CÁSSIO LIMA VARGAS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

10 de julho de 2020

CÁSSIO LIMA VARGAS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof. Dr. Luiz Henrique Zeferino

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
10 de julho de 2020

FICHA CATALOGRÁFICA
UENF - Bibliotecas
Elaborada com os dados fornecidos pelo autor.

V297 Vargas, Cássio Lima.

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO / Cássio Lima Vargas. - Campos dos Goytacazes, RJ, 2020.

92 f. : il.
Bibliografia: 84 - 87.

Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2020.
Orientador: Luiz Henrique Zeferino.

1. Ensino. 2. Matemática. 3. Metodologia. 4. Razão e proporção. 5. Resolução de problemas. I. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. II. Título.

CDD - 510

CÁSSIO LIMA VARGAS

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 10 de julho de 2020.

Profª. Silvia Cristina Freitas Batista
D.Sc. IF Fluminense campus Campos - Centro

Profª. Elba Orocia Bravo Asenjo
D.Sc. UENF

Prof. Nelson Machado Barbosa
D.Sc. UENF

Prof. Oscar Alfredo Paz La Torre
D.Sc. UENF

Prof. Dr. Luiz Henrique Zeferino
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Anadir e Lucília, e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Agradecimentos

Agradeço primeiro aos meus pais pelo constante apoio durante todo o processo do mestrado e pela presença nos momentos mais difíceis dessa trajetória.

A minha tia Rosa, pelo seu apoio e incentivo, e até mesmo apoio financeiro para ajudar a custear algumas viagens e livros.

Aos meus amigos e colegas de trabalho, pelo apoio e pelos momentos de descontração que me ajudaram em momentos de estresse.

A então diretora da Escola Pedro Simão, Viviane Ávila, por ter autorizado a realização da pesquisa.

A todos os professores, Rigoberto, Geraldo, Oscar, Zeferino, Elba, pela sua dedicação na transmissão dos conteúdos e, em especial, ao professor Ausberto pela constante ajuda com o LaTex.

A todos meus colegas de classe, na troca de conhecimento, explicação de conteúdos que muitas das vezes eu não havia dominado, e principalmente ao meu companheiro de viagens, William, que fez esse longo trajeto comigo durante os dois anos em que cursamos as disciplinas e também ao meu colega Flávio por ter me socorrido quando meu carro precisou de reparos.

Enfim, agradeço a todos que de certa forma contribuíram para realização deste trabalho e estiveram comigo durante tona minha jornada até este momento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Matemática não é sobre calcular. É sobre compreender as operações da natureza em sua totalidade.”

(Neil deGrasse Tyson)

Resumo

A Matemática é uma ciência que, enquanto componente curricular, carrega consigo o estigma de difícil e, este fato não muda quando se trata do conteúdo de Razão e Proporção. Parte deste estigma se concretiza diante do alto índice de retenção nesta disciplina e dos baixos resultados obtidos pelos alunos em avaliações realizadas por órgãos nacionais e internacionais. Através dessas avaliações é possível observar que alunos do ensino fundamental apresentam uma grande dificuldade no conteúdo de Razão e Proporção, não concretizando o aprendizado de seus conceitos e propriedades. Desta forma, buscou-se conhecer a forma como esta disciplina é atualmente trabalhada em sala de aula, além de buscar por ferramentas que possam auxiliar o professor no ensino desta disciplina, tornando este processo de aprendizado mais prazeroso e significativo para o aluno. Neste contexto, a metodologia da Resolução de Problemas apresenta-se como uma ferramenta auxiliar no ensino da Matemática, sendo objetivo deste trabalho propor um guia de orientações, que será o produto educacional a ser gerado, aplicar esta metodologia para introduzir o conteúdo de Razão e Proporção e descrever seu impacto no aprendizado dos alunos. Esta pesquisa partiu de um experimento realizado com 55 alunos do sétimo ano do ensino fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Prof. Pedro Simão”, localizada no município de Alegre, estado do Espírito Santo. Foi realizada uma pesquisa qualitativa, buscando descrever todo processo do experimento e o impacto do uso desta metodologia no aprendizado do conteúdo proposto. Observou-se, durante o experimento, um maior empenho por parte dos alunos na realização das atividades propostas, tal como um crescimento no aprendizado e na forma de encarar e resolver problemas propostos. Desta forma, a experimentação baseada na metodologia foi bem sucedida, não só na introdução do conteúdo, mas na concretização de seu aprendizado, além de tornar o aluno apto a resolver problemas de diferentes naturezas.

Palavras-chaves: Ensino. Matemática. Metodologia. Razão e proporção. Resolução de problemas.

Abstract

Mathematics carries the stigma of difficult and this fact does not change when it comes to the subject Ratio and Proportion. Part of this stigma is realized due to the high retention rate in this subject and the low results obtained by students in assessments carried out by national and international bodies. Through these evaluations it is possible to observe that elementary school students have a great difficulty in the content of Ratio and Proportion, not realizing the learning of their concepts and properties. In this way, we sought to know how this subject is currently worked in the classroom, in addition to looking for tools that can assist the teacher in teaching this subject, making this learning process more enjoyable and meaningful for the student. In this context, the Problem Solving methodology is presented as an auxiliary tool in the teaching of Mathematics, being the objective of this article to propose a guidance of orientation, that will be the educational product to be generated, apply this methodology to introduce the subject of Ratio and Proportion and describe its impact on student learning. This research started from an experiment carried out with 55 students of the seventh grade of elementary school at the State School of Elementary and High School “Prof. Pedro Simão”, located in the municipality of Alegre, Espírito Santo State. A qualitative research was carried out, seeking to describe the whole experiment process and the impact of using this methodology on learning the proposed content. It was observed, during the experiment, a greater commitment on the part of the students in carrying out the proposed activities, as well as a growth in learning and in the way of facing and solving proposed problems. In this way, the based on experimentation methodology was a well succeed, not only in the introduction of content, but in the realization of its learning, in addition to making the student able to solve problems of different natures.

Key-words: Teaching. Mathematics. Methodology. Ratio and Proportion. Problem Solving.

Lista de ilustrações

Lista de abreviaturas e siglas

SAEB	Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
NCTM	Conselho Nacional dos Professores de Matemática
Ex.	Exemplo

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A Matemática é uma importante ciência desenvolvida pela humanidade que está, seja de forma implícita ou explicita, presente no cotidiano. Esta ciência é muito importante, pois auxilia na compreensão do mundo, na construção de novas tecnologias, no aperfeiçoamento das tecnologias existentes, entre muitas outras coisas. Desde o conceito mais básico como contar, até os cálculos mais complexos, as propriedades e teoremas desenvolvidos dentro desta ciência tem um papel fundamental no desenvolvimento da sociedade atual. Portanto, mesmo que considerado um conceito básico, o conteúdo de Razão e Proporção tem um importante papel dentro da Matemática e muitas aplicações no cotidiano, tendo aplicações que vão desde o ato de cozinhar até aplicações médicas.

Faz-se notório, cada vez mais, o fato de que a Matemática é uma ciência indispensável dentro das atividades desenvolvidas pelo ser humano, porém, o ensino dessa disciplina nas escolas apresenta um grande índice de baixo desempenho e baixo aprendizado por parte dos alunos. É perceptível que muitos alunos, mesmo aqueles que se encontram nas séries mais avançadas, ainda encontram dificuldades com conteúdos tidos como básicos da disciplina (SANTOS; PLÁCIDO; BARRETO, 2018).

Porém, mesmo com tamanha importância, existe na população em geral, a ideia de que a Matemática, enquanto componente curricular, é uma disciplina de difícil compreensão para maioria dos estudantes, os alunos que se destacam nessa disciplina são considerados muito inteligentes. Além desse fato, existe também o consenso entre os profissionais de ensino básico que há uma grande dificuldade, por parte dos discentes, em aprender os conceitos desta disciplina. Tais colocações se devem a diversos fatores que são frequentemente discutidos no meio acadêmico, como discutido nos parágrafos a seguir.

Segundo Pacheco e Andreis (2018), já há muito tempo que existe uma constatação de descontentamento em relação à aprendizagem da Matemática por parte dos alunos e dos professores, além disso, ainda segundo as autoras, tal situação já foi identificada por órgãos competentes, órgãos estes que são responsáveis por avaliações nacionais e internacionais, como por exemplo, o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

(SAEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (em inglês: Programme for International Student Assessment - PISA).

Segundo Sanchez (2004), existem diferentes aspectos nos quais as dificuldades em Matemática podem se manifestar, entre eles estão a dificuldade na conquista de noções básicas quanto a mecânica ou quanto a compreensão das operações, dificuldades na resolução de problemas, dificuldades emocionais em relação a Matemática que muitas vezes fazem com que o aluno tenha uma experiência ruim com a disciplina. Faz-se importante ressaltar que nem toda dificuldade em Matemática possui uma origem na própria Matemática, podendo esta dificuldade ser oriunda de uma má leitura ou interpretação textual, entre outros.

Ao analisar tais colocações, Lima (2015) afirma que são variadas as formas como as dificuldades em Matemática se apresentam, dessa forma é necessário que os profissionais da área de educação, principalmente os professores de Matemática, analisem o desempenho dos seus alunos e proponham métodos e práticas que venham possibilitar aos estudantes vencer tais dificuldades, fazendo com que eles possam desenvolver um aprendizado satisfatório.

Entendendo a importância dos conceitos de Razão e Proporção dentro da Matemática e, em especial, as suas aplicações práticas no cotidiano e, diante das adversidades encontradas no processo de ensino aprendizagem da disciplina, buscaram-se ferramentas, das mais variadas, que possam auxiliar o professor no processo de ensino aprendizado dessa ciência.

A busca por essas ferramentas se inicia através do levantamento de um problema a ser investigado, portanto, têm-se no tópico seguinte, a apresentação do problema de investigação. Na sequência, nos demais tópicos, são apresentados os objetivos do trabalho, a justificativa, a metodologia e, por fim, uma descrição da estrutura do trabalho.

1.1 Problema da Investigação

Em muitos momentos os professores de ensino fundamental e médio são questionados por seus alunos sobre as aplicações e usos práticos dos conteúdos que estão estudando, isto não é diferente quando se trata de Razão e Proporção. Estes questionamentos surgem, muitas das vezes, devido ao excesso de aulas mecânicas e repetitivas, focadas unicamente nos conceitos matemáticos.

> Uma das dificuldades encontradas pelo professor do ensino fundamental para o ensino desse e de outros conteúdos matemáticos é mostrar aos alunos a relação que há entre teoria e prática. É comum, os alunos perguntarem: “para que serve esse conteúdo?” (MACEDO et al., 2007, p. 2).

Ainda segundo os autores, de acordo com dados obtidos através do SAEB é possível notar que alunos do ensino fundamental possuem muita dificuldade em compreender os conceitos do conteúdo de Razão e Proporção. Para os autores, tais dados transmitem a ideia de que essa dificuldade é de inteira responsabilidade do aluno. Diante deste contexto levantam-se algumas perguntas: Qual parcela de responsabilidade do aluno pela incompreensão desses conceitos? Existem métodos com os quais o professor poderá trabalhar para uma melhor compreensão de razão e proporção? A metodologia de Resolução de Problemas pode ajudar nesse processo?

Partindo do contexto apresentado, buscam-se formas para que os questionamentos levantados sejam esclarecidos. Portanto, a fim de melhor compreender o problema levantado e responder a tais questionamentos, é necessária a construção de um plano com objetivos claros e bem definidos. Dessa forma, tem-se no tópico a seguir a descrição do objetivo deste trabalho, onde foram descritos os objetivos específicos necessários para se alcançar o objetivo principal.

1.2 Objetivos do trabalho

Diante do exposto, este trabalho buscou apresentar a Resolução de Problemas como uma ferramenta no auxilio do ensino do conteúdo de Razão e Proporção, traçando, desta forma, seu objetivo geral e seus objetivos específicos.

1.2.1 Objetivo geral

Têm-se como objetivo geral: investigar o impacto da metodologia de ensino de Resolução de Problemas no processo de aprendizagem do conteúdo de Razão e Proporção.

1.2.2 Objetivos específicos

Na busca por alcançar o objetivo geral constroem-se os objetivos específicos:

1. Realizar uma pesquisa bibliográfica com intuito de descrever o conteúdo de Razão e Proporção, suas propriedades, definições e aplicações, tal como sua importância na história da Matemática e no cotidiano;

2. Buscar referências teóricas a respeito do ensino da Matemática na atualidade, a fim de entender quais as possíveis causas para dificuldades e baixo rendimento apresentado pelos alunos;

3. Apresentar métodos de ensino, que surgem como alternativas ao chamado método tradicional, em busca do aperfeiçoamento e concretização do aprendizado;

4. Apresentar a metodologia de ensino de Resolução de Problemas, bem como descrever as etapas que constituem a sua aplicação e desenvolvimento;

5. Propor um guia de orientações, constituído de um roteiro e orientações, para o planejamento e desenvolvimento do trabalho com Resolução de Problemas na introdução do conteúdo de Razão e Proporção;

6. Realizar uma intervenção através da metodologia de ensino proposta, que neste trabalho será chamada de experimento, durante as aulas de Matemática, utilizando a Resolução de Problemas para introduzir o conteúdo de Razão e Proporção;

7. Observar, analisar e descrever o desenvolvimento dos alunos durante e após a realização do experimento.

O presente trabalho foi conduzido e direcionado através destes objetivos. Ao traçá-los, buscou-se construir uma sequência que leva a uma melhor compreensão do tema proposto. Dessa forma, conhecer o conteúdo e a forma como este é trabalhado em sala de aula permite, através de pesquisas, que se entenda de onde vêm as dificuldades encontradas no processo de ensino-aprendizagem, pois compreender a fonte de um problema é de fundamental importância para que se possa tratá-lo. Ao buscar métodos diversificados, são apresentadas ferramentas, das mais variadas, que podem ser utilizadas em sala de aula a fim de diminuir, ou até mesmo erradicar, a dificuldade em se trabalhar tal conteúdo.

Por fim, apresentar a metodologia de ensino com a qual se pretende trabalhar permite, não só conhecer de forma mais completa esta metodologia, mas também traçar de forma organizada um plano de intervenção baseando-se nela. Além disso, ao realizar a intervenção e descrever os resultados encontrados é possível, de forma concreta, demonstrar o real impacto do uso desta ferramenta em sala de aula. A escolha do conteúdo, bem como da metodologia de ensino a ser aplicada neste trabalho, se justificam conforme descrito no tópico a seguir.

1.3 Justificativa

A realização deste trabalho justifica-se pelo fato de que uma melhor compreensão do uso e da aplicação de Razão e Proporção é de grande importância para se trabalhar a relação entre grandezas e, além disso, é um momento onde os alunos podem ver a aplicação prática de conteúdos estudados anteriormente, como o uso de frações, frações equivalentes, multiplicação e divisão como operações inversas, cálculo algébrico, entre outros. Porém, em muitas das vezes, este conteúdo é trabalhado de forma superficial e sem contexto. Dessa forma os alunos passam a ver tal área da Matemática como só mais um tópico que eles tem que “decorar como se faz” para alcançar boas notas na prova.

Porém, mesmo sendo um conteúdo importante e com muitas aplicações, existe nos alunos uma dificuldade em relação ao conteúdo de Razão e Proporção. Conforme relata Batista (2018), dados obtidos através do SAEB indicam uma falta de compreensão dos conceitos relacionados a este conteúdo por parte dos estudantes do ensino básico. A autora afirma ainda que, esta dificuldade em lidar com o conteúdo de Razão e Proporção pode ser percebida ao analisar dados de instrumentos de avaliação do aprendizado, como o publicado na Revista de Matemática do Sispae [1] de 2014, onde dados indicavam um índice de apenas 35,6% de acerto nas questões que tratavam deste conteúdo.

Segundo afirmam Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008), o estudo de Razão e Proporção é de fundamental importância para o desenvolvimento da vida escolar dos alunos dentro do processo de aprendizagem de Matemática, tanto nas séries finais do ensino fundamental como no ensino médio. Os autores afirmam ainda que, os tópicos que abordam o conteúdo de Razão e Proporção devem ser postos na parte central do currículo a ser trabalhado nas escolas.

Neste sentido, é primordial a busca por uma metodologia que torne mais interessante e atraente o estudo deste conteúdo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) existem frequentes discussões, no que se trata da Educação Matemática, ocorrendo no Brasil e em diversos outros países. Essas discussões estão voltadas a uma crescente necessidade de adaptar o trabalho realizado nas escolas a realidade do presente, realidade esta que se faz pela presença da Matemática em diversas áreas da atividade humana (BRASIL, 1998).

Uma importante indicação de metodologia feita pelos PCN é o uso da metodologia da Resolução de Problemas como ferramenta para se iniciar novos conteúdos de Matemática. Os PCN afirmam ainda que, após o Conselho Nacional dos Professores de Matemática[2] (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) de 1980, onde houve um grande destaque para a resolução de problemas, houve reformas no sistema de ensino de Matemática em todo o mundo (BRASIL, 1998).

Entre os pontos levantados por estas reformas se destacava a "ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas" (BRASIL, 1998, p. 20).

As colocações presentes nesta seção reforçam a importância do conteúdo de Razão e Proporção no estudo de Matemática e mostram o papel de destaque dado pelos PCN a metodologia de Resolução de Problemas. Portanto, estes argumentos justificam, não só o conteúdo, mas também a metodologia de ensino escolhida como tema deste trabalho, e a elaboração do guia de orientações para professores, que será o produto educacional desta pesquisa.

[1] SISPAE - Sistema Paraense de Avaliação Educacional

[2] Sediada em Reston, no estado norte-americano da Virgínia. Trata-se da maior organização de ensino de Matemática do mundo, sua fundação é datada de 1920.

1.4 Metodologia utilizada

Para se alcançar os objetivos propostos por este trabalho foi traçado um plano de ação, baseado em diferentes metodologias, cada qual pertinente a uma determinada etapa. Dessa forma, buscaram-se metodologias que tornassem sólidos os conceitos apresentados e os resultados obtidos.

- O trabalho iniciou-se a partir de uma pesquisa exploratória a fim de construir uma maior familiaridade com o tema proposto, principalmente com a metodologia de ensino da Resolução de Problemas. Além disso, este levantamento inicial permitiu listar as principais referências sobre os assuntos tratados neste trabalho;
- Realizou-se uma pesquisa bibliográfica tendo como principais fontes: artigos científicos, livros, dissertações, etc. O objetivo deste levantamento teórico foi obter, através do trabalho realizado por outros pesquisadores, um embasamento científico sobre o tema deste trabalho;
- Criou-se um experimento com base nas informações obtidas após a pesquisa bibliográfica. Desta forma foi possível construir ferramentas para, através da pesquisa experimental, observar e descrever a relação entre o trabalho com a Resolução de Problemas como método de ensino do conteúdo de Razão e Proporção e a construção de conhecimento por parte dos alunos;
- Por fim, realizou-se uma pesquisa qualitativa, a fim de analisar os dados obtidos durante as observações feitas enquanto o experimento era realizado, assim como descrever e dar significado aos fatos que ocorreram durante esse processo, tal como construir as considerações sobre o mesmo.

Ao se realizar uma pesquisa exploratória é possível fazer um levantamento inicial e conhecer a viabilidade de se trabalhar o tema escolhido. É neste ponto do trabalho que se obtém um conhecimento empírico do assunto. Porém, ao se realizar uma pesquisa bibliográfica em artigos, livros e demais trabalhos, é possível transformar esse conhecimento empírico em um conhecimento científico. Dessa forma aprofunda-se, de forma concreta e embasada cientificamente, no tema proposto, viabilizando a criação da intervenção (experimento) a ser realizada. Ao realizar e descrever os resultados do experimento é possível, de forma prática, mostrar o impacto do uso da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática.

Para melhor apresentar a forma como se deu o desenvolvimento da aplicação desta metodologia, o trabalho foi estruturado em capítulos conforme descreve o tópico a seguir.

1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos, além desta introdução, da seguinte maneira:

No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão bibliográfica buscando descrever o conteúdo de Razão e Proporção, sua importância na vida cotidiana e suas aplicações. Além de ressaltar a importância e a história de algumas razões matemáticas, bem como aplicações e métodos de resolver problemas envolvendo proporções.

No Capítulo 3, faz-se uma revisão bibliográfica abordando o ensino da Matemática nas escolas, fazendo uma reflexão sobre o método tradicional de ensino e as propostas dos PCN (BRASIL, 1998). Há neste capítulo também sugestões de métodos de ensino da Matemática que buscam melhorar o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o mais atraente para o aluno e fazendo com que este tenha um real aprendizado.

No Capítulo 4, apresenta-se a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino que pode vir a auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem. Além disso, é proposto neste capítulo uma forma de se planejar e organizar em etapas o trabalho com esta metodologia.

No Capítulo 5, descreve-se a metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho a fim de realizar o experimento e descrever os resultados obtidos durante a sua realização da melhor forma possível. Ainda neste capítulo é proposto um guia de orientações para professores, apresentado como o produto educacional deste trabalho, bem como é feita a descrição do local e do público para o qual o guia é proposto.

No Capítulo 6, descreve-se todo o processo de aplicação do experimento, como cada etapa foi desenvolvida, a reação dos alunos e as intervenções realizadas pelo professor.

Na parte final, das considerações, serão descritos os desafios encontrados durante a realização desta pesquisa e a aplicação do projeto, tal como os resultados observados e o que pode ser feito em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Razão e Proporção

Ao se trabalhar determinado conteúdo em sala de aula, é importante que o professor conheça bem sua definição, suas propriedades e aplicações, ou seja, é importante que o professor conheça e domine o conteúdo. Desta forma, este capítulo tem o intuito de apresentar o conteúdo de Razão e Proporção dentro da Matemática, bem como suas aplicações. Além de apresentar exemplos com aplicações e métodos de resolução de problemas que envolvam este conteúdo.

Apesar de ser um conteúdo tido como simples por parte dos professores, em muitas das vezes as suas propriedades e definições passam despercebidas, fazendo com que este conteúdo seja trabalhado de maneira superficial e mecânica. Portanto, faz-se necessário um levantamento bibliográfico a fim de abordar as definições que envolvem este conteúdo, além de apresentar ferramentas para resolução de exercícios envolvendo Razão e Proporção.

2.1 Razão

A palavra razão, dentro da língua portuguesa, possui diferentes significados que dependem do contexto no qual está sendo aplicada. Por exemplo, esta pode ser interpretada como um argumento ou motivo para tomada de uma decisão. Porém, este trabalho aborda razão dentro da Matemática, e neste contexto a origem da palavra vem do latim *ratio*, que tem como significado a divisão entre dois números. Uma razão pode ser definida como:

Definição 2.1 (Razão). *É a divisão entre dois números reais, sendo o divisor diferente de zero. Adaptado de Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004).*

Segundo afirma Almeida (2015), existem diferentes formas para se representar uma razão entre dois números a e b, ela pode ser representada por $\frac{a}{b}$, ou $a : b$, ou então a/b, sendo b um número não nulo, tal razão pode ser lida como a para b ou a está para b. Ainda segundo o autor, uma razão é composta por dois termos e, considerando a representação dada, temos que o termo a é chamado de antecedente e b será denominado consequente.

Uma importante observação é a de que as razões podem gerar, na sua forma decimal, números inteiros, decimais finitos, dízimas periódicas ou, até mesmo, números irracionais.

É importante lembrar que, dada uma razão $\frac{a}{b}$, existirá uma razão igual e, caso o antecedente não seja nulo, existirá também uma razão inversa a esta. De acordo com Macedo et al. (2007), tem-se as seguintes definições:

Definição 2.2 (Razões Iguais)**.** *Duas razões são ditas iguais quando seus quocientes forem iguais, ou seja, suas notações fracionárias forem duas frações equivalentes, por exemplo:* $5/2 = 2,5$ *e* $10/4 = 2,5$*, logo* $5/2 \equiv 10/4$*.*

Definição 2.3 (Razões Inversas)**.** *Tem-se que duas razões são ditas inversas quando seu produto é igual a 1, por exemplo:* $2/3 \cdot 3/2 = 1$*, logo* $2/3$ *e* $3/2$ *são ditas inversas. Uma forma comum de se encontrar a inversa de uma razão é inverter as posições entre seu antecedente e seu consequente.*

A compreensão de razão é a base para se trabalhar relação entre grandezas, é portanto, de fundamental importância para um real aprendizado deste conteúdo, conhecer o conceito e definição de grandeza.

