Universidade Federal do Ceara – UFC
Pró-Reitoria De Pesquisa E Pós-Graduação
Centro De Ciências
Mestrado Profissional em Matemática

CICERO ERIALDO OLIVEIRA LIMA

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

FORTALEZA – CEARÁ
2013

CICERO ERIALDO OLIVEIRA LIMA

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jose Othon Dantas Lopes

FORTALEZA – CEARÁ
2013

CICERO ERIALDO OLIVEIRA LIMA

A UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jose Othon Dantas Lopes

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

Dedico este trabalho À minha namorada Adriana, com amor, admiração e gratidão por sua compreensão, carinho, presença e incansável apoio ao longo do período do curso.

Aos meus pais, pois sem eles nada aconteceria na minha vida.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por tudo que ele me ofereceu, por estar sempre ao meu lado e me da oportunidade de realizar este trabalho;

Ao Prof. José Othon, pelo respeito profissional, orientação científica, compromisso e tranquilidade durante a realização deste trabalho;

À minha namorada Adriana pelo incentivo e compreensão durante todo o curso e por acreditar na minha conquista;

Aos meus pais e aos meus irmãos, que acreditaram no meu potencial, sempre me apoiando e me incentivando de todas as maneiras, nos bons e maus momentos;

Á todos os professores e colegas do curso.

RESUMO

.
Este estudo tem como objetivo investigar a utilização do software GeoGebra para o ensino de funções. Atualmente há um grande interesse pela utilização de novas tecnologias em sala da aula como recurso adicional para o ensino de conteúdos matemáticos, pois essas estão sendo consideradas com um valioso recurso de fixação de ideias e conhecimentos nessa área do conhecimento. O GeoGebra é um software de Matemática, livre e dinâmico, que pode ser utilizado em ambiente de sala de aula ou online, e reúne elementos de Geometria, Álgebra e Cálculo. O conteúdo de funções foi escolhido por ser um tema relevante ao currículo do ensino básico e que os alunos demonstram ter grandes dificuldades na resolução de problemas que envolvem gráficos, especificamente quanto à interpretação e a identificação de propriedades. Para tanto faremos a apresentação do software, seu histórico, a estrutura do GeoGebra e as possíveis aplicações de suas ferramentas daremos algumas instruções de utilização e exemplos. Em seguida, faremos um breve histórico dos principais conceitos apresentados, procurando destacar a importância do tema e as diferentes formas de abordagem. Ao final do estudo, apresentaremos sugestões de atividades e sequências didáticas que podem ser usados na preparação de aulas sobre o assunto discutido. Nosso intuito é sugerir que as aulas referentes ao conteúdo citado tenham uma abordagem diferente.

Palavras-chave: GeoGebra, Funções, Novas tecnologias, Ensino.

ABSTRACT

This study aims to investigate the use of software GeoGebra for teaching functions. Currently there is great interest in the use of new technologies in the class room as an additional resource for teaching mathematical content, as these are considered a valuable resource fixation of ideas and knowledge in this area of knowledge. GeoGebra is a software Mathematics, free and dynamic, which can be used in a classroom setting or online, and combines elements of Geometry, Algebra and Calculus. The content of functions was chosen to be a relevant topic to the basic education curriculum and that students have demonstrated great difficulty in solving problems involving graphs, specifically regarding the interpretation and identification of properties. To do so will make the presentation of the software, its history, the structure of GeoGebra and possible applications of their tools give you some instructions and examples. Then we will make a brief history of the key concepts presented, aiming to highlight the importance of the issue and the different ways of approach. At the end of the study, we present suggestions for activities and teaching sequences that can be used in the preparation of lessons on the subject discussed. Our aim is to suggest that the classes for the cited content have a different approach.

Keywords: GeoGebra, Features, New Technology, Education.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Pesquisas têm surgido, no âmbito nacional e internacional, na tentativa de encontrar meios que tragam mais possibilidades de interação e compreensão da matemática por meio de novas tecnologias.

A introdução dessas novas tecnologias na escola pode constituir uma oportunidade para a introdução concomitante de inovações pedagógicas no ensino da Matemática e, com isso, encaminhar uma solução significativa para os problemas do ensino na disciplina.

Cotta (2002) afirma que se tem adotado a utilização da informática como alternativa a metodologia tradicional como um recurso para a melhoria dos resultados do ensino da Matemática nas escolas

De acordo com Kenski (2003) a utilização das tecnologias tem influenciado todos os campos educacionais e encaminha as instituições para a adoção de uma cultura informática educacional, exigindo das mesmas uma reestruturação de suas ações educativas.

As Tecnologias da Comunicação e Informação (TIC) e a Investigação matemática têm sido apontadas como uma das tendências metodológicas de ensino que favorecem a compreensão dos conceitos matemáticos, bem como a oportunidade de fazer conjecturas e generalizar (BALDINI; CYRINO, 2012a).

O uso das tecnologias na disciplina de Matemática possibilita experimentar e testar hipóteses, confrontar ideias, trocar experiências, formular gráficos entre tantas outras possibilidades.

Discutir o uso pedagógico destes recursos nas aulas de Matemática tem sido foco de muitos estudos, uma vez que por si só eles não garantem um novo modelo educacional (BALDINI; CYRINO, 2012b).

Neste trabalho foi apresentado uma investigação sobre a utilização do software GeoGebra como uma ferramenta mediadora das relações de ensino aprendizagem na Matemática, bem como uma análise das possibilidades de uso desse software para o ensino de funções.

Trabalhando há alguns anos com ensino médio tenho observado a extrema dificuldade de muitos alunos com questões ligadas à construção e à interpretação de gráficos de funções de uma variável real. Para contornar essas dificuldades venho procurando incorporar novos métodos e tecnologias, o que me permite trabalhar com diferentes representações de uma mesma situação e estabelecer conexões entre elas.

Escolhemos o software GeoGebra por ser um importante recurso que nos permite construir diversos gráficos de funções num mesmo plano e ter uma interface[1] amigável, ser de simples manipulação, mas poderoso, podendo ser utilizado por professores e alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior.

O GeoGebra tem-se destacado por ser um software livre e dinâmico cujas capacidades têm evoluído muito nos últimos anos. Foi elaborado por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de desenvolvedores para o ensino de matemática. Pode ser utilizado em ambiente de sala de aula ou online, e reúne elementos de Geometria, Álgebra e Cálculo.

O GeoGebra possui uma interface de fácil acesso que não requer conhecimentos prévios de informática o usuário é quem determina o que vai ser executado na tela (BALDINI; CYRINO, 2012a).

Existem vários sites que disponibilizam tutoriais, fóruns, vídeos e construções que ajudam na compreensão de suas ferramentas e de conceitos matemáticos.

O conteúdo de funções foi escolhido por ser um tema relevante ao currículo do ensino básico e que os alunos demonstram ter grandes dificuldades na resolução de problemas que envolvem a construção de gráfico, especificamente quanto à interpretação e a identificação de elementos notáveis.

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Ministério da Educação é importante destacar o significado da representação gráfica das funções (BRASIL, 2006).

Diversos instrumentos proporcionados pela moderna tecnologia podem ter um papel de grande alcance no estudo das funções, em especial, as calculadoras gráficas e os computadores que disponham de programas apropriados.

A tecnologia pode ajudar os estudantes a desenvolverem uma atividade matemática mais profunda, facilitando a generalização, dando-lhes poder para resolver problemas difíceis, e fornecendo ligações concretas entre domínios tão diversos como a Geometria, a Álgebra, a Estatística, as situações reais e os modelos matemáticos associados (PONTE, 1990).

---

[1] Interface é um conjunto de meios físicos ou lógicos planejadamente dispostos que auxiliam a comunicação entre um usuário e um programa ou sistema operacional, ou entre duas aplicações.

No que tange à metodologia utilizada em nossa pesquisa, foi realizado um levantamento bibliográfico em dissertações de mestrado (acadêmico e profissional) e teses de Doutorado, disponíveis principalmente na rede mundial de computadores. Os trabalhados selecionados foram aqueles que utilizaram os recursos da tecnologia computacional, como suporte e a Geometria Dinâmica.

Segundo Oliveira (2010) a pesquisa bibliográfica é uma modalidade de estudo e analise de documentos tais como livros, artigos científicos, periódicos, e dicionários e tem por finalidade levar o pesquisador(a) a entra em contato direto com obras, artigos ou documentos que tratem do tema em estudo.

O objetivo geral deste estudo foi investigar a contribuição e as perspectivas do software GeoGebra para o ensino de funções. Para a concretização desse objetivo geral foi necessário estabelecer os seguintes objetivos específicos:

- Explicitar a estrutura e o uso do software GeoGebra.
- Identificar possibilidades de aplicações de ferramentas do GeoGebra no estudo de funções
- Destacar vantagens e/ou desvantagens para o uso deste software traz para o ensino de funções.

Primeiramente, faremos a apresentação do software e seu histórico. Em seguida exploraremos a estrutura do GeoGeobra e as possíveis aplicações de suas ferramentas com algumas instruções de utilização e exemplos. No tópico seguinte, faremos um breve histórico dos principais conceitos apresentados, procurando destacar a importância do tema e as diferentes formas de abordagem. Para final apresentaremos sugestões de atividades e sequências didáticas que podem ser usados na preparação de aulas sobre o assunto discutido.

Uma sequência didática é uma sequência de módulos de ensino organizados para melhorar uma prática de linguagem. As sequências didáticas proporcionam relação entre um projeto de apropriação de uma prática de linguagem e os instrumentos que facilitam essa apropriação (ROJO, 2009).

2. CONHECENDO O GEOGEBRA

GeoGebra é um software de Matemática, livre e dinâmico, que foi elaborado por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de desenvolvedores para o ensino de Matemática. Pode ser utilizado em ambiente de sala de aula ou online, e reúne elementos de Geometria, Álgebra e Cálculo.

Foi construído em Java e seus applets estão disponibilizados na Internet, no site http://www.geogebra.org, podendo rodar em Windows, Linux e Macintosh (FLÔRES, 2011). Pode ser instalado via Internet ou via CDs e outros meios de armazenamento, o que aumenta sua possibilidade de uso. Segundo Furgeri (2012) os programas desenvolvidos na linguagem Java podem ser executados virtualmente em qualquer sistema operacional, aceitos em qualquer tipo de computador. Quando um navegador web compatível com Java carrega uma página web que contem um applet, o aplicativo é baixado e o navegador o executa (DEITEL, 2010).

A maioria das plataformas é formada por um conjunto de hardware e software que atuam juntos. Java difere da maioria as outras plataformas porque é composta apenas de um software operando sobre outra plataforma qualquer a plataforma Java atua como uma maquina virtual (DEITEL, 2010).

A Versão mais recente do software é o GeoGebra 4.2 que foi lançado em 01 de dezembro de 2012. Essa versão está disponível em mais de 50 idiomas, e também pode funcionar em tablets e iPads. Atualmente vários pesquisadores trabalham no desenvolvimento do GeoGebra 5.0 que permite a visualização em 3D.

O GeoGebra conta com um grande número de institutos a nível mundial. Esses institutos tem o propósito de agregar interessados no uso do software como ferramenta de ensino e aprendizagem promovendo a colaboração entre profissionais e pesquisadores através da distribuição de materiais gratuitos, oficinas e formações presenciais e a distância de professores e alunos de licenciaturas em matemática. Uma lista com os sites de alguns desses institutos está disponível no Apêndice A.

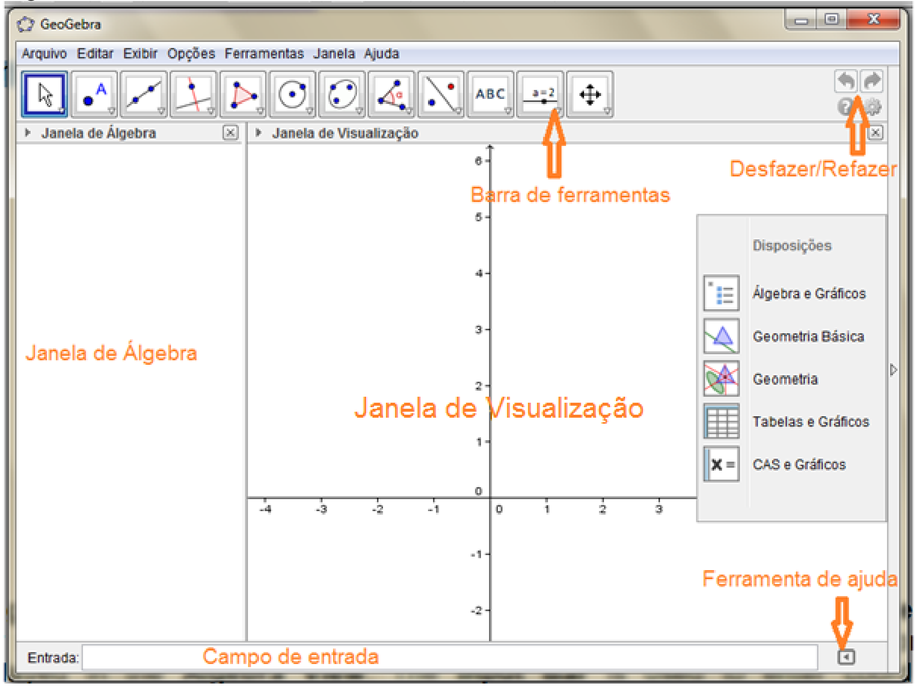
No Brasil o GeoGebra conta com seis institutos espalhados pelo país, três desses institutos possuem sites onde estão disponíveis instruções para utilização e instalação do software além de pesquisas realizadas sobre o assunto.

Segundo Damasco Neto (2010) nesse ambiente informatizado os objetos matemáticos passam a ter representações mutáveis, diferente dos tradicionais ambientes "lápis e papel" ou "giz e quadro-negro".

> Tal dinamismo é permitido através da manipulação direta sobre os objetos presentes na tela do computador. Por exemplo: em geometria os elementos de um desenho são manipuláveis (o centro e o raio de uma circunferência, a reta e os pontos pelos quais ela fora definida); no estudo de funções de primeiro grau as suas respectivas representações gráficas são objetos manipuláveis permitindo descrever a relação de crescimento/decrescimento entre os coeficientes e suas respectivas representações algébricas. (Pág 69)

Ao iniciar o GeoGebra aparece a janela apresentada abaixo na figura 1:

Figura 1 – Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Elaborada pelo autor.

Usando os comandos da barra de ferramentas o usuário consegue fazer construções utilizando o mouse na Janela de Visualização. Ao mesmo tempo em que as construções ocorrem às coordenadas e as equações correspondentes são exibidas na Janela de Álgebra.

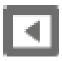
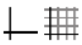
O Campo de entrada é usado para introduzir diretamente coordenadas, equações, comandos e funções que serão exibidas na Janela de Visualização e na Janela de Álgebra imediatamente depois de pressionarmos a tecla Enter. A Figura 2 mostra o campo de entrada do GeoGebra.

Figura 2 – Campo de entrada do GeoGebra

Fonte: Elaborada pelo autor

O quadro 1 apresenta algumas dicas de utilização dos comandos básicos do GeoGebra.

Quadro 1 - Dicas de utilização dos comandos básicos do GeoGebra

	Experimentem os botões Desfazer/Refazer no lado direito da barra de ferramentas.
	A ferramenta de ajuda é encontrada à direita ao lado da barra de entrada e lhe dá uma lista de todos os comandos disponíveis no GeoGebra.
	Para ocultar um objeto, clique com o botão direito do mouse sobre ele (Mac OS: ctrl+clique) e desmarque a opção mostrar objeto.
	Você pode mudar a aparência dos objetos (cor, tipo de linha, ...) facilmente usando a Barra de Estilo: basta clicar na seta  no topo da Janela de Visualização para mostrar ou esconder. Para mais opções, clique no ícone  Propriedades GeoGebra e escolha o icone  objetos a partir do menu de contexto.
	Eixos e grades podem ser ocultados ou exibidos utilizando a Barra de Estilo.
	Você pode mostrar diferentes pontos de vista, como algebrico e o gráfico utilizando o menu Exibir ou na barra lateral Perspectiva (à direita da Janela de Visualização).
	A fim de avançar a sua construção na Janela de Visualização, escolha a ferramenta Mover Janela de Visualização e simplesmente utilize o mouse para arrastá-la.
	O protocolo de construção (ver menu Exibir) fornece uma tabela com todas as etapas de sua construção. Utilizando botões você pode avançar os passos de construção de novo. Além disso, você pode arrastar linhas para cima ou para baixo para alterar a ordem de construção.

