



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



# **FUNÇÕES PERIÓDICAS E QUASE-PERIÓDICAS**

Antonio Eduardo Sena de Lucena

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira

Campina Grande - PB  
Setembro/2020

L935f      Lucena, Antonio Eduardo Sena de.  
              Funções periódicas e quase-periódicas / Antonio Eduardo Sena de  
              Lucena. - Campina Grande, 2020.  
              47 f. : il. color.

              Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de  
Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2020.  
"Orientação: Prof. Dr. Denilson da Silva Pereira.  
Referências.

              1. Funções - Matemática. 2. Periodicidade - Matemática. 3. Quase-  
Periodicidade - Matemática. I. Pereira, Denilson da Silva. II. Título.

CDU 517(43)



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG**



## **FUNÇÕES PERIÓDICAS E QUASE-PERIÓDICAS**

**por**

**Antonio Eduardo Sena de Lucena**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

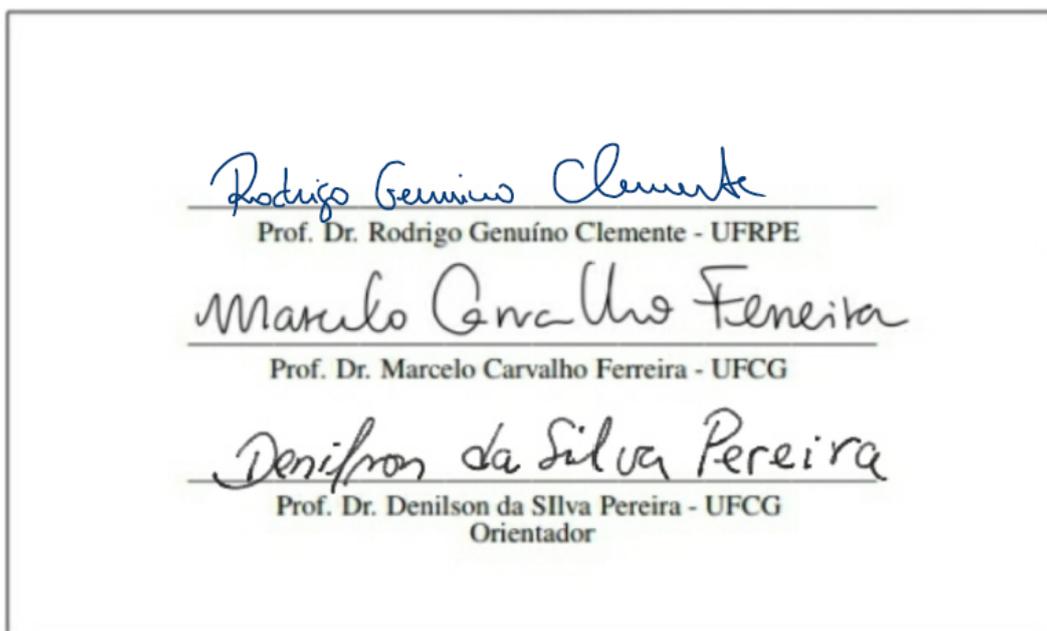
# FUNÇÕES PERIÓDICAS E QUASE-PERIÓDICAS

por

**Antonio Eduardo Sena de Lucena**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



**Universidade Federal de Campina Grande**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
**Unidade Acadêmica de Matemática**  
**Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

**Outubro/2020**

# Dedicatória

A minha família, meus amigos e  
meus professores.

# Agradecimentos

Ao meu Deus.

Ao Professor Denilson pela paciência, cobranças e apoio na orientação dessa dissertação e na disciplina de Números e Funções Reais.

Aos Professores Romildo, Marcelo, Jaime, Alexsandro, Luiz Antônio e Deise pelas disciplinas.

A minha família, minha mãe Maria Ita e meu pai Antônio, minhas irmãs Maria Eugênia, Maria Adélia, Izabel e Raquel, e ao meu irmão Romário.

Aos meus amigos da Escola Estadual José Severino de Araújo e da Escola Municipal São Sebastião que sempre apoiaram e incentivaram, de modo particular agradeço a Fagner.

A coordenação do programa que sempre se fez disponível quando preciso.

Meu muito obrigado a todos os colegas de turma que me ajudaram demais, Matheus, Bruno, Marília, Renato, Lucielma, Airton, Wagner, Teófilo, Daniel, Sandra, Hydayane, Geraldo, Rejane, e em especial a Márcio que facilitou demais as minhas viagens e sempre ajudava no que fosse preciso.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

# Resumo

Neste trabalho iniciaremos com o conceito de funções periódicas, assunto que se encontra já na educação básica por meio das funções trigonométricas. Demonstraremos suas principais propriedades e resolveremos alguns problemas relacionados. Em particular, mostraremos que nem sempre a soma de duas funções periódicas é uma função periódica e então entraremos no conceito de funções quase-periódicas onde também demonstraremos suas propriedades mostrando a necessidade de seu estudo por meio de uma aplicação que aparece naturalmente em sistemas massa mola com ou sem amortecimento.

**Palavras Chaves:** Funções. Periodicidade. Quase-periodicidade.

# Abstract

In this work we will start with the concept of periodic functions, a subject that is already found in high school through the study of trigonometric functions. We will demonstrate its main properties and solve some related problems. In particular, we will show that the sum of two periodic functions is not necessarily a periodic function and then we will introduce the concept of almost periodic functions where we will also demonstrate their properties, showing the need for their study through applications that naturally appear in spring-mass systems with or without damping.