Definição 2.4 (Grandeza)**.** *É tudo aquilo que pode ser medido, contado ou pesado. Os valores das grandezas podem aumentar ou diminuir. Adaptado de Almeida (2015).*

São exemplos de grandezas: custo de produção de determinado produto, quantidade de alunos em sala de aula, volume de água em uma garrafa, etc. Em todos esses casos é possível que os valores das grandezas aumentem ou diminuam. Tomando medidas de corte de gastos é possível diminuir o custo de produção de determinado produto ou, caso algum material sofra um aumento no seu preço por exemplo, o custo irá aumentar. Duas grandezas podem se relacionar formando razões entre elas. Observe o exemplo:

Exemplo 2.1. *O professor de uma turma de sétimo ano do ensino fundamental resolveu aplicar uma atividade em dupla para seus alunos. Para tal ele irá disponibilizar uma cópia da atividade para cada dupla. Neste caso dizemos que o número de cópias está para número de alunos assim como 1 está para 2. Daí temos a razão* $\frac{1}{2}$*, ou seja, temos uma cópia da atividade para cada dois alunos.*

No Ex. 2.1 é possível notar como duas grandezas (número de cópias da atividade e número de alunos na sala) se relacionam, formando uma razão. Neste caso, como $1/2 = 0,5$, pode-se dizer que são necessárias 0,5 cópias da atividade por aluno. Tal representação pode gerar um pouco de estranheza, logo, não é viável, neste caso, o uso da representação decimal desta razão. Porém, haverá casos onde tal representação é muito útil, acompanhe:

Exemplo 2.2. *Suponha que em um determinado jornal foi publicada a seguinte notícia: "Um grande número de incêndios atingiu a Floresta Amazônica no ano de 2019, foram cerca de 161 236 focos de incêndio no período de janeiro a outubro deste ano".*

Como a Floresta Amazônica ocupa uma área de aproximadamente 5,5 milhões de km^2*, tem-se que a razão entre o número de focos de incêndio e a área da floresta é de* $\frac{161236}{5500000}$*, o que dá cerca de 29 focos de incêndio para cada mil* km^2 *de área de floresta.*

Observe que no Ex. 2.2 a razão $\frac{161236}{5500000}$ torna difícil a compreensão do fato, já a representação decimal da razão, mesmo que aproximada, torna mais fácil o entendimento da dimensão do fato que se quer trabalhar. Existem diversas situações do cotidiano nos quais é possível fazer aplicações de razão, é importante porém, adequar a sua representação ao contexto no qual está inserida, tornando assim seu entendimento mais fácil e sua utilização mais coerente.

Como visto, as razões possuem uma grande aplicação no cotidiano, são muito importantes para relacionar grandezas e trabalhar com informações. Porém, existem algumas razões matemáticas que podem ser tratadas como especiais, estas são ao mesmo tempo interessantes e importantes dentro da Matemática. Dessa forma, serão apresentadas neste tópico duas destas importantes razões matemáticas: o Número de Ouro ϕ (phi), que se origina da Razão Áurea e o Número π (pi), muito usado no trabalho com circunferências e na trigonometria.

2.1.1 A Razão Áurea e o Número de Ouro

O Número de Ouro, está intimamente ligado a uma sequência numérica, a Sequência de Fibonacci, portanto, inicialmente, esta sequência será apresentada nesta seção. Segundo Santos, Cardoso e Silva (2012), Leonardo de Pisa (Fibonacci) era um famoso matemático da Idade Média, seu nascimento é estimado por volta de 1170 na Itália e sua fama teve início após publicar seu primeiro livro: *Liber Abaci* (que pode ser traduzido para Livro Ábaco). Este livro abordava um grande número de temas e trazia uma grande coleção de problemas, um dos quais ficou muito famoso, o problema que envolvia o crescimento de uma população de coelhos.

O problema proposto por Fibonacci era o seguinte:

> Um homem pôs um casal de coelhos em um lugar cercado por todos os lados por uma cerca. Quantos casais de coelhos podem ser gerados a partir deste casal em um ano se, supostamente, todo mês cada casal dá à luz um novo casal, que é fértil a partir do segundo mês? (SANTOS; CARDOSO; SILVA, 2012, p. 2).

Para que se possa resolver este problema é necessário levar em conta algumas considerações. De acordo com Pereira e Ferreira (2008), tais considerações são:

1. Têm-se apenas um casal no primeiro mês;

2. Um casal de coelhos passa a se reproduzir apenas no segundo mês de vida;

3. O cruzamento consanguíneo não irá gerar problemas genéticos;

4. Cada casal fértil irá gerar um novo casal por mês;

5. Os coelhos do problema proposto não morrem.

Dessa forma, no início do primeiro mês tem-se um casal de coelhos; no segundo mês este casal se tornará fértil, mas ainda não se reproduziram, há ainda um casal de coelhos; no início do terceiro mês serão dois casais de coelhos, o casal inicial e um casal por eles gerado; no quarto mês apenas o primeiro casal irá se reproduzir, tem-se então três casais de coelhos; no quinto mês o primeiro e o segundo casal irão se reproduzir, daí haverá então um total de cinco casais.

Resolvendo então o problema e seguindo o raciocínio encontra-se a Sequência de Fibonacci, cujos primeiros termos são $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...$

Para Santos, Cardoso e Silva (2012), esta sequência não se trata apenas da reprodução de coelhos, ela vai muito além disso. Tal sequência pode ser encontrada em diversos padrões distribuídos pela natureza e que, aparentemente, não possuem nenhuma relação entre si. São pétalas de flores, folhas de uma árvore, a calda de um camaleão, um abacaxi, concha de um caramujo, entre outros, em todos estes elementos da natureza, que aparentemente, não possuem nada em comum é possível observar a Sequência de Fibonacci.

A Sequência de Fibonacci nos leva a uma razão notável, a chamada Razão Áurea. Também chamada de Proporção Divina, esta razão que pode ser observada entre os números da Sequência de Fibonacci nos leva ao fascinante Número de Ouro, uma constante matemática representada pela letra grega ϕ (phi). O número ϕ é um número irracional que possui valor numérico aproximado de $1,618033989...$ (SANTOS; CARDOSO; SILVA, 2012).

De acordo com Almeida (2015), pode-se considerar a Razão Áurea como uma razão perfeita entre dois números, sendo extremamente estética e harmônica. O autor segue afirmando que, apesar da importância e beleza desta razão, a mesma nem sempre é trabalhada durante o ensino regular. Tal razão possui diversas aplicações, como na arquitetura, na arte e na própria natureza, o que seria uma fonte imensa para contextualização de seu estudo.

A Razão Áurea em si é conhecida e estudada muito antes de Fibonacci. Os gregos e os babilônicos já conheciam esta razão e o número ϕ. Conforme afirma Almeida (2015), essa razão era definida pelos gregos como duas medidas que estão em média e extrema razão, ou seja, dado um segmento de reta, este seria dividido em dois segmentos de comprimentos distintos de forma que a razão entre a maior e a menor parte do segmento fosse igual a razão entre o segmento total e a maior das partes.

Dado um segmento de extremidades P e Q, marca-se sobre este segmento um ponto M de forma que o segmento com extremidade em P e M (chamado de a) seja menor que o segmento que vai de M a Q (chamado de b), conforme mostra a Figura 1:

Figura 1 – Razão Áurea (Representação Geométrica)

Fonte: Elaboração própria

A partir da Figura 1, e pela definição dada, tem-se que $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b}$. A partir dessa igualdade de razões se pode encontrar o número ϕ, para isso é preciso encontrar a raiz positiva da equação gerada quando se considera o menor dos segmentos igual a 1. Neste caso, com $a = 1$ tem-se $b^2 - b - 1 = 0$, tal equação admite a raiz positiva $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Daí tem-se que $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989...$

Ao observar a Sequência de Fibonacci, nota-se que existe entre os seus termos um padrão, onde, a partir do terceiro termo, cada um dos termos da sequência pode ser escrito como a soma dos dois termos anteriores a ele. Observe na Figura 2, como essa relação ocorre nos seis primeiros termos da sequência:

Figura 2 – Sequência de Fibonacci (Recorrência)

Posição:	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Soma:	-	-	1 + 1	1 + 2	2 + 3	5 + 3
Termo:	1	1	2	3	5	8

Fonte: Elaboração própria

Pode-se então, considerar que cada termo da sequência é gerado pela recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \forall \ n > 2.$$

A relação entre Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro dar-se-á ao observar a sequência gerada pela razão $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, n > 1$, que, neste trabalho, será chamada de Sequência das Razões, onde a_n é um termo da Sequência de Fibonacci. Os primeiros termos termos obtidos na Sequência das Razões são:

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, ...,$ ou seja, $1,\ 2,\ 1,5,\ 1,666...,\ 1,6,\ 1,625,\ 1,615384...,\ ...$

Pode-se interpretar cada termo da Sequência das Razões como a razão entre um termo a_n da Sequência de Fibonacci e seu antecessor a_{n-1}. Observa-se também que, conforme se avança na Sequência das Razões a sua forma decimal se aproxima do valor de ϕ e, de fato, encontra-se uma aproximação do Número de Ouro no n-ésimo termo da Sequência das Razões, esta aproximação se torna cada vez mais próxima do valor exato conforme o valor de n aumenta. Tal afirmação equivale a dizer que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \phi$. Por não ser objetivo deste trabalho explorar a fundo a Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro (ϕ), não será feita a demonstração desta afirmação, pois o objetivo desta seção foi apresentar esta importante razão matemática.

2.1.2 O Número π

A letra grega π (lê-se: pi) é usada pra representar uma, e talvez a mais famosa delas, constante matemática. Trata-se de um número irracional que, comumente, possui seu valor aproximado para 3,14. O número π, embora lembrado por seu valor aproximado, é uma razão muito importante dentro da Matemática, este número está presente em qualquer circunferência, podendo ser descrito como razão do comprimento de uma circunferência pelo comprimento de seu diâmetro.

Tal como afirma Pommer (2019), existe uma quantidade infinita de números irracionais, tais como o Número de Ouro (citado na subseção anterior), o Número de Euler e tantos outros, porém, o número π é um dos poucos casos que são estudados durante o ensino básico, sendo abordado principalmente ao se trabalhar com circunferências e trigonometria.

Ainda segundo o autor, o uso da letra grega π como símbolo para o número “pi” foi feito pela primeira vez por Welshman Willian Jones, um matemático inglês, em 1706. Esta seria a abreviação de uma palavra grega que significa periferia e era usado para representar o comprimento de uma circunferência de diâmetro igual a uma unidade de medida. Essa notação passou a ser utilizada como padrão após Euler, em 1736, passar a utiliza-la em seus estudos.

Uma das primeiras aparições históricas que fazem referência ao aparecimento do número π está relacionada aos cálculos de Arquimedes, estes cálculos tinham por objetivo encontrar a razão entre o perímetro da circunferência e seu diâmetro. É importante ressaltar que para os gregos a Matemática era voltada a geometria, e diversos problemas que são resolvidos atualmente de forma algébrica eram resolvidos de forma geométrica pelos gregos (PINTO, 2016).

No entanto, Préve (2012) afirma que atenienses já faziam buscas pelo valor de π, antes mesmo de Arquimedes, porém os métodos usados por eles estavam incorretos. Ainda segundo a autora, a principio π era tratado com um número racional, porém, quando a ideia de números irracionais começou a surgir dentro da Matemática, iniciou-se também a suspeita de que o π pudesse ser irracional.

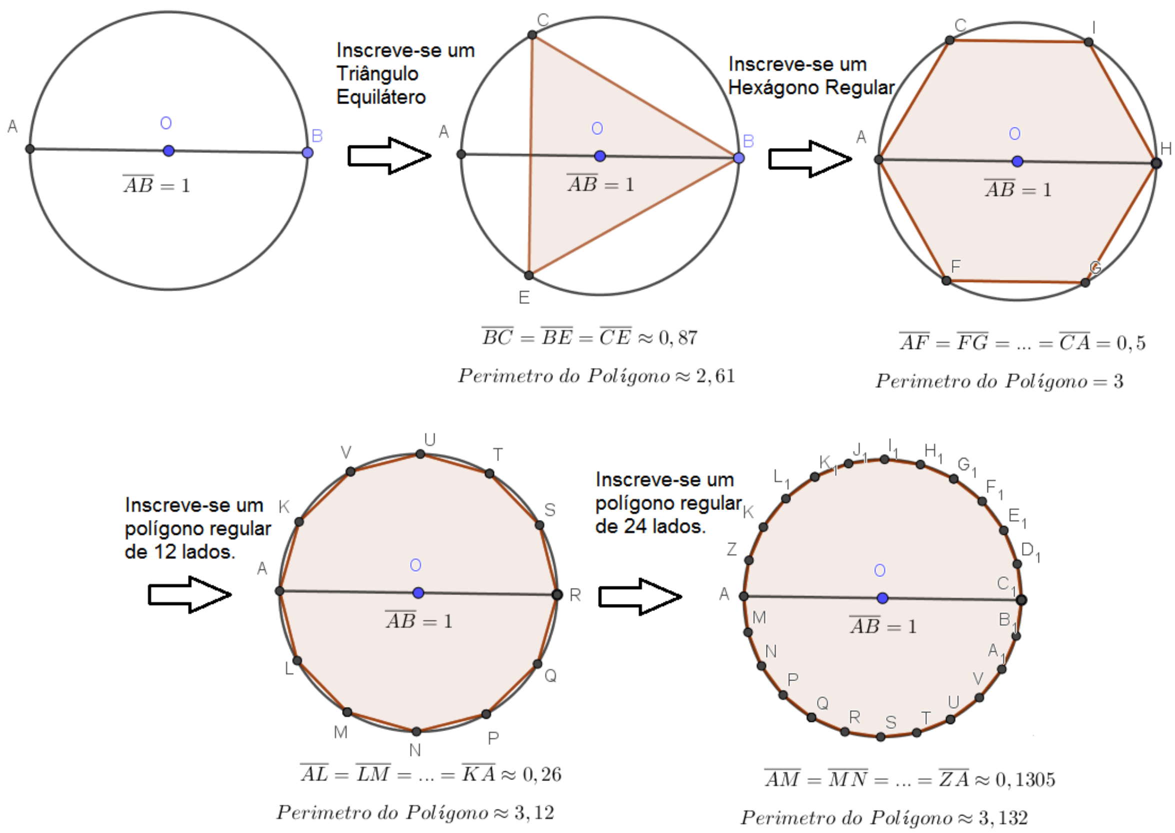
Considerando tais afirmações, tem-se que π é uma constante matemática presente em qualquer circunferência e pode ser descrita como a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, daí:

$$\pi = \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} \Rightarrow \pi \cdot (\text{diâmetro}) = (\text{comprimento da circunferência})$$

Logo, π será o perímetro de uma circunferência de diâmetro 1.

Segundo Pinto (2016), Arquimedes, a fim de calcular a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, recorre a um método até então revolucionário, o da exaustão. Este método consiste em inscrever um triângulo equilátero a circunferência de diâmetro $d = 1$, a partir deste momento dobra-se o número de lados deste polígono, de forma a se obter polígonos regulares ainda inscritos nesta circunferência. Arquimedes realizou este trabalho obtendo polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados. Desta forma, o contorno destes polígonos se aproximam, por dentro, do contorno da circunferência. Veja na Figura 3, a plicação deste método:

Figura 3 – Polígonos Inscritos

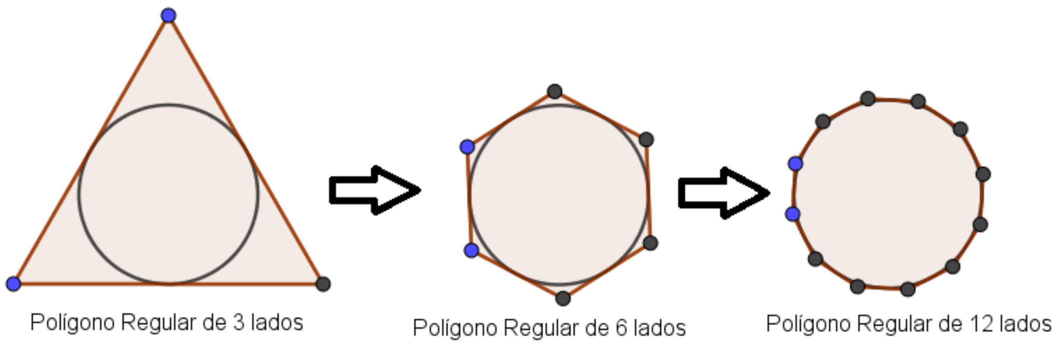


Fonte: Elaboração própria

É possível observar na Figura 3 que, conforme o número de lados do polígono vai aumentando, mais próximo do valor de π encontra-se o seu perímetro. Na escala utilizada nesta figura, ao construir um polígono regular de 24 lados, o polígono se confunde com o próprio círculo. Arquimedes prosseguiu suas construções até obter um polígono regular de 96 lados inscritos a essa circunferência, encontrando um perímetro de $3\frac{10}{71}$, neste momento ele considerou que o comprimento da circunferência seria maior que o perímetro deste polígono, ou seja, seu comprimento seria maior que $3,14084507...$

Arquimedes repetiu esse mesmo processo, usando agora polígonos regulares circunscritos a mesma circunferência. Novamente ele construiu um triângulo equilátero e foi dobrando o número de lados até construir um polígono regular de 96 lados, conforme mostra a Figura 4:

Figura 4 – Polígonos Circunscritos



Fonte: Elaboração própria

Dessa vez é possível observar pela Figura 4 que o contorno dos polígonos irá se aproximar, por fora, do contorno da circunferência cada mais. Ao calcular o perímetro do polígono regular de 96 lados circunscrito à circunferência Arquimedes encontrou o valor de $3\frac{1}{7}$, mostrando assim que o valor de π seria algo entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{1}{7}$. Daí,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

O número π há muito intriga matemáticos e estudiosos de outras áreas científicas, e ainda hoje existem estudos sendo realizados sobre esta constante que há muito foi notada. Desde os estudos de Arquimedes até os tempos de hoje muito se descobriu sobre este intrigante número, atualmente são conhecidas mais de $8 \cdot 10^{15}$ casas decimais de π, usando as 10 primeiras casa decimais podemos escrever $\pi = 3,1415926535...$

2.2 Proporção

O conceito de proporção, em Matemática, está diretamente relacionado ao conceito de razão. Tem-se, de forma resumida, que uma proporção pode ser descrita como a equivalência entre duas razões, ou seja, duas razões equivalentes geram uma proporção. O conceito de proporcionalidade pode ser aplicado em diversos contextos distintos e, este está presente também em vários conteúdos de Matemática trabalhados no ensino fundamental.

Tal como afirma Macedo et al. (2007), compreender os conceitos de proporção serve de base para se compreender diversos outros conceitos como frações equivalentes, porcentagem, velocidade, etc. O autor nos traz ainda que, a palavra proporção vem do latim *proportione*, que significa a existência de uma relação entre duas grandezas, o que pode ser interpretado como uma igualdade de razões.

Segundo Almeida (2015, p. 33),

> Uma proporção é garantida e também estabelecida por duas razões equivalentes. Assim na equivalência $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d}$, temos que os termos a, b, c e d, formam nesta ordem uma proporção. Usualmente representa-se uma proporção com anotação $a : b :: c : d$, lê-se que a está para b, assim como, c está para d. A disposição ordinal dos termos da proporção nesta notação permite classificá-los como extremos, aos termos a e d que ocupam as extremidades da notação, e como meios, aos termos b e c que ocupam o centro da notação.

Analisando tal afirmação, é possível chegar à Propriedade Fundamental das Proporções:

Definição 2.5 (Propriedade Fundamental das Proporções)**.** *Em uma proporção o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, ou seja, na proporção* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *tem-se que* $a \cdot d = b \cdot c$.

Tal propriedade pode ser aplicada para resolver diversos tipos de problemas, nos mais variados contextos. Observe o exemplo:

Exemplo 2.3. *Observando o Ex. 2.1 é possível perceber que este professor deverá fazer 1 cópia da atividade para cada 2 alunos. Supondo que haja nessa turma um total de 26 alunos, quantas cópias serão necessárias?*

Resolução:

Considere x *o número de cópias necessárias.*

Tem-se então duas razões: $\frac{1}{2}$ *que descreve o número de cópias por aluno de maneira geral (simplificada) e* $\frac{x}{26}$ *que representa o número de total de cópias em relação ao número total de alunos desta turma. É importante notar que em ambas as razões as grandezas de mesma natureza seguem a mesma ordem (número de cópias é o antecedente e o número de alunos será o consequente em ambas as razões).*

Para resolver este problema é necessário igualar as razões, encontrando assim a seguinte proporção $\frac{1}{2} = \frac{x}{26}$*, que pode ser interpretada como: "uma cópia está para dois alunos assim como* x *cópias estão para 26 alunos".*

Aplicando a Propriedade Fundamental das Proporções tem-se $1 \cdot 26 = x \cdot 2$*, o que implica* $2x = 26 \Rightarrow x = 13$*.*

Logo serão necessárias 13 cópias da atividade para essa turma.

Existe no Ex. 2.3 um raciocínio implícito de que, conforme o número de alunos aumenta assim também o número de cópias necessárias para aplicar a atividade deve aumentar. Neste caso tem-se que estas grandezas são diretamente proporcionais. Porém, nem sempre as grandezas envolvidas serão diretamente proporcionais, dessa forma se faz necessário portanto, entender os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Definição 2.6 (Proporcionalidade entre Grandezas)**.** *Duas grandezas são ditas grandezas diretamente proporcionais quando a variação em uma delas irá provocar uma variação de mesma razão na outra. Duas grandezas são ditas grandezas inversamente proporcionais quando a variação em uma delas irá provocar uma variação de razão inversa na outra. Adaptado de Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004).*

Analisando a afirmação acima pode-se dizer então que, dadas duas grandezas, estas são chamadas grandezas diretamente proporcionais se, caso uma dobre seu valor a outra dobrar também seu valor, caso uma triplique, a outra irá triplicar seu valor, caso uma delas seja reduzida a metade a outra irá também reduzir a metade, e assim sucessivamente. São exemplos de grandezas diretamente proporcionais: distância percorrida por um automóvel e volume de combustível gasto, área de um muro e quantidade de lajotas para construí-lo, etc.

Dessa forma, tem-se então que, duas grandezas são ditas grandezas inversamente proporcionais se, caso uma dobre seu valor, a outra irá diminuir a metade de seu valor, caso uma delas diminua a quarta parte de seu valor, a outra irá quadruplicar seu valor. São exemplos de grandezas inversamente proporcionais: velocidade de um corpo e o tempo necessário para se percorrer determinada distância, capacidade de ocupação de um veículo e o número de veículos necessários para transportar uma determinada quantidade de pessoas.

Portanto, para que seja possível resolver problemas como o proposto no Ex. 2.3, é necessário avaliar se as grandezas envolvidas são diretamente ou inversamente proporcionais, e posteriormente usar o raciocínio adequado a cada situação. Veja:

Exemplo 2.4. *Um determinado veículo consome, em média, 1 litro de combustível para cada 10 km percorridos. Quantos litros de combustível espera-se que sejam consumidos por este mesmo veículo para percorrer uma distancia de 75 km?*

Resolução:

Considere x a quantidade, em litros, gasta por este veículo para percorrer os 75 km.

Tem-se então duas razões: $\frac{1}{10}$, que descreve o consumo médio do veículo e $\frac{x}{75}$, que representa o total gasto em uma viagem de 75 km.

Deve-se fazer a seguinte pergunta: as grandezas envolvidas neste problema são diretamente ou inversamente proporcionais? A resposta obtida será que estas grandezas são diretamente proporcionais, pois uma vez que a distância aumente o consumo irá aumentar na mesma razão.

Para resolver então este problema monta-se a proporção igualando as razões $\frac{1}{10} = \frac{x}{75}$ e aplica-se a Propriedade Fundamental das Proporções.

Tem-se $1 \cdot 75 = x \cdot 10$, daí $x = 7,5$.

Logo, espera-se que sejam consumidos 7,5 L de combustível para se percorrer 75 km

No problema a seguir, as grandezas se relacionam de forma diferente, observe:

Exemplo 2.5. *Em uma grande fazenda são necessários 3 funcionários e 16 horas de trabalho para se fazer a revisão de todo maquinário. Caso sejam disponibilizados 4 funcionários, com mesmo ritmo de trabalho, quantas horas de trabalho serão necessárias para se realizar a revisão de todo maquinário?*

Resolução:

Considere x a quantidade de horas de trabalho necessárias para que os 4 funcionários realizem a manutenção.

Pergunta-se: as grandezas envolvidas neste problema são diretamente ou inversamente proporcionais? A resposta obtida será inversamente proporcional, pois uma vez que tem-se mais funcionários trabalhando, espera-se que o trabalho seja realizado em um menor tempo.

Como neste exemplo as grandezas são inversamente proporcionais as razões deverão ser montadas exclusivamente com grandezas de mesma natureza e na mesma ordem de valor, ou seja, $\frac{\text{maior número de funcionários}}{\text{menor número de funcionários}}$ e $\frac{\text{maior número de horas}}{\text{menor número de horas}}$.

Para resolver então este problema monta-se a proporção igualando as razões $\frac{4}{3} = \frac{16}{x}$ *e aplica-se a Propriedade Fundamental das Proporções.*

Tem-se $4 \cdot x = 16 \cdot 3$*, daí* $x = 12$.

Logo, 4 funcionários farão a revisão em 12 horas de trabalho.

Como visto em Ex. 2.4 e Ex. 2.5 é necessário uma interpretação correta da natureza das grandezas e suas relações para que se possa resolver o problema de forma coerente. Observa-se destes exemplos uma diferença entre os algoritmos[1] utilizados em cada um deles, e, essa diferença, pode tornar a resolução um pouco complicada. Porém, é possível simplificar a forma de resolução de problemas que envolvam proporções ao fazer uso da conhecida Regra de Três.

