



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Transformação de Möbius: projeções na esfera de Riemann

André Luiz Braga de Souza

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Mácio Lemes de Sousa**

Barra do Garças - MT

Agosto de 2020

Transformação de Möbius: projeções na esfera de Riemann

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por André Luiz Braga de Souza e aprovada pela comissão julgadora.

Barra do Garças, 28 de agosto de 2020.

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa
Prof. Dr. Tibério Bittencourt de Oliveira Martins
Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S729t Souza, André Luiz Braga de.
Transformação de Möbius: : projeções na esfera de Riemann /
André Luiz Braga de Souza. -- 2020
xii, 96 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Dr. Márcio Lemes de Sousa.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de
Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de
Pós-Graduação Profissional em Matemática, Pontal do Araguaia,
2020.
Inclui bibliografia.

1. Transformações geométricas,. 2. números complexos. 3.
projeção estereográficas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a)
autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
UFMT/CUA/ICET - BARRA DO GARÇAS

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Transformações de Möbius - Projeções na esfera de Riemann

AUTOR: Mestrando André Luiz Braga de Souza

Dissertação defendida e aprovada em 28 de agosto de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Doutor Márcio Lemes de Sousa (Presidente Banca / Orientador) - Universidade Federal de Mato Grosso
2. Doutor Tibério Bittencourt de Oliveira Martins (Membro Interno) - Universidade Federal de Mato Grosso
3. Doutor Marcelo Almeida de Souza (Membro Externo) - Universidade Federal de Goiás

Barra do Garças, 28/08/2020.



Documento assinado eletronicamente por **MARCIO LEMES DE SOUSA, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 09/09/2020, às 17:20, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **TIBERIO BITTENCOURT DE OLIVEIRA MARTINS, Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 09/09/2020, às 20:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **MARCELO ALMEIDA DE SOUZA, Usuário Externo**, em 10/09/2020, às 12:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2821697** e o código CRC **4E12DDA6**.

*Aos meus pais Paulo e Lindimere
e à minha amada esposa Walesca
que sempre me incentivaram nos estudos.*

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por minha vida, família, amigos e por permitir que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como mestrando, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

A Universidade Federal de Mato Grosso, seu corpo docente, direção e administração pela oportunidade de fazer o curso.

Ao Prof. Dr. Márcio Lemes de Sousa pela oportunidade e apoio na elaboração deste trabalho, e a todos os professores por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão meus eternos agradecimentos.

Agradeço aos meus pais Paulo Henrique de Souza e Lindimere Braga Souza por sua presença e amor incondicional em toda minha vida. Esta dissertação é a prova de que os esforços deles pela minha educação não foram em vão e valeram a pena.

Agradeço à minha esposa Walesca Myrelly Thomé de Souza por compreender as várias horas em que estive ausente por causa do desenvolvimento deste trabalho.

Também agradeço à todos os meus colegas de curso, pela oportunidade do convívio e pela cooperação mútua durante estes anos.

Muito obrigado a todos.

Tudo é possível,

O impossível apenas demora mais...

Dan Brown.

Resumo

Neste trabalho, serão estudadas as transformações de Möbius no conjunto dos números complexos e utilizando a esfera de Riemann para auxiliar na visualização das transformações e no desenvolvimento e apresentar uma proposta de atividade voltada a alunos do Ensino Médio sobre as transformações geométricas que são a base para as transformações de Möbius.

Palavras chave: Transformações geométricas, números complexos, projeção estereográfica.

Abstract

In this work, the Möbius transformations will be studied in the set of complex numbers and using the Riemann sphere to assist in the visualization of the transformations and in the development and to present an activity proposal aimed at high school students about the geometric transformations that are the basis for the transformations of Möbius.

Keywords: Geometric transformations, complex numbers, stereographic projection.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de figuras	xii
Introdução	1
1 Os números complexos	3
1.1 Contexto histórico dos números complexos	3
1.2 Números complexos	12
2 Geometria analítica no plano complexo	32
2.1 Introdução: geometria analítica no conjunto dos números complexos	32
2.1.1 Equação da reta	32
2.1.2 Equação do círculo	37
2.1.3 Equação da elipse	39
2.1.4 Equação da hipérbole	43
2.2 Transformações elementares no conjunto dos números complexos	48
2.2.1 Translação	49
2.2.2 Rotação	55
2.2.3 Homotetia : dilatação e contração	58
2.2.4 Inversão	59

3	Transformação de Möbius e a esfera de Riemann	65
3.1	Esfera de Riemann	65
3.1.1	Bernhard Riemann	65
3.1.2	Projeção estereográfica e o plano estendido	66
3.2	Transformações de Möbius	72
3.2.1	August Ferdinand Möbius	72
3.2.2	Transformação de Möbius	73
3.3	Transformação de Möbius e a esfera de Riemann	78
4	Atividades didáticas: transformações geométricas	88
4.1	Translação	89
4.2	Rotação	91
4.3	Homotetia: dilatação e contração	92
4.4	Inversão	93
	Referências Bibliográficas	96

Lista de Figuras

1.1	Girolamo Cardano.	5
1.2	Nicoló Fontana (Tartaglia).	5
1.3	Leonhard Euler.	11
1.4	Representação geométrica da adição de números complexos	13
1.5	Representação geométrica da multiplicação de números complexos	14
1.6	Representação geométrica de um número complexo no plano de Argand- Gauss.	18
1.7	Complexo conjugado	19
1.8	Módulo do complexo z	21
1.9	Representação polar	24
1.10	Produto entre dois complexos	26
1.11	Representação geométrica das raízes cúbicas de $-i$	29
2.1	Reta de equação $(1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 4$	35
2.2	Reta paralela a direção de w	36
2.3	Círculo de centro $-1 + 2i$ e raio $\sqrt{5}$	39
2.4	Elipse	40
2.5	Elipse	43
2.6	Hipérbole	45
2.7	Hipérbole do exemplo 2.1.6.	48
2.8	Exemplo de translação.	50
2.9	Exemplo de translação.	50
2.10	Exemplo de translação.	50
2.11	Exemplo de translação.	55
2.12	Exemplo de rotação de triângulo.	58
2.13	Exemplo de homotetia: dilatação.	59

2.14	Inversão do complexo z	60
3.1	Georg Friedrich Bernhard Riemann.	65
3.2	Projeção estereográfica.	68
3.3	August Ferdinand Möbius.	72
3.4	Faixa de Möbius.	73
4.1	Em Exibir, selecione janela de álgebra, janela de visualização e campo de entrada.	89
4.2	O vetor translação v , com $ v = \alpha $ e orientado de O para α	90
4.3	Translação por um vetor do quadrilátero convexo $ABCD$	91
4.4	Rotação do losango $ABCD$ em um ângulo de 135° em torno do ponto E	92
4.5	Dilatação do triângulo ABC em relação ao ponto de centro D e razão 2.	93
4.6	Inversão do triângulo ABC em relação a circunferência R	94

Introdução

O estudo dos números complexos e das transformações complexas exerce um papel muito importante em várias áreas da matemática, assim como, na ciências como um todo. Leonhard Euler foi um dos grandes matemáticos a concluir o estudo sobre o conjunto dos números complexos. As tranformações tem como grande objetivo transformar problemas aparentemente complicados em problemas análogos com resolução mais simples. August Ferdinand Möbius, matemático alemão que nasceu em 1790 e morreu em 1868, foi o criador do que conhecemos como transformação de Möbius, como sendo uma transformação complexa de variável complexa.

O objetivo deste trabalho é estudar as transformações de Möbius arbitrárias por meio de transformações complexas mais simples, a saber: a translação, a rotação, a homotetia (contração e dilatação) e a inversão.

No capítulo 1, mostramos um pouco da história dos números complexos citando autores como Boyer (1974), Cajori (2007) e Eves (2005), a história começa desde os tempos antigos, onde os matemáticos da época já encontravam dificuldades em resolver equações do 2° com o discriminante negativo, até a formulação de todo o conjunto dos números complexos por Euler definindo $\sqrt{-1} = i$. Ainda, embasado em autores como Ávila (2011) e Brown (2015), discutimos um pouco dos conceitos e definições que englobam o conjunto dos números complexos, que são demonstrados por autores como o plano de Argand-Gauss, adição, multiplicação, conjugado, módulo e etc.

No capítulo 2, trabalhamos um pouco dos conceitos geométricos dentro do conjunto dos números complexos. Utilizando os autores Valladares (1990), trabalharemos conceitos de retas, circunferências, elipse e hipérbole com a utilização de exemplo para um melhor entendimento dos conceitos.

No capítulo 3, falamos um pouco da história de Bernhard Riemann, também

um grande matemático alemão que teve contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial e que conceituou as superfícies de Riemann, a qual discutiremos os conceitos e definições da esfera de Riemann, já que a mesma ajuda na construção de resultados para as transformações de Möbius. Em seguida, mostramos um pouco da história de August Ferdinand Möbius um grande matemático alemão que foi o criador das transformações de Möbius e de muitos outros conceitos dentro do conjunto dos números complexos. Discutimos conceitos e definições das transformações de Möbius e trabalhamos com algumas transformações mais simples como a translação, a rotação, a homotetias (dilatação e contração) e a inversão e provamos várias propriedades das transformações de Möbius com auxílio da esfera de Riemann.

No capítulo 4, trouxemos uma atividade didática a ser trabalhada com alunos de Ensino Médio de maneira a ajudar no ensino e aprendizagem dos mesmos para que estes desenvolvam e aprendam sobre as transformações geométricas no software GeoGebra.

Capítulo 1

Os números complexos

Neste capítulo será abordado um contexto histórico por trás de toda a criação dos números complexos e também será trabalhado as definições e teoremas sobre os números complexos, que serão utilizados durante a dissertação. A maioria dos resultados matemáticos que destacaremos neste capítulo são baseados em Ávila (2011), Brown (2015), e Soares (2001).

1.1 Contexto histórico dos números complexos

Desde o surgimento dos números e das primeiras noções matemáticas, duas grande áreas se destacaram, que foi a geometria e a álgebra. As civilizações antigas já dominavam grande parte do que conhecemos hoje, mesmo séculos antes de Cristo. Um assunto que sempre seduzio os matemáticos ao longo dos tempos foram as equações. Os matemáticos antigos da Babilônia já conseguiam resolver algumas equações do 2° grau baseados no que hoje chamamos de “completando quadrado” ou também pelo método equivalente ao da substituição numa fórmula geral, como também já discutiam sobre cúbicas (3° grau) e até mesmo algumas biquadradas (4° grau).

Outra grande civilização que desempenhou importante papel no desenvolvimento da matemática foram os gregos, que resolviam alguns tipos de equações do 2° grau com régua e compasso, já que os mesmos tinham um maior afeto pela geometria. Com as guerras e a conquista da Grécia por Roma, praticamente acabou com o domínio da matemática grega. Com o fim do império romano e a ascensão do Cristianismo, a Europa passou por um período dito Idade das Trevas e o desenvolvimento da matemática ficou

nas mãos dos árabes e dos hindus.

Com a idade das trevas sobre a Europa comandada pelo Cristianismo, outras grandes civilizações passaram a frente nas descobertas matemáticas. Os matemáticos hindus avançaram nas pesquisas em álgebra e, quando pensamos em equações de 2º grau, o primeiro nome que pensamos é o de Bháskara. Entretanto a fórmula de Bháskara não foi descoberta por ele, mas sim pelo matemático hindu Sridhara, no século XI.

Relembrando, dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, a fórmula de resolução da equação de segundo grau garante que suas raízes são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependendo dos valores de a, b e c na equação, poderia ocorrer de que o número $\Delta = b^2 - 4ac$ fosse negativo. No entanto, isso não perturbava muito os matemáticos da época. Neste caso, eles simplesmente diziam que o problema não tinha solução.

Com o fim da idade das trevas o interesse pelo estudo da Matemática ressurgiu na Europa, mais estritamente na Itália, no século XVI. Lá e no meio da disputa entre Cardano e Tartaglia pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os números reais não eram suficientes e as primeiras ideias da criação do conjunto dos números complexos surgiram.

Vale a pena falar um pouco desta conturbada história.

Girolamo Cardano nasceu em Pavia, em 1501, e faleceu em Roma, em 1576. Foi um polímata italiano, escrevendo mais de 200 obras em diversas áreas como medicina, matemática, física, filosofia, religião e música. Sua vida foi marcada por contrastes e extremos. Sabe-se que era excepcional cientista, mas que também era violento, traidor, invejoso e outras qualificações não muito edificantes. Foi autor do *Liber de Ludo Aleae*, onde introduziu a ideia de probabilidade e também ensinou maneiras de trapacear nos jogos. Sua maior obra, entretanto, foi o *Ars Magna*, publicada na Alemanha em 1545, que na época era o maior compêndio algébrico existente.



Figura 1.1: Girolamo Cardano.

Nicoló Fontana, apelidado de Tartaglia, só tinha em comum com Cardano a nacionalidade italiana e o talento matemático. Nasceu em Bréscia em 1500 e faleceu em Veneza, em 1557. Na infância, pobre, foi gravemente ferido por golpes de sabre por soldados franceses em uma invasão em sua cidade natal, e por causa deste incidente, ficou com profunda cicatriz no rosto e mandíbula, que lhe provocou um permanente defeito na fala. Daí ter sido apelidado de Tartaglia, que significa “gago”. Ao longo de sua vida publicou diversas obras, mas o que o colocou definitivamente nos anais da matemática foram suas disputas com Cardano.



Figura 1.2: Nicoló Fontana (Tartaglia).

Consta que, por volta de 1510, um matemático italiano de nome Scipione del Ferro encontrou uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas morreu sem publicar sua descoberta, e o único que conhecia tal fórmula era seu aluno “Antonio Maria Fior”, que tentou ganhar notoriedade com ela. Na época eram comuns os desafios entre sábios. Como Tartaglia era um nome que começava a se destacar nos meios culturais da época, Fior propôs a Tartaglia um desafio. Tartaglia, apesar de não saber resolver ainda tais equações, aceitou o desafio, confiando em seu potencial. Sabendo

que Fior conhecia a solução das equações acima citadas, não só deduziu a resolução para este caso, como também resolveu as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. O resultado deste desafio foi que Fior saiu humilhado.

Nesta época Cardano estava escrevendo a *Pratica Arithmeticae Generalis*, que incluía ensinamentos sobre álgebra, aritmética e geometria. Ao saber que Tartaglia encontrará a solução geral da equação de 3º grau pediu-lhe que a revelasse, para que fosse publicada em seu próximo livro. Tartaglia não concordou, alegando que ele mesmo iria publicar sua descoberta. Cardano acusou-o de mesquinho e egoísta, e não desistiu. Após muitas conversas e súplicas este, jurando não divulgar tal descoberta, conseguiu que Tartaglia lhe revelasse a solução. Conforme qualquer um poderia prever, Cardano quebrou todas as promessas e, em 1545, fez publicar na *Ars Magna* a fórmula de Tartaglia. No final, como em muitos outros casos, a posteridade não fez justiça a Tartaglia: sua fórmula é até hoje conhecida como “fórmula de Cardano-Tartaglia”.

Vamos conhecer a fórmula que gerou tanta polêmica.

Considere a equação geral do 3º grau, $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$ quaisquer, dividindo toda a equação por A esta equação pode ser transformada numa equação do tipo $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Fazendo uma substituição $x = z - \frac{a}{3}$, o coeficiente que multiplica z^2 se torna nulo, resultando na forma reduzida:

$$z^3 + pz + q = 0, \tag{1.1}$$

sendo que

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c.$$

Sendo assim, saberemos resolver qualquer equação do terceiro grau se soubermos resolver equações do tipo $z^3 + pz + q = 0$. A ideia de Tartaglia foi supor que a solução procurada é do tipo $z = u + v$. Substituindo chegou à

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0,$$

o que pode ser reescrito como

$$(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + p) + q = 0. \tag{1.2}$$

Há infinitos pares u e v que somados resultam em z . Portanto, escolhemos aquele que

$$u^3 + v^3 = -q. \quad (1.3)$$

Substituindo a equação (1.3) na (1.2), podemos reescrever da forma

$$3uv + p = 0.$$

Se considerarmos o caso $(u + v) = 0$, teríamos que a equação inicial seria trivial com $q = 0$, o que poderia ser facilmente resolvido com fatoração. Assim, considerou que

$$3uv + p = 0 \Rightarrow uv = -\frac{p}{3}.$$

Considerando as relações entre soma e produto de raízes ditas pelas relações de Girard para equações mônicas do segundo grau,

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

e

$$u^3 + v^3 = -q,$$

e chegamos à equação em y

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0,$$

que possui solução u^3 e v^3 , descritas pela fórmula de resolução da equação de segundo grau. Dessa forma, é imediato que

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

e

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Mas como

$$z = u + v$$

então

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Um tipo de Problema inquietante, que abordaremos a seguir, foi o que levou os matemáticos à descoberta dos números complexos.

Problema 1 Considere a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

(a) Mostre que $x = 4$ é solução da equação.

Solução: substituindo $x = 4$ na equação temos.

$$(4)^3 - 15(4) - 4 = 0$$

$$64 - 60 - 4 = 0$$

$$0 = 0.$$

Assim, temos que $x = 4$ é uma solução da equação.

(b) Divida $x^3 - 15x - 4 = 0$ por $x - 4$.

Solução: Aplicando divisão de polinômios, temos

$$\frac{x^3 - 15x - 4}{x - 4} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0.$$

(c) Encontre as outras duas soluções da equação e verifique que são números reais.

Solução: Resolvendo pelo método de Bháskara, temos:

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_1 = -2 - \sqrt{3} \text{ e } x_2 = -2 + \sqrt{3}$$

Assim, temos duas raízes reais distintas.

(d) Aplique a fórmula de Cardano (Tartaglia) e verifique que a solução fornecida pela fórmula é $x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\
 x &= \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{-3375}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{3375}{27}}} \\
 x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \\
 x &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}.
 \end{aligned}$$

(e) Reflita: não parece que há algo de errado com essas soluções?

Assim, questões realmente perturbadoras surgiram e não podiam ser ignoradas. Além da extração de raízes quadradas de números negativos, também nos deparamos com uma extração de raízes cúbicas de números de natureza desconhecida. Quando, nas equações de 2º grau, a fórmula de Bháskara levava à raiz quadrada de números negativos, era fácil dizer que aquilo indicava a não existência de soluções. Agora, entretanto, nota-se que há equações de 3º grau com soluções reais conhecidas, mas cuja determinação passava pela extração de raízes quadradas de números negativos. Isto não ocorre só com esta equação! Pode-se mostrar, com relativa facilidade, que a equação do tipo $x^3 + px + q = 0$ tem as três raízes reais se, e somente se, $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \leq 0$.

Não havia como negar que os números reais eram insuficientes para tratar de equações algébricas. O que estava acontecendo no século XVI era semelhante ao que ocorreu no tempo dos gregos antigos, quando se verificou a insuficiência dos números racionais com a construção do número $\sqrt{2}$, que não era racional: o conceito de número precisava ser estendido.

Foi Rafael Bombelli, engenheiro hidráulico nascido em Bolonha, Itália, em 1530, quem conseguiu atravessar a barreira e chegar aos novos números. Conforme seu próprio relato em 1572 no livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, sua ideia foi supor que os números $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$ e $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ deveriam ser números da forma $a + b\sqrt{-1}$ e $a - b\sqrt{-1}$, respectivamente. Com algumas contas, ele chegou à conclusão que $a = 2$ e $b = 1$. Vamos seguir as ideias de Bombelli.

Problema 2 Fazendo de conta que $\sqrt{-1}$ é um número conhecido e que com ele opera-se do mesmo modo que com os outros números que já conhecemos, vamos verificar

que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{e} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}.$$

No meio do caminho, reflita e tente responder:

- (a) Quais devem ser as regras para operar com $\sqrt{-1}$?
- (b) Como devem ser a adição e a multiplicação de dois números da forma $m + n\sqrt{-1}$?
- (c) Quando dois números desta forma são iguais?
- (d) Conclua que $x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 4$.

Solução: Seguindo as idéias de Bombelli temos, $\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = a - b\sqrt{-1}$ com $a > 0$ e $b > 0$. Assim temos

$$\sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} = a + b\sqrt{-1} \Rightarrow 2 + 11\sqrt{-1} = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3$$

e

$$\sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = a - b\sqrt{-1} \Rightarrow 2 - 11\sqrt{-1} = a^3 - 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 - b^3(\sqrt{-1})^3.$$

De onde segue que $a(a^2 - 3b^2) = 2$ e $b(3a^2 - b^2) = 11$, onde a única solução inteira que responde as duas condições é $a = 2$ e $b = 1$, assim, obtemos as igualdades

$$2 + \sqrt{-121} = (2 + \sqrt{-1})^3$$

e

$$2 - \sqrt{-121} = (2 - \sqrt{-1})^3.$$

Logo, concluímos que

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{(2 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{-1})^3} \\ \Rightarrow x &= 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 4.$$

Portanto concluímos que a igualdade é verdadeira.

