 = 1 - 2 = -1 \\
f(0) = f(1) - 2 = -1 - 2 = -3 \\
f(3) = f(2) + 2 = 1 + 2 = 3 \\
f(4) = f(3) + 2 = 3 + 2 = 5 \\
f(5) = f(4) + 2 = 5 + 2 = 7 \\
f(7) = f(6) + 2 = 9 + 2 = 11
\end{gathered}$$

3. Uma refrigeração cobra trinta reais para que um técnico visite uma residência, e mais um adicional de quarenta reais por hora de trabalho do técnico.

a) Quanto o técnico receberia por 3,5 horas.

b) Construa uma tabela mostrando o valor pago pela residência em função da quantidade de horas trabalhada pelo técnico.

c) Escreva a lei da função que representa o valor v em reais, de um serviço de x horas feito pelo técnico.

Resolução

a) $30 + 3,5.40 = 30 + 140 = 170$

b)

Horas trabalhada	0	1	2	3	4	5	6	7
Valor pago em reais	30	70	110	150	190	230	270	310

c) $v(x) = 30 + 40x$

4 Funções Quadráticas e Progressões Aritméticas

Sabemos que, normalmente, os conteúdos funções quadráticas e progressões aritméticas não são diretamente relacionados nas aulas de matemática no Ensino Médio, apesar desta relação ser orientada pelos PCNs. A idéia de contextualizar função em geral com sequências é posta como se segue: "Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função" (BRASIL, 2002). No contexto do Teorema de Caracterização da função polinomial do 2º grau, essa conexão é obrigatória, já que os dois conteúdos são indissociáveis para a compreensão da validação do teorema, como veremos mais adiante. Inicialmente veremos os conceitos básicos de funções quadráticas, como sua definição, seu gráfico e seus pontos de máximo e mínimo. Posteriormente veremos o Teorema que caracteriza tais funções e sua total relação com as progressões aritméticas. Por fim, encerraremos o capítulo com uma aplicação desta caracterização na resolução de problemas envolvendo o Movimento Uniformemente Variado.

4.1 As Funções Quadráticas

Encontrar dois números conhecendo sua soma (s) e seu produto (p) é um problema muito antigo, escrito pelos Babilônios há quase 4000 anos. Geometricamente este problema consiste em encontrar um retângulo conhecendo seu semiperímetro e sua área. Vejamos sua solução.

Se x é um dos números procurados, então o outro número é $s - x$, e o produto entre eles é dado por:

$$p = x(s - x)$$

Dessa forma, para encontrarmos esses dois números basta resolvermos a equação $x^2 - sx + p = 0$. Porém, na época em questão, os babilônios não enxergavam a resolução desse problema por meio de uma equação. Segundo Elon, a solução desse problema era anunciado da seguinte maneira:

Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número.

Os números encontrados pelos babilônios são:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p} \text{ e } s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}.$$

Para os autores do livro "A Matemática do Ensino Médio", há indícios que esse resultado foi alcançado da seguinte forma:
Sejam α e β os números procurados, digamos com $\alpha \leq \beta$. Esses números α e β são equidistantes da média aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Se conhecermos a diferença $d = \beta - \frac{s}{2} = \frac{s}{2} - \alpha$ teremos dois números $\alpha = \frac{s}{2} - d$ e $\beta = \frac{s}{2} + d$.
Mas d é fácil de achar, pois:

$$p = \alpha\beta = (\frac{s}{2} - d)(\frac{s}{2} + d) = (\frac{s}{2})^2 - d^2,$$

logo

$$d^2 = (\frac{s}{2})^2 - p \ e \ d = \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}.$$

Daí

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}$$

e

$$\beta = \frac{s}{2} + d = \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}.$$

Como os números s e p do problema eram sempre números positivos, os babilônios não tinham preocupação com possíveis soluções negativas fornecidas por sua regra.
Vejamos agora a forma canônica do trinômio de grau dois.

$$ax^2+bx+c = a.\Big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\Big) = a.\Big(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\Big) = a.\Big((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\Big)$$

Assim, a forma canônica do trinômio de grau dois é dada por:

$$a.\Big((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big).$$

Logo, para encontrar as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, basta utilizarmos a forma canônica do trinômio, ou seja,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow a.\Big((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big) = 0 \Rightarrow (a \neq o)$$

$$\Big((x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\Big) = 0 \Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Assim, $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. Observe que a equação só terá raízes reais se o discriminante $\triangle = b^2 - 4ac$ for maior ou igual a zero.

Passemos agora para as definições formais.

Definição 4.1.1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ de coeficientes a, b, c reais com $a \neq 0$ é chamada de função quadrática ou função polinomial do segundo grau pois, sua lei de correspondência é um trinômio de grau dois.*

Definição 4.1.2. *O gráfico da função quadrática é uma curva chamada de parábola. E uma parábola é o lugar geométrico formado por pontos de um plano que são equidistantes de um ponto (F) fixo e de uma reta (r) fixa. O ponto (F) é o foco da parábola e a reta (r) é a sua diretriz.*

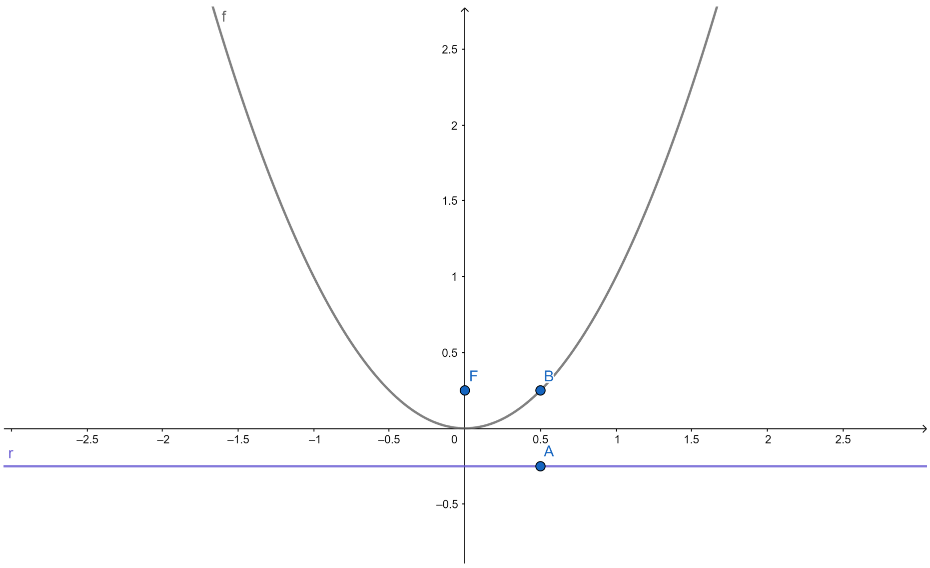

Figura 11 – Gráfico de $f(x) = x^2$

Uma das importantes aplicações da função quadrática é a possibilidade de resolver problemas envolvendo máximos e mínimos.