2.2.1 Regra de três

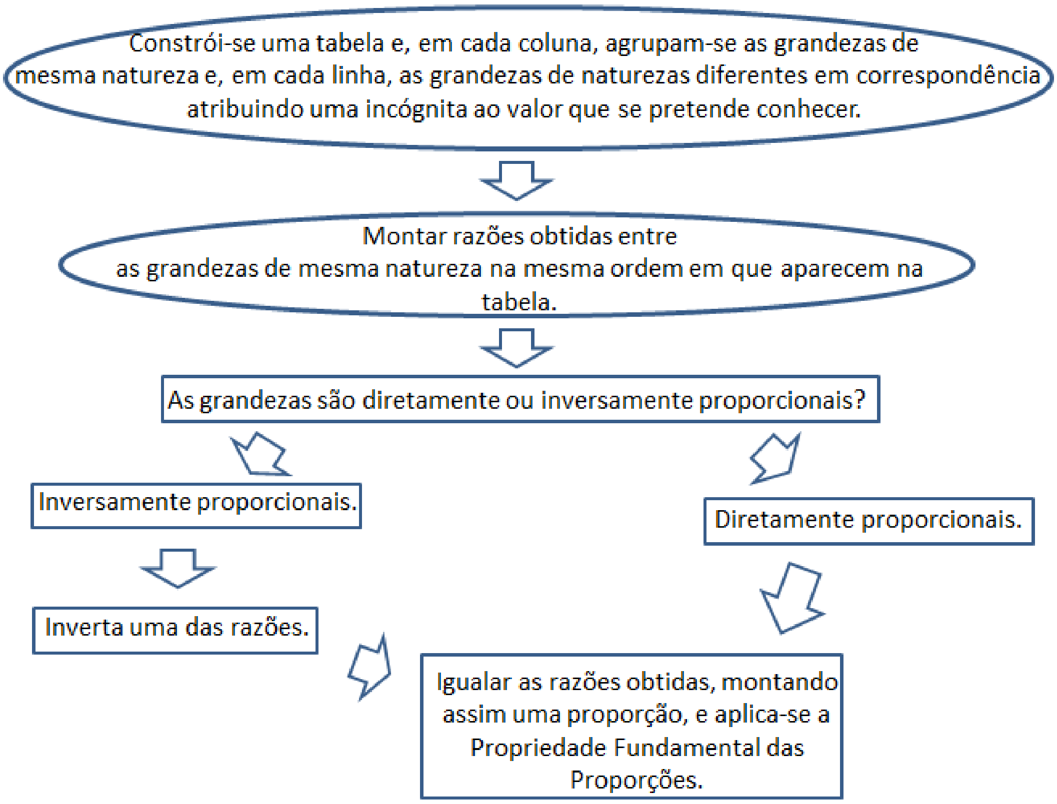
A Regra de Três pode ser descrita como um algoritmo utilizado para resolver problemas de proporcionalidade, tanto os que envolvem grandezas diretamente proporcionais quanto aqueles que envolvam grandezas inversamente proporcionais. Existem dois modelos deste algoritmo, a Regra de Três Simples e a Regra de Três Composta.

2.2.1.1 Regra de Três Simples

A Regra de três Simples é o algoritmo utilizado para resolver problemas que tenham apenas duas grandezas proporcionais e de naturezas distintas. O algoritmo para solucionar este tipo de problema é descrito na Figura 5:

[1] Algoritmo é uma sequência finita de regras, raciocínios ou operações que, aplicada a um número finito de dados, permite solucionar classes semelhantes de problemas.

Figura 5 – Algoritmo da Regra de Três Simples



Fonte: Elaboração própria

Veja a seguir como esse algoritmo é aplicado a resolução de um problema, acompanhe o Ex. 2.6:

Exemplo 2.6. *Para esvaziar um reservatório de água é necessário que uma bomba, com capacidade de bombear 2100 litros de água por minuto, trabalhe por 5 horas. Qual deve ser a vazão da bomba para se esvaziar este reservatório em 3 horas?*

Resolução:

Constrói-se a tabela, conforme ilustra a Figura 6:

Figura 6 – Tabela das Grandezas

Vazão (litros por minuto)	Tempo (em horas)
2 100	5
x	3

Fonte: Elaboração própria

Montando as razões tem-se $\frac{2100}{x}$ e $\frac{5}{3}$. Verificando as grandezas envolvidas é possível afirmar que são grandezas inversamente proporcionais, uma vez que, para diminuir o tempo *gasto para esvaziar o reservatório é necessário aumentar a vazão da bomba. Logo, deve-se então inverter uma das razões antes de montar a proporção. Invertendo a primeira razão tem-se:* $\frac{x}{2100}$

Por fim, monta-se a proporção e aplica-se a Propriedade Fundamental das Proporções.

$$\frac{x}{2100} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3x = 5 \cdot 2100 \Rightarrow x = 3500$$

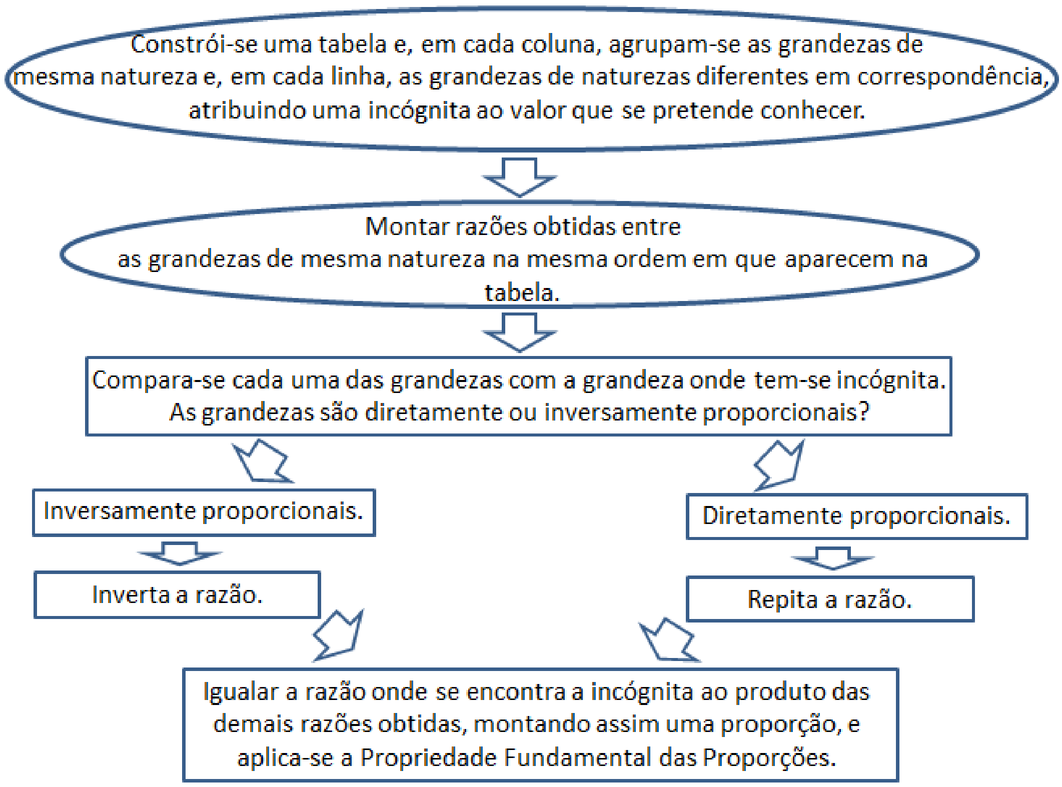
Concluindo que, para esvaziar este reservatório em 3 horas, é necessária uma bomba com vazão de 3500 litros de água por minuto.

Apesar de parecer um processo mecânico, a resolução do problema anterior requer uma boa interpretação do mesmo, além de exigir que o aluno conheça a relação de Proporcionalidade entre Grandezas. Desta forma, é preciso sempre reforçar a importância de ler, interpretar e compreender bem o problema, seus dados e suas incógnitas, antes de começar a resolvê-lo. Sendo assim, é possível evitar que esse processo se torne mecânico e que erros sejam cometidos.

2.2.1.2 Regra de Três Composta

A Regra de três Composta é o algoritmo utilizado para resolver problemas que tenham três ou mais grandezas proporcionais e de naturezas distintas. O algoritmo para solucionar este tipo de problema é descrito na Figura 7:

Figura 7 – Algoritmo da Regra de Três Composta



Fonte: Elaboração própria

Veja a seguir como esse algoritmo é aplicado a resolução de um problema, acompanhe o Ex. 2.7:

Exemplo 2.7. *Quatro pedreiros constroem uma casa de 100 m^2 em 30 dias. Quantos pedreiros, com o mesmo ritmo de trabalho, serão necessários para se construir uma casa com 160 m^2 em 24 dias?*

Resolução:

Constrói-se a tabela, conforme ilustra a Figura 8:

Figura 8 – Organizando as Grandezas

Pedreiros	Área (em m^2)	Tempo (em dias)
4	100	30
x	160	24

Fonte: Elaboração própria

Montando as razões tem-se $\frac{4}{x}$, $\frac{100}{160}$ *e* $\frac{30}{24}$.

Observando a tabela tem-se que a incógnita aparece na coluna referente ao número de pedreiros, comparando com as demais grandezas é possível analisar que: número *de pedreiros e área construída são grandezas diretamente proporcionais e, número de pedreiros e tempo para se construir são grandezas inversamente proporcionais. Portanto a razão referente a área construída se mantêm enquanto a razão referente ao tempo deve ser invertida. Obtém-se as razões:* $\frac{4}{x}$*,* $\frac{100}{160}$ *e* $\frac{24}{30}$*.*

Iguala-se a razão onde se encontra a incógnita ao produto das demais razões obtidas

$$\frac{4}{x} = \frac{100}{160} \cdot \frac{24}{30} \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{2400}{4800}$$

aplica-se a Propriedade Fundamental das Proporções

$$\frac{4}{x} = \frac{2400}{4800} \Rightarrow 19200 = 2400x \Rightarrow x = 8$$

Logo são necessários 8 pedreiros para se construir uma casa de 160m^2 *em 24 dias.*

É possível notar no Ex. 2.7 que pode-se reduzir um problema de Regra de Três Composta a um problema de Regra de Três Simples. Uma das possibilidades seria reduzir as grandezas Área e Tempo em uma única grandeza. Ao dividir a área pelo tempo, teríamos então a área construída por dia, porém, neste caso, essa redução iria gerar uma dízima periódica o que iria dificultar o trabalho. Assim também, como poderíamos reduzir as grandezas Pedreiros e Tempo a uma única grandeza. Porém x pedreiros trabalhando por 24 dias é o equivalente a $24x$ dias de trabalho de um pedreiro, a expressão $24x$ na tabela de resolução da Regra de Três pode causar certa estranheza aos alunos. Portanto, neste caso, julga-se mais viável a aplicação direta da Regra de Três Composta, como foi feito.

2.2.2 Porcentagem

A palavra Porcentagem, vem do latim *per centum* e significa “a cada centena”. Trata-se de uma importante aplicação do conceito de proporção. A porcentagem está presente em diversas situações do cotidiano, como por exemplo: em anuncio de descontos oferecidos em lojas; nos juros a serem cobrados em parcelamentos ou multas por atraso de pagamento; taxas cobradas em empréstimos; notícias veiculadas na televisão ou jornais; rótulos de produtos alimentícios; etc. Tem-se nesses exemplos, e em muitas outras situações cotidianas, a presença dessa importante ferramenta matemática.

Apesar de a porcentagem ser constantemente usada no cotidiano, a sua definição muitas das vezes é ignorada. Portanto é importante ressaltar que:

Definição 2.7 (Porcentagem)**.** *A proporção de uma quantidade ou grandeza em relação a uma outra avaliada sobre a centena é chamada de porcentagem, e é representada pelo símbolo* $\%$*. Adaptado de Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2004).*

Segundo Filippe et al. (2017), foi em Roma, durante o século I a.C. que surgiu o que hoje entende-se como porcentagem. O autor relata ainda que o imperador de Roma nesta época ordenou que fossem cobrados impostos equivalentes a um centésimo por mercadorias vendidas e, embora outros impostos eram cobrados em frações de denominadores diferentes de 100, os cálculos eram realizados fazendo uso de frações centesimais, pois os demais impostos poderiam ser escritos em frações equivalentes de denominador 100. Ainda segundo o autor, foi no século XV, com o aumento de atividades comerciais, que o número 100 como denominador se tornou base para o calculo da porcentagem.

Desta forma, é possível entender a porcentagem como uma razão (fração) de consequente (denominador) 100. Atualmente existem diversas ferramentas para o cálculo de porcentagem, que pode variar de acordo com o contexto do problema. Porém, de modo geral, problemas que envolvem o cálculo de porcentagem podem ser resolvidos fazendo o uso da Regra de Três e, posteriormente, aplicando a Propriedade Fundamental das Proporções, como se pode observar no Ex. 2.8:

Exemplo 2.8. *O avô de Pedro possui um sítio com $2500m^2$ de área. Este sítio tem 30% de sua área ocupada por um lago. Qual é a área ocupada pelo lago?*

Resolução:

Inicialmente considera-se que a área total do sítio é equivalente a 100% da área, e a área x do lago é equivalente a 30% desta área. Com essas informações monta-se a tabela, conforme ilustra a Figura 9:

Figura 9 – Porcentagem com Regra de Três

Área (em m²)	Porcentagem
2 500	100
x	30

Fonte: Elaboração própria

Desta forma tem-se as razões $\frac{2500}{x}$ e $\frac{100}{30}$. Como as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, pode-se então igualar as razões e aplicar a Propriedade Fundamental das Proporções, daí:

$$\frac{2500}{x} = \frac{100}{30} \Rightarrow 2500 \cdot 30 = 100x \Rightarrow x = 750$$

Logo, o lago ocupa uma área de $750m^2$.

Como visto no exemplo anterior, o uso da Regra de Três é pertinente para resolver problemas que envolvam porcentagem. Embora o algoritmo da Regra de Três possa ser adotado como uma regra geral, útil em todos os caos, não se trata da única forma de resolver estes problemas. Logo, conhecer diferentes representações da porcentagem pode auxiliar e, em muitos casos, tornar mais dinâmica e rápida a resolução destes problemas.

Como já mencionado neste trabalho, a porcentagem pode ser descrita a partir de uma fração de denominador 100, em alguns casos esta fração pode ser simplificada, e sempre é possível escrever a representação decimal de tal fração. Sendo assim, podemos representar uma mesma porcentagem de diferentes maneiras, por exemplo:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Conhecer diferentes representações de uma porcentagem pode facilitar a resolução de problemas específicos, como o do Ex. 2.9 a seguir:

Exemplo 2.9. *Em uma turma com 32 alunos, tem-se que 24 deles utilizam transporte público para chegar à escola. Qual a porcentagem de alunos desta turma que utiliza transporte público?*

Resolução:

A razão entre o número de alunos que utilizam o transporte público e o total de alunos desta turma é de $\frac{24}{32}$, logo:

$$\frac{24}{32} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%.$$

Daí, tem-se que 75% dos alunos desta turma utilizam o transporte público.

Os exemplos deste tópico, assim como todos os exemplos deste capítulo, tiveram por objetivo apresentar diferentes formas e métodos para resolução de atividades envolvendo o conteúdo de Razão e Proporção. Além disso, foram apresentados diferentes contextos, reforçando a necessidade de ler e compreender bem os problemas antes de resolvê-los. É preciso também, reforçar a necessidade do professor possuir domínio sobre o conteúdo, pois este terá que fazer a mediação entre as diferentes formas de resolução que seus alunos irão fazer uso.

Capítulo 3

Ensino de Razão e Proporção

Neste capítulo são apresentados aspectos sobre o ensino de Matemática no Brasil e, em especial, do conteúdo de Razão e Proporção. Essa análise traz importantes observações a respeito do chamado Ensino Tradicional da disciplina, levando-as de encontro as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

Segundo os PCN, um dos objetivos do ensino fundamental é tornar o aluno capaz de:

> [...] questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL, 1998, p. 8).

Porém, durante as aulas de Matemática ainda é adotado um sistema de aulas expositivas, e isso ocorre independente da fase escolar na qual o discente se encontra. Para D'Ambrosio (1989), isto ocorre pois o aluno é posto na posição de aprendiz e que, só será possível para ele adquirir conhecimento através de sucessivas repetições do que foi apresentado pelo professor. Cria-se dessa maneira a concepção de que o educando irá aprender Matemática apenas pelo conteúdo transmitido pelo professor.

Tal sistema entra em contradição com o que é proposto pelos PCN, pois inibe a criatividade e a capacidade de análise critica por parte do aluno. Os PCN afirmam ainda que, apesar dos objetivos propostos no documento, existe uma preocupação em excesso com a repetição de processos e algoritmos matemáticos sem que haja uma verdadeira compreensão do conteúdo que está sendo estudado. Tais métodos se refletem no alto índice de retenção que ocorre na disciplina (BRASIL, 1998).

> [...] o estudo da Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias por parte de quem ensina, como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante, de outro, insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com frequência em relação à sua aprendizagem (SANTOS; PLÁCIDO; BARRETO, 2018, p. 94).

Para entender um pouco melhor esse processo de ensino da disciplina, o chamado Ensino Tradicional, bem como os impactos desse método de ensino, traz-se na seção seguinte uma descrição mais profunda dessa metodologia e uma discussão sobre a necessidade pela busca por metodologias diversificadas.

3.1 O Ensino Tradicional da Matemática

O ensino tradicional da Matemática pode ser descrito como um método focado na constante repetição e mecanização de processos, no qual o professor se torna o centro do saber. Dessa forma o aluno passa a aceitar passivamente que a resolução de uma atividade ou a solução de um problema dependa exclusivamente dos procedimentos e métodos passados pelo professor.

Para Nunes, Carraher e Schliemann (2015), é comum que a Matemática seja conceituada pelos alunos como um simples amontoado de conceitos inquestionáveis e estáticos, gerando assim uma falta de preocupação com a forma como esta ciência funciona dentro da realidade. Ainda segundo os autores, existe entre os alunos uma crença de que o seu aprendizado dependa exclusivamente de seguir e aplicar regras que foram transmitidas pelo professor.

Segundo Souza (2009), em muitos casos o não entendimento do conteúdo se torna algo comum para o aluno, pois este passa a se condicionar a não entender o que está sendo transmitido pelo professor e apenas aceita aquelas definições, conceitos e procedimentos como verdades absolutas e inquestionáveis, ao mesmo tempo em que desconhece totalmente suas propriedades. Ainda segundo o autor, o aluno, condicionado dessa forma, acostumado a apenas reproduzir os procedimentos listados pelo professor, acaba por estar mal preparado, mesmo quando obtém sucesso (aprovação) na disciplina.

> É bastante comum o aluno desistir de solucionar um problema matemático, afirmando não ter aprendido como resolver aquele tipo de questão ainda, quando ele não consegue reconhecer qual o algoritmo ou processo de solução apropriado para aquele problema. Falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores (D'AMBROSIO, 1989, p. 15).

Ainda segundo D'Ambrosio (1989), comumente, os alunos acreditam que os conceitos matemáticos foram elaborados por verdadeiros gênios. Nessa supervalorização do poder da Matemática, o aluno deixa de ter qualquer confiança em sua intuição, perdendo, o que se pode chamar de senso matemático. Passa a existir então um pensamento de que a solução de qualquer questão da Matemática jamais estará vinculada a uma solução diante da realidade.

Segundo Silveira, Luz e Laurino (2009), existe um distanciamento entre os conceitos, teorias e conteúdos aprendidos na escola e o cotidiano, e a vivência dos alunos é deixada de lado. Para o autor, tal situação se deve ao fato de que a abordagem da Matemática em sala de aula é feita de uma forma muito longe da realidade, o conteúdo passa por uma abstração que o afasta de situações vivenciadas pelos estudantes, faltam demonstrações relacionadas a cotidiano. Dessa forma os alunos passam a ter dificuldade em aprender o conteúdo, gerando neles uma aversão pela disciplina.

Além da falta de relação com situações reais, outro fator que pode vir a dificultar o aprendizado do aluno é a hierarquização dos conteúdos. Segundo relata D'Ambrosio (1986) o aluno, em muitos momentos, acaba por acreditar que certos conteúdos de Matemática só possuem utilidade para se aprender novos conteúdos nos anos seguintes. Isso, de certa forma, acaba por desmotivar os alunos, pois eles vem a Matemática como uma ferramenta que irão usar somente durante a sua vida escolar.

Ao retratar o processo de ensino de Matemática, os PCN, afirmam que:

> [...] de modo geral observa-se uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-la. É uma organização dominada pela ideia de pré-requisito, cujo único critério é a estrutura lógica da Matemática. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem na forma de uma corrente, cada conteúdo sendo um pré-requisito para o que vai sucedê-lo (BRASIL, 1998, p. 22).

É importante ressaltar que, de fato, alguns conhecimentos precedem outros, e é fundamental que o aluno adquira tais conhecimentos, como por exemplo: não é possível que o aluno aprenda a resolver uma equação quadrática se o mesmo não domina potenciação e radiciação, ou até mesmo as quatro operações básicas. Por outro lado, alguns conteúdos que são tidos como pré-requisitos para outros não apresentam, de forma concreta, uma necessidade tão grande de serem apresentados como tal, como por exemplo: não é preciso apresentar aos alunos os conceitos e definições do conjunto dos números inteiros para ensina-los a trabalhar com números negativos.

Segundo os PCN, é possível observar, quando se trata do ensino de Matemática, que em muitos momentos os conteúdos são trabalhados de forma isolada, sendo levado, de forma rápida, a exaustão destes temas em um único momento. Todavia, nos momentos em que tais conteúdos são trabalhados novamente, os mesmo são apresentados de forma superficial, como se o professor estivesse fazendo uma breve revisão, tratando este conteúdo apenas como uma base (pré-requisito) para o conteúdo que virá a seguir, reforçando ainda mais a ideia exposta anteriormente (BRASIL, 1998).

Apesar de ser uma prática prejudicial aos alunos, podendo causar desinteresse por parte deles, muitos professores, mesmo sem perceber, acabam por reforçar a ideia de que muito do que se aprende em Matemática servirá apenas como base para aquisição de um novo conhecimento futuramente. Para Santos, Plácido e Barreto (2018), o professor deve adequar suas metodologias em sala de aula buscando sempre o desenvolvimento do aluno, ao invés de desmotivá-lo e apresentar uma Matemática abstrata e sem sentido. É necessário que o professor crie no aluno a capacidade de desenvolver habilidades que serão usadas em seu cotidiano, seja na vida pessoal ou profissional.

> O aluno no geral não é convidado a vivenciar o "ver claro" daquilo que está sendo demonstrado. E, em muitos casos, quando o professor propõe uma simplificação do conteúdo, acaba complicando. São muitos os casos em que a falta de tempo para uma reflexão mais demorada soma-se com a estranheza dos significados atribuídos e conduzem a uma total perplexidade que, no entanto, não é jamais explorada, mas sempre tida como um sinônimo de confusão mental e incapacidade para a matemática (SOUZA, 2009, p. 5).

Para Cabral, Dias e Lobato Júnior (2019), não raras as vezes, os professores ministram as suas aulas em torno de três pontos, formando um círculo vicioso onde eles apresentam e definem o conteúdo, resolvem exemplos no quadro negro e por fim aplicam exercícios esperando que os alunos repitam os procedimentos realizados por eles nos exemplos. Desta forma, o professor torna o aprendizado repetitivo e irrelevante para seus alunos.

Diante deste contexto, Santos, Plácido e Barreto (2018) afirmam ainda que, é preciso que o professor tenha uma prática de ensino que estimule em seus alunos a criatividade e a construção do raciocínio próprio. Além disso, cabe ao professor buscar métodos de ensino que fogem ao uso da mecanização de processos para resolução de exercícios ou repetições exaustivas de algoritmos e técnicas.

3.2 Métodos para o ensino de Razão e Proporção

Diante do que foi exposto neste trabalho até este momento, fica evidente que existe ainda uma dificuldade por parte dos alunos em apreender e compreender os conteúdos estudados em Matemática, assim como há também uma dificuldade por parte dos professores em trabalhar tais conteúdos de forma "não tradicional"[1]. Porém, há também uma preocupação em buscar entender o motivo destas dificuldades e uma procura por ferramentas e métodos que possam amenizar tais dificuldades.

Para Macedo et al. (2007), os conceitos do conteúdo de Razão e Proporção podem, por vezes, possuir um alto nível de complexidade para o entendimento dos alunos, ocasionando o baixo nível de aprendizado. Ainda segundo os autores, outra hipótese sobre qual seria o motivo para as dificuldades dos alunos, é que essa repulsão seria oriunda dos métodos de ensino utilizados pelo professor, além disso, a Matemática ensinada na escola

[1] Por tradicional, entende-se o ensino tradicional descrito na seção anterior.

se encontra muito distante daquela que é praticada pelas crianças em seu cotidiano fora da escola.

> [...] a forma como esses conceitos são ensinados na escola, pode-se perceber que, com algumas exceções, o professor de matemática costuma utilizar apenas o livro didático como fonte de informação e resolução de problemas que, na maioria dos casos, apresentam exercícios descontextualizados, sem nenhum vínculo com o cotidiano dos alunos (MACEDO et al., 2007, p. 4).