**Keywords:** Functions. Periodicity. Almost periodicity.

# Lista de Figuras

1.1	Harald Bohr . . . . .	3
2.1	Gráfico de $f(x) = \text{sen}2x$ . . . . .	6
2.2	Gráfico de $f(x) = \{x\}$ . . . . .	7
2.3	Gráfico de $f(x) = \cos(\pi x)$ . . . . .	7
2.4	Ciclo trigonométrico . . . . .	14
2.5	Sistema massa mola. . . . .	17
2.6	Esboço do gráfico de $f(x) = \cos(\pi x) + \text{sen}(\pi x)$ . . . . .	18
3.1	Gráfico da função $f$ . . . . .	22
3.2	Gráfico da função $g$ . . . . .	22
3.3	Gráfico de $f(x) = \frac{\cos t}{2 + \cos(\sqrt{2}t)}$ . . . . .	24
3.4	Gráfico de $f(x) = \text{sen}(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{3}x)$ . . . . .	31
3.5	Sistema massa mola . . . . .	33
3.6	Forças. . . . .	34
3.7	O gráfico de $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$ no intervalo $[0, \tau]$ . . . . .	36
3.8	O gráfico de $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$ no intervalo $[\tau, 2\tau]$ . . . . .	37
3.9	O gráfico de $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$ no intervalo $[\tau, 3\tau]$ . . . . .	37

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Objetivos . . . . .	5
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	5
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	5
1.2	Organização . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Funções periódicas</b>	<b>6</b>
2.1	Definição e exemplos . . . . .	6
2.2	Propriedades da periodicidade . . . . .	7
2.3	As funções seno e cosseno . . . . .	13
2.4	Aplicação . . . . .	15
2.5	O gráfico de uma função periódica . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Funções Quase-periódicas</b>	<b>19</b>
3.1	Quase periodicidade . . . . .	19
3.2	Definição e propriedades das Funções Quase-periódicas . . . . .	21
3.3	Caracterização de funções quase periódicas . . . . .	29
3.4	Aplicação . . . . .	33
3.5	Gráfico de uma função quase periódica . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Conclusões</b>	<b>38</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>39</b>
<b>A</b>	<b>Primeiro Apêndice</b>	<b>41</b>
A.1	Resultados básicos . . . . .	41
A.2	Guia de construção do esboço do gráfico de uma função . . . . .	43
A.3	Algumas noções topológicas . . . . .	45

# Capítulo 1

## Introdução

A definição de *função quase-periódica* foi criada inicialmente pelo matemático dinamarquês Harald Bohr (Figura 1.1), em [6] e [7]. O conceito de funções quase-periódicas é uma generalização do conceito de *funções periódicas*, assunto que está incluindo no currículo da educação básica, no ensino médio, quando os alunos estudam funções trigonométricas.

Harald Bohr era irmão mais novo do físico Niels Bohr. Ele estudou na Universidade de Copenhague, onde obteve o doutorado em 1910. Sua tese foi intitulada *Contribution to the Theory of the Dirichlet Series* e tratava sobre Séries de Dirichlet. De 1915 a 1930 ele foi professor de matemática na Politécnica de Copenhague e de 1930 até a sua morte ensinou na Universidade de Copenhague. Bohr se tornou conhecido internacionalmente quando criou a teoria de funções quase periódicas e à medida que ajudou a vários matemáticos a deixarem a Alemanha no momento em que os nazistas chegaram ao poder em 1933. Ele teve contato e colaborou com muitos matemáticos estrangeiros, como G. H. Hardy e Edmund Landau, com este último provou um teorema sobre a distribuição dos zeros da função Zeta de Riemann que foi publicado no artigo [10].

Figura 1.1: Harald Bohr



Fonte: Referência [13].

A quase-periodicidade de funções é uma generalização da periodicidade de funções. Para ilustrar isso, apresentamos um exemplo. A função

$$f(x) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(3\pi x)$$

é uma função periódica pois,

$$f(x+2) = f(x),$$

para todo  $x$  real. Agora, se tomarmos a função

$$f(x) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi\sqrt{2}x)$$

não existe um número  $\tau$  real no qual a equação

$$f(x+\tau) = f(x)$$

seja satisfeita para todo  $x$ . Mas, dado um  $\varepsilon > 0$  arbitrário, podemos encontrar um número real  $\tau = \tau(\varepsilon)$ , o qual denominaremos por  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ , de modo que a diferença  $f(x+\tau) - f(x)$  seja uniformemente limitada por  $\varepsilon$ , isto é,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x+\tau) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Para cada um desses  $\tau$ , temos que

$$f(x+\tau) = \text{sen}(\pi(x+\tau)) + \text{sen}(\pi\sqrt{2}(x+\tau))$$

existe um  $\tau \in \mathbb{Z}$ , que usando as propriedades de adição de arcos chegamos a

$$f(x+\tau) = \text{sen}(\pi x) + \text{sen}(\pi\sqrt{2}x) + \theta\varepsilon$$

com  $|\theta| \leq 1$ . Ou seja,

$$f(x+\tau) = f(x) + \theta\varepsilon.$$

Para mais detalhes veja a seção 3.1. Na verdade dado um  $\varepsilon > 0$  existem vários números  $\tau = \tau(\varepsilon)$  distribuídos por toda a reta, de modo que um intervalo de comprimento suficientemente grande sempre contém um desses números, ou seja, o conjunto dos  $\varepsilon$ -quase períodos é relativamente denso em  $\mathbb{R}$ .