Definição 4.1.3. *Dados $m \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que $f(m)$ é o valor máximo da função f se $f(x) \leq f(m)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e dizemos que $f(m)$ é o valor mínimo de f se $f(m) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Se f é uma função quadrática, digamos $f(x) = ax^2 + bx + c$, dizemos que a forma canônica da função quadrática é

$$y = a.\Big((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\triangle}{4a^2}\Big),$$

onde $\triangle = b^2 - 4ac$, tendo em vista a forma canônica do trinômio $ax^2 + bx + c$. Analisando a forma canônica, percebemos que a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\triangle}{4a^2}$ são constantes. Assim, temos duas possibilidades:

- Se $a > 0$, a função terá um valor mínimo e será estabelecido quando $(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\triangle}{4a^2}$ assumir um valor mínimo. Como $(x + \frac{b}{2a})^2$ é sempre positivo ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, $x = \frac{-b}{2a}$. Logo o valor mínimo de f será
$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a.(0 - \frac{\triangle}{4a^2}) = \frac{-\triangle}{4a}$$

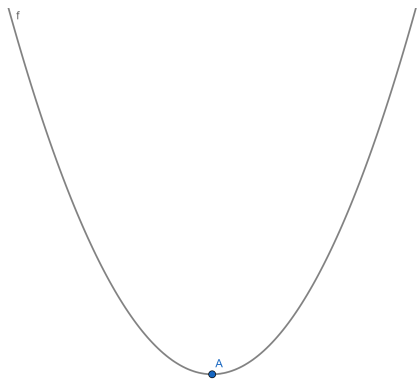

Figura 12 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$

- Se $a < 0$, a função terá um valor máximo e de forma análoga, concluímos que o valor máximo assumido pela função ocorre quando $x = \frac{-b}{2a}$. Logo o valor máximo da função será:
$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = a.(0 - \frac{\triangle}{4a^2}) = \frac{-\triangle}{4a}.$$
Portanto, o ponto onde a função assumirá um valor máximo ou mínimo terá coordenadas $(\frac{-b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a^2})$.

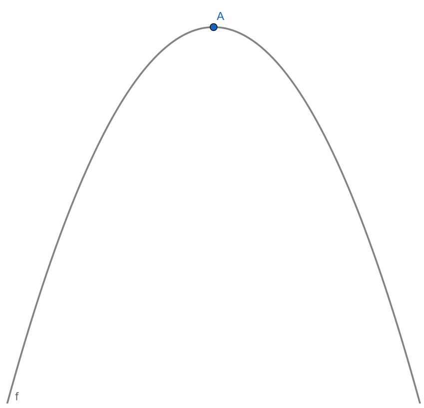

Figura 13 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$

Exemplo 4.1.1. *Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro 800 reais mais 10 reais por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?*

Solução: A receita obtida pela companhia será o produto entre o total de passageiros e o valor pago por cada um. Note que a receita depende do total de lugares vazios.

Total de passageiros	Valor pago por passageiro
100-1	800+10.1
100-2	800+10.2
100-3	800+10.3
.	.
.	.
.	.
100-x	800+10.x

Logo,

$$R(x) = (100 - x).(800 + 10.x) = -10x^2 + 200x + 80000,$$

sendo x a quantidade de lugares vazios e $R(x)$ a receita obtida pela companhia. A receita será máxima quando $x = \frac{-200}{2.(-10)}$, ou seja, $x = 10$.
Portanto, o total de passageiros para que a rentabilidade seja máxima é igual a $100-10 = 90$.

4.2 Caracterização da função quadrática

O teorema a seguir é de grande importância pois nos permite distinguir a função quadrática das demais funções reais, revelando a essência dessa família de funções, através de seu comportamento com as progressões aritméticas. Acreditamos que, para além desta distinção, o fato deste resultado nos permitir relacionar dois conceitos matemáticos tão importantes como função quadrática e progressões aritméticas já justifica sua abordagem em sala de aula.
Antes de enunciar o Teorema, vamos perceber o comportamento de algumas funções quadráticas através de exemplos.

Exemplo 4.2.1. *A tabela abaixo representa algumas imagens de $f(x) = x^2$.*

x	f(x)
x_1=1	1
x_2=2	4
x_3=3	9
x_4=4	16
x_5=5	25

Note que x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 formam uma P.A de razão 1 e as diferenças entre duas imagens sucessivas formam uma P.A de razão 2.

$$d_1 = 4 - 1 = 3$$
$$d_2 = 9 - 4 = 5$$
$$d_3 = 16 - 9 = 7$$
$$d_4 = 25 - 16 = 9$$

Portanto a função quadrática de lei $f(x) = x^2$ transforma uma progressão aritmética de primeira ordem em uma progressão aritmética de segunda ordem.

Exemplo 4.2.2. *A tabela abaixo representa algumas imagens de $f(x) = x^2 + 3$*

x	f(x)
1	4
2	7
3	12
4	19
5	28

A sequência $(1, 2, 3, 4, 5)$ é uma P.A de primeira ordem e a sequência $(4, 7, 12, 19, 28)$ é uma P.A de segunda ordem

Exemplo 4.2.3. *A tabela abaixo representa algumas imagens de $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$*

x	f(x)
1	1
2	10
3	23
4	40
5	61

A sequência $(1, 2, 3, 4, 5)$ é uma P.A de primeira ordem e a sequência $(1, 10, 23, 40, 61)$ é uma P.A de segunda ordem.

Agora sim, vamos enunciar o principal resultado deste capítulo que nos diz que o comportamento observado nos exemplos anteriores não é coincidência e sim, uma característica única das funções quadráticas.

Teorema 4.1 (Caracterização da Função Quadrática)**.** *A fim de que a função* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não-constante* $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ *seja transformada por* f *numa progressão aritmética de segunda ordem não-degenerada* $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n), ...$

Demonstração: Faremos a demonstração da necessidade. A demonstração da suficiência pode ser encontrada em Lima,E.L;Carvalho,C.P.P; Wagner,E; Morgado,A.C.**A Matemática do Ensino Médio**.Rio de Janeiro:SBM,v.1,2006.
Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e tomemos $y_1, y_2, ..., y_n, ...$ uma PA de segunda ordem tal que $y_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$. Queremos provar que existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $y_n = an^2+bn+c, \forall n \in \mathbb{N}$, ou seja, que a função f é uma função quadrática, com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como a PA é de segunda ordem, temos

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= d \\
y_3 - y_2 &= d + r \\
y_4 - y_3 &= d + 2r \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{n+1} - y_n &= d + (n-1).r = d_n,
\end{aligned}$$

donde d_n é o termo geral da PA de razão r e primeiro termo d.
Note que, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos:

$$y_{n+1} = (y_{n+1} - y_n) + (y_n - y_{n-1}) + ... + (y_3 - y_2) + (y_2 - y_1) + y_1 =$$

$$= (d + (n-1).r) + (d + (n-2).r) + ... + (d + r) + d + 1 = nd + \frac{n(n-1)}{2}.r + y_1$$

Como a igualdade acima é também verdadeira para $n = 0$, podemos escrever:

$$y_n = (n-1)d + \frac{(n-1)(n-2)}{2}.r + y_1 = nd - d + \frac{r}{2}n^2 - \frac{3r}{2}n + r + y_1 =$$

$$= \frac{r}{2}n^2 + (d - \frac{3r}{2})n + r - d + y_1.$$

Assim, fazendo $a = \frac{r}{2}$, $b = d - \frac{3r}{2}$ e $c = r - d + y_1$, obtemos:

$$y_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, sabendo que uma função quadrática é contínua e sabendo também que, se duas funções contínuas coincidem em todos os naturais então elas coincidem em todos os reais, podemos garantir que $f(x) = ax^2 + bx + c$, como queríamos.

