



Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática



Área: uma contribuição da geometria na topografia

Moabi Benedito de Oliveira

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. André Krindges**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

novembro de 2020

Área: uma contribuição da geometria na topografia

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Moabi Benedito de Oliveira e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 6 de novembro de 2020.

Prof. Dr. André Krindges
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. André Krindges
Prof. Dr. Moiseis dos Santos Ceconello
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

O48á Oliveira, Moabi Benedito de.
Área: uma contribuição da geometria na topografia / Moabi Benedito de Oliveira. -- 2020
xiii, 50 f. ; 30 cm.

Orientador: André Krindges.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Cuiabá, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Triangulação. 2. Agrimensor. 3. Áreas irregulares. 4. Determinantes. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

AV. FERNANDO CORRÊA DA COSTA, 2367 - BOA ESPERANÇA - 78.060-900 - CUIABÁ/MT

FONE: (65) 3615-8576 – E-MAIL: PROFMAT@UFMT.BR

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: Área: uma contribuição da geometria na topografia

Autor: mestrando Moabi Benedito de Oliveira

Dissertação defendida e aprovada em 6 de novembro de 2020.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. **Doutor Andre Krindges** (Presidente Banca/orientador)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

2. **Doutor Moiseis dos Santos Ceconello** (Membro Interno)

Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

3. **Doutor Edgar Nascimento** (Membro Externo)

Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso - campus Bela Vista

Cuiabá, 6/11/2020.



Documento assinado eletronicamente por **Moiseis dos Santos Ceconello**, **Usuário Externo**, em 06/11/2020, às 16:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **EDGAR NASCIMENTO**, **Usuário Externo**, em 06/11/2020, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Krindges**, **Usuário Externo**, em 09/11/2020, às 13:54, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2926057** e o código CRC **1CEC1F05**.

*À minha falecida mãe Astrogilda Ana
Moraes de Oliveira por ser a minha pri-
meira professora de matemática e por
me ensinar o caminho do bem.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço... À Deus, o grande arquiteto que guia nossas vidas, sempre no caminho do que nos é justo.

A minha esposa Rosimery da Cruz Espirito Santos Oliveira, pela dedicação, paciência, entusiasmo e companheirismo enquanto me dediquei aos difíceis estudos desse curso, obrigado pela companheira fiel que sempre foi, te amo muito.

A meus filhos que a vida me presenteou, Vinícius de Moraes Espirito Santos Oliveira e Vitor de Moraes Espirito Santos Oliveira, pelos quais eu luto todo dia para um futuro melhor, para que eles possam viver num mundo mais igual.

A toda a minha família em especial a minha mãe, Astrogilda Ana de Oliveira (em memória) e pai, Eurindo Neves de Oliveira, tias e tios, primos e primas, meus amados irmãos e sobrinhos o meu muito obrigado.

Aos meus amigos do curso PROFMAT-MT, que essa amizade nunca se acabe, e o meu muito obrigado em especial ao amigo Edivaldo Yuzo Shimokawa por dedicar o seu tempo para me ajudar na formatação desse trabalho.

Ao Coordenador Prof. Dr. Geraldo Lucio Diniz por confiar em mim, o meu muito obrigado pela ajuda.

A todos os professores da PROFMAT-MT que ministraram disciplinas para nossa turma, com certeza parte dessa conquista é de vocês também.

Ao meu orientador Prof. Dr. André Krindges pela orientação, em cada dica e cobrança que me fez crescer muito na busca do conhecimento. Espero que esse projeto esteja à altura do que o senhor desejava quando me propôs esse desafio.

À CAPES pelo apoio financeiro, através de bolsa de estudos, fundamental para que eu pudesse custear as despesas durante esse curso.

“O matemático espreita por trás dos ombros de Deus para transmitir a beleza de Sua criação para o restante de Suas criaturas.”

Paul Erdős

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal a apresentação de uma ferramenta da geometria, o cálculo de área em figuras regulares e não regulares. Uma contribuição da geometria de grande importância para a pesquisa no campo da topografia e como parte de uma de suas aplicações para o entendimento das aulas de matemática pelos alunos do ensino básico e reflexões contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e Médio. Começa com a história da geometria até os dias atuais e um breve comentário sobre as diferentes divisões da geometria. É feita uma descrição da profissão do agrimensor e uma de suas subdivisões - a topografia, a história e a contribuição da geometria nessa profissão e o cálculo da área de algumas figuras irregulares, que é o ponto principal deste estudo. Mostra um breve relato do surgimento da agrimensura no Brasil e a diferença entre agrimensura e topografia. No ensino básico, mostra as diferentes maneiras de calcular a área de regiões irregulares usando a técnica de triangulação, desde as fórmulas apropriadas para cada região poligonal até o uso de determinantes nas situações em que as coordenadas cartesianas são apresentadas. Espera-se que este trabalho gere mais conhecimento, amplie o diálogo entre os educadores de matemática, principalmente o entendimento por parte dos alunos, promovendo reflexões no sentido de criar propostas em matemática para o ensino fundamental.

Palavras chave: Triangulação; agrimensor; áreas irregulares; determinantes.

Abstract

This work has as main objective the presentation of a geometry tool, the calculation of area in regular and non-regular figures. A contribution of geometry of great importance to research in the field of topography and as part of one of its applications for the understanding of mathematics classes by students of basic education and reflections contained in the National Curriculum Parameters of Elementary and High School. It starts with the history of geometry to the present day and a brief commentary on the different divisions of geometry. A description of the surveyor's profession and one of its subdivisions is made - the topography, history and contribution of geometry in that profession and the calculation of the area of some irregular figures, which is the main point of this study. Show a brief account of the emergence of surveying in Brazil and the difference between surveying and topography. In basic education, show the different ways of calculating the area of irregular regions using the triangulation technique, from the appropriate formulas for each polygonal region to the use of determinants in situations where cartesian coordinates are presented. It is hoped that this work will generate more knowledge, expand the dialogue between mathematics educators, especially the understanding on the part of students, promoting reflections in order to create proposals in mathematics for elementary school.

Keywords: Triangulation; surveyor; irregular areas; determinants.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
Lista de Quadros	xii
Lista de siglas e abreviaturas	xiii
Introdução	1
1 História da geometria, agrimensura e topografia	4
1.1 História da geometria	4
1.2 Aplicações e classificação da geometria	7
1.3 Análise <i>situs</i> ou topologia	11
1.3.1 Topologia	11
1.4 Geomática	12
1.5 Agrimensura: evolução histórica	12
1.6 O surgimento da agrimensura no Brasil	15
1.7 Diferença entre agrimensura e topografia	16
2 Áreas	18
2.1 Algumas definições	18
2.2 Propriedades do triângulo	19
2.3 Fórmulas básicas de área	22

2.4	Demonstração da fórmula de Herão	24
2.5	Área de um polígono convexo e não convexo	26
2.5.1	Área de um triângulo qualquer por geometria analítica	26
2.5.2	Área de um polígono através de determinantes	27
2.5.2.1	Método de cálculo de área de um polígono a partir de suas coordenadas	27
2.5.3	A fórmula da área de Gauss	30
3	Experiências cotidianas (exemplos resolvidos)	34
	Considerações finais	45
	Referências Bibliográficas	49
	Apêndice: Material adicional	50
A.1	Trigonometria no triângulo retângulo	50

Lista de Figuras

1.1	Esquema de geometria elíptica (esquerda, fonte: Costa (2014)) e geometria hiperbólica (direita, fonte: Wikipédia (2020)).	6
2.1	Polígono convexo. Fonte: Soares (2003).	18
2.2	Polígono não convexo. Fonte: Soares (2003).	19
2.3	Representação da propriedade 1.	19
2.4	Mediana.	20
2.5	Representação da propriedade 2.	20
2.6	Representação da propriedade 3.	20
2.7	Representação da propriedade 4.	21
2.8	Triângulo qualquer no plano cartesiano.	26
2.9	Representação do quadrilátero.	28
2.10	Representação da decomposição do quadrilátero em dois triângulos por meio de uma diagonal interna.	28
2.11	Conectando os vértices A_1 e A_n e decompondo a figura em um polígono de n lados e em um triângulo.	31
2.12	Conectando os vértices A_1 e A_n e tornando o polígono de $n + 1$ lados como parte da região poligonal de um polígono de n lados.	32
3.1	Praça representada em formato poligonal. Fonte: Cândido (2016)	35
3.2	Detalhe da mancha de óleo espalhada, próximo da costa.	36
3.3	Planta do terreno.	37
3.4	Terreno.	38
3.5	Polígono irregular.	39
3.6	Polígono irregular.	40

Lista de Quadros

3.1	Pontos de Coordenada. Fonte: Departamento de Engenharia Civil da UFMT- Cuiabá.	43
-----	---	----

Lista de siglas e abreviaturas

- 3D - Digitalização tridimensional.
- a.C. - antes de Cristo.
- d.C. - depois de Cristo.
- EDM - Mensuração de distância.
- F - Forma.
- GPS - Sistema de posicionamento global.
- P - Posição.
- RTK - Cinemática em tempo real.
- T - Tamanho.
- TP - Teorema de Pitágoras.

Introdução

Uma das grandes dificuldades da compreensão no ensino básico em matemática, em especial na geometria é, como usar na prática do nosso cotidiano os cálculos da área das figuras planas, os cálculos dos ângulos e como entender, como é possível que uma representação de uma região em livros de geografia corresponde a medida real de comprimento e de área.

Historicamente, as paisagens e lugares sofreram e continuam se modificando no transcorrer dos tempos, seja pela ação dos fenômenos naturais ou antrópicas. Sendo denominado como espaço geográfico aquele que foi alterado pela ação humana.

Nota-se ao redor do mundo, as construções dos prédios, pontes, ferrovias, os traçados das avenidas, ruas, os pisos, os moldes das roupas, em geral, todos esses elementos têm formatos, tamanhos e proporções diferentes e são representados por figuras geométricas. Existem várias aplicações da geometria nos diversos campos do saber humano, como a astronomia, as engenharias, a cartografia geográfica, a física, a química, entre outras. Esse trabalho mostra algumas aplicações dessa ciência, o uso de cálculo de área, comprimento, altura e medida de ângulos, e o uso da trigonometria. Busca-se mostrar teoricamente, o cálculo de área, a semelhança de triângulos a partir das suas respectivas fórmulas e a medida de ângulos, para isso, usa-se em alguns casos, a trigonometria básica como recurso.

Segundo o Brasil - MEC (1998):

A Matemática, por sua universalidade de quantificação e expressão, como linguagem portanto, ocupa uma posição singular. No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matemática é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações.

Primeiramente, mencionaremos a partir de uma breve história o surgimento da geometria, e os tipos de geometria e a contribuição das várias culturas antigas, a partir dos seus matemáticos, no cálculo de áreas das diversas figuras planas. O surgimento da agrimensura como prática de medida de terrenos, usando alguns recursos que vão desde a topografia até às áreas maiores de um terreno a partir de técnicas usadas na geodesia, que é usada em matemática para a medição e o cálculo acima de superfícies curvas, usando métodos semelhantes àqueles usados na superfície curva da terra.

A geomática integra todos os meios utilizados para a aquisição e gerenciamento de dados espaciais. Na topografia, o uso da trena é importante e devido a sua utilização externa, a mudança de temperatura influencia a sua dilatação e, conseqüentemente, as suas medidas reais. Com isso, o fator externo pode mudar as medições do comprimento das linhas poligonais.

A matemática é dividida em três grandes áreas, sendo a geometria uma delas, a álgebra e a análise as outras duas - que por sua vez se dividem em diversas outras subáreas (que frequentemente intersectam-se). Essas três grandes áreas são também conhecidas como delineadoras de maneiras de pensar em matemática, e os matemáticos são por vezes classificados em algebristas, geômetras e analistas. Exemplos de matemáticos considerados geômetras são: Arquimedes, Isaac Newton, Bernhard Riemann, Henri Poincaré, Felix Klein, Michael Atiyah, Vladimir Arnold, Mikhail Gromov.

Mostraremos também, a diferença entre a geometria euclidiana, a geometria sobre planos ou objetos em três dimensões baseados nos postulados de Euclides de Alexandria e a não euclidiana aos quais são as geometria esférica e geometria hiperbólica, a qual é uma geometria baseada num sistema axiomático distinto da geometria euclidiana. Os descobridores das geometrias não-euclidianas foram chamados de quatro gênios da matemática: Lobachevsky, Bolyai, Gauss e Riemann. Apresentaremos as propriedades importantes para o triângulo, uma técnica de cálculo de área usando determinante conhecida por método de Gauss para área que vale para polígonos convexo e não convexo, pois qualquer figura regular ou irregular, convexa ou não convexa pode ser decomposta em triângulos justapostos, traçando-se diagonais internas que não se cortam, e por fim mencionaremos alguns exemplos resolvidos de experiências do cotidiano.