As funções quase-periódicas aparecem de forma natural em problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais, sistemas dinâmicos e equações em espaços de Banach (para mais detalhes consultar [8]). Daremos uma aplicação simples na seção 3.4, que trata de um sistema massa-mola modelado pela equação diferencial,

$$ms''(t) + \lambda s'(t) + ks(t) = F_0 \cos(\omega t),$$

a qual tem como soluções funções periódicas ou quase-periódicas.

Neste trabalho, começamos com o desenvolvimento da teoria elementar de funções periódicas, com as demonstrações de algumas de suas propriedades, apresentamos também uma aplicação e mostramos como construir o gráfico de uma função periódica. Em seguida, estudamos um pouco de topologia e com base na referência [4], apresentamos um pouco da teoria elementar de funções quase-periódicas, onde também fazemos uma aplicação.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Pretendemos com esse trabalho estudar as funções periódicas e quase-periódicas apresentando e demonstrando algumas propriedades, buscando ter ferramentas para caracterizar essas funções e resolvendo problemas que possam ser modelados por essas funções.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Apresentar a definição e propriedades das funções periódicas.
- Estabelecer condições suficientes para que a soma de funções periódicas seja periódica.
- Expor situações onde a soma de funções periódicas não é periódica e sim quase-periódica, evidenciando assim necessidade de seu estudo.
- Demonstrar propriedades das funções quase-periódicas.
- Mostrar aplicações de funções periódicas e quase-periódicas.

## **1.2 Organização**

Esse dissertação será dividido em 4 capítulos:

Capítulo 1: Nesse capítulo justificaremos o estudo das funções periódicas e a partir disso mostrar a necessidade das funções quase-periódicas.

Capítulo 2: Nesse capítulo são estudadas as funções periódicas e suas propriedades com a exposição de alguns problemas no final.

Capítulo 3: Nesse capítulo são estudadas as funções quase-periódicas e suas propriedades.

Capítulo 4: Apresentaremos nesse capítulo as considerações finais mostrando os resultados alcançados e as possibilidades de aplicações dos conceitos discutidos no trabalho.

Apêndice: inclui definições, proposições e teoremas necessários às demonstrações do trabalho.

Ao final listamos as referências bibliográficas que foram elaboração da presente dissertação.

# Capítulo 2

## Funções periódicas

Neste capítulo iremos demonstrar algumas propriedades das funções periódicas, as quais são casos particulares de funções quase-periódicas. Essas funções são estudadas já no ensino médio e tem inúmeras aplicações, dentre elas vibrações, sistemas massa-mola e movimentos planetários. Algumas aplicações podem ser encontradas em [5].

### 2.1 Definição e exemplos

**Definição 2.1** Dizemos que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **periódica**, se existe um real não nulo  $P$  tal que

$$f(x + P) = f(x)$$

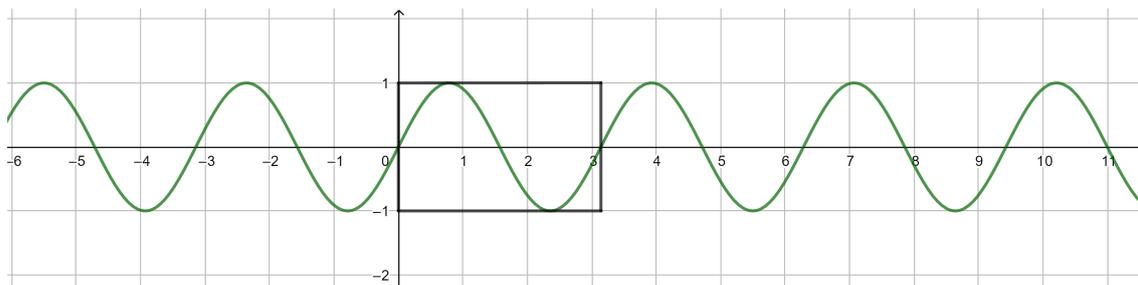
para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O menor número positivo  $P$  que satisfaz a relação acima é denominado **período fundamental** da função  $f$ .

**Exemplo 1** A função  $f(x) = \text{sen}2x$  é uma função periódica pois

$$f(x + \pi) = f(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Seu período fundamental é  $\pi$ .

Figura 2.1: Gráfico de  $f(x) = \text{sen}2x$ .



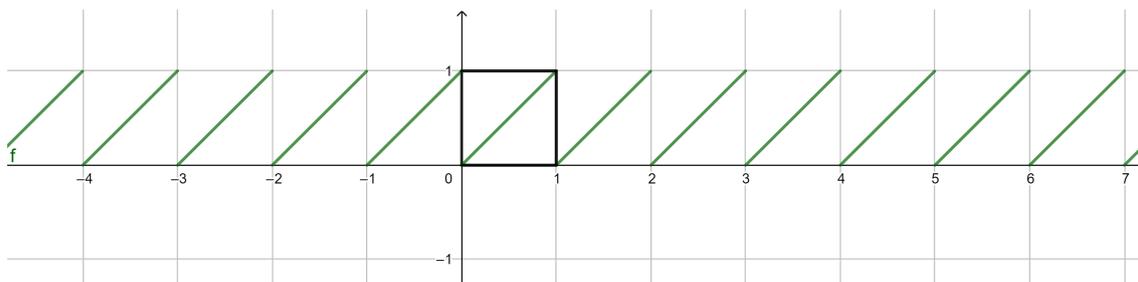
Fonte: Autor.

**Exemplo 2** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  denominada **função parte decimal** dada por  $f(x) = \{x\}$ , onde  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  e  $\lfloor x \rfloor$  denota a parte inteira de  $x$ , é uma função periódica, pois,

$$f(x+1) = f(x)$$

para todo  $x$  real, 1 é o período fundamental de  $f$ . Veja o gráfico de  $f$  na Figura 2.2.