Segundo Cabral, Dias e Lobato Júnior (2019), o professor deve propor a seus alunos atividades que possam ser vivenciadas por estes, para que, deste modo, os estudantes sintam-se motivados e desafiados a resolver o que foi proposto. Ainda segundo os autores, não existe na atualidade mais espaço para o dito ensino tradicional, torna-se cada vez mais notória a importância de se fazer uso de diferentes ferramentas e metodologias que venham a contribuir para um aprendizado concreto.

Desta forma, com a evidente necessidade do uso de diferentes ferramentas e metodologias de ensino, este trabalho buscou opções que fogem ao ensino repetitivo e mecânico da Matemática. Sendo assim, não é objetivo desta pesquisa impor a Resolução de Problemas como melhor ou mais eficaz método de ensino, mas apresentar tal metodologia como sendo uma dentre várias outras opções. Logo, buscou-se na utilização de Jogos Matemáticos e na Interdisciplinaridade, exemplos de métodos de ensino que fogem ao ensino tradicional e que podem ser usados como ferramenta para o ensino do conteúdo de Razão e Proporção. O uso e aplicação destas estratégias pedagógicas estão descritos nós tópicos a seguir.

3.2.1 Jogos Matemáticos

Os jogos matemáticos são frequentemente lembrados quando o professor busca algo para sair da rotina das aulas expositivas e repetitivas, porém nem sempre são utilizados e, quando são, não o fazem de maneira apropriada. Trata-se de uma excelente ferramenta metodológica, muito comum nas escolas e muito útil se bem explorada. Apesar disso, existe ainda certo receio por parte dos professores em estarem utilizando jogos como método de ensino. Para Bianchini, Gerhardt e Dullius (2010), é comum que ao se trabalhar com jogos haja alguns imprevistos, como uma demanda maior tempo e um aumento de indisciplina, com alunos dispersos e tumultuando as aulas. Tais contratempos são frequentemente usados como justificativa para o não uso dessa ferramenta, porém isto só ocorre quando não há um planejamento adequado de seu uso.

Para Bianchini, Gerhardt e Dullius (2010), os jogos matemáticos devem ser explorados como um momento em que o aluno é levado a pensar matematicamente de uma forma diferente da rotineira, fazendo com que seu raciocínio matemático evolua. É possível através dos jogos tornar o aluno mais participativo, fazendo com que ele consiga, de forma prazerosa, relacionar o conteúdo de Matemática com situações vivenciadas por ele.

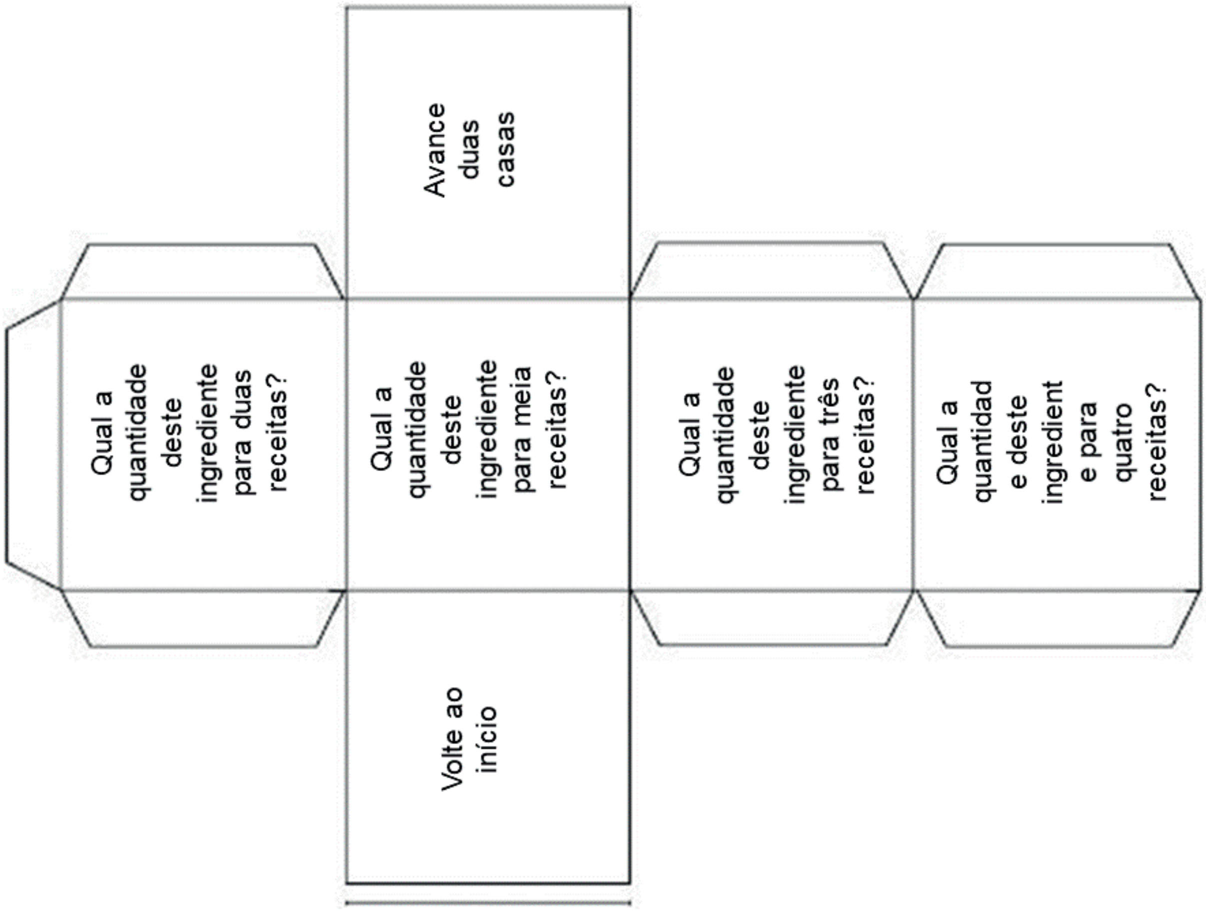
Segundo Marchinski, Caetano e Jaras (2020), os jogos não devem ser trabalhados de qualquer maneira, ao decidir incluir essa ferramenta em sua rotina de aula é necessário que o professor planeje de forma coerente, adequando o seu uso a idade e série dos alunos, assim como ao conteúdo. Ainda segundo as autoras, os jogos possibilitam que o professor reveze suas aulas entre as fórmulas e conceitos que exigem um alto grau de concentração e momentos em que os alunos se sintam mais motivados e satisfeitos, melhorando assim o seu desenvolvimento intelectual.

Quando, em sua sala de aula, o professor trabalha com jogos, é notório que o aluno não se sente pressionado em ter que aprender o que está sendo transmitido. De certa forma, o aluno se sente descomprometido daquelas fórmulas, propriedades e conceitos que muitas vezes são desinteressantes e desestimulantes.

> Este descomprometimento gera grande entusiasmo aos alunos durante os jogos e tal momento deve ser aproveitado para a aquisição de novos conhecimentos matemáticos e para a consolidação dos que já possuem. O professor deve aproveitar amplamente esta oportunidade de ensinar Matemática de forma prazerosa, pois desta forma o aluno aprende sem perceber e sem se martirizar porque não entende Matemática (BIANCHINI; GERHARDT; DULLIUS, 2010, p. 3).

Para Marchinski, Caetano e Jaras (2020), é possível introduzir o conteúdo de Razão e Proporção através jogos. As autoras relatam, com entusiasmo, como o jogo “Bolo da Vovó”, criado por elas, pode ser usado como ferramenta para introdução deste conteúdo. Trata-se de um jogo de tabuleiro, onde se encontra uma trilha e uma receita de bolo, na trilha encontram-se “casas” vazias e outras com figuras que fazem alusão aos ingredientes da receita. Podem jogar até 4 alunos simultaneamente em um mesmo tabuleiro, cada um irá possuir um pino e se deslocará pela trilha neste tabuleiro de acordo com o número obtido ao jogar um dado. Caso o pino pare sobre um dos ingredientes o aluno irá lançar um segundo dado, presente na Figura 10, onde estão as instruções.

Figura 10 – Dado de Instruções



Fonte: (MARCHINSKI; CAETANO; JARAS, 2020, p. 20)

Na figura Figura 10 é possível observar que o dado possui duas ordens referentes ao jogo (Volte ao início; Avance duas casas) e quatro questões que exigem que o aluno trabalhe com raciocínio proporcional. As autoras afirmam ainda que, ao aplicarem o jogo, os participantes se envolveram e participaram de forma ativa e, que eles relataram que foi fácil entender e responder às perguntas, mesmo ainda não tendo uma formalização do conteúdo de Razão e Proporção.

É possível observar através do jogo Bolo da Vovó e pelos resultados obtidos ao se desenvolver e aplicar o mesmo que, de forma simples e eficaz, é possível trazer para sala de aula uma ferramenta metodológica que irá cativar a atenção dos alunos. Este jogo, mesmo que muito simples, faz com que os alunos pensem de maneira proporcional e pode servir para que o professor mostre aos seus alunos que eles sabem usar a Matemática, tornando o seu aprendizado mais interessante.

Dessa forma pode-se mostrar que a ideia, muito presente e reforçada entre professores, de que utilizar jogos em sala de aula é trabalhoso e atrapalha o rendimento dos alunos é na verdade um mito. Que tal ideia é construída em cima de experiências obtidas quando se utiliza de jogos sem o devido planejamento e, em muitos casos, sem objetivos claramente estabelecidos. Sendo assim, o exemplo do jogo apresentado neste tópico serve para desmitificar a concepção negativa em torno dos jogos como ferramenta didática e, além disso, servir como sugestão a ser aplicada em sala de aula.

3.2.2 Interdisciplinaridade

Uma outra ferramenta metodológica que pode vir a apresentar bons resultados no processo de ensino aprendizagem em Matemática é a interdisciplinaridade. Para Raynaut (2014), a interdisciplinaridade, apesar de não possuir uma definição concreta que seja consensual no meio acadêmico, pode ser entendida como uma integração entre diferentes saberes. Para o autor a conjugação de competências de diferentes áreas do conhecimento torna possível a resolução de problemas dos mais variados.

Por volta da década de 1960, em meio a uma movimentação protagonizada por estudantes em busca de uma renovação no currículo acadêmico, surge na Europa um movimento chamado de interdisciplinaridade. Tal movimentação, na qual participavam também professores, buscava construir um novo currículo no qual a prioridade seria um ensino que buscasse construir uma maior relação entre conteúdos teóricos e suas aplicações no meio social (GATTÁS; FUREGATO, 2007).

É importante, porém, salientar que a interdisciplinaridade não busca uma reformulação do modelo de ensino atual, no qual o conhecimento é dividido em diferentes disciplinas. Torna-se preciso deixar claro que, sem esta divisão, não existiria a interdisciplinaridade nem seria possível a existência de diferentes disciplinas agregando diferentes conhecimentos (BARNABÉ, 2011).

Segundo Oliveira (2016), ao utilizar a interdisciplinaridade como ferramenta de ensino o professor estará se afastando da metodologia tradicional, uma vez que, a interdisciplinaridade possui sua base na busca pelo conhecimento. Ainda segundo a autora, trabalhar de forma interdisciplinar faz com que, não só os alunos, mas também os professores, saiam de uma posição de acomodação e se sintam desafiados a construir novos conhecimentos.

> Interdisciplinaridade também implica em relações de reciprocidade, de mutualidade, de substituição da concepção fragmentária por uma concepção unitária do ser humano: é movimento de renovação. Considera-se que a interdisciplinaridade é um processo que precisa ser vivido e exercido. Um projeto interdisciplinar, às vezes, surge de uma pessoa que possuí, em si, a atitude interdisciplinar e estende-o para outras, para um grupo. A realização de um trabalho interdisciplinar exige a elaboração de um projeto inicial, coerente e claro para que as pessoas sintam o desejo de fazer parte dele (GATTÁS; FUREGATO, 2007, p. 88).

Para Barnabé (2011), ao se trabalhar com o ensino interdisciplinar objetiva-se que o aluno melhore seu desenvolvimento nas atividades propostas, tenha seu senso crítico desenvolvido, melhorando assim a sua compreensão das informações que venha a receber e, que este mantenha sempre o interesse em aprender. O autor afirma ainda que, a interdisciplinaridade é uma ótima forma de se realizar trabalho em grupos, estimulando assim a convivência e o diálogo entre os alunos.

Ainda segundo o autor, o conteúdo de Razão e Proporção pode ser trabalhado de forma interdisciplinar junto com a música. O autor cita a Lei n° 11.769 de 18 de agosto de 2008 que torna obrigatório o ensino de música na Educação Básica. Dessa forma, o autor traz em sua dissertação o relato sobre o desenvolvimento e aplicação de um projeto interdisciplinar entre Matemática e a Educação Musical.

> Com o auxílio da Música e os experimentos realizados por Pitágoras de Samos buscamos uma nova abordagem para a construção e apresentação do conteúdo de razões e proporções, esclarecendo as diferenças entre os termos, compreendendo as relações entre eles. Faz-se importante destacar que também há uma colaboração da Educação Matemática para com a Educação Musical, objetivando uma melhor compreensão do porque não utilizamos a escala pitagórica até os dias de hoje na música do Ocidente, a qual foi modificada principalmente pelo temperamento, abandonando-se a chamada *gama pitagórica*, fazendo com o que o aluno compreenda também outras relações musicais (BARNABÉ, 2011, p. 60).

Ao se realizar uma breve pesquisa é possível observar o grande número de trabalhos que abordam o tema interdisciplinaridade relacionando a Matemática com outra disciplina da grade curricular. Podem ser citados como exemplos de tal afirmação as dissertações de Martins (2005) e Serenato (2008), bem como os artigos de Mendes et al. (2016) e Lavaqui e Batista (2007). Porém, observando o relato de Barnabé (2011), pode-se perceber que existe uma gama enorme de conhecimentos que podem ser trabalhados de forma interdisciplinar junto com a Matemática, seja para o ensino de Razão e Proporção, seja para o ensino de qualquer outro conteúdo desta ciência.

Capítulo 4

A Metodologia da Resolução de Problemas

Visando a importância de metodologias diversificadas que possam servir de ferramenta para os professores, e a necessidade de usar novas ferramentas a fim de diminuir o uso do método tradicional, e o especial destaque dado a esta metodologia de ensino pelos PCN (BRASIL, 1998), este trabalho terá como foco a Metodologia da Resolução de Problemas. Para Onuchic e Allevato (2011), problema pode ser definido como uma tarefa ou atividade na qual existe interesse em realizar, mas que não se sabe como fazer ou resolver, não possui uma resposta pronta.

> É verdade que, entre os diversos autores e trabalhos já publicados, podem ser encontrados muitos conceitos de problema adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problema que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Para Onuchic et al. (2014), foi a partir dos trabalhos do matemático húngaro George Polya, enquanto este era professor na Universidade Stanford[1], que a Resolução de Problemas passou a ser vista de forma mais profunda. As autoras afirmam ainda que, Polya provavelmente não foi o primeiro a desenvolver estudos envolvendo a Resolução de Problemas, mas foi graças aos seus trabalhos que esta metodologia começou a ganhar maior destaque e uma visão mais compreensiva dentro do currículo de Matemática.

A partir de 1942, através do seu trabalho na divulgação do tema Resolução de Problemas, Polya passa então a ser reconhecido mundialmente como a maior autoridade no

[1] Em inglês: Stanford University, abreviação de Leland Stanford Junior University, trata-se de um universidade privada localizada no estado da Califórnia, nos Estados Unidos, sendo uma das mais prestigiadas instituições de ensino superior do mundo

assunto (ONUCHIC et al., 2014). Ainda segundo as autoras, Polya, em seu livro intitulado *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (traduzido no Brasil para A arte de resolver problemas), publicado em 1945, listou quatro fases que, segundo ele, seriam necessárias para a resolução de um problema, são elas: primeiro é preciso compreender o problema; segundo, é necessário estabelecer um plano, encontrar a conexão entre os dados e o objetivo do problema; terceiro, é preciso executar o plano; e quarto, faça um exame da resolução e do resultado obtido.

Resolver um problema é buscar respostas ou soluções para uma situação nova, há qual não possui uma solução imediata. É preciso para tanto, entender o contexto, levantar os dados, aplicar conhecimentos adquiridos. É necessário fazer uma reflexão sobre o que se quer obter, sobre a resposta na qual pretende chegar. Para Romanatto (2012, p. 302):

> [...] a resolução de problemas significa envolver-se em uma tarefa ou atividade cujo método de solução não é conhecido imediatamente. Para encontrar uma solução, os estudantes devem aplicar seus conhecimentos matemáticos. Solucionar problemas não é apenas buscar aprender Matemática e, sim, fazê-la.

Segundo afirmam Soares e Pinto (2001), através da resolução de problemas podem-se envolver situações que fazem parte do cotidiano do aluno, fazendo com que este se sinta mais motivado, dessa forma estimulando o desenvolvimento do raciocínio matemático no estudante.

> Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino. [...] quando se ensina através da resolução de problemas, ajuda-se os alunos a desenvolver sua capacidade de aprender a aprender, habituando-os a determinar por si próprios respostas às questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro-texto (SOARES; PINTO, 2001, p. 1).

Ainda segundo as autoras, é preciso algo mais do que apenas ensinar aos alunos como se resolvem problemas, é preciso que haja um incentivo para que o educando possa propor situações problemas dentro do contexto social no qual ele está inserido, fazendo com que o mesmo traga sua realidade para sala de aula. Cabe ao professor incentivar que seu aluno tenha o hábito de problematizar situações cotidianas e que busque soluções por meio das próprias indagações, aprendendo e chegando a respostas concisas.

Para Polya (2006), o professor deve assumir o papel de um auxiliador durante o envolvimento do aluno na resolução de um problema, papel este que, embora em alguns momentos pode se ser entendido como fácil, é difícil de ser executado. Segundo o autor, para auxiliar o aluno de forma satisfatória o professor deve se dispor de tempo, experiência e dedicação. Este auxilio deve ser feito de forma pontual, não se deve explicar além do necessário e nem deixar o aluno completamente sozinho. O professor deve exercer esse auxilio de forma natural, pois o aluno deve desenvolver o máximo de experiência possível com seu próprio trabalho, caso contrário, o professor pode acabar por transmitir o segredo do problema para o aluno e, dessa forma, não resta nada a ser feito pelo estudante além de registrar a resposta. O autor segue afirmando ainda que, mesmo quando o aluno apresenta grandes dificuldades, cabe ao professor fazer uso de sua experiência para auxiliar o aluno dando a ele a impressão de que está realizando um trabalho de forma independente.

Conforme Onuchic e Allevato (2011, p. 82), existem alguns aspectos que destacam a importância da resolução de problemas, são eles:

> Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
>
> Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
>
> Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a auto-estima dos estudantes aumentam.
>
> Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
>
> Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
>
> A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Durante a resolução de problemas é proporcionado ao educando a oportunidade de praticar sua grande capacidade intelectual, ao invés de apenas aplicar e repetir fórmulas prontas, fazendo com que ele crie métodos e estratégias das mais diversas em busca da solução para o problema. O estudante passa a usar a sua capacidade de observação, a criatividade, autonomia, estabelece conexões entre conhecimentos de diferentes áreas, relaciona o problema proposto a outros já conhecidos e aprende a interpretar os resultados obtidos.

Segundo afirmam Zuffi e Onuchic (2007), ao se usar a metodologia de Resolução de Problemas no processo de ensino-aprendizagem é preciso estimular no aluno a importância de compreender bem os dados do problema, da sua autonomia para tomada de decisões, de saber usar propriedades matemáticas necessárias e de comunicar o resultado obtido. O professor deve evitar direcionar o aluno durante o processo, devendo intervir apenas quando houver grande dificuldade e o aluno não souber mais como agir, é preciso que o educando tenha liberdade para trabalhar a resolução do problema e só após é que o professor irá formalizar o conteúdo, introduzindo seus símbolos e técnicas.

Conforme enfatizam Onuchic e Allevato (2011), é importante, no uso da resolução de problemas, que os problemas sejam apresentados aos alunos antes da introdução formal do conteúdo que se pretende abordar. Assim, um novo conteúdo será introduzido através de um problema que se pretende resolver, e os conceitos e propriedades formais daquele conteúdo serão transmitidos durante a busca por respostas ao problema.

É importante ressaltar o papel do professor no que diz respeito a forma na qual a metodologia será trabalhada. Conforme descreve Romanatto (2012), o papel do educador é fundamental, pois ele é quem deve propor os problemas que serão trabalhados, portanto a escolha de problemas adequados à idade/série dos alunos é fundamental. Além disso, cabe ao professor um acompanhamento constante dos alunos durante a resolução dos problemas, orientando quando necessário. É importante que o professor faça a mediação nas discussões entre diferentes formas de resolução, mostrar que é possível obter o mesmo resultado por diferentes caminhos, valorizando as estratégias traçadas por cada aluno, porém é preciso também que o professor mostre ao aluno quando seu raciocínio não está coerente, buscando exemplos no qual aquele pensamento não trará um resultado correto.

Segundo Soares e Pinto (2001), é importante ressaltar que ao resolver problemas os alunos se sentem motivados, uma vez que cada situação é nova, desafiadora e depende de atitudes diferentes. Para as autoras, a busca pela solução de um problema envolve não só compreender o texto e levantar dados, mas o fato de ir à busca de uma resposta, além de envolver também a superação de dificuldades e obstáculos e a criação de caminhos próprios. Os alunos devem traçar um plano, um caminho, buscar em seu conhecimento as técnicas necessárias para alcançar sua meta. É preciso seguir o plano traçado passo a passo até chegar a solução, e, por fim, fazer uma análise de tudo que foi feito, buscando corrigir possíveis erros.

Para Onuchic et al. (2014), a Resolução de Problemas não se coloca como foco do processo de ensino da Matemática, esta metodologia de ensino faz da compreensão dos problemas, dos conceitos, das propriedades e técnicas, o seu principal objetivo, passando a ter um papel fundamental dentro do currículo. Esta metodologia passa então a fazer com que os alunos se sintam engajados em aplicar seus conhecimentos e, passa a ser um meio tanto de aplicação dos conhecimentos adquiridos, como também uma ferramenta para aquisição de novos conhecimentos.

Conforme afirma Polya (2006), a habilidade de resolver problemas é algo que se habilita através da prática. Partindo do ponto que, para se resolver um problema, é preciso observar como outros problemas similares foram resolvidos e então reproduzir o que foi observado, pode-se criar no aluno a capacidade de, ao mesmo tempo em que reproduz técnicas vistas anteriormente, ele as adapte ao problema que está sendo resolvido, dessa forma é possível aprender a resolver problemas enquanto se resolve problemas.

4.1 Organização e Aplicação da Resolução de Problemas

É possível notar, pelo exposto até então neste trabalho, a importância e as consequências positivas do trabalho com Resolução de Problemas na Matemática. Porém, conforme os PCN, embora seja um método que vem sendo discutido, estudado e trabalhado por muito tempo e por vários autores, a Resolução de Problemas ainda é desconhecida por grande parte dos docentes e, quando trabalhada, esta metodologia aparece de forma isolada, muitas das vezes como uma simples listagem de problemas rasos cuja solução necessita da aplicação de uma fórmula decorada previamente (BRASIL, 1998).

Diante deste contexto, faz-se necessário reforçar que o trabalho com Resolução de Problemas, ou qualquer outra metodologia, requer um planejamento prévio, uma organização e conhecimento do método e suas práticas. Portanto, para aplicação desta metodologia em sala de aula, este trabalho se baseou nas dez etapas sugeridas por Onuchic et al. (2014) em seu livro intitulado *Resolução de Problemas: Teoria e Prática* juntamente com as quatro fases listadas por Polya (2006) em *A arte de resolver problemas*.

Seguindo então o proposto, têm-se as etapas sugeridas por Onuchic et al. (2014), descritas a seguir:

1) Propor um problema: este problema pode ser proposto pelo próprio professor ou pelos alunos. As autoras nomeiam este problema de problema gerador, trata-se de um problema que aborda o conteúdo com o qual se pretende trabalhar antes que este tenha suas propriedades e definições apresentadas em sala de aula;

2) Leitura individual: neste momento o aluno tem a oportunidade de interagir com a linguagem matemática e construir uma interpretação própria do problema, trata-se de um momento do aluno;

3) Leitura em grupos: nessa fase os alunos tem a oportunidade de discutir com os colegas a sua interpretação do problema. É papel do professor durante este momento auxiliar os alunos quanto as dúvidas referentes a linguagem matemática e conceitos, além de intermediar as discussões;

4) Resolver o problema: ainda em grupos, os alunos têm a oportunidade de tentar resolver o problema, é neste momento que se dará o início da construção do conhecimento. Nesta fase o aluno fará as anotações que entender como necessárias para resolução do problema;

5) Observação e incentivo: esta etapa ocorre em paralelo com a etapa (4). Enquanto os alunos resolvem os problemas, o professor fará papel de observador, incentivador e auxiliador. Reforçando que o professor, ao auxiliar, deve fazer com que o aluno se sinta confiante em resolver o problema e, ao mesmo tempo, evitar dar respostas prontas.