Depois de Bombelli, em 1530, outros grandes matemáticos deram contribuições ao desenvolvimento da teoria dos números complexos, dentre eles, o matemático francês Abraham de Moivre, amigo de Isaac Newton, e também os irmãos Jacques e Jean Bernoulli. Mas quem fez o trabalho mais importante e decisivo sobre o assunto foi Euler, que conseguiu extrair raiz quadrada de números negativos e também quase todas as suas propriedades.

Leonhard Euler nasceu em Basileia, Suíça, no ano de 1707, quando o Cálculo Diferencial e Integral, inventado por Newton e Leibniz, estava em expansão. Foi um dos matemáticos que mais produziu e publicou em todos os tempos. Aos 28 anos perdera a vista esquerda e viveu totalmente cego nos últimos 18 anos de sua vida, período em que continuou produzindo, guiado pela sua memória. Faleceu em 1783. Seu nome ficou ligado para sempre ao número irracional e , conhecido como número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,71828, e que aparece frequentemente em equações que descrevem fenômenos físicos. A descoberta deste número ocorreu devido a uma pergunta de Jacques Bernoulli sobre juros compostos.



Figura 1.3: Leonhard Euler.

Dentre as inúmeras contribuições de Euler, foi notável seu empenho na melhoria da simbologia. Muitas das notações que utilizamos hoje foram introduzidas por ele. Dentre as representações propostas por Euler, destacamos o \mathbf{i} substituindo $\sqrt{-1}$. Euler passou a estudar números da forma $z = a + bi$ onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Esses números são chamados de números complexos¹.

¹Definido por Carl Friedric Gauss em 1832. Para maiores detalhes sobre o assunto ver Boyer (1974).

1.2 Números complexos

Definição 1.2.1. Um número complexo z é definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y tais que

$$z = x + yi = (x, y), \quad (1.4)$$

sujeito a operações e propriedades que definiremos posteriormente. Em particular, o par ordenado $(x, 0)$ é definido com o número real x :

$$(x, 0) = x. \quad (1.5)$$

Observação 1. Iremos destacar aqui algumas consequências da definição 1.2.1.

(I) O conjunto de todos os números que satisfazem a definição 1.2.1 é chamado de conjunto dos números complexos e denotado por \mathbb{C} .

(II) A definição 1.2.1 nos permite dizer que os números reais \mathbb{R} é um subconjunto do conjunto dos números complexos.

(III) O número complexo $(0, 1)$ será chamado unidade imaginária e indicado por i , isto é,

$$(0, 1) = i.$$

(IV) Os números reais x e y são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária do número complexo (x, y) , sendo indicados por

$$\Re(z) = x \quad \text{e} \quad \text{Im}(z) = y.$$

Um par do tipo $(0, y)$ é chamado de imaginário puro.

(V) Dados dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, dizemos que

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2,$$

ou seja, dois números complexos são iguais se, e somente se, as partes real e imaginária de um são iguais, respectivamente, às do outro. Em particular, denotamos

$0 = (0, 0)$ e então

$$z = (x, y) = 0 \iff x = 0 \text{ e } y = 0.$$

Em seguida iremos definir as duas operações usuais para o conjunto \mathbb{C} .

Definição 1.2.2. *Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$. Definimos a soma e o produto, denotados por $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$, como os números complexos dados pelas fórmulas:*

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1.6)$$

e,

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)., \quad (1.7)$$

Em geral usaremos a notação z_1z_2 para representar o produto dos complexos z_1 e z_2 .

A figura 1.4 representa geometricamente a soma (1.6) da definição 1.2.2(a representação geométrica de um número complexo abordaremos mais detalhadamente posteriormente). Observe que, pelo método usado em vetores (ver livro de geometria analítica), a soma de dois números complexos, geometricamente, é a diagonal gerada do paralelogramo entre os dois complexos dados.

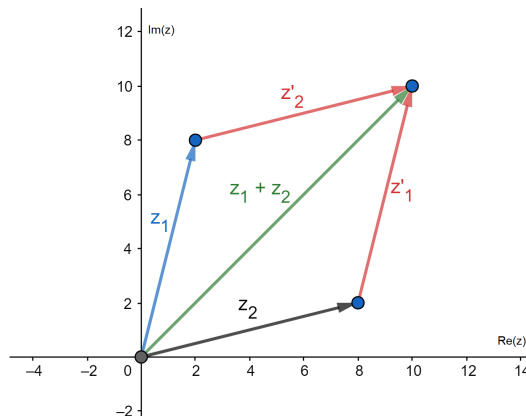


Figura 1.4: Representação geométrica da adição de números complexos

Já a figura 1.5 representa o produto (1.7), que daremos um destaque melhor quando definirmos representação polar de um número complexo.

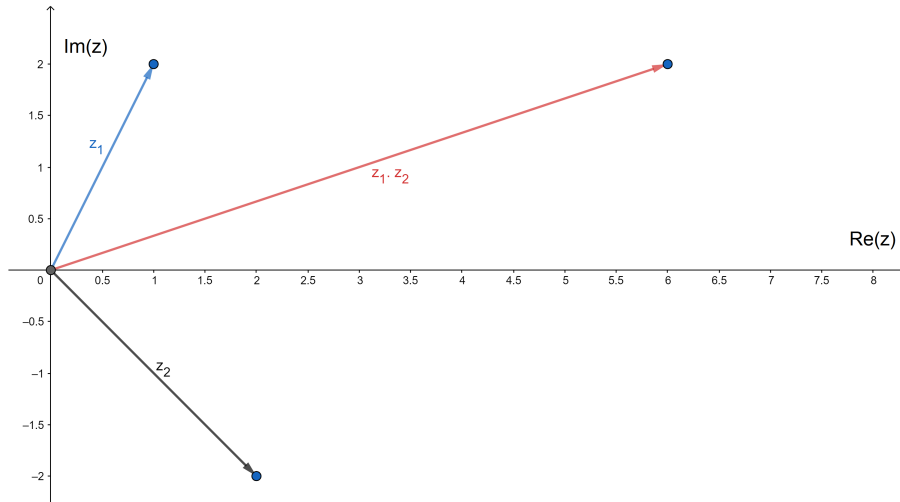


Figura 1.5: Representação geométrica da multiplicação de números complexos

Como consequência das equações (1.6) e (1.7), temos

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y) \quad \text{e} \quad (0, y) = (y, 0)(0, 1) = yi. \quad (1.8)$$

Assim, pela equação (1.8), todo número complexo pode ser escrito como soma de um número real e um número imaginário puro, isto é,

$$z = (x, y) = x + yi. \quad (1.9)$$

Uma outra consequência importante da definição 1.8 é que representaremos, de forma indutiva,

$$\begin{cases} z^1 & = z \\ z^n & = z z^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

em particular $z^2 = zz$. De acordo com a definição (1.8), tem-se

$$(0, 1)^2 = (-1, 0),$$

isto é,

$$i^2 = -1.$$

Da equação (1.9),

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2),$$

daí, a equação (1.7) pode ser escrita

$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.10)$$

Basta usar a expansão formal do produto no primeiro membro efetuada como se os binômios fossem reais e a substituição de i^2 por -1 . A equação (1.7) justifica esse procedimento formal.

Os números complexos \mathbb{C} , com as operações soma $+$ e produto \cdot dadas na definição 1.2.2, satisfaz algumas propriedades algébricas que iremos ilustrar em seguida e recebe o nome de corpo² dos complexos

Notação: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

As operações de soma e produto de complexos satisfazem as seguintes propriedades:

(i) **Associativa:**

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \quad \text{e} \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3),$$

para quaisquer que sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

(ii) **Comutativa:**

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \text{e} \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$

para quaisquer que sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(iii) **Elemento neutro aditivo** $0 = (0, 0) = 0 + i0$:

$$z + 0 = 0 + z = z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(iv) **Elemento neutro multiplicativo (ou unidade)** $1 = (1, 0) = 1 + i0$:

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z,$$

²Um corpo é um conjunto munido de duas operações que satisfaz nove axiomas. Para maiores detalhes sobre o assunto ver Domingues e Iezzi (2003).

para todo $z \in \mathbb{C}$.

(v) **Existências do inverso aditivo ou simétrico:**

Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $-z \in \mathbb{C}$, tal que

$$z + (-z) = (-z) + z = 0,$$

se $z = (x, y) = x + iy$, segue que $-z = (-x, -y) = -x - iy$.

(vi) **Existência do inverso multiplicativo:**

Para $z \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que

$$z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1,$$

se $z = (x, y) = x + iy$, segue que

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

(vii) **Distributividade da multiplicação em relação à adição:**

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Como consequência das propriedades listadas acima, trataremos de maneira natural a operação de subtração como a operação inversa da adição, isto é, para quaisquer que sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2), \tag{1.11}$$

ou seja, usando as notações da equação (1.11), a diferença do complexo z_1 pelo complexo z_2 , nesta ordem, é a adição do complexo z_1 pelo simétrico do complexo z_2 . Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, aplicando a definição 1.2.2 na equação (1.11) temos:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i. \tag{1.12}$$

De maneira análoga, definiremos a divisão como a operação inversa da multi-

plicação, ou seja, para quaisquer que sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}, \quad (1.13)$$

ou seja, usando as notações da equação (1.13), a divisão do complexo z_1 pelo complexo z_2 , nesta ordem, é a multiplicação do complexo z_1 pelo inverso do complexo z_2 . Se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, aplicando a definição 1.2.2 na equação (1.13), temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i \quad (z_2 \neq 0). \quad (1.14)$$

Quando definimos complexo conjugado, ficará mais claro o conceito de inverso e de divisão. Assim, como em números reais, não existe divisão pelo complexo 0.

A partir das fórmulas para o quociente e o produto, é fácil mostrar que

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \left(\frac{1}{z_2} \right), \quad \frac{1}{z_2 z_3} = \left(\frac{1}{z_2} \right) \left(\frac{1}{z_3} \right) \quad (z_2 \neq 0, z_3 \neq 0).$$

Estas operações fundamentais serão ilustradas no seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.1. *Dados os números complexos $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$, $z_3 = 2 - i$ e $z_4 = 2i$. Determine*

$$\frac{z_1 z_2}{z_3} + z_4.$$

Pela definição 1.2.2 (equação (1.7)) temos

$$z_1 z_2 = -7 + i,$$

e da equação (1.14) temos

$$\frac{z_1 z_2}{z_3} = \frac{-7 + i}{2 - i} = -3 - i,$$

daí, obtemos

$$\frac{z_1 z_2}{z_3} + z_4 = -3 - i + 2i = -3 + i.$$

Observação 2. *Os números complexos têm sua representação geométrica em um plano construído de forma semelhante ao conhecido plano cartesiano, dois eixos perpendiculares se interceptam em suas origens. A diferença entre esse plano e o complexo é somente sua interpretação, o eixo horizontal ou eixo x no plano cartesiano aqui é chamado de eixo*

real e o eixo vertical ou eixo y é chamado de eixo imaginário e o plano recebe o nome de plano de Argand-Gaus³.

Para representar um número complexo no plano de Argand-Gaus, conforme já está na definição 1.2.1, olhemos esse número como um par ordenado, onde a coordenada x é a parte real do número complexo e a coordenada y é a parte imaginária. A representação do número é feita pelo vetor⁴ que possui início na origem do plano de Argand-Gauss e final no ponto (x, y) .

A figura 1.6 mostra a representação geométrica de um número complexo $z = x + yi$.

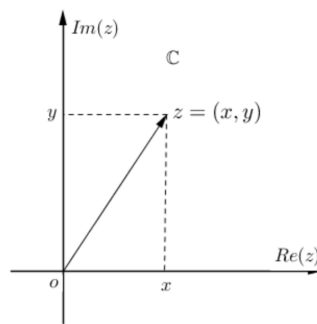


Figura 1.6: Representação geométrica de um número complexo no plano de Argand-Gauss.

Definição 1.2.3. O conjugado de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$ é o número

$$\bar{z} = (x, -y) = x - yi.$$

como consequência da definição 1.2.3 segue que

$$\overline{\bar{z}} = x + yi = z.$$

Em termos geométricos, como mostra a figura 1.7 o ponto \bar{z} é a reflexão do ponto z no eixo real, isto é, a posição do ponto \bar{z} é simétrica à do ponto z em relação ao eixo real.

³Em 1831 GAUSS retomou os estudos de ARGAND sobre os números complexos e sua representação na forma de coordenadas chegando ao plano de ARGAND – GAUSS. Para maiores detalhes sobre o assunto ver Boyer (1974)

⁴veja a noção de vetores por exemplo em Reis e Silva (1996)

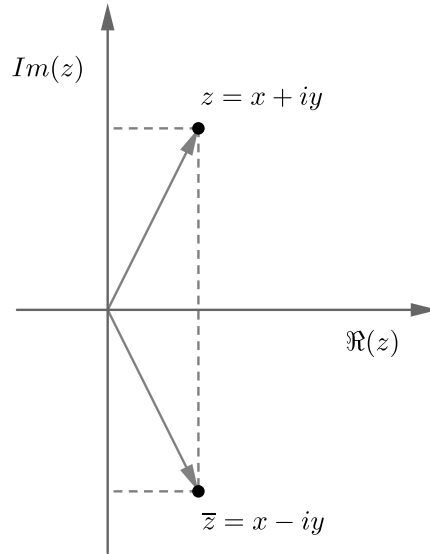


Figura 1.7: Complexo conjugado

Uma consequência da definição 1.2.3 é a seguinte:

Proposição 1.2.1. *Dados complexos $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, então*

$$(i) \quad x = \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}.$$

$$(ii) \quad y = \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

(iii) z é real se, e somente se, $z = \bar{z}$.

$$(iv) \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

$$(v) \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Demonstração. Para provar (i) basta observemos que,

$$z + \bar{z} = x + yi + x - yi = 2x = 2\Re(z),$$

de modo análogo prova-se (ii).

Agora para (iii), temos

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0,$$

de (ii) obtemos,

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$$

logo

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z = \Re(z).$$

Para (iv), observemos que

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - (y_1 + y_2)i = (x_1 - y_1i) + (x_2 - y_2i);$$

em outras palavras,

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Da definição 1.2.2

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\ &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

e pela definição 1.2.3 a equação (1.15) fica

$$\begin{aligned} \overline{z_1 z_2} &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) - i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ &= x_1(x_2 - iy_2) - y_1(y_2 + ix_2) \\ &= x_1(x_2 - iy_2) - iy_1(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Portanto da expressão (1.16), concluímos que

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

□

Definição 1.2.4. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, o número real não negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado valor absoluto, ou módulo, do número complexo $z = x + yi$ $|z|$, ou seja,

$$|z| = |x + yi| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.17}$$

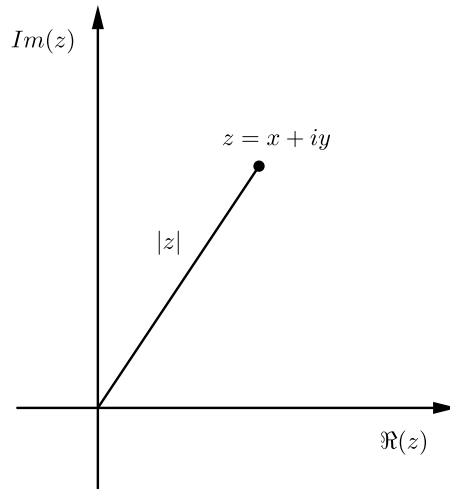


Figura 1.8: Módulo do complexo z .

Geometricamente, conforme a figura 1.8, o valor absoluto de z é o comprimento do vetor z ; é a distância entre o ponto z e a origem 0 . Como consequência da definição 1.2.4, o número real $|z_2 - z_1|$ representa a distância entre complexos z_1 e z_2 , pois da expressão (1.17), temos

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.18)$$

Proposição 1.2.2. *Dados complexos $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, então*

(i) $z\bar{z} = |z|^2$.

(ii) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

(iii) $\Re(z) \leq |z|$ e $\text{Im}(z) \leq |z|$.

(iv) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (*desigualdade triangular*).

Demonstração. Pela definição 1.2.2,

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2,$$

portanto da definição 1.2.4, concluímos a prova de (i). Usando (i) e a proposição 1.2.1, temos que

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad (1.19)$$

Como o conjunto \mathbb{C} é comutativo com respeito a multiplicação, a equação (1.19) fica

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2,$$

ou seja,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

Para a prova de (iii), observemos que todo $x \in \mathbb{R}$ temos que $x \leq |x|$, e como

$$x^2 \leq x^2 + y^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

então, para todo $z = x + iy$ complexo, segue da definição 1.2.4 que a parte real \Re é

$$\Re(z) \leq |\Re(z)| \leq |z|,$$

de modo totalmente análogo prova-se $Im(z) \leq |z|$. Usando, (i) desta proposição, o item (iv) da proposição 1.2.1 e a propriedade distributiva temos

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2 \bar{z}_2, \end{aligned} \tag{1.20}$$

por outro lado, lembremos que $\overline{\bar{z}} = z$, e usando a proposição 1.2.1 (i), temos

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2} = 2\Re(z_1 \bar{z}_2). \tag{1.21}$$

Substituindo a equação (1.21) na equação (1.20) e usando o item (iii) desta proposição temos

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1| |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

□

Agora justificamos a expressão z^{-1} , dada na propriedade (vi) (existência do elemento inverso). Para $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$, usando a proposição 1.2.2, temos

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad (1.22)$$

se $z = x + iy$, então substituindo esta expressão na equação (1.22), obtemos

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Conforme destacamos anteriormente, um número complexo pode ser visto como um vetor tendo início na origem do plano, conforme a figura 1.6, então todo número complexo não nulo tem direção módulo e sentido. Como consequência definimos o seguinte:

Definição 1.2.5. *Dado um número complexo $z = x + iy$, tal que $|z| = r$, e θ o ângulo formado com o eixo real positivo (conforme a figura 1.9), definimos a representação polar ou forma polar do complexo z por*

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad r \geq 0, \quad (1.23)$$

ou seja,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta. \quad (1.24)$$

Na definição 1.2.5, o ângulo θ é chamado *argumento* de z e denotado por $\arg z$. Quando $z \neq 0$, os valores de θ são determinados segundo a expressão (1.24), para $x \neq 0$ é equivalente a

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad (1.25)$$

e quando $x = 0$ basta usar basicamente a expressão (1.24). Entretanto, o θ em questão não é único, pois, nas equações (1.24), $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$ são funções periódicas de θ com período 2π radianos, isto é, se θ é um argumento para o complexo z , segue que $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, também é um argumento para o complexo z .

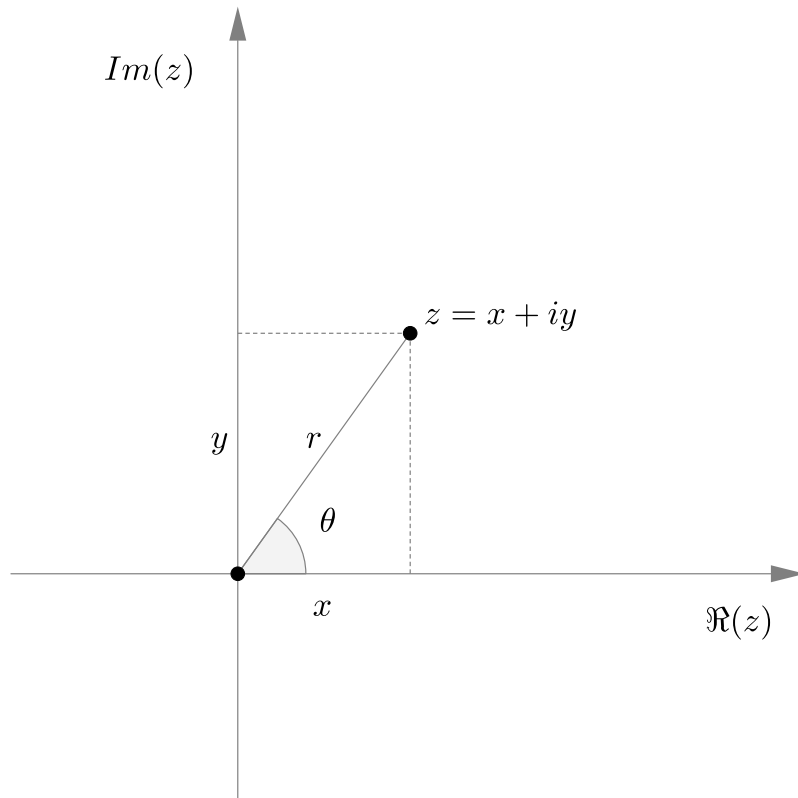


Figura 1.9: Representação polar

Quando z está representado na forma polar (1.23), então a forma polar do seu conjugado é

$$\bar{z} = r[\cos(-\theta) + i\text{sen}(-\theta)]. \quad (1.26)$$

Assim, um dos valores de $\arg \bar{z}$ é $-\arg z$.