Vejamos agora como este teorema pode ser útil.

4.3 Movimento Uniformemente variado

Aqui, veremos uma importante aplicação do Teorema da Caracterização das Funções Quadráticas na Física. Quando precisamos associar a posição de um objeto móvel em função do tempo para um objeto em movimento uniformemente variado, o modelo matemático utilizado é o da função quadrática. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 4.3.1. *Um estudante anotou a posição, ao longo do tempo, de um móvel sujeito a uma força constante e obteve os dados abaixo.*

Tempo(s)	Posicão(metros)
0	17
10	45
20	81

Calcule a posição do móvel nos instantes $5s$,$15s$ *e* $25s$.

Analisando os dados da tabela, verificamos que a função que associa a posição do móvel em função do tempo é quadrática pois, a mesma está transformando uma P.A de primeira ordem em uma P.A de segunda ordem. Logo, a função que representa a posição do móvel (s) em função do tempo (t) é do tipo $s(t) = at^2 + bt + c$. Como $s(0) = 17$ temos que o coeficiente $c = 17$
Substituindo os pontos $(10, 45)$ e $(20, 81)$ na função temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b = 28 \\ 400a + 20b = 64 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos $a = \dfrac{1}{25}$ e $b = \dfrac{12}{5}$.

Assim, a função procurada é $s(t) = \dfrac{t^2}{25} + \dfrac{12}{5}t + 17$.

Agora, basta aplicar a função encontrada nos instantes solicitados no enunciado do problema, obtendo:

- $s(5) = \frac{5^2}{25} + \frac{12}{5}.5 + 17 = 29$
- $s(15) = \frac{15^2}{25} + \frac{12}{5}.15 + 17 = 61$
- $s(25) = \frac{25^2}{25} + \frac{12}{5}.25 + 17 = 105.$

Esperamos que as relações aqui discutidas sirvam de motivação para que os professores do Ensino Médio trabalhem o conteúdo das funções quadráticas, sem deixar de lado esta caracterização tão importante que diz respeito ao seu comportamento com as progressões aritméticas.

5 Função exponencial

Neste capítulo faremos uma caracterização da função exponencial de modo distinto do que encontramos nos livros didáticos do Ensino Médio. Normalmente o estudo das progressões geométricas é feito após o estudo das funções elementares como afim, quadrática e exponencial. Esse fato faz com que professor trabalhe a função exponencial sem mencionar sua caracterização, que tem como princípio básico transformar uma PA em uma PG. Essa propriedade específica das funções exponenciais permite ao professor trabalhar o conceito de funções exponenciais junto com o conceito de progressões geométricas, possibilitando ao aluno compreender que uma PG pode ser representada por uma função do tipo exponencial de domínio discreto, além de lhe permitir resolver muitos problemas de forma mais simplificada, lançando mão desta propriedade específica. Os gráficos da função exponencial e da PG serão uma ferramenta importante para que o aluno perceba a familiaridade entre esses dois modelos matemáticos. O objetivo é permitir que o aluno utilize o conhecimento sobre PG para resolver problemas matemáticos que representam crescimento e decrescimento exponencial em diversos contextos da matemática moderna, aplicados à diversas áreas do conhecimento como Biologia, Química, Física, Economia, Saúde, Administração entre outras.

No final do capítulo apresentamos uma proposta de Sequência Didática abordando estas relações discutidas ao longo deste capítulo.

5.1 A Função Exponencial

Vamos, nesta seção, definir alguns conceitos preliminares.

Definição 5.1.1. *Seja $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$, chama-se potência de base a e expoente n o número a^n que é o produto de n fatores iguais a a.*

$a^n = a.a.a. \ldots .a$ *com n fatores iguais a.*

Propriedades

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ com $(a \neq 0$ e $m \geq n)$
3. $(a.b)^n = a^n.b^n$
4. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ com $b \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{m.n}$

Definição 5.1.2. *Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, e $n \in \mathbb{N}$. Chama-se potência de base a e expoente $-n$ o número a^{-n}, que é o inverso de a^n.*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definição 5.1.3. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida pela notação $f(x) = a^x$ onde a é um número real positivo e diferente de 1, é chamada de função exponencial se satisfizer as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:*

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$;
2. $a^1 = a$
3. $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ *quando* $a > 1$
   $x < y \Rightarrow a^x > a^y$ *quando* $0 < a < 1$

O **gráfico da função exponencial** é uma curva que não possui interseção com o eixo $0x$, pois o conjunto imagem dessa função são os números reais positivos.

- Se $a > 1$ a função $f(x) = a^x$ será crescente e seu gráfico será:

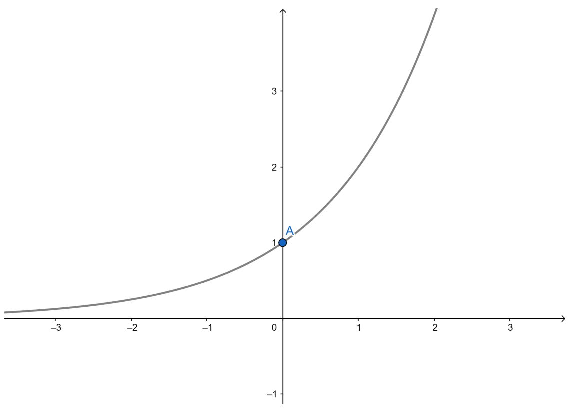

Figura 14 – Gráfico de $f(x) = a^x$ com $a > 0$

- Se $0 < a < 1$ a função $f(x) = a^x$ será decrescente e seu gráfico será:

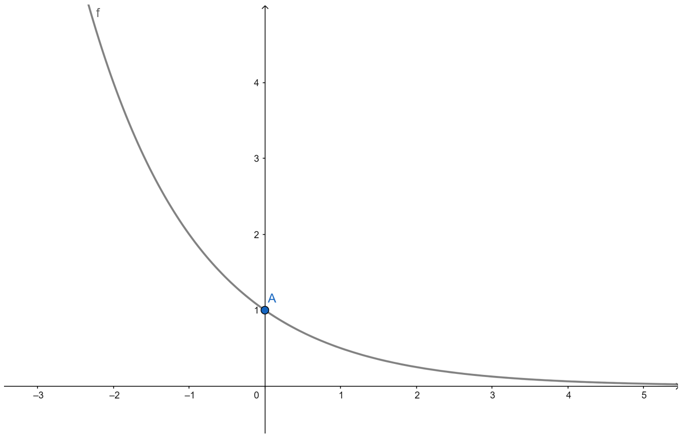

Figura 15 – Gráfico de $f(x) = a^x$ com $0 < a < 1$

Definição 5.1.4. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma função definida como $f(x) = ba^x$ então, f é uma função de tipo exponencial.*