Fonte: Elaborado pelo autor

3. FUNÇÕES

Embora a ideia de função possa ser identificada em obras do século XIV, foi só a partir o século XVII que ela teve grande desenvolvimento e utilização. Uma das questões que ocupou a atenção dos matemáticos do século XVII foi o problema de traçar a reta tangente a uma dada curva. Nesse problema intervêm varias grandezas, e aos poucos, uma dessas grandezas foi assumindo o papel do que hoje chamamos de variável independente (ÁVILA, 2006).

De acordo com os PCN+ o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (BRASIL, 2002).

A palavra função foi introduzida por Leibniz em 1673, justamente para designar qualquer das variáveis geométricas associadas com uma dada curva. Só aos poucos é que o conceito foi-se tornando independente de curvas particulares e passando a significar a dependência de uma variável em termos e outras (ÁVILA, 2006).

Por volta de 1717, Johann Bernoulli havia chegado a considerar uma função como expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes; pouco tempo depois Euler considerou uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo varáveis e constantes (EVES, 2004).

O conceito de Euler, que corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos elementares de matemática tem, se manteve inalterado até que Joseph Fourier (1768 – 1830) foi levado a considerar, em suas pesquisas, as chamadas séries trigonométricas, envolvendo uma forma de relação mais geral entre as variáveis. Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) na tentativa de dar uma definição de função suficientemente ampla chegou à seguinte formulação: Uma variável é um símbolo que representa qualquer um dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que sempre que se atribui um valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função de x, ou simbolicamente, $y = f(x)$.

Segundo as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio do Ministério da Educação o estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações. Também destaca que é interessante que os alunos apresentem outras tantas relações funcionais e que, de início, esbocem os gráficos que representam essas relações, registrando os tipos de crescimento e decrescimento (BRASIL, 2006).

O Quadro 2 apresenta as várias concepções de função que surgiram entre os séculos XVII e XX em ordem cronológica. Esse levantamento foi feito por Rossini (2006) ao perceber que durante o desenvolvimento do conceito de função surgiram diferentes concepções, ou seja, diferentes maneiras de perceber ou enfatizar as propriedades das funções.

Algumas dessas concepções foram utilizadas simultaneamente em uma mesma definição; ou então, em uma mesma época, diferentes concepções foram empregadas pelos matemáticos (ROSSINI, 2006).

Quadro 2 - Síntese das concepções de função

Ano	Matemático	Concepção
1637	Descartes	Equação em que x e y mostra dependência.
1670	Newton	Quantidades relacionadas; Fluentes expressos analiticamente.
1673	Leibniz	Relação, quantidades geométricas que dependem de um ponto da curva.
1718	Jean Bernoulli	Relação entre grandezas variáveis.
1748	Euler	Expressão analítica.
1755	Euler	Dependência arbitrária.
1778	Condorcet	Dependência arbitrária.
1797	Lacroix	Dependência arbitrária.
1797	Lagrange	Expressão de cálculo, expressão analítica.
1821	Cauchy	Resultados de operações feitas sobre uma ou várias quantidades constantes ou variáveis.
1822	Fourier	Série trigonométrica; sequencia de valores.
1834	Lobatchevsky	Expressão analítica; condição para testar os números, dependência arbitrária.
1837	Dirichelet	Correspondência: para cada valor de x (abscissa), um único valor de y (ordenada); função definida por partes.
1870	Hankel	Para cada valor de x em um certo intervalo, corresponde um valor bem definido de y; não é necessária uma mesma lei para todo o intervalo; y não precisa ser definido por uma expressão matemática explicita em x.
1888	Dedekind	Correspondência entre elementos de dois conjuntos obedecendo a uma determinada lei.
1888	Cantor	Subconjuntos de um produto cartesiano, obedecendo duas condições.
1939	Bourbaki	Correspondência entre elementos de dois conjuntos, obedecendo a duas condições.

Fonte: Rossini (2006)

Para Rossini (2006) um ponto fundamental do conceito de função é ser relevante em outras áreas do conhecimento, tais como, a Física, a Química, a Biologia, a Economia, a Administração, a Engenharia e também em áreas que surgiram devido às necessidades da sociedade contemporânea.

4. O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ENSINO DE FUNÇÕES

O software GeoGebra auxilia no estudo de funções onde seus gráficos podem ser manipulados permitindo uma maior interação com as representações algébricas. Essa ideia vem ao encontro das Orientações Curriculares para o Ensino Médio do Ministério da educação que relata que a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções (BRASIL, 2006).

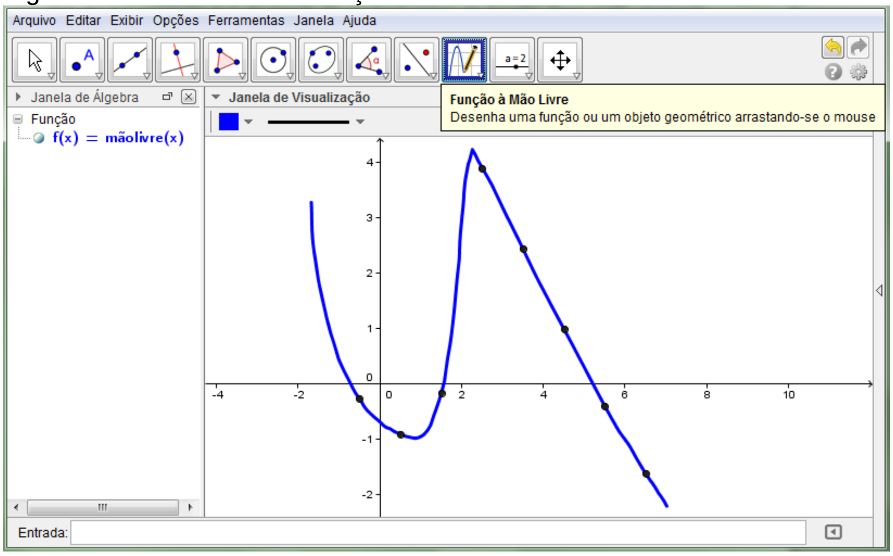
4.1. Definição

Dados dois conjuntos A, B, uma função $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é uma lei que associa cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. O conjunto A é chamado de domínio da função e o conjunto B é chamado de contradomínio da função. Para cada elemento $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se a imagem de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in A$.

O gráfico de uma função $f\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma função $f\colon A \to B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista um único ponto $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada seja x (LIMA, 2008).

Na caixa de ferramentas do GeoGebra o comando função a mão livre permite ao usuário desenhar o gráfico de uma função ou outro objeto geométrico. O traço obtido pelo comando função a mão livre obedece a condição necessária e suficiente. A figura 3 traz uma construção feita com o comando função a mão livre.

Figura 3 - Gráfico de uma função desenhado a mão livre



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2. Função Injetiva e sobrejetiva

Uma função $f: A \to B$ chama-se injetiva quando, dados x, y quaisquer em A, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras: quando $x \neq y$, em A, implica $f(x) \neq f(y)$ em B(LIMA, 2008).

Uma função $f: A \to B$ chama-se sobrejetiva quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$ (LIMA, 2008).

Dadas uma função $f: A \to B$ e uma parte $X \subset A$, chama-se imagem de X pela função f ao conjunto $f(X)$ formado pelos valores $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in X$. Evidentemente $f(X)$ é um subconjunto de B, para que $f: A \to B$ seja sobrejetiva é necessário e suficiente que $f(A) = B$. Em geral tem-se apenas $f(A) \subset B$, o conjunto $f(A)$ é chamado de imagem da função f.

Uma função $f: A \to B$ chama-se bijetiva quando for injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Lembremos que uma função $f: A \to B$, com $A \subset B$, chama-se:

crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;

monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$;

Em qualquer dos quatro casos, f diz-se monótona.

4.3. Composição de funções

Sejam $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções tais que o domínio de g é igual ao contradomínio de f. Neste caso, podemos definir a função $g \circ f: A \to C$, dita composta, que consiste em aplicar primeiro f e depois g. Mas precisamente, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ (LIMA, 2008).

4.4. Função afim

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem dois números reais a e b tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in R$. Uma função afim é caracterizada pelo seguinte teorema:

TEOREMA 1: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se a diferença $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

A demonstração deste teorema utiliza o Teorema Fundamental da Proporcionalidade.

TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE: Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$. Afim de demostrar que $(1) \Rightarrow (2)$, provemos inicialmente que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, tem-se

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x),$$

Logo

$$f(r \cdot x) = \frac{m}{n} \cdot f(x) = r \cdot f(x)$$

Seja $a = f(1)$ Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponha, por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de modo análogo.) Temos $\frac{f(x)}{a} < x$:

Tomemos um número racional r tal que $\frac{f(x)}{a} < r < x$ Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$.

Esta contradição completa a prova de que $(1) \Rightarrow (2)$.

Para mostrar que $(2) \Rightarrow (3)$ tomemos $a = f(1)$, com $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tem-se $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

E finalmente por indução podemos demonstra-se que $(3) \Rightarrow (1)$. Seja $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Tomando $x = y$ temos $f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, ou seja, a proposição é valida para $k = 2$.

Supondo a proposição valida para um certo k natural temos $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, mas $f(x+y) = f(x) + f(y)$ logo $f((k+1)x) = f(k \cdot x + x) = f(k \cdot x) + f(x) = k \cdot f(x) + f(x) = (k+1) \cdot f(x)$. Como $f(0) = 0$ temos que se para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ dai tomando $m = -n$ com n natural temos $f(m \cdot x) = f(-n \cdot x) = f(n \cdot (-x)) = n \cdot f(-x) = n \cdot (-f(x)) = m \cdot f(x)$ verificando a validade da proposição para todo inteiro.

■

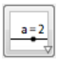
DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 1: Suponhamos que a função f seja crescente logo temos que para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x)\\ &= f((x+h)+k) - f(x+k) + f(x+k) - f(x)\\ &= \varphi(h) + \varphi(k).\end{aligned}$$

Logo pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+k) - f(x) = a \cdot h$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = a \cdot h + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

O gráfico $G(f)$ de uma função afim é uma linha reta não vertical. Vamos agora construir o gráfico dinâmico de uma função polinomial de 1º grau com controles deslizantes. Esses controles permitem ao usuário do software alterar, num intervalo numérico especifico, os índices e coeficientes de expressões apresentadas na janela algébrica. Essas alterações são observadas na janela de visualização instantaneamente.

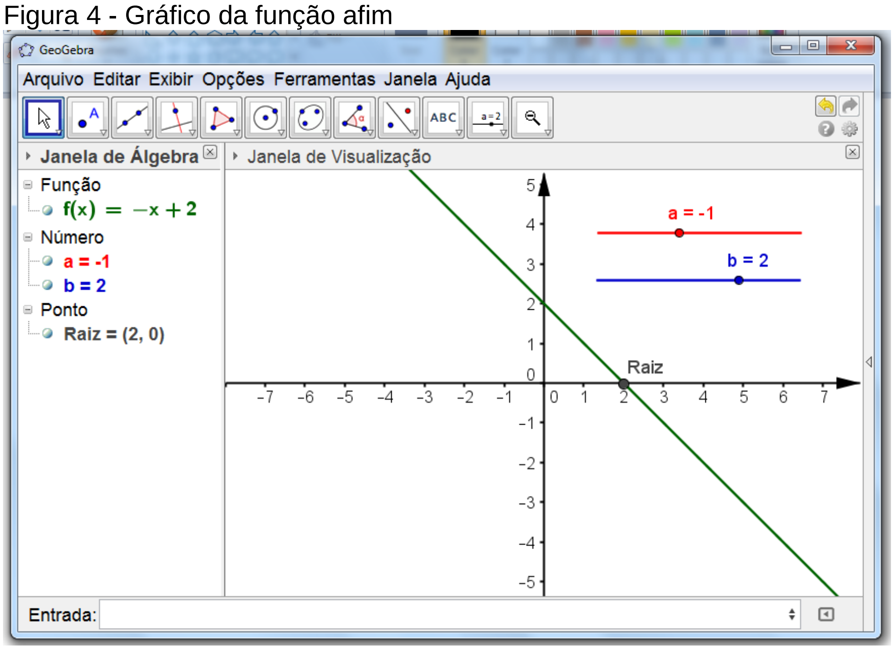
Preparativos: Selecione o Ícone 

Controle deslizante e clique na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante, esse primeiro controle será referente ao coeficiente angular **a** da função. Repita os passos e crie um novo controle para o coeficiente linear **b**. Após ter definido os valores para os coeficientes da função digite no campo de entrada a expressão: $f \quad x \quad = ax + b$

Para determinar a raiz da função de uma função f digite no campo de entrada o comando: $raízes[f, p, q]$.

Onde p e q representam os valores, mínimo e máximo do intervalo onde se encontra a raiz da função. A Figura 4 apresenta o layout da construção.

Figura 4 - Gráfico da função afim



Fonte: Elaborado pelo autor

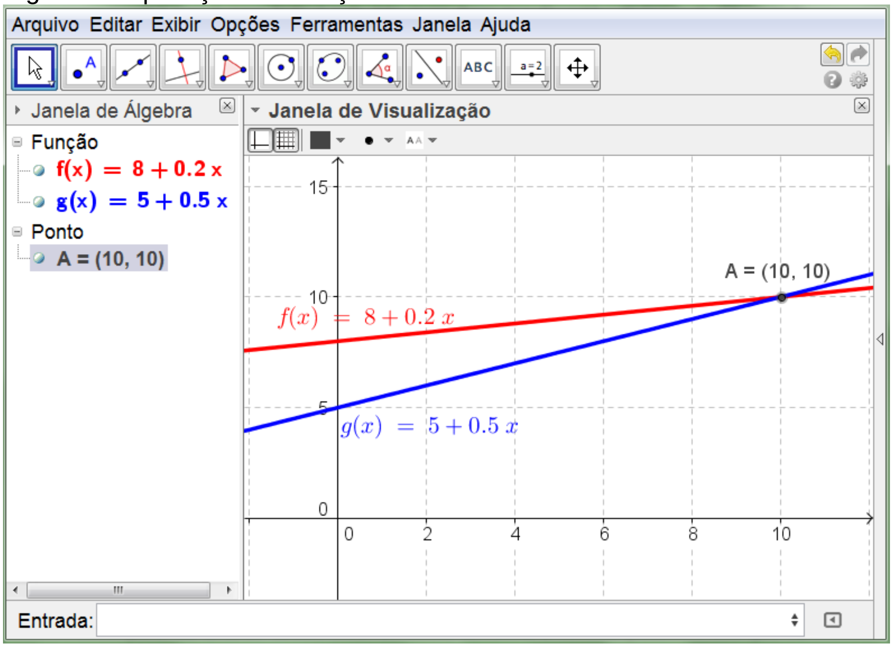
De maneira semelhante podemos construir o mesmo tipo de gráfico para outros tipos de função.

O software GeoGebra pode ser utilizado para resolver problemas que envolvem a função afim. A seguir temos a resolução de uma questão do exame nacional de acesso ao PROFMAT do ano de 2011.

PROBLEMA: **(PROFMAT – 2011/adaptado)** Na loja A, um aparelho custa 800 reais mais uma taxa de manutenção mensal de 20 reais. Na loja B, o mesmo aparelho custa 500 reais, porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. A partir de quantos meses de uso a compra na loja A se torna mais vantajosa que a da loja B?

RESOLUÇÃO: Construindo no GeoGebra os gráficos das funções reais f e g que representam respectivamente os custos do aparelho nas lojas A e B teremos a figura 5 onde observamos que a compra na loja A se torna vantajosa a partir do 10 mês.