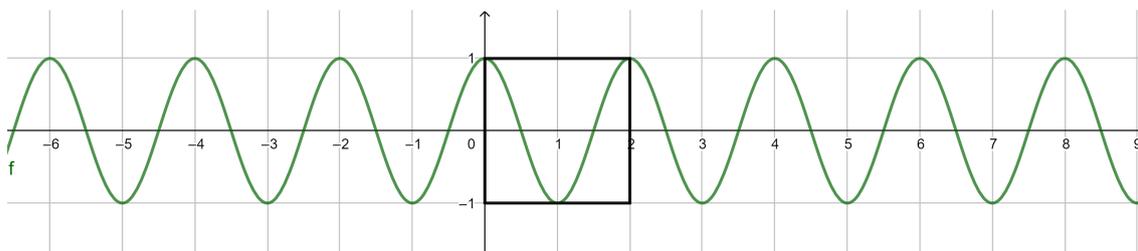
Figura 2.2: Gráfico de  $f(x) = \{x\}$ .



Fonte: Autor.

**Exemplo 3** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $f(x) = \cos(\pi x)$ . A função  $f$  é periódica de período fundamental 2. Observe o gráfico de  $f$  na figura 2.3.

Figura 2.3: Gráfico de  $f(x) = \cos(\pi x)$ .



Fonte: Autor.

## 2.2 Propriedades da periodicidade

**Lema 2.1** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica com período  $P > 0$  e  $k$  um inteiro não nulo, então  $f(x+kP) = f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Primeiramente, mostraremos para  $k \in \mathbb{N}$ . Para  $k = 1$  o lema é válido da definição de função periódica. Suponha válido para  $k = n$ , é sabido que

$$f(x + (n+1)P) = f((x+nP) + P), \forall x \in \mathbb{R},$$

da definição,

$$f(x + nP + P) = f(x + nP).$$

Da hipótese de indução,

$$f(x + nP) = f(x),$$

e pelo Princípio de Indução concluímos que  $f(x + nP) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ . Para mostrar que o lema é válido para um inteiro negativo basta escrever,

$$f(x + P) = f((x - P) + 2P),$$

e pelo que já demonstramos,

$$f(x + P) = f(x - P).$$

Daí deduzimos que  $-P$  também é período de  $f$ , e então para  $k < 0$  basta escrever,

$$f(x + kP) = f(x + (-k)(-P)),$$

como  $-k$  é natural a propriedade é válida.

**Lema 2.2** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período fundamental  $P$ . Se  $P' \in \mathbb{R}^*$  é tal que  $f(x + P') = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , então  $P' = nP$  para algum  $n \in \mathbb{Z}^*$ .*

**Demonstração.** Sendo  $P > 0$  o período fundamental de  $f$ , podemos dividir a reta real em intervalos da forma  $((n - 1)P, nP) \in \mathbb{Z}$ . Vamos supor que  $P' \neq nP, \forall n \in \mathbb{Z}^*$ . Assim,  $P' \in ((n - 1)P, nP)$  para algum  $n \in \mathbb{Z}^*$ . Com isso, podemos escrever  $P' = (n - 1)P + a$  com  $0 < a < P$ . O que implica em

$$f(x) = f(x + P') = f(x + (n - 1)P + a) = f(x + a)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O que nos diz que  $a$  é um período de  $f$ , gerando uma contradição pois  $P$  é o período fundamental de  $f$ . Logo, se  $P'$  é tal que  $f(x + P') = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , então  $P' = nP$  para algum  $n \in \mathbb{Z}^*$ .

**Proposição 2.3** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período fundamental  $P$  e seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também periódica de mesmo período fundamental. Se  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in [0, P)$ , então  $f = g$ .*

**Demonstração.** Dado  $x \in \mathbb{R}$ , devemos mostrar que  $f(x) = g(x)$ . Podemos supor que  $x \notin [0, P)$ . Então, existe  $n \in \mathbb{Z}^*$  tal que

$$x = x' + nP, \text{ onde } x' \in [0, P).$$

Tem-se então

$$f(x) = f(x' + nP) = f(x') = g(x') = g(x' + nP) = g(x),$$

como queríamos demonstrar.

**Proposição 2.4** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período fundamental  $P$ , e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(x) = f(ax)$  onde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , então  $g$  é periódica de período fundamental  $\frac{P}{|a|}$ .*

**Demonstração.** Da definição de  $g$ , temos

$$g\left(x + \frac{P}{|a|}\right) = f\left(a\left(x + \frac{P}{|a|}\right)\right), \forall x \in \mathbb{R},$$

e usando a distributividade e as propriedades de módulo,

$$f\left(a\left(x + \frac{P}{|a|}\right)\right) = f(ax \pm P), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como  $f$  é periódica,

$$f(ax \pm P) = f(ax), \forall x \in \mathbb{R}.$$

O que implica em

$$g\left(x + \frac{P}{|a|}\right) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Agora devemos demonstrar que  $\frac{P}{|a|}$  é o período fundamental de  $g$ . Seja  $P'$  um período de  $g$ . Da definição de  $g$ ,

$$g(x + P') = f(ax + aP'), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como  $g$  é periódica de período  $P'$ , obtemos

$$g(x) = f(ax + aP'), \forall x \in \mathbb{R}.$$

E da definição de  $g$  transformamos a igualdade anterior em

$$f(ax) = f(ax + aP'), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em particular,

$$f(x) = f(x + aP').$$

Pelos lemas anteriores,

$$aP' = nP, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}^*,$$

com isso,

$$P' = \frac{nP}{a}, \text{ para algum } n \in \mathbb{Z}^*.$$

Como queremos o menor número real  $P'$  positivo de modo que  $f(x + P') = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , devemos tomar  $n = 1$  ou  $n = -1$  a depender do sinal de  $a$ , portanto, o período de  $g$  é  $\frac{P}{|a|}$ .