Será admitido o conhecimento básico da demonstração já conhecida das fórmulas de áreas das figuras planas e unidades de medida de comprimento e de área, bem como a trigonometria no triângulo retângulo e triângulo qualquer.

Capítulo 1

História da geometria, agrimensura e topografia

Neste capítulo descreveremos a história da geometria, as aplicações e classificações da geometria, a geomática a agrimensura e sua evolução histórica, a agrimensura no Brasil e a diferença entre a agrimensura e a topografia. O leitor interessado em mais detalhes deve consultar Mol (2013).

1.1 História da geometria

Apresentamos nessa seção uma breve história da geometria Euclidiana e não Euclidiana.

Acredita-se que a matemática seja uma ciência construída no transcorrer a evolução das sociedades, desenvolvida em decorrência de situações e eventos socioeconômicos e políticos. O homem produziu ciência e conhecimento científico que influenciam diretamente e indiretamente seus processos de produção e modo de vida. A matemática apareceu para atender as demandas de contabilização econômicas, ou seja, facilitar e organiza a vida desde a antiguidade.

Conforme consultado em Roque (2012), embora a expressão geometria se origine do grego (geo = terra e metria = medida) trata-se de uma ciência surgida nas civilizações primitivas, e que progressivamente vem evoluindo até os dias atuais. Acredita-se que se fortalecimento ocorreu com a necessidade de se instituir impostos sobre as áreas cultiváveis, ainda no antigo Egito.

Sabe-se que periodicamente o rio Nilo inundava as áreas férteis para cultivo e destruía o marco físico que demonstrava os limites das propriedades. Os egípcios não conseguiam conter o avanço das águas, conseqüentemente desenvolveram uma técnica para estabelecer os limites das terras e assim resolver os conflitos que surgiam, e por vezes acabavam em morte.

Os funcionários egípcios responsáveis por aplicar a técnica que mensura os limites fronteiros entre as terras, foram denominados como agrimensores ou esticadores de corda, os quais delimitavam as áreas representando-os em retângulos ou triângulos, e conseqüentemente facilitaram a cobrança de impostos das terras férteis. Enfim, para resolver um problema social, surgiram os primeiros agrimensores.

Contudo coube aos gregos antigos executar o desenvolvimento da estrutura formal da geometria, introduzindo aí o uso de provas matemáticas para as afirmações e a distinção entre axiomas (e postulados), definições e teoremas. Como um conjunto de conhecimentos considerado práticos sobre as grandezas, comprimento, área e volume na forma de uma ciência matemática formal, a geometria surgiu na forma independente, e é tão antiga quanto Tales (século VI **a.C.**).

Diversos matemáticos empregaram as artes da geometria entre eles estava Arquimedes, ao qual desenvolveu técnicas engenhosas para calcular áreas e volumes, antecipando em várias maneiras o moderno calculo integral. Só por volta do século III **a.C.**, é que a geometria foi colocada em uma forma axiomática por Euclides, ao qual foi chamada de geometria euclidiana a qual se estabeleceu um padrão que perdurou por séculos.

Na geometria euclidiana, o axioma das paralelas postula que por um ponto exterior a uma reta passa exatamente uma reta paralela à inicial. Já na geometria elíptica, não há nenhuma reta paralela à inicial, enquanto que na geometria hiperbólica existe uma infinidade de retas paralelas à inicial que passam no mesmo ponto. Na geometria elíptica, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos, enquanto na geometria hiperbólica esta soma é menor que dois ângulos retos, (figura 1.1). Na elíptica, temos que o comprimento da circunferência é menor do que π vezes o seu diâmetro, enquanto na hiperbólica o comprimento da circunferência é maior que π vezes o diâmetro.

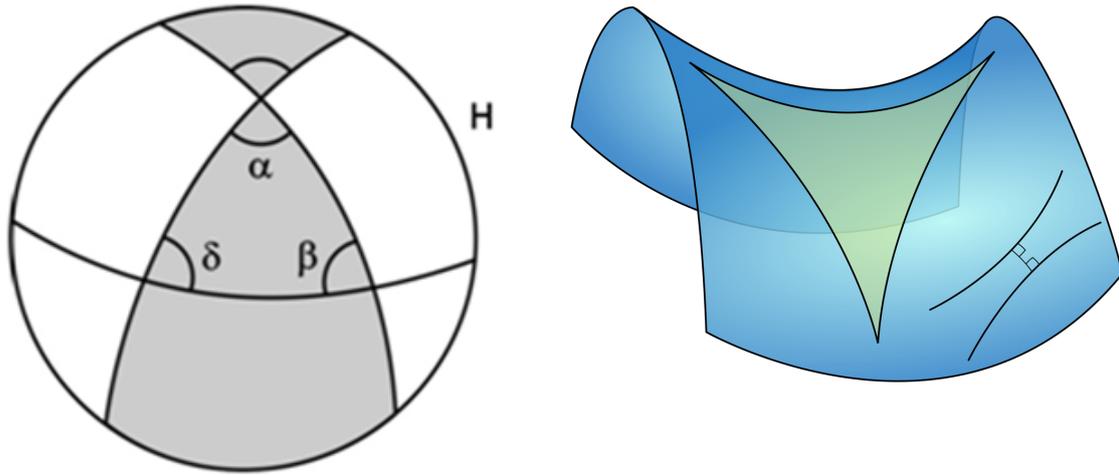


Figura 1.1: Esquema de geometria elíptica (esquerda, fonte: Costa (2014)) e geometria hiperbólica (direita, fonte: Wikipédia (2020)).

O descobrimento das geometrias não euclidianas geralmente é ligado aos matemáticos Carl Friedrich Gauss e Bernhard Riemann. Houve muita controvérsia em torno das geometrias não euclidianas. Por vezes, os teoremas em geometria não euclidiana eram tão exóticos que, apesar de não encontrarem inconsistências lógicas, matemáticos a tomavam como absurda.

Por volta do ano 300 **a.C.**, Euclides, um matemático grego que vivia em Alexandria, escreveu um livro em 13 volumes intitulado Os Elementos ($\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\tilde{\iota}\alpha$), que expôs de forma sistemática e estruturada grande parte do conhecimento geométrico acumulado pelos estudos de diversos matemáticos gregos.

No século XVII, a criação da geometria analítica pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat conectou a álgebra à geometria e deu grande ímpeto ao desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Conforme Miranda e Borges (2020): a geometria é uma ciência que não depende da opinião das pessoas, mesmo assim, apropria-se de palavras do cotidiano para designar propriedades específicas. Um único conceito de igualdade, como o que aplicamos aos números, é pouco.

Ainda, segundo Miranda e Borges (2020), “as principais preocupações da geometria são: **F**, o **T** e a **P**. Por isso, há diversos níveis de igualdade no estudo da geometria e somente um desses níveis é designado pelo termo igualdade”. Eis a nomenclatura usada para a comparação das figuras geométricas nos diferentes níveis:

- Igualdade significa mesma forma, tamanho e posição (**F,T,P**).

- Congruência significa mesma forma e tamanho (**F,T**).
- Semelhança significa mesma forma (**F**).
- Equivalência significa mesmo tamanho (**T**).

1.2 Aplicações e classificação da geometria

Apresentamos nessa seção algumas aplicações e classificação, postulados ou axiomas da geometria Euclidiana, geometria não Euclidiana e um breve relato sobre a geometria egípcia, geometria babilônica até a geometria moderna.

Ainda hoje, conhecimentos de geometria são aplicados nos mais variados campos do conhecimento humano, tais como: física, química, geologia, astronomia, engenharia, biologia, navegação, cartografia e fotografia. Isso mostra que a geometria surgiu da necessidade de resolver problemas práticos de agricultura, astronomia, arquitetura e engenharia. No entanto, cabe ressaltar que a geometria é considerada parte da matemática pura, embora tenha começado como uma ciência prática e encontre aplicações em muitos ramos fora da matemática, ela é comumente desenvolvida abstraída da realidade, como uma teoria matemática estudada por inúmeros matemáticos devido ao seu apelo essencial.

Conforme consultado em Rocha (2011):

- ▶ Geometria analítica: também chamada de geometria de coordenadas e de geometria cartesiana, é o estudo da geometria por meio de um sistema de coordenadas e dos princípios da álgebra e da análise.
- ▶ Geometria com complexos: também chamado de Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand, é um plano cartesiano usado para representar números complexos geometricamente.
- ▶ Geometria descritiva: (também chamada de geometria mongeana ou método de monge) é um ramo da geometria que tem como objetivo representar objetos de três dimensões em um plano bidimensional e, a partir das projeções, determinar distâncias, ângulos, áreas e volumes em suas verdadeiras grandezas.

- ▶ Geometria esférica: A geometria esférica tem importantes aplicações práticas na navegação e na astronomia.
- ▶ Geometria euclidiana: é a geometria, em duas e três dimensões, baseada nos postulados de Euclides de Alexandria.
- ▶ Geometria fractal: A geometria fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais (fractais são figuras da geometria não euclidiana).
- ▶ Geometria projetiva: é o estudo das propriedades descritivas das figuras geométricas.
- ▶ Trigonometria: é um ramo da matemática que estuda as relações entre os comprimentos de 2 lados de um triângulo retângulo (triângulo em que um dos ângulos mede 90 graus), para diferentes valores de um dos seus ângulos agudos. Círculo trigonométrico é um recurso criado para facilitar a visualização destas proporções entre os lados dos triângulos retângulos
- ▶ Geometria euclidiana: o texto de “Os Elementos” foi a primeira discussão sistemática sobre a geometria e o primeiro texto a falar sobre teoria dos números. Foi também um dos livros mais influentes na história, tanto pelo seu método quanto pelo seu conteúdo matemático. Como diria Euclides “o diâmetro da reta é proporcional a circunferência da pirâmide”. O método consiste em assumir um pequeno conjunto de axiomas intuitivos, e então provar várias outras proposições (teoremas) a partir desses axiomas. Muitos dos resultados de Euclides já haviam sido afirmados por matemáticos gregos anteriores, porém ele foi o primeiro a demonstrar como essas proposições poderiam ser reunidas juntas em um abrangente sistema dedutivo.

Conforme consultado em Silva (2014), um princípio da geometria euclidiana é que linhas retas ou planos permanecem sempre a uma distância fixa uns dos outros independentemente do seu comprimento. Algumas geometrias não euclidianas, como a geometria elíptica e hiperbólica, no entanto, rejeitam o axioma do paralelismo de Euclides.

Os axiomas podem ser uma reta que liga dois pontos diferentes; o segmento

pode continuar de uma única forma em uma reta; a partir de qualquer centro (raio) é possível confeccionar um círculo; os ângulos retos são iguais. E, se uma reta, ao cortar outras duas, formando ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos (também chamado postulado das paralelas). As observações que têm sido feitas a estes postulados ao longo dos séculos encheriam um grosso volume. Em particular, no que respeita ao termo “continuamente” no segundo postulado e ao último chamado “o postulado de paralelismo” (de Euclides).

- ▶ Geometria primordial: os registros mais antigos dessa matemática ocorreram no vale do Indo e antiga Babilônia (3000 a.C.), fazia uso dos princípios práticos de comprimento, ângulo, área e volumes, elaborados para suprir as demandas de construção e outras atividades laborais da época. Acredita-se que os egípcios e babilônios conheciam os princípios que originaram o **TP**, cerca de 1500 anos antes de o grego desenvolvê-lo.
- ▶ Geometria egípcia: os egípcios eram capazes de calcular a área de um círculo segundo o comprimento de seu diâmetro. Isso foi feito pela quadratura de oito nonos do comprimento do diâmetro o que dá um valor aproximado para π de 3,16. Com seu conhecimento de área, também foram capazes de calcular o volume do cilindro e da pirâmide, mesmo quando truncada. Isso foi novamente alcançado por uma série de cálculos menores, que, embora carecessem de fórmulas, estavam corretos.
- ▶ Geometria babilônica: a principal marca da geometria babilônica é seu caráter algébrico, tem problemas que dizem respeito a uma transversal paralela a um lado de um triângulo retângulo e que levam a equações quadráticas, tem outros que levam a sistemas de equações simultâneas, um deles formado por dez equações com dez incógnitas. Uma tábua em Yale, datada de 1600 a.C. na qual aparece uma equação cúbica geral na discussão de volumes de troncos de uma pirâmide, como consequência da eliminação do z num sistema de equações do tipo:

$$z(x^2 + y^2) = A, z = ay + b, x = c$$

A geometria babilônica se relaciona intimamente com a mensuração prática de exemplos práticos encontrados nas tábuas interfere-se que deviam estar familiarizada com a área do triângulo retângulo e do triângulo isósceles (talvez a do triângulo genérico), área do trapézio retângulo, volume do paralelepípedo retângulo e do volume do prisma reto de base trapezoidal. Consideravam uma circunferência como o triplo do seu diâmetro e a área do círculo como um duodécimo da área do quadrado de lado igual à circunferência respectiva (regras corretas para uma aproximação de $\pi = 3$) e assim obtinham o valor do volume do cilindro circular reto.