Figura 5 - Aplicações da função afim



Fonte: Elaborado pelo autor

4.4.1. Sequência didática com o uso do GeoGebra

Reis (2011) em sua dissertação de mestrado, em ensino de matemática, aplicou uma sequência didática diagnóstica, em uma escola pública de São José dos Campos, com alunos da 1ª serie do Ensino Médio para registrar e analisar os erros cometidos pelos alunos no conceito de função afim, em seguida propôs uma sequência de atividades utilizando o software GeoGebra, planejada e estruturada a partir da análise destes mesmos erros, de forma a verificar possíveis avanços na aprendizagem.

O pesquisador justificou a escolha do software GeoGebra devido a possibilidade de acesso gratuito e da interatividade em trabalhar os diferentes registros de representação semióticos, aliado às possibilidades no preparo de um modelo pronto, adaptando-se as condições cognitivas dos alunos.

Sua investigação apoiou-se na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

O psicólogo Raymond Duval desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, considerando as mudanças de registros de representação. A teoria sobre o Registro de Representação Semiótica e a análise do funcionamento do pensamento para a aquisição de conhecimento e à organização de situações de aprendizagem. Pesquisando sobre os problemas da aprendizagem em Matemática procurou entender o funcionamento cognitivo do aluno, de modo que ele mesmo se conscientize, participe e dirija seu processo de aprendizagem (DUVAL, 2003).

De acordo com Duval (2003), o sujeito só apropria-se de um determinado objeto matemático se recorrer à noção de representação, uma vez que a Matemática trabalha com objetos abstratos. Para o autor os números, as funções e as retas são objetos matemáticos; e as escritas decimal ou fracionária, os símbolos e os gráficos são algumas de suas representações.

Para Duval (2003) existe uma diversidade de representações semióticas que são agrupadas em quatro grandes registros: a língua natural, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e as representações gráficas. Segundo Almouloud (2007) o processo de resolução de um problema, que envolve um objeto matemático, deve proporcionar ao aluno condições de compreender que um objeto poderá ter diferentes pontos de vista e, suas mudanças, além da conversão dos registros são fundamentais para o cumprimento da tarefa proposta.

Para estabelecer uma articulação entre as sequências didáticas o trabalho de Reis (2011) foi estruturado em duas fases. Na primeira fase foi realizada a investigação das dificuldades de aprendizagem dos alunos buscando elementos que pudessem informar as concepções dos pesquisados em torno do conceito de função afim. O pesquisador considerou o resultado de avaliações externas identificando as organizações curriculares oficiais de ensino e aprendizagem do objeto matemático em estudo. Na segunda fase do trabalho foi aplicada uma sequência didática composta de cinco (5) blocos de atividades, utilizando as TICs, contendo um roteiro de questões em papel impresso que buscando colocar em evidência algumas representações e transformações.

Os resultados obtidos na fase diagnóstica foram usados para elaborar as atividades subsequentes, estas atividades visavam o desenvolvimento do raciocínio matemático, que segundo o autor possibilita a construção do conhecimento e não apenas a memorização e reprodução de técnicas de resolução em torno do conceito da função afim.

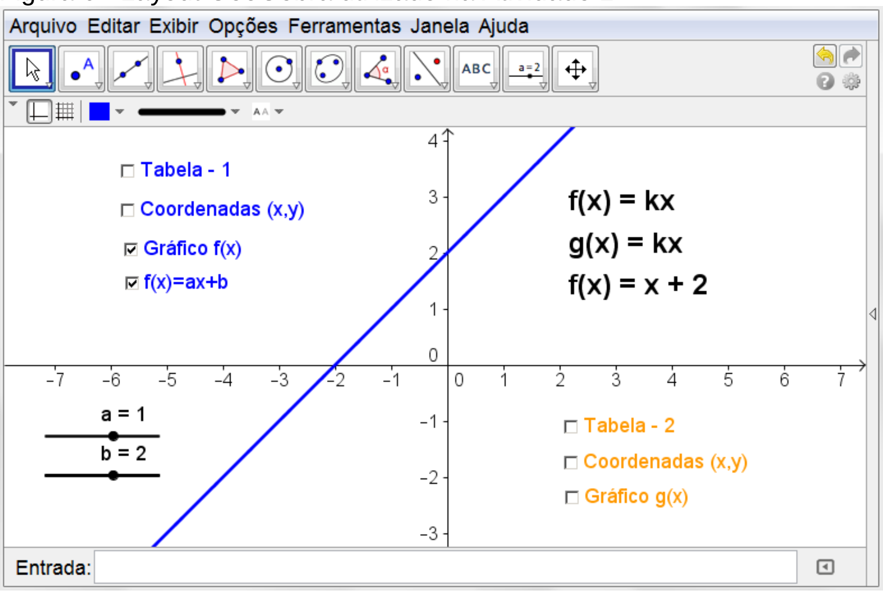
Para o autor as novas tecnologias oferecem meios em que a representação passa a ter caráter dinâmico, e isto tem reflexos nos processos cognitivos. E o software GeoGebra apresenta interface dinâmica e interativa para a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, possibilitando ao aluno agir sobre o objeto matemático num contexto abstrato, mas tendo como suporte a representação gráfica na tela do computador.

A sequência didática foi composta de cinco (5) blocos de atividades, denominadas de Atividades 1, 2, 3, 4 e 5. Foi apresentado um roteiro e o layout de apresentação na tela do computador para que o aluno executar-se as tarefas pedidas.

ATIVIDADE 1, a proposta foi de uma atividade contendo uma tabela dinâmica, que possibilitou inserir vários registros numéricos, evidenciando o coeficiente de proporcionalidade da função linear e, consequentemente, o registro algébrico e gráfico.

Através do acionamento de interruptores os estudantes poderiam exibir ou ocultar as coordenadas, o gráfico e alterar os coeficientes para, deste modo, verificar o comportamento do gráfico da função quando se alterava seus coeficientes. O layout da atividade é exibido na Figura 6.

Figura 6 - Layout GeoGebra utilizado na Atividade 1



Fonte: Reis (2011)

ATIVIDADE 2, foi dividida em duas partes:

Atividade 2.1, fazer a conversão do registro gráfico para o algébrico da função afim, com o coeficiente linear.

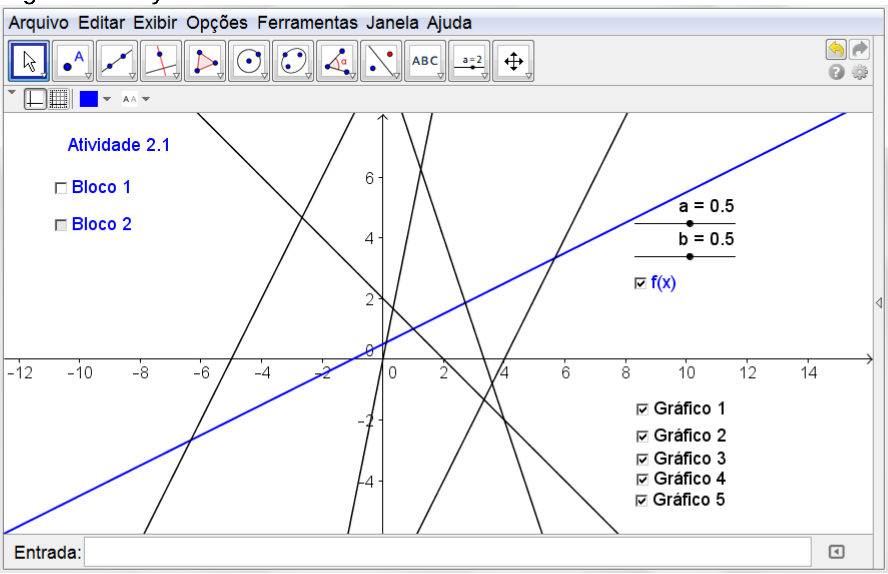
Na Atividade 2.1 pode-se identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear da função afim a partir de sua expressão algébrica. O objetivo é convencer o aluno de que um tratamento algébrico pode ser necessário para reconhecer os coeficientes, testando-os após tratamento.

Essa atividade também foi proposta através de seletores onde os estudantes deveriam associar as expressões algébricas à forma gráfica. Ao selecionar o interruptor era apresentada a forma gráfica da função.

Atividade 2.2, identificar o coeficiente angular e o coeficiente linear da função afim a partir de sua expressão algébrica.

Nessa atividade foram utilizados seletores deslizantes onde o estudante observava as mudanças no gráfico das funções de maneira instantânea ao alterarem os coeficientes. O layout da Atividade 2 é mostrado na figura 7.

Figura 7 - Layout GeoGebra utilizado na Atividade 2

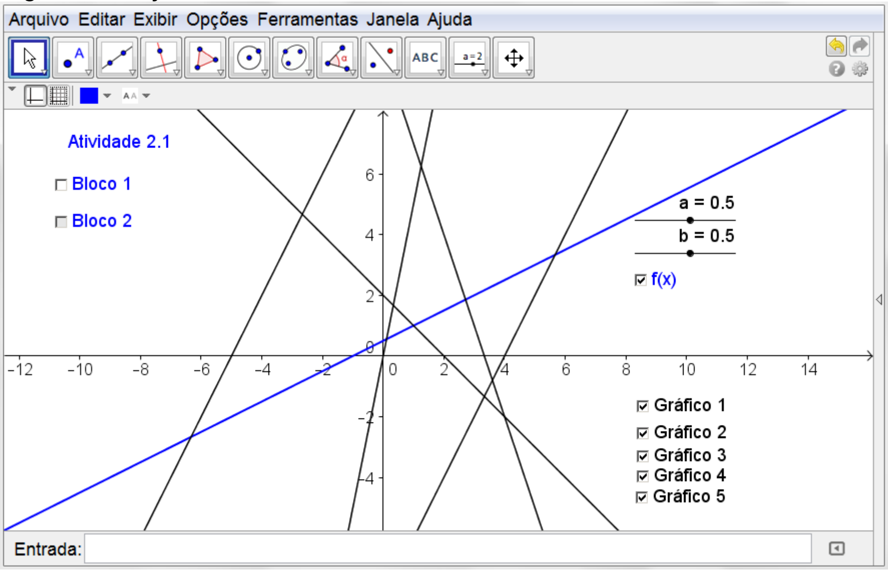


Fonte: Reis (2011)

ATIVIDADE 3, escrever a expressão algébrica da função afim a partir do seu gráfico.

ATIVIDADE 4, utilizar o dinamismo do software para a representação e explorar, separadamente, os conceitos de zero da função, domínio e imagem e sinal da função, além de constatar visualmente quando a função é positiva ou negativa, através das representações gráficas. Os seletores deslizantes permitiram esse dinamismo como pode ser observado no layout da Atividade 4 mostrado na figura 8.

Figura 8 - Layout GeoGebra utilizado na Atividade 4

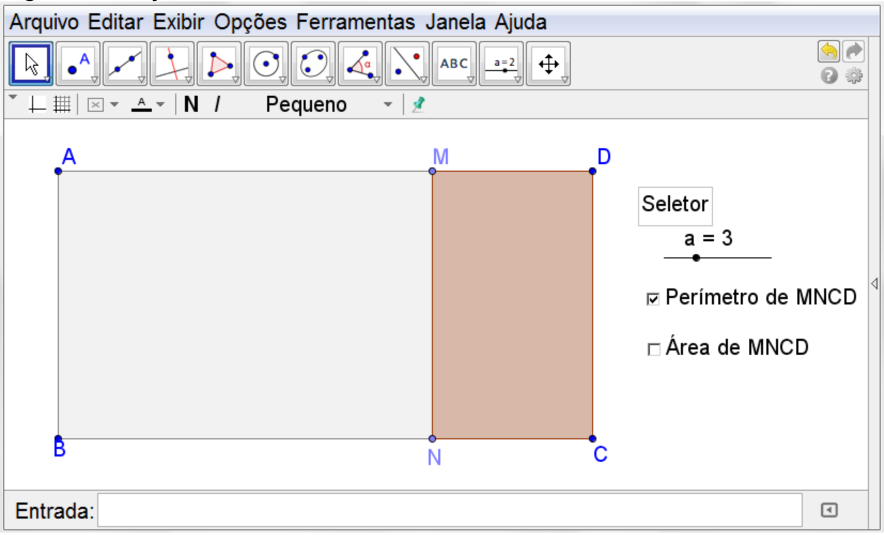


Fonte: Reis (2011)

ATIVIDADE 5, relacionar área e o perímetro de um retângulo com a forma algébrica da função afim. A Figura 9 mostra o layout da Atividade 5 que tinha as seguintes características:

a) Variando o seletor a, o comprimento do segmento ND varia de 0 a AD;
b) Acionando os seletores Perímetro MCDN e Área MCDN, são apresentados os valores do Perímetro e da área do retângulo MCDN.

Figura 9 - Layout GeoGebra utilizado na Atividade 5



Fonte: Reis (2011)

4.5. Função Quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo x ∈ $\mathbb{R}$.

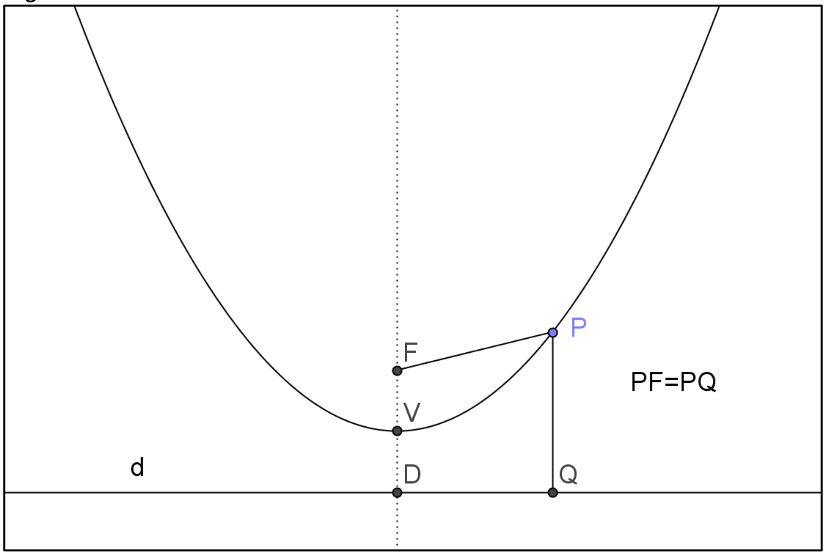
Os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Noutras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo x ∈ $\mathbb{R}$ então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Com efeito, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo x ∈ $\mathbb{R}$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = c'$. Então, cortando c e c', tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo x ∈ $\mathbb{R}$. Em particular, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Neste caso, cancelando x, obtemos ax + b = a'x + b' para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$,vem $a + b = a' + b'$ e -$a + b = -a' + b'$, donde concluímos $a = a'$ e $b = b'$.

O estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau. Problemas que recaem numa equação do segundo grau estão entre os mais antigos da Matemática. Em textos cuneiformes, escritos pelos babilônios há quase quatro mil anos, encontramos, por exemplo, a questão de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p (LIMA, 2006).

Consideremos um ponto F e uma reta d que não o contém. Chamamos parábola de foco F e diretriz d o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d. A figura 10 mostra a parábola de diretriz d e foco F.

Figura 10 - Parábola de diretriz d e foco F



Fonte: elaborada pelo autor

A reta perpendicular à diretriz que contém o foco chama-se eixo da parábola. O vértice V é o ponto médio do segmento cujos extremos são o foco e a intersecção do eixo com a diretriz.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola e é um elemento de grande importância para entender o comportamento desta função. Para demonstra que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola vamos analisar alguns casos.

4.5.1. Gráfico da função real $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

AFIRMAÇÂO: O gráfico da função real $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$.