Durante as etapas (4) e (5) do que foi proposto por Onuchic et al. (2014), faz-se necessário que o professor instrua seus alunos dentro das quatro fases propostas por Polya. Para Polya (2006), ao se resolver um problema é preciso:

Compreender o problema: o professor deve instruir os alunos a considerarem as partes mais importantes do problema. Os alunos são então orientados a fazer algumas indagações: Qual a pergunta a ser respondida? Quais dados foram fornecidos pelo problema? Quais condições foram impostas pelo enunciado? A partir deste momento os alunos devem anotar as informações obtidas, neste ponto estão prontos para a segunda fase;

Estabelecer um plano: é nesta fase que o aluno fará a relação entre a informação pretendida pelo problema e os dados e condições fornecidos e, a partir dai, traçar o caminho (contas, cálculos ou desenhos) para responder ao problema. Uma importante indagação que pode ser feita neste momento é: Conhece algum problema parecido?. O aluno pode traçar seu plano para resolução do problema a partir de problemas semelhantes resolvidos anteriormente. Caso o aluno apresente dificuldade, o professor pode instruí-lo a generalizar o problema em busca de um plano para sua solução. Por fim, ao traçar o plano, alguns questionamentos podem ser feitos como: Todos os dados foram utilizados? As condições foram satisfeitas? Desse modo pode-se seguir para próxima etapa;

Executar o plano: é preciso nesta fase verificar cada passo realizado durante a execução do plano e constantemente fazer a seguinte indagação: O passo foi realizado corretamente? Cabe ao professor, de forma insistente, orientar o aluno quanto a verificação dos passos realizados até que se conclua a execução do plano, passando assim a próxima fase;

Examinar o plano: neste momento o aluno fará uma retrospectiva da resolução do problema, verificando os dados obtidos, o plano traçado e a execução do mesmo. Mesmo que o aluno se sinta confiante por ter verificado cada passo da resolução, é fundamental que ele faça um exame de toda resolução. Uma importante indagação a ser feita neste momento é: Pode-se verificar se o resultado obtido está correto? Fazendo essa verificação o aluno construirá um conhecimento mais sólido. Outra importante pergunta a ser feita é: Existe um caminho diferente para se obter o resultado deste problema? Sendo assim, o aluno será levado a buscar caminhos mais curtos e objetivos na resolução dos problemas.

Neste momento, após a resolução do problema com o devido auxilio do professor, são retomadas as etapas sugeridas por Onuchic et al. (2014), que seguem da seguinte forma:

6) Registrando na Lousa: nesta etapa cada grupo irá eleger um representante para expor na lousa a solução e o resultado encontrado pelo grupo. Independente de respostas e resoluções corretas ou erradas, é importante que os alunos sejam estimulados a compartilhar a sua resolução com os demais grupos;

7) Plenária: este momento deve ser aproveitado para que o aluno possa aprimorar a sua solução, seja através da comparação ou seja pela discussão com os demais grupos. O representante de cada grupo irá expor seus argumentos com a finalidade de demonstrar para os demais o plano traçado, sua execução e seus resultados;

8) Buscando o consenso: neste momento o professor fará uma mediação entre os alunos a fim de chegar a um consenso sobre a resposta correta. Nessa etapa o aluno fará uma grande construção de seu conhecimento, aperfeiçoará sua leitura e escrita matemática e estará de fato aprendendo o conteúdo abordado dentro do problema;

9) Formalizando o conteúdo: é neste momento que o conteúdo será formalizado pelo professor. O professor deve expor na lousa, de forma organizada e na linguagem matemática, os conceitos e as propriedades inerentes ao conteúdo que ele pretende abordar com o problema proposto. É preciso também, neste momento, que o professor resolva o problema gerador utilizando destes conceitos e apresentando diferentes técnicas para resolução de problemas semelhantes a este;

10) Propor e resolver novos problemas: a partir deste momento novos problemas são introduzidos durante a aula, estes problemas devem estar relacionados ao problema gerador. É nesta etapa que o professor poderá observar de forma mais eficaz como se deu a construção do aprendizado do aluno, o professor passa a avaliar a forma como os alunos interagem com os novos problemas. Este é momento em que são propostos problemas de diferentes níveis de dificuldade, fazendo com que o aluno amplie suas compreensões e concretize o aprendizado.

Traça-se dessa forma um roteiro para se trabalhar com Resolução de Problemas em sala de aula. Vale reafirmar que, uma metodologia que busque uma melhor construção e efetivação do aprendizado e, consequentemente, um melhor desempenho escolar e a formação de um cidadão mais instruído e preparado, só será eficaz se aplicada diante de um planejamento consciente e organizado, com objetivos bem definidos.

Portanto, após a organização das etapas e estipulados os passos a serem seguidos para aplicação da metodologia da Resolução de Problemas, torna-se necessário listar os objetivos que se busca alcançar em cada etapa. Somente depois de alcançado o objetivo de determinada etapa é que o aluno deve ser encorajado a seguir para etapa seguinte, desta forma, baseado no levantamento bibliográfico feito, este trabalho lista como objetivos em cada uma das etapas propostas:

- Ao propor o problema gerador, o professor tem como objetivo introduzir um determinado conteúdo, portanto, é necessário que este problema aborde este conteúdo de forma significativa. Este problema não deve ser muito complexo, pois o aluno está sendo apresentado a um novo conteúdo neste momento, e nem muito simples, pois não representará um desafio ao aluno;

- Durante a leitura individual objetiva-se que o aluno se familiarize com o problema. Nesta etapa o aluno deve ser capaz de compreender do que se trata o problema proposto;

- A leitura em grupo tem por objetivo a troca de ideias entre os alunos a respeito do problema proposto. Neste momento os alunos irão aprofundar sua compreensão da tarefa tendo a oportunidade de olhar para o seu contexto sobre uma perspectiva diferente;

- Durante a resolução do problema objetiva-se que o aluno seja capaz de trabalhar conforme as quatro fases propostas por Polya (2006), ou seja, o aluno deve ser capaz de construir e executar um plano respeitando os dados e as condições fornecidos pelo problema. Ao final, objetiva-se que o aluno tenha capacidade de analisar o plano executado;

- A observação e o incentivo por parte do professor possuem como objetivo acompanhar e orientar os alunos. É importante auxiliar os momentos de estagnação, porém sem tirar do aluno a sensação de que ele está realizando um trabalho independente;

- Propor ao aluno que registre sua solução na lousa tem, entre outras, a finalidade de verificar a capacidade do aluno de transcrever de forma organizada a sua resolução. Não só isso, mas objetiva-se também nesta etapa o compartilhamento de diferentes formas de resolver um mesmo problema, a ideia é que neste momento todos tenham acesso a uma diversidade de planos traçados, podendo observar acertos e falhas nos planos apresentados;

- Durante a plenária busca-se que o aluno comunique, de forma clara e embasada, sobre o seu desenvolvimento e a reposta encontrada por ele. Além disso, o aluno deve ser capaz de argumentar, novamente de forma clara e embasada, a favor ou contra uma ideia proposta.
- Na busca pelo consenso objetiva-se que os alunos de fato cheguem a um consenso, de forma independente do professor, sobre a resposta a ser dada ao problema. O aluno deve ser capaz de reconhecer erros e acertos cometidos durante a resolução do problema.
- Ao formalizar o conteúdo tem-se como objetivo que o aluno compreenda as definições e propriedades do conteúdo que está sendo trabalhado. O aluno deve ser capaz de resolver problemas que envolvam este conteúdo aplicando tais conceitos.
- Propor a resolução de novos problemas tem como objetivo fazer com que o aluno aplique os conceitos aprendidos, pratique a resolução de problemas e concretize o aprendizado do conteúdo.

Dessa forma, com as etapas e seus objetivos bem definidos, o professor pode planejar de maneira eficiente o trabalho com a Resolução de Problemas em sua sala de aula. As etapas e os objetivos descritos neste tópico podem servir como ponto de partida para um planejamento, porém estes podem ser moldados e adaptados conforme a idade ou série dos alunos comos quais se pretende trabalhar. Faz parte da construção de um planejamento a elaboração de um roteiro, como o sugerido na seção 5.1.1.

Capítulo 5

Metodologia

Para realização do experimento e avaliação dos resultados obtidos foi escolhida a pesquisa qualitativa, pois esta torna possível descrever e atribuir significados aos fatos que ocorreram durante o experimento. Para Neves (1996), esta é uma pesquisa de caráter descritivo, onde o pesquisador é um instrumento de grande importância dentro do seu contexto, e os dados são obtidos diretamente do ambiente onde a pesquisa se realiza, além de possuir um enfoque indutivo.

Dessa forma, como a proposta deste trabalho é a aplicação de uma metodologia de ensino em sala de aula e a analise de seu resultado, a interação do pesquisador durante a realização do experimento é constante e fundamental para realização da pesquisa. Sendo assim, optar pela metodologia de pesquisa qualitativa, torna viável a realização deste trabalho, pois esta metodologia permite que o pesquisador esteja inserido no contexto da experimento e que ele possa descrever, de forma indutiva, os resultados obtidos.

Além disso, durante o processo de ensino aprendizagem, esteja este processo ocorrendo dentro ou fora do ambiente escolar, as variáveis envolvidas são muitas e extremamente complexas, sendo difícil de serem isoladas e de se analisar a influência de cada uma delas dentro deste processo. Segundo Martins (2004), essas variáveis não podem ser controladas ou mesmo reproduzidas, porém, isto não torna a observação e a realização da pesquisa inviáveis. Para a autora, ao se realizar uma pesquisa qualitativa não se pode exigir a neutralidade do pesquisador, portanto é necessário que o mesmo tenha objetividade e critérios muito bem definidos diante da pesquisa que está realizando.

Conforme afirma Neves (1996), ao optar pela pesquisa qualitativa, os pesquisadores estão em busca de observar o contexto no qual o processo está inserido, se integrar de forma empática e, sendo assim, compreender melhor o fenômeno que está sendo observado. O autor afirma ainda que, a pesquisa qualitativa é recomendada quando o ponto de vista do observador assume importância durante a análise do fenômeno.

Para Martins (2004), ao se realizar uma pesquisa qualitativa o pesquisador deve possuir uma capacidade analítica e integrativa muito grande, uma vez que neste método de pesquisa o volume de dados obtidos é imenso. Além disso, é preciso a construção e execução de procedimentos que sejam bem delimitados para que a subjetividade do pesquisador não influencie na analise dos resultados obtidos.

Sendo assim, diante do grande número de variáveis envolvidas na pesquisa e da complexidade delas, da constante interação e participação do pesquisador durante todo o desenvolvimento do experimento e da necessidade de objetivos e critérios claros que devem ser seguidos, faz-se necessário a construção de um plano de aplicação e desenvolvimento do experimento. Tem-se assim, na seção a seguir, a descrição do experimento, apresentando o objeto da pesquisa, bem como os procedimentos desenvolvidos, os objetivos de cada etapa do experimento e os critérios de avaliação dos dados.

5.1 Descrição do Experimento

Este trabalho foi desenvolvido com 55 alunos matriculados no 7° ano[1], com a devida autorização da então diretora da unidade de ensino, conforme o Apêndice A. Sendo que, dos 55 alunos envolvidos, 32 estavam matriculados no turno matutino e 23 no turno vespertino, da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio "Prof. Pedro Simão", localizada no município de Alegre-ES no período de Setembro a Outubro de 2019.

O conteúdo de Razão e Proporção, abordado durante o experimento, faz parte da grade curricular do sétimo ano do ensino fundamental e estava devidamente inserido no Plano de Ensino do ano em questão. Porém, para analisar o real impacto do uso da Resolução de Problemas no aprendizado dos alunos, foi preciso analisar como os mesmos interagiam com problemas propostos antes que eles fossem apresentados a metodologia que se pretendia introduzir.

Neste ponto, o objetivo da pesquisa era levantar informações sobre a forma como o aluno interpretava e buscava a solução para problemas propostos. Para tal, os critérios observados pelo pesquisador foram: a forma como o aluno fazia a leitura do problema; como o aluno registrava os dados e a relação entre eles; a interação dos alunos entre si e com o professor; e, por fim, a comunicação do resultado obtido. Esta etapa se deu enquanto eram trabalhados conteúdos que antecederam a introdução de Razão e Proporção. Tais observações permitiria analisar se a Resolução de Problemas teve impacto, não somente no conteúdo com o qual foi trabalhada, mas, na forma como os alunos interagem com problemas.

Na sequência foi introduzido, em ambas as turmas, o conteúdo de Razão e Proporção e, para tal, seguiu-se as etapas descritas na seção 4.1 deste trabalho. Na primeira etapa, foi proposto um problema pelo professor, e caberia aos alunos resolver este problema antes

[1] São alunos do ensino regular, matriculados no sétimo ano do ensino fundamental de 9 anos.

da formalização do conteúdo. Durante o desenvolvimento das demais etapas propostas, os alunos foram constantemente observados e avaliados seguindo diferentes critérios em cada uma das etapas, conforme listado a seguir:

Leitura individual: nesta etapa o critério a ser observado foi a forma como o aluno fazia a leitura inicial do problema. Observou-se a postura do aluno, se esta leitura do problema era feita por completo ou em partes e quantas vezes o aluno repetia a lia o problema. A concentração dos alunos durante esta etapa também foi objeto de observação.

Leitura em grupo: o critério definido nesta etapa é a interação entre os alunos. Observou-se como os alunos explicavam aos seus colegas o que haviam compreendido do problema e como reagiam diante das opiniões diversas.

Resolução do problema: inicialmente foi explicado aos alunos sobre as quatro fases da resolução de um problema e, desta forma, definiu-se como critério a ser observado a elaboração e desenvolvimento do plano de resolução. Observou-se o levantamento e organização dos dados, a construção e desenvolvimento do plano e a capacidade de analisar o que havia sido desenvolvido e o resultado obtido.

Registro na lousa e plenária: define-se como critério desta etapa observar a capacidade do aluno de expor, de forma escrita e oral, o que foi desenvolvido pelo seu grupo. Observou-se a escrita da resolução e os argumentos utilizados para justificar o plano desenvolvimento para tal resolução.

Busca pelo consenso: nesta etapa observou-se como os alunos lidam com diferentes pontos de vista sobre um mesmo problema e chegam, por si só, a uma conclusão. É importante observar neste momento a independência dos alunos em relação ao professor.

Formalizando o conteúdo: observou-se, nesta etapa, a participação e interesse dos alunos quanto ao conteúdo que estava sendo formalizado. Além disso, é importante fazer questionamentos a turma e observar as respostas obtidas a fim de avaliar a relação feita, pelos alunos, entre o problema gerador e o conteúdo.

Introduzir novos problemas: buscou-se nesta etapa analisar como os alunos iriam reagir diante de novos problemas após conhecerem a metodologia da Resolução de Problemas e o conteúdo de maneira formal. Observou-se os alunos quanto a forma como analisavam e desenvolviam o problema, tal como aplicavam o conteúdo de Razão e Proporção.

Desta forma, tendo claro os critérios a serem observados, foi então possível realizar o experimento. O comportamento, a postura e a evolução dos alunos foram observados constantemente pelo pesquisador durante a aplicação do experimento.

Após a realização do experimento alguns questionamentos foram direcionados aos alunos, a fim de melhor compreender como eles se sentiam em relação a metodologia trabalhada. As perguntas direcionadas aos alunos foram feitas de forma oral e, é importante ressaltar que, os alunos foram orientados a responderem de forma sincera e honesta. Os questionamentos foram realizados de forma clara e objetiva, porém, foram feitos utilizando-se de um linguajar coerente com a idade e a série na qual os alunos estavam inseridos. Além disso, foram feitas explicações sobre o que pretendia conhecer em cada uma das perguntas dirigidas a eles.

Para que o experimento seja bem estruturado e ocorra de forma coerente com o proposto na seção 4.1, além de permitir uma melhor analise dos critérios levantados nesta seção, faz-se necessário também a criação de um guia de orientações que estruture o seu desenvolvimento. Desta forma, apresenta-se na seção seguinte, orientações e uma sugestão de roteiro para se trabalhar com o conteúdo de Razão e Proporção utilizando a metodologia de ensino da Resolução de Problemas.

5.1.1 Guia de Orientações

O guia para a realização do experimento foi construindo levando em consideração a organização pedagógica da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio “Prof. Pedro Simão”, sendo que nesta escola são 4 aulas semanais de Matemática para as turmas do 7º ano do ensino fundamental, com duração de 55 minutos cada. Além de servir de guia de orientações para realização desta pesquisa, o roteiro traçado tem o intuito de fornecer uma sugestão para que outros professores possam aplicar esta metodologia em sala de aula, fazendo as adaptações e modificações que julgarem necessárias.

O planejamento e o desenvolvimento do experimento seguiram-se conforme o cronograma presente na Figura 11, no qual as etapas listadas de 1 a 10 se referem à descrição feita na seção 4.1.

Figura 11 – Cronograma para Experimentação

	1ª Semana	2ª Semana	3ª Semana				4ª Semana				5ª Semana
			1ª aula	2ª aula	3ª aula	4ª aula	5ª aula	6ª aula	7ª aula	8ª aula	
Observação Inicial	x	x									
Planejamento (Etapa 1)	x	x									
Observação e Registro			x	x	x	x	x	x	x	x	
Desenvolvimento do Experimento			Etapas 2, 3, 4 e 5	Etapas 6, 7 e 8	Etapa 9	Etapa 10	Etapa 10	Etapa 10			
Feedback e Correção das Atividades									x	x	
Análise dos Resultados											x

Fonte: Elaboração própria

Para que este roteiro seja realizado de maneira satisfatória e eficiente faz-se necessário, conhecer o que deve ser desenvolvido e qual a finalidade de cada fase presente no cronograma, dessa forma, seguem as orientações para cada etapa:

Observação inicial: Essa fase será realizada nas duas semanas que antecedem o início do desenvolvimento do experimento. Serão 8 aulas nas quais o professor irá buscar conhecer os alunos, sua relação com a Matemática, a forma como lidam com problemas e um pouco do contexto social no qual estão inseridos. As informações levantadas nessa etapa servirão de auxilio para um planejamento direcionado a estes alunos em específico, além de fornecer meios para que o professor avalie o real impacto do experimento.

Planejamento: Durante o planejamento o professor fará uso das informações obtidas em suas observações para nortear o seu experimento. É nessa fase que o professor irá discriminar o quantitativo de tempo ou aulas necessárias para cada etapa da Resolução de Problemas, além de organizar o material necessário. Também durante o planejamento é que o professor irá elaborar o problema gerador, buscando construir uma atividade que apresente desafio a seus alunos (não muito fácil e nem muito difícil), que desperte seu interesse e possua um contexto que faça sentido para aquele público específico, além de traçar os objetivos a serem alcançados através desse problema. Ainda durante o planejamento é que o professor irá elaborar as atividades a serem realizadas após a formalização do conteúdo.

Mediante as observações feitas durante as duas primeiras semanas, foi elaborado para esta pesquisa o seguinte problema gerador: Márcia trabalha em casa fazendo bolos por encomenda. Semana passada Márcia foi ao mercado e comprou ingredientes para preparar 5kg de bolo, e pagou um total de R$ 60,00. Com o aumento dos pedidos, Márcia voltou ao mercado no início dessa semana e comprou ingredientes para preparar mais 3kg de bolo. Sabendo que os preços dos ingredientes não sofreram alterações, quanto Márcia pagou na compra do início dessa semana?

O problema gerador foi elaborado buscando trazer um contexto que faça sentido para os estudantes, mesmo que o aluno não conviva com alguém que trabalhe nesta modalidade, trata-se de um contexto que faz sentido para ele. Objetiva-se também, através deste problema, que o aluno pense de maneira proporcional, que compreenda, mesmo que de forma intuitiva, que a relação entre a quantidade de ingredientes comprados e o preço a ser pago são grandezas diretamente proporcionais, que ele se atente aos dados e condições dadas e que responda de forma coerente e justificável. Para realização deste experimento, tanto o problema proposto no início como os finais, foram fornecidos de forma impressa para os alunos.

Observação e Registro: Essa fase deve ocorrer em paralelo ao desenvolvimento do experimento e também durante a oitiva. Será feita uma observação constante do desenvolvimento dos alunos durante a realização do experimento, bem como registro da reação dos alunos, do seu comportamento, das dúvidas que por ventura surjam, dos relatos dos alunos e do aprendizado desenvolvido. As observações e registros servirão para uma análise coesa dos resultados, além de permitir possíveis replanejamentos das etapas posteriores e auxiliar no planejamento de novas intervenções utilizando a Resolução de Problemas.

Observação e Registro: Desenvolvimento do Experimento: É nessa fase que serão desenvolvidas as etapas, da 2 até a 10, propostas pro Onuchic et al. (2014).

1ª aula: Serão reservados 7 minutos para organização dos alunos em filas, apresentação e explicação do experimento e distribuição das cópias do problema gerador; outros 8 minutos para realização de uma leitura individual (Etapa 2); para organização e a leitura em grupos (Etapa 3) serão reservados mais 10 minutos, cada grupo deverá conter no máximo 5 alunos e no mínimo 3, planeja-se a formação de 7 grupos na turma do matutino e 5 grupos na turma do vespertino; serão necessários 10 minutos para exposição das fases propostas por Polya (2006); e outros 15 minutos para resolução do problema com constante observação e incentivo por parte do professor (Etapas 4 e 5). Tais limitações de tempo são estimativas feitas a partir das observações iniciais e considerando eventuais contratempos, restando ainda 5 minutos para reorganizar a sala em filas para aula seguinte. Vale ressaltar que estas estimativas de tempo não impedem de prosseguir com as etapas caso uma delas seja concluída antes do tempo.

2ª aula: Serão 5 minutos para as explicações iniciais; na sequência cada grupo irá dispor de 5 minutos para registrar sua resolução na lousa e expor o raciocínio usado na resolução do problema (Etapas 6 e 7); o restante da aula será reservado para busca do consenso (Etapa 8), onde os alunos irão discutir qual seria o resultado correto e qual a resolução mais coerente.

3ª aula: Esta aula será inteira para formalização do conteúdo (Etapa 9). É nessa fase do experimento que o professor irá apresentar os conceitos do conteúdo que ele está trabalhando. Serão apresentadas as definições de grandezas, de razão e de proporção, bem como suas propriedades e aplicações. Será nessa aula que o professor irá resolver o problema gerador e alguns outros exemplos usando essas propriedades.

4ª, 5ª e 6ª aulas: Durante três aulas serão propostos novos problemas (Etapa 10), conforme apresentado no Apêndice B. Objetiva-se nesta fase fornecer aos estudantes problemas de diferentes níveis de dificuldade, para que eles possam se aprimorar no conteúdo de Razão e Proporção e na utilização da Resolução de Problemas. O professor deverá estar em constante observação, incentivando e auxiliando os alunos.

***Feedback* e Correção:** Estima-se uma média de 8 minutos para correção de cada atividade, esclarecendo as dúvidas e reforçando os conceitos do conteúdo e as fases da Resolução de Problema, o que englobaria o tempo de mais de uma aula. Após a correção dos problemas será realizada uma conversa com os alunos com o intuito de obter um *feedback* a respeito de todo o experimento. Serão levantados questionamentos sobre como eles se sentiram em relação ao método de ensino e ao aprendizado do conteúdo.

Análise dos Resultados: Por fim, será realizada uma retrospectiva de todo o experimento, fazendo uso das observações e dos registros realizados. O intuito dessa análise é compreender o impacto da Resolução de Problemas no aprendizado dos alunos, bem como ressaltar erros e acertos na aplicação dessa metodologia para futuras intervenções.

O desenvolvimento da aplicação desta intervenção em sala de aula e os dados observados estão descritos no próximo capítulo deste trabalho.

Capítulo 6

Resultados e Discussão

Após uma vasta pesquisa bibliográfica, foi possível planejar e aplicar um experimento envolvendo o tema deste trabalho. Tal experimento, assim como o resultado obtido, está descrito neste capítulo. E, quando necessário, foram feitas observações diferenciando os eventos ocorridos em cada uma das turmas onde a atividade foi aplicada.