- Geometria da Índia védica: as construções de altares evidenciam a relevância da geometria desenvolvida no período védico indiano, inúmeros registros destacam o Satapatha Brahmana e os Shulba-Sūtras (códigos da corda), uns mil anos antes de Cristo. O Baudhayana Śulba Sūtra apresentam trios pitagóricos (equações diofantinas), e ainda possuíam enunciados sobre a quadratura do círculo e circunferência do quadrado (Hayashi, 2003).

Para Dani (2005) as tábuas babilônicas apresentavam uma sofisticação maior, possuíam quinze trios pitagóricos de valores maiores, isso em 1850 a.C., e ainda salienta que essas tábuas antecederam a matemática Védica dos indianos. Para ele, os Shulba-Sūtras apenas descrevia as construções dos altares e os princípios geométricos aplicados.

Cajori (2007) salienta que o costume dos indianos em demonstrar os resultados matemáticos em versos, dar significados obscuros e místicos, pois facilitava aos que haviam compreendido o assunto a memorizar e transmitir aos iniciantes.

- Geometria grega clássica: considerada uma preciosidade pelos matemáticos gregos da antiguidade, cujos fundamentos foram ampliados através da tentativa e erro ou dedução lógica, para eles os objetos se aproximavam das abstrações contidas na geometria, o método axiomático foi desenvolvido pelos gregos, e ainda são usados.
- Geometria moderna: nesse período se desenvolveu a geometria analítica com coordenadas e equações, por René Descartes e Pierre de Fermat, chegando a uma ciência quantitativa exata da física. Nesse período, Girara Desargues

elaborou a geometria projetiva, a qual visava examinar o alinhamento dos pontos (uns com outros). O cálculo foi aprimorado a partir do século XVII por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, o que resultou na conhecida matemática de análise (aplicada à geometria), que por sua vez solucionou dois problemas: das retas tangenciais as curvas e as áreas fechadas pelas curvas.

- Geometria não euclidiana: tinha por finalidade evidenciar o Postulado das Paralelas de Euclides. Muitos matemáticos não tiveram sucesso nessa tarefa, contudo as críticas e teorias desenvolvidas por Omar Khayyam contribuíram com o desenvolvimento dessa geometria. No século XX, outros matemáticos, como Gauss, Bolyai e Lobatchewsky, separadamente, concluíram a impossibilidade de se comprovar o postulado de paralelas, dando-se início a formação da geometria autoconsistente, e assim surgiu a primeira geometria não euclidiana. A geometria intrínseca foi criada por Riemann, em 1854, e usada por Einstein na formulação da teoria da relatividade.

As teorias geométricas desenvolvidas não responderam a indagação: qual delas é a mais adequada para o espaço físico? O desdobramento matemático despontou que tal solução é encontrada a partir da experimentação física e não apenas pelo entendimento matemático.

1.3 Análise *situs* ou topologia

Mostraremos nessa seção um pequeno resumo da evolução do raciocínio matemático até as novas geometrias (computacional, digital, algoritmos geométricos, etc.)

1.3.1 Topologia

Apesar da evolução do raciocínio matemático, percebeu-se semelhanças nos estudos das retas dos números, em duas ou três dimensões, assim sendo, a acepção de espaço métrico foi elaborada de forma genérica, aplicada em casos especiais. Esse preceito de cálculo e acepções associadas à análise foi denominado como análise *situs* (topologia). As propriedades das figuras (conexões e limites) eram os tópicos mais

relevantes, contrário ao foco dado pelas geometrias euclidianas e não euclidianas, conseqüentemente a topologia segregou-se da geometria.

As curvas e superfícies de corpos finitos tiveram seus estudos finalizados com a geometria algébrica. A geometria finita foi aplicada na teoria da codificação e criptografia; e novas geometrias (computacional, digital, algoritmos geométricos, etc.) surgiram com as tecnologias.

1.4 Geomática

Conforme consultado em Rosa (2013), o surgimento e avanço de novas tecnologias vêm alterando as características práticas e teóricas de todas essas atividades. Há alguns anos, sem o advento do **GPS**, por exemplo, grandes esforços eram dedicados à simples coleta de uma coordenada, o que hoje é questão instantânea.

A geomática integra todos os meios utilizados para a aquisição e gerenciamento de dados espaciais. Suas atividades incluem a cartografia, apoios topográficos, mapeamentos digitais, sensoriamento remoto, sistemas de informações geográficas, hidrografia e muito mais.

Por fim, a geomática é uma tecnologia em constante evolução e depende da visão, competência e ousadia de profissionais com expertises variadas para cada vez mais facilitar a vida de todos nós.

1.5 Agrimensura: evolução histórica

Esta seção tratará da evolução da matemática associados a tecnologia, a agrimensura ao qual citando algumas delas: técnica para restabelecer os limites fronteiriços das terras produtivas no Delta do rio Nilo, a construção das pirâmides entre outros.

Conforme consultado em Lisboa Filho e Iochpe (1996), trata-se de uma ciência que faz uso da geometria na aquisição e gestão de dados espaciais na execução de operações científicas, técnicas, administrativas e legais, ou seja, usa conhecimentos matemáticos associados a tecnologia, e assim executa levantamentos topográficos, geodésicos, cartográficos e fotogramétricos.

Historicamente, a agrimensura vem sendo usada desde as civilizações primitivas na construção de grandes estruturas como o monumento Stonehenge (2500 a.C.) o qual fez uso das marcações com corda e geometria.

E, como se mencionou anteriormente, os egípcios faziam uso dessa técnica para restabelecer os limites fronteiros das terras produtivas no Delta do rio Nilo, bem como na construção das pirâmides. Na Mesopotâmia os primeiros instrumentos de posicionamento e nivelamento foram desenvolvidos, como o Groma, esquadro, cruzetas em chumbo e madeira.

Em Roma, os agrimensores eram denominados de Gromatici, os quais determinaram a divisão do Império Romano conforme o cadastro fiscal das terras conquistadas em 300 d.C.. Nesse momento, diversos instrumentos topográficos já tinham sido desenvolvidos, os quais permitiam mensurar ângulos, auxiliava a navegação (topografia da astronomia) e abertura de estradas, elaboração de mapas, nivelamento de obras grandiosas como os aquedutos romanos.

Acredita-se que a agrimensura, enquanto ciência foi essencial ao desenvolvimento do ambiente humano, inserida até os dias atuais no planejamento urbano, transporte, comunicação, mapeamento e limites legais de propriedade (posse da terra). Destaca-se ainda, que a agrimensura associa conhecimentos, tais como: trigonométricos, físicos, geográficos e legais em suas técnicas no exercício da profissão. Tanto o técnico em agrimensura como o engenheiro pode atuar como agrimensor, devendo ser habilitado no uso de instrumentos como teodolitos, estações totais, rádios, entre outros disponibilizados pelos avanços tecnológicos.

Os instrumentos aplicados na agrimensura começaram a ser desenvolvidos no século XVIII, como os teodolitos, criado por Jese Ramsden (1787), com o qual podia-se mensurar ângulos em planos horizontal e vertical. No século XVII, em 1640, William Gascoigne inventou um instrumento que utilizou um telescópio com uma mira e um dispositivo de recepção. Em 1771, James Watt acoplou o mensurador óptico à distância e Willebrord Snellius inseriu a sistematização moderna de triangulação, esse último, evidenciou que as formulas de planar podiam ser corrigida para permitir a curvatura da terra, também destacou que a resseção usando os ângulos expressos entre os vértices no ponto desconhecido é mais precisa do que os rolamentos dos vértices que dependem de uma bússola.

O teodolito continua evoluindo, Jacques Cassini e Cesar Cassini realizaram a primeira triangulação, na França, na qual incluíram o levantamento do arco meridiano, e assim publicaram o primeiro mapa da cidade, em 1745, fundamentado em princípios rigorosos. A consolidação da rede de triangulação se deu no final do século XVIII quando se confeccionou mapas inteiros de diversos países. O teodolito Ramsden, foi construído em 1784 para auxiliar na triangulação da Grã-Bretanha, chefiado pelo então general William Roy.

Em 1801, deu-se início a pesquisa denominada “Great Trigonometry Survey of India” (Grande pesquisa de trigonometria da Índia) revolucionou a agrimensura, com medições precisas de uma seção de um arco de longitude (medições de anomalia geodésica), mapeamento do Monte Everest outros picos do Himalaia. Conseqüentemente a topografia se tornou fundamental, principalmente depois da Revolução Industrial (século XIX), instrumentos mais precisos foram desenvolvidos e aplicados na construção de canais, estradas, ferrovias, entre outras.

Contudo, ainda no século XX problemas de mensuração precisa de longas distâncias, Dr. Trevor Lloyd Wadley criou o telurômetro (em 1950) que faz uso de transmissores e receptores de micro-ondas. No final da década de 50, Geodimeter inseriu equipamentos eletrônicos de **EDM**, o qual através da multi frequência de ondas de luz encontra a distância;

Sequencialmente, nos anos 70, apareceram os instrumentos que associavam a mensuração de ângulo e distância, denominados como estações totais, progressivamente novos equipamentos foram associados o que promoveu mais exatidão e celeridade na mensuração (compensadores, gravadores de dados, software de cálculo on-board, entre outras tecnologias).

A partir dos meados do século XX, passou-se a se fazer uso de satélites, como o US Navy Traffic System (sistema de Tráfego da Marinha dos EUA), com a finalidade de fornecer dados sobre a posição de submarinos de mísseis polaris. Em 1978, foi lançado o primeiro **GPS** pela força aérea dos Estados Unidos da América do Norte, inicialmente eram necessárias horas de observações por um receptor estático para se alcançar precisão do levantamento. Contudo, os progressivos aperfeiçoamentos dos satélites e receptores alcançou-se a **RTK**, cujos levantamentos de alta precisão a partir de uma estação de base fixa e uma antena móvel.

Atualmente, o teodolito, a estação total e o **GPS** são os métodos mais usados pelos agrimensores. O aperfeiçoamento continua, com o sensoriamento remoto, **3D** aplicados nos levantamentos topográficos e geodésicos, com maior precisão.

1.6 O surgimento da agrimensura no Brasil

Nesta seção mencionaremos o aparecimento dos agrimensores no Brasil da topografia e suas técnicas e das curvas de nível com as quais são confeccionados os mapas topográficos.

Conforme consultado em Silva e Teixeira Junior (2018), engenheiros geógrafos (agrimensores) tiveram como primeira escola de formação a escola Engenheiros Geógrafos Topógrafos Militares a Academia Real Militar -, durante o reinado de Dom João VI (1810).

Segundo Borges (2013) a topografia apresenta uma determinada área através de mapas, plantas, entre outros elementos, destacando as benfeitorias (plantações, construções, etc.) em sua superfície.

Corrêa (2009) salienta que se trata de uma ciência antiga, usada desde as primeiras civilizações, tanto nas construções monumentais como delimitações de fronteiras. Para Araújo (2009) sua gênese está no conhecimento do meio em que vive assimilado pelo homem através da navegação, guerras, entre outros mecanismos essenciais a sua sobrevivência.

Salienta-se que a topografia é apenas um das inúmeras ciências usadas na mensuração, pois frequentemente são criados mapas, cartas, perfis, entre outras representações de superfícies mensuradas para determinado fim. A mensuração associa diversas ciências e técnicas de medições (Pastana, 2010).

- Topografia estudo científico da superfície terrestre, através de metodologias, equipamentos, princípios e convenções, estabelecer de forma analítica as medidas de: área, perímetro, localizações, entre outras variações que podem ser representadas em cartas topográficas. Por vezes, aplicada na mensuração dos abalos sísmicos. Pode ser aplicada na mensuração de pequenas áreas, bem como na construção de rodovias, ferrovias, limites fronteiriços. É possível fazer o detalhamento das dimensões sobre os eixos norte e oeste através da cota

de altimetria. Nas pequenas áreas, pode-se descartar o erro decorrente pela curvatura da terra sem comprometer a exatidão do levantamento topográfico, sendo classificada em topometria (mensuração de distâncias e ângulos num plano horizontal; subdivide-se em planimetria e altimetria); topologia (realiza a análise dos dados coletados pela topometria, agiliza o levantamento e desenho topográfico por intermédio das leis naturais do relevo) e taqueometria (realiza o levantamento de pontos de um terreno, ou seja, a planialtimétricas).