DEMONSTRAÇÃO: A distância de um ponto $P(x,x^2)$ do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$ é dada por:

$$d(P,F) = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2} = x^2 + \frac{1}{4}$$

A distância do mesmo ponto $P(x,x^2)$ à reta $y = -\frac{1}{4}$ é dada por $x^2 + \frac{1}{4}$. Logo $d(P,F) = d(P,Q)$, ou seja, o gráfico é uma parábola de foco $\left(0,\frac{1}{4}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4}$. ■

De maneira análoga podemos mostra que o gráfico da função real $f(x) = ax^2$ onde $a \neq 0$ é a parábola cujo foco é $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

4.5.2. Gráfico da função real $\boldsymbol{f(x) = a(x-m)^2 + k}$.

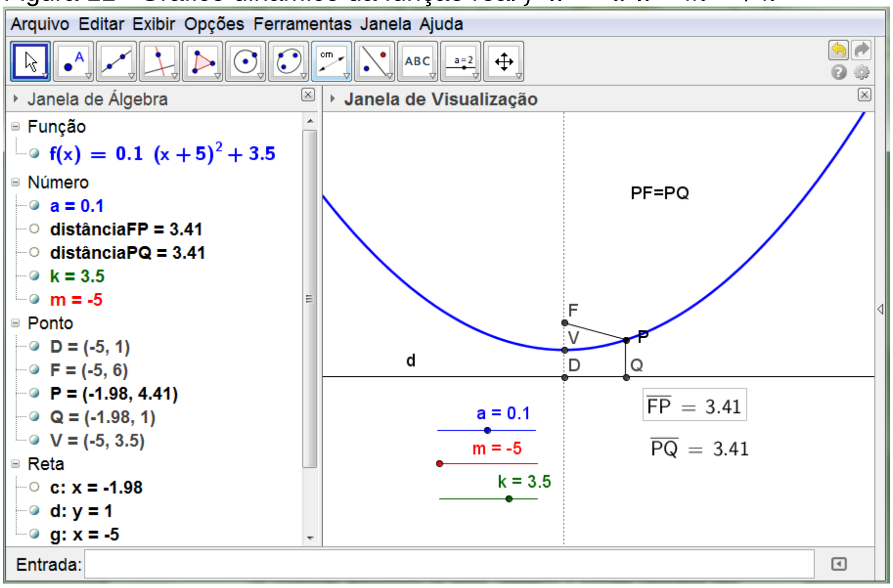
Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ onde $a \neq 0$, podemos escreve-la na forma $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}$ denominada forma canônica.

Chamando de: $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac-b^2}{4a}$ temos para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ podemos escrever qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte maneira: $f(x) = a(x-m)^2 + k$.

De modo geral é possível provar que dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F\left(m, k + \frac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$. O vértice da parábola é o ponto $V(k, m)$.

Na construção apresentada na figura 11 utilizamos o software GeoGebra para verificarmos que o gráfico da função quadrática é uma parábola. Através de um gráfico dinâmico alteramos os valores dos coeficientes a, m e k e verificamos que as distancia FP e PQ continuam iguais.

Figura 11 - Gráfico dinâmico da função real $f(x) = a(x-m)^2 + k$

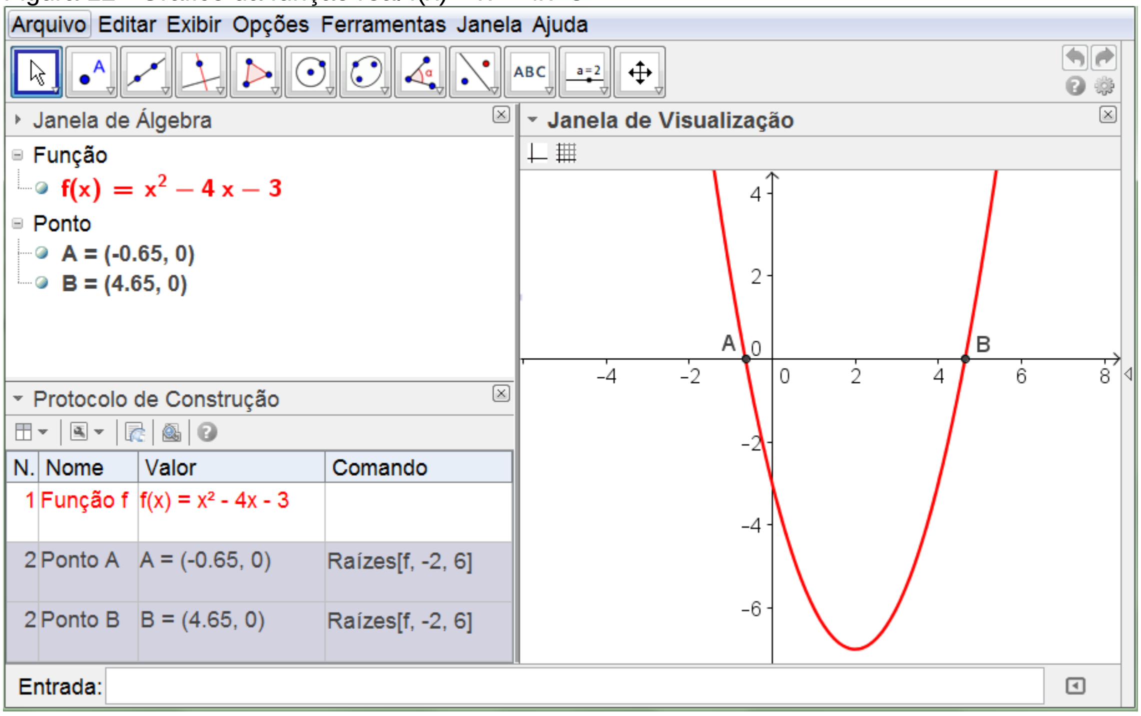


Fonte: Elaborada pelo autor.

As abcissas α e β dos pontos onde a parábola intersecta o eixo OX são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$: O ponto médio do segmento [α, β] é a abcissa do vértice da parábola. Se o gráfico está inteiramente acima, ou inteiramente abaixo do eixo horizontal OX, a equação não possui raízes. Se o gráfico apenas tangencia o eixo OX, a equação tem uma única raiz. Se α < x < β então $f(x)$ tem sinal contrário ao sinal de a; se x < α ou x > β, $f(x)$ tem o mesmo sinal de a. Estas e outras conclusões resultam imediatamente do exame do gráfico.

Utilizamos o software GeoGebra para estudar as raízes, o comportamento do gráfico, problemas de máximo e mínimo e outras propriedades da função quadrática. Através do comando raízes podemos visualiza-las graficamente. A figura 12 apresenta o gráfico a função $f(x) = x^2 - 4x - 3$ destacando as raízes A e B e protocolo de construção[2].

Figura 12 - Gráfico da função real f(x) = x² - 4x -3



Fonte: Elaborado pelo autor

O GeoGebra permite também a visualização geométrica de alguns resultados de demonstrações algébricas que envolvem os conhecimentos dos elementos da função quadrática. O problema apresentado a seguir foi retirado do livro; A Matemática do Ensino médio – volume 1.

[2] O Protocolo de Construção é uma tabela do GeoGebra que mostra todas as etapas da construção, permitindo-lhe refazer a construção passo a passo.

4.5.3. Sequência didática com o uso do GeoGebra

Em sua dissertação de mestrado, Santos (2009) desenvolveu um ambiente informatizado voltado ao ensino do conteúdo função quadrática e os referenciais teóricos aliados a utilização da tecnologia. A pesquisa foi embasada na Teoria de registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas.

O pesquisador desenvolveu uma sequência didática para alunos do segundo ano do Ensino Médio, o software foi utilizado na execução das tarefas contidas nesse ambiente.

Sua proposta foi à implementação de um ambiente de aprendizagem de modo semipresencial, na qual o aluno foi convidado a interagir com o ambiente, manipular alguns seletores contidos nas atividades e observar as representações algébricas e geométricas da função polinomial de segundo grau, descrevendo seus respectivos comportamentos e alterações, atuando como construtor de seu conhecimento.

Ele utilizou dois questionários empregados como diagnóstico; o primeiro, para levantar o perfil dos alunos e verificar possíveis dificuldades em relação ao conteúdo função polinomial de segundo grau e o segundo para verificar se mobilizavam seus conhecimentos na resolução de tarefas relacionadas a esse conteúdo.

A sequência didática foi composta por 10 atividades. Na primeira etapa composta pelas atividades de 01 a 07 o pesquisador procurou que o aluno visualizasse e perceber-se por meio da movimentação de seletores, quais modificações no registro algébrico acarretaram alterações na representação gráfica e vice-versa, facilitando a conversão entre esses registros.

A outra etapa foi composta por atividades, em que se buscou a mobilização dos conhecimentos adquiridos nas etapas anteriores, por meio de três atividades:

Nas atividades 8 e 9, foi solicitado aos alunos sobrepor a curva por meio de seletores a, b e c, fornecidas as curvas representadas, possibilitando a movimentação de seletores e solicitando a representação algébrica da função com objetivo de verificar a escrita da função polinomial de segundo grau.

A atividade 10 teve o objetivo de realizar a mudança de um registro algébrico para o registro gráfico de cada uma das funções polinomiais de segundo grau apresentadas.

Sousa (2009) observou que na resolução apresentada nas tarefas, os alunos perceberam as variações ocorridas na representação gráfica da função polinomial de segundo grau, bem como na representação algébrica da função e equação da parábola.

Para o autor a utilização do software GeoGebra foi um fator importante na construção do ambiente em razão de seu dinamismo, propiciou aos alunos a percepção por meio dos seletores contidos nas atividades e a modificação dos registros de representação gráfica e algébrica da função polinomial de segundo grau expostos na tela de uma única vez. O GeoGebra permitiu toda a execução das tarefas contidas nesse ambiente e a criação de applets em Java, utilizados em todas as realizações de tarefas, de modo que o usuário pode manipular as atividades, ainda que não tivesse o software instalado em sua máquina.

O autor conclui que existe um aprofundamento dos conhecimentos relacionados à função polinomial de segundo grau, quando é proposto aos alunos uma sequência de atividades, utilizando um software de geometria dinâmica, em um ambiente informatizado. Os alunos envolvidos na pesquisa demonstraram de modo visível melhor compreensão dos temas relacionados à função polinomial de segundo grau quanto à concavidade e às translações da representação gráfica.

Tarefa 1 – Objetivo: modificar o seletor a, verificar as variações ocorridas na representação algébrica da equação da parábola em sua representação gráfica e escrever o registro algébrico da função que determina essa parábola.

Os questionamentos apresentados para essa tarefa foram os seguintes:

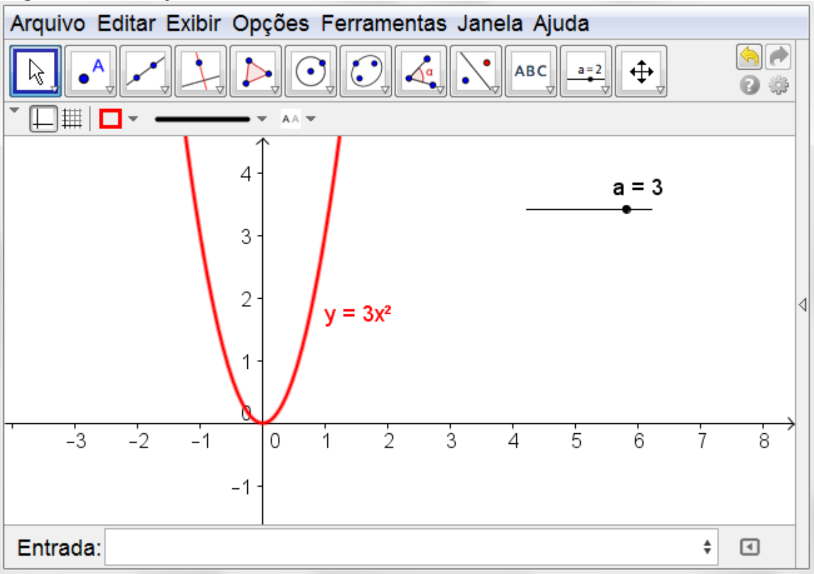
Ao movimentar o seletor a, o que você conclui com relação parábola?

Ao movimentar o seletor a, o que você conclui com relação à equação da parábola?

Que função a parábola apresentada na tela representa?

A Tarefa 1 utilizou o recurso dos controles deslizantes que mostram as mudanças instantaneamente, a Figura 13 mostra o layout da atividade.

Figura 13 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 1



Fonte: Santos (2009)

Tarefa 2 – Objetivo: permitir ao aluno modificar os seletores a e b e visualizar as conversões ocorridas na representação algébrica da equação da parábola sua representação gráfica. Para essa tarefa os questionamentos apresentados foram os seguintes:

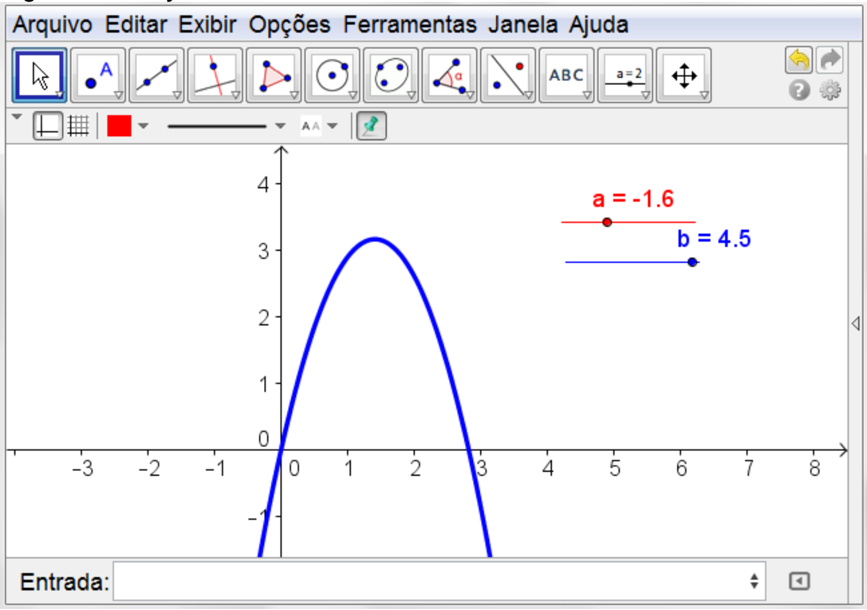
Ao movimentar os seletores a e b, o que você conclui com relação parábola?

Ao movimentar os seletores a e b, o que você conclui com relação à equação da parábola?

Que função a parábola apresentada na tela representa?

O pesquisador utilizou o dinamismo do software para explorar a relação da expressão algébrica com a parábola da função quadrática como pode ser observado na Figura 14.

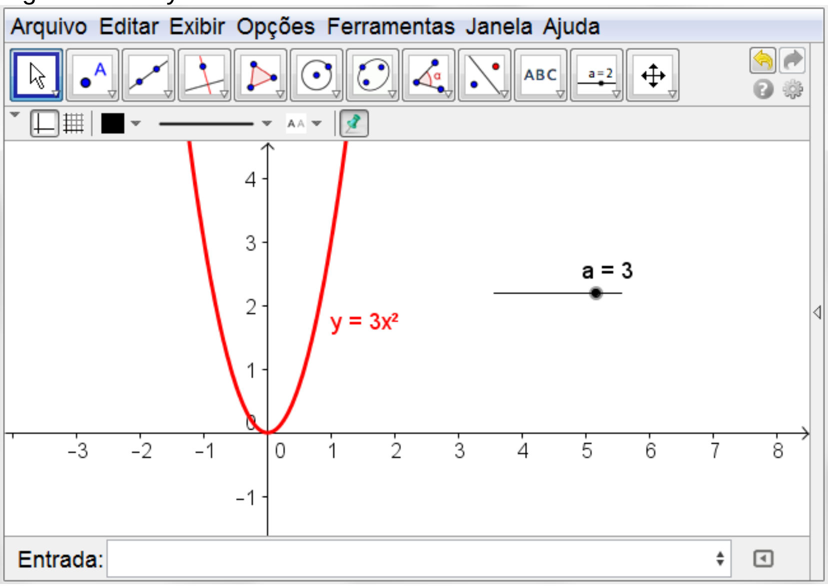
Figura 14 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 2



Fonte: Santos (2009)

Tarefa 3 – Objetivo: permitir ao aluno modificar os seletores a e c, visualizar as conversões ocorridas na equação da parábola e sua representação gráfica, anotando suas conclusões. A Figura 15 mostra o layout da atividade.