Exemplo 1.2.2. Dados os complexos $z_1 = iy$, com $y > 0$ e $z_2 = 1 - i$. Da expressão (1.24), temos que

$$r_1 = |iy| = y \quad e \quad \theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

logo, a forma polar de z_1 é

$$z_1 = y \left(\cos \frac{\pi}{2} + i\text{sen} \frac{\pi}{2} \right),$$

e para z_2 temos

$$r_2 = |1 - i| = \sqrt{2} \quad e \quad \theta_2 = \frac{7\pi}{4},$$

logo, a forma polar de z_2 é

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right).$$

Dados dois complexos não nulos z_1 e z_2 , iremos agora dar um destaque melhor na representação geométrica do complexo $z_1 z_2$. Para isto, escremos a forma polar de z_1 e z_2 , isto é

$$\begin{cases} z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \\ z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2). \end{cases} \quad (1.27)$$

Pela equação (1.27) temos,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1) \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Lembremos das expressões seno e cosseno para soma de arcos que pode ser encontrada em Muniz Neto (2013) que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a + b) &= \operatorname{sen}(a) \cos(b) + \operatorname{sen}(b) \cos(a) \\ \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \operatorname{sen}(a) \operatorname{sen}(b). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Substituindo as equações (1.29) na equação (1.28), obtemos

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \right),$$

ou seja, no sentido geométrico, para adquirir o número complexo produto, conforme a figura 1.10, basta multiplicar os módulos dos complexos dados e somar os seus argumentos.

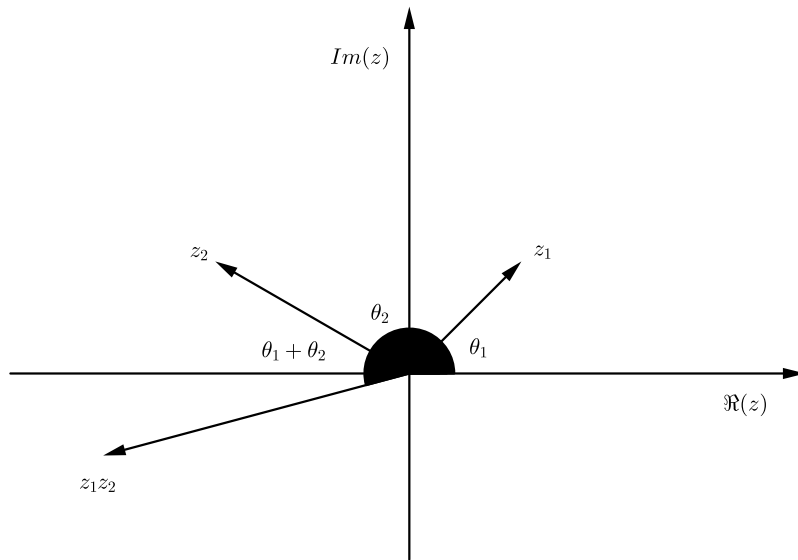


Figura 1.10: Produto entre dois complexos

Proposição 1.2.3. (Fórmula de De Moivre)

Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta. \quad (1.30)$$

Demonstração. Para prova deste resultado usaremos indução⁵ sobre n .

No caso $n = 1$ a expressão (1.30) é trivialmente satisfeita. Suponhamos então, que expressão (1.30) seja verdadeira para um certo n , então

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} = (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

usando a hipótese de indução e as expressões (1.29), obtemos

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^{n+1} &= (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ &= (\cos n\theta \cos \theta - \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} \theta) + i(\operatorname{sen} n\theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos n\theta) \\ &= \cos [(n+1)\theta] + i \operatorname{sen} [(n+1)\theta]. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue o resultado desejado. □

No que segue, iremos mostrar como fazer para calcular raiz n -ésima para um

⁵Para o leitor familiarizar melhor sobre o assunto, ver Domingues e Iezzi (2003).

número complexo.

Definição 1.2.6. Diz-se que um número w é raiz n -ésima (onde $n \in \mathbb{N}$) de um dado número complexo z se $w^n = z$.

Iremos então encontrar uma expressão algébrica, para a definição 1.2.6. Para isto, sejam $z, w \in \mathbb{C}$ não nulos, satisfazendo a equação

$$w^n = z. \quad (1.31)$$

Pela definição 1.2.5, temos

$$\begin{aligned} z &= r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \\ w &= p(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Substituindo as expressões (1.32) na equação (1.31) e aplicando a fórmula de De Moivre, obtemos:

$$p^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

daí, obtemos

$$p^n \cos n\alpha = r \cos \theta \quad \text{e} \quad p^n \operatorname{sen} n\alpha = r \operatorname{sen} \theta.$$

Da relação fundamental da trigonometria⁶

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1,$$

temos,

$$\begin{aligned} (p^n \cos n\alpha)^2 + (p^n \operatorname{sen} n\alpha)^2 &= p^{2n} \\ (r \cos \theta)^2 + (r \operatorname{sen} \theta)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

daí, concluímos que $p^n = r$, e como consequência

$$\cos n\alpha = \cos \theta \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} n\alpha = \operatorname{sen} \theta.$$

⁶veja por exemplo em Muniz Neto (2013)

Logo,

$$p^n = r, \quad n\alpha = \theta + 2k\pi,$$

onde k é um número inteiro. Portanto as raízes n -ésimas de z , são dadas pela fórmula

$$w = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right),$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Como as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π , segue que as raízes n -ésimas de z , são

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad (1.33)$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Exemplo 1.2.3. Dado o complexo $z = -i$, iremos encontrar as raízes cúbicas de z e fazer uma interpretação geométrica.

Primeiramente, denotando $\theta = \arg z$ temos

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1 \\ \cos \theta &= \frac{0}{1} = 0 \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{-1}{1} = -1, \end{aligned}$$

segue daí que

$$r = 1 \quad e \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \quad (1.34)$$

Substituindo as expressões (1.34) na equação (1.33) temos

$$w_k = \cos \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right),$$

com $k = 0, 1, 2$.

- Para $k = 0$, temos

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2}}{3} = \frac{3\pi}{6}.$$

- Para $k = 1$, temos

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{\frac{7\pi}{2}}{3} = \frac{7\pi}{6}.$$

• Para $k = 2$, temos

$$\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \frac{\frac{3\pi}{2} + 4\pi}{3} = \frac{\frac{11\pi}{2}}{3} = \frac{11\pi}{6}.$$

Notemos que $\frac{3\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ é uma PA de razão $\frac{2\pi}{3}$. Por outro lado, as raízes cúbicas de $z = -i$ são:

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = i \\ w_1 &= \cos \frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ w_2 &= \cos \frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Geometricamente, as três raízes cúbicas de $z = -i$ estão sobre uma circunferência de raio $|w| = 1$ e dividem a circunferência em três arcos congruentes de comprimento $\frac{2\pi}{3}$, formando um triângulo equilátero de vértices w_0, w_1 e w_2 , conforme a figura 1.11. Em geral, quando $n > 3$ a figura que representa as raízes enésimas é um polígono regular de n lados.

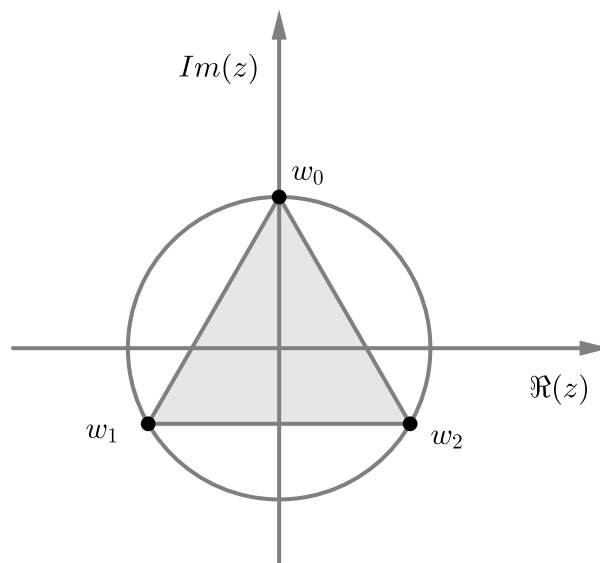


Figura 1.11: Representação geométrica das raízes cúbicas de $-i$

Para finalizar este capítulo, iremos definir exponencial de um números complexo

z . Para isto, quando $z = t \in \mathbb{R}$, temos a expansão em série de Taylor⁷ de e^t dada por

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \quad (1.35)$$

Na equação (1.35), suponha que possamos substituir $t \in \mathbb{R}$ por $iy \in \mathbb{C}$ (imaginário puro), daí temos

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots,$$

ou seja,

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} \dots\right) + i \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right). \quad (1.36)$$

Na equação (1.36), a parte real de e^{iy} e a parte imaginária são expansões das séries de Taylor do *cosy* e *sen y*, respectivamente.

Daí, segue que

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y,$$

então, como consequência, temos a seguinte:

Definição 1.2.7. *Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$, definimos a exponencial do complexo z por*

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Segue, então, da definição 1.2.7 que as equações (1.23) e (1.26) podem de ser reescritas como

$$z = re^{i\theta}, \quad \text{e} \quad \bar{z} = re^{-i\theta}. \quad (1.37)$$

Daí, podemos reescrever z_1 e z_2 do Exemplo 1.2.2 por

$$z_1 = ye^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{e} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

Proposição 1.2.4. *Dados $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ com*

$$z = x + iy, \quad z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{e} \quad z_2 = x_2 + iy_2,$$

então:

⁷Série de Taylor de uma função é a expansão da função em série. Para maiores detalhes, ver por exemplo Muniz Neto (2015).

$$(i) e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2};$$

$$(ii) \frac{1}{e^z} = e^{-z};$$

$$(iii) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2};$$

$$(iv) (e^z)^n = e^{nz}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N};$$

$$(v) e^{z+2\pi i} = e^z;$$

$$(vi) |e^z| = e^x.$$

A prova deste resultado, segue como consequência imediata, das propriedades anteriores em coordenadas polares para fórmula do produto, fórmula de De Moivre, e das propriedades das funções trigonométricas seno e cosseno. Para maiores detalhes ver Ávila (2011).

Capítulo 2

Geometria analítica no plano complexo

Neste capítulo serão abordados conceitos geométricos de reta e cônicas dentro do conjunto dos números complexos, que serão utilizados durante a dissertação. A maioria dos resultados que destacaremos neste capítulo são baseados em Ávila (2011), Brown (2015), Raiz (2018), Delgado e Fresnel (2013), Reis e Silva (1996) e Soares (2001).

2.1 Introdução: geometria analítica no conjunto dos números complexos

Inicialmente iremos discutir sobre a geometria analítica em \mathbb{R}^2 com alguns resultados que já são conhecidos no conjunto dos números complexos. As equações da reta e de algumas cônicas não serão mais apresentadas em função de x e y de \mathbb{R}^2 , mas em função de z e \bar{z} de \mathbb{C} .

2.1.1 Equação da reta

Para começar, conforme a observação 2, não iremos fazer distinção entre os conjuntos \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 . Por outro, observamos que quando usamos as operações estabelecidas na

definição 1.2.2, dizemos que tais conjuntos são isomorfos¹ e denotados por

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

Definição 2.1.1. A reta $r \subset \mathbb{C}$ que passa pelos pontos distintos P e Q , é o conjunto de todos os pontos $X \in \mathbb{C}$, tais que, os vetores \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{PX} sejam paralelos. Olhemos aqui, por exemplo, o vetor \overrightarrow{PQ} , como sendo a diferença dos complexos P e Q , ou seja,

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P,$$

Iremos, primeiramente, determinar uma expressão algébrica para a definição 2.1.1. Assim, pela definição 2.1.1, segue que $X \in r$ se, e somente se,

$$\det(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PX}) = \det(X - P, Q - P) = 0.$$

Se

$$P = x_0 + y_0i = (x_0, y_0), \quad Q = x_1 + y_1i = (x_1, y_1) \quad \text{e} \quad X = x + yi = (x, y),$$

segue então, que $X \in r$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = (y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

ou ainda, fazendo $y_1 - y_0 = a$ e $x_1 - x_0 = -b$, isto é, $Q - P = (-b, a)$, vem que $X = (x, y) \in r$ se, e somente se,

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0.$$

Então, se denotarmos $(ax_0 + by_0) = c$, tem-se que $X = (x, y) \in r$ se, e somente se,

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

¹Dois corpos $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$ são ditos isomorfos se existe uma aplicação $f : A \rightarrow B$ tal que, para quaisquer que sejam $x, y \in A$;

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(xy) = f(x)f(y)$;

(ii) f for uma bijeção.

Na definição 2.1.1 P e Q são distintos, ou seja, $Q - P = (-b, a) \neq 0$, o que assegura que a e b em 2.1 não são simultaneamente nulos, isto é, a equação (2.1) é uma equação de 1º grau em x e y , neste caso, chamamos a equação (2.1) de equação cartesiana da reta em \mathbb{R}^2 . Em seguida, iremos colocar a equação (2.1) nas variáveis z e \bar{z} . Para isto, dado o complexo $z = x + iy$, segue da proposição 1.2.3 que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \quad (2.2)$$

Substituindo as identidades da equação (2.2) na equação (2.1), temos

$$a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) - b \left(\frac{zi - \bar{z}i}{2} \right) = c,$$

ou seja,

$$az + a\bar{z} + b\bar{z}i - bzi = 2c,$$

isto é,

$$(a - bi)z + (a + bi)\bar{z} = 2c.$$

Dessa forma, a equação da reta r que passa pelos complexos P e Q , nas variáveis z e \bar{z} com coeficientes em \mathbb{C} se escreve como

$$\bar{W}z + W\bar{z} = C, \quad (2.3)$$

onde $W = a + bi \in \mathbb{C}$ e $C = 2c$. Lembremos, neste caso que:

$$P - Q = (-b, a) = -b + ai = Wi.$$

Exemplo 2.1.1. *Dados os complexos $z_1 = 2$ e $z_2 = -1 + 3i$, iremos determinar a equação da reta que passa por z_1 e z_2 .*

Queremos encontrar uma equação na forma (2.3). Para isto, considere $W = a + bi$ e substitua os complexos z_1 e z_2 na equação (2.3), temos

$$(a - bi)2 + (a + bi)2 = C \iff 4a = C,$$

e

$$(a - bi)(-1 + 3i) + (a + bi)(-1 - 3i) = C \iff -2a + 6b = C.$$

Portanto, resolvendo o seguinte sistema, temos

$$\begin{cases} 4a = C \\ -2a + 6b = C \end{cases} \Rightarrow 4a = -2a + 6b \Rightarrow b = a.$$

Dessa forma $W = a + ai$ com $a \neq 0$. Tomando $a = 1$, a equação da reta no plano complexo que passa por z_1 e z_2 como mostra a figura 2.1 é dada por

$$(1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 4.$$

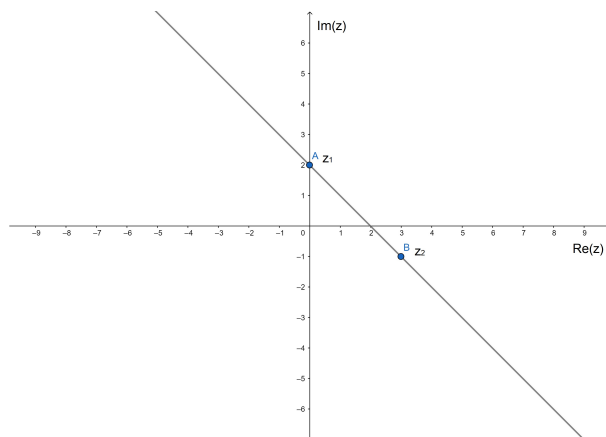


Figura 2.1: Reta de equação $(1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 4$.

Definição 2.1.2. Dados os números complexos $z_0 = x_0 + iy_0$ e $W = a + ib$, definimos por uma equação paramétrica da reta que passa por z_0 e é paralela a direção de w (veja a figura 2.2),

$$z = z_0 + wt$$

com $t \in \mathbb{R}$.

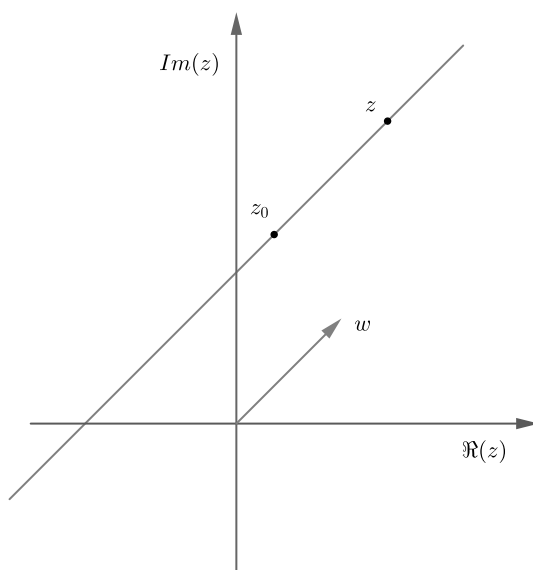


Figura 2.2: Reta paralela a direção de w

Exemplo 2.1.2. Dados os números complexos $z_0 = 1 + i3$ e $w = 1 + i$. Iremos determinar a equação da reta que passa por z_0 e é paralela a direção de w . Para isto, basta substituir z_0 e w na definição 2.1.2, que obteremos

$$z = (1 + i3) + (1 + i)t = (1 + t) + i(3 + t),$$

com $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.1.3. Dados os números complexos w e $\frac{1}{\bar{w}}$, com $w \neq 0$ e $|w| \neq 1$. Iremos determinar a equação cartesiana da reta mediatriz do segmento de extremos w e $\frac{1}{\bar{w}}$. Para isto, primeiramente, encontraremos a equação paramétrica de tal reta. O ponto médio do segmento

$$\frac{w + \frac{1}{\bar{w}}}{2} = \frac{|w|^2 + 1}{2\bar{w}},$$

pertence a mediatriz. Por um lado como, pela equação (1.22)

$$\frac{1}{\bar{w}} = \frac{w}{|w|^2},$$

então, o segmento que passa por w e $\frac{1}{\bar{w}}$ é paralelo a direção de w . Por outro lado, se $w = a + ib = (a, b)$, segue que $iw = -b + ia = (-b, a)$, segue daí, que w e iw são

perpendiculares². Logo a equação paramétrica da mediatriz do segmento de extremos w e $\frac{1}{\bar{w}}$ é

$$z = \frac{|w|^2 + 1}{2\bar{w}} + twi, \quad \text{com } t \in \mathbb{R}, \quad (2.4)$$

e daí

$$\bar{z} = \frac{|w|^2 + 1}{2w} - t\bar{w}i, \quad \text{com } t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Adicionando as equações (2.4) e (2.5) e simplificando o resultado obtemos

$$\bar{w}z + w\bar{z} - |w|^2 - 1 = 0.$$

2.1.2 Equação do círculo

Definição 2.1.3. Um círculo Π é definido com o conjunto de todos os pontos que estão a uma distância constante r de um complexo fixo $z_0 = x_0 + y_0i$, chamado de centro do círculo, sendo r o seu raio. Se $r = 0$, o círculo consiste num único ponto z_0 . Se $z = x + iy \in \Pi$, pela equação (1.18), temos

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \quad (2.6)$$

Na definição 2.1.3 a equação (2.6) é conhecida como equação reduzida do círculo de centro em $(x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ e raio r . Iremos colocar a equação (2.6) em função de z e \bar{z} . Para isto, observemos que a equação (2.6) é equivalente a

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = r^2,$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 = r^2 - (x_0^2 + y_0^2).$$

Assim, se $a = -2x_0$, $b = -2y_0$ e $c = r^2 - (x_0^2 + y_0^2)$, a equação geral de um círculo Π é definida por

$$\Pi : x^2 + y^2 + ax + by = c \quad (2.7)$$

²Dois vetores $\vec{u}(x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são perpendiculares, se, e somente se

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = 0.$$

com centro em

$$-\frac{a}{2}, -i\frac{b}{2} \text{ e raio } \sqrt{c + x_0^2 + y_0^2}.$$

Da proposição 1.2.2 item (i), temos

$$x^2 + y^2 = z\bar{z} = |z|^2. \quad (2.8)$$

Substituindo as equações (2.2) e (2.8) na equação (2.7), obtemos:

$$z\bar{z} + a\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{\bar{z}i - zi}{2}\right) = c,$$

ou seja,

$$|z|^2 + \left(\frac{a - bi}{2}\right)z + \left(\frac{a + bi}{2}\right)\bar{z} = c.$$

Assim, a equação do círculo Π em relação as variáveis z e \bar{z} é definida por

$$\Pi : |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c \quad (2.9)$$

onde $B = \frac{a + bi}{2}$, $c \in \mathbb{R}$

Logo o círculo Π dado na equação (2.9) tem centro $z_0 = -\frac{B + \bar{B}}{2} - \frac{B - \bar{B}}{2}$ e raio $r = \sqrt{c + |B|^2}$.