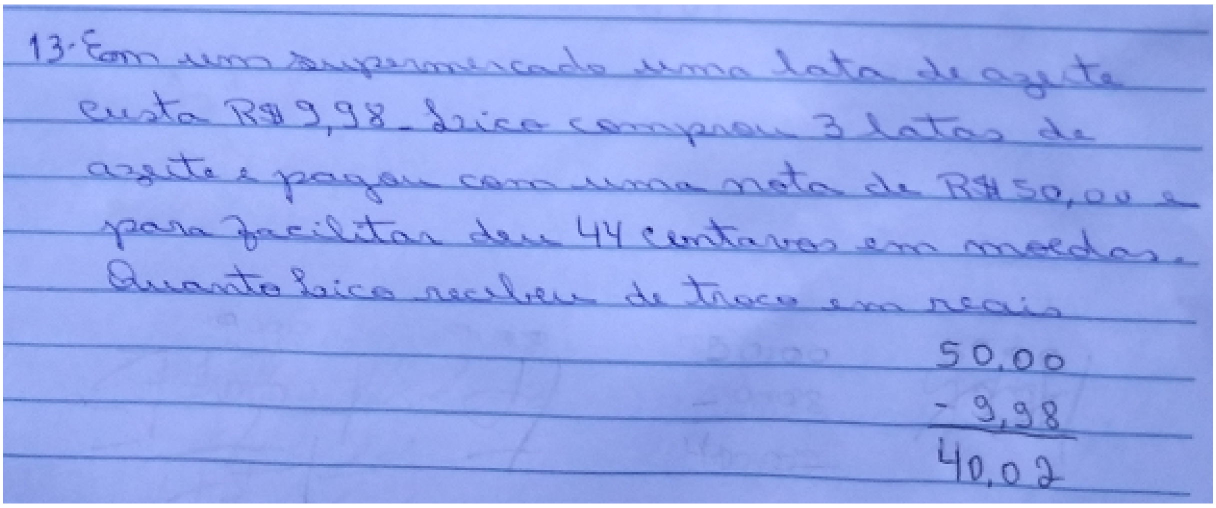
Para tal, este capítulo foi dividido em três seções, sendo a primeira, intitulada Observação inicial, onde é descrita a forma como os alunos se relacionavam com problemas antes de conhecerem a metodologia da Resolução de Problemas. A segunda seção, Desenvolvimento do experimento, é destinada à descrição dos fatos ocorridos durante o experimento e avaliação dos resultados observados. Já na terceira seção, intitulada *Feedback* dos alunos tem-se, de forma quantitativa, as respostas obtidas aos questionamentos dirigidos as turmas após o experimento, com intuito de conhecer o posicionamento dos alunos mediante ao experimento, além claro, da discussão desses resultados.

6.1 Observação inicial

O planejamento para o experimento teve início nas aulas que antecederam à introdução do conteúdo de Razão e Proporção, nesse período o professor passou a observar o modo como os alunos lidavam com os problemas propostos. Neste momento foi possível perceber que os alunos não tinham costume de buscar entender o problema, faziam uma leitura superficial do seu enunciado e logo tentavam resolvê-los, mesmo sem uma total compreensão do problema. Não sendo raras as vezes em que os alunos desistiam do problema após a primeira leitura. Na maioria dos casos os alunos não anotavam os dados do problema e a interação feita entre eles se resumia a comparar resultados. Da mesma forma, quando procuravam o professor, a maior parte dos alunos questionava apenas se seu resultado estava correto. Ao comunicarem o resultado, a maioria dos alunos expressava a resposta como sendo um simples número, ignorando o contexto do problema.

Um exemplo desse contexto pode ser visto na Figura 12, que ilustra a resolução feita por um aluno de um problema proposto nas aulas anteriores à realização do experimento.

Figura 12 – Resolução observada antes do experimento



Fonte: Protocolo de pesquisa

Notou-se na resolução desse problema que o aluno, apesar de ter feito alguns rascunhos, resumiu seu raciocínio a uma única operação. Faltou ao aluno uma atenção aos dados fornecidos e uma interpretação correta do enunciado, o que ocasionou seu erro. Além disso, não foi feita a comunicação do resultado, finalizando a sua resposta ao fim da operação de subtração realizada.

Diante deste contexto foi possível, de maneira clara, compreender a forma com a qual os alunos lidavam com problemas. Foi notória a dificuldade que muitos apresentavam diante das atividades propostas quando estas estavam na forma de problemas, além de demonstrar, em muitos casos, um total desinteresse em tentar resolver tais problemas. Além disso, a falta de organização durante a resolução e a comunicação não tão clara dos resultados que, eram comuns entre os poucos que finalizavam as suas resoluções, demonstram a falta de habilidade em trabalhar com problemas.

Sendo assim, de posse de uma melhor compreensão sobre a forma como os alunos lidavam com problemas, foi possível planejar o experimento que se sucedeu conforme descrito na seção seguinte.

6.2 Desenvolvimento do experimento

O desenvolvimento do experimento ocorreu conforme o guia de orientações descrito na seção 5.1.1. Nessa seção estão descritos e discutidos os resultados observados em cada aula na qual foi trabalhada a Resolução de Problemas como método de ensino do conteúdo de Razão e Proporção.

6.2.1 Aula 1

Iniciou-se então a introdução do conteúdo de Razão e Proporção e, para tal, foi realizada uma conversa inicial com os alunos, explicando que eles teriam algumas aulas um pouco diferentes das quais eles estavam acostumados. A principio, foi exposto aos alunos que eles teriam que resolver um problema sobre um conteúdo que o professor ainda não havia explicado, e isto causou um pequeno espanto por parte dos alunos, porém, foi explicado a eles que se tratava de uma dinâmica de ensino um pouco diferente, e essa dinâmica pretendia usar o conhecimento que eles já possuíam para gerar novos conhecimentos. Essa conversa inicial durou cerca de 5 minutos em ambas as turmas e, apesar de um espanto inicial, os alunos compreenderam a proposta do experimento e se mostraram interessados em participar.

Dando início ao experimento, seguiram-se as etapas propostas na seção 4.1, e foi proposto o seguinte problema gerador: “Márcia trabalha em casa fazendo bolos por encomenda. Semana passada Márcia foi ao mercado e comprou ingredientes para preparar 5kg de bolo, e pagou um total de R$ 60,00. Com o aumento dos pedidos, Márcia voltou ao mercado no início dessa semana e comprou ingredientes para preparar mais 3kg de bolo. Sabendo que os preços dos ingredientes não sofreram alterações, quanto Márcia pagou na compra do início dessa semana?”

Com o problema proposto, os alunos foram organizados em fila e receberam uma cópia do problema gerador. Deu-se então início a Etapa 2, leitura individual, onde os estudantes foram orientados a utilizar este momento apenas para se familiarizarem com o problema e que, por enquanto, não deveriam tentar resolvê-lo. Durante este processo de leitura inicial, os alunos apresentaram um bom comportamento, mesmo os mais agitados. Muitos encararam a dinâmica como um desafio, e foi possível notar a empolgação de alguns.

Foi neste momento, enquanto os alunos faziam uma leitura individual do problema, foi notória a diferença na postura deles em relação ao comportamento observado nas aulas que antecederam a introdução do conteúdo. Os alunos estavam mais concentrados durante a leitura e muitos a fizeram por mais de uma vez, chegando a ler o problema por três ou quatro vezes. Grande parte dos alunos fazia uma ou duas leituras completas do problema e, após lerem todo o problema, retornavam reforçando a leitura de alguma parte especifica do mesmo.

A proposta do problema gerador e a reação dos alunos a essa proposta vão ao encontro do objetivo de se trabalhar com Resolução de Problemas. Ao se trabalhar com esta metodologia, o professor está buscando meios de proporcionar ao seu aluno um desafio no campo intelectual, e para que o problema seja um desafio para o aluno é preciso que este ainda não conheça as regras e conceitos formais para resolvê-lo (ONUCHIC et al., 2014).

Em seguida, dando início a Etapa 3, foram formados grupos de no máximo 5 alunos. A organização dos grupos e a troca de ideias entre seus membros se deram de forma organizada na turma do turno matutino, nesta turma quase não surgiram dúvidas, os poucos questionamentos feitos diziam respeito à interpretação do problema gerador e rapidamente foram sanadas com o auxilio do professor. Houve, porém, a necessidade de uma intervenção na turma do turno vespertino, pois os alunos estavam perdendo o foco no problema e gerando um pequeno tumulto durante a aula, além de conversas aleatórias, alguns alunos não conseguiam discutir o problema com os colegas, foi preciso uma conversa mais firme com a turma para esclarecer a eles a importância do trabalho que estava sendo realizado.

Porém, foi possível notar durante o desenvolvimento desta etapa que, de um modo geral, os alunos conseguiram se comunicar bem e trocar ideias a respeito do problema. Houve casos em que um, ou mais, dos membros do grupo não havia compreendido totalmente o problema e foi auxiliado pelos demais colegas. A discussão em torno do problema se deu de forma satisfatória e serviu para que todos no grupo pudessem compreender seu enunciado.

Deu-se início então as Etapas 4 e 5, resolver o problema com constante observação e incentivo por parte do professor. Inicialmente, quando foram comunicados que iriam começar a resolver o problema, muitos alunos começaram a fazer seus rascunhos no intuito de chegar logo ao resultado. Neste momento o professor interveio, foi explicado aos alunos que para se resolver um problema é necessário traçar alguns objetivos e, em seguida, o professor descreveu as quatro fases propostas por Polya, expondo para eles a necessidade uma organização e planejamento para se resolver um problema.

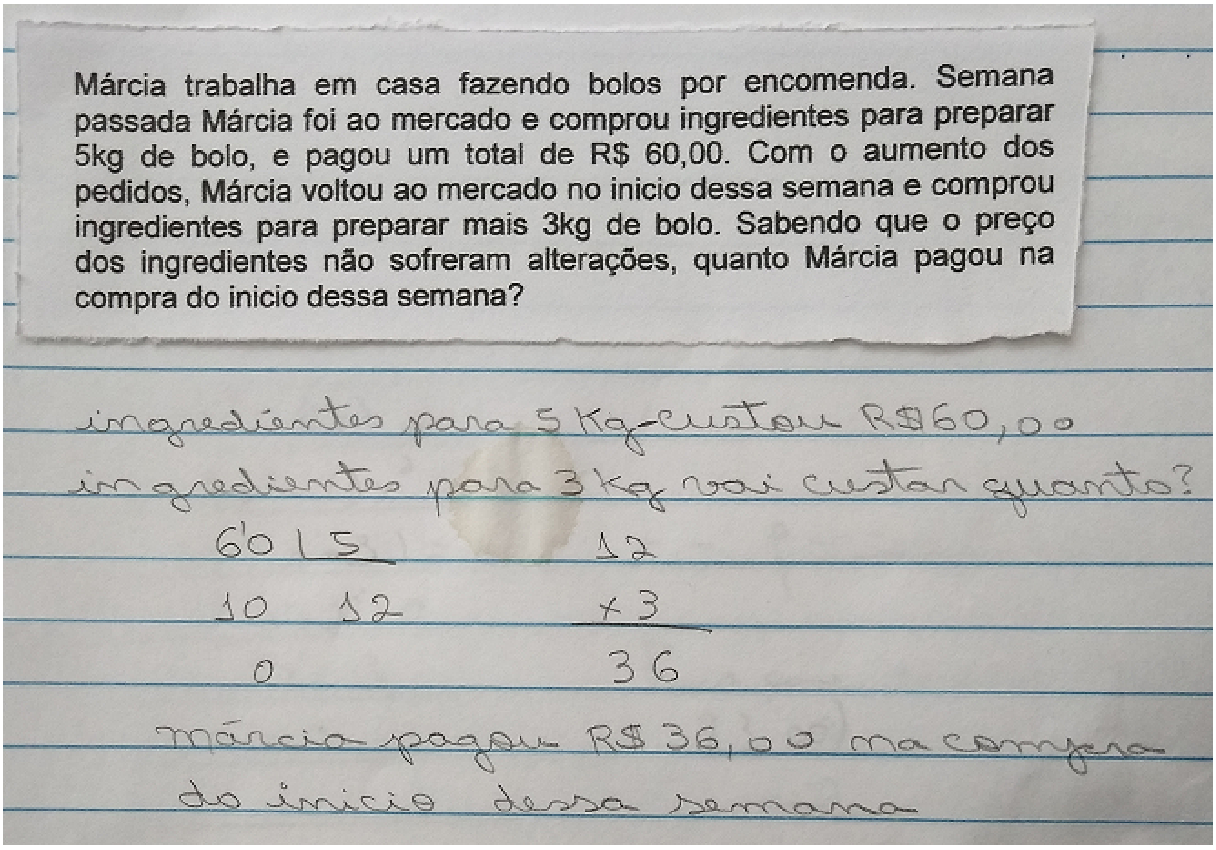
Foi exposto aos alunos que, após a leitura individual e em grupo, e as discussões a respeito do problema, eles deveriam estar familiarizados com o problema e ser capaz de responder a algumas perguntas, como: “Qual a pergunta a ser respondida? Quais dados foram fornecidos pelo problema? Quais condições foram impostas pelo enunciado?” Para Polya (2006), ao auxiliar os alunos, o professor deve faze-lo com descrição e naturalidade, e, no início do processo de resolução, levar os alunos a levantar alguns questionamentos que irão ajudá-los no processo de elaboração do plano.

Ainda segundo o autor, é necessário, antes de se fazer os questionamentos que irão auxiliar na resolução, que o aluno tenha plena entendimento do problema. Então, só a partir deste ponto é possível traçar o caminho, listar os cálculos e buscar as ferramentas que serão necessários para resolver o problema. Durante este processo o professor deve evitar perguntas que indiquem de forma direta o caminho que o aluno deve seguir.

Durante a resolução do problema, o professor insistia para que os alunos observassem com atenção os passos realizados e verificassem se os mesmos estavam corretos. Ainda durante a resolução, alguns alunos se mostraram ansiosos para compartilhar sua resolução e muitos questionavam se haviam resolvido de forma correta ou não. O professor interveio explicando que a próxima etapa seria a exposição das resoluções.

Porém, mesmo com as explicações de que os resultados seriam discutidos na aula seguinte, alguns alunos insistiam em apresentar seus rascunhos ao professor, como o presente na Figura 13. Nessa figura é possível notar uma organização por parte do aluno, pois ele anotou os dados do problema, fez os cálculos necessários e apresentou sua resposta, que está correta, com clareza.

Figura 13 – Resolução do problema gerador



Fonte: Protocolo de pesquisa

Observando o comportamento dos alunos na busca pela resolução do problema, foi possível notar uma maior organização por parte deles. Notou-se uma especial atenção que muitos grupos deram à pergunta do problema e o cuidado que eles tiveram em destacar os dados do problema. Quanto à criação e execução do plano, houve neste momento uma dificuldade, já esperada, por parte dos discentes. Muitos alunos não sabiam como agir, o professor então interveio, pedindo a eles que associassem o problema a outros parecidos. Com certa dificuldade, algumas respostas foram alcançadas e muitos alunos discutiam nos grupos se o caminho até a resposta estava correto, analisando os passos realizados na execução do plano, enquanto outros, a minoria, havia abandonado o problema após encontrar uma resposta.

6.2.2 Aula 2

Na segunda aula foi dado início ao desenvolvimento das Etapas 6 e 7, registro na lousa e plenária. Nessa fase do experimento, cada grupo foi orientado a indicar um representante para expor e explicar a resolução e o resultado encontrado. Pode-se descrever a forma com a qual os grupos exibiram suas resoluções de três maneiras:

- O representante apenas copiou a resolução no quadro;
- O representante apenas deu a resposta;
- O representante transcreveu a resolução explicando os passos realizados para se chegar ao resultado.

Dessa forma, o professor interveio novamente, pedindo aos alunos que haviam apenas escrito as informações no quadro para expor o plano traçado pelo grupo e explicarem a suas resoluções. Mesmo com certo receio, a maioria dos alunos expôs o seu raciocínio. Foi neste momento que surgiram alguns relatos[1] interessantes que chamaram a atenção do professor e serão, junto com as respostas que mais se repetiram, citados nos parágrafos seguintes.

Um aluno cuja resposta obtida foi 40 descreveu seu pensamento da seguinte forma: “como ela comprou dois quilogramas a menos que na semana passada, então deduzi que ela iria pagar 20 reais a menos”. Neste momento o professor aproveitou para lançar um questionamento ao aluno: “seguindo esse pensamento, caso ela comprasse ingredientes para 2kg ela iria pagar 30 reais, ou se os ingredientes fossem suficiente para 1kg ela iria pagar 20 reais, e caso não comprasse nada, ela iria pagar 10 reais?” O professor aproveitou esse momento para explicar a importância de se fazer um retrospecto da resolução do problema.

Para Polya (2006), muitos alunos ao chegarem a resposta do problema e simplesmente o abandonam e vão em busca de solucionar o próximo problema ou estudar outro assunto. Desta forma estes alunos acabam por perder uma importante fase da Resolução de Problemas, pois é nessa etapa que o aluno tem oportunidade de consolidar seu conhecimento e também pode descobrir erros que passaram desapercebidos.

Outro aluno, cuja resposta encontrada foi 33 disse: “já que ela comprou ingredientes para 3kg, o que é um pouco mais da metade de 5kg, pensei que o valor seria um pouco mais da metade de 60, então arredondei para 33”. O professor explicou então, a esse aluno, que ele teve uma raciocínio inicial muito bom, porém que seu “arredondamento” foi feito de forma aleatória e que o resultado deve ter uma justificativa matemática.

[1] Os relatos descritos, destacados em itálico, foram adaptados das falas dos alunos durante a Plenária.

Uma terceira resposta que se destacou foi 36 e, um dos alunos que chegou a essa resposta descreveu seu raciocínio da seguinte forma: “se ela pagou 60 reais por ingredientes necessários para 5kg, eu pensei em encontrar quanto custaria para fazer 1kg de bolo, dividi 60 por 5 e encontrei 12, então eu multipliquei 12 por 3 e encontrei 36”. O professor fez uso desse argumento para expor para turma o que seria uma justificativa matemática, mostrando aos alunos a importância de justificar suas respostas através de um raciocínio lógico, fazendo uso correto da linguagem e operações matemáticas.

Durante a plenária os alunos puderam observar, através das próprias falas e das falas dos colegas, os erros e acertos por eles cometidos, entenderam de forma satisfatória o processo de resolver problemas e chegaram a um consenso. O processo ocorreu de forma bem tranquila na turma do matutino, aonde os próprios alunos chegaram a um consenso de qual seria a resposta correta, cumprindo a Etapa 8. Nesta turma em específico, o auxilio do professor durante a busca pelo consenso foi praticamente nula, cabendo ao professor apenas mediar as falas dos alunos. Foi notório também, neste momento, a confiança que alguns alunos transmitiam em suas falas e como os colegas compreendiam a explicação dos mesmos.

Porém, na turma do vespertino foi preciso uma intervenção por parte do professor, pois os alunos não conseguiam chegar a um consenso de forma organizada, e o consenso só foi possível com a intervenção do professor. Além disso, os alunos mostraram-se muito inseguros quanto as respostas obtidas, o que fez com que o professor tivesse que tomar a frente deste momento e explicar as soluções encontradas, apontando os acertos e corrigindo os erros.

6.2.3 Aula 3

A terceira aula foi inteiramente dedicada à Etapa 9, é neste momento que, após a resolução do problema gerador por parte dos alunos, o professor deve formalizar o conteúdo que ele pretende trabalhar através do problema que foi proposto. Desta forma, na aula seguinte, o professor deu início à formalização do conteúdo, com uma conversa onde foi apresentado o conceito de grandeza aos alunos. Na sequencia, os estudantes foram instigados a pensar de forma proporcional através de perguntas como: “Se um carro percorreu 20km ontem, e hoje percorre 30km, em qual dia ele gastou mais combustível?” e “Se este mesmo carro faz uma viagem com uma velocidade média de 60km/h e amanhã faz o mesmo percurso com velocidade média de 80km/h, o tempo que ele vai gastar vai aumentar ou diminuir?” A aula seguiu-se com o professor usando a lousa para formalizar a definição de razão e grandezas, e apresentar o conceito de proporção, além de formalizar a Propriedade Fundamental das Proporções.

Dessa forma, foi neste momento que o professor, de forma organizada, expôs na lousa primeiramente o conceito de grandeza, apresentou alguns exemplos e fez uma explicação sobre o mesmo. Na sequência os alunos foram questionados sobre quais grandezas poderiam ser encontradas no problema gerador. Observou-se que, após este questionamento, muitos alunos identificaram o valor a ser pago e a quantidade de bolo, em quilogramas, como sendo as grandezas envolvidas no problema.

Logo após, foi apresentado aos alunos o conceito de Razão entre grandezas e a relação de proporcionalidade entre grandezas. Foram dados exemplos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, conforme mencionados anteriormente, e, durante este momento, os questionamentos voltados aos alunos eram constantes. Ao serem questionados sobre a relação entre as grandezas presentes no problema gerador, os alunos, em sua maioria, demonstraram ter compreendido que a relação entre o preço a ser pago pelos ingredientes e a quantidade de bolo era diretamente proporcional.

Ao apresentar os conceitos de proporções, o professor fez uso de questionamentos simples, como: “Para construir um muro são necessárias algumas lajotas. Caso eu resolva dobrar o tamanho desse muro, o que acontece com a quantidade de lajotas? E caso eu diminua o tamanho do muro pela metade?”; “Uma pessoa gasta 1 hora para limpar sua casa. Caso sejam duas pessoas, quanto tempo será necessário para limpar essa mesma casa?”. Foi possível observar, pelas respostas dadas pelos alunos, que, em grande parte, eles assimilaram a ideia de que, ao se trabalhar com proporcionalidade entre grandezas, é possível notar que as mesma crescem ou decrescem de forma proporcional.

Ainda durante a formalização do conteúdo foi notório o interesse e participação dos alunos, eles se mostraram ansiosos por conhecer qual seria a forma que o professor usaria para resolver o problema com o qual eles haviam trabalhado. O professor então, resolveu o problema gerador utilizando a Propriedade Fundamental das Proporções e, durante a resolução, reforçava a importância da linguagem matemática e os conceitos envolvidos na resolução, repetindo em diversos momentos os questionamentos necessários e verificando o que havia feito a cada novo passo da resolução.

Para Polya (2006), ao tentar resolver um problema, o aluno, após observar a resolução feita pelo professor, irá tentar reproduzir o que ele observou. Portanto, torna-se importante que o professor, ao formalizar o conteúdo, reproduza as fases da resolução de um problema, mostrando aos alunos que eles são capazes de aprender a resolver problemas, mesmo que não conheçam as definições formais de determinados conteúdos. Desta forma, o professor irá despertar o interesse pela resolução de problemas em seus alunos, podendo propor novos problemas e obtendo melhores resultados.

6.2.4 Aulas 4, 5 e 6

As três aulas consecutivas à formalização do conteúdo foram dedicadas à apresentação e resolução de novos problemas relacionados ao que foi proposto no início do experimento. Tais problemas encontram-se listados no Apêndice B. Em um primeiro momento os alunos resolveram estes problemas de forma individual e, durante a resolução realizada em sala de aula, foi possível observar que os alunos estavam mais concentrados e mais interessados em resolver os problemas. Fez-se notória a mudança na forma com a qual os alunos encaravam cada problema e interagiam com o eles. Além de mais concentrados, os alunos passaram a ter uma organização mais completa durante a resolução dos problemas.

Na Figura 14 tem-se os alunos do sétimo ano matutino realizando as atividades propostas após a formalização do conteúdo.

Figura 14 – Alunos do matutino trabalhando com os problemas.

Fonte: Elaboração própria

Nota-se que os alunos estão organizados de forma individual, em filas, e concentrados na atividade. Apesar de ser uma turma com bom comportamento, muitos alunos apresentavam inseguranças na resolução de atividades e recorriam aos colegas, ou até mesmo ao professor, com grande frequência em busca de soluções. Porém, neste momento, durante a etapa da resolução dos problemas propostos após a formalização do conteúdo, é possível notar que estão todos em seus lugares, se esforçando para resolver sozinhos os problemas. Essa mudança na postura sinaliza a determinação dos alunos na busca pela resolução do problema, uma maior segurança por parte deles e a evolução de sua autonomia.

Já na Figura 15 e na Figura 16 são apresentados os alunos do sétimo ano vespertino, nesta mesma etapa do experimento.

Figura 15 – Alunos do vespertino trabalhando com os problemas.

Fonte: Elaboração própria

Figura 16 – Alunos do vespertino trabalhando com os problemas.

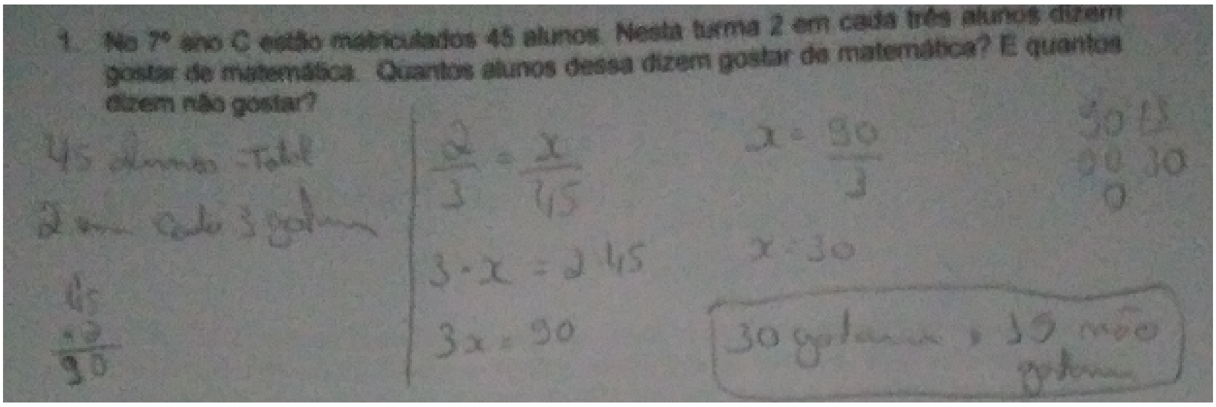
Fonte: Elaboração própria

Observa-se que, da mesma forma que a turma do matutino, os alunos se encontram organizados de forma individual e em fila e, em sua maioria, concentrados na resolução dos problemas propostos. Porém, diferente da turma do matutino, a turma do vespertino não possui um bom comportamento em relação a disciplina em sala de aula durante as aulas, portanto, é importante destacar essa mudança no comportamento deles para resolução de atividades. Observar estes alunos empenhados na resolução dos problemas mostra, de forma prática, os resultados da metodologia de ensino trabalhada. Durante todo o processo do experimento, estes alunos demonstraram uma grande evolução, não só em seu comportamento, mas também na forma de como trabalhar com problemas e na forma como enxergavam a Matemática.