**Proposição 2.5** *Sejam  $a$  e  $b$  reais não ambos nulos, e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função dada por*

$$f(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x)$$

*onde  $\lambda$  é um real não nulo. Temos que  $f$  é periódica e seu período fundamental é  $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ .*

**Demonstração.** Como as funções seno e cosseno são periódicas de período fundamental  $2\pi$  então a combinação linear delas duas também será, e terá o mesmo período fundamental. Pela proposição anterior  $f$  é periódica de período fundamental  $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ .

**Observação 2.1** *Escrevendo,*

$$f(x) = a \cos(\lambda x) + b \sin(\lambda x) = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\lambda x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\lambda x) \right)$$

observemos que

$$\left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$$

Com isso, o ponto  $P = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$  pertence ao ciclo trigonométrico e, daí, existe um real  $\alpha \in [0, 2\pi]$  tal que  $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  e  $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Logo, substituindo, obtemos

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \alpha \cos \lambda x + \sin \alpha \sin \lambda x),$$

usando a fórmula de adição de arcos, temos

$$f(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\lambda x - \alpha).$$

Agora vamos mostrar que a imagem de  $f$  é o intervalo  $[-c, c]$  com  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Veja que  $-1 \leq \cos(\lambda x - \alpha) \leq 1$ , daí, multiplicando a desigualdade anterior por  $\sqrt{a^2 + b^2}$  temos que  $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\lambda x - \alpha) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ , ou seja,  $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  para todo  $x$ . Isso mostra que  $\text{Im} f \subset [-c, c]$ .

Tome agora  $y \in [-c, c]$ , que significa

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

ou equivalentemente,

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \cos 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \cos 0,$$

ou seja,

$$-f\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \leq y \leq f\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right).$$

Como a função  $f$  é uma função ímpar

$$f\left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right) \leq y \leq f\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right).$$

Como  $f$  é contínua, pelo Teorema do Valor intermediário (veja o Teorema A.8), existe  $x_0 \in \left[-\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\alpha}{\lambda}\right]$  tal que  $f(x_0) = y$ , logo,  $[-c, c] \subset \text{Im} f$ . Concluímos então que  $\text{Im} f = [-c, c]$ .

**Proposição 2.6** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por*

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i x)$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A função  $f$  é periódica somente se  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$  for um número racional para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $i \neq j$ ).

**Demonstração.** Sendo  $f$  periódica, existe  $P > 0$  de modo que

$$f(x+P) = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i x) = \sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i(x+P)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Usando a fórmula de a adição de arcos segue que

$$\sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i x) = \sum_{i=1}^n (\cos(\alpha_i x) \cos(\alpha_i P) - \sin(\alpha_i x) \sin(\alpha_i P)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função está definida para todo  $x \in \mathbb{R}$  e em particular para  $x = 0$ , tem-se

$$\sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i \cdot 0) = \sum_{i=1}^n (\cos(\alpha_i \cdot 0) \cos(\alpha_i P) - \sin(\alpha_i \cdot 0) \sin(\alpha_i P)).$$

Como  $\sin(0) = 0$  e  $\cos(0) = 1$ , substituindo na equação acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^n 1 = \sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i P),$$

logo

$$\sum_{i=1}^n \cos(\alpha_i P) = n.$$

Como a função cosseno tem máximo igual a 1, para que o somatório acima seja igual a  $n$  devemos ter

$$\cos(\alpha_i P) = 1,$$

para todo  $i$ . O que implica em

$$\alpha_i P = n_i 2\pi,$$

para algum  $n_i \in \mathbb{Z}^* \forall i$ . Assim, podemos considerar

$$P = \frac{n_i 2\pi}{\alpha_i}, \forall i.$$

Da mesma forma, para  $j \neq i$  existe  $n_j \in \mathbb{Z}_*$  tal que

$$P = \frac{n_j 2\pi}{\alpha_j},$$

Logo,

$$\frac{n_i 2\pi}{\alpha_i} = \frac{n_j 2\pi}{\alpha_j},$$

equivalentemente,

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_j} = \frac{n_i}{n_j}.$$

Como  $n_i, n_j \in \mathbb{Z}_*$ , concluímos que  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$  é um racional.

**Observação 2.2** A propriedade acima também é válida para a função seno, ou seja, se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \text{sen}(\alpha_i x)$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$  e  $n \in \mathbb{N}$ . A função  $f$  é periódica somente se  $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}$  for um número racional para todo  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  ( $i \neq j$ ).

A função acima nos faz pensar quando uma soma de funções periódicas é periódica. O problema a seguir nos mostra que, quando a razão entre os períodos de duas funções seno for irracional, a soma delas duas não é periódica.

**Problema 2.7** Seja  $\alpha$  um número irracional dado. A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \cos x + \cos(\alpha x)$  não é periódica.

**Demonstração.** Pela proposição 2.6, como  $\frac{\alpha}{1}$  é irracional,  $f$  não é periódica.

No que segue iremos generalizar a recíproca da proposição anterior para a soma de quaisquer duas funções periódicas.

**Proposição 2.8** Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções periódicas de períodos fundamentais  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente. Se a razão entre os períodos de  $f$  e  $g$  for um número racional então a função  $f + g$  é periódica.