Exemplo 2.1.4. Dado o círculo π_1 , cuja equação em \mathbb{C} é dada por

$$|z|^2 + (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} = 0.$$

Iremos encontrar o centro, o raio e fazer uma representação geométrica de π_1 . Neste caso, da equação (2.9), temos

$$B = 1 - 2i, \quad \bar{B} = 1 + 2i \quad \text{e} \quad c = 0,$$

segue daí, que o centro e raio são respectivamente:

$$z_0 = -\frac{B + \bar{B}}{2} - \frac{B - \bar{B}}{2} = -1 + 2i \quad \text{e} \quad r = \sqrt{c + |B|^2} \Rightarrow r = \sqrt{0 + 5} = \sqrt{5}.$$

Assim, o círculo π_1 tem centro $z_0 = -1 + 2i$ e raio $\sqrt{5}$, como pode ser visto na figura 2.3.

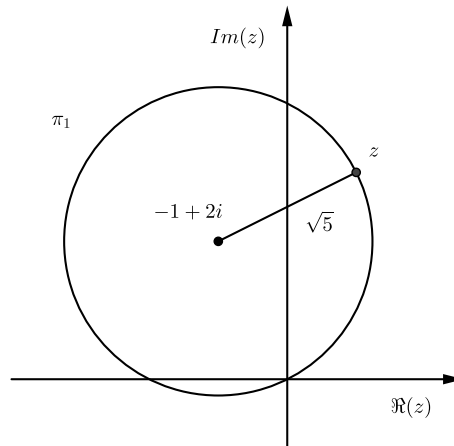


Figura 2.3: Círculo de centro $-1 + 2i$ e raio $\sqrt{5}$

2.1.3 Equação da elipse

Definição 2.1.4. *Sejam F_1 e F_2 dois complexos fixos e seja $2c$ o comprimento do segmento F_1F_2 , isto é,*

$$|F_1 - F_2| = 2c.$$

Se a for um número real maior que c , o conjunto dos complexos P tais que

$$|P - F_1| + |P - F_2| = 2a \tag{2.10}$$

é chamado de elipse.

“Uma elipse é um conjunto de pontos P de um plano tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante. Cada um dos pontos F_1 e F_2 é chamado um foco da elipse.” Murdoch (1978)³

Observação 3. *Nesta observação, iremos destacar algumas das terminologias de uma elipse ξ .*

- (i) Os complexos F_1 e F_2 destacados na definição 2.1.4 são os focos da elipse e a reta r que os contém é chamada reta focal;*

³Capítulo 6, página 117

(ii) O centro da elipse é o complexo O_1 dado por

$$O_1 = \frac{F_1 + F_2}{2};$$

(iii) A reta não focal é a reta r' perpendicular a reta focal r que passa pelo complexo O_1 ;

(iv) A interseção da reta focal r com a elipse ξ , consiste em dois complexos que denotamos por A_1 e A_2 , o segmento de extremidades A_1 e A_2 é dito eixo focal e seu comprimento é

$$|A_1 - A_2| = 2a;$$

(v) A interseção da reta não focal r' com a elipse ξ , consiste em dois complexos que denotamos por B_1 e B_2 , o segmento de extremidade B_1 e B_2 é dito eixo não focal e seu comprimento é

$$|B_1 - B_2| = 2b,$$

de modo que $b^2 = a^2 - c^2$, como podemos observar na figura 2.4.

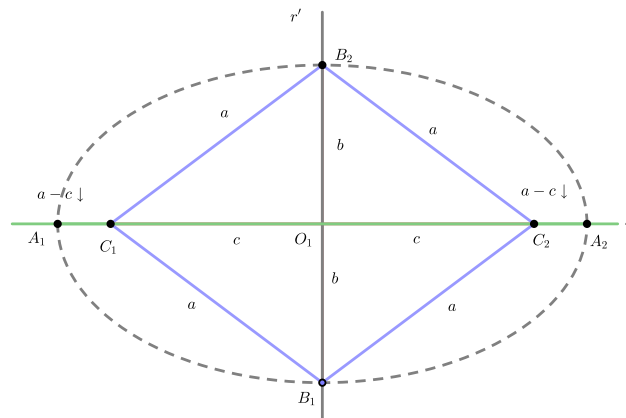


Figura 2.4: Elipse

Iremos agora determinar uma equação algébrica para a definição 2.1.4 em certo caso particular. Admitiremos um sistema de coordenadas de modo que o eixo $\Re(z)$ passa por F_1 e F_2 e o eixo $\Im(z)$ sendo a mediatriz do segmento F_1F_2 em $0 = 0 + i0$, ou seja, reta focal $\Re(z)$ que é equivalente a dizer que $\frac{z - \bar{z}}{2i} = 0$ e reta não focal $\frac{z + \bar{z}}{2} = 0$. Nestas condições, se $F_1F_2 = 2c$ então as coordenadas dos focos são $F_1 = (-c, 0) = -c + i0$ e $F_2 = (c, 0) = c + i0$. Se $P = (x, y) = x + iy$ for um complexo qualquer pertencente a

elipse, a equação (2.10) pode ser escrita na forma

$$\xi : \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2.11)$$

Reescrevendo a equação (2.11)

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

ou seja,

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx,$$

daí, temos que

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (2.12)$$

Como $a > c$, $a^2 - c^2$ é um número positivo, ou seja, existe (em particular) um número real positivo b , tal que $b^2 = a^2 - c^2$. Com isto, reescrevendo a equação (2.12), obtemos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

ou seja,

$$\xi : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.13)$$

Na equação (2.13), fazendo uma translação da elipse ξ pelo complexo $z_0 = x_0 + iy_0$, em relação ao sistema de coordenadas dado anteriormente, obtemos a elipse ξ' que possui a equação reduzida

$$\xi' : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.14)$$

Nosso objetivo, é encontrar uma expressão para a equação (2.14) em função de z e \bar{z} . Para isto, desenvolvendo a equação reduzida da elipse ξ' (equação (2.14)), obtemos sua equação geral

$$\frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yy_0 + y_0^2}{b^2} = 1,$$

ou seja,

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2xx_0 - 2a^2yy_0 = a^2b^2 - b^2x_0^2 - a^2y_0^2. \quad (2.15)$$

Na equação (2.15), substituindo $A = b^2, C = a^2, D = -2b^2x_0, E = -2a^2y_0$ e

$F = a^2b^2 - (b^2x_0^2 + a^2y_0^2)$, obtemos

$$\xi' : Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F. \quad (2.16)$$

Reescrevendo a equação (2.16) nas variáveis z e \bar{z} temos:

$$A \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + C \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 + D \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + E \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) = F,$$

com alguns ajustes algébricos, obtemos

$$\left(\frac{A - C}{4} \right) (z^2 + \bar{z}^2) + \left(\frac{A + C}{2} \right) z\bar{z} + \left(\frac{D - Ei}{2} \right) z + \left(\frac{D + Ei}{2} \right) \bar{z} = F.$$

Assim, denotando,

$$G = \frac{b^2 - a^2}{4}, H = \frac{b^2 + a^2}{2}, F = a^2b^2 - (b^2x_0^2 + a^2y_0^2) \text{ e } B = -b^2x_0 - a^2y_0i, \quad (2.17)$$

temos que a equação da elipse ξ' em \mathbb{C} é dada por

$$\xi' : G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F.$$

Exemplo 2.1.5. *Dados os complexos $z_1 = -1 + 5i$, $u_1 = 3 + 2i$ e $u_2 = -5 + 2i$, iremos encontrar a equação da elipse ξ que passa por z_1 , e cuja os focos são u_1 e u_2 . Para isto, primeiramente encontraremos os coeficientes a , b e c citados acima. Pela definição 2.1.4*

$$|u_1 - u_2| = 2c,$$

mas como $u_1 - u_2 = 8$, concluímos que $c = 4$, além disso, observemos que o ponto médio de u_1, u_2 é $o_1 = -1 + 2i$ que é o centro da elipse procurada, ou seja, $x_0 = -1$ e $y_0 = 2$ e, os focos u_1 e u_2 pertence a reta $\frac{z - \bar{z}}{2} = 2i$ que é paralela ao eixo $\Re(z)$, conforme a figura 2.5.

Por outro lado, novamente pela definição 2.1.4

$$|z_1 - u_1| + |z_2 - u_2| = 2a,$$

como

$$z_1 - u_1 = -4 + 3i \quad e \quad z_1 - u_2 = -4 + 3i,$$

obtemos:

$$2a = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} + \sqrt{(-4)^2 + 3^2},$$

ou seja,

$$a = 5,$$

além do mais, a constante b é dada pela equação $b^2 = a^2 - c^2$, sendo assim, $b = 3$.

Substituindo as constantes $a = 5, b = 3, c = 4, x_0 = -1, y_0 = 2$ na equação (2.17), obtemos:

$$G = -4, H = 17, F = 116, B = 9 - 50i. \quad (2.18)$$

Da equação (2.18), concluímos que a equação da elipse ξ solicitada é dada por

$$-4(z^2 + \bar{z}^2) + 17|z|^2 + (9 + 50i)z + (9 - 50i)\bar{z} = 116.$$

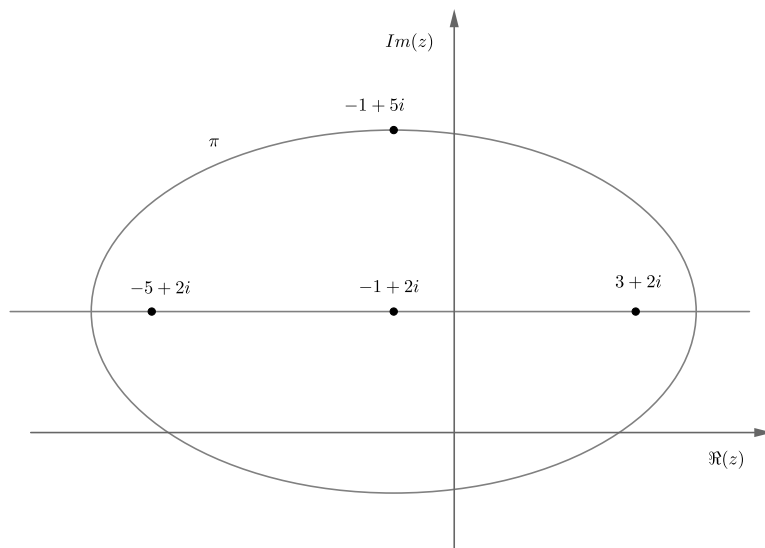


Figura 2.5: Elipse

2.1.4 Equação da hipérbole

Tanto a definição e muitas propriedades da hipérbole são parecidas com as da elipse, assim faremos apenas um resumo na explicação da hipérbole.

Definição 2.1.5. *Sejam dois complexos F_1, F_2 e denote a distância entre eles por $2c$, isto é,*

$$|F_1 - F_2| = 2c.$$

Seja a um número real positivo, tal que $a < c$, o conjunto dos complexos P para os quais

$$\left| |P - F_1| - |P - F_2| \right| = 2a \quad (2.19)$$

é chamado de hipérbole.

Observação 4. *Nesta observação, iremos destacar algumas das terminologias de uma hipérbole H , que pode ser observada na figura 2.6.*

(i) *Os complexos F_1 e F_2 destacados na definição 2.1.5 são os focos da hipérbole e a reta r que os contém é a reta focal;*

(ii) *O centro da hipérbole é o complexo O_1 dado por*

$$O_1 = \frac{F_1 + F_2}{2};$$

(iii) *A reta não focal é a reta r' perpendicular a reta focal r que passa pelo complexo O_1 ;*

(iv) *A interseção da reta focal r com a Hipérbole H , consiste em dois complexos que denotamos por A_1 e A_2 . O segmento de extremidade A_1 e A_2 é dito eixo focal e seu comprimento é*

$$|A_1 - A_2| = 2a;$$

(v) *A interseção da reta não focal r' com a Hipérbole H , consiste em dois complexos que denotamos por B_1 e B_2 . O segmento de extremidade B_1 e B_2 é dito eixo não focal e seu comprimento é*

$$|B_1 - B_2| = 2b,$$

onde $b^2 = c^2 - a^2$;

(vi) *O retângulo de base da hipérbole H é o retângulo cujos lados têm A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios. As retas que contêm as diagonais do retângulo de base são as assíntotas. Segue que as assíntotas são retas que passam pelo centro e tem inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação a reta focal.*

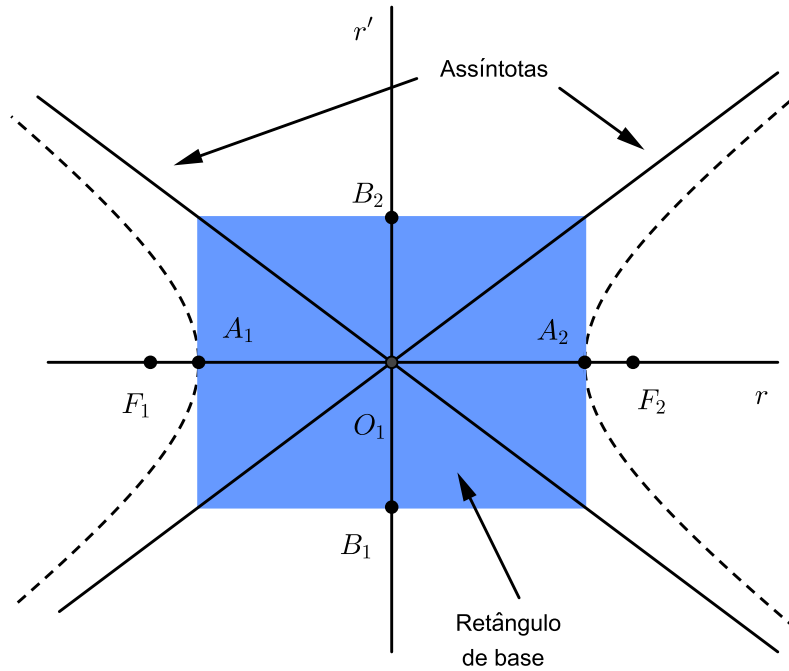


Figura 2.6: Hipérbole

Como fizemos no caso da elipse, iremos determinar uma equação algébrica para a definição 2.1.5 em certo caso particular. Tomemos a origem do sistema de coordenadas usual como centro da hipérbole H , o eixo $\Re(z)$ passando por F_1 e F_2 e o eixo $Im(z)$ sendo a mediatriz do segmento F_1F_2 em $0 = 0 + i0$. Se $F_1F_2 = 2c$ então as coordenadas dos focos são $F_1 = (-c, 0) = -c + i0$ e $F_2 = (c, 0) = c + i0$. Se $P = (x, y) = x + iy$ for um complexo arbitrário, de acordo com a equação (2.19), P pertence a hipérbole H se, e somente se,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Procedendo de modo análogo ao da elipse, e denotando $b^2 = c^2 - a^2$, concluímos que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.20)$$

é a equação canônica da hipérbole H .

Na equação (2.20), fazendo uma translação da hipérbole H pelo complexo $z_0 = x_0 + iy_0$, em relação ao sistema de coordenadas dado anteriormente, obtemos a hipérbole H' que possui a equação reduzida

$$H' : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.21)$$

A partir equação (2.21), podemos obter a equação geral da hipérbole H' como

$$\frac{x^2 - 2x_0x + x_0^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2y_0y + y_0^2}{b^2} = 1$$

Logo, procedendo de maneira análoga ao método utilizado para determinar a equação da elipse, concluímos que a equação geral da hipérbole H' é dada por

$$H' : Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey = F \quad (2.22)$$

de modo que $A = b^2, C = -a^2, D = -2b^2x_0, E = 2a^2y_0$ e $F = a^2b^2 - 2b^2x_0^2 + 2a^2y_0^2$.

Colocando nas variáveis z e \bar{z} na equação (2.22), obtemos:

$$H' : G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F, \quad (2.23)$$

em que

$$G = \frac{a^2 + b^2}{4}, H = \frac{b^2 - a^2}{2}, F = a^2b^2 - b^2x_0^2 + a^2y_0^2 \text{ e } B = -b^2x_0 + a^2y_0i. \quad (2.24)$$

Observemos que a equação (2.23) é obtida no caso em que o eixo focal é paralelo ao eixo $\Re(z)$, e podemos mostrar de modo análogo, quando o eixo focal é paralelo ao eixo $Im(z)$, que a equação é dada por

$$H'' : -G(z^2 + \bar{z}^2) + H|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = F, \quad (2.25)$$

de modo que

$$G = \frac{a^2 + b^2}{4}, H = \frac{b^2 - a^2}{2}, F = a^2b^2 + a^2x_0^2 - b^2y_0^2 \text{ e } B = a^2x_0 - b^2y_0i. \quad (2.26)$$

Exemplo 2.1.6. *Dados os complexos $w_1 = 2 - i$ e $w_2 = 2 + 5i$, iremos encontrar a equação da hipérbole H cujos focos são w_1 e w_2 e cujo eixo focal seja igual a 4, como mostra a figura 2.7. Para isto, pela observação 4 (ii), temos que o centro da hipérbole H*

é

$$z_0 = \frac{(2 - i) + (2 + 5i)}{2} = 2 + 2i,$$

e na mesma observação (iv)

$$2a = 4 \iff a = 2,$$

e pela definição 2.1.5, como $w_1 - w_2 = -6i$, segue que $c = 3$, daí temos também que

$$b^2 = 9 - 4 \iff b = \sqrt{5}.$$

Logo temos as seguintes informações: $a = 2, b = \sqrt{5}, c = 3, x_0 = 2$ e $y_0 = 2$, das expressões na equação (2.26), temos

$$G = \frac{9}{4}, \quad H = \frac{1}{2}, \quad F = 16, \quad B = 8 - 10i,$$

substituindo na equação (2.25), obtemos

$$-\frac{9}{4}(z^2 + \bar{z}^2) + \frac{1}{2}|z|^2 + (8 + 10i)z + (8 - 10i)\bar{z} = 16.$$

Com as informações dadas, podemos também encontrar as retas assíntotas. Como as mesmas tem inclinação

$$\pm \frac{2}{\sqrt{5}},$$

segue que as assíntotas são, respectivamente, paralelas a direção dos complexos $\sqrt{5} \pm 2i$ e passam pelo complexo $2 + 2i$, segue então que as mesmas tem equações paramétricas, de acordo com a definição 2.1.2,

$$\begin{cases} z = 2 + 2i + (\sqrt{5} + 2i)t \\ z = 2 + 2i + (\sqrt{5} - 2i)t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{R}$.