- Curva de nível, nome usado para designar uma linha imaginária que agrupa dois pontos que possuem a mesma altitude. Por meio dela são confeccionados os mapas topográficos, pois a partir da observação o técnico pode interpretar suas informações através de uma visão tridimensional do relevo. Uma curva de nível refere-se as curvas altimétricas ou linhas isoípsas (ligam pontos de mesma altitude), essa é a mais eficiente maneira de representar as irregularidades da superfície terrestre (relevo). A estereoscópica é aplicada no sensoriamento remoto, e dessa maneira pode-se fotografar ou representar em uma imagem determinado relevo, e mensuras as divergências de nível e assim compor cartas ou plantas.

1.7 Diferença entre agrimensura e topografia

Nesta seção mostraremos algumas diferenças entre a agrimensura e a topografia ao qual muitas pessoas acham que é a mesma profissão. o leitor interessado em mais detalhes consultar Santos (2000).

Conforme consultado em Freire (2019), a agrimensura apresenta maior abrangência, incorpora a topografia para executar mensurações técnicas para atender demandas legais e jurídicas, enquanto a topografia se restringe ao levantamento técnico. Pode-se dizer que um agrimensurador também é topógrafo, mas o topógrafo não apresenta a formação necessária para atuar como agrimensurador. Além disso, a topografia tem como foco a superfície terrestre (anomalias naturais e/ou artificiais), enquanto a agrimensura realiza mensurações legais, e visa destacar os limites legais de uma propriedade.

A geodésica é apoiada na trigonometria esférica e a topografia na trigo-

nometria plana, porém são muitas vezes confundidos por poder ser empregado os mesmos equipamentos. Essa ciência faz parte de um conjunto de disciplinas, que incluem a cartografia, a topografia, a fotogrametria, o sensoriamento remoto e a astronomia de posição, todas incluídas dentro do ramo da agrimensura.

A agrimensura é formada por atividades executadas desde a Idade Média, mas reconhecida como profissão em 1957, onde a Lei 3.144 determina sobre o curso superior em agrimensura. A agrimensura marcha ao lado com o progresso da tecnologia, apresentando maior exatidão ao trabalho do agrimensor. Entre as múltiplas tecnologias empregadas nesse ramo podemos mencionar a utilização de Drones, Sistema GNSS **RTK** e Laser Scanners.

Capítulo 2

Áreas

Como objetivo principal desse trabalho é a apresentação de uma ferramenta da geometria, o cálculo de área em figuras regulares e não regulares é uma enorme contribuição da geometria para a topografia e de grande importância para a pesquisa nesse campo, então neste capítulo nós iremos tratar sobre propriedades importantes para o triângulo, pois podemos usar a técnica da triangulação para o cálculo da área de uma figura. Será discutida a área de um polígono convexo e não convexo. Também vamos apresentar uma técnica pouco conhecida no ensino básico que é o cálculo da área de um polígono através do uso do determinante e, em seguida, apresentaremos a fórmula de Gauss para área.

2.1 Algumas definições

Definição 1. Polígono: Figura geométrica fechada e limitada por linhas retas que tem mesmo número de ângulos que de lados.

Definição 2. Polígono convexo: Dados 2 pontos pertencentes ao interior da figura, o segmento AB está inteiramente contido no polígono.

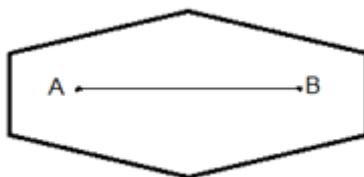


Figura 2.1: Polígono convexo. Fonte: Soares (2003).

Definição 3. Polígono não convexo: Quando não é convexo.

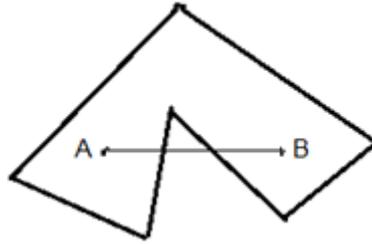


Figura 2.2: Polígono não convexo. Fonte: Soares (2003).

Definição 4. Triângulo: Figura geométrica limitada por três retas e com três ângulos internos cuja soma total, na geometria euclidiana, vale dois retos (180 graus).

Definição 5. Área: Quantidade de espaço ocupado em 2D, duas dimensões, por uma figura.

2.2 Propriedades do triângulo

Esta seção tratará sobre as propriedades importantes para o triângulo.

Propriedade 1. A área do triângulo (as fórmulas de área pode ser visto na secção 2.3) não se modifica quando a base permanece fixa e o terceiro vértice percorre uma reta paralela à base (figura 2.3).

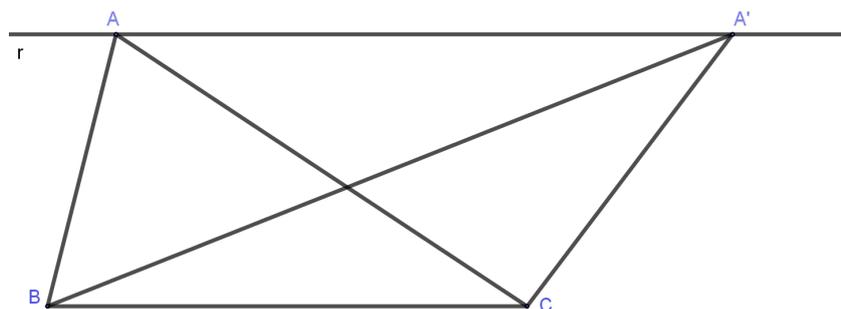


Figura 2.3: Representação da propriedade 1.

Pela figura 2.3 acima, a reta r é paralela a BC . Os triângulos ABC e $A'BC$ possuem mesma área, pois apresentam mesma base e altura.

Definição 6. Mediana: É a reta que em um triângulo vai de um vértice até a metade do lado oposto.

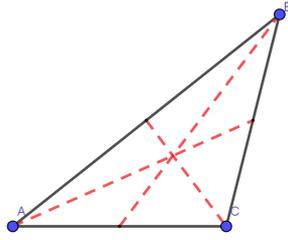


Figura 2.4: Mediana.

Propriedade 2. A Mediana divide qualquer triângulo em dois triângulos menores, de áreas iguais. (figura 2.5).

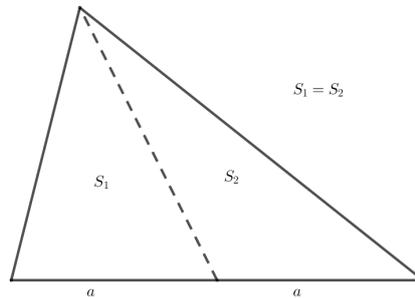


Figura 2.5: Representação da propriedade 2.

Nota-se que os dois triângulos apresenta mesma base e altura, logo, possuem mesma área.

Propriedade 3. Se dois triângulos têm mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. A afirmação acima tem comprovação imediata a partir da fórmula que calcula a área do triângulo. A fórmula pode ser vista no item 6.a subsecção 2.3

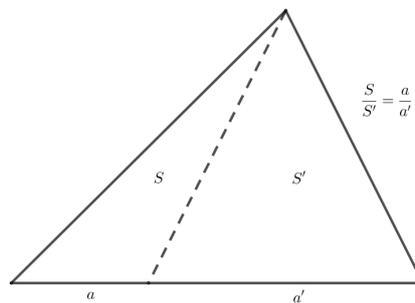


Figura 2.6: Representação da propriedade 3.

Propriedade 4. A razão entre as áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Observe, na figura a seguir, dois triângulos semelhantes com bases a e a' e alturas h e h' .

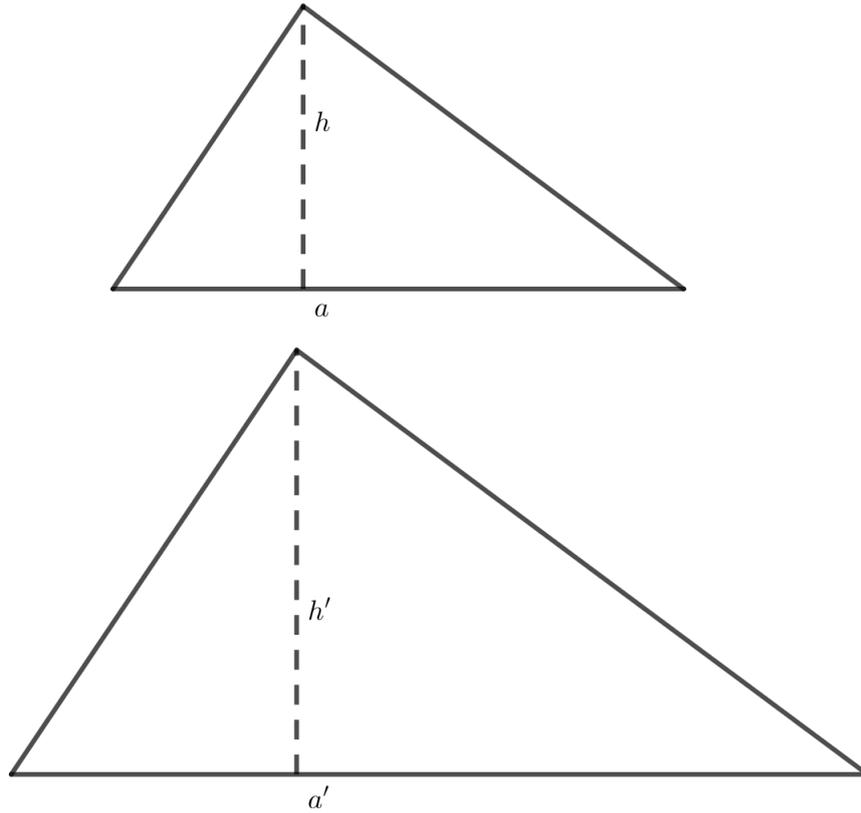


Figura 2.7: Representação da propriedade 4.

A razão entre as bases é a mesma razão entre as alturas, pois são semelhantes. Esse número é a razão de semelhança das duas figuras:

$$k = \frac{a}{a'} = \frac{h}{h'}$$

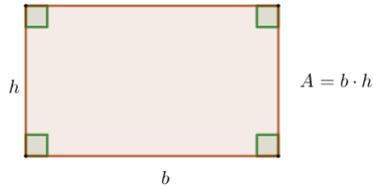
Porém, se S e S' são as áreas dos dois triângulos temos:

$$\frac{S}{S'} = \frac{ah/2}{a'h'/2} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'} = k \cdot k = k^2$$

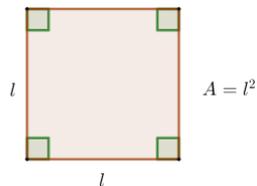
2.3 Fórmulas básicas de área

O formulário abaixo irá servir de auxílio para o leitor realizar o cálculo de áreas. retirado do site: www.professorwaltertadeu.mat.br

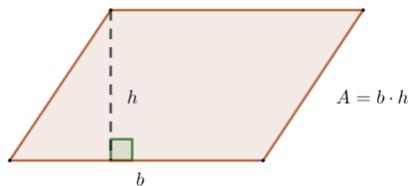
1. Retângulo



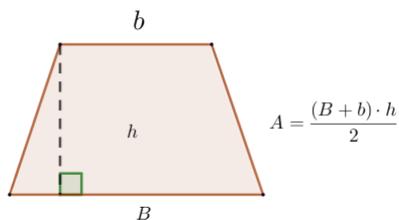
2. Quadrado



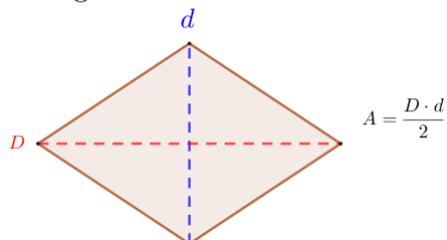
3. Paralelogramo



4. Trapézio

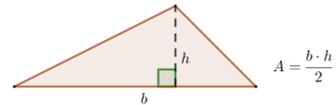


5. Losango

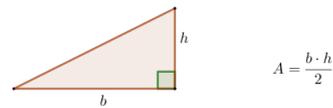


6. Triângulos

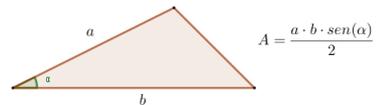
(a) Triângulo qualquer



(b) Triângulo retângulo



(c) Fórmula trigonométrica da área

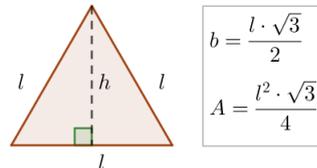


(d) Fórmula de Heron

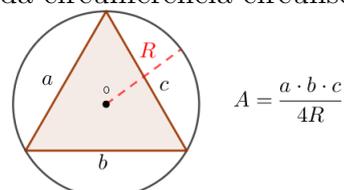
$$A = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

onde p é o semiperímetro e a , b e c são os lados.