**Demonstração.** A razão entre os períodos ser racional significa que

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m}{n},$$

com  $m$  e  $n$  números inteiros não nulos. Com isso obtemos

$$nP_1 = mP_2. \tag{2.1}$$

Se  $P$  é um número real então

$$(f + g)(x + P) = f(x + P) + g(x + P), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tome  $P = nP_1$ , o que implica em

$$(f + g)(x + nP_1) = f(x + nP_1) + g(x + nP_1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como  $f$  é periódica de período  $P_1$  então pelo lema 2.1

$$(f + g)(x + nP_1) = f(x) + g(x + nP_1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da equação 2.1 tem-se

$$(f + g)(x + nP_1) = f(x) + g(x + mP_2), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como o período de  $g$  é  $P_2$  também pelo lema 2.1

$$(f + g)(x + nP_1) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

E podemos então concluir que

$$(f + g)(x + nP_1) = (f + g)(x),$$

para todo  $x$  real.

Na verdade, essa propriedade é válida para um número finito qualquer de funções periódicas.

## 2.3 As funções seno e cosseno

Nessa seção vamos mostrar a continuidade das funções seno e cosseno, e para isso iremos precisar do lema a seguir. Também provaremos algumas outras propriedades dessas funções.

**Lema 2.9** Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$ .

**Demonstração.** Primeiro vamos mostrar que  $\operatorname{sen} x \leq x$ , para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . É fácil verificar para  $x = 0$ . Dado  $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$  marquemos no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico (veja a figura 2.4) o ponto  $P$  tal que o  $\ell(\widehat{AP}) = x$ . Seja  $Q$  o pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre a reta  $\overleftrightarrow{AC}$ . Então

$$\operatorname{sen} x = \overline{PQ} < \ell(\widehat{AP}) = x.$$

Como  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$ , temos que  $|\operatorname{sen} x| \leq |x|$  para  $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ . Finalizando, para  $|x| > \frac{\pi}{2}$ , temos

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} < |x|.$$

**Proposição 2.10** As funções seno e cosseno são contínuas.

**Demonstração.** Fixando  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Se  $|x - x_0| < \delta$ , usando as fórmula de transformação de soma em produto, temos

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \operatorname{sen} \left( \frac{x + x_0}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \right|.$$

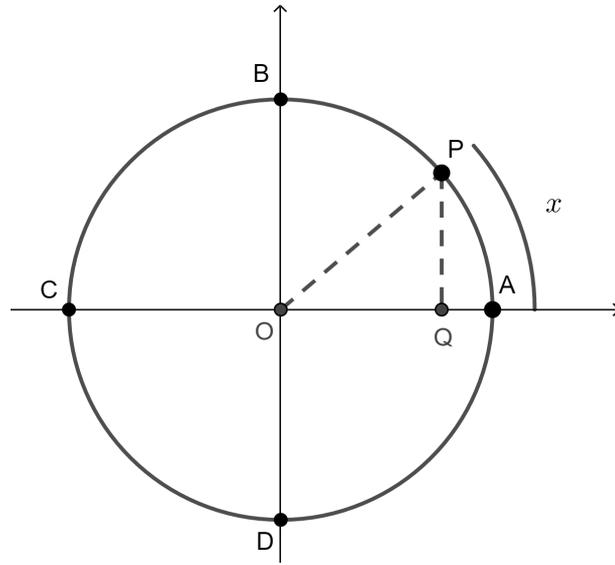
Com as propriedades de módulo, deduz-se que

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x + x_0}{2} \right) \right| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \right|,$$

e, usando o lema anterior,

$$|\cos x - \cos x_0| \leq 2 \left| \operatorname{sen} \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0| < \delta.$$

Figura 2.4: Ciclo trigonométrico



Fonte: Autor.

Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $0 < \delta \geq \varepsilon$  teremos  $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$ , quando  $|x - x_0| < \delta$ , logo, a função cosseno é contínua.

Analogamente se demonstra para a função seno.

**Lema 2.11** Se  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções deriváveis e tais que  $f'(x) = g(x)$  e  $g'(x) = -f(x)$  qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , então  $f(x) = f(0) \cos x + g(0) \sin x$  e  $g(x) = g(0) \cos x - f(0) \sin x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Tome  $h(x) = f(x) \sin x + g(x) \cos x$  e  $l(x) = f(x) \cos x - g(x) \sin x$ , então  $h(0) = g(0)$ ,  $l(0) = f(0)$  e

$$h'(x) = f'(x) \sin x + f(x) \cos x + g'(x) \cos x - g(x) \sin x.$$

Da hipótese temos que  $f'(x) = g(x)$  e  $g'(x) = -f(x)$ , logo,

$$h'(x) = (f'(x) - g(x)) \sin x + (f(x) + g'(x)) \cos x = 0.$$

De modo análogo, tem-se  $l'(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O corolário A.4 garante que  $h$  e  $l$  são constantes. Logo, temos

$$\begin{cases} f(x) \sin x + g(x) \cos x = g(0) \\ f(x) \cos x - g(x) \sin x = f(0) \end{cases},$$

As equações acima formam um sistema de equações em  $f(x)$  e  $g(x)$ . A resolução desse sistema é facilmente encontrada, obtendo  $f(x) = f(0) \cos x + g(0) \sin x$  e  $g(x) = g(0) \cos x - f(0) \sin x$ .