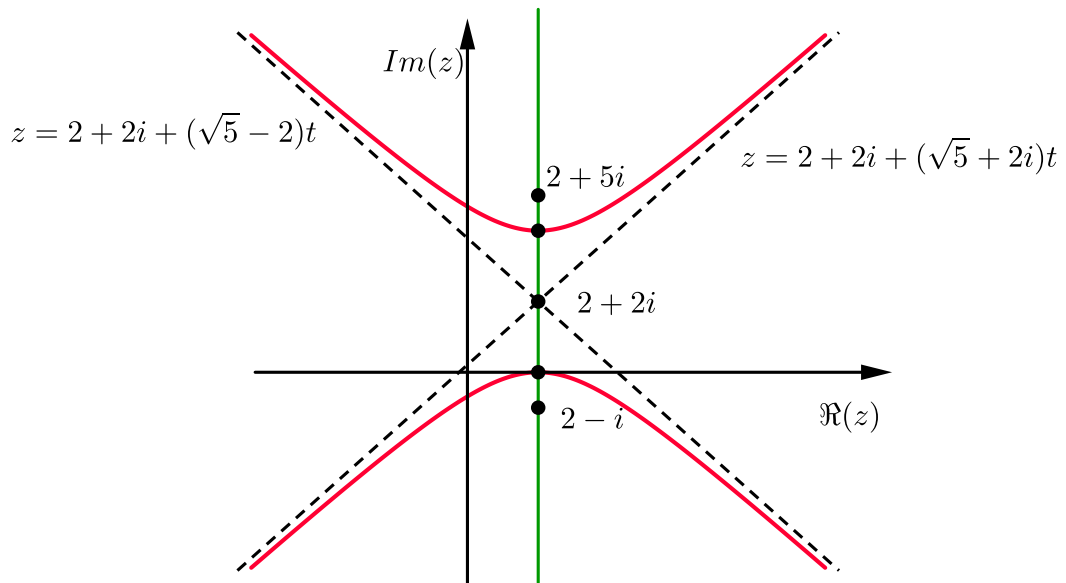


Figura 2.7: Hipérbole do exemplo 2.1.6.

2.2 Transformações elementares no conjunto dos números complexos

Definição 2.2.1. *Uma transformação complexa é uma função*

$$T : D(T) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

o qual $D(T)$ denota o domínio de T . Quando o domínio da função T não está especificado admitimos que é o maior subconjunto de \mathbb{C} no qual T está bem definido.

Para $z = x + yi \in D(T)$, podemos definir

$$T(x + yi) = u(x + yi) + iv(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y).$$

A função u é chamada de parte real de T , e a função v é dita parte imaginária de T .

Exemplo 2.2.1. Dada a transformação

$$T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

dada por $T(z) = z^2$, então se $z = x + iy$, segue que

$$T(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

ou seja

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad e \quad v(x, y) = 2xy.$$

A seguir estudaremos algumas transformações complexas (translação, rotação, homotetia: contração e dilatação e inversão) as quais são exemplos de transformações de Möbius que veremos no próximo capítulo.

2.2.1 Translação

Definição 2.2.2. Uma translação é uma transformação $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$T(z) = z + \alpha,$$

no qual α é um número complexo fixo.

De acordo com a interpretação geométrica da adição, tem-se que, o complexo $T(z)$ resulta do deslocamento do complexo z segundo o módulo, a direção e o sentido do vetor α .

A translação de uma figura no campo dos complexos se dá na adição algébrica de um número complexo, não nulo, a cada número complexo da figura associada. Logo, existem três situações que representam uma translação:

- Quando $\alpha = x_0$, é um número real. A figura se desloca de forma horizontal (conforme a figura 2.8).

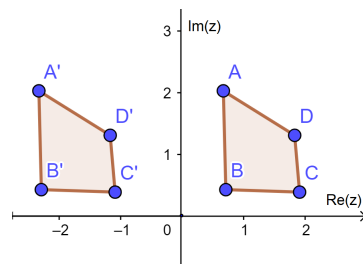


Figura 2.8: Exemplo de translação.

- Quando, $\alpha = y_0i$ é um imaginário puro. A figura se desloca de forma vertical (conforme a figura 2.9).

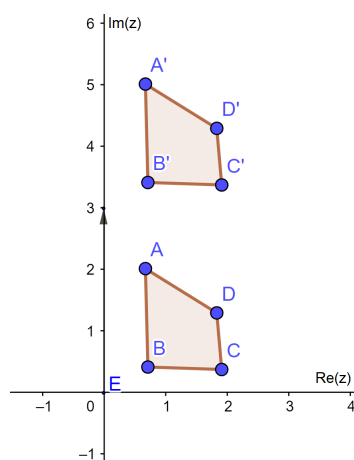


Figura 2.9: Exemplo de translação.

- Quando $\alpha = x_0 + y_0i$ com $x_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$. A figura se desloca conforme os valores de x_0 na horizontal e y_0 na vertical de acordo com a direção, sentido e módulo do vetor. O sentido do deslocamento depende o sinal coeficiente do vetor correspondente (conforme a figura 2.10).

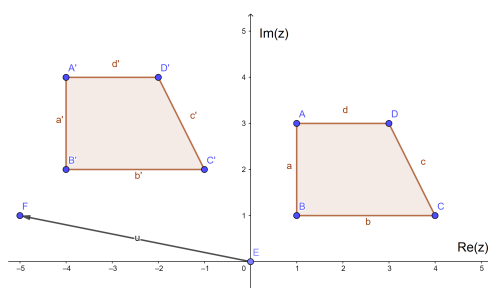


Figura 2.10: Exemplo de translação.

Em geral, uma translação só desloca a figura de posição em relação ao plano complexo, sem deformação da mesma, podemos dizer também que transforma uma figura

em outra figura congruente (no sentido da geometria). Mas iremos destacar aqui dois casos especiais.

Proposição 2.2.1. *Seja $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, uma translação, isto é*

$$T(z) = z + \alpha, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Então

(i) T transforma reta em reta;

(ii) T transforma círculo em círculo.

Demonstração. Seja r uma reta qualquer, então pela equação (2.3), r pode ser expressada por

$$r : \bar{\beta}z + \beta\bar{z} = C, \quad (2.27)$$

onde $\beta = a + bi$ é um complexo fixado perpendicular a direção de r , e $C \in \mathbb{R}$ uma constante. Note que:

$$T(r) = \{w = T(z) : \bar{\beta}z + \beta\bar{z} = C\}.$$

Seja $w \in T(r)$, então, existe um $z \in r$ tal que,

$$w = T(z) = z + \alpha \iff z = w - \alpha. \quad (2.28)$$

Substituindo, a equação (2.28) na equação (2.27), obtemos

$$\bar{\beta}(w - \alpha) + \beta(\overline{w - \alpha}) = C,$$

usando a proposição 1.2.1 (iv) e fazendo manipulações algébricas, obtemos:

$$\bar{\beta}w + \beta\bar{w} = C + \bar{\beta}\alpha + \beta\bar{\alpha},$$

novamente, da proposição 1.2.1 (i) temos que

$$\bar{\beta}\alpha + \beta\bar{\alpha} = 2\Re(\beta\bar{\alpha}),$$

ou seja,

$$C + \bar{\beta}\alpha + \beta\bar{\alpha} = C' \in \mathbb{R},$$

daí, se $w \in T(r)$, w satisfaz a equação

$$\bar{\beta}w + \beta\bar{w} = C'. \quad (2.29)$$

Note que, a equação (2.29) é a equação de uma reta. Logo T transforma reta em reta.

Agora para a prova de (ii), considere o círculo π_1 . Conforme a equação (2.9), o círculo π_1 pode ser escrito na forma

$$|z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c, \quad (2.30)$$

no qual $B = \frac{a+ib}{2}$ e c uma constante real. Note que

$$T(\pi_1) = \{w = T(z) : |z|^2 + \bar{B}z + B\bar{z} = c, \}$$

então, como vimos na equação (2.28), se $w \in T(\pi_1)$, então existe $z \in \Pi$,

$$z = w - \alpha,$$

substituindo isto na equação (2.30), temos,

$$|w - \alpha|^2 + \bar{B}(w - \alpha) + B(\overline{w - \alpha}) = c,$$

usando as proposições 1.2.1 (iv), e 1.2.2 (i), obtemos:

$$(w - \alpha)(\bar{w} - \bar{\alpha}) + \bar{B}(w - \alpha) + B(\bar{w} - \bar{\alpha}) = c. \quad (2.31)$$

Fazendo uso novamente das proposições citadas e fazendo algumas manipulações algébricas, a equação (2.31), é equivalente a

$$|w|^2 + (\bar{B} - \bar{\alpha})w + (B - \alpha)\bar{w} = c - |\alpha|^2 + 2\Re(B\bar{\alpha}), \quad (2.32)$$

ou seja, se $w \in T(\pi_1)$ então w satisfaz a equação (2.32) que é a equação de um círculo.

Portanto T leva círculo em círculo. □

Exemplo 2.2.2. *Dados, a reta r do exemplo 2.1.1, o círculo π_1 do exemplo 2.1.4 e a translação $T(z) = z + 2 + i$. Iremos encontrar*

$$T(r) \quad \text{e} \quad T(\pi_1).$$

Para isto, pela proposição 2.2.1, $T(r)$ é uma reta e $T(\pi_1)$ é um círculo. Primeiramente, iremos encontrar $T(r)$, do exemplo 2.1.1 temos que $z_1 = 2$ e $z_2 = -1 + 3i$ pertencem a r , então, temos

$$\begin{aligned} T(z_1) &= 2 + (2 + i) = 4 + i = w_1 \\ T(z_2) &= (-1 + 3i) + (2 + i) = 1 + 4i = w_2, \end{aligned}$$

de modo que $w_1, w_2 \in T(r)$, e seja $T(r)$ dada pela expressão

$$\bar{\beta}w + \beta\bar{w} = C'. \tag{2.33}$$

Substituindo w_1 e w_2 na equação (2.33), e denotando $\beta = a + ib$ temos

$$(a - ib)(4 + i) + (a + ib)(4 - i)C' \iff 8a + 2b = C' \tag{2.34}$$

e

$$(a - ib)(1 + 4i) + (a + ib)(1 - 4i)C' \iff 2a + 8b = C'. \tag{2.35}$$

Subtraindo a equação (2.35) da equação (2.34), concluímos que $a = b$. Neste caso se tomarmos $a = b = 1$, e substituirmos na equação (2.34), por exemplo, encontramos $C' = 10$, daí, a equação $T(r)$ é dada por

$$(1 - i)w + (1 + i)\bar{w} = 10.$$

Lembremos do exemplo 2.1.1 que $B = 1 + i$ é o mesmo encontrado para $T(r)$, ou seja, as duas retas são perpendiculares a mesma direção, logo são paralelas.

Agora para o círculo π_1 , lembremos do exemplo 2.1.4, tem equação

$$|z|^2 + (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} = 0,$$

daí, temos as seguintes informações:

$$\begin{cases} c &= 0 \\ B &= 1 - 2i \\ \alpha &= 2 + i, \end{cases}$$

então,

$$\begin{cases} B - \alpha &= -1 - 3i \\ B\bar{\alpha} &= 4i \\ |\alpha|^2 &= 5 \end{cases} \quad (2.36)$$

Substituindo as expressões (2.36) na equação (2.32), concluímos que a equação do círculo $T(\pi_1)$ é dada por:

$$|w|^2 + (-1 + 3i)w + (-1 - 3i)\bar{w} = 5.$$

Neste caso, da equação (2.9), temos que o centro de $T(\pi_1)$ é

$$w_0 = -\frac{(B - \alpha) + (\overline{B - \alpha})}{2} - \frac{(B - \alpha) - (\overline{B - \alpha})}{2} = 1 + 3i,$$

e o raio é

$$r = \sqrt{c - |\alpha|^2 + 2\Re(B\bar{\alpha}) + |B - \alpha|^2} = \sqrt{5}.$$

Note que, do exemplo 2.1.4 que π_1 tem centro $z_0 = -1 + 2i$ e raio $\sqrt{5}$

$$T(z_0) = (-1 + 2i) + (2 + i) = 1 + 3i = w_0,$$

ou seja, T além de levar círculo em círculo, leva centro de círculo em centro de círculo e preserva o raio.

Exemplo 2.2.3. Sejam $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = 4 + 6i$ e $z_3 = 6 + 4i$, três números complexos, que formam os vértices de um triângulo e $b = 4 + 3i$. Consideremos a translação $T(z) = z + b$. Pela proposição 2.2.1, podemos afirmar que T leva segmento em segmento. Então, como

$$w_1 = T(z_1) = 6 + 7i, w_2 = T(z_2) = 8 + 9i, w_3 = T(z_3) = 10 + 7i,$$

T transforma o triângulo de vértices z_1 , z_2 e z_3 no triângulo de vértices w_1 , w_2 e w_3 .

Cada vértice do triângulo sofreu um deslocamento igual a 5 que corresponde a $|b|$.

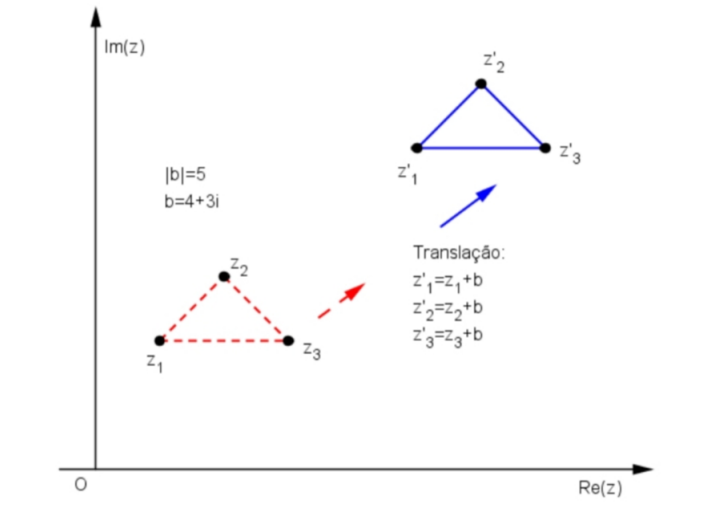


Figura 2.11: Exemplo de translação.

2.2.2 Rotação

Definição 2.2.3. Uma rotação é uma transformação $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$R(z) = w \cdot z,$$

de modo que w é um número complexo fixo com $|w| = 1$.

Na definição 2.2.3, escrevendo w e z em sua representação polar (definição 1.2.5), temos

$$w = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{e} \quad z = \rho(\cos \phi + i \sin \phi),$$

pela proposição 1.2.4, podemos escrever uma rotação

$$R(z) = \rho e^{i(\theta+\phi)} = \rho(\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)),$$

e como $|e^{i(\theta+\phi)}| = 1$,

$$|R(z)| = \rho = |z|,$$

em resumo, uma rotação gira um complexo z , em relação a origem $O = 0 + 0i$, em um ângulo fixo correspondente ao $\arg w$ e mantém o comprimento de z .

Observação 5. Segue daí algumas propriedades importantes:

- (a) Numa rotação, a figura transformada é geometricamente igual à original.
- (b) Os ângulos formados pelos segmentos de reta que unem o ponto original ao ponto de rotação, e o ponto transformado ao ponto de rotação, são iguais, independentemente do ângulo da rotação realizada. Basta observar que o triângulo formado por z , $R(z)$ e $O = 0 + 0i$ é isósceles tendo como base o segmento de extremos z e $R(z)$, pois, $|z| = |R(z)|$;
- (c) Um ponto de figura que pertença ao centro de rotação, ou seja, que seja o mesmo ponto que o ponto de rotação, é transformado em si próprio.
- (d) Do item (a) desta observação, concluímos, que R transforma reta em reta e círculo em círculo.

Em termos geométricos, uma reta r divide o plano complexo em dois semi-planos, que muita das vezes para distinguir chamamos de semi-planos, superior e inferior em relação a reta r e possui as seguintes inequações

$$ax + by + c \geq 0 \quad \text{e} \quad ax + by + c \leq 0, \quad (2.37)$$

esta nomenclatura não tem um padrão, através de uma visão geométrica, chamamos uma das desigualdades de semi-plano superior, automaticamente a outra é identificada como semi-plano inferior em relação a reta r . Colocando as expressões (2.37) em função z e \bar{z} , usando como suporte o desenvolvimento de equação de uma reta, obtemos

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} - C \geq 0 \quad \text{e} \quad \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + C \leq 0, \quad (2.38)$$

de modo que $\beta = a + bi$ e $C = 2c$.

Exemplo 2.2.4. *Sejam dados o semi-plano $\Pi : -2x + 6y - 4 \geq 0$ e uma rotação $R(z)$ com ângulo de rotação $\theta = 60^\circ$. Iremos encontrar $R(\Pi)$, que também é um semi-plano. Para isto, primeiramente iremos escrever a equação do semi-plano Π em função z e \bar{z} . Das expressões (2.37), temos que*

$$a = -2, \quad b = 6 \quad \text{e} \quad c = -4,$$

segue então, que

$$\beta = -2 + 6i \quad e \quad C = -8, \quad (2.39)$$

então substituindo (2.39) em (2.38), obtemos

$$(-2 - 6i)z + (-2 + 6i)\bar{z} - 8 \geq 0, \quad (2.40)$$

pondo, $w = R(z)$, temos:

$$w = e^{\frac{\pi}{3}i}z \iff z = e^{-\frac{\pi}{3}i}w$$

então a equação (2.40) fica

$$(-2 - 6i)e^{-\frac{\pi}{3}i}w + (-2 + 6i)e^{\frac{\pi}{3}i}\bar{w} - 8 \geq 0, \quad (2.41)$$

como

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi}{3}i} &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ e^{\frac{\pi}{3}i} &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} (-2 - 6i)e^{-\frac{\pi}{3}i} &= (-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3)i \\ (-2 + 6i)e^{\frac{\pi}{3}i} &= (-1 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3})i. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Portanto, substituindo as expressões (2.42) na inequação (2.41), concluímos que o semi-plano $R(\Pi)$ é dado pela seguinte

$$\left((-1 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 3)i \right)w + \left((-1 - \sqrt{3}) + (3 - \sqrt{3})i \right)\bar{w} - 8 \geq 0,$$

ou equivalentemente,

$$(-1 - \sqrt{3})x + (3 - \sqrt{3})y - 4 \geq 0.$$

Exemplo 2.2.5. Sejam dados um triângulo ABC de vértices $A = 10 + 2i$, $B = 4 - 2i$ e $C = 15 + 3i$, e uma rotação $R(z)$ com ângulo de rotação $\theta = 150^\circ$. Iremos encontrar

$R(ABC)$, que também é um triângulo. Para isto, primeiramente observemos que

$$e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

e por outro lado, para encontrarmos o conjunto $R(ABC)$ basta encontrar $R(A)$, $R(B)$ e $R(C)$. Então

$$\begin{cases} R(A) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (10 + 2i) = (-5\sqrt{3} - 1) + (-\sqrt{3} + 5)i \\ R(B) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (4 - 2i) = (-2\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} + 2)i \\ R(C) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \cdot (15 + 3i) = \left(\frac{-15\sqrt{3} - 3}{2}\right) + \left(\frac{15 - 3\sqrt{3}}{2}\right)i, \end{cases} \quad (2.43)$$

Assim, das expressões (2.43), os números complexos

$$\begin{aligned} D &= D(-5\sqrt{3} - 1) + (5 - \sqrt{3})i, \\ E &= (1 - 2\sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i \\ F &= \left(\frac{-15\sqrt{3} - 3}{2}\right) + \left(\frac{15 - 3\sqrt{3}}{2}\right)i, \end{aligned}$$

são vértices do triângulo DEF rotacionado pelo triângulo ABC , isto é, $R(ABC) = DEF$, como ilustra a figura 2.12.

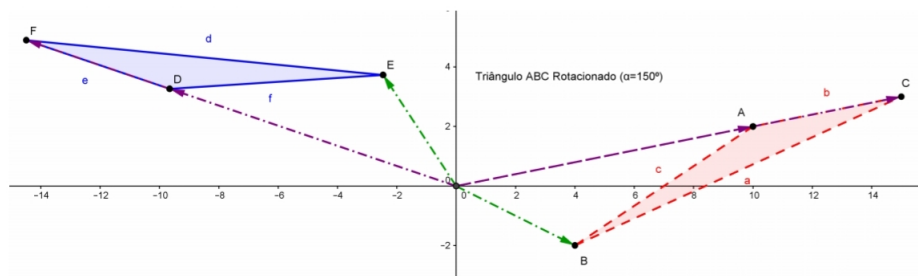


Figura 2.12: Exemplo de rotação de triângulo.

2.2.3 Homotetia : dilatação e contração

Definição 2.2.4. Uma homotetia é uma transformação $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $H(z) = k \cdot z$, onde k é um número real com $|k| \neq 1$.

Dada um homotetia, se

$$z = \rho e^{i\theta},$$

observemos o seguinte:

$$H(z) = k\rho e^{i\theta}$$

$$|H(z)| = k\rho,$$

isto significa que, em relação ao complexo z , $H(z)$ tem as seguintes propriedades

- (a) se $k > 0$, z e $H(z)$ tem a mesma direção e sentido;
- (b) se $k < 0$, z e $H(z)$ tem a mesma direção e sentidos opostos;
- (c) O comprimento do complexo $H(z)$ é múltiplo do comprimento do complexo z .