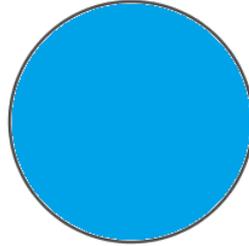
(e) Triângulo equilátero



(f) Em função dos lados e do raio da circunferência circunscrita



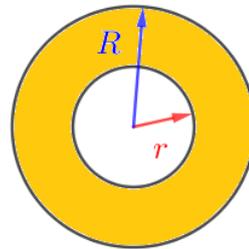
7. Círculo



Comprimento: $C = 2\pi r$

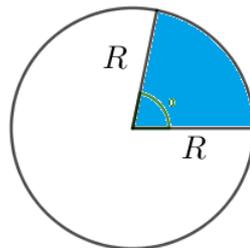
Área: $A = \pi r^2$

8. Coroa circular



Área: $A = \pi(R^2 - r^2)$

9. Setor circular

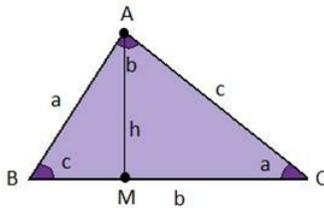


Área: $A = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$

2.4 Demonstração da fórmula de Herão

A demonstração foi retirada de Themudo (2018).

A fórmula tradicional de cálculo da área do triângulo, ensinada e muito utilizada no ensino fundamental é $\text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$. Entretanto, outras fórmulas foram desenvolvidas para realizar este cálculo. Uma delas é a fórmula de Herão (ou de Heron), que dá a área do triângulo em função da medida dos três lados do triângulo. O nome faz referência ao matemático grego Herão de Alexandria. Primeiro, encontramos o cosseno do ângulo c . Para isso, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABM para encontrar o comprimento de BM .



Demonstração: Primeiro, encontramos o cosseno do ângulo c . Para isso, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABM para encontrar o comprimento de BM :

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (\overline{BM})^2 \\ (\overline{BM})^2 &= a^2 - h^2 \\ \overline{BM} &= \sqrt{a^2 - h^2} \end{aligned}$$

Assim, $\cos(c) = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a}$. Agora, utilizando o triângulo ABC , aplicamos a lei dos cossenos relativa ao ângulo c :

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(c) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2b \cdot \sqrt{a^2 - h^2} \end{aligned}$$

Logo

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right)^2 \quad (2.1)$$

Assim,

$$A^2 = \frac{b^2 h^2}{4} \quad (2.2)$$

Substituindo (2.1) em (2.2) temos:

$$A^2 = \frac{b^2 \left[a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b} \right)^2 \right]}{4}$$

$$A^2 = \frac{b^2 a^2 - b^2 \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2}}{4}$$

$$A^2 = \frac{4b^2 a^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}$$

$$A^2 = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{16}$$

Aplicando a diferença de dois quadrados:

$$A^2 = \frac{[(2ab) - (a^2 + b^2 - c^2)] [(2ab) + (a^2 + b^2 - c^2)]}{16}$$

$$A^2 = \frac{[-(a^2 - 2ab + b^2) + c^2] [(a^2 + 2ab + b^2) - c^2]}{16}$$

$$A^2 = \frac{[-(a - b)^2 + c^2] [(a + b)^2 - c^2]}{16}$$

$$A^2 = \frac{[c^2 - (a - b)^2] [(a + b)^2 - c^2]}{16}$$

Novamente pela diferença entre quadrados:

$$A^2 = \frac{[c - (a - b)] [c + (a - b)] [(a + b) - c] [(a + b) + c]}{16}$$

$$A^2 = \frac{[-a + b + c] [a - b + c] [a + b - c] [a + b + c]}{16}$$

$$A^2 = \frac{[-a + b + c]}{2} \cdot \frac{[a - b + c]}{2} \cdot \frac{[a + b - c]}{2} \cdot \frac{[a + b + c]}{2}$$

$$A^2 = \left(\frac{a + b + c - 2a}{2} \right) \left(\frac{a + b + c - 2b}{2} \right) \left(\frac{a + b + c - 2c}{2} \right) \left(\frac{a + b + c}{2} \right)$$

$$A^2 = \left(\frac{a + b + c}{2} - a \right) \left(\frac{a + b + c}{2} - b \right) \left(\frac{a + b + c}{2} - c \right) \left(\frac{a + b + c}{2} \right)$$

Como $s = \frac{a + b + c}{2}$, tal que s é o semiperímetro (metade do perímetro), vem:

$$A^2 = (s - a)(s - b)(s - c)s$$

E por fim,

$$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

■

2.5 Área de um polígono convexo e não convexo

Nesta seção mencionaremos um método que é aplicável a qualquer polígono com qualquer número de lados, tanto no caso de polígonos côncavos e o convexo, desde que se tenha os vértices usando a fórmula de Gauss (vide subsecção 2.5.3) usando determinantes da geometria analítica. É possível calcular a área de um polígono convexo ou não convexo através das coordenadas de seus vértices, pois para os polígonos não convexos serão decomposto em triângulos justapostos, traçando-se diagonais internas que não se cortam. O leitor interessado em mais detalhes deve consultar Braden (1986).

2.5.1 Área de um triângulo qualquer por geometria analítica

Conhecendo as coordenadas dos vértices de um polígono, determinado a partir do levantamento realizado em campo através de equipamentos adequados de medidas, tais como, estação total e **GPS** (topografia), conseguimos calcular a sua área em campo antes de levar as informações para processamento dos dados, usando a ferramenta da geometria analítica (determinante), conhecida como fórmula da área de Gauss.

Baseia se na soma e subtração da área de trapézios desenvolvidos pelos vértices e valores sobre os eixos Norte (N), Leste (E).

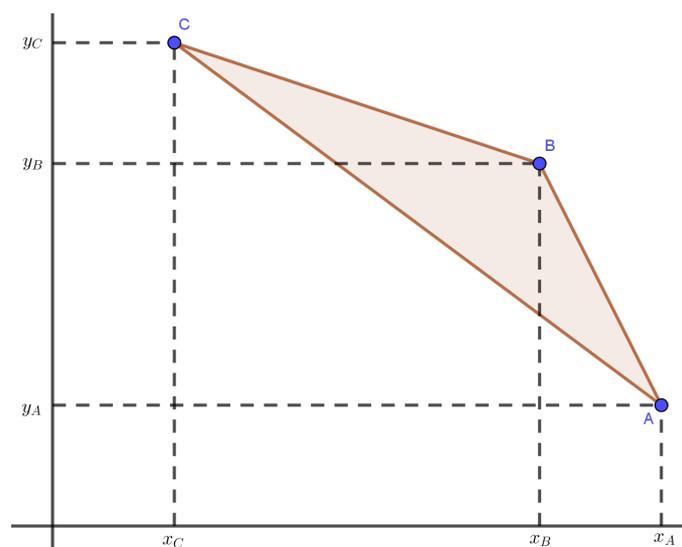


Figura 2.8: Triângulo qualquer no plano cartesiano.

A área do triângulo ABC (S_{ABC}) será calculada da seguinte maneira:

$S_{ABC} = \text{Área do trapézio de base maior } (\overline{AY_A}) \text{ e base menor } (\overline{BY_B}) \text{ com altura } (\overline{Y_B Y_A}) + \text{Área do trapézio de base menor } (\overline{CY_C}) \text{ e base maior } (\overline{BY_B}) \text{ com altura } (\overline{Y_C Y_B}) - \text{Área do trapézio de base menor } (\overline{CY_C}) \text{ e base maior } (\overline{AY_A}) \text{ e altura } (\overline{Y_C Y_A}) \text{ ou seja:}$

$$\begin{aligned}
 S_{ABC} &= \frac{(\overline{AY_A} + \overline{BY_B})(\overline{Y_A Y_B})}{2} + \frac{(\overline{BY_B} + \overline{CY_C})(\overline{Y_B Y_C})}{2} - \frac{\overline{CY_C} + \overline{AY_A})(\overline{Y_C Y_A})}{2} \\
 &= \frac{1}{2} [(\overline{AY_A} + \overline{BY_B})(\overline{Y_A Y_B}) + (\overline{BY_B} + \overline{CY_C})(\overline{Y_B Y_C}) - (\overline{CY_C} + \overline{AY_A})(\overline{Y_C Y_A})] \\
 &= \frac{1}{2} [(X_A + X_B)(Y_B - Y_A) + (X_B + X_C)(Y_C - Y_B) - (X_C + X_A)(Y_C - Y_A)] \\
 &= \frac{1}{2} [(X_A + X_B)(Y_B - Y_A) + (X_B + X_C)(Y_C - Y_B) + (X_C + X_A)(Y_A - Y_C)] \\
 &= \frac{1}{2} [(X_A(Y_B - Y_A) + X_B(Y_B - Y_A)) + (X_B(Y_C - Y_B) + X_C(Y_C - Y_B)) + (X_C(Y_A - Y_C) + X_A(Y_A - Y_C))] \\
 &= \frac{1}{2} [(X_A Y_B - X_A Y_A + X_B Y_B - X_B Y_A) + (X_B Y_C - X_B Y_B + X_C Y_C - X_C Y_B) + (X_C Y_A - X_C Y_C + X_A Y_A - X_A Y_C)] \\
 &= \frac{1}{2} [(X_A Y_B - \cancel{X_A Y_A} + \cancel{X_B Y_B} - X_B Y_A) + (X_B Y_C - \cancel{X_B Y_B} + \cancel{X_C Y_C} - X_C Y_B) + (X_C Y_A - \cancel{X_C Y_C} + \cancel{X_A Y_A} - X_A Y_C)] \\
 &= \frac{1}{2} [(X_A Y_B - X_B Y_A) + (X_B Y_C - X_C Y_B) + (X_C Y_A - X_A Y_C)] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ X_B & Y_B \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_B & Y_B \\ X_C & Y_C \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_C & Y_C \\ X_A & Y_A \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_A & Y_A \\ X_B & Y_B \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_B & Y_B \\ X_C & Y_C \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_C & Y_C \\ X_A & Y_A \end{vmatrix}$$

2.5.2 Área de um polígono através de determinantes

Nesse próximo subseção mostraremos que as principais técnicas básicas de cálculo de área não são suficientes para terrenos de grande extensão, por exemplo, em fazendas onde o contorno dessas figuras não são regulares e nem convexa. O cálculo de área desse tipo de terreno fica complicado com ferramentas básicas e se faz necessário uma ferramenta mais sofisticada. O uso de determinantes da geometria analítica a partir de levantamentos topográficos. Existem outras técnicas para o cálculo da área de terrenos com grande extensão. Usaremos nesse trabalho a técnica do determinante da geometria analítica.

2.5.2.1 Método de cálculo de área de um polígono a partir de suas coordenadas

Apresenta-se um método de calculo da área de um polígono, usando coordenadas de seus vértices. Como se vê no cálculo da área do quadrilátero de vértices $A_1; A_2; A_3$ e A_4 , $A_k = (x_k; y_k)$, da figura 2.9 abaixo:

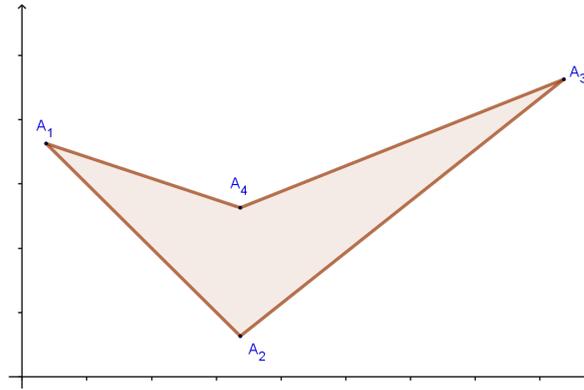


Figura 2.9: Representação do quadrilátero.

podemos dividir o quadrilátero em dois triângulos justapostos por meio de uma diagonal interna.

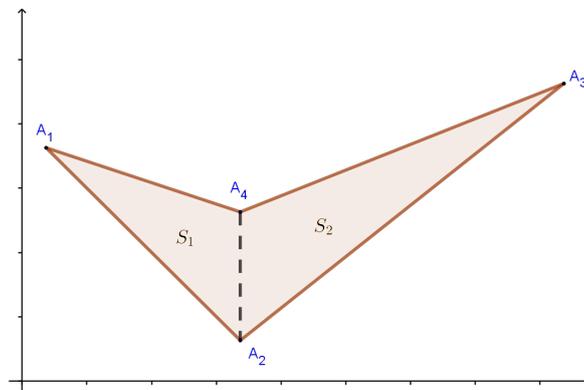


Figura 2.10: Representação da decomposição do quadrilátero em dois triângulos por meio de uma diagonal interna.