**Teorema 2.12** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes derivável de modo que  $f''(x) + f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$f(x) = f(0) \cos x + f'(0) \operatorname{sen} x,$$

qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Sejam  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções definidas por  $g(x) = f(x) - f(0) \cos x$  e  $h(x) = g'(x) = f'(x) + f(0) \operatorname{sen} x$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$h'(x) = f''(x) + f(0) \cos x = -f(x) + f(0) \cos x = -g(x),$$

pelo lema anterior temos que

$$g(x) = g(0) \cos x + h(0) \operatorname{sen} x.$$

Como,  $g(0) = f(0) - f(0) \cos 0$  e  $h(0) = f'(0) + f(0) \operatorname{sen} 0$  obtemos

$$g(x) = f'(0) \operatorname{sen} x.$$

Então,  $f(x) - f(0) \cos x = f'(0) \operatorname{sen} x$ , o que demonstra o teorema.

**Corolário 2.13** Se  $\lambda > 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função duas vezes derivável de modo que  $f''(x) + \lambda f(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$f(x) = f(0) \cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{f'(0)}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x),$$

qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Tome  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$ . Pela regra da cadeia,  $g$  é duas vezes derivável e com isso  $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot f'\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$  e

$$g''(x) = \frac{1}{\lambda} \cdot f''\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = -f\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) = -g(x),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Com isso, usando o teorema anterior, temos

$$g(x) = g(0) \cos x + g'(0) \operatorname{sen} x,$$

qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ . Por fim, basta notar que  $g(0) = f(0)$ ,  $g'(0) = \frac{f'(0)}{\sqrt{\lambda}}$  e  $f(x) = g(\sqrt{\lambda}x)$ .

## 2.4 Aplicação

As funções periódicas servem como modelo matemático para diversos movimentos oscilatórios. Segundo [12] "*Entende-se por movimento oscilatório aquele que se realiza no entorno de uma dada posição de equilíbrio (ponto no qual a resultante das forças é nula)*".

Temos como um exemplo simples de movimento oscilatório, o pêndulo. A "brincadeira de balanço" representa um movimento pendular, é claro que existem inúmeros questões e circunstâncias a serem tratadas sobre esse movimento, mas, é um exemplo de aplicação que pode ser estudado através das funções periódicas ou quase-periódicas.

O exemplo a seguir trata-se de uma aplicação de funções periódicas que foi retirado do livro [3], um Sistema massa-mola.

**Exemplo 4** *Vamos considerar uma mola com constante elástica  $k > 0$ , presa a uma parede por uma das extremidades. Pela **Lei de Hooke** temos que se alongarmos a mola de um comprimento  $x$  que não induza deformações permanentes nela, essa elongação exercerá sobre nossa mão uma força que é contrária a elongação que aplicamos, essa força tem magnitude  $kx$ ; convencionamos, pois, escrever  $F = -kx$  para denotar essa força, tendo o sinal de - o papel de codificar matematicamente o caráter contrário da elongação.*

*Agora, vamos prender à outra extremidade um bloco de massa  $m$  (a mola tem massa desprezível em relação a  $m$ ), de modo que o sistema massa-mola resultante repouse horizontalmente numa superfície plana, que vamos supor é tão polida que iremos desprezar os efeitos dos atritos cinético e estático. Depois, aplicamos uma elongação lenta de comprimento  $x_0$  na mola (puxando ou empurrando o bloco), por fim, imprimimos no bloco uma velocidade instantânea  $v_0$  e deixamos o sistema oscilar livremente.*

*Vamos então supor que o movimento descrito acima se dê ao longo de uma reta, denotaremos por  $t$  o tempo transcorrido a partir do instante inicial  $t_0 = 0$ . Também, seja  $x(t)$  a elongação da mola no instante  $t$ , e suponha que a função  $t \rightarrow x(t)$  é duas vezes derivável.*

*Pela **Segunda Lei de Newton**, temos que*

$$F = m \cdot a(t).$$

*Como  $F = -kx$ , segue-se que*

$$-kx(t) = mx''(t),$$

*ou ainda,*

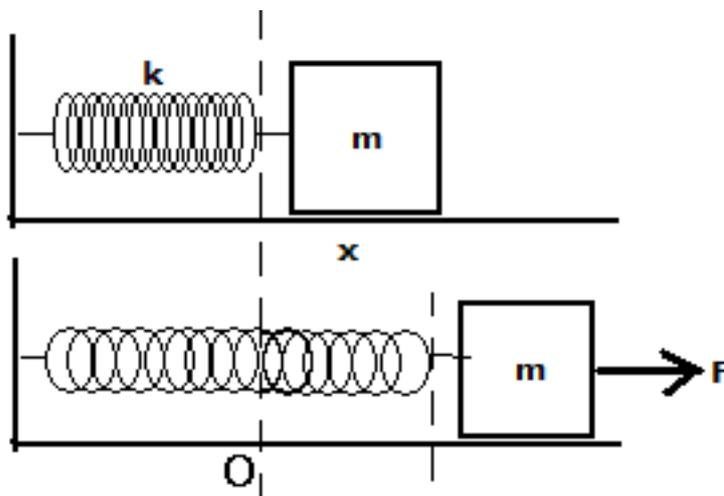
$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0.$$

*Se colocarmos  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v(0) = v_0$  e fizermos  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  podemos dizer, com o auxílio do corolário 2.13, que*

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega t).$$

*Com ajuda da proposição 2.5 podemos concluir que a função  $t \rightarrow x(t)$  é periódica de período  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Assim, mostramos que o sistema massa-mola é um movimento periódico. Uma representação do sistema pode ser vista em 2.5.*

Figura 2.5: Sistema massa mola.



Fonte: Referência [14].