Observação 6. Homotetias são transformações que, a partir de um ponto fixo “ O ” e de uma razão “ k ” produzem figuras ou imagens semelhantes, mas com medidas distintas seguindo a razão (ver figura 2.13. A propriedade das homotetias é usada para dilatar ($|k| > 1$) ou contrair ($0 < |k| < 1$) o tamanho da imagem ou figura diversa, as figuras que se correspondem por uma homotetia são chamadas de “figuras homotéticas”.

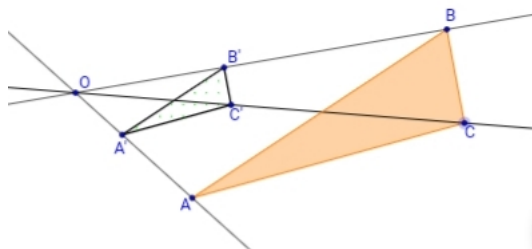


Figura 2.13: Exemplo de homotetia: dilatação.

2.2.4 Inversão

A próxima transformação que iremos destacar é um elemento fundamental para nosso estudo e é conhecida como inversão.

Definição 2.2.5. A transformação $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$I(z) = \frac{1}{z},$$

é chamada de inversão.

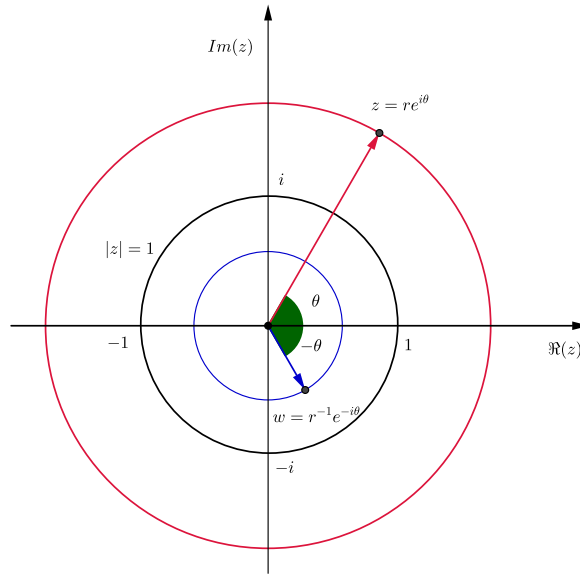


Figura 2.14: Inversão do complexo z

Observação 7. Na definição 2.2.5, podemos notar o seguinte:

(I) Da equação (1.22),

$$I(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2};$$

(II) $|I(z)| = \frac{1}{|z|}$;

(III) Se escrevemos z na sua representação polar, conforme a equação (1.37)

$$z = re^{i\theta},$$

temos

$$I(z) = \frac{1}{re^{i\theta}} = r^{-1}e^{-i\theta}.$$

Da observação 7 podemos ressaltar, conforme a figura 2.14, que se $I(z) = w$, então w é um número complexo que tem o módulo igual ao inverso do módulo de z e argumento oposto ao argumento de z . Se z pertencer ao círculo de centro na origem e raio unitário w também pertencerá ao mesmo círculo e $w = \bar{z}$.

Teorema 2.2.1. Seja $I : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ a inversão. Então, $I(z)$ transforma:

- (i) Retas que passam pela origem em retas que passam pela origem;
- (ii) Retas que não passam pela origem em círculos que passam pela origem;
- (iii) Círculos que passam pela origem em retas que não passam pela origem;
- (iv) Círculos que não passam pela origem em círculos que não passam pela origem.

Demonstração. Dada uma reta r , conforme a equação (2.3), r pode ser representada pela equação

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} = C. \quad (2.44)$$

Seja $w \in I(r)$, com $w \neq 0$, então existe $z \in r$, com $z \neq 0$ tal que

$$I(z) = w \iff w = \frac{1}{z} \iff z = \frac{1}{w}, \quad (2.45)$$

então, substituindo a equação (2.45) na equação (2.44), temos que:

$$\bar{\beta}\frac{1}{w} + \beta\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = C. \quad (2.46)$$

Observemos que

$$\overline{\left(\frac{1}{w}\right)} = \frac{1}{\bar{w}},$$

juntando este resultado com a observação 7 (I) na equação (2.46), obtemos

$$\frac{\bar{\beta}\bar{w}}{|w|^2} + \frac{\beta w}{|w|^2} = C,$$

ou seja,

$$\bar{\beta}\bar{w} + \beta w = C|w|^2. \quad (2.47)$$

Se $C = 0$, a equação (2.44) é uma reta que passa pela origem pois, $z = 0 + i0$ satisfaz a equação, e a equação (2.47) fica

$$\beta_1\bar{w} + \bar{\beta}_1 w = 0,$$

de modo que $\beta_1 = \bar{\beta}$ que também é a equação de uma reta que passa pela origem, isto prova (i).

Agora, se $C \neq 0$, a equação (2.44) é a equação de uma reta que não passa pela origem, e a equação (2.47) pode ser reescrita como

$$|w|^2 + \beta_2 \bar{w} + \overline{\beta_2} w = 0, \quad (2.48)$$

de modo que $\beta_2 = \frac{\bar{\beta}}{C}$. Neste caso, conforme a equação (2.9), a equação (2.48) é de um círculo que passa pela origem, provando (ii).

Por outro lado, considere um círculo π_1 , conforme a equação (2.9), o círculo π_1 pode ser escrito na forma

$$|z|^2 + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} = c. \quad (2.49)$$

Seja $w \in I(\pi_1)$, com $w \neq 0$, então existe $z \in \pi_1$, com $z \neq 0$. Daí, substituindo a equação (2.45) na equação (2.49), temos:

$$\left| \frac{1}{w} \right|^2 + \bar{\beta} \frac{1}{w} + \beta \left(\frac{1}{w} \right) = c,$$

fazendo alguns ajustes, usando as propriedades já conhecidas, obtemos:

$$c|w|^2 + \beta_3 \bar{w} + \overline{\beta_3} w = 1, \quad (2.50)$$

de modo que $\beta_3 = -\beta$.

Se $c = 0$, a equação 2.49 é a equação de um círculo que passa pela origem, daí obtemos

$$\beta_3 \bar{w} + \overline{\beta_3} w = 1,$$

que é a equação de uma reta que não passa pela origem, provando (iii).

Agora, se $c \neq 0$, a equação (2.50) pode ser reescrita como

$$|w|^2 + \beta_4 \bar{w} + \overline{\beta_4} w = \frac{1}{c},$$

que é a equação de um círculo que não passa na origem, com isto provamos (iv). \square

Exemplo 2.2.6. *Considere o círculo π_1 de centro na origem e raio 3. Dada a translação $T(z) = z + 3i$, iremos encontrar $I(\pi_1)$ e $I(T(\pi_1))$. Para isto, lembremos que a equação de um círculo é dada por*

$$|z|^2 + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} = c,$$

de modo que o centro e raio são, respectivamente,

$$z_0 = -\frac{\beta + \bar{\beta}}{2} - \frac{\beta - \bar{\beta}}{2}i \quad e \quad r = \sqrt{c + |\beta|^2}.$$

Como $z_0 = 0 + 0i$ e $r = 3$, concluímos que

$$\beta = 0 + 0i \quad c = 9,$$

daí, a equação do círculo de centro na origem e raio 3 é dada por:

$$|z|^2 = 9. \tag{2.51}$$

Além disso, pelo teorema 2.2.1, $I(\pi_1)$ é um círculo que não passa pela origem. Se $w = I(z)$, com $w \neq 0$, temos que

$$z = \frac{1}{w},$$

então a equação (2.51), se transforma em

$$\left| \frac{1}{w} \right|^2 = 9,$$

ou seja,

$$|w|^2 = \frac{1}{9},$$

ou seja, $I(\pi_1)$ é o círculo de centro na origem e raio $\frac{1}{3}$, que é um exemplo particular da figura 2.14.

Por outro lado, pela proposição 2.2.1 (ii), $T(\pi_1)$ também será um círculo. Se $w = T(z)$, ou seja,

$$z = w - 3i,$$

neste caso, a equação (2.51) fica,

$$|w - 3i|^2 = 9,$$

mas, como

$$|w - 3i|^2 = (w - 3i)(\bar{w} + 3i) = |w|^2 - 3i\bar{w} + 3iw + 9,$$

a equação do círculo $T(\pi_1)$ fica

$$|w|^2 - 3i\bar{w} + 3iw = 0, \quad (2.52)$$

ou seja, $T(\pi_1)$ é um círculo que passa pelo origem.

Agora, iremos encontrar o conjunto $I(T(\pi_1))$, como concluímos que $T(\pi_1)$ é um círculo que passa pela origem, novamente pelo teorema 2.2.1, $I(T(\pi_1))$ é uma reta que não passa pela origem. Seja $w_1 \in I(T(\pi_1))$ então existe $w \in T(\pi_1)$, tal que $w_1 = I(w)$, ($w, w \neq 0$), isto é

$$w = \frac{1}{w_1},$$

neste caso, a equação (2.52) fica

$$\left| \frac{1}{w_1} \right|^2 - 3i \left(\overline{\frac{1}{w_1}} \right) + 3i \frac{1}{w_1} = 0,$$

procedendo, de modo análogo as casos anteriores, obtemos

$$3i\bar{w}_1 - 3iw_1 = -1,$$

que é a equação de uma reta que não passa pela origem.

Capítulo 3

Transformação de Möbius e a esfera de Riemann

Neste capítulo, iremos entender um pouco sobre a projeção estereográfica e definir a esfera de Riemann para usarmos com o objetivo de desenvolver as principais propriedades das transformações de Möbius. A maioria dos resultados que destacaremos neste capítulo, são baseados em Ávila (2011), Brown (2015), Raiz (2018) e Soares (2001).

3.1 Esfera de Riemann

Nesta seção, iremos destacar um pouco da história de Riemann e alguns resultados sobre a esfera de Riemann.

3.1.1 Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em 17 de setembro de 1826 e morreu em 20 de julho de 1866.



Figura 3.1: Georg Friedrich Bernhard Riemann.

Filho de um pastor luterano, mesmo com os problemas financeiros da família e

seus problemas de saúde, Riemann teve uma boa educação passando pelas universidades de Göttingen sendo orientado por Gauss e na Universidade Humboldt de Berlim. Obteve seu doutorado na Universidade de Göttingen, com a tese no campo da teoria das funções complexas, na qual encontra-se as equações diferenciais de Cauchy-Riemann, que garantem a análise de uma função de variável complexa, e o conceito de superfícies de Riemann.

Dentre seus trabalhos mais conhecidos estão Geometria de Riemann, Integral de Riemann, Função zeta de Riemann, Hipótese de Riemann, Superfície de Riemann, Variedade de Riemann e Esfera de Riemann. Seu trabalho “Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen” (Nas hipóteses que mantem à fundação da Geometria), que é um clássico da Matemática apresentado em 1854, influenciaram na teoria relativística de Albert Einstein de gravitação.

3.1.2 Projeção estereográfica e o plano estendido

Definição 3.1.1. *Seja $C = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto em \mathbb{R}^3 , definimos uma esfera euclidiana de centro C e raio $r > 0$, como o conjunto de ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que estão a distância constante r de C , isto é, o conjunto dos pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, tais que*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

No que segue, iremos destacar um caso particular da definição 3.1.1, que é de fundamental importância para nosso trabalho.

Definição 3.1.2. *Seja S^2 uma esfera unitária no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 definida por*

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Observação 8. *Destacaremos aqui algumas nomeclaturas que fixaremos em nosso trabalho.*

- (a) *Os pontos $N = (0, 0, 1), S = (0, 0, -1) \in S^2$ serão chamados, respectivamente, pólo norte e polo sul;*
- (b) *O conjunto dos pontos $(x, y, z) \in S^2$, será chamado de hemisfério norte, hemisfério sul, equador, respectivamente, se $z > 0$, $z < 0$ e $z = 0$. Então, pontos do equador*

são pontos em S^2 do tipo $(x, y, 0)$;

(c) Em \mathbb{R}^3 é comum identificar o conjunto $E = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}\}$ como \mathbb{R}^2 , e em nosso trabalho estamos identificando \mathbb{R}^2 como \mathbb{C} , então iremos fazer a seguinte identificação

$$(x, y, 0) = (x + iy, 0) = (z, 0),$$

de modo que $z = x + iy$, quando necessário.

Para dar seguimento ao nosso trabalho, queremos dar ênfase na próxima seção das transformações de Möbius, para isto, iremos dar uma visão geométrica clara do comportamento de funções que tendem ao *infinito* quando a variável se aproxima de um dado ponto, por exemplo, com uma função holomorfa¹ na vizinhança de um polo². Com esse intuito definimos:

Definição 3.1.3. O conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, é chamado plano estendido, ou, complexo estendido e denotamos por

$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}_\infty.$$

Agora, iremos definir uma aplicação que leva pontos do plano estendido \mathbb{C}_∞ em pontos da esfera S^2 . Para isto, considere a aplicação

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - N,$$

com $\phi(z) = \phi(x + iy) = (x_1, x_2, x_3) = v$, onde o ponto $v \in S^2$ é descrito pela reta em \mathbb{R}^3 que liga $z \in \mathbb{C}$ a N , conforme a figura 3.2.

¹Dizemos que uma função $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é holomorfa em A se f é derivável em todos os pontos de A . Para maiores detalhes sobre o assunto veja, por exemplo Soares (2001)

²Um ponto em \mathbb{C} onde uma função complexa não está definida é chamado de singularidade, um desses tipos de singularidade é chamada polo. Para maiores detalhes sobre o assunto veja, por exemplo Ávila (2011)

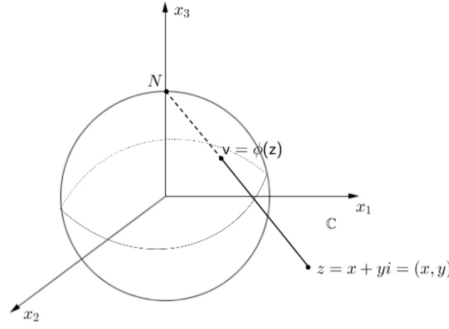


Figura 3.2: Projeção estereográfica.

Seja r uma reta que passa por z e N , então r tem uma equação paramétrica dada por:

$$\gamma(t) = N + t(z - N), \quad t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\gamma(t) = tz + N(1 - t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Queremos determinar para qual t γ intercepta a esfera \mathbb{S}^2 no ponto $v \neq N$. Para isto, substituindo $z = x + iy = (x, y, 0)$ na equação (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= t(x + iy, 0) + (1 - t)(0, 0, 1) \\ &= t(x, y, 0) + (1 - t)(0, 0, 1) \\ &= (tx, ty, 0) + (0, 0, 1 - t) \\ &= (tx, ty, 1 - t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Portanto, da equação (3.2), um ponto $v \in \mathbb{S}^2 - N$ pertence a reta r se, e somente se, existe um $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\gamma(t_0) = v$ e

$$(t_0x)^2 + (t_0y)^2 + (1 - t_0)^2 = 1,$$

ou seja,

$$t_0^2x^2 + t_0^2y^2 + 1 - 2t_0 + t_0^2 = 1 \iff t_0^2(x^2 + y^2) + t_0^2 - 2t_0 = 0,$$

como $|z|^2 = x^2 + y^2$, temos que,

$$t_0(t_0(|z|^2 + 1) - 2) = 0, \quad (3.3)$$

logo, as soluções da equação (3.3) são,

$$t_0 = 0 \quad \text{ou} \quad t_0 = \frac{2}{|z|^2 + 1}. \quad (3.4)$$

Se $t_0 = 0$, da equação (3.2), estamos no polo norte N , mas como estamos interessados em encontrar pontos de \mathbb{S}^2 que não seja N , então, da equação (3.4) temos que

$$t_0 = \frac{2}{|z|^2 + 1}. \quad (3.5)$$

Substituindo a equação (3.5) na equação (3.2), obtemos

$$v = \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

ou seja,

$$v = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2\Re(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \in \mathbb{S}^2.$$

Portanto definimos a função como

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow S^2 - \{N\},$$

por

$$\phi(z) = \left(\frac{2z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Notemos que

- Se $|z| = 1$, temos que $x_3 = 0$, ou seja, v está no equador;
- Se $|z| > 1$, temos que $x_3 > 0$, ou seja, v está no hemisfério norte;
- Se $|z| < 1$, temos que $x_3 < 0$, ou seja, v está no hemisfério sul.

Notemos também que a medida que $z \in \mathbb{C}$ se afasta da origem $(0, 0, 0)$ a reta r que passa por z e N tende a uma reta paralela ao plano complexo \mathbb{C} , ou seja, se fizermos $|z| \rightarrow \infty$, temos que $v \rightarrow N$, isto é

$$z \rightarrow \infty \Rightarrow v \rightarrow N.$$

Definição 3.1.4. Com a informações dada acima, definimos

$$\varphi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

por

$$\varphi(z) = \begin{cases} \phi, & \text{se } z \in \mathbb{C} \\ N, & \text{se } z = \infty \end{cases}$$

Observação 9. Pela forma que definimos a função 3.1.4 segue

- (i) φ é uma bijeção;
- (ii) φ é contínua no sentido que se z_n é uma sequência convergindo para z então $\varphi(z_n)$ converge para $\varphi(z)$ para todo z em \mathbb{C}_∞ .

Vamos determinar agora as funções inversas de ϕ e φ . Para isto, iremos fazer o mesmo desenvolvimento, que fizemos anteriormente, só que no sentido oposto, isto é, consideramos a reta r que passa por N e v pertencentes a \mathbb{S}^2 e determinando o ponto z de interseção com o plano complexo. Tal reta é parametrizada, analogamente a equação (3.1), como segue

$$\gamma(t) = N + t(v - N), \quad t \in \mathbb{R},$$

se $v = (x_1, x_2, x_3)$, obtemos

$$\gamma(t) = (tx_1, tx_2, 1 - t(x_3 - 1)) \quad t \in \mathbb{R},$$

queremos encontrar um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t_0) = (x, y, 0),$$

isto equivale a dizer que

$$1 - t_0(x_3 - 1) = 0,$$

como o ponto que queremos encontrar é diferente N , isto significa que $x_3 \neq 1$, então

$$t_0 = (1 - x_3)^{-1}.$$

Portanto, pela identificação que já estamos fazendo $z = x + iy = (x, y, 0)$, z é da

forma:

$$\phi^{-1}(v) = \phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1-x_3} + \frac{x_2}{1-x_3}i = u + vi = z,$$

para todo $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 - N$.

Dessa forma, a inversa de ϕ , que denotemos por ϕ^{-1} é dada por

$$\phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3} \right).$$

Essa aplicação inversa é dita **projeção estereográfica**.

Por outro lado, para $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$, temos

$$\begin{aligned} |\phi^{-1}(v)|^2 &= \left(\frac{x_1}{1-x_3} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3} \right)^2 \\ &= \frac{x_1^2}{(1-x_3)^2} + \frac{x_2^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_3)^2}, \end{aligned}$$

Como, $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, obtemos:

$$\begin{aligned} |\phi^{-1}(v)|^2 &= \frac{1-x_3^2}{(1-x_3)^2} \\ &= \frac{1+x_3}{1-x_3} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Notemos que a medida v se aproxima de N , x_3 se aproxima de 1, isto é

$$v \rightarrow N \Leftrightarrow x_3 \rightarrow 1,$$

e pela equação (3.6) temos que

$$v \rightarrow N \Rightarrow \phi^{-1}(v) \rightarrow \infty.$$

Alongando, como fizemos com ϕ^{-1} , definimos a inversa de φ , por $\varphi^{-1} : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$\varphi^{-1}(v) = \begin{cases} \phi^{-1}(v), & \text{se } v \in S^2 - N \\ \infty, & \text{se } v = N, \end{cases}$$

por argumentos análogos, notemos que φ^{-1} também é contínua, neste caso, dizemos que

\mathbb{S}^2 e \mathbb{C}_∞ são conjuntos homeomorfos³.

Observação 10. *Devido a este homeomorfismo, o conjunto \mathbb{C}_∞ recebe o nome de esfera de Riemann.*

3.2 Transformações de Möbius

Neste seção, falaremos um pouco sobre a história do matemático August Ferdinand Möbius e definiremos e destacaremos algumas propriedades das transformações de Möbius.

3.2.1 August Ferdinand Möbius

Um breve histórico sobre o matemático August Ferdinand Möbius (1790 - 1868) (ver figura 3.3).



Figura 3.3: August Ferdinand Möbius.

Filho de Johann Heinrich Möbius professor de dança e de Johanna Katharine Christiane descendente de Martinho Lutero (fundador do protestantismo). Estudou em casa até seus treze anos de idade e entrou na faculdade em 1803. Mesmo com sua família querendo que ele se formasse em Direito, ele preferiu estudar Matemática, Física e Astronomia, se formando em 1809 pela Universidade de Leipzig.