Ainda durante a resolução dos problemas que sucederam a formalização do conteúdo, os alunos, de forma geral, se mostraram mais seguros para encarar novos desafios. Foi possível observar uma coerência maior entre o problema proposto e o plano traçado pelos alunos, além deste fato, notou-se também a preocupação por parte deles em verificar sua resolução, hábito que até então eles não possuíam. Observou-se que muitos haviam absorvido e compreendido o conteúdo de Razão e Proporção de forma mais natural. Tal observação corrobora com a fala de Onuchic et al. (2014), quando afirma que, é neste momento, durante a resolução de novos problemas, que o aluno concretiza seu aprendizado do conteúdo e, em paralelo, aprende a resolver problemas.

Destacam-se as resoluções de algumas das atividades presentes na lista de novos problemas (Apêndice B). Na Figura 17, por exemplo, pode-se observar alguns aspectos que mostram a evolução do aprendizado deste aluno.

Figura 17 – Resolução do exercício 1

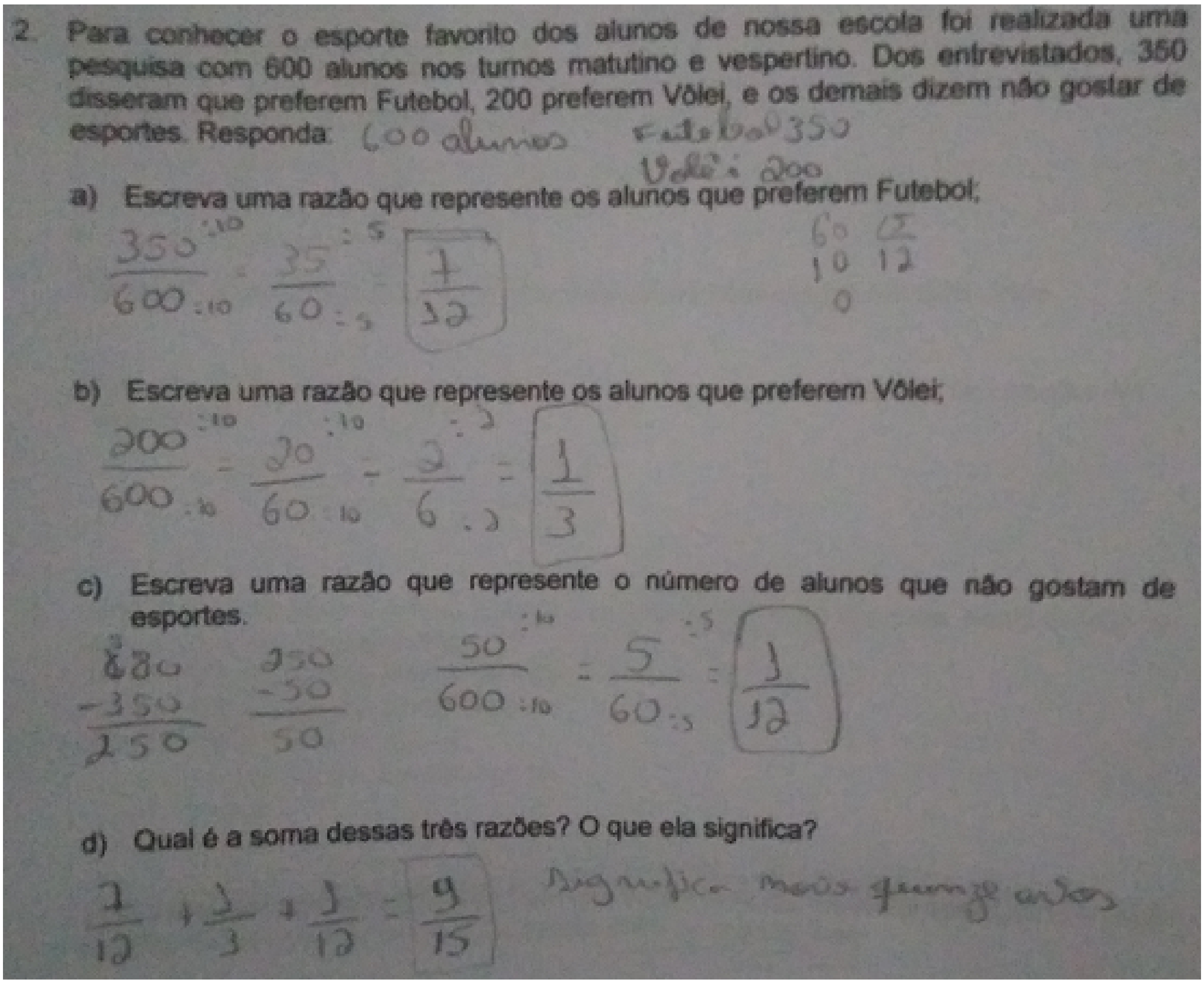


Fonte: Protocolo de pesquisa

Ao observar a Figura 17, na qual o aluno resolveu corretamente o exercício, destacaram-se alguns aspectos: inicialmente observou-se uma grande atenção durante a leitura do enunciado, que foi realizada por mais de uma vez; houve um destaque aos dados fornecidos pelo problema; foi traçado e executado um plano, de forma organizada e coerente com o problema; a comunicação do resultado foi feita de maneira clara; e por fim, observou-se a realização de uma retrospectiva da resolução. Nesta resolução, além dos aspectos já citados, notou-se que o aluno compreendeu bem o contexto, entendeu que na expressão 2 em cada três alunos existe uma razão simplificada do todo, aplicou corretamente a Propriedade Fundamental das Proporções e manteve os rascunhos das operações realizadas.

Na Figura 18 é apresentada uma resolução do exercício 2 da lista de problemas.

Figura 18 – Resolução do exercício 2


2. Para conhecer o esporte favorito dos alunos de nossa escola foi realizada uma pesquisa com 600 alunos nos turnos matutino e vespertino. Dos entrevistados, 350 disseram que preferem Futebol, 200 preferem Vôlei, e os demais dizem não gostar de esportes. Responda: 600 alunos Futebol 350 Vôlei: 200

a) Escreva uma razão que represente os alunos que preferem Futebol;

$\frac{350}{600} = \frac{35}{60} = \boxed{\frac{1}{12}}$

b) Escreva uma razão que represente os alunos que preferem Vôlei;

$\frac{200}{600} = \frac{20}{60} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

c) Escreva uma razão que represente o número de alunos que não gostam de esportes.

$600 - 350 = 250$ $\quad 250 - 50 = 50$ $\quad \frac{50}{600} = \frac{5}{60} = \boxed{\frac{1}{12}}$

d) Qual é a soma dessas três razões? O que ela significa?

$\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{9}{15}}$ Significa nove quinze avos

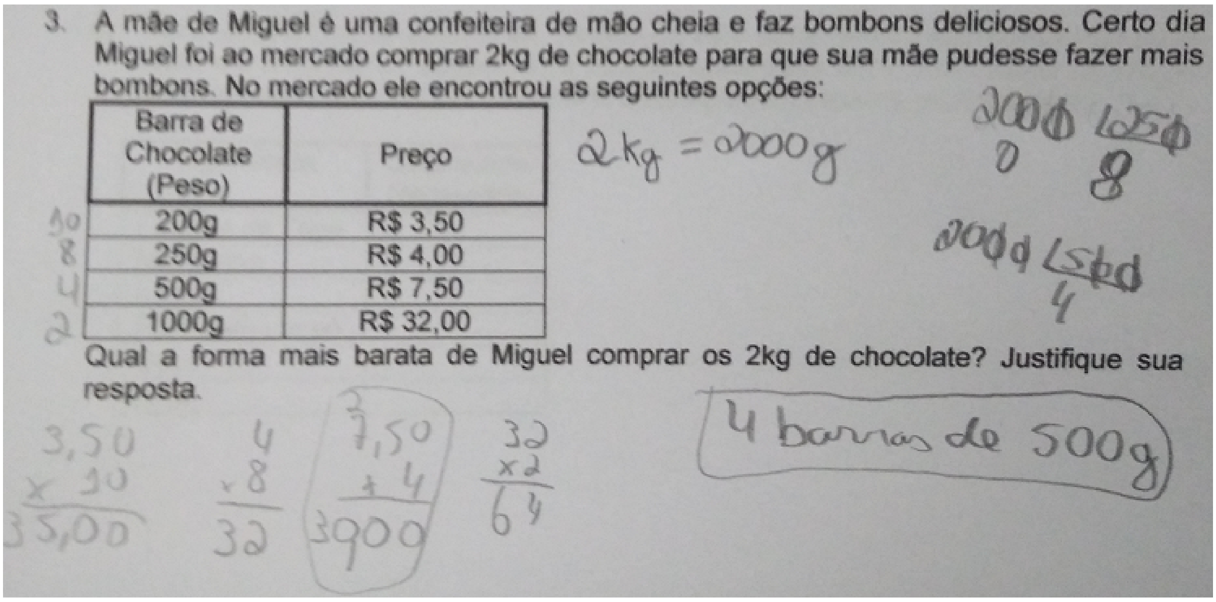
Fonte: Protocolo de pesquisa

É possível observar que este aluno teve o cuidado em anotar os dados fornecidos pelo problema e nos itens (a), (b) e (c) ele montou e simplificou as razões corretamente, inclusive realizou as subtrações necessárias para encontrar o número de alunos que não gostam de esportes. Porém, ao chegar no item (d) o aluno não somou corretamente as razões e não soube responder corretamente a segunda pergunta do item, na qual esperava-se que ele responde-se qual foi sua interpretação da razão obtida, ele respondeu com a forma como se lê uma fração.

Neste exercício, assim como no anterior, destacou-se a leitura do enunciado, o levantamento dos dados fornecidos, a criação e execução do plano e a comunicação da resposta. Além disso, todo o rascunho foi mantido, possibilitando uma retrospectiva do desenvolvimento da resolução.

Já na Figura 19 é apresentada uma resolução do exercício 3 da lista de problemas.

Figura 19 – Resolução do exercício 3



3. A mãe de Miguel é uma confeiteira de mão cheia e faz bombons deliciosos. Certo dia Miguel foi ao mercado comprar 2kg de chocolate para que sua mãe pudesse fazer mais bombons. No mercado ele encontrou as seguintes opções:

Barra de Chocolate (Peso)	Preço
200g	R$ 3,50
250g	R$ 4,00
500g	R$ 7,50
1000g	R$ 32,00

Qual a forma mais barata de Miguel comprar os 2kg de chocolate? Justifique sua resposta.

2kg = 2000g

4 barras de 500g

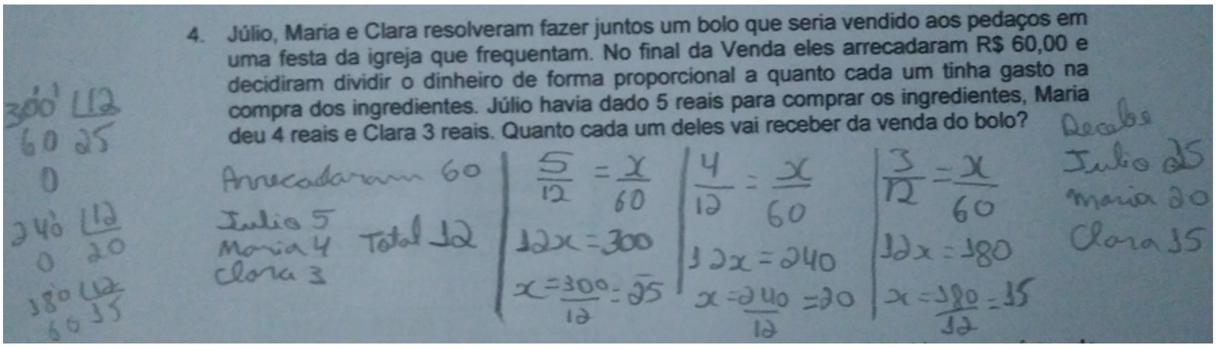
Fonte: Protocolo de pesquisa

O problema presente no exercício 3 admite vários caminhos para sua solução, contudo, esperava-se que o aluno resolve-se esta questão utilizando o conteúdo introduzido na aula anterior, ou seja, montando a razão entre o preço e o peso das barras de chocolate, buscando encontrar a que teria o menor custo por grama de chocolate. Porém, o aluno foi por outro caminho, ele calculou quantas barras de cada tipo seriam necessárias para obter os 2kg e qual compra seria mais barata.

Notou-se nessa resolução que, após ler e fazer uma interpretação correta do problema, o aluno traçou e desenvolveu seu plano de forma coerente com o problema. No final, os cálculos presentes justificaram a resposta, e esta foi dada de forma clara e em concordância com o enunciado.

Outro problema que se faz importante mencionar é o que está presente no exercício 4, apresentado na Figura 20.

Figura 20 – Resolução do exercício 4



4. Júlio, Maria e Clara resolveram fazer juntos um bolo que seria vendido aos pedaços em uma festa da igreja que frequentam. No final da Venda eles arrecadaram R$ 60,00 e decidiram dividir o dinheiro de forma proporcional a quanto cada um tinha gasto na compra dos ingredientes. Júlio havia dado 5 reais para comprar os ingredientes, Maria deu 4 reais e Clara 3 reais. Quanto cada um deles vai receber da venda do bolo?

Arrecadaram 60
Julio 5
Maria 4
Clara 3
Total 12

$\frac{5}{12} = \frac{x}{60}$, $12x = 300$, $x = \frac{300}{12} = 25$

$\frac{4}{12} = \frac{x}{60}$, $12x = 240$, $x = \frac{240}{12} = 20$

$\frac{3}{12} = \frac{x}{60}$, $12x = 180$, $x = \frac{180}{12} = 15$

Recebe
Julio 25
Maria 20
Clara 15

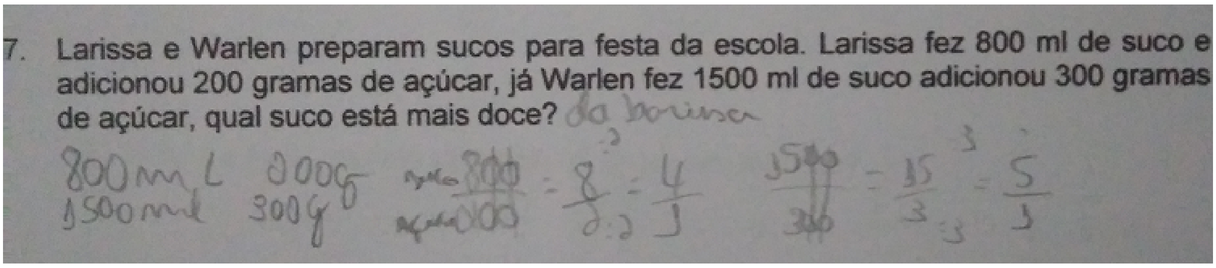
Fonte: Protocolo de pesquisa

O problema presente no exercício 4 apresenta uma variação inédita nesta lista de exercícios. Nessa questão não foi dado, de forma explicita, o valor total gasto pelos três amigos para uma comparação com o total arrecadado, levando o aluno a ter de encontrar esse valor. Nota-se, na resolução presente na Figura 20, que o estudante teve o devido cuidado em anotar os dados e obter o total, assim como também montou e resolveu corretamente as proporções.

Nesta resolução (presente na Figura 20) destacaram-se: a leitura inicial feita pelo aluno, na qual foi possível observar uma grande concentração por parte do estudante; o cuidado ao levantar e anotar os dados fornecidos, bem como deixar explicito o valor total arrecadado, o que indica a elaboração de um plano para resolução; a execução do plano de forma organizada; a comunicação do resultado de forma coerente, indicando quanto cada personagem irá receber. Tais obervações reforçam a ideia de uma boa compreensão da Resolução de Problemas e do conteúdo trabalhado.

Observou-se no exercício 7, Figura 21, uma nova abordagem para o uso de razões. Mesmo que de forma implícita, o aluno trabalha neste problema o conceito de concentração.

Figura 21 – Resolução do exercício 7



Fonte: Protocolo de pesquisa

Nessa resolução notou-se que novamente o aluno foi capaz de obter os dados do problema, além de montar as razões corretamente e simplificá-las. Esperava-se nesse exercício que o aluno montasse a razão gramas de açúcar para mililitros de suco e realizasse a comparação entre as razões. Porém, este aluno em questão, montou a razão inversa, simplificou e encontrou a resposta correta.

Na resolução presente na Figura 21, observou-se inicialmente a relação feita entre a quantidade de suco e de açúcar, mostrando que o aluno destacou os dados do problema. Notou-se ainda que, ao traçar e executar seu plano, o estudante fez uso dos conceitos aprendidos até encontrar a razão entre quantidade de suco (em mililitros) e a de açúcar (em gramas), e, em seguida, interpretou corretamente a relação de concentração de açúcar no suco, comunicando de maneira correta a sua resposta.

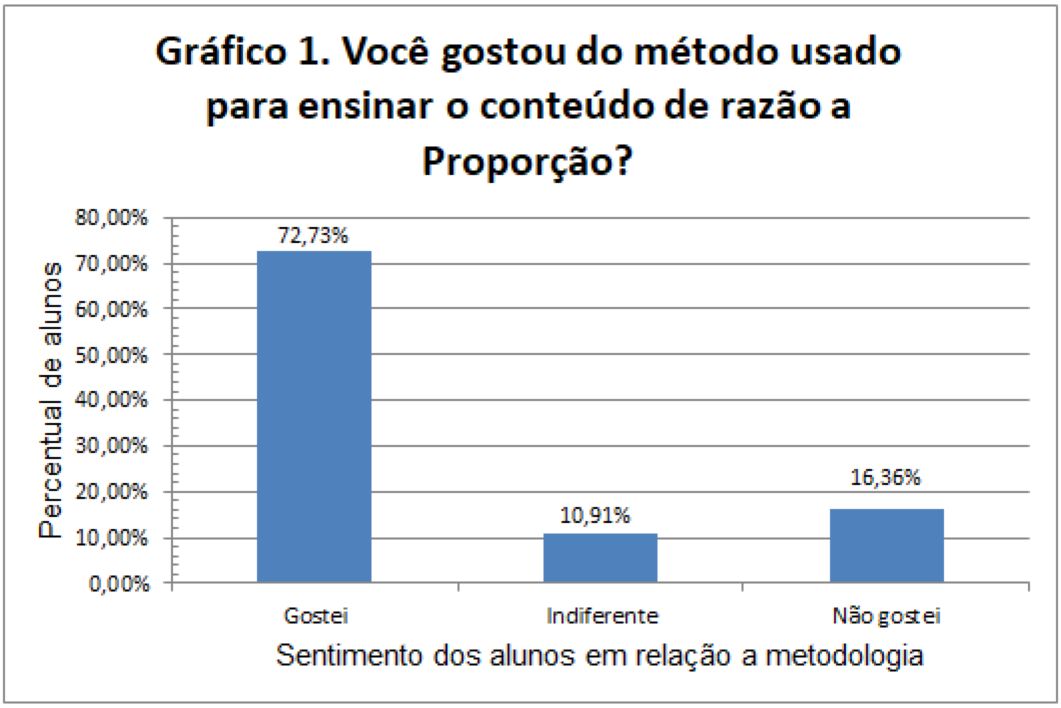
Após a resolução dos problemas pelos alunos, ao final do experimento, os discentes foram então questionados sobre como eles sentiam em relação ao conteúdo e também em relação ao método de ensino que foi trabalhado. As respostas aos questionamentos realizados foram organizadas em gráficos e serão discutidos a seguir.

6.3 *Feedback* dos alunos

Fez-se necessário, além de observar e descrever como se comportaram os alunos durante o experimento, ter um *feedback* direto destes alunos. Para tal, foram feitos alguns questionamentos simples com intuito de avaliar como os alunos se sentiram em relação ao experimento. As respostas obtidas foram organizadas em gráficos e discutidas nessa seção.

Inicialmente os alunos foram questionados sobre como eles se sentiam em relação ao método de ensino da Resolução de Problemas. Na Figura 22 tem-se, na forma de um gráfico de barras, a distribuição das respostas dadas pelos alunos, em porcentagem, ao seguinte questionamento: “Você gostou do método usado para ensinar o conteúdo de Razão a Proporção?”. Os alunos foram orientados a responderem se haviam gostado ou não da metodologia usada, independente de comparações com as aulas anteriores.

Figura 22 – Gráfico 1



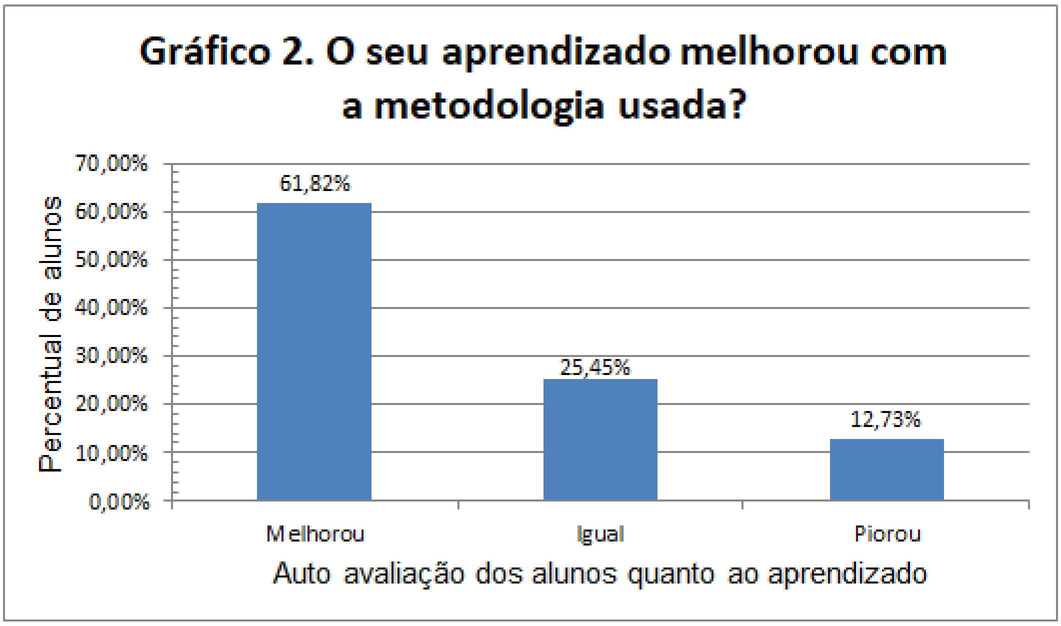
Fonte: Elaboração própria

Observa-se que a maioria dos alunos, 72,73$\%$, gostou de ter trabalhado com o método. Ao serem questionados sobre o motivo pelo qual gostaram da metodologia, alguns alunos afirmaram que se sentiram desafiados a resolver o problema gerador. Tal constatação se faz muito importante, pois, conforme afirmam Cabral, Dias e Lobato Júnior (2019), é importante que o professor faça com que seus alunos se sintam desafiados, dessa forma o professor estará motivando os seus alunos a aprender o conteúdo proposto.

Um outro dado importante presente na Figura 22, é o percentual de alunos que disseram não ter gostado da metodologia. Dentre as justificativas dadas pelos alunos, o motivo mais presente nas afirmações deles para tal resposta é, de que os mesmo não sabiam o que deveria ser feito para resolver o problema gerador. Para Polya (2006), é fundamental que o professor auxilie seu aluno nessas situações, ajudando-o nos momentos que o mesmo se veja sem opções de como prosseguir, tomando cuidado para não dar respostas prontas e sempre transmitir ao aluno a ideia de que ele está resolvendo o problema por conta própria.

Na sequência os alunos foram questionados sobre a forma como eles avaliavam o aprendizado obtido após o uso da metodologia da Resolução de Problemas. Tem-se então, no gráfico presente na Figura 23, a distribuição das respostas dadas pelos alunos, em porcentagem, ao seguinte questionamento: "O seu aprendizado melhorou com a metodologia usada?". Nesta pergunta os alunos foram orientados a fazer uma comparação entre o aprendizado adquirido em aulas anteriores e o seu aprendizado durante o experimento.