Figura 15 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 3



Fonte: Santos (2009)

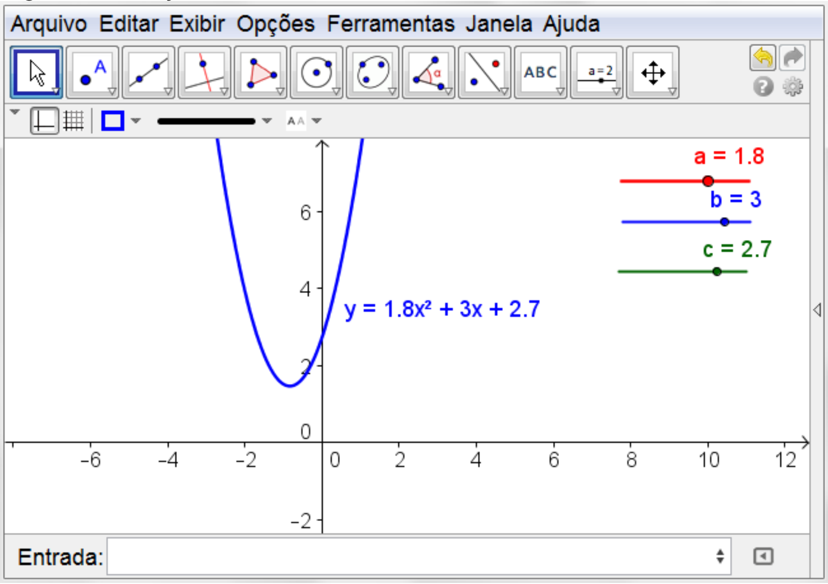
Os questionamentos apresentados para essa tarefa foram os seguintes:

Ao movimentar os seletores a e c, o que você conclui com relação parábola?

Ao movimentar os seletores a e c, o que você conclui com relação à equação da parábola? Que função a parábola apresentada na tela representa?

Tarefa 4 – Objetivo: permitir ao aluno modificar os seletores a, b e c e visualizar as modificações ocorridas no registro algébrico da equação da parábola e sua representação gráfica, anotando suas conclusões, além do registro algébrico da equação. A Figura 16 mostra o layout da atividade

Figura 16 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 4



Fonte: Santos (2009)

Os questionamentos apresentados desta tarefa foram os seguintes:

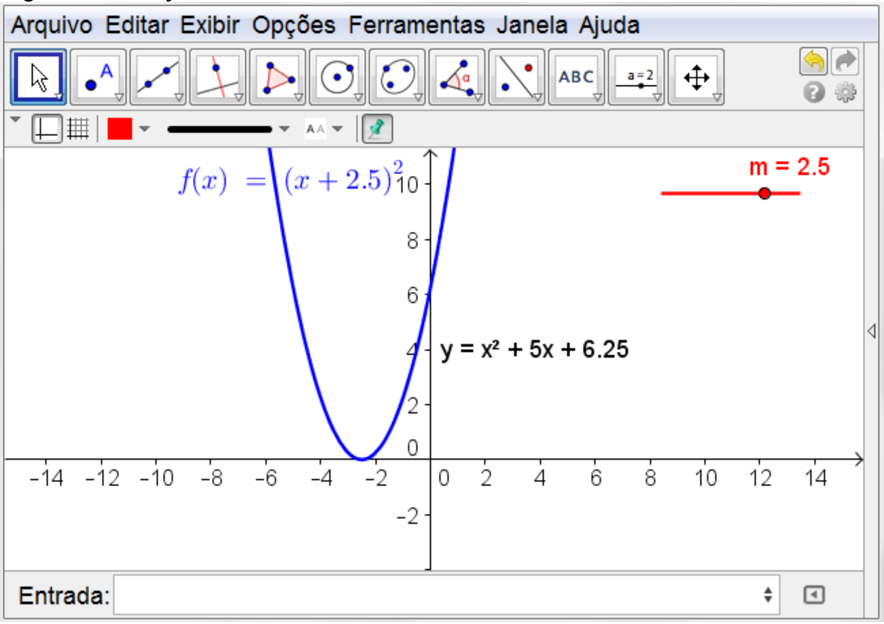
Ao movimentar os seletores a, b e c, o que você conclui com relação parábola?

Ao movimentar os seletores a, b e c, o que você conclui com relação à equação da parábola?

Que função a parábola apresentada na tela representa?

Tarefa 5 – Objetivo: permitir ao aluno a visualização da conversão entre o registro de representação algébrica da função polinomial de segundo grau escrita na forma canônica e seu registro de representação gráfica, de modo dinâmico apresentados na tela do computador, quando modificarmos o seletor m. A Figura 17 mostra o layout da atividade.

Figura 17 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 5



Fonte: Santos (2009)

Os questionamentos apresentados para esta tarefa foram os seguintes:

Ao movimentar o seletor m, o que você conclui com relação à parábola? Ao movimentar o seletor m, o que você conclui com relação à equação da parábola? Que função a parábola mostrada na tela representa?

Tarefa 6 – Objetivo: permitir ao aluno a visualização da conversão entre o registro algébrico da função polinomial de segundo grau na forma canônica e sua representação gráfica, de modo dinâmico, apresentada na tela do computador, quando modificamos os seletores m e n. A Figura 18 mostra o layout da atividade.

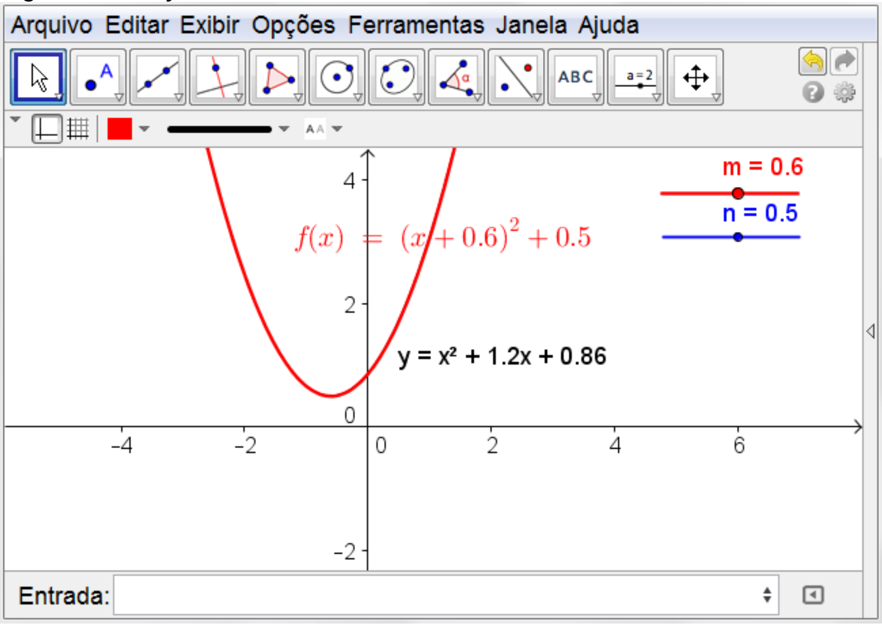
Os questionamentos apresentados para essa tarefa foram os seguintes:

Ao movimentar os seletores m e n, o que você conclui com relação parábola?

Ao movimentar os seletores m e n, o que você conclui com relação à equação da parábola?

Que função a parábola mostrada na tela representa?

Figura 18 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 6



Fonte: Santos (2009)

Tarefa 7 – Objetivo: permitir ao aluno a visualização da conversão entre o registro de representação algébrica da função polinomial de segundo grau escrita na forma canônica e sua representação gráfica, realizada de modo dinâmico apresentada na tela do computador, quando modificamos os seletores m, n e p. A Figura 19 mostra o layout da atividade.

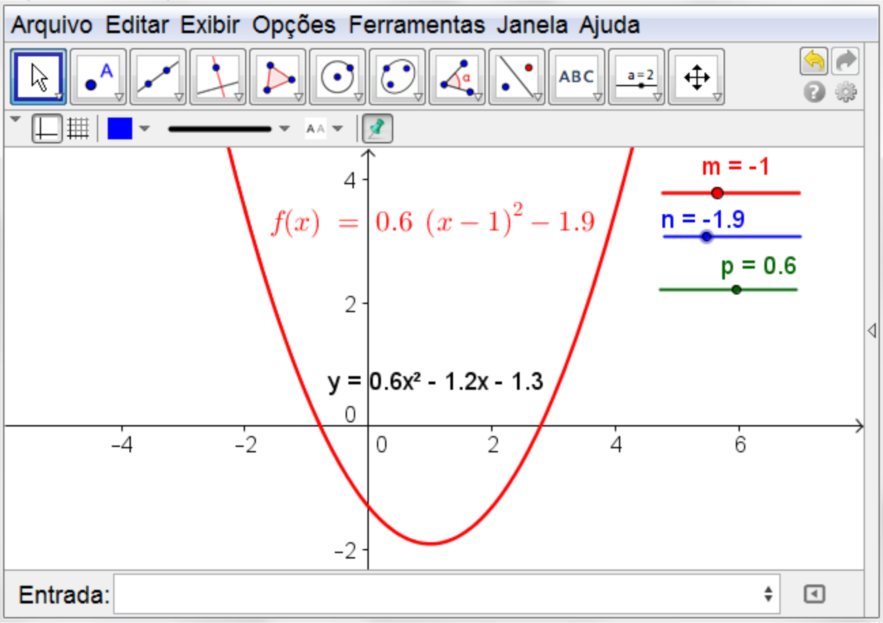
Os questionamentos apresentados para esta tarefa foram os seguintes:

Ao movimentar os seletores m, n e p, o que você conclui com relação à parábola?

Ao movimentar os seletores m, n e p, o que você conclui com relação à equação da parábola?

Que função a parábola mostrada na tela representa?

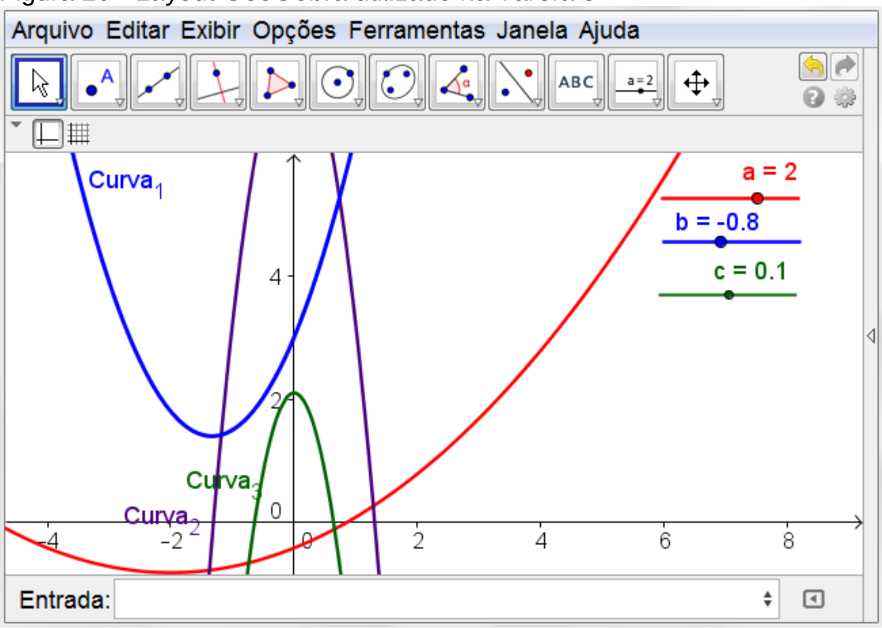
Figura 19 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 7



Fonte: Santos (2009)

Tarefa 8 – Objetivo: obter nas anotações realizadas pelos usuários, o registro algébrico da função para cada uma das curvas expostas na tela, quando sobrepostas, por intermédio da mudança dos valores dos seletores a, b e c. A Figura 20 mostra o layout da atividade.

Figura 20 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 8



Fonte: Santos (2009)

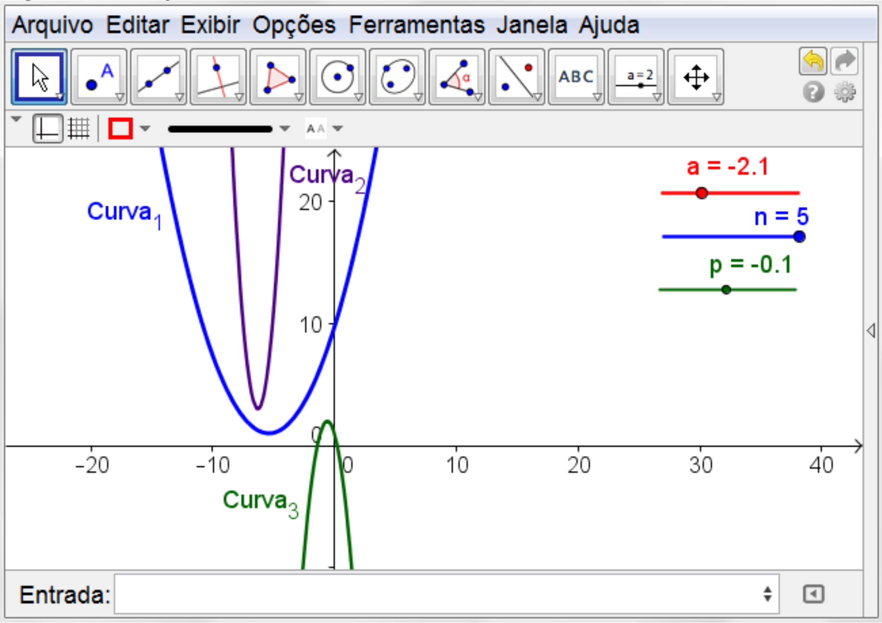
Os seguintes questionamentos foram apresentados para essa tarefa: Ao movimentar os seletores a, b e c, escreva a expressão algébrica que representa cada uma das parábolas para as curvas 1, 2 e 3.

Tarefa 9 – Objetivo: mobilizar os conhecimentos aprendidos em tarefas anteriores, ou seja, a acertar curvas desenhadas na tela por meio da modificação de seletores m, n e n apresentados na tarefa e escrever o registro algébrico da função de cada uma das curvas. A Figura 21 mostra o layout da atividade.

Os questionamentos apresentados para esta tarefa foram os seguintes:

Ao movimentar os seletores m, n e p, escreva a expressão algébrica que representa cada uma das parábolas na forma, para as curvas 1, 2 e 3.

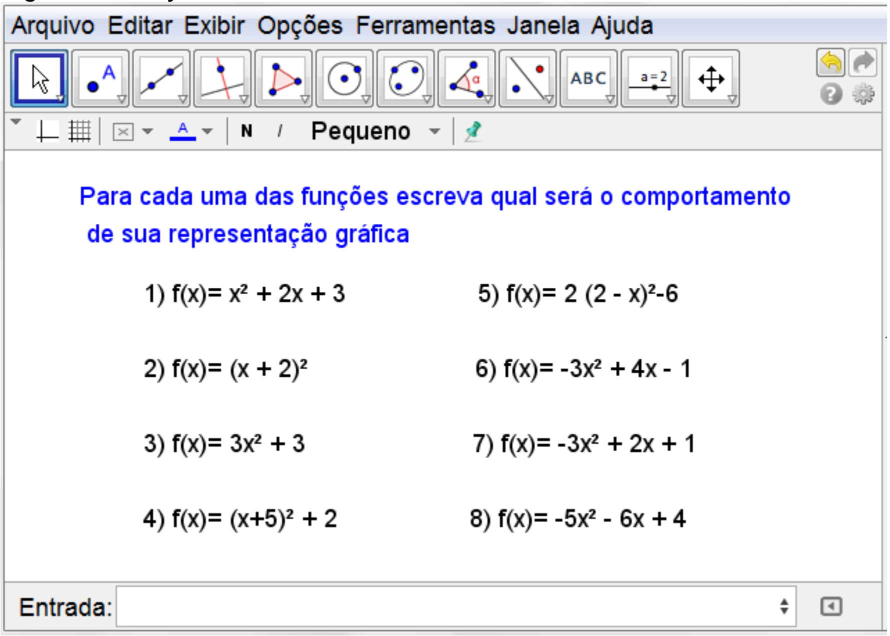
Figura 21 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 9



Fonte: Santos (2009)

Tarefa 10 – Objetivo: fornecer aos alunos o registro da representação algébrica de algumas funções forma canônica e na forma desenvolvida para obter nas anotações realizadas pelos usuários o comportamento gráfico de cada uma dessas funções. A Figura 22 mostra o layout da atividade.