Durante seus estudos em Leipzig, foi orientado pelo professor, astrônomo e matemático, Karl Mollweide, criador da projecção de Mollweide, e de muitas descobertas no campo da trigonometria. Em 1813, Möbius mudou-se para Göttingen para aprofundar-se em seus estudos com Gauss, considerado o maior matemático de seu tempo. Escreveu sua tese de doutorado, “A ocultação de estrelas fixas” em 1815. Após concluir seu pós-

³Dois conjuntos são ditos homeomorfos quando existe uma função contínua entre os conjuntos, cuja a sua inversa também é contínua. Para maiores detalhes ver, por exemplo, Lima (2007).

doutorado em equações trigonométricas em 1816, retornou para a Universidade de Leipzig como professor de Astronomia e Mecânica.

O seu trabalho mais conhecido é provavelmente a faixa de Möbius, que é uma superfície não orientada que frequentemente é usada na cultura popular e até mesmo como logotipo de eventos e instituições ligadas a Matemática, como é o caso do IMPA. Consiste em colar duas pontas de uma fita dando meia volta em uma delas.



Figura 3.4: Faixa de Möbius.

3.2.2 Transformação de Möbius

Definição 3.2.1. *Uma transformação de Möbius é uma função racional da forma*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

de modo que a, b, c e d são números complexos satisfazendo $ad - bc \neq 0$.

Observemos que, a condição $ad - bc \neq 0$ assegura que o domínio de f não é vazio e que f não é constante. De fato, para $c \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az + b}{cz + d} \\ &= \frac{caz + cb}{c(cz + d)} \\ &= \frac{caz + ad - ad + cb}{c(cz + d)} \\ &= \frac{ac(z - d/c) - ad + bc}{c^2(z - d/c)} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2(z - d/c)}, \end{aligned}$$

agora se $c = 0$ temos que

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

e f é bem definida e não constante se, e somente se,

$$a \neq 0 \quad \text{e} \quad d \neq 0 \iff ad - bc \neq 0.$$

Resumindo, se $c = 0$ então f tem a forma

$$f(z) = \alpha z + \beta \tag{3.7}$$

com $\alpha \neq 0$, ou seja, f é uma função polinomial de 1º grau. Logo, f é uma bijeção de \mathbb{C} sobre \mathbb{C} com inversa

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{\alpha}z - \frac{\beta}{\alpha},$$

que também é uma função polinomial de grau 1.

Consideremos o caso $c \neq 0$, então, o domínio de f é $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. Neste caso iremos tentar encontrar a imagem de f , para isto, considere w um elemento da imagem de f , então existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, tal que, $f(z) = w$, ou seja,

$$\frac{az + b}{cz + d} = w, \tag{3.8}$$

a equação (3.8) é equivalente a,

$$az + b = w(cz + d) \iff (-cw + a)z = dw - b,$$

ou seja,

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \tag{3.9}$$

então a equação (3.8) tem solução se, e somente se, $w \neq a/c$, ou seja, a imagem de f é $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$.

Proposição 3.2.1. *Seja*

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\},$$

uma transformação de Möbius com $c \neq 0$, então f é inversível com inversa

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Demonstração. Seja $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$, tal que

$$f(z_1) = f(z_2),$$

ou seja,

$$\frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \iff (az_1 + b)(cz_2 + d) = (az_2 + b)(cz_1 + d),$$

isto é,

$$acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd = acz_2z_1 + adz_2 + bcz_1 + bd,$$

daí,

$$(ad - bd)(z_1 - z_2) = 0,$$

como $ad - bd \neq 0$, por hipótese, logo $z_1 = z_2$, ou seja, f é injetiva. Agora para sobrejetividade, seja $w \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, tomando z como na equação (3.9), obtemos,

$$f(z) = f\left(\frac{dw - b}{-cw + a}\right) = \frac{a\frac{dw-b}{-cw+a} + b}{c\frac{dw-b}{-cw+a} + d},$$

ou seja,

$$f(z) = \frac{\frac{adw-ab-bcw+ab}{-cw+a}}{\frac{cdw-cb-cdw+ad}{-cw+a}} = \frac{(ad - bc)w}{ad - bc} = w,$$

logo f é sobrejetiva e além disso,

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

□

Na Proposição 3.2.1, observemos que a inversa de uma transformação de Möbius também é uma transformação de Möbius, pois,

$$da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0.$$

Proposição 3.2.2. *A composta de duas transformações de Möbius ainda é uma transformação de Möbius.*

Demonstração. sejam

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

duas transformações de Möbius, então

$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = \frac{a \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + b}{c \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + d},$$

ou seja,

$$(f \circ g)(z) = \frac{\frac{a\alpha z + a\beta + b\gamma z + b\delta}{\gamma z + \delta}}{\frac{c\alpha z + c\beta + d\gamma z + d\delta}{\gamma z + \delta}} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}, \quad (3.10)$$

além disso,

$$\begin{aligned} (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) &= a c \alpha \beta + a d \alpha \delta + b c \gamma \beta + b d \gamma \delta \\ &\quad - a c \beta \alpha - c b \alpha \delta - a d \gamma \beta - b d \gamma \delta, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) &= ad(\alpha\delta - \gamma\beta) + -bc(\alpha\delta - \gamma\beta) \\ &= (ad - bc)(\alpha\delta - \gamma\beta). \end{aligned}$$

Por hipótese, $(ad - bc) \neq 0$ e $(\alpha\delta - \gamma\beta) \neq 0$ então,

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) \neq 0. \quad (3.11)$$

Portanto, das equações (3.10) e (3.11), concluímos que $f \circ g$ também é uma transformação de Möbius. \square

No capítulo 2, estudamos algumas transformações especiais que são casos particulares da transformação de Möbius, são elas:

- Translação: $z \rightarrow z + b$, onde $b \in \mathbb{C}$.
- Rotação: $z \rightarrow az$, onde $a \in \mathbb{C}$ com $|a| = 1$.
- Homotetia: $z \rightarrow rz$, onde $r \in \mathbb{R}$, com $|r| \neq 1$.
- Inversão: $z \rightarrow 1/z$.

As transformações acima são conhecidas como *transformações de Möbius elementares*.

Teorema 3.2.1. *Se f é uma transformação de Möbius, então f é uma composição de translações, rotações, homotetias e da inversão.*

Demonstração. Seja f uma transformação de Möbius, isto é,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{com} \quad ad - bc \neq 0.$$

Se $c = 0$, temos que f é expressada da forma

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Primeiramente, observemos o seguinte, se

$$H_1(z) = wz,$$

de modo que w é um complexo não nulo com $|w| = r \neq 1$ e $\arg w = \theta$, então H_1 é uma composição de homotetia e rotação. De fato, considere a homotetia e rotação dadas, respectivamente, por

$$H_2(z) = rz \quad \text{e} \quad R_1(z) = w_1z,$$

com $|w_1| = 1$ e $\arg w_1 = \theta$, então

$$(H_2 \circ R_1)(z) = H_1(w_1z) = rw_1z = wz = H_1(z),$$

ou seja, H_1 é uma composição de homotetia e rotação.

Agora considere a transformações

$$T(z) = z + \frac{b}{d} \quad \text{e} \quad H(z) = \frac{a}{d}z,$$

então

$$(T \circ H)(z) = T\left(\frac{a}{d}z\right) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = f(z),$$

ou seja, f é uma composição de homotetia, rotação e translação.

Se $c \neq 0$, lembremos que

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz + d}, \quad \text{onde} \quad \lambda = \frac{bc - ad}{c},$$

e sejam

$$T_1(z) = z + \frac{a}{c}, \quad H(z) = \lambda z, \quad I(z) = \frac{1}{z}, \quad T_2(z) = cz + d, \quad (3.12)$$

então, da expressão (3.12), temos

$$(I \circ T_2)(z) = I(cz + d) = \frac{1}{cz + d},$$

prossequindo, novamente da expressão (3.12), temos

$$(H \circ I \circ T_2)(z) = H\left(\frac{1}{cz + d}\right) = \lambda \frac{1}{cz + d} = \frac{\lambda}{cz + d},$$

portanto, novamente da expressão (3.12), obtemos

$$(T_1 \circ H \circ I \circ T_2)(z) = T_1\left(\frac{\lambda}{cz + d}\right) = \frac{\lambda}{cz + d} + \frac{a}{c} = f(z). \quad (3.13)$$

Logo da equação (3.13), concluímos que f é uma composição de translações, homotetias, rotações e inversão. \square

3.3 Transformação de Möbius e a esfera de Riemann

Na sequência, iremos dar uma motivação para definir uma transformação de Möbius na esfera de Riemann \mathbb{C}_∞ . No teorema 2.2.1, a inversão $I(z) = \frac{1}{z}$, por exemplo, transforma retas que passam pela origem em retas que passam pela origem. Mas, nesse caso, a inversão não está definida na origem, como justificar isto?

No estudo da análise complexa⁴, tem-se que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0,$$

daí então, basta apenas definir a inversão $I(z) = \frac{1}{z}$ na esfera de Riemann, isto é

$$I : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

⁴No estudo de análise complexa existe todo um estudo de limite e derivada e integral. Para maiores detalhes veja por exemplo Soares (2001).

dada por,

$$I(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } z = 0 \\ 0 & \text{se } z = \infty \\ \frac{1}{z} & \text{se } z \neq 0, \infty. \end{cases}$$

De modo geral, temos a seguinte definição:

Definição 3.3.1. *Uma transformação de Möbius na esfera de Riemann, é a transformação*

$$f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

dada por

$$f(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{se } z = \infty \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{se } z \neq -\frac{d}{c}, \infty, \end{cases} \quad (3.14)$$

desde que $c \neq 0$. Se $c = 0$

$$f(z) = \begin{cases} \infty & \text{se } z = \infty \\ \frac{a}{d}z + \frac{b}{c} & \text{se } z \neq \infty. \end{cases} \quad (3.15)$$

Em seguida, iremos destacar alguns resultados, que caracterizam a existência e a unicidade de uma transformação de Möbius.

Definição 3.3.2. *Um número complexo $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ é chamado **ponto fixo** de uma transformação de Möbius f se $f(z_0) = z_0$.*

Um resultado, aplicado para uma transformação de Möbius é o seguinte:

Proposição 3.3.1. *Uma transformação de Möbius, com exceção da função identidade ($Id(z) = z$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$), possui no máximo dois pontos fixos.*

Demonstração. Seja f como na definição 3.3.1, queremos encontrar todas as soluções para equação

$$f(z) = z. \quad (3.16)$$

Começemos, analisando o caso da equação (3.15). Neste caso, já temos que

$$f(\infty) = \infty,$$

ou seja, ∞ é um ponto fixo. Então consideremos $z \neq \infty$, então a equação (3.16) fica,

$$\frac{az + b}{d} = z \iff (a - d)z + b = 0,$$

em \mathbb{C} , essa equação pode ser analisada nos seguintes casos

- (a) Se $a \neq d$, temos em \mathbb{C} a única solução $z = -\frac{b}{a - d}$;
- (b) Se $a = d$ e $b \neq 0$ a equação não possui solução em \mathbb{C} ;
- (c) Se $a = d$ e $b = 0$ a equação possui infinitas soluções em \mathbb{C} , pois, $f(z) = Id(z)$ é a função identidade.

Em resumo, quando f é do tipo da equação (3.15), e não é função identidade, possui no máximo dois pontos fixos.

Agora, consideremos, f no caso da equação (3.14), neste caso, como

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{e} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

concluimos que ∞ não é ponto fixo, ou seja, se existir ponto fixo pertence a $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

Neste caso, a equação (3.16) fica,

$$\frac{az + b}{cz + d} = z \iff az + b = cz^2 + dz,$$

ou seja,

$$cz^2 + (d - a)z + b = 0. \tag{3.17}$$

Segundo o teorema fundamental da álgebra⁵, polinômio de grau 2, descrito na equação (3.17), tem precisamente duas raízes, contadas com multiplicidade. Logo, no caso em que f é do tipo da equação (3.14), tem no máximo duas raízes. \square

Proposição 3.3.2. *Sejam*

$$f, g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

duas transformações de Möbius, com três pontos distintos com imagens iguais, isto é,

⁵Veja por exemplo em Soares (2001)

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, distintos, com

$$f(z_1) = g(z_1), \quad f(z_2) = g(z_2), \quad f(z_3) = g(z_3),$$

então

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}_\infty.$$

Demonstração. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, distintos, com

$$f(z_1) = g(z_1), \quad f(z_2) = g(z_2), \quad f(z_3) = g(z_3).$$

Então para $j = 1, 2, 3$ temos

$$(f^{-1} \circ g)(z_j) = f^{-1}(g(z_j)) = f^{-1}(f(z_j)) = z_j.$$

Pela proposição 3.2.2, f^{-1} é uma transformação de Möbius, e da proposição 3.2.2 segue que $(f^{-1} \circ g)$ é uma transformação de Möbius. Além disso, como $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ são pontos fixos, pela proposição 3.3.1 $(f^{-1} \circ g)$ é a identidade, ou seja,

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}_\infty.$$

□

Teorema 3.3.1. *Dados três pontos distintos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$, e outros três pontos distintos $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$, então, existe uma única transformação de Möbius*

$$f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty,$$

tal que

$$f(z_i) = w_i,$$

para $i = 1, 2, 3$.

Demonstração. Primeiramente, iremos na unicidade: se existirem duas transformações f e g com tais condições, teríamos

$$f(z_1) = w_1 = g(z_1), \quad f(z_2) = w_2 = g(z_2), \quad f(z_3) = w_3 = g(z_3),$$

com $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, e pela proposição 3.3.2,

$$f(z) = g(z) \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}_\infty,$$

garantindo a unicidade da transformação de Möbius.

Para a existência, basta mostrar que quaisquer três pontos distintos podem ser aplicados por uma transformação de Möbius em $0, 1$ e ∞ . De fato, se dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, com

$$f(z_1) = 0, \quad f(z_2) = 1, \quad f(z_3) = \infty, \quad (3.18)$$

e $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, com

$$g(w_1) = 0, \quad g(w_2) = 1, \quad g(w_3) = \infty, \quad (3.19)$$

então, das expressões (3.18) e (3.19), obtemos:

$$\begin{cases} (g^{-1} \circ f)(z_1) = g^{-1}(0) = w_1 \\ (g^{-1} \circ f)(z_2) = g^{-1}(1) = w_2 \\ (g^{-1} \circ f)(z_3) = g^{-1}(\infty) = w_3. \end{cases}$$

Agora se $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos, $z_i \neq \infty$ para $i = 1, 2, 3$, faça

$$f(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}, \quad (3.20)$$

note que f dada na equação (3.20) satisfaz a expressão (3.18), neste caso, mostrar a existência. Se um dos z_i ($i = 1, 2, 3$), é ∞ . Por exemplo, se $z_1 = \infty$, reescrevendo o lado direito da equação (3.20), obtemos

$$\frac{\frac{z}{z_1} - 1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{\frac{z_2}{z_1} - 1}, \quad (3.21)$$

na expressão (3.21) fazendo $z_1 \rightarrow \infty$, obtemos

$$f(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

e novamente garantindo a existência da transformação de Möbius dada em (3.18). De

maneira análoga prova-se a existência de tal função para os casos $z_2 = \infty$ e $z_3 = \infty$, e isto conclui a prova do teorema. \square

Iremos destacar agora um procedimento para encontrar uma transformação de Möbius que leva três valores distintos da esfera de Riemann em três valores distintos da esfera de Riemann. Para isto, lembremos na prova do teorema 3.3.1 que, se z_1, z_2, z_3 são três valores distintos em \mathbb{C}_∞ , tais que, uma transformação de Möbius f leva z_1, z_2, z_3 em $0, 1, \infty$, respectivamente, então,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} & \text{se } z_i \neq \infty, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{z_2 - z_3}{z - z_1} & \text{se } z_1 = \infty \\ \frac{z - z_3}{z - z_1} & \text{se } z_2 = \infty \\ \frac{z - z_3}{z_2 - z_1} & \text{se } z_3 = \infty \end{cases} \quad (3.22)$$

daí queremos encontrar uma transformação de Möbius h , tal que, leva três valores distintos da esfera de Riemann em três valores distintos, isto é

$$h(z_1) = w_1, \quad h(z_2) = w_2, \quad h(z_3) = w_3.$$

Usando o procedimento citado no teorema 3.3.1, tomemos duas transformação de Möbius f, g tais que

$$\begin{cases} f(z_1) = 0, & f(z_2) = 1, & f(z_3) = \infty \\ g(w_1) = 0, & g(w_2) = 1, & g(w_3) = \infty, \end{cases}$$

então a transformação de Möbius h procurada é aquela que satisfaz:

$$h(z_i) = (g^{-1} \circ f)(z_i) = w_i \quad \text{com } i = 1, 2, 3.$$

Usando as considerações acima, então queremos resolver a equação

$$h(z) = w \iff f(z) = g(w). \quad (3.23)$$

Exemplo 3.3.1. Considere $0, i, \infty \in \mathbb{C}_\infty$, queremos determinar uma transformação de Möbius h , que transforma $0, i, \infty$ em $-1, 0, 1$, respectivamente. Para isto iremos, primei-

ramente determinar transformações de Möbius f e g tais que:

$$\begin{cases} f(0) = 0 & f(i) = 1 & f(\infty) = \infty \\ g(-1) = 0 & g(0) = 1 & g(1) = \infty. \end{cases} \quad (3.24)$$

Usando a equação (3.22) na (3.24) obtemos:

$$f(z) = \frac{z}{i} \quad e \quad g(w) = -\frac{w+1}{w-1}, \quad (3.25)$$

substituindo as expressões em (3.25) na equação (3.23), obtemos

$$\frac{z}{i} = -\frac{w+1}{w-1} \iff z(w+1) = -i(w-1),$$

ou seja,

$$w = \frac{z-i}{z+i}.$$

Logo, pelo teorema (3.3.1), a única transformação de Möbius que satisfaz o problema é

$$h(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Para finalizar, anunciaremos o resultado que está como consequência de toda teoria estudada até momento. Para isso considere \mathcal{F} como o sendo a família de todos os círculos e todas as retas em \mathbb{C}_∞ .

Teorema 3.3.2. *A transformação de Möbius preveva a família \mathcal{F} , isto é, se $C \in \mathcal{F}$, então $f(C) \in \mathcal{F}$, para qualquer que seja a transformação de Möbius f .*

Demonstração. Inicialmente, observemos que, do teorema 3.2.1, toda transformação de Möbius f é uma composição de translação, rotação, homotetia e inversão. Conforme vimos no capítulo 2, a translação, rotação e homotetia preservam o formato das figuras, isto é, transformam retas em retas e círculos em círculos. Já a inversão, transforma retas em retas ou círculos (dependendo se a curva inicial passa pela origem ou não) e transforma círculos em retas ou círculos (dependendo se a curva inicial passa pela origem ou não), conforme o teorema 2.2.1.

Então, usando as notações do teorema 3.2.1, temos que

$$f = (T \circ H) \quad \text{ou} \quad f = (T_1 \circ H \circ I \circ T_2), \quad (3.26)$$

de modo que T, T_1, T_2 são translações, H é composta de homotetia e rotação, e I a inversão.

Iremos então analisar dois casos separadamente.

(I) A transformação de Möbius f é do tipo da primeira equação em (3.26), isto é,

$$f = (T \circ H).$$

Se $C \in \mathcal{F}$ então, como H é a composição de rotação e translação, segue que, $H(C)$ é uma reta se C for reta, e é um círculo se C for um círculo e daí, como

$$f(C) = (T \circ H)(C) = T(H(C)),$$

segue que, $f(C)$ é uma reta se C for reta e é um círculo se C for um círculo, pois, a translação T transforma reta em reta e círculo em círculo. Portanto, neste caso, $f(C) \in \mathcal{F}$.

(II) A transformação de Möbius f é do tipo da segunda equação em (3.26), isto é,

$$f = (T_1 \circ H \circ I \circ T_2).$$

Se $C \in \mathcal{F}$, temos que $T_2(C)$, leva reta em reta e círculo em círculo. Agora se $T_2(C)$ for uma reta ou um círculo, então $I(T_2(C))$ ou é uma reta ou é um círculo. O restante da composição é análogo ao caso (I), ou seja, $f(C) \in \mathcal{F}$.