5.2 Relação entre Funções Exponenciais e Progressões Geométricas

Veremos agora a propriedade que é característica das funções do tipo exponencial. A saber, mostraremos que funções do tipo exponencial transformam PAs em PGs. Para tanto, consideremos $f(x) = ba^x$ uma função do tipo exponencial. Suponha que os elementos $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, do domínio de f formam uma PA de razão q, ou seja, $x_{n+1} - x_n = q$. Então, as imagens de f:

$$f(x_1) = ba^{x_1}, f(x_2) = ba^{x_2}, ..., f(x_n) = ba^{x_n}, ...,$$

formam uma progressão geométrica de razão a^q, pois:

$$f(x_{n+1}) = ba^{x_n+1} = ba^{x_n+q} = ba^{x_n}.a^q = f(x_n).a^q.$$

Agora,como o $(n+1)$-ésimo termo da PA é $x_{n+1} = x_1 + nq$, temos:

$$f(x_{n+1}) = f(x_1 + nq) = ba^{x_1+nq} = ba^{x_1}(a^q)^n = f(x_1)(a^q)^n.$$

Além disso, se $x_1 = 0$ então $f(x_1) = b$, e daí,

$$f(x_{n+1}) = b.A^n,$$

onde $a^q = A$.

Assim, acabamos de mostrar que funções do tipo exponencial transformam uma PA numa PG. Além disso, é possível garantir que esta propriedade é, na verdade, uma característica das funções tipo exponencial. É o que garante o seguinte:

Teorema 5.1. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função monótona injetiva (isto é, crescente ou decrescente) que transforma toda progressão aritmética $x_1, x_2, ..., x_n$ numa progressão geométrica $y_1, y_2, ..., y_n = f(x_n)$. Se pusermos $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$ teremos $f(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Vide [9].

Vejamos agora alguns exemplos de como esta relação e caracterização das funções do tipo exponencial, associadas às progressões geométricas podem ser abordadas em sala de aula. Acreditamos que as aplicações precisam estar presentes no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Trabalhar os conteúdos matemáticos associando-os à vida cotidiana do discente nem sempre é uma tarefa fácil, mas podem ser muito eficazes no processo de aprendizagem.

> A aplicação de situações cotidianas na motivação, estudo e ensino de tópicos de conteúdos programáticos aumenta, na maioria das vezes, o interesse e compreensão dos alunos da educação básica, além de evidenciar que a matemática faz realmente parte da vida de todos nós. No ensino das funções, que pode ser iniciado já no Nível Fundamental, as aplicações são muito indicadas para fugir do formalismo teórico . . . (Hellmeister,RPM 63,p.1)

Exemplo 5.2.1. *O conhecimento da meia-vida dos medicamentos é o que possibilita os profissionais de Medicina interpretarem os efeitos terapêuticos, a duração do efeito farmacológico, a dosagem, a frequência de administração e a duração do tratamento.*
A amoxicilina é um antibiótico utilizado no tratamento de diversas infecções não tão graves, receitada com muita frequência pelos médicos. A meia vida da amoxicilina após sua ingestão é de 1h e 18 minutos. Isso significa que, para cada intervalo de tempo de 1h e 18 minutos a quantidade de amoxicilina no organismo cai pela metade.

A tabela abaixo mostra a quantidade de amoxicilina no organismo (mg) em função do seu número de meias-vidas.

Quantidade(mg)	500	250	125	62,5	31,25	15,6	7,8	3,9
Número de meias-vidas	0	1	2	3	4	5	6	7

Analisando a tabela, observamos que o número de meias-vidas formam uma PA e a quantidade de amoxicilina no organismo formam uma PG. Ora, pelo que acabamos de verificar, podemos garantir que, a quantidade de amoxicilina no organismo em função do seu número de meias-vidas pode ser descrita por uma função do tipo exponencial, ou seja, $f(x) = b.a^x$, donde $b = f(0) = 500$ e $a = \dfrac{f(1)}{f(0)} = \dfrac{250}{500} = \dfrac{1}{2}$.
Logo, $f(x) = 500.(\frac{1}{2})^x$.

Exemplo 5.2.2. *A tabela abaixo representa alguns elementos do domínio e da imagem de uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$.

x	f(x)
1	6
2	18
3	54
4	162
5	486

Encontre a lei de formação desta função.

Note que os elementos da primeira coluna formam uma PA, enquanto os elementos da segunda coluna formam uma PG de razão $q = 3$, primeiro termo igual a 6 e termo geral $a_n = 6.3^{n-1} = 6.\frac{3^n}{3} = 2.3^n$.
Assim, pelo visto anteriormente, sabemos que se trata de uma função do tipo exponencial, com lei de formação dada por $f(x) = b.a^x$, onde $b = f(0)$ e $a = \frac{f(1)}{f(0)}$.
Além disso,

$$f(0) = \frac{f(1)}{3} = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow a = \frac{f(1)}{f(0)} = \frac{6}{2} = 3,$$

e portanto obtemos $f(x) = 2.3^x$.

Exemplo 5.2.3. *Encontre a lei da função representada na tabela abaixo*

$f(x)$	54	18	6	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$
x	0	1	2	3	4	5

Solução: A função é do tipo $f(x) = b.a^x$, pois transforma uma PA em uma PG.

Assim, $b = f(0) = 54$, $a = \dfrac{18}{54} = \dfrac{1}{3}$ e portanto $f(x) = 54.(\dfrac{1}{3})^x$.

Na próxima seção apresentamos uma proposta de Sequência Didática para ser trabalhada com alunos do 1º ano do Ensino Médio, abordando a relação existente entre as funções exponenciais e as progressões geométricas.

5.3 Sequência didática

Área do conhecimento: Ciências da Natureza e Matemática

Público alvo: Alunos do 1º Ano do Ensino Médio

Conteúdo: Progressão geométrica e Função exponencial

Tempo previsto: 10 aulas de cinquenta minutos

Recursos: pen-drive, papel milimetrado, régua, piloto e quadro branco

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA:
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidade:
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG)à funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

COMPETÊNCIA ESPECÍFICA:
Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidade:

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

Primeiro momento:

1. O professor entregará a Atividade 1 para que os alunos resolvam de maneira individual.

2. Abre-se um diálogo para saber se houve alguma dificuldade na resolução da atividade.

3. Fazer a correção.

4. Definir o que é uma progressão geométrica (página 14) .

O objetivo dessa atividade é trabalhar padrões númericos para definir que, em toda PG o quociente entre dois termos consecutivos, a partir do segundo termo, é sempre constante, ou seja, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. A constante q é chamada de razão da PG.

Segundo momento:

1. O professor deve determinar de maneira recursiva o termo geral da PG (página 14).

2. Instruir os alunos a formarem duplas para a resolução da Atividade 2.

3. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas

A finalidade dessa atividade é trabalhar o raciocínio recursivo e aplicar o produto telescópico na determinação do termo geral da PG.