Figura 22 - Layout GeoGebra utilizado na Tarefa 10



Fonte: Santos (2009)

4.6. Funções Exponencial e Logarítmica

4.6.1 Função Exponencial

Seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$, indicada pela notação $f(x) = a^{x}$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

i) $a^{x} \cdot a^{y} = a^{x+y}$

ii) $a^{1} = a$

iii) $x < y \Rightarrow a^{x} < a^{y}$ se $a > 1$

iv) $x < y \Rightarrow a^{y} < a^{x}$ se $0 < a < 1$

A função exponencial é uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^{+}$, crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$. E seu gráfico é uma curva denominada curva exponencial (DANTE, 2010).

As funções exponenciais são, juntamente com as funções afins e as quadráticas, os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas elementares (LIMA, 2006).

O software GeoGebra pode ser utilizado no estudo a função exponencial principalmente em alguns casos onde o processo gráfico é mais vantajoso que o algébrico.

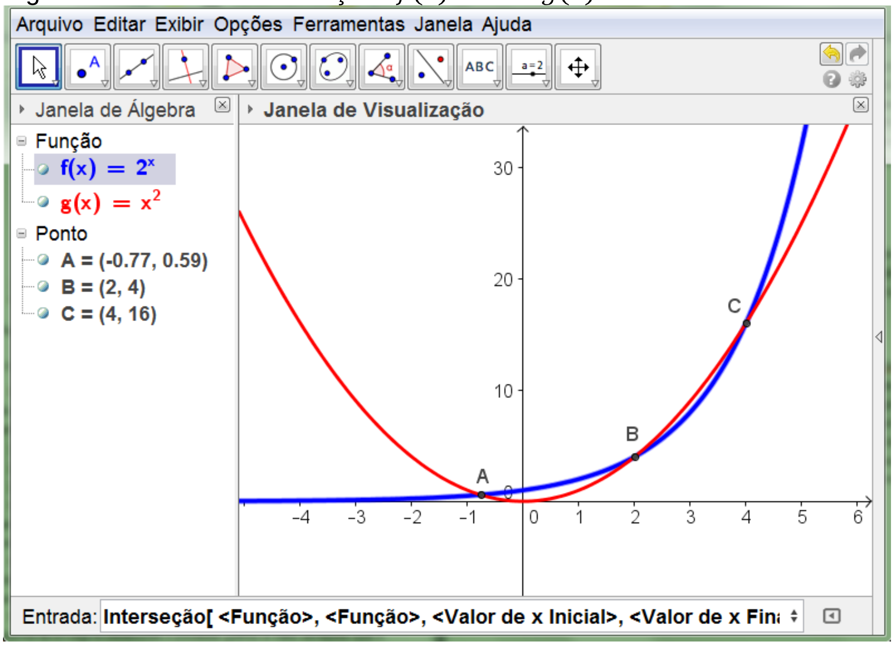
PROBLEMA: Quantas raízes tem a equação $2^x = x^2$?

RESOLUÇÃO: é fácil verificar que 2 e 4 são duas raízes, para saber se há mais alguma raiz, podemos utilizar os gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$ e verificar quantos são os seus pontos em comum. No GeoGebra o comando:

$$Interseção[< Função >, < Função >, < Valor\ de\ x\ Inicial >, < Valor\ de\ x\ Final >]$$

nos mostra o pontos comuns as duas funções f e g em um intervalo real, a figura 23 nos mostra os gráficos das funções citadas na resolução do problema e seus três pontos de interseção.

Figura 23 - Gráficos das funções $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$



Fonte: Elaborado pelo autor

4.6.2 Função Inversa

Diz-se que a função e $g: Y \to X$ é a inversa da função e $f: X \to Y$ quando se tem $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$. Evidentemente, g é inversa de f se, e somente se, f é inversa de g.

Quando g é a inversa de f, tem-se $g(y) = x$ se, e somente se, $f(x) = y$. Se $g(f(x)) = x$ para todo $x \in X$ então a função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por sua vez, a igualdade $f(g(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, implica que f é sobrejetiva, pois, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = g(y) \in X$ e temos $f(x) = y$.

Portanto, se a função $f: X \to Y$ possui inversa então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre X e Y . Reciprocamente, se $f: X \to Y$ é uma correspondência biunívoca entre X e Y então f possui uma inversa $g: Y \to X$. Para definir g, notamos que, sendo f sobrejetiva, para todo $y \in Y$ existe algum $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Além disso, como f é injetiva, este x é único. Pomos então $g(y) = x$. Assim, $g: Y \to X$ é a função que associa a cada $y \in Y$ o único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. É imediato que $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para $x \in X$ e $y \in Y$ quaisquer.

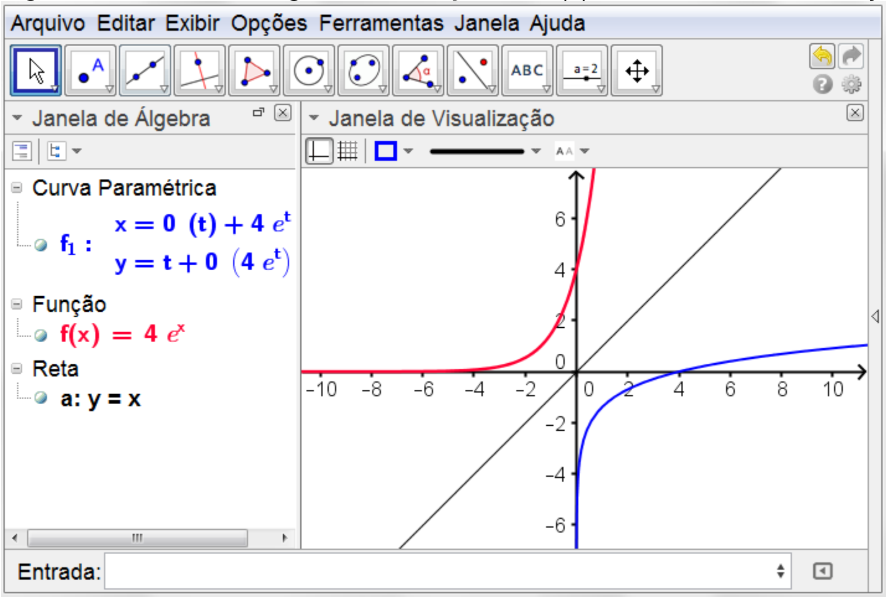
Se X, Y são conjuntos de números reais e $f^{-1}: Y \to X$ é a inversa da função $f: X \to Y$ então o gráfico G' da função f^{-1} é o simétrico do gráfico G da função f em relação à diagonal do plano R^2, que é a reta formada pelos pontos (x; x) que têm abcissa e ordenada iguais.

Com efeito, temos:

$$x, y \in G \Leftrightarrow y = f\ x \Leftrightarrow x = f^{-1}\ y \Leftrightarrow y, x \in G'.$$

Podemos determinar a inversa de uma função real utilizando o GeoGebra. A determinação é feita através do gráfico, a seguir mostramos os passos para determinar a inversa da função real $f\ x = 4 \cdot e^{3x}$. Primeiro construímos o gráfico da função f utilizando o campo de entrada. Em seguida construímos a reta auxiliar $y = x$. Em seguida faremos a reflexão do gráfico da função f em relação a reta dada. Ao realizarmos a construção descrita obteremos uma curva dada por uma equação paramétrica, analisando a curva podemos verifica que a função admite inversa. O layout da construção pode ser observado na figura 24.

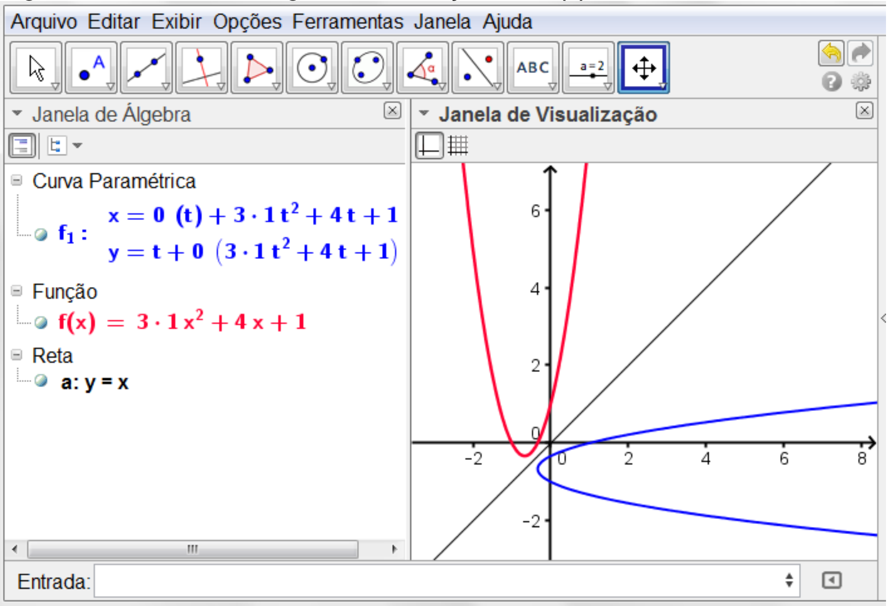
Figura 24 - Reflexão do gráfico da função real f(x)=4·e^{3x} em torno da reta y=x



Fonte: Elaborado pelo autor

Uma construção semelhante para a função $f\ x\ = 3x^2 + 4x + 1$ também nos dá uma curva, como pode ser observado na figura 25, mas verificamos que a curva dada não representa uma função, logo a função f não admite inversa.

Figura 25 - Reflexão do gráfico da função real f(x)=3x^2+4x+1 em torno da reta y=x



Fonte: Elaborado pelo autor

4.6.3 Função Logaritmo

Por ser uma correspondência biunívoca para todo número real positivo $a \neq 1$, crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$ a função exponencial admite uma função inversa.

A inversa da função exponencial de base a é a função $log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada número real positivo x o número real $\log_a x$, chamado o logaritmo de x na base a. Por definição de função inversa, tem-se: $a^{\log_a x} = a$ e $\log_a \ a^x \ = x$.

Assim, $\log_a x$ é o expoente ao qual se deve elevar a base a para obter o número x. Ou seja, $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$.

Segue-se imediatamente da relação $\mathrm{a^u \cdot a^v = a^{u+v}}$ que $\mathrm{\log_a(x \cdot y) = \log_a x +} \mathrm{\log_a y}$ para x e y positivos quaisquer.

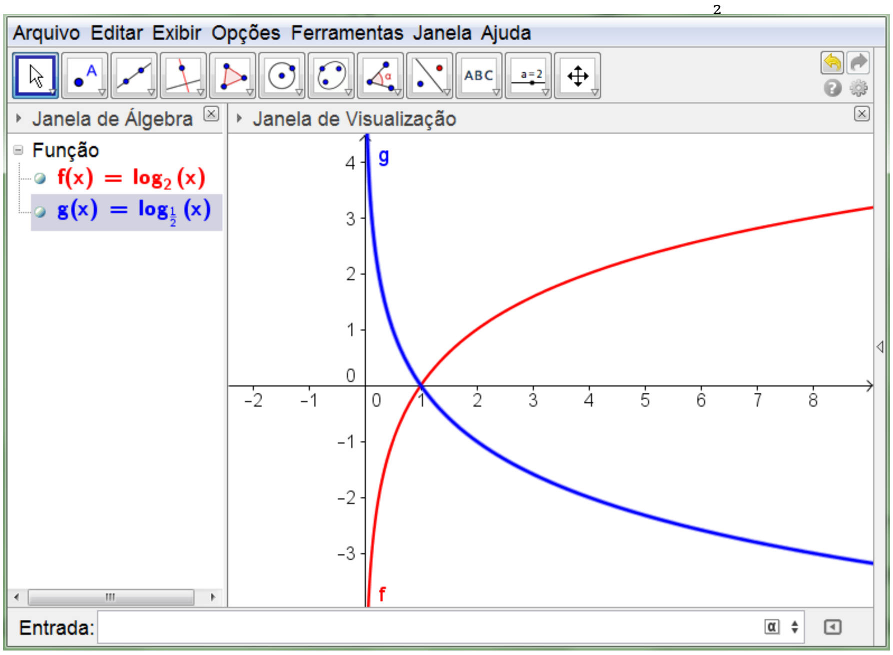
Esta propriedade de transformar produtos em somas foi a motivação original para a introdução dos logaritmos, no início do século 17, e de sua popularidade, até bem recentemente, como um eficiente instrumento de cálculo (LIMA, 2006).

As funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $\mathrm{a} > 1$, especialmente as de base 10 (logaritmos decimais), base 2 (logaritmos binários) e base e (LIMA, 2006).

A função logaritmo está ligada a um grande número de fenômenos e situações naturais, onde se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à quantidade da mesma existente no instante dado (LIMA, 2006).

Como $\log_a x$ é uma função crescente de x quando $a > 1$, e como $\log_a 1 = 0$, segue-se que, para $a > 1$, os números compreendidos entre 0 e 1 têm logaritmo negativo e os maiores do que 1 têm logaritmo positivo. Ao contrário, se $0 < a < 1$ então $\log_a x$ é positivo quando $0 < x < 1$ e negativo quando $x > 1$. A figura 26 mostra os gráficos das funções $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Figura 26 - Gráficos das funções $\mathrm{f(x)} = \log_2 \mathrm{x}$ e $\mathrm{g(x)} = \log_{\frac{1}{2}} \mathrm{x}$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Se tivéssemos traçado os gráficos das funções $y = \log_a x$ e $y = \log_b x$, com $a > 1$ e $0 < b < 1$ quaisquer, as figuras obtidas teriam mesmo aspecto.

Os logaritmos naturais podem ser apresentados de forma geométrica (LIMA, 2009). Seja x um número real positivo. Define-se o logaritmo natural de x como a área da faixa da hipérbole $\mathrm{H}_1^{\mathrm{x}}$. Onde a faixa da hipérbole é o conjunto $\mathrm{H}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ dos pontos $(x;\ y)$ do plano, tais que x está entre a e b, tais que $a;\ b \in \mathbb{R}^+$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ é o conjunto do plano limitado lateralmente pelas verticais $x = a$, $x = b$, ao sul pelo eixo das abcissas e ao norte pela hipérbole H. Em particular, quando $x = 1$, H_1^1 reduz a um segmento de reta portanto tem área igual a zero. Desse modo teremos:

i) $\ln 1 = 0$

ii) $\ln x > 0$ se $x > 1$

iii) $\ln x < 0$ se $0 < x < 1$

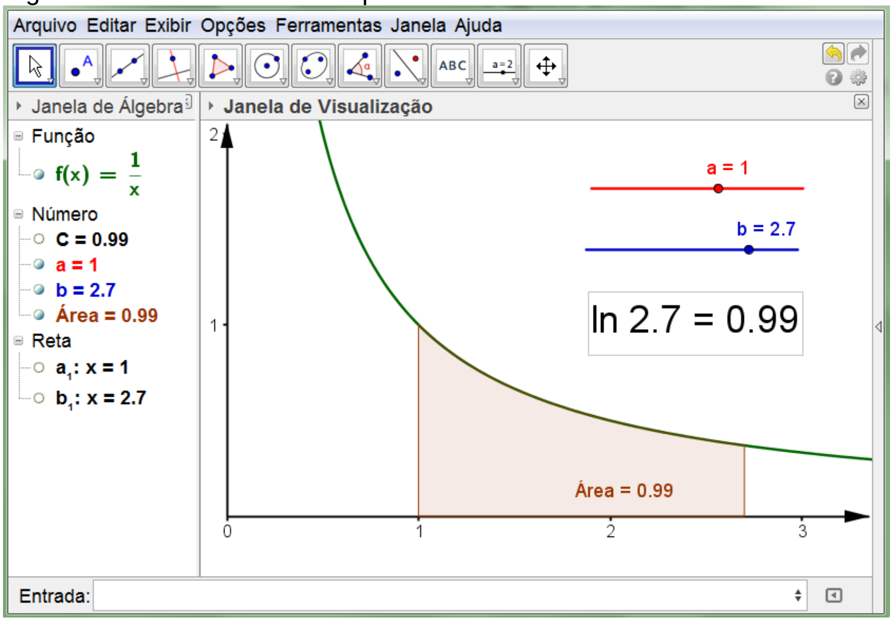
Quando $x < 0$ o logaritmo natural não está definido.