Figura 23 – Gráfico 2



Fonte: Elaboração própria

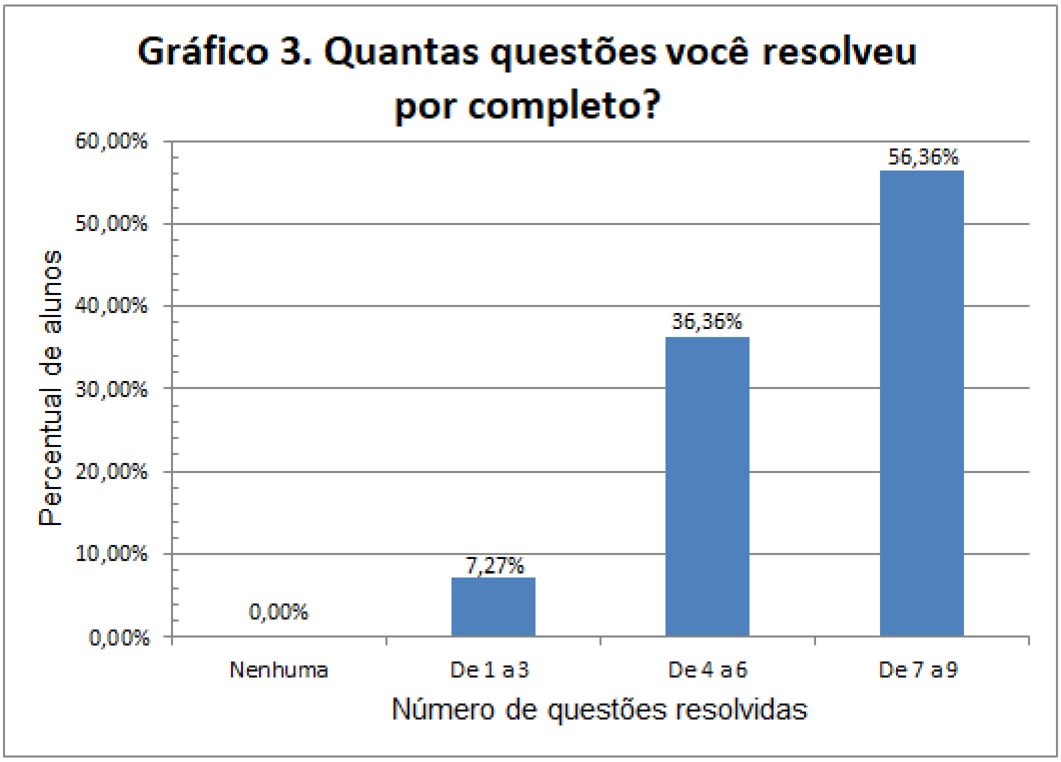
Observa-se que, novamente, a maioria dos alunos demonstrou uma reação positiva ao método utilizado, uma vez que 61,82% dos alunos afirmaram que o seu aprendizado melhorou em relação aos conteúdos anteriores. Segundo afirma Souza (2009), é notório o aumento do interesse por parte dos alunos quando o conteúdo é trabalhado de forma contextualizada em sala de aula. Ainda segundo o autor, ao se trabalhar dessa maneira, é possível observar uma melhor compreensão do conteúdo por parte do aluno, levando a um aprendizado concreto.

Ainda conforme o gráfico da Figura 23, tem-se que 25,45$\%$ dos alunos afirmam que não houve mudança no aprendizado adquirido. Embora alguns desses alunos tenham afirmado ter gostado do método, eles relatam que conseguiram apreender bem o conteúdo da mesma forma que aprendiam nas aulas anteriores. Por outro lado, tem-se uma pequena porcentagem, 12,73$\%$ que afirmam que seu aprendizado piorou com o uso da nova metodologia. Os alunos que fazem tais afirmações relatam que, a falta da formalização inicial do conteúdo e as conversas durante as discussões foram os principais motivos que tornaram o aprendizado do conteúdo mais difícil. Porém os mesmo afirmaram que, após a formalização do conteúdo, conseguiram compreender o conteúdo.

A incoerência observada no parágrafo anterior, em que alunos relatam que seu aprendizado piorou ao mesmo tempo em que afirmam ter compreendido o conteúdo, se deve ao fato de que eles entenderam que o experimento teve fim junto com a Etapa 8 (Busca pelo consenso), e que, a partir da formalização conteúdo (Etapa 9), as aulas voltaram a ser ministradas da forma tradicional. Para estes alunos o início do experimento foi um pouco confuso, pois não houve uma formalização prévia do conteúdo, nem a resolução de exemplos similares aos exercícios, como eles estavam habituados a estudar. Tal compreensão incorreta quanto a duração do experimento justifica as respostas negativas presentes na Figura 22 e na Figura 23.

Por fim, os alunos foram questionados sobre o número de problemas que eles conseguiram resolver. Dessa forma, a Figura 24 traz o gráfico contendo as respostas dadas pelos alunos ao seguinte questionamento: “Quantas questões você resolveu por completo?”. Os alunos foram orientados a responder de acordo com número de problemas que eles haviam resolvido por completo, todos os itens, seguindo as etapas de resolução.

Figura 24 – Gráfico 3



Fonte: Elaboração própria

É possível notar a partir do gráfico presente na Figura 24 que os alunos, em sua maioria, realizaram as atividades propostas. Tem-se que mais da metade da turma realizou mais de 75$\%$ das questões propostas. Vale destacar que, não houve nenhum aluno que não tenha resolvido sequer um problema e, que o número de alunos que resolveram menos de 35$\%$ dos problemas é muito baixo. Tais dados mostram uma mudança no comportamento dos alunos, eles apresentaram um grande empenho e determinação. Esses dados vão ao encontro do que foi descrito perante a avaliação da última etapa do experimento, e na contra mão das observações iniciais, quando se notou uma falta de interesse por grande parte dos alunos. Além disso, torna-se importante ressaltar que o intuito deste questionamento final não teve como foco o número de acertos, pois a avaliação neste caso está sendo feita em cima da postura dos alunos perante aos problemas propostos.

Diante do exposto nos três gráficos deste tópico, assim como nas observações feitas durante o experimento, é possível notar que os alunos reagiram bem à metodologia da Resolução de Problemas. Foi notório a mudança de postura deles em relação à disciplina e até mesmo o comportamento durante as aulas.

Conclusão

Este trabalho buscou apresentar o conteúdo de Razão e Proporção trazendo seus conceitos, suas definições e propriedades, além de sua importância, não só dentro da Matemática, mas também na sociedade atual, além de fazer um levantamento histórico da construção do conhecimento matemático. Desta forma, foi possível perceber a grande diversidade na possibilidade de utilização deste conteúdo em situações cotidianas.

Além disso, nota-se que, apesar de muito se falar sobre diferentes métodos de ensino da disciplina, o ensino tradicional ainda predomina nas aulas de Matemática, o que a torna maçante, cansativa e desinteressante. Porém, também foram mostrados exemplos de métodos simples para o ensino de Matemática e do conteúdo de Razão e Proporção que podem tornar as aulas mais interessantes e atrativas para os alunos, despertando assim o seu interesse e proporcionando um aprendizado concreto.

Na sequência, tem-se a Resolução de Problemas como uma ferramenta para o ensino da Matemática. Trata-se de uma metodologia de ensino que há muito tempo é conhecida e divulgada no meio pedagógico, além de ser recomendada de maneira recorrente pelos PCN (BRASIL, 1998). Tal metodologia, se trabalhada de maneira correta, se mostra uma ótima ferramenta para o ensino da Matemática, pois faz com que o aluno desenvolva seu conhecimento e aprenda a lidar com diferentes situações problemas.

Desta forma, é importante ressaltar que, ao se trabalhar com metodologias diferentes das que estão acostumados, os professores podem encontrar algumas dificuldades no seu planejamento e aplicação. Um dos desafios encontrados durante o planejamento do experimento foi a elaboração do problema gerador, pois este não deve ser muito fácil e nem muito difícil e deve compreender o conteúdo a ser trabalhado. Porém, com pesquisa e dedicação é possível identificar problemas que, embora para o professor possam parecer simples, apresentem certo nível de desafio aos alunos.

Portanto, devido a importância de um planejamento adequado para aplicação desta metodologia, foi sugerido no trabalho, através do produto educacional, um guia de orientações para professores que pretendam trabalhar com este método de ensino. O guia traz um roteiro das etapas a serem realizadas e as orientações pertinentes a cada etapa, sendo que este está aberto as adaptações convenientes a cada etapa de ensino e as particularidades da unidade de ensino na qual se pretende trabalhar.

Ressalta-se ainda que, não só nas observações feitas durante o desenvolvimento do experimento, mas também no *feedback* dos alunos, foi possível observar um crescimento no aprendizado do conteúdo e uma melhora no comportamento e na postura dos alunos. Tem-se que, 72,73$\%$ dos alunos afirmaram ter gostado do método de ensino, 61,82$\%$ dos alunos afirmaram que seu aprendizado melhorou em comparação ao método tradicional e nenhum deles deixou a atividade em branco. Tais resultados reforçam a ideia de que a metodologia da Resolução de Problemas pode ser eficiente para estimular os alunos e ajudar a melhorar o processo de ensino aprendizagem.

Tem-se então, como exposto neste trabalho, que a Resolução de Problemas se mostrou eficaz para ensino de Razão e Proporção, tornando o processo de aprender Matemática mais atrativo para alunos e proporcionando resultados satisfatórios. Esta metodologia demonstra um grande potencial no que diz respeito à construção de conhecimento por parte dos alunos, porém requer um trabalho constante, não devendo ficar restrita a intervenções ou aplicações esporádicas. É a partir de um trabalho constante com a Resolução de Problemas, ressaltando suas técnicas, que os alunos terão a oportunidade de extrair desta metodologia todo seu potencial.

Por fim, para realização de trabalhos futuros, este trabalho traz algumas sugestões que merecem uma atenção especial ao se trabalhar com Resolução de Problemas. É importante, que ao utilizar esta metodologia em sala de aula, o professor trabalhe questões nas quais o aluno se sinta motivado, portanto, para se dar continuidade a pesquisa, sugere-se propor aos alunos que eles tragam problemas relacionados a sua vivência cotidiana e que envolva o conteúdo que está sendo trabalhado. Dessa forma, despertando interesse de participação e tornando o aluno capaz de associar o conteúdo estudado na escola com o seu dia a dia.

Referências

ALMEIDA, R. G. de. *Razão e proporção para além da sala de aula*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) — Universidade Federal de Juiz de Fora, 2015. Disponível em: <http://repositorio.ufjf.br:8080/jspui/bitstream/ufjf/168/1/ricardoguimaraesdealmeida.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 20, 21, 23 e 28.

BARNABÉ, F. M. *A melodia das razões e proporções*: a música sob o olhar interdisciplinar do professor de matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) — USP - Faculdade de Educação, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-07022012-152052/en.php>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.

BATISTA, J. de A. *O ensino de razão e proporção por meio de atividades*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Universidade do Estado do Pará, Belém - PA, 2018. Disponível em: <http://ccse.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/dissertacoes/12/Jakeline_de_Aquino_Batista.pdf>. Citado na página 16.

BEN-CHAIM, D.; ILANY, B.; KERET, Y. ''Atividades investigativas autênticas" para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. *Boletim de Educação Matemática*, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, v. 21, n. 31, p. 129–159, 2008. Citado na página 17.

BIANCHINI, G.; GERHARDT, T.; DULLIUS, M. M. Jogos no ensino de matemática "quais as possíveis contribuições do uso de jogos no processo de ensino e de aprendizagem da matemática?". *REVISTA DESTAQUES ACADÊMICOS*, v. 2, n. 4, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.

BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática. Brasilia: MEC/SEF, Secretaria de Educação Fundamental, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Citado 7 vezes nas páginas 17, 19, 38, 40, 47, 51 e 82.

CABRAL, N. F.; DIAS, G. N.; LOBATO JÚNIOR, J. M. d. S. O ensino de razão e proporção por meio de atividades. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 6, n. 3, p. 174–206, 2019. ISSN 2358-4122. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/emd/article/view/45062/pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 78.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? In: *Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2*. Brasilia: [s.n.], 1989. p. 15–19. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 39.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à Ação: Reflexões sobre Educação e Matemática*. 5. ed. São Paulo: SummusEditoral, 1986. Citado na página 40.

FILIPPE, K. A. et al. Implementação histórica da matemática: contextualizando a estatística no ensino porcentuário e média de dados. *Revista Maiêutica*, v. 5, n. 1, p. 45–52, 2017. ISSN 2318-6585. Citado na página 35.

GATTÁS, M. L. B.; FUREGATO, A. R. F. A interdisciplinaridade na educação. *Revista da Rede de Enfermagem do Nordeste*, v. 8, n. 1, p. 85–91, 2007. ISSN 1517-3852. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=324027956011>. Citado na página 45.

IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZAJN, D. M. *Fundamentos de matemática elementar*: matemática comercial, matemática financeira. 1. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 11. ISBN 85-357-0523-6. Citado 3 vezes nas páginas 20, 29 e 35.

LAVAQUI, V.; BATISTA, I. de L. Interdisciplinaridade em ensino de ciências e de matemática no ensino médio. *Ciência e Educação (Bauru)*, scielo, v. 13, p. 399 – 420, 12 2007. ISSN 1516-7313. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132007000300009&nrm=iso>. Citado na página 46.

LIMA, T. C. B. S. Refletindo acerca das dificuldades de aprendizagem no ensino da matemática no ensino médio de uma escola pública a partir das falas dos próprios estudantes. *Educere*, 2015. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2017/23459_11713.pdf>. Citado na página 14.

MACEDO, L. et al. Desenvolvendo o pensamento proporcional com o uso de um objeto de aprendizagem. *Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico*, MEC, p. 17–26, 12 2007. Citado 5 vezes nas páginas 14, 21, 28, 41 e 42.

MARCHINSKI, B. S.; CAETANO, J. J.; JARAS, S. Jogo matemático do bolo da vovó: Explorando razão e proporção nas aulas de matemática. In: ____. *As diversidades de debates na pesquisa em matemática 3*. Ponta Grossa/Paraná: Atena Editora, 2020. v. 3, p. 14–22. ISBN 978-85-7247-912-7. Disponível em: <https://www.finersistemas.com/atenaeditora/index.php/admin/api/artigoPDF/29197>. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 44.

MARTINS, D. A. N. *Tratamento interdisciplinar e inter-relações entre matemática e física*: potencialidades e limites da implementação dessa perspectiva. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) — PUC-SP, São Paulo - SP, 2005. Disponível em: <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11110/1/dissertacao_douglas_ap_nacci_martins.pdf>. Citado na página 46.

MARTINS, H. H. T. de S. Metodologia qualitativa de pesquisa. *Educação e Pesquisa*, v. 30, n. 2, p. 289–300, 2004. Citado na página 56.

MENDES, P. C. et al. A matemática e a educação física em cooperação: Uma prática interdisciplinar no ensino básico. In: *Atas do VII Congresso Mundial de Estilos de Aprendizagem*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 2417–2428. Citado na página 46.

NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa - caracteristicas, usos e possibilidades. *Caderno de Pesquisa em Administração*, v. 1, n. 3, 1996. Citado na página 56.

NUNES, T.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015. ISBN 8524918012. Citado na página 39.

OLIVEIRA, E. B. d. *A interdisciplinaridade na perspectiva de integrar as disciplinas da área de ciências da natureza e matemática*. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) — Universidade Federal do Espírito Santo, mar. 2016. Disponível em: <http://repositorio.ufes.br/handle/10/5318>. Citado na página 45.

ONUCHIC, L. D. L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, v. 25, n. 41, p. 73–98, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/72994>. Citado 3 vezes nas páginas 47, 49 e 50.

ONUCHIC, L. d. I. R. et al. *Resolução de Problemas*: Teoria e prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014. ISBN 978-85-8148-732-8. Citado 9 vezes nas páginas 47, 48, 50, 51, 52, 53, 61, 65 e 74.

PACHECO, M. B.; ANDREIS, G. da S. L. Causas das dificuldades de aprendizagem em matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do ensino médio. *Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB*, v. 1, n. 38, p. 105, 2018. Disponível em: <http://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/download/1612/806>. Citado na página 13.

PEREIRA, L. D. C.; FERREIRA, M. V. Sequência de fibonacci: História, propriedades e relações com a razão áurea. *Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas*, v. 9, n. 1, p. 67–81, 2008. ISSN 1981-2841. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/disciplinarumNT/article/view/1236/1172>. Citado na página 22.

PINTO, P. R. M. Aspectos da história do número π na perspectiva duma filosofia da matemática de inspiração wittgensteiniana. *Sapere aude*, v. 7, n. 14, p. 605–626, 2016. ISSN 2177-6342. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.

POLYA, G. *A arte de reolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 2006. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. ISBN 85-7193-136-4. Citado 10 vezes nas páginas 48, 50, 51, 52, 54, 61, 66, 68, 70 e 79.

POMMER, W. M. O número π e o conceito de aproximação: possíveis caminhos advindos da história para o ensino da matemática elementar. *Ensino Em Re-Vista*, v. 26, n. 2, p. 345–365, 2019. ISSN 1983-1730. Citado na página 25.

PRÉVE, C. T. Área do círculo e p número π: uma abordagem diferente nas turmas de 8ª série. In: *Anais da 3ª Escola de Inverno de Educação Matemática*. [s.n.], 2012. v. 1, n. 1. Disponível em: <http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/RE/RE_Preve_Cintia_Teixeira.pdf>. Citado na página 25.

RAYNAUT, C. Os desafios contemporâneos da produção do conhecimento: o apelo para interdisciplinaridade. *INTERthesis*, v. 11, n. 1, 2014. ISSN 1807-1384. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/interthesis/article/view/33919>. Citado na página 45.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. *Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 1, p. 299–311, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 50.

SANCHEZ, J. N. G. *Dificuldades de Aprendizagem e Intervenção Psicopedagógica*. Porto Alegre: Artmed, 2004. Citado na página 14.

SANTOS, E. R. M. dos; CARDOSO, L. V. de M.; SILVA, J. do Socorro Costa da. Buriti: Relação entre sequência de fibonacci, razão áurea e espiral logarítmica. *3º SIPEMAT - Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

SANTOS, J. C. de S.; PLÁCIDO, M. E. dos S.; BARRETO, E. D. A. O ensino da matemática e as dificuldades no processo de alfabetização. *EDaPECI*, v. 18, n. 1, p. 91–98, 2018. ISSN 2176-171X. Disponível em: <https://seer.ufs.br/index.php/edapeci/article/view/8594/pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 38 e 41.

SERENATO, L. J. *Aproximações interdisciplinares entre matemática e arte*: resgatando o lado humano da matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) — UFPR, Curitiba - PR, 2008. Disponível em: <http://www.ppge.ufpr.br/teses/M08_serenato.pdf>. Citado na página 46.

SILVEIRA, T. P. N. D. da S.; LUZ, V. S. da; LAURINO, G. B. C. D. P. Material concreto: Uma estratégia pedagógica para trabalhar conceitos matemáticos. In: *IX Congresso Nacional de Educação - EDUCERE / III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia*. Curitiba-PR: PUCPR, 2009. Citado na página 40.

SOARES, M. T. C.; PINTO, N. B. Metodologia da resolução de problemas. In: *24ª Reunião ANPEd*. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 50.

SOUZA, J. F. de. *Construindo uma aprendizagem significativa com história e contextualização da matemática*. Dissertação (Mestrado em Ciências) — UFRJ, Seropédica, RJ, abr. 2009. Disponível em: <http://www.ia.ufrrj.br/ppgea/dissertacao/Jaibis%20Freitas%20de%20Souza.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 39, 41 e 79.

ZUFFI, E. M.; ONUCHIC, L. d. l. R. O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas e os processos cognitivos superiores. *Revista iberoamericana de educación matemática*, n. 11, p. 79–97, 2007. Citado na página 49.

Apêndices

APÊNDICE A

Autorização

Segue a autorização concedida pela direção da escola para realização da pesquisa.

SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO DE PESQUISA

Eu CÁSSIO LIMA VARGAS, servidor público do Estado do Espírito Santo, atuando na categoria MAGISTÉRIO, número funcional 3392198, localizado na ESCOLA ESTADUAL DE ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO "PROF. PEDRO SIMÃO" do município de ALEGRE – ES, venho por meio desta, solicitar à SUPERINTENDÊNCIA REGIONAL DE EDUCAÇÃO "COMENDADORA JUREMA MORETZ-SOHN" GUAÇUI-ES autorização para pesquisa de mestrado intitulada "A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO DE RAZÃO E PROPORÇÃO", a ser realizada na escola onde me encontro localizado conforme documento em anexo.

Alegre, 09 de setembro de 2019.

Cássio Lima Vargas

Cássio Lima Vargas
Professor/Pesquisador Responsável pela Pesquisa

Ciente em, 9/09/19.
Autorizado

APÊNDICE B

Atividades Realizadas na Décima Etapa

Segue a lista de problemas que foram trabalhados durante a realização da décima etapa proposta neste trabalho.

1. No sétimo ano C estão matriculados 45 alunos. Nesta turma 2 em cada três alunos dizem gostar de matemática. Quantos alunos dessa dizem gostar de matemática? E quantos dizem não gostar?

2. Para conhecer o esporte favorito dos alunos de nossa escola foi realizada uma pesquisa com 600 alunos nos turnos matutino e vespertino. Dos entrevistados, 350 disseram que preferem Futebol, 200 preferem Vôlei, e os demais dizem não gostar de esportes. Responda:

a) Escreva uma razão que represente os alunos que preferem Futebol;

b) Escreva uma razão que represente os alunos que preferem Vôlei;

c) Escreva uma razão que represente o número de alunos que não gostam de esportes.

d) Qual é a soma dessas três razões? O que ela significa?

3. A mãe de Miguel é uma confeiteira de mão cheia e faz bombons deliciosos. Certo dia Miguel foi ao mercado comprar 2kg de chocolate para que sua mãe pudesse fazer mais bombons. No mercado ele encontrou as seguintes opções:

Barra de Chocolate (Peso)	Preço
200g	R$ 3,50
250g	R$ 4,00
500g	R$ 7,50
1000g	R$ 32,00

Qual a forma mais barata de Miguel comprar os 2kg de chocolate? Justifique sua resposta.

4. Júlio, Maria e Clara resolveram fazer juntos um bolo que seria vendido aos pedaços em uma festa da igreja que frequentam. No final da Venda eles arrecadaram R$ 60,00 e decidiram dividir o dinheiro de forma proporcional a quanto cada um tinha gasto na compra dos ingredientes. Júlio havia dado 5 reais para comprar os ingredientes, Maria deu 4 reais e Clara 3 reais. Quanto cada um deles vai receber da venda do bolo?

5. O Sr. Pedro colheu 7200 laranjas em seu pomar e resolveu distribuí-las em caixas, de forma que cada caixa tivesse a mesma quantidade de laranjas. Para isso ele montou uma tabela relacionando o número de laranjas por caixa e a quantidade de caixas necessárias:

Número de caixas	Laranjas em cada caixa
	10
	12
	15
	20

Complete a tabela acima com o número de caixas necessárias em cada caso.

Qual relação que você observa entre o número de caixas e o número de laranjas em cada caixa?

6. Julia está preparando um bolo usando a receita preferida de sua mãe. Nesta receita os ingredientes são os seguintes:

- 360 gramas de farinha de trigo;
- 150 gramas de margarina;
- 180 gramas de açúcar;
- 12 gramas de fermento em pó;
- 6 ovos;
- 210 ml de leite.

Julia sabe que ela pode fazer um bolo que renda mais ou menos porções do que o da receita, desde que mantenha a proporção entre os ingredientes.

a) Caso Julia disponha apenas da metade de leite necessário para receita, ela pode fazer um bolo menor adaptando a receita. Qual deve ser a quantidade usada de cada um dos ingredientes? (Complete a tabela abaixo com suas respostas.)

Ingrediente	Quantidade Necessária
Farinha de Trigo	
Margarina	
Açúcar	
Fermento em pó	
Ovos	
Leite	

b) Em uma outra situação, Julia dispõem de apenas 4 ovos, adaptando a receita, qual será a quantidade necessária para os outros ingredientes?

Ingrediente	Quantidade Necessária
Farinha de Trigo	
Margarina	
Açúcar	
Fermento em pó	
Ovos	4
Leite	

c) Para realizar uma festa, Julia decide fazer a receita do bolo, porém ela pretende usar 600 gramas de margarina. Adaptando os demais ingredientes, qual será a quantidade necessária?

Ingrediente	Quantidade Necessária
Farinha de Trigo	
Margarina	600 g
Açúcar	
Fermento em pó	
Ovos	
Leite	

7. Larissa e Warlen preparam sucos para festa da escola. Larissa fez 800 ml de suco e adicionou 200 gramas de açúcar, já Warlen fez 1500 ml de suco adicionou 300 gramas de açúcar, qual suco está mais doce?

8. No dia das crianças o Senhor Valdir desembolsou R$ 180,00 para presentear seus dois filhos. Ele disse que o dinheiro seria divido entre os dois de forma diretamente proporcional a nota que eles conquistaram na última prova de matemática. Sabendo que Caio tirou 8 na prova e Lucas teve nota 7, quanto cada um deles irá receber?

9. Após um campeonato foi distribuído o prêmio de R$ 600,00 entre os quatro jogadores que mais marcaram gols. O premio foi distribuído de forma proporcional ao número de gols marcados por cada um deles. Alessandro marcou 5 gols, José marcou 4, Davi marcou 3 e Lucas 3. Quanto cada jogador recebeu?