Terceiro momento:

1. Definir que a ordem dos termos de uma PG será representada pelo eixo horizontal $(0x)$ e o valor dos termos pelo eixo vertical $(0y)$.

2. Representar os termos de uma PG no plano cartesiano.

3. Aplicar a Atividade 3 (para essa atividade será necessário o uso do papel milimetrado).

O objetivo da atividade é mostrar, através do plano cartesiano, que uma PG pode ser representada por uma função de domínio discreto

Quarto momento:

1. Aplicar a Atividade 4.

2. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas.

O objetivo desta atividade é utilizar o termo geral da PG para fazer a transição da linguagem algébrica para a linguagem aritmética, tendo em vista a resolução de problemas.

Quinto momento

1. Definir função exponencial (página 50).

2. Mostrar que toda função de tipo exponencial transforma uma PA em uma PG (página 51).

3. Aplicar a Atividade 5.

4. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas

O objetivo dessa atividade é mostrar para o aluno a caracterização da função exponencial via progressões geométricas.

Sexto momento

1. Definir o gráfico de uma função exponencial (página 50).

2. Aplicar a Atividade 6.

3. Comparar o gráfico de uma função exponencial de domínio real com o gráfico de uma função exponencial de domínio discreto, que representa uma PG.

O objetivo dessa atividade é mostrar graficamente a relação de igualdade entre a constante a da função do tipo exponencial $f(x) = b.a^x$ de domínio real e a razão da PG, representada pela função de domínio discreto.

Sétimo momento

1. Aplicar a Atividade 7.

2. Fazer a correção e tirar possíveis dúvidas.

O objetivo dessa atividade é resolver problemas de função exponencial usando sua característica de transformar PA em PG.

ATIVIDADE 1

As sequências representadas nas tabelas abaixo seguem um padrão. Descubra o padrão e complete as tabelas com os termos que estão faltando.

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	4	8	16				

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	6	18	54	162				

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$				

e)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	5	-5	5	-5				

f)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	-6	12	-24				

g)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	25	5	1	$\frac{1}{5}$				

ATIVIDADE 2

Encontre de maneira recursiva o termo geral das progressões geométricas abaixo.

a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	4	8	16				

Resolução:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1.2$

$a_3 = a_2.2$

$a_4 = a_3.2$

.

.

.

$a_n = a_{n-1}.2$

Multiplicando ambos os lados temos:

$$a_1.a_2.a_3.a_4.\ldots.a_{n-1}.a_n = 2.a_1.2.a_2.2.a_3.2.a_4.2.\ldots.a_{n-1}.2$$

Dividindo ambos os lados da equação por $(a_1.a_2.a_3.a_4.\ldots.a_{n-1})$ obtemos $a_n = 2.2.2.2.\ldots.2$, com o fator 2 aparecendo n vezes. Logo, $a_n = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	6	18	54	162				

Resolução: $a_1 = 6$

$a_2 = a_1.3$

$a_3 = a_2.3$

$a_4 = a_3.3$

.

.

.

$a_n = a_{n-1}.3$

Multiplicando ambos os lados, os fatores $(a_1.a_2.a_3.a_4.\ldots.a_{n-1})$ cancelam-se como foi visto no item anterior. Logo, $a_n = 6.(3.3.3.\ldots.3)$. com o fator 3 aparecendo $(n-1)$ vezes. Portanto, $a_n = 6.3^{n-1} = 2.3^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

c)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$				

Resolução:

$a_1 = 2$

$a_2 = a_1.\frac{1}{2}$

$a_3 = a_2.\frac{1}{2}$

$a_4 = a_3.\frac{1}{2}$

.

.

.

$a_n = a_{n-1}.\frac{1}{2}$

Multiplicando ambos os lados, temos $a_n = 2.(\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\ldots.\dfrac{1}{2})$, com o fator $\frac{1}{2}$ aparecendo $(n-1)$ vezes. Portanto, $a_n = 2.(\dfrac{1}{2})^{n-1} = 4.(\dfrac{1}{2})^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

d)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$				

Resolução:

$a_1 = \frac{1}{2}$

$a_2 = a_1.\frac{1}{3}$

$a_3 = a_2.\frac{1}{3}$

$a_4 = a_3.\frac{1}{3}$

.

.

.

$a_n = a_{n-1}.\frac{1}{3}$

Multiplicando ambos os lados, temos $a_n = \dfrac{1}{2}.(\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{3}.\ldots.\dfrac{1}{3})$, com o fator $\frac{1}{3}$ aparecendo $(n-1)$ vezes. Portanto,

$$a_n = \frac{1}{2}.(\frac{1}{3})^{n-1} = \frac{3}{2}.(\frac{1}{3})^n,$$

com $n \in \mathbb{N}$.

ATIVIDADE 3

Represente os termos das progressões geométricas abaixo no plano cartesiano.

a)

n	1	2	3	4	5
a_n	2	4	8	16	32

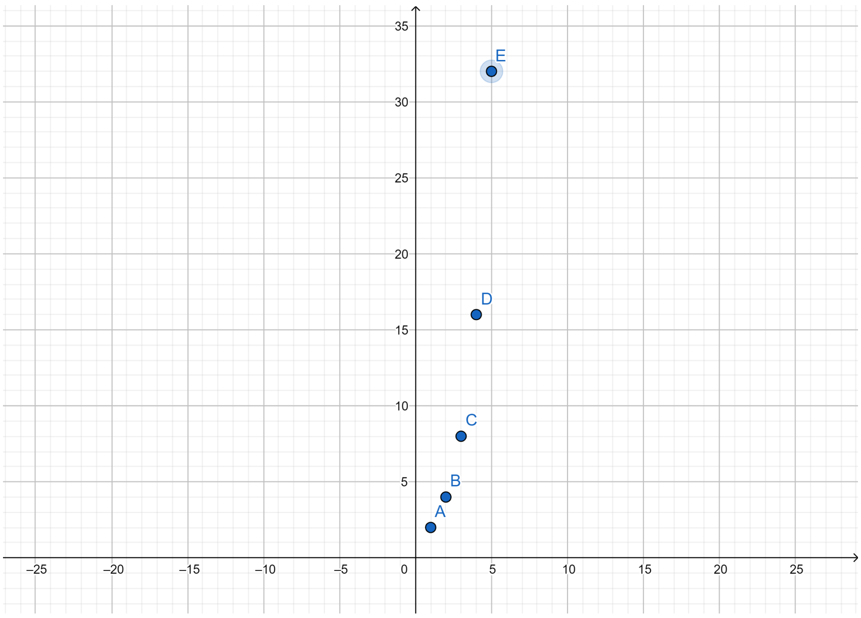

Figura 16 – $a_n = 2^n$

b)