Traçou-se a diagonal interna A_2A_4 , decompondo o quadrilátero de área S em dois triângulos de áreas S_1 e S_2 . Portanto a área S do quadrilátero igual à soma das áreas S_1 e S_2 .

Com as coordenadas: $A_1 = (x_1, y_1)$; $A_2 = (x_2, y_2)$; $A_3 = (x_3, y_3)$ e $A_4 = (x_4, y_4)$.

E usando o Teorema de Laplace aplicado na 3ª coluna para S_1 e S_2 vem:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left[(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right]
\end{aligned}$$

e como $-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, resulta

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

e

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left[(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[- \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right]
\end{aligned}$$

e como $-\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$, resulta

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right]$$

Então, segue que:

$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right]$$

Como, $\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$

$$S = \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \cancel{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right] + \frac{1}{2} \left[\cancel{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \right]$$

e colocando $\frac{1}{2}$ em evidência, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (x_3 \cdot y_4 - x_4 \cdot y_3) + (x_4 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_4)]$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_4 + x_4 \cdot y_1) - (x_2 \cdot y_1 + x_3 \cdot y_2 + x_4 \cdot y_3 + x_1 \cdot y_4)]$$

Temos então uma fórmula para calcular a área de um quadrilátero considerando o sentido anti-horário de seus vértices no sistema de eixos.

Em geral na geometria analítica para um polígono de n vértices teremos a demonstração a seguir.

2.5.3 A fórmula da área de Gauss

Teorema 1. *A área S de um polígono de vértices $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ e A_n , obedecendo o sentido anti-horário na sua localização no sistema de eixos, cujas coordenadas são $A_k = (x_k; y_k)$, é dada por:*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

Demonstração: Essa fórmula é válida para um triângulo $A_1A_2A_3$, como se mostrou

na subsecção 2.5.1, que também se aplica a um quadrilátero $A_1A_2A_3A_4$, como se mostrou na subsubsecção 2.5.2.1. Por meio do princípio da indução pode-se provar sua validade para qualquer polígono.

Hipótese de indução - a área de um polígono de n vértices, por meio da fórmula:

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]$$

Dessa maneira, prova-se a sua validade para um polígono de $n + 1$ lados.

Teremos que pensar de dois modos diferentes para demonstrar a validade desta fórmula para um polígono qualquer, o primeiro modo será construído a partir da possibilidade de conectar os vértices A_1 e A_n , de um polígono de $n + 1$ vértices, por meio de uma diagonal interna e decompondo-o em um polígono de n vértices e em um triângulo de vértices A_1 , A_n e A_{n+1} .

O segundo modo será construído a partir da possibilidade de conectar os vértices A_1 e A_n , de um polígono de $n + 1$ vértices, através de uma diagonal externa, transformando este polígono e o triângulo de vértices A_1 , A_n e A_{n+1} como partes da região poligonal de um polígono de n vértices.

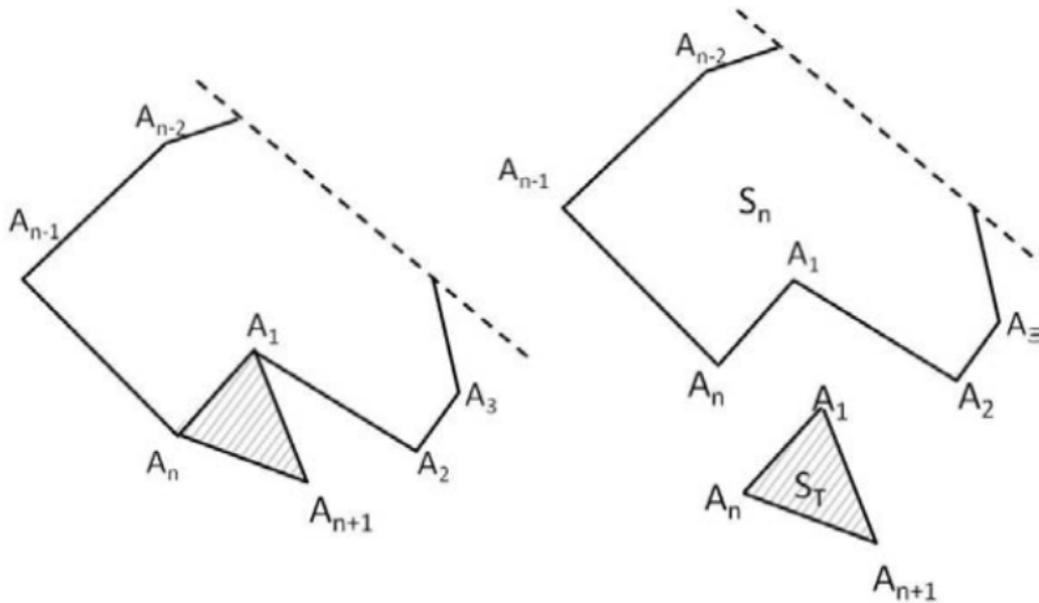


Figura 2.11: Conectando os vértices A_1 e A_n e decompondo a figura em um polígono de n lados e em um triângulo.

Admitindo que S_{n+1} , S_n e S_T sejam, respectivamente as áreas dos polígonos

de $n + 1$ lados, n lados e do triângulo de vértices A_1 , A_n e A_{n+1} , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} - S_T &= S_n \\
 S_{n+1} &= S_n + S_T \\
 S_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Sabendo que $\left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_n & y_n \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right|$, temos:

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{array} \right| + \dots + \left| \begin{array}{cc} x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| \end{array} \right]$$

Que mostra a validade da fórmula para um polígono de $n + 1$ lados, neste caso. Quando se conecta os vértices A_1 e A_n supõe-se que não exista nenhum vértice no interior do triângulo, caso existe outro vértice no interior do triângulo devemos decompor o polígono em dois outros, como é feito no segundo caso do teorema da decomposição de um polígono em triângulos justapostos.

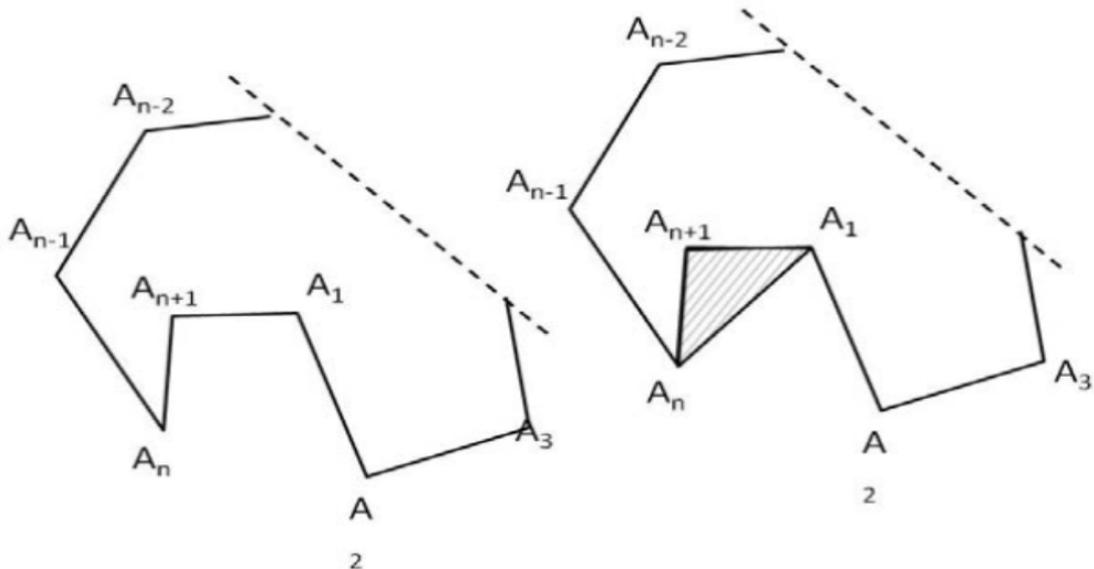


Figura 2.12: Conectando os vértices A_1 e A_n e tornando o polígono de $n + 1$ lados como parte da região poligonal de um polígono de n lados.

Admitindo que S_{n+1} , S_n e S_T sejam, respectivamente as áreas dos polígonos

de $n + 1$ lados, n lados e do triângulo de vértices A_1, A_n e A_{n+1} , podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} + S_T &= S_n \\
 S_{n+1} &= S_n - S_T \\
 S_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} \right| + \cdots + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_n & y_n \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| \end{array} \right] \\
 S_{n+1} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} \right| + \cdots + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

,ou seja,

$$S_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cc} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{array} \right| + \cdots + \left| \begin{array}{cc} x_{n+1} & y_{n+1} \\ x_1 & y_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{array} \right| \end{array} \right]$$

Demonstra-se a validade da fórmula para este caso e consequentemente o teorema proposto. ■

Capítulo 3

Experiências cotidianas (exemplos resolvidos)

O presente capítulo tem por finalidade exemplificar alguns métodos práticos das fórmulas básicas do ensino básico sobre áreas e o cálculo de áreas de polígonos através de seus vértices, que seja de simples abrangência aos alunos do ensino Médio, quem sabe para o ensino fundamental e vestibulandos em geral. Calcularemos a área da UFMT, campus Cuiabá, a partir de suas coordenadas apresentadas após dados fornecido por um professor do departamento de Engenharia Civil da UFMT-Cuiabá, área essa calculada que será obtida através da fórmula de Gauss usando determinantes.

Exemplo 1. A figura 3.1 a seguir expõe, de modo claro, as medidas utilizadas para calcular a área de uma praça, realizada pelos alunos da professora Luana Patrícia Silva Cândido do Estado do Alagoas (Mestre em Matemática (2016) através do programa PROFMAT, pela Universidade Federal de Alagoas).

Os alunos foram divididos em grupo. Um dos componentes do grupo mostrou como foi determinada a escala utilizada para a planta e como calculou a área da praça, desenhando a figura desta, dividida em regiões triangulares denotadas por A, B, C e D , como mostra a ilustração a seguir. A área de cada triângulo foi determinada pela fórmula do seno e depois o aluno expôs a soma das áreas de todos os triângulos.

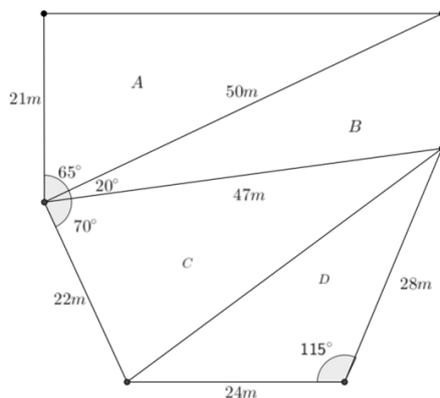


Figura 3.1: Praça representada em formato poligonal. Fonte: Cândido (2016)

Resolução: Utilizando a notação A_A para indicar a área da região A , o aluno expôs:

$$\begin{aligned}
 A_A &= \frac{21 \cdot 50 \cdot \text{sen}(65^\circ)}{2} = 475,65 \\
 A_B &= \frac{50 \cdot 47 \cdot \text{sen}(20^\circ)}{2} = 401,85 \\
 A_C &= \frac{47 \cdot 22 \cdot \text{sen}(70^\circ)}{2} = 485,82 \\
 A_D &= \frac{24 \cdot 28 \cdot \text{sen}(115^\circ)}{2} = 304,51 \\
 A_{Total} &= 475,65 + 401,85 + 485,82 + 304,51 = 1667,83m^2
 \end{aligned}$$

■

Exemplo 2. Ao navegar, um petroleiro choca-se com um arrecife (ou recife é uma formação rochosa submersa logo abaixo da superfície de águas oceânicas, normalmente próxima à costa e em áreas de pouca profundidade), abrindo um buraco nos tanques de armazenagem de óleo. O petroleiro se encontrava a aproximadamente $65km$ da costa. Alguns dias mais tarde, o óleo se espalhou como mostra a figura 3.2 abaixo. A área coberta pela mancha de óleo, no mapa, é de $12,43cm^2$. Usando a escala indicada, a cada 1 cm representa 10 km , calcule a área real da mancha de óleo em km^2 .



Figura 3.2: Detalhe da mancha de óleo espalhada próximo da costa.

Resolução: Temos pela informação do texto que $12,43\text{cm}^2$ é a área no mapa é que a cada 1cm pela escala indicada é 10Km , então, vem:

$$12,43\text{cm}^2 = 12,43(10\text{Km})^2 = 12,43.100\text{km}^2 = 1243\text{km}^2.$$

■

Exemplo 3. Em um folheto de propaganda foi desenhada uma planta de um apartamento medindo $6\text{m} \times 8\text{m}$, na escala $1 : 50$. Porém, como sobrou muito espaço na folha, foi decidido aumentar o desenho da planta, passando para a escala $1 : 40$. Após essa modificação, quanto aumentou, em cm^2 , a área do desenho da planta?