A figura 27 traz a visualização de uma construção feita no GeoGebra onde se verifica a igualdade entre a área da faixa da hipérbole e o logaritmo natural. Área da faixa da hipérbole é obtida pela integral da função $f\ \ x\ = \frac{1}{x}$ no intervalo $[a, b]$, esse resultado é obtido através do comando:

$$Integral[< Função >, < Valor\ de\ x\ Inicial >, < Valor\ de\ x\ Final >]$$

Onde o valor de x inicial é a e o valor final é b. O valor do logaritmo natural é obtido pelo comando: $\ln(x)$

Figura 27 - Área da faixa da hipérbole



Fonte: Elaborado pelo autor

4.6.4. Sequência didática com o uso do GeoGebra

Em sua dissertação de mestrado em educação matemática Santos (2011) explorou o Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática explorando suas representações com o uso do software GeoGebra. Como aporte teórico o autor utilizou a Teoria dos Registros de Representação e Semiótica descrita por Duval (2007).

O objetivo foi elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que envolveu o tema função logarítmica utilizando o software GeoGebra como estratégia pedagógica. Ou seja, fazer o uso destas tecnologias de forma planejada com objetivos previamente estabelecidos de forma que o estudante possa desenvolver os processos de: observar, conjecturar, levantar hipóteses, generalizar e abstrair.

Participaram da pesquisa 6 alunos do 3° ano do Ensino Médio que realizaram seus trabalhos em duplas. A sequência didática foi organizada em quatro sessões que duraram oito encontros com o objetivo de ensinar a função logarítmica, e utilizando a ordem dos conteúdos proposta no Caderno do Professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio disponibilizado pela secretaria de educação do estado de São Paulo.

O pesquisador conclui que o uso do software GeoGebra facilitou a compreensão dos conceitos e contribuiu para a aprendizagem destes alunos. Todas as duplas destacaram a importância da visualização do gráfico da função no software, além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido.

Como reflexão o pesquisador destacou o quanto é trabalhoso elaborar uma sequência didática e planejar estratégias de ensino com objetivos previamente estabelecidos. Percebendo que o uso apenas de materiais pedagógicos e livros didáticos em que os exercícios estão prontos não é suficiente para contribuir para a aprendizagem. Segundo o autor é necessário que o professor escolha situações-problema que contemplem situações que possibilitem aos alunos a oportunidade para investigar, elaborar e testar hipóteses, conjecturar e assim tornar possível a generalização e abstração de um conceito matemático.

Sessão I - Consolidação da ideia de Potências

Ao propor esta atividade o pesquisador procurou iniciar uma situação problema que envolvesse a exploração de alguns conceitos fundamentais das potências, tais como as diferentes formas de representação da potência utilizando números reais e relaciona-las com algumas propriedades fundamentais desse conteúdo, nos quais foram destacados fatos fundamentais para a compreensão da natureza da função exponencial.

Para isso utilizou como registro de partida o registro da língua natural, o registro numérico e algébrico por meio da tabela para favorecer as conversões do registro de partida para o registro de chegada fazendo uso do registro numérico, algébrico e gráfico.

Sessão II - O conceito Função Exponencial

O objetivo dessa sessão foi explorar as características da função exponencial, domínio da função representado por meio de tabelas e fazer a conversão para o registro gráfico utilizando o software GeoGebra; apresentar a situação-problema representada pelo registro de tabela e fazer a conversão para o registro numérico e algébrico.

Atividade 1: a partir da leitura dos gráficos das funções *f* e *g* definida por $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$ apresentados na figura 28 observe e responda:

a) Qual é a representação algébrica da função f?

b) Qual é a representação algébrica da função g?

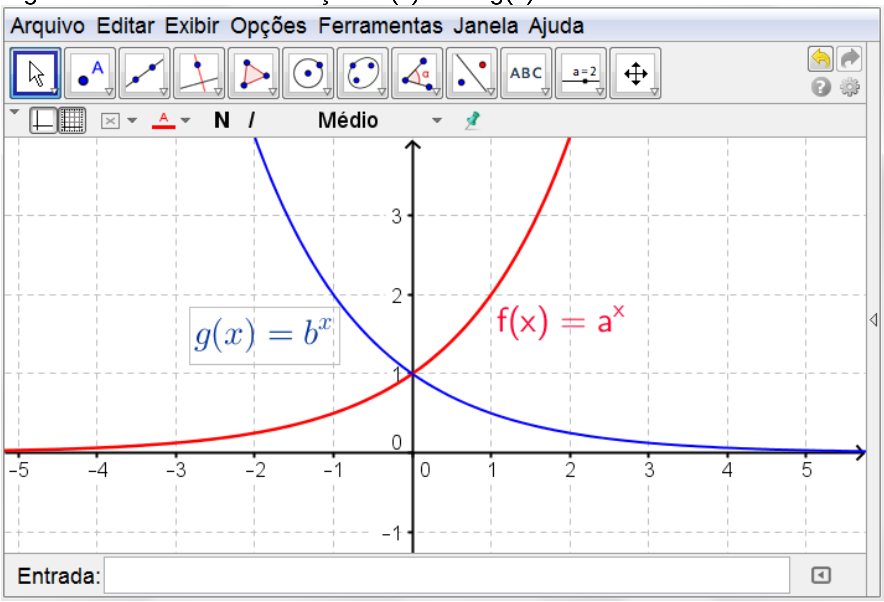
c) Observando as curvas das funções f e g, qual é a característica da curva quando a base a é maior que zero?

d) Construa várias funções em utilizando o software GeoGebra e observe o comportamento do gráfico dessas funções. Escreva a lei algébrica dessas funções.

e) Após a resolução do item (d) você pode generalizar o comportamento do gráfico de uma função $f(x) = a^x$ se $0 < a < 1$? Justifique sua resposta.

f) Qual é a diferença entre a função $f(x) = 3^{-x}$ e a função $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$? Justifique a sua resposta e, caso necessário, utilize o software GeoGebra para confirmar suas hipóteses.

Figura 28 - Gráfico das funções $f(x)=a^x$ e $g(x)=b^x$



Fonte: Santos (2011)

Espera-se que os alunos relacionem os valores encontrados na tabela com o comportamento do gráfico das funções e façam a conversão do registro gráfico para o registro algébrico

Sessão III- Explorar o conceito de Logaritmos

Apresentar situações-problema que necessitam utilizar o conceito de função exponencial e logarítmica. Durante a seção, ao propor as atividades abaixo, pretendemos ressaltar a importância do estudo dos logaritmos para os alunos promovendo uma discussão sobre o tema, utilizando a calculadora científica.

Sessão IV- Funções Inversas

Nessa sessão o pesquisador procurou explorar por meio do registro de partida utilizando a representação no registro gráfico os conceitos de simetria, e da função inversa e concluir que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial.

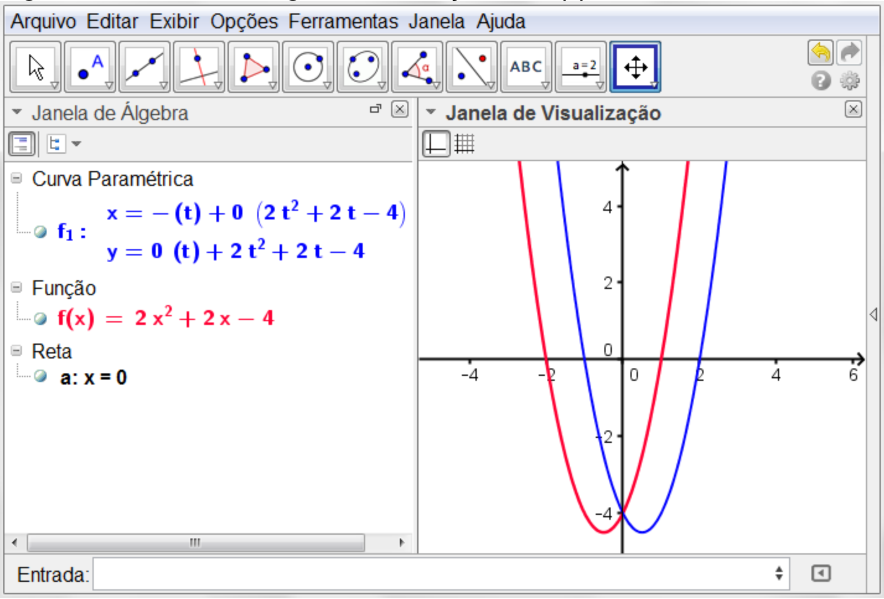
4.7. Função impar e função par

Construções semelhantes as utilizadas para determinar se uma função admite inversa podem ser usadas para estudar a paridade das funções.

Dante (2010) em seu livro utilizado no ensino médio, define que uma função $f: R \longrightarrow R$ é par se, e somente se, f(x) = f(-x), para qualquer $x \in D$, em que o domínio é simétrico em relação à origem, isto é, $x \in D$ acarreta $-x \in D$. O gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.

Observando a figura 29 concluímos que a função $f\ \ x\ \ = 2x^2 + 2x - 4$ não é par pois, seu gráfico não é simétrico em relação ao eixo y.

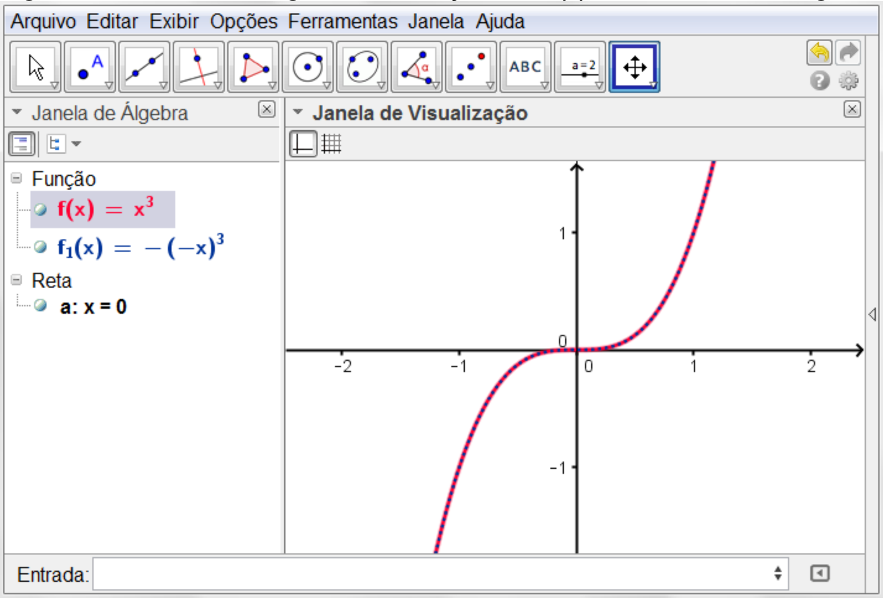
Figura 29 - Reflexão do gráfico da função real f(x)=2x^2+2x-4 em torno do eixo y



Fonte: Elaborado pelo autor

Para Dante (2010) uma função $f\colon R \longrightarrow R$ é impar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$. O domínio é simétrico em relação à origem, isto é, $x \in D$ acarreta $-x \in D$. O gráfico de f é simétrico em relação à origem (DANTE, 2010). Observando a figura 30 concluímos que a função $f\ x\ = x^3$ é impar, pois, fazendo a reflexão de seu gráfico em relação a origem observamos que as curvas coincidem.

Figura 30 - Reflexão do gráfico da função real f(x)=x³ em torno da origem



Fonte: Elaborado pelo autor

4.8. Funções trigonométricas

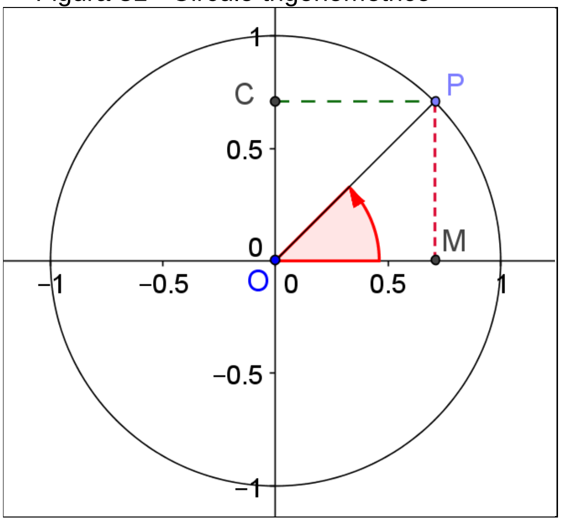
As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até as mais complexas, na Ciência e na alta Tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise (LIMA, 2006).

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratórias, os quais abundam no universo (LIMA, 2006).

Considerando uma circunferência de raio 1 com centro na origem do sistema cartesiano de coordenadas denominada de circunferência trigonométrica ou círculo trigonométrico. Por convenção, o ponto $A = (1, 0)$ é a origem dos comprimentos de arco, o sentido anti-horário é o sentido positivo de percurso e o sentido horário é o negativo. Assim, dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, marcamos na circunferência trigonométrica um ponto P, de modo que o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P seja igual ao valor absoluto de t. Se $t > 0$, o percurso é feito no sentido anti-horário; se $t < 0$, no sentido horário.

Quando o número $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, determina um ponto no primeiro quadrante, ou seja, de maneira tal que o comprimento do arco de origem em A e extremidade em P é menor do que um quarto da circunferência; temos, então, um ângulo central de t radianos que é agudo. No triângulo retângulo OPM da figura 31, podemos observar que valem as razões trigonométricas já definidas anteriormente, no triângulo retângulo. Assim $\cos t = OM$ e $sen\, t = PM$, uma vez que o raio da circunferência é 1

Figura 31 - Circulo trigonométrico



Fonte: Elaborada pelo autor

As funções $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $sen: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, são chamadas de função cosseno e função seno respectivamente, e definidas pondo-se, para cada $t \in \mathbb{R}$:

$$P(t) = (cos\, t;\ sen\, t).$$

Noutras palavras, $x = cos\, t$ e $y = sen\, t$ são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto $P(t)$ da circunferência unitária.

Segue-se imediatamente desta definição que vale, para todo $t \in \mathbb{R}$, a relação fundamental:

$$cos^2\, t + sen^2\, t = 1.$$

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se periódica quando existe um número $T \neq 0$ tal que $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Se isto ocorre, então $f(t+kT) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$. O menor número $T > 0$ tal que $f(t + T) = f(t)$ para todo

$t \in \mathbb{R}$ chama-se o período da função f. As funções seno e cosseno são periódicas, de período 2π.

Das funções seno e cosseno derivam as outras funções trigonométricas, a saber, $tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$, $cotg\,x = \frac{cos\,x}{sen\,x}$, $sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$ e $cossec\,x = \frac{1}{sen\,x}$. Destas funções (chamadas tangente, cotangente, secante e cossecante), a mais importante é a primeira. Cumpre observar que tais funções, sendo definidas por meio de quocientes, têm seus domínios restritos aos números reais para os quais o denominador é diferente de zero.

4.8.1. Sequência didática com o uso do GeoGebra

Damasco Neto (2010) apresentou uma possibilidade de uso do software GeoGebra como ferramenta didática para o estudo das funções seno e cosseno tendo por base a teoria de aprendizagem matemática dos registros de representação semiótica de Raymond Duval.

O trabalho foi desenvolvido através de um estudo bibliográfico a fim de conhecer as discussões já feitas em torno do tema da pesquisa e de uma sequência didática elaborada na forma de oficinas, elaboradas a partir dos estudos feitos na primeira etapa, oferecidas a um grupo de alunos do ensino médio.

Além disso, foram coletados dados obtidos por meio de observações, questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos realizadas a qualquer momento do ensino, e até mesmo após o seu término.

O pesquisador destacou que no caso das funções trigonométricas, via que os alunos sabiam o formato comum dos gráficos, mas não conseguiam perceber as transformações que o gráfico sofria ao se alterar um parâmetro qualquer da função, ou até mesmo a relação que havia entre o seu gráfico e o círculo trigonométrico.