n	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{2}{3}$	2	6	18	54

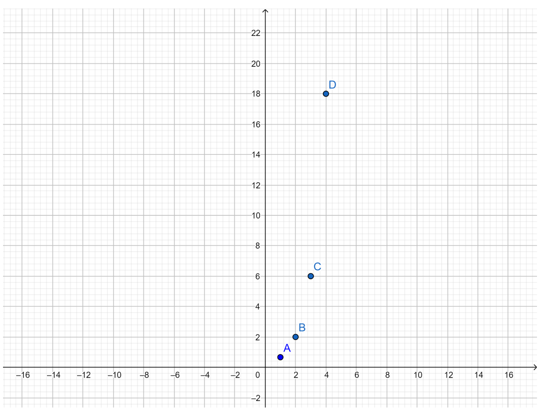

Figura 17 – $a_n = \frac{2}{9}.3^n$

c)

n	1	2	3	4	5	6
a_n	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

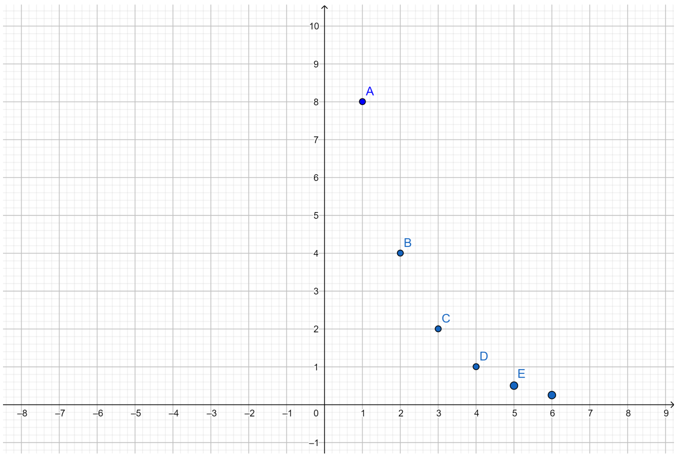

Figura 18 – $a_n = 16.(\frac{1}{2})^n$

d)

n	1	2	3	4	5
a_n	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

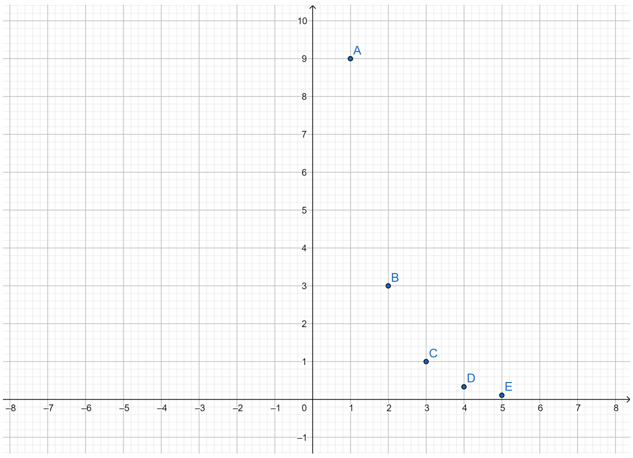

Figura 19 – $a_n = 27.(\frac{1}{3})^n$

Atividade 4

1- Utilize a equação do termo geral para calcular o décimo termo da PG representada na tabela abaixo.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	6	12	24	...	...	...	...	...

2- O termo geral de uma PG é $a_n = 5.3^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Determine os termos:

a) a_1

b)a_3

c)a_5

Resolução:

a) $a_1 = 5.3^1 = 15$

b) $a_3 = 5.3^3 = 135$

c) $a_21 = 5.3^5 = 1215$

3-O termo geral de uma PG é $a_n = 17.5^n$. Determine os quocientes abaixo:

a) $\dfrac{a_2}{a_1}$

b) $\dfrac{a_4}{a_3}$

c) $\dfrac{a_{100}}{a_{99}}$

Resolução:

As diferenças apresentadas são entre dois termos consecutivos de uma PG. Logo, por definição, trata-se da razão da PG.

a)$\dfrac{a_2}{a_1} = 5$

b)$\dfrac{a_4}{a_3} = 5$

c)$\dfrac{a_{100}}{a_{99}} = 5$

4- Em uma experiência realizada em laboratório, biólogos verificaram que uma espécie X de bactérias dobra sua população a cada 30 minutos. O experimento começou com 500 bactérias e, no final do experimento, a população da espécie X de era de 32000 bactérias. A experiência foi realizada durante quanto tempo?

Resolução:

$P(t) = P_o.2^t$

$32000 = 500.2^t$

$64 = 2^t$

$t = 6$

Seis é a quantidade de intervalos de tempo que a população X de bactérias dobrou. Logo, a experiência foi realizada duarante 6 x 30 minutos, ou seja, 180 minutos.

ATIVIDADE 5

Nas tabelas abaixo, os valores de x representam o domínio e $f(x)$ suas respectivas imagens de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ do tipo exponencial $f(x) = ba^x$. Encontre os coeficientes a e b de cada função e sua lei de definição.

1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	4	8	16	32	...	...	...

Resolução: As imagens da função formam uma PG de razão 2, logo, o coeficiente a da função será 2 e o coeficiente b será o quociente $\dfrac{f(1)}{a}$, ou seja, $b = \dfrac{2}{2} = 1$. Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 1.2^x$, ou seja, $f(x) = 2^x$.

Uma outra maneira de encontrar os coeficientes a e b da função e sua lei de formação seria encontrar o termo geral da PG (2,4,8,16,32,...).

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$a_n = 2.2^{n-1}$$
$$a_n = 2^n$$

2.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	6	18	54	162	...	...	...

Resolução: As imagens da função formam uma P.G de razão 3 logo, o coeficiente a da função será 3 e o coeficiente b será o quociente $\dfrac{f(1)}{a}$, ou seja, $b = \dfrac{2}{3}$. Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = \dfrac{2}{3}.3^x$

Uma outra maneira de encontrar os coeficientes a e b da função e sua lei de formação seria encontrar o termo geral da PG (2,6,18,54,162,...).

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$a_n = 2.3^{n-1}$$
$$a_n = \frac{2}{3}3^n$$

3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Resolução: As imagens da função formam uma PG de razão $\frac{1}{2}$ logo, o coeficiente a da função será $\frac{1}{2}$ e o coeficiente b será o quociente $\dfrac{f(1)}{a}$, ou seja, $b = \dfrac{8}{\frac{1}{2}} = 16$. Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = 16(\dfrac{1}{2})^x$

Uma outra maneira de encontrar os coeficientes a e b da função e sua lei de formação seria encontrar o termo geral da PG (8,4,2,1,...).

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$a_n = 8.(\frac{1}{2})^{n-1}$$
$$a_n = 16(\frac{1}{2})^n$$

4.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$				

As imagens da função formam uma PG de razão $\frac{1}{3}$ logo, o coeficiente a da função será $\frac{1}{3}$ e o coeficiente b será o quociente $\dfrac{f(1)}{a}$, ou seja, $b = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$. Portanto, a lei de formação da função é $f(x) = \dfrac{3}{2}.(\dfrac{1}{3})^x$.

Uma outra maneira de encontrar os coeficientes a e b da função e sua lei de formação seria encontrar o termo geral da PG $(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, ...)$.

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$
$$a_n = \frac{1}{2}.(\frac{1}{3})^{n-1}$$
$$a_n = \frac{3}{2}(\frac{1}{3})^n$$

Atividade 6

Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ com $x \in mathbbr$ e $f(x) \in \mathbb{R}^+$ representadas nas tabelas abaixo.