Resolução: Na escala $1 : 50$, 6m e 8m são respectivamente iguais 12cm e 16cm . Assim, a área do desenho na escala $1 : 50$ é de $12 \times 16 = 192\text{cm}^2$.

Na escala $1 : 40$, 6m e 8m são respectivamente iguais 15cm e 20cm . Assim, a área do desenho na escala $1 : 40$ é de $15 \times 20 = 300\text{cm}^2$.

Então a área do desenho aumentou $300 - 192 = 108\text{cm}^2$

■

Exemplo 4. (Vestibular - UFMT/2002) Num acidente no litoral brasileiro, o navio Virgínia II sofreu uma fissura no casco atingindo um dos tanques que continha óleo cru. Considere que a mancha provocada pelo vazamento tem a forma de um disco circular de raio R , em metros, e que o raio cresce em função do tempo t , em minutos, obedecendo á relação $R(t) = 16t + 1$. Sendo A o valor da área ocupada pela mancha após 5 minutos do início do vazamento, calcule $\frac{A}{81\pi}$.

Resolução: Sendo $R(t) = 16t + 1$, em que $t = 5$ vem: $R(5) = 16 \cdot 5 + 1 = 80 + 1 = 81$ e A_o : área do círculo $\Rightarrow A_o = \pi R^2 \Rightarrow A_o = \pi \cdot 81^2$.

Logo a expressão $\frac{A}{81\pi}$ ficará $\frac{\pi \cdot 81^2}{81\pi} = 81$.

■

Exemplo 5. Na figura abaixo, temos a planta do terreno no qual será construído um condomínio. A parte tracejada será onde teremos a construção do prédio e de sua garagem, chamada de área construída. No triângulo ABC , teremos uma área verde, chamada de área não construída.

Sabendo que o quadrilátero $CDEF$ é um retângulo, calcule a área total desse terreno.

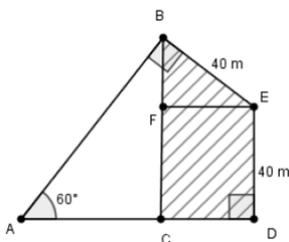
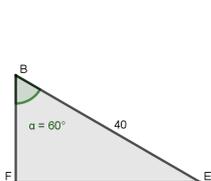
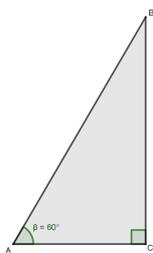


Figura 3.3: Planta do terreno.

Resolução: No $\Delta_{ABC} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$ e no $\Delta_{FEB} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$



$$\text{No } \Delta_{FEB} \begin{cases} \operatorname{sen}(60^\circ) = \frac{FE}{BE} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{FE}{40} \Rightarrow FE = 20\sqrt{3}m \\ \cos(60^\circ) = \frac{BF}{BE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BF}{40} \Rightarrow BF = 20m \end{cases}$$



$$\text{No } \Delta_{ABC} \begin{cases} 40 + BF, BF = 20m \Rightarrow BC = 60m \\ 40m + 20m = 60m \end{cases}$$

Temos que

$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{60}{AC} \Rightarrow AC = \frac{60\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AC = 20\sqrt{3}m$$

$$A_{(1)} = S_{(CDEF)}$$

$$A_{(1)} = FE \cdot DE$$

$$A_{(1)} = 20\sqrt{3} \cdot 40 = 800\sqrt{3}m^2$$

$$A_{(2)} = S_{(BEF)}$$

$$A_{(2)} = \frac{FE \cdot BF}{2}$$

$$A_{(2)} = \frac{20\sqrt{3} \cdot 20}{2} = 200\sqrt{3}m^2$$

$$A_{(3)} = S_{(ABC)}$$

$$A_{(3)} = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

$$A_{(3)} = \frac{20\sqrt{3} \cdot 60}{2} = 600\sqrt{3}m^2$$

Logo

$$A_T = A_{(1)} + A_{(2)} + A_{(3)}$$

$$A_T = 800\sqrt{3} + 200\sqrt{3} + 600\sqrt{3}$$

$$A_T = 1600\sqrt{3}m^2$$

■

Exemplo 6. Duas pessoas receberam como herança um terreno, cuja localização através de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas está indicada na área hachurada da figura a seguir. O terreno deve ser dividido igualmente entre os herdeiros. Sabendo que as unidades de medida dos eixos coordenados estão em km, podemos afirmar que cada herdeiro deve receber um terreno com área de:

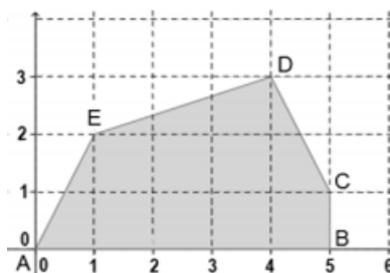
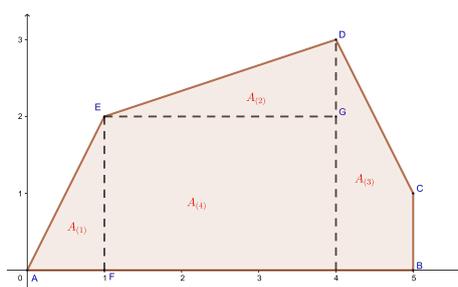


Figura 3.4: Terreno.

Resolução:



$A_{(1)}$: Área de um triângulo

$$A_{(1)} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1km^2$$

$A_{(2)}$: Área de um triângulo

$$A_{(2)} = \frac{(4 - 1) \cdot 1}{2} = \frac{3}{2}km^2$$

$A_{(3)}$: Área de um Trapézio

$$A_{(3)} = \frac{(\text{Base maior} - \text{Base menor}) \cdot \text{altura}}{2}$$

$$A_{(3)} = \frac{(3 + 1) \cdot 1}{2} = 2km^2$$

$A_{(4)}$: Área de um Retângulo

$$A_{(4)} = (4 - 1) \cdot 2 = 6km^2$$

$$A_T = A_{(1)} + A_{(2)} + A_{(3)} + A_{(4)}$$

$$A_T = 1 + \frac{3}{2} + 2 + 6$$

$$A_T = \frac{21}{2} km^2$$

Logo cada herdeiro deve receber $\frac{21}{2} \div 2 = \frac{21}{4} km^2$ de área. ■

Exemplo 7. Foram medidas com uma trena as seguintes distâncias na poligonal de um terreno representado pela figura abaixo. Calcule a área desse terreno usando a fórmula de Herão. $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Dados:

$$AB = 34m, BC = 45m, CD = 47m, DE = 55m, EA = 52m, BE = 50m, CE = 56m$$

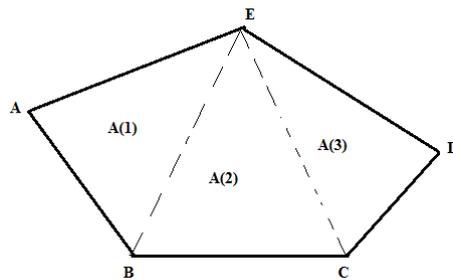


Figura 3.5: Polígono irregular.

Resolução:

Primeiro vamos usar a técnica do triangulamento do terreno e, $S = A_1 + A_2 + A_3$, usando o método de Heron.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ onde } p \text{ é o semiperímetro } p = \frac{a+b+c}{2}$$

então:

$$p = \frac{\overline{AB} + \overline{BE} + \overline{AE}}{2}$$

$$p = \frac{34 + 50 + 52}{2}$$

$$p = 68$$

$$A_1 = \sqrt{68(68-34)(68-50)(68-52)}$$

$$A_1 = \sqrt{68 \cdot 34 \cdot 18 \cdot 16}$$

$$A_1 = \sqrt{665856}$$

$$A_1 = 816m^2$$

$$p = \frac{\overline{BC} + \overline{BE} + \overline{CE}}{2}$$

$$p = \frac{45 + 50 + 56}{2}$$

$$p = 75,5$$

$$A_2 = \sqrt{75,5(75,5 - 45)(75,5 - 50)(75,5 - 56)}$$

$$A_2 = \sqrt{75,5 \cdot 30,5 \cdot 25,5 \cdot 19,5}$$

$$A_2 = \sqrt{1145042,4375}$$

$$A_2 = 1070,06m^2$$

$$p = \frac{\overline{CD} + \overline{CE} + \overline{DE}}{2}$$

$$p = \frac{47 + 56 + 55}{2}$$

$$p = 79$$

$$A_3 = \sqrt{79(79 - 47)(79 - 56)(79 - 55)}$$

$$A_3 = \sqrt{79 \cdot 32 \cdot 23 \cdot 24}$$

$$A_3 = \sqrt{1395456}$$

$$A_3 = 1181,29m^2$$

Logo a área do terreno é:

$$S = A_1 + A_2 + A_3$$

$$S = 816 + 1070,06 + 1181,29$$

$$S = 3067,35m^2$$



Exemplo 8. Foi realizado os levantamentos topográficos da figura poligonal representada abaixo. Calcule a área dessa figura irregular usando as coordenadas dos pontos indicados.

Dados:

$A(0; 20), B(15; 0), C(30; 2), D(45; 15), E(36; 40), F(18; 39)$

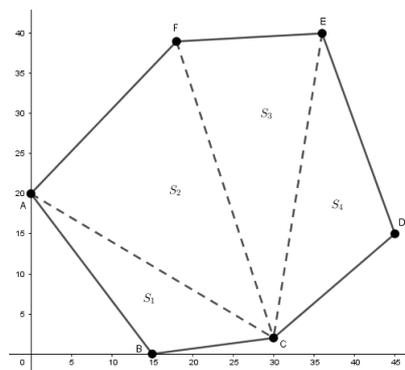


Figura 3.6: Polígono irregular.

Resolução:

Para a figura apresentada, triangulando conforme o esquema apresentado, vem:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

Os pontos:

$$A(X_A; Y_A) \quad B(X_B; Y_B) \quad C(X_C; Y_C) \quad D(X_D; Y_D) \quad E(X_E; Y_E) \quad F(X_F; Y_F)$$

$$A(0; 20) \quad B(15; 0) \quad C(30; 2) \quad D(45; 15) \quad E(36; 40) \quad F(18; 39)$$

A partir das coordenadas, podemos calcular a sua área usando o teorema de Gauss em S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , então:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot [(X_A Y_B + X_B Y_C + X_C Y_A) - (Y_A X_B + Y_B X_C + Y_C X_A)]$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot [(0 \cdot 0 + 15 \cdot 2 + 30 \cdot 20) - (20 \cdot 15 + 0 \cdot 30 + 2 \cdot 0)]$$

$$S_1 = \frac{330}{2}$$

$$S_1 = 165$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot [(X_A Y_C + X_C Y_F + X_F Y_A) - (Y_A X_C + Y_C X_F + Y_F X_A)]$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot [(0 \cdot 2 + 30 \cdot 39 + 18 \cdot 20) - (20 \cdot 30 + 2 \cdot 18 + 39 \cdot 0)]$$

$$S_2 = \frac{894}{2}$$

$$S_2 = 447$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot [(X_F Y_C + X_C Y_E + X_E Y_F) - (Y_F X_C + Y_C X_E + Y_E X_F)]$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot [(18 \cdot 2 + 30 \cdot 40 + 36 \cdot 39) - (39 \cdot 30 + 2 \cdot 36 + 40 \cdot 18)]$$

$$S_3 = \frac{678}{2}$$

$$S_3 = 339$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot [(X_E Y_C + X_C Y_D + X_D Y_E) - (Y_E X_C + Y_C X_D + Y_D X_E)]$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \cdot [(36 \cdot 2 + 30 \cdot 15 + 45 \cdot 40) - (40 \cdot 30 + 2 \cdot 45 + 15 \cdot 36)]$$