Desse modo partindo das leituras e pesquisas feitas, e observando o referencial teórico percebeu que o mais interessante seria utilizar o software GeoGebra, por unir características dos softwares algébricos e de geometria dinâmica.

Na sequência didática o pesquisador procurou proporcionar aos alunos condições de compreender e aprofundar o entendimento das funções reais seno e cosseno.

Em um primeiro momento foi realizada uma avaliação inicial buscando verificar o conhecimento dos alunos em relação às funções trigonométricas. Finalizada a avaliação ocorreu o primeiro contato com o ambiente do GeoGebra na oficina, onde os estudantes tiveram a possibilidade de conhecer suas ferramentas e como utilizá-las, para isso foi utilizada uma ficha desenvolvida pelo autor e outras atividades propostas no quadro.

O autor destacou que a sequência didática em um ambiente computacional obteve um bom índice de aprovação entre os alunos participantes. Segundo ele era perceptível o quanto os alunos gostavam de interagir com o software, mostraram grande motivação e interesse na resolução das atividades propostas.

Destacou ainda o quanto os estudantes ficaram admirados da facilidade de construir círculo trigonométrico e como é interessante observar toda a transformação de uma maneira dinâmica, olhando para o registro gráfico e o algébrico e também as mudanças que ocorriam em cada um ao mesmo tempo.

Para o pesquisador a manipulação de objetos utilizando softwares de geometria dinâmica permitiu aos estudantes contornarem as dificuldades existentes quanto à manipulação e utilização de abstrações para auxiliando na compreensão do comportamento das funções trigonométricas, como por exemplo, a associação dos pontos do círculo trigonométrico com os pontos do plano cartesiano.

Damasco Neto (2010) concluiu que problemas envolvendo construções dinâmicas no GeoGebra despertou o interesse dos alunos destacando que o computador e os softwares de geometria dinâmica são meios pelos quais se podem impulsionar formas diferenciadas de exercer a prática docente.

A proposta de sequência didática procurou proporcionar aos alunos condições de compreender e aprofundar o entendimento das funções reais seno e cosseno. Foram cinco encontros com duração de 80 minutos.

Em todas as aulas os estudantes tiveram como material de trabalho fichas de atividades, lápis, caneta, o software GeoGebra e um computador para cada equipe. Antes de iniciar a atividade de cada dia era feita uma breve discussão entre o professor e os alunos a fim de verificar as estratégias tomadas para solucionar as atividades do dia anterior.

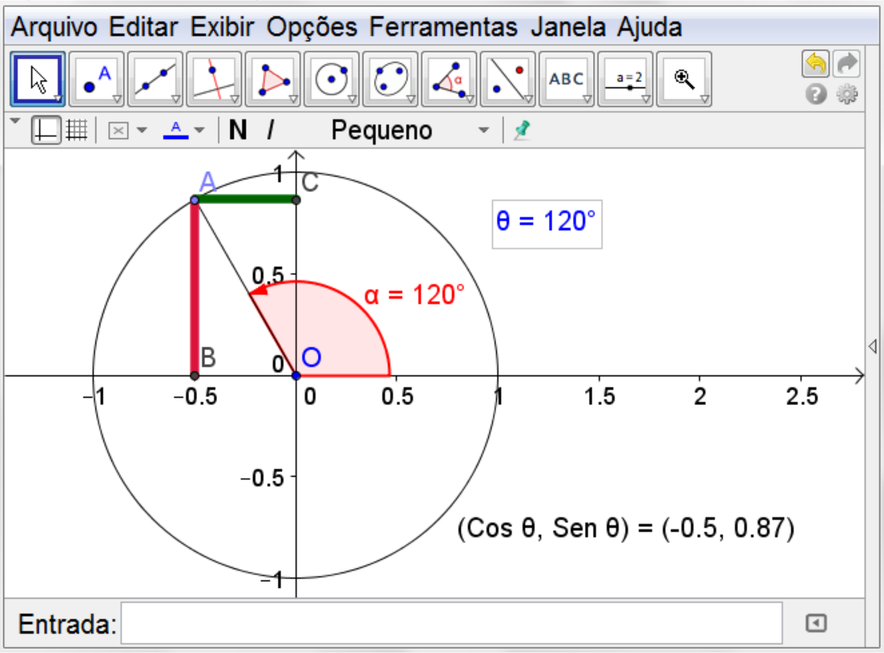
Encontro 1 – Pré-Avaliação e Estudo do GeoGebra.

No primeiro momento fez-se uma avaliação inicial onde se buscará verificar o conhecimento dos alunos em relação às funções trigonométricas. Nesta avaliação havia questões com estudo de gráficos (identificando domínio, imagem, período) assim como sua construção e identificação dos mesmos elementos a partir da representação algébrica das referidas funções.

Encontro 2 – Circulo trigonométrico.

Esse encontro consistiu numa atividade em que o participante deveria compreender a interpretação matemática que pode ser feita sobre os pontos sobre o círculo trigonométrico como mostra a figura a 32.

Figura 32 - Círculo trigonométrico dinâmico



Fonte: DAMASCO NETO (2010)

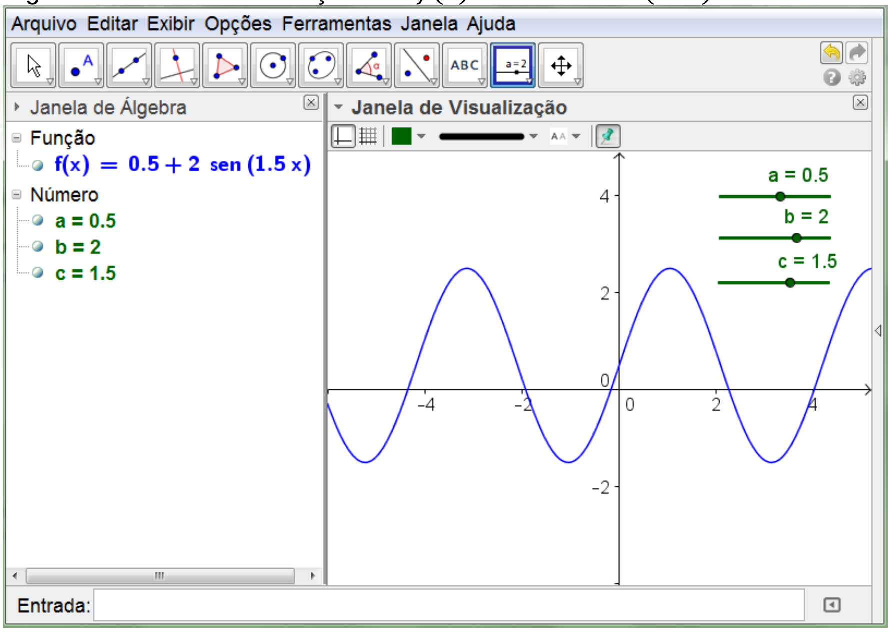
No círculo trigonométrico podemos observar o registro gráfico dinâmico do mesmo com a mensuração do arco em graus. Na aba à esquerda todos os registros algébricos e simbólicos dos objetos presentes ali. Assim desta maneira o aluno pode coordenar diferentes representações semióticas de um mesmo elemento matemático: no círculo trigonométrico (representação algébrica e gráfica), as coordenadas do ponto B (algebricamente e graficamente), o valor de seno e cosseno do arco representado (simbolicamente, algebricamente e graficamente).

Encontro 3 e 4 – Funções Trigonométricas e suas principais características

Estes dois encontros foram preparados para se estudar o período, a imagem e o domínio das funções reais do tipo $f\ x\ = a + b \cdot sen(c \cdot x)$ e $g(x) = a + b \cdot cos(c \cdot x)$. Neste caso os alunos foram incentivados a observar as transformações que ocorreram com o formato dos gráficos e suas respectivas características quando se alteravam os coeficientes a, b e c destas funções. Ou seja, houve nessas aulas uma manipulação de vários registros de representação desse objeto Matemático. Os alunos analisaram gráficos destas funções e registrarão simbolicamente suas respectivas imagens. Também construíram gráficos a partir de suas representações algébricas e perceberam qual sua imagem. Utilizando o modo de arrasto sobre o gráfico, poderiam perceber as devidas alterações sobre o registro algébrico dessas funções, assim como o registro simbólico de sua imagem.

A figura 33 traz o gráfico da função real $f\ x\ = a + b \cdot sen(c \cdot x)$ nessa construção mais uma vez merecem destaque os controles deslizantes a, b e c.

Figura 33 - Gráfico da função real $f(x) = a + b \cdot sen(c \cdot x)$



Fonte: Elaborada pelo autor

Encontro 5 – Pós-Avaliação

Nessa pós-avaliação, buscou-se avaliar a contribuição da oficina para uma melhor compreensão do aluno quanto às funções trigonométricas. Para isto elaborou-se uma avaliação bastante semelhante a pré-avaliação, afim de observar a evolução do aluno com esta oficina. É importante frisar que as fichas de cada aula também servirão de apoio para observar tal evolução.

5. CONCLUSÃO

Ao finalizar este trabalho, consideramos que a pesquisa proporcionou experiências matemáticas expressivas e estimulantes, envolvendo a escolha do tema, a investigação, a criação de hipóteses e a descoberta de novas propostas de ensino.

O estudo das Funções é um campo amplo e permeia a trajetória dos estudantes durante a Educação Básica e, no entanto existem muitos problemas de ensino e aprendizagem deste tema conforme resultados de pesquisas realizados por Bianchini e Puga (2006) e Nasser (2009).

Neste contexto, reconhecemos a utilidade e o potencial do software GeoGebra, dado que nos permite construir, explorar, visualizar, experimentar situações e manipular dados que de outra forma o professor tradicional recorrendo a meios convencionais, com recurso material de desenho não consegue proporcionar.

Um ponto importante é o fato do GeoGebra, por ser um ambiente que une os recurso de Geometria Dinâmica com recursos dos sistemas de comando algébricos possibilita a manipulação dinâmica dos diferentes registros. As vantagens desta manipulação ficam evidentes como, por exemplo, com o fato de podermos realizar várias manipulações em pouco tempo, diferentemente de um gráfico construído com lápis e papel.

Desta forma esperamos contornar a dificuldade existente quanto a manipulação e utilização de abstrações para compreender o comportamento das funções trigonométricas, como por exemplo, a associação dos pontos do círculo trigonométrico com os pontos do plano cartesiano (DAMASCO NETO, 2010).

Outro fator a considerar diz respeito à motivação docente. Ensinar matemática com recurso a software dinâmico é significativamente diferente de ensinar de forma tradicional (CALDAS, 2011).

No entanto, para a sua integração no âmbito da sala de aula, é necessária a promoção de cursos de formação docente que discutam as potencialidades de suas ferramentas e diferentes metodologias para sua inserção nas práticas pedagógicas (BALDINI; CYRINO, 2012a).

Acredita-se então que este trabalho possa servir de apoio a elaboração de novas sequências didáticas com apoio computacional afim de ultrapassar outros obstáculos de conteúdos específicos da Matemática.

Concordamos com Damasco Neto (2010) quando destaca que a ideia não é levantar agora uma bandeira para substituição dos meios que já provaram serem capazes de promover o ensino pelo uso de software educativo. Na verdade consiste em aproveitar o melhor possível as características destes meios que podem se tornar num dado momento mais adequado que outros meios mais “convencionais”, ou um oferecer suporte ao outro.

Esperamos que a leitura deste trabalho apresentado possa contribuir para a reflexão da prática docente dos colegas professores de Matemática e para novas pesquisas na Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A.. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Editora UFPR, 2007.

ÁVILA, G. S. de S. . **Análise matemática para licenciatura.** 3. Ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BALDINI, L. A. F. ; CYRINO, M. C. C. T. . Função seno: uma experiência com o software GeoGebra na formação de professores de Matemática. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 1, p. CL-CLXIV, 2012a.

BALDINI, L. A. F. ; CYRINO, M. C. C. T. . O software GeoGebra na formação de professores de Matemática: uma visão a partir de dissertações e teses. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 1, p. 42-61, 2012b.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCN+:** Ensino Médio – orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Secretaria da Educação Básica**. Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CALDAS, M. C. da S.. **A integração curricular das TIC :** estudo de caso tomando como exemplo a geometria no ensino básico. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Mestrado em Ciências da Educação, Braga (Portugal), 2011. Disponível em: < http://hdl.handle.net/1822/19040>. Acesso em: 31 mar. 2013.

COTTA, A. J. . **Novas Tecnologias Educacionais no Ensino de Matemática:** Estudo de Caso – LOGO e do Cabri-Géomètre. Dissertação de Mestrado, UFSC, Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, Florianópolis, 2002. Disponível em: <http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/82401/188428.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2012.

DAMASCO NETO, J. R. **Registros De Representação Semiótica E O GeoGebra:** Um Ensaio Para O Ensino De Funções Trigonométricas. 2010. 130 f. Disertação (Mestrado) - Curso de Pós-graduação Em Educação Científica E Tecnológica, Centro De Ciências Físicas E Matemáticas, UFSC, Florianópolis, 2010. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/cp149968.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2012.

DANTE, L. R.. **Matemática:** contexto e aplicações. Volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. **Java:** como programar. 8. Ed. São Paulo: Pearson Prentice-Hall, 2010

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática**. In: *Aprendizagem em Matemática*. Machado, S. D. A. (org.). Campinas, SP: Papirus, 2003.

Eves, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.

FLÔRES, M. L. P. . **Metodologia para criar objetos de aprendizagem em matemática usando a combinação de ferramentas de autoria.** 2011. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Informática Na Educação, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias da Educação, UFRS, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/39669>. Acesso em: 20 jan. 2013.

FREITAS, J. L. M. de. Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. et al. **Educação Matemática uma introdução** 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002..p 65-87.

FURGERI, S. . **Java 7:** ensino didático. 2. Ed. São Paulo: Érica, 2012

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. 2. ed. Campinas, SP: Papirus, 2003.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio: volume 1.** 9ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Curso de análise : volume 1.** 12ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

OLIVEIRA, M. M. de. **Como fazer pesquisa qualitativa**. 3 edição – Petrópolis/RJ: Vozes, 2010.

PONTE, J. P. da. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 15, 1990, p.3-9. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/4473>. Acesso em: 04 jan. 2013.

REIS, A. M. . **Uma proposta dinâmica para o ensino de função afim a partir de erros dos alunos no primeiro ano do ensino médio.** 2011. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional Em Ensino De Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/adinilson_marques_reis.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2012.

ROJO, R. **Letramentos múltiplos, escola e inclusão social**. São Paulo: Parábola Editorial, 2009.

ROSSINI, R. . **Saberes docentes sobre o tema função:** uma investigação das praxeologias. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2006. Disponível em: < http://www.pucsp.br/pos/edmat/do/tese/renata_rossini.pdf>. Acesso em: 24 mar. 2013.

SANTOS, A. T. C. Dos. **O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra.** 2011. 200 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Em Educação Matemática, Puc, São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/adriana_tiago_castro_santos.pdf>. Acesso em: 21 dez. 2012.

SANTOS, S. A. Dos. **Ambiente informatizado:** para o aprofundamento da função quadrática por alunos da 2ª série do Ensino Médio. 2009. 162 f. Disertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Ensino da Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2009. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/sergio_aparecido_santos.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2013.

SILVA, F. I. C. . **Explorando a Função Quadrática com o software GeoGebra numa turma do 10º Ano.** 2009. 59 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Ensino da Matemática, Universidade da Madeira, Funchal (por), 2009. Disponível em: <http://digituma.uma.pt/bitstream/10400.13/56/3/MestradoFilipaSilva.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2013.

Apêndice A – LISTA DE SITES COM CONTEÚDO QUE AUXILIAM NA UTILIZAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA.

Desenvolvedor: http://www.GeoGebra.org

Instituto GeoGebra em Maringá –Paraná: http://www.dma.uem.br/igi/

Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro: http://www.GeoGebra.im-uff.mat.br/

Instituto GeoGebra de São Paulo: http://www.pucsp.br/GeoGebrasp/

Instituto GeoGebra – Portugal: http://GeoGebra.ese.ipp.pt/