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	4	8	16	32	...	...	...

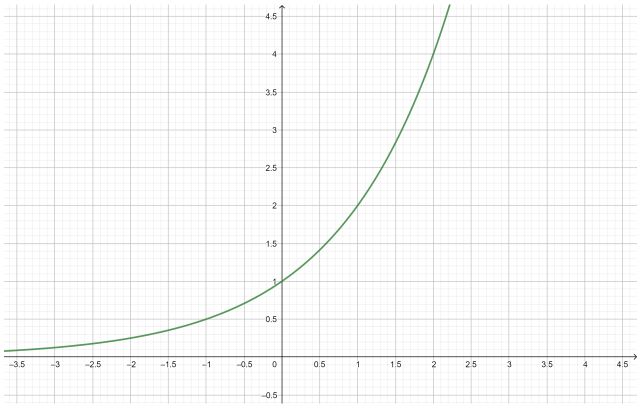

Figura 20 – Gráfico de $f(x) = 2^x$

b)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2	6	18	54	162	...	...	...

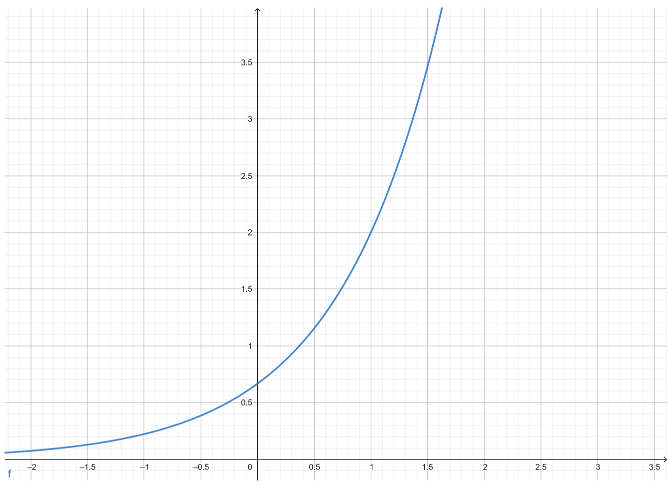

Figura 21 – Gráfico de $f(x) = 2.3^x$

c)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

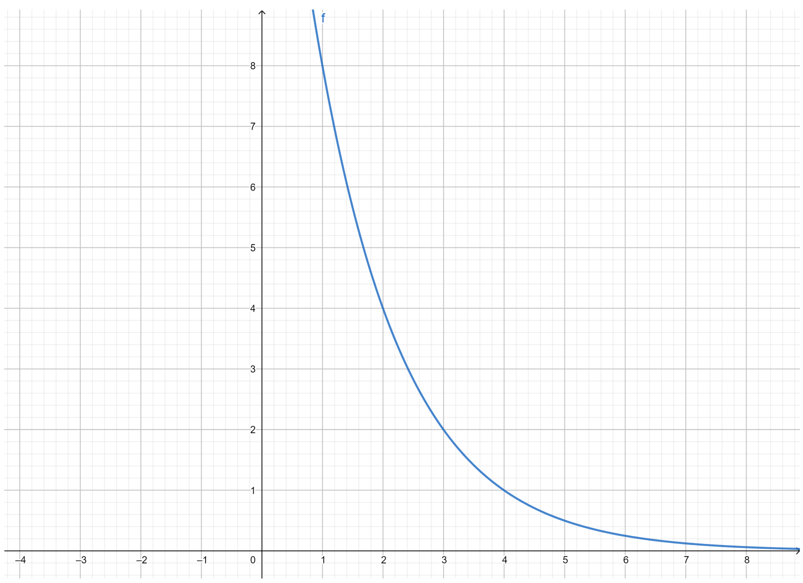

Figura 22 – Gráfico de $f(x) = 16.(\frac{1}{2})^x$

d)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{54}$				

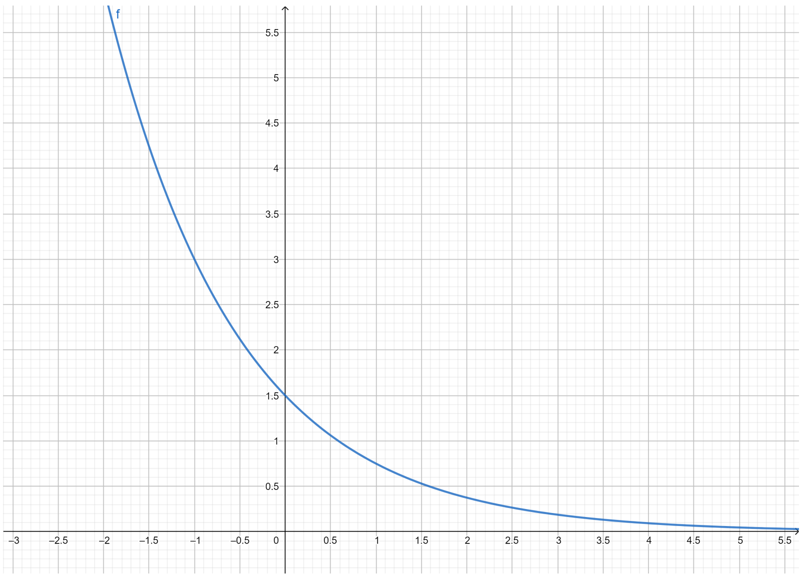

Figura 23 – Gráfico de $f(x) = \frac{3}{2}.(\frac{1}{2})^x$

Atividade 7

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função definida por $f(x) = 3.2^x$. Calcule:

a) $f(0)$

b) $f(2)$

c) $f(-2)$

d) $2.f(3) + 3.f(2)$

2. A quantidade Q de bactérias de uma cultura, em função do tempo t, medido em horas, é dado por $Q(t) = 500.(2)^{\frac{t}{6}}$. Determine:

a) a população inicial de bactérias dessa cultura;

b) a quantidade bactérias dessa população após 12 horas;

c) a quantidade de horas necessária para que a população de bactérias seja de 160000 unidades.

Resolução:

a) $Q(0) = 500$.

b)$Q(12) = 500.(2)^{\frac{12}{6}}$

$Q(12) = 500.(2)^2$

$Q(12) = 500.4 = 2000$

c)$16000 = 500.(2)^{\frac{t}{6}}$

$32 = (2)^{\frac{t}{6}}$

$2^5 = (2)^{\frac{t}{6}}$

$5 = \frac{t}{6}$

$t = 30$ horas

3. Em uma aplicação bancária a juros compostos, um cliente recebe ao final do período de aplicação o capital investido juntamente com os juros obtidos por esse investimento. Esse valor é chamado de montante e utilizamos a equação $M = C.(1 + i)^t$ para calcular esse valor. Considere que o cliente investiu R$1000,00 (mil reais) durante 6 meses a uma taxa de 2% ao mês. Qual o montante que o cliente deverá receber ao final dessa aplicação?