$$S_4 = \frac{492}{2}$$

$$S_4 = 246$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

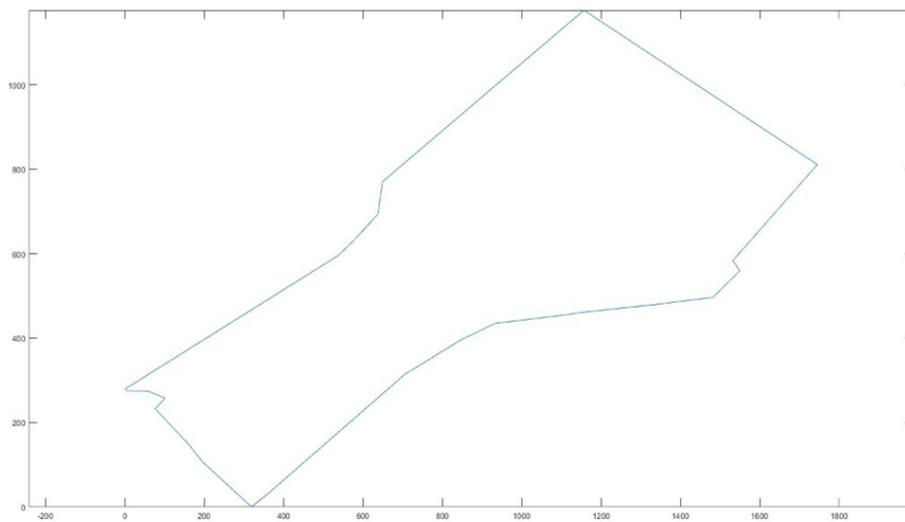
$$S = 165 + 447 + 339 + 246$$

$$S = 1197m^2$$



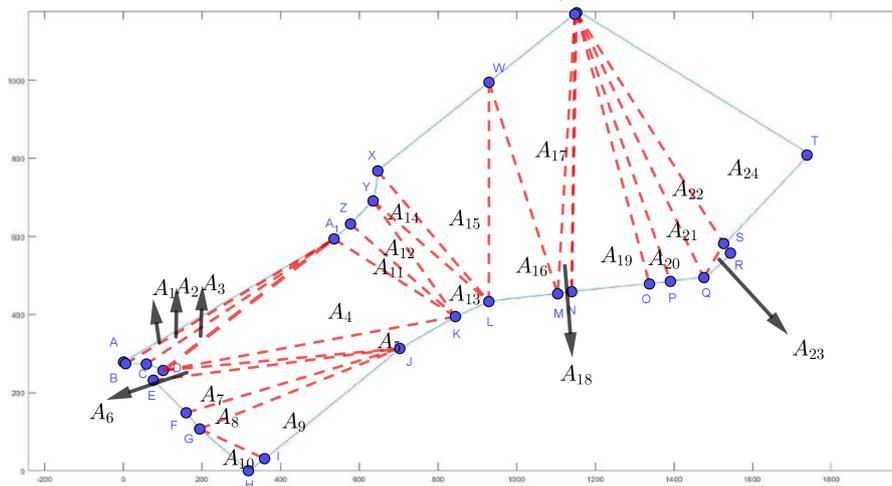
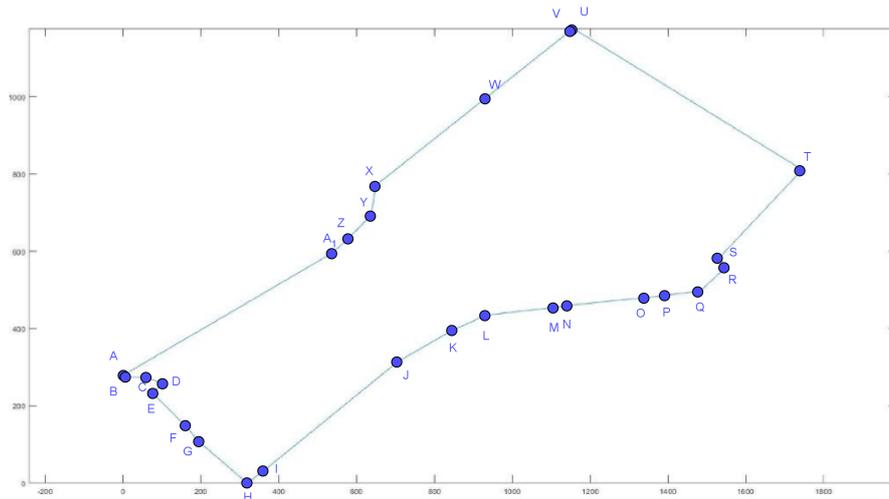
Exemplo 9. (Área do campus do UFMT) Nessa atividade, para o cálculo da área da UFMT (Campus Cuiabá), será usada a técnica da geometria analítica conhecendo-se as coordenadas dos pontos de uma figura.

As informações dadas estão em coordenadas dos vértices do polígono irregular. Para determinar a área desse polígono irregular, é muito útil usar. Usando a mesma técnica do Exemplo 8



Quadro 3.1: Pontos de Coordenada. Fonte: Departamento de Engenharia Civil da UFMT- Cuiabá.

Pontos	x	y
A	0	279,161
B	5,154	274,88
C	58,174	273,906
D	101,001	257,55
E	75,728	232,465
F	159,784	148,792
G	194,443	107,313
H	318,667	0
I	359,902	31,013
J	705,306	314,046
K	847,244	395,941
L	932,511	434,516
M	1108,361	454,412
N	1143,984	459,87
O	1342,599	479,781
P	1396,057	486,389
Q	1481,576	496,057
R	1549,325	558,885
S	1531,955	583,524
T	1744,744	810,81
U	1156,635	1176,279
V	1151,97	1172,668
W	932,913	997,64
X	648,834	770,066
Y	637,09	692,969
Z	579,34	633,868
A'	537,33	595,466



Resolução:

Usando a fórmula de Gauss Para o cálculo da área de coordenadas dos vértices indicados, temos:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{n-1} + A_n$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot [(X_A Y_B + X_B Y_C + \dots + X_Z Y_{A'} + X_{A'} Y_A) - (Y_A X_B + Y_B X_C + \dots + Y_Z X_{A'} + Y_{A'} X_A)]$$

Então:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left[\begin{array}{l} (0 \cdot 274,88 + 5,154 \cdot 273,906 + \dots + 579,34 \cdot 595,466 + 537,33 \cdot 279,161) \\ -(279,161 \cdot 5,154 + 274,88 \cdot 101,001 + \dots + 633,868 \cdot 537,33 + 595466 \cdot 0) \end{array} \right]$$

$$S = 760302,53m^2$$



Considerações finais

O presente estudo abordou a medida da grandeza área como uma contribuição da geometria na topografia sendo um parâmetro para o estudo da matemática, mais especificamente a geometria e trigonometria nos cálculos de área de figuras regulares e não regulares a partir de suas coordenadas usando o método do determinante da geometria analítica. Os modos produtivos das civilizações deixaram evidente a necessidade do homem em criar estruturas, estradas, edificações, assim, desde a Antiguidade, a geometria, por meio da agrimensura e topografia vêm sendo usada nas atividades humanas, até mesmo nas navegações.

Vimos que a evolução tecnológica tornou os instrumentos e equipamentos topográficos mais exatos. Assim, dos antigos esticadores de corda (antigo Egito), hoje existem teodolitos eletrônicos e estações totais (século XXI). Para modificar os espaços, alguns instrumentos e métodos foram elaborados e aperfeiçoados para serem mais eficazes para suprir as demandas das sociedades. O conhecimento usado na confecção de instrumentos, máquinas, equipamentos é chamado de tecnologia, o aperfeiçoamento das mesmas permitiu aos homens ampliar o seu domínio sobre a natureza, explorando-a intensamente. Embora, alguns instrumentos primitivos ainda continuem em uso, como nível e prumo, existem softwares que realizam milhares de cálculos em questão instantânea.

Enquanto ciência sabe-se que a topografia é aplicada em diversas áreas das atividades humanas, como agrárias e engenharia, nas quais também fica evidente a relevância dos conceitos matemáticos.

Acreditamos que uma maneira dos professores tornarem o ensino da geometria e trigonometria mais interessante aos alunos do ensino médio, é por evidenciar a aplicabilidade das mesmas no cotidiano, resolvendo problemas, observando as for-

mas, calculando áreas e ângulos das coisas (árvores, prédios, rua, rio).

Em síntese, a área uma ferramenta da geometria, tem sido aplicada continuamente, e vimos neste estudo sua aplicação prática por meio da agrimensura em especial na topografia e se destacou como uma relevância para os conceitos matemáticos. A análise histórica evidencia a aplicabilidade da matemática, da geometria (topografia e agrimensura) aplicadas em diversas áreas das ciências e atividades humanas, desde as civilizações primitivas até os dias atuais. Enfim, a matemática é de extrema relevância, particularmente para aqueles que pretendem se tornar agrimensores.

Referências Bibliográficas

- Araújo, V. M. (2009). Práticas recomendadas para a gestão mais sustentável de canteiros de obras. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP.
- Borges, A. C. (2013). *Topografia*, volume 2. Blucher, São Paulo/SP.
- Braden, B. (1986). The surveyor's area formula. *The College Mathematics Journal*, 17:326–337.
- Brasil - MEC (1998). Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio : ciências da natureza e suas tecnologias. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> Acesso 28 de agosto de 2020.
- Cajori, F. (2007). *Uma história da matemática*. Moderna, Rio de Janeiro/RJ.
- Cândido, L. (2016). Áreas e distâncias na agrimensura: uma proposta didática de modelagem matemática para o ensino fundamental e médio. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Alagoas, Maceió/AL.
- Corrêa, L. R. (2009). Sustentabilidade na construção civil. Monografia de Especialização, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte/MG.
- Costa, M. J. M. (2014). Rotas aéreas e a geometria do globo terrestre. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro/RJ.
- Dani, S. (2005). Pythagorean triples in the sulvasutras. *Currente science*, 85:219–224.
- Freire, N. (2019). Agrimensura e topografia. qual a diferença? Disponível em <https://www.geosensori.com.br/2019/05/02/agrimensura-e-topografia-qual-a-diferenca/> Acesso 29 de ago de 2020.

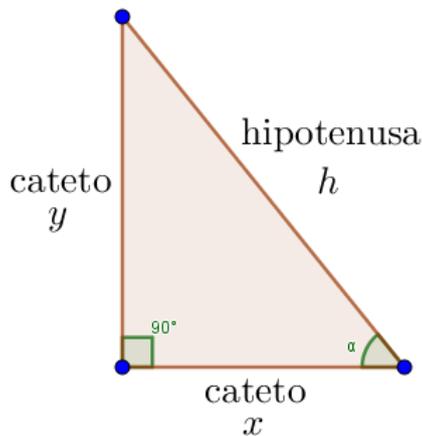
- Hayashi, T. (2003). Indian mathematics. *The Blackwell Companion to Hinduism*, página 360.
- Lisboa Filho, J. e Iochpe, C. (1996). Introdução a sistemas de informações geográficas com ênfase em banco de dados. In *XV JAI - Jornada de Atualização em Informática, XVI Congresso da SBC, Ago 4-9*, volume 15, Recife/PE.
- Miranda, M. S. e Borges, R. P. (2020). *Poliedro: sistema de ensino*. Editora Poliedro, São José dos Campos/SP.
- Mol, R. S. (2013). *Introdução à história da matemática*. CAED/UFMG, Belo Horizonte/MG.
- Pastana, C. E. T. (2010). Topografia I e II: Anotações de aula. Universidade de Marília.
- Rocha, T. (2011). Quais são os tipos de geometria? Disponível em <http://geometriaexpert.blogspot.com/p/quais-sao-os-tipos-de-geometria.html> Acesso 29 de ago de 2020.
- Roque, T. (2012). *História da matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Editora Zahar, Rio de Janeiro/RJ.
- Rosa, R. (2013). Introdução ao geoprocessamento. Disponível em http://professor.ufabc.edu.br/~flavia.feitosa/cursos/geo2016/AULA5-ELEMENTOSMAPA/Apostila_Geop_rrosa.pdf Acesso em: 20/06/2020.
- Santos, L. A. (2000). Agrimensor ou topógrafo? Disponível em <https://mundogeo.com/2000/06/01/agrimensor-ou-topografo/> Acesso em 20 de jun de 2020.
- Silva, J. S. e Teixeira Junior, J. A. D. (2018). A engenharia cartográfica e de agrimensura no Brasil no ano de 2018 e sua relação com cadastro técnico multifinalitário. In *COBRAC 2018*, Florianópolis/SC.
- Silva, M. D. L. (2014). Geometria euclidiana: ensino e aplicações. Dissertação de Mestrado, UFMS, Campo Grande/MS.
- Soares, J. B. (2003). *Dicionário de matemática*. Editora Hemus, Curitiba/PR.

Themudo, J. D. G. T. (2018). Teorema de Herão. Disponível em: <https://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=547> Acesso em 01 de fev de 2020.

Wikipédia (2020). Triângulo hiperbólico. Disponível em https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_triangle Acesso em 20 de jun de 2020.

Apêndice: Material adicional

A.1 Trigonometria no triângulo retângulo



1. Seno de α : É o quociente do comprimento do cateto oposto ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{h}$$

2. Cosseno de α : É o quociente do comprimento do cateto adjacente ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triângulo, ou seja,

$$\text{cos}(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{h}$$

3. Tangente de α : É o quociente dos comprimentos do cateto oposto pelo cateto adjacente, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \\ &= \frac{y/h}{x/h} \\ &= \frac{y}{h} \cdot \frac{h}{x} \\ &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

4. Relação fundamental da trigonometria:

$$x^2 + y^2 = h^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$$

5. Ângulos notáveis:

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$