□

Exemplo 3.3.2. *Considere a transformação de Möbius f dada por*

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i},$$

iremos encontrar a imagem dos seguintes conjuntos

$$A = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \text{Im}(z) = 0\}, \quad B = \{z \in \mathbb{C}_\infty : |z| = 1\}.$$

Para isto, basta encontrar a imagem de apenas três valores, e verificar se os valores encontrados são colineares ou não, pois, pela geometria elementar, por três pontos não colineares passa-se um único círculo, veja por exemplo em Muniz Neto (2013). O teorema 3.3.2 garante que $f(A)$ é uma reta ou um círculo e $f(B)$ é uma reta ou círculo, pois, A é uma reta e B um círculo.

Começemos pelo conjunto A . Observemos que,

$$1, 0, \infty \in A,$$

e

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = i \\ f(0) &= \frac{0+i}{0-i} = -1 \\ f(\infty) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+i}{z-i} = 1, \end{aligned}$$

então, devemos verificar se os valores $i, -1, 1$, são colineares ou não. Para isto, basta analisar se o maior dos números

$$|i+1|, \quad |i-1| \quad |1+1|,$$

é igual a soma dos outros dois. Observe que

$$\begin{cases} |i+1| = \sqrt{2} & |i-1| = \sqrt{2} & |1+1| = 2, \\ \sqrt{2} < 2 & e & 2\sqrt{2} \neq 2. \end{cases}$$

Logo, $f(A)$ é um círculo, além disso, o triângulo cuja o vértices são $z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = 1$, é retângulo isósceles sendo sua base o segmento de extremos z_2 e z_3 , neste caso, veja novamente em Muniz Neto (2013), o centro do círculos que os contém é o ponto médio da base, que é $0 + 0i$ e o raio 1, portanto

$$f(A) = B.$$

Agora, iremos proceder de modo análogo com o conjunto B . Observe que,

$$1, i, -i \in B,$$

e

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \frac{1+i}{1+i} = i \\ f(i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{z+i}{z-i} = \infty \\ f(-i) &= \frac{-i+i}{-i-i} = 0, \end{aligned}$$

então, iremos verificar se os valores $i, \infty, 0$, são colineares ou não, neste caso, como um dos valores é ∞ , concluímos que $f(B)$ é a reta que passa por 0 e i , ou seja,

$$f(B) = \{z \in \mathbb{C}_\infty : \Re(z) = 0\}.$$

Capítulo 4

Atividades didáticas: transformações geométricas

Neste capítulo iremos apresentar algumas atividades que possam ser trabalhadas com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio sobre as transformações geométricas. Tais atividades serão desenvolvidas a partir do software GeoGebra, versão online no site: <https://www.geogebra.org/classic> com a versão clássica, o qual é gratuito e que é um dos mais comuns e utilizados pelos professores de Matemática. As atividades abordaram principalmente os conceitos sobre as transformações, como: a translação, a rotação, a homotetia (dilatação e contração) e a inversão.

As atividades foram desenvolvidas de modo que o software GeoGebra seja uma ferramenta que ajude na aprendizagem sobre os efeitos das transformações geométricas. Para um melhor desenvolvimento dos alunos é recomendado que cada aluno possua um computador de acesso ao GeoGebra para que possa participar de forma ativa no desenvolvimento da atividade, tendo autonomia e incentivo para alterar livremente os parâmetros, desenvolvendo novos exemplos das transformações pré determinadas na atividade, e com isso entenda com maior facilidade tudo que ocorre nas mesmas.

As transformações geométricas trabalhadas no capítulo 2, *translação, rotação, homotetias e inversão* que serão aplicadas em algumas figuras geométricas. Assim, cada ponto da figura será transformado em outro ponto no plano.

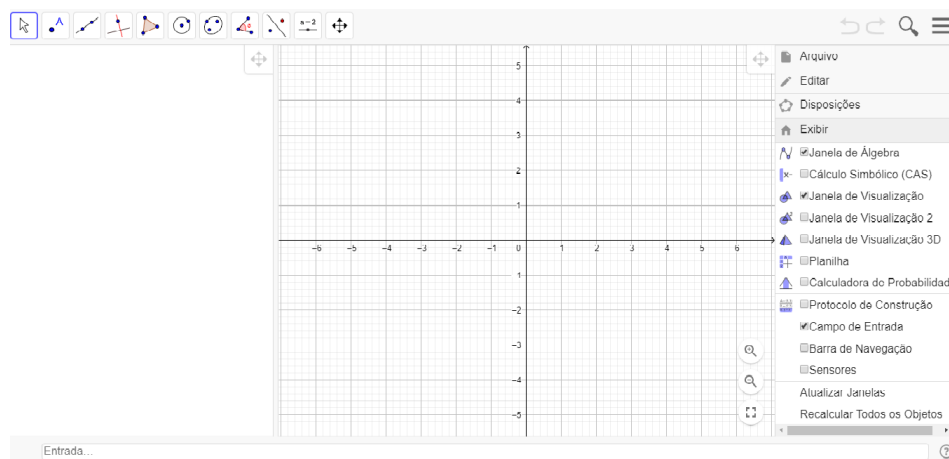


Figura 4.1: Em Exibir, selecione janela de álgebra, janela de visualização e campo de entrada.

Após entrar no programa GeoGebra, clique na aba do menu no canto superior direito da tela e escolher a opção Exibir. Em seguida, selecione os itens: Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Campo de Entrada (ver Figura 4.1). Note que os passos para as transformações serão praticamente iguais, e vamos apresentar separadamente para um melhor entendimento.

4.1 Translação

A translação geralmente é colocada como a mais simples das transformações e normalmente é a primeira a ser trabalhada com os alunos, mas quando falamos de translação devemos lembrar do conceito de **vetor** como uma classe de equipolência de segmentos orientados.

Existem grandezas que são conhecidas como escalares, que são caracterizadas por um número e sua unidade de medida correspondente: $5m^3$ de volume, $30cm$ de comprimento, $5kg$ de massa. Outras, no entanto, necessitam de mais do que isso. Por exemplo, para caracterizar uma força ou uma velocidade, precisamos dar a direção, a intensidade (módulo) e o sentido.

Vamos aplicar a transformação *translação*, definida no capítulo 2 como a seguir: Fixando $\alpha \in \mathbb{C}$, considere a transformação $T_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dada por

$$T_\alpha(z) = z + \alpha.$$

Vamos determinar dois números complexos $O = 0 + 0i$ e $\alpha = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{C}$ (escolha livre). Podemos fazer isso digitando diretamente no campo de entrada os comandos “ $O = 0 + 0i$ ” e “ $\alpha = a + bi$ ”. Na implementação de α , o programa vai sugerir a criação de “controles deslizantes para a, b ”. Com isso, pode-se escolher o intervalo de valores a e b , modificando e gerando novas translações. Assim, criamos um vetor que fará a translação, digitando na caixa de entrada $v = \text{Vetor}(O, \alpha)$ (ver figura 4.2).

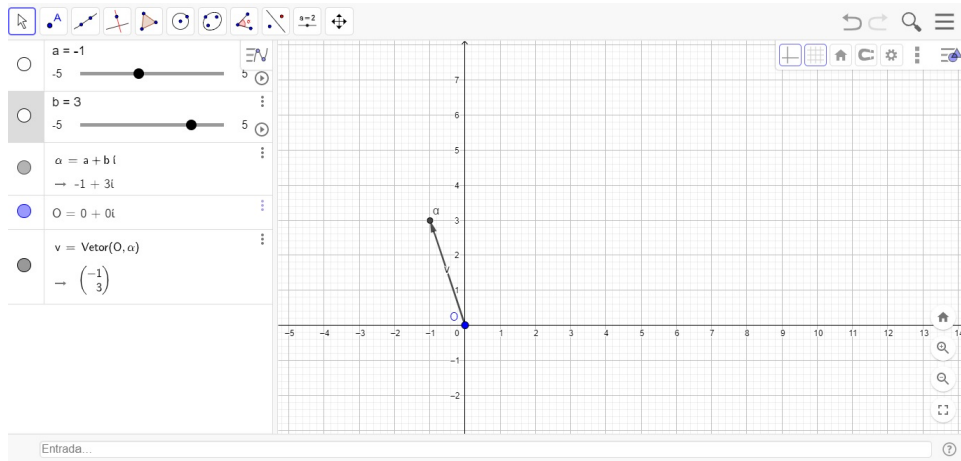


Figura 4.2: O vetor translação v , com $|v| = |\alpha|$ e orientado de O para α .

Em seguida vamos inserir a figura geométrica a ser transladada, por exemplo um quadrilátero convexo de vértices $A = (2, 1), B = (4, 1), C = (5, 2)$ e $D = (2, 2)$. Isso pode ser feito de várias maneiras, um exemplo é selecionar a opção polígono e selecionar os vértices desejados. Após a exibição da figura geométrica, vamos selecionar a opção “translação por um vetor”, em seguida selecionar a figura e depois o vetor de translação e assim obtemos a figura transladada (ver Figura 4.3). Ao ativar a “animação” para os parâmetros a e b , podemos observar de maneira mais fácil os efeitos causados por eles. O parâmetro a que representa a parte real do número complexo α , é responsável pela translação horizontal de $T_\alpha(z)$ e o parâmetro b , representa a parte imaginária de α , responsável pela translação vertical da transformação.

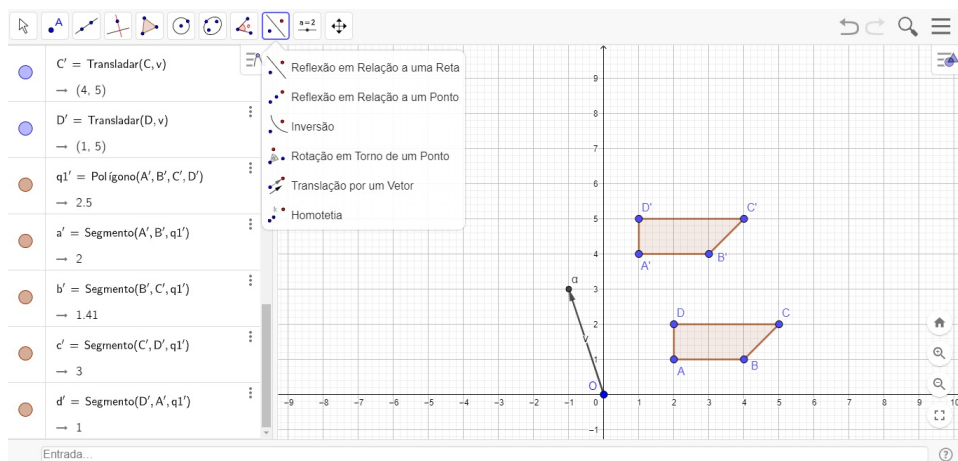


Figura 4.3: Translação por um vetor do quadrilátero convexo $ABCD$.

4.2 Rotação

Considere a transformação $R_\beta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$R_\beta(z) = ze^{i\beta}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

que é a rotação de z pelo ângulo β entorno do ponto de rotação O .

A rotação assim como a translação é um tipo de isometria, e sempre é trabalhada junto com a translação. Nos livros didáticos ela é trazida de forma bem simples, assim como as demais isometrias. Para uma melhor visualização e aprendizado dos alunos vamos representar a rotação no software GeoGebra de forma análoga ao da translação. Seguindo o mesmo passo visto na figura 4.1. O próximo passo é determinar uma figura geométrica a escolha, neste caso vamos determinar um losango de vértices $A = (3, 4)$, $B = (2, 2)$, $C = (3, 0)$ e $D = (4, 2)$, em seguida selecione a opção “Rotação em Torno de um Ponto”, selecione a figura a ser rotacionada e determine um ponto para centro de rotação, no exemplo selecionamos a origem $E = (1, 1)$, no qual o programa abrirá um comando para que determine o ângulo de rotação desejado, no exemplo foi $\beta = 135^\circ$ (ver Figura 4.4). Com a mudança do ângulo, do sentido de rotação (horário ou anti-horário) ou do ponto centro de rotação conseguimos alcançar várias outras rotações.

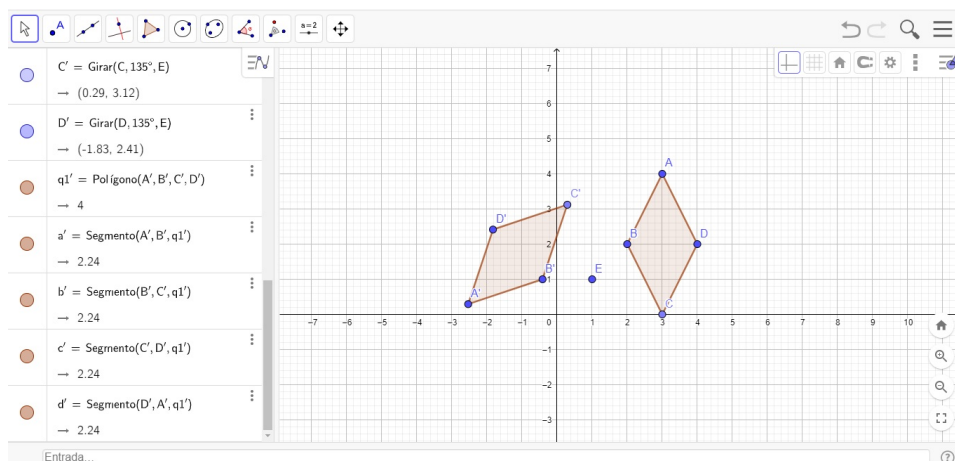


Figura 4.4: Rotação do losango $ABCD$ em um ângulo de 135° em torno do ponto E .

4.3 Homotetia: dilatação e contração

A *Homotetia* é uma transformação $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $H(z) = k \cdot z$, onde k é um número real com $|k| \neq 1$, no qual para $|k| < 1$ temos uma contração e para $|k| > 1$ temos uma dilatação.

Vamos iniciar a atividade com a mesma configuração inicial vista na Figura 4.1, em seguida determinamos uma figura geométrica, a qual iremos fazer o triângulo de vértices $A = (1, -1)$, $B = (3, 2)$ e $C = (6, -1)$, após selecione a opção “Homotetia” clique na figura desejada e determine o ponto de centro e o programa abrirá uma caixa de diálogo para determinar a razão da homotetia, a qual no exemplo determinamos o ponto de centro $D = (-5, 5)$ e razão 2 (ver Figura 4.5), os alunos devem selecionar o ponto de centro “ D ” e movimentá-lo de forma livre para ver como a dilatação ocorrerá para cada movimento de “ D ”.

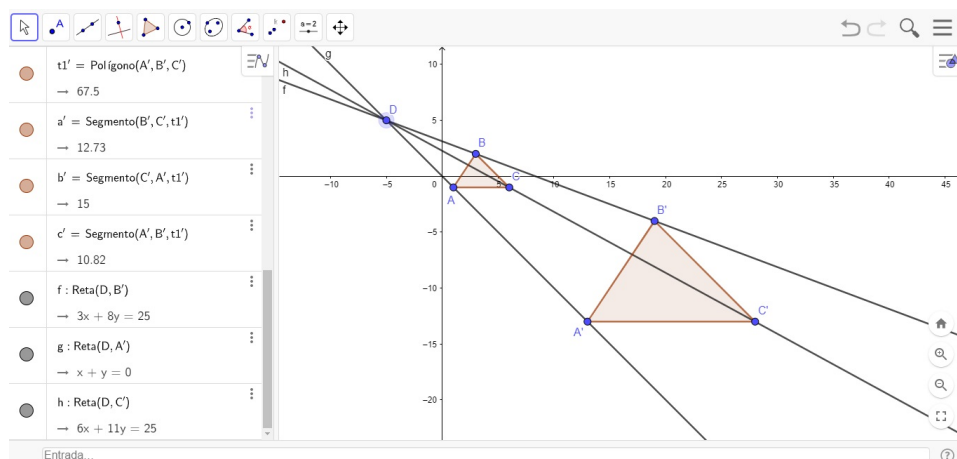


Figura 4.5: Dilatação do triângulo ABC em relação ao ponto de centro D e razão 2.

4.4 Inversão

Seja a transformação $I : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dada por

$$I(z) = \begin{cases} \infty, & \text{se } z = 0 \\ 0, & \text{se } z = \infty \\ \frac{1}{z}, & \text{se } z \neq 0 \end{cases}$$

Seguindo os comandos da figura 4.1, em seguida faremos um triângulo de vértices $A = (-2, 5)$, $B = (3, -1)$ e $C = (7, 4)$ e também uma circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, digitando $x^2 + y^2 = 1$ na caixa de entrada. Após a figura geométrica e a circunferência que será usada para a inversão prontas, selecionamos a opção “inversão” clicamos na figura e na circunferência e obtemos a inversão do triângulo ABC em relação a circunferência R colorido de rosa (ver Figura 4.6).

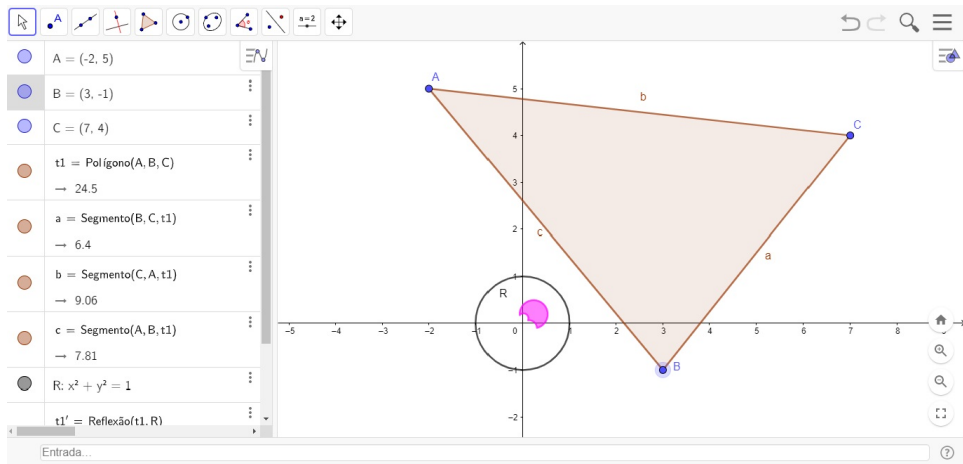


Figura 4.6: Inversão do triângulo ABC em relação a circunferência R .

Considerações finais

Com base no exposto deste trabalho sobre as transformação de Möbius e a esfera de Riemann, no capítulo 4, tentamos de forma simples expor aos alunos de Ensino Médio sobre uma visão diferente das transformações geométricas como: a translação, a rotação, as homotetias: dilatação e contração, e a inversão, de maneira a poder visualizar todos os aspectos e ter um melhor entendimento a partir do software GeoGebra.

Com isso, esperamos que essa proposta possa motivar alunos e professores que busquem novas práticas para trabalhar conteúdos ligados ao Ensino Fundamental nos anos finais, Ensino Médio e Ensino Superior. Portanto, devemos sempre buscar atividades e fazer da tecnologia uma aliada para propor atividades que levem os alunos a compreender a Matemática de forma simples e espontânea, de modo a terem uma participação ativa na sala de aula.

Referências Bibliográficas

- Ávila, G. (2011). *Variáveis complexas e aplicações*. Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- Boyer, C. B. (1974). *História da matemática*. Ed. Edgard Blucher, S.Paulo.
- Brown, J. W. (2015). *Variáveis complexas e aplicações*. Ed. AMGH, Porto Alegre.
- Cajori, F. (2007). *Uma História da Matemática*. Ed. Ciência Moderna, Rio de Janeiro.
- Delgado, J. e Fresenl, K. (2013). *Geometria Analítica: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Domingues, H. H. e Iezzi, G. (2003). *Álgebra Moderna: volume único*. Atual, São Paulo.
- Eves, H. (2005). *Introdução à História da Matemática*. Ed. Unicamp, Campinas.
- Lima, E. L. (2007). *Espaços Métricos: Projetos Euclides*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Muniz Neto, A. C. (2013). *Geometria: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Muniz Neto, A. C. (2015). *Fundamentos de Cálculo: Coleção PROFMAT*. SBM, Rio de Janeiro.
- Murdoch, D. C. (1978). *Geometria analítica*. Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- Raiz, C. E. M. (2018). Transformações de Möbius e projeções na esfera de Riemann. Dissertação de Mestrado, ICMC–USP, São Carlos/SP.
- Reis, G. L. e Silva, V. V. (1996). *Geometria Analítica*. 2. ed., Ed. LTC, Rio de Janeiro.
- Soares, M. G. (2001). *Cálculo em Uma Variável Complexa: Coleção Universitária*. 2. Ed., IMPA, Rio de Janeiro.
- Valladares, R. J. C. (1990). *Geometria analítica: a álgebra e a geometria do plano e do espaço*. Ed. LTC, Rio de Janeiro.