Resolução:
$M = C.(1+i)^t$
$M = 1000.(1+0,02)^6$
$M = 1000.1,1261$
$M = 1.216,10$

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função do tipo $f(x) = ba^x$, com $f(1) = 10$ e $f(4) = 80$. Determine os coeficientes a e b dessa função.

Resolução: As imagens de f, quando aplicadas nos números naturais, devem formar uma PG, já que se trata de uma função do tipo exponencial. Assim, temos que:
$a_4 = a_1.q^{4-1}$
$80 = 10.q^3$
$8 = q^3$
$q = 2.$

Logo, o coeficiente a da função é igual a 2 e o coeficiente b da função será $\frac{f(1)}{a} = \frac{10}{2} = 5$
Portanto, $f(x) = 5.2^x$.

Considerações Finais

Durante o desenvolvimento deste, procuramos mostrar a importância das progressões numéricas para a compreensão e o entendimento dos alunos durante o estudo das funções elementares, mostrando a importância da relação de dependência entre identificar e associar progressões numéricas a funções elementares, objetivando a transposição da linguagem aritmética para algébrica. Para isso, elaboramos duas Sequências Didáticas: uma trabalhando a função afim através da progressão aritmética e uma outra trabalhando a função exponencial através da progressão geométrica. O professor que tiver interesse poderá replicar na integra ou parcialmente essas SD de acordo com suas nescessidades em suas aulas pois, as mesmas foram construídas utilizando uma linguagem bastante clara, sendo compostas por momentos nos quais encontramos uma série de atividades que permitirá ao aluno relacionar uma tabela numérica ou um gráfico através de seu padrão com a função afim e com a função exponencial após a conclusão da SD.

Na construção desse trabalho utilizamos o software o GeoGebra como suporte para construção dos gráficos presente no texto base desse trabalho e os gráficos das atividades presentes nas sequências didáticas. Alem do GeoGebra, as planilhas eletônicas como o Excel poderiam ser exploradas através de atividades que proporcionassem uma melhor compreensão do pensamento aritmético associado ao algébrico. Hoje, não podemos privar o discente do uso das Tecnológias de Informação e Comunicação no ambiennte escolar, pois, a sociedade passa por uma grande transformação tecnológica e não podemos remar na contra mão dessa revolução. Apesar da dificuldade encontrada por nós professores com a falta de recursos tecnológicos em nossas escolas, não podemos abrir mãos dessas ferramentas. Hoje, o proceso de ensino-aprendizagem exige cada vez mais que o aluno saia da passividade que lhe era imposta há alguns anos atrás para uma ação de protagonismo na construção do seu próprio saber.

O capítulo 3 referente ao estudo da função quadrática não foi construída uma sequência didática pelo fato da progressão aritmética de segunda ordem não ser trabalhada no primeiro ano do ensino médio. O professor que tiver interesse em desenvolver tal sequência poderá seguir o mesmo modelo das sequências deseenvolvidas no capítulos 2 e 4 deste trabalho.

Essas SD não puderam ser aplicadas nas salas de aula por conta do isolamento social ao qual estamos submetidos por conta da pandemia do covid-19. Porém, já vinha trabalhando informalmente em minhas aulas esse modelo de sequência e pode observar que os alunos tiveram um melhor desempenho na resolução de problemas que envolviam a transposição da linguagem aritmética para a algébrica e da algébrica para a aritmética e no reconhecimento das funções afim e exponencial a partir da análise do comportamento das sequências que formavam o conjunto domínio e o conjunto imagem dessas funções.

Com a implantação da BNCC, em algumas escolas, houve uma redução na carga horária da disciplina de Matemática. Essa mudança obriga os professores a repenssarem em currículo mais condensado e ao mesmo tempo precisa garantir que as habilidades e competências relacionadas ao ensino da matemática sejam desenvolvidas no decorrer deste percurso. Uma maneira de não retirar alguns conteúdos da grade curricular por conta da redução de sua carga horária é trabalhar de forma conjunta alguns conteúdos como proponho nesse trabalho o estudo das funções elementares através das progressões numéricas.

Chegamos ao final deste trabalho com a sensação de dever cumprido por ter escrito esse material utiizando conhecimentos adquiridos com o PROFMAT. Material esse, que espero que possa ser utilizado pelos meus colegas professores que trabalham com essa disciplina possiblitando-os a darem um tratamento diferente ao dos livros didáticos que são utilizados normalmente em nossas escolas referente ao estudo das funções elementares e das progressões numéricas. Ao longo desses 20 anos como professor de matemática dos anos finais da Educação Básica sempre trabalhei com autores que abordam o estudo das funções elementares sem referenciar suas caracterizções via progressões numéricas. O que vimos normalmente nos livros didáticos, são os autores relacionando as progressões aritmétcas e geométricas com as funções afim e exponencial porém, durante o estudo dessas funções nos capítulos específicos em que elas são abordadas não ncontramos suas caracterizãoes. Esse, foi o motivo peo qual resolvir escrever esse trabalho para que os professores tivessem um tratamento diferente do que vem sendo apresentado normamlmente pelos materiais didáticos que trabalhamos em nossas escolas. Esperamos que este trabalho possa servir a este propósito.

Referências

ARAÚJO,D.L.de.**O que é (e como faz) sequência didática?**Fortaleza:Entrepalavras, v. 3, n.1, p. 322-334, jan/jul.2013. Disponível em:< http://ead.bauru.sp.gov.br/efront/www/content/lessons/46/texto>, acesso em 10/03/2020.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo:Edgar Blucher, 2010.

Brasil.**Ministério da Educação, Secretaria do Ensino Fundamental.Matemática**. 1º e 2º ciclos.Brasília:MEC/Semtec,1997.

Brasil:**Orientações curriculares para o Ensino Médio**.Brasília:MEC/Semtec,2006.135p

CABRAL,N.F.**Sequências didáticas**:estrutura e elaboração.Belém:SBEM/SBEM-PA,2017.

DOLZ,J.; NOVERRAZ,M.;SCHNEUWLY,B.Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento.In:SCHNEUWLY,B.;DOLZ,J.(Orgs.). **Gêneros orais e escritos na escola**.Campinas: Mercado das Letras,2004.

DOLZ,J.;SCHNEUWLY,B.Gêneros e progressão em expressão oral e escrita.Elementos para reflexões sobre uma experiência suíça (francófona).In:SCHNEUWLY,B;DOLZ,J.(orgs.).**Gêneros Orais e escritos na escola**.Campinas:Mercado das Letras,2004.

Lima,E.L.**Logaritmos**.Rio de Janeiro:SBM 2010.

Lima,E.L;Carvalho,C.P.P; Wagner,E; Morgado,A.C.**A Matemática do Ensino Médio**.Rio de Janeiro:SBM,v.1,2006.

Lima,E.L;Carvalho,C.P.P; Wagner,E; Morgado,A.C.**A Matemática do Ensino Médio**.Rio de Janeiro:SBM,v.2,2006.

Helmeister,A.C.P;Peixoto,C.M.**Coleção explorando o ensino**.Brasília:MEC/SEB,v.3,2004.

BRASIL.**Base nacional comum curricular**.Brasília:MEC,2019.Disponível em:<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/imagens/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. em: 15 fev.2020.