## 2.5 O gráfico de uma função periódica

A seguir mostramos que para construir um esboço do gráfico de uma função periódica, basta construir a porção do gráfico da função definida para o intervalo  $[0, P)$  onde  $P$  é o período da função.

**Problema 2.14** Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período fundamental  $P$  explique como esboçar o gráfico de  $f$  conhecendo a porção dele para  $0 \leq x < P$ .

**Solução.** Para  $x \in [0, P)$ , a periodicidade de  $f$  garante que  $f(x + kP) = f(x)$  qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$ . Com isso,  $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(x + kP) \Leftrightarrow (x + kP, y) \in G_f, \forall x$ . Sendo  $\mathcal{F} = G_f \cap ([0, P) \times \mathbb{R})$ , temos  $G_f = \cup_{\mathcal{F} + k, k \in \mathbb{Z}}$ , onde  $\mathcal{F} + k$  denota a translação de  $\mathcal{F}$  segundo o vetor  $(k, 0)$ .

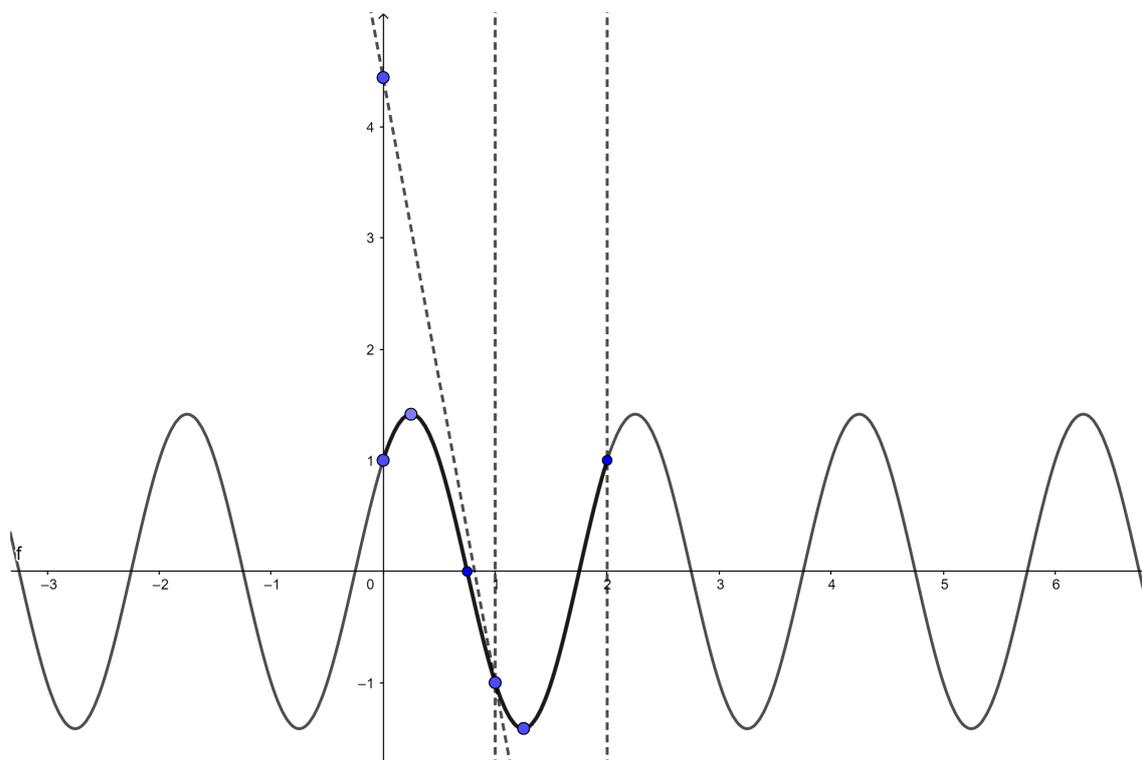
**Exemplo 5** Vamos construir o esboço do gráfico da função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$  seguindo o guia que está no apêndice A.

- (i) Pela proposição 2.5 temos que  $f$  é periódica de período 2 e pela proposição A.9 podemos reduzir o esboço do gráfico ao intervalo  $[0, 1]$ .
- (ii) Vamos fazer o teste da primeira derivada para encontrar os extremos. Como  $f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)$  temos que a única solução para  $f'(x) = 0$  no intervalo  $[0, 1]$  é  $x = 1/4$  então o ponto  $(1/4, \sqrt{2})$  é extremo de  $f$ .
- (iii) Vamos analisar o crescimento ou decrescimento de  $f$ . Como  $f'(x) > 0$  no intervalo  $[0, 1/4]$  ela é crescente nesse intervalo. Já no intervalo  $[1/4, 1]$ ,  $f'(x) < 0$  o que nos diz que ela é decrescente nesse intervalo.

- (iv) Como  $f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) - \pi^2 \sin(\pi x)$  a equação  $f''(x) = 0 = 0$  tem uma única solução no intervalo  $[0, 1]$  que é quando  $x = 3/4$  logo o ponto  $(3/4, 0)$  é um ponto de inflexão.
- (v) Veja que  $f''(x) > 0$  no intervalo  $[0, 3/4]$  e  $f''(x) < 0$  em  $[3/4, 1]$ , logo,  $f$  é crescente no primeiro intervalo citado e decrescente no segundo.
- (vi) O coeficiente angular da reta que é tangente a  $(3/4, 0)$  é  $f'(\frac{3}{4}) = -\sqrt{2}\pi$  e ela toca no eixo vertical no ponto  $(0, c)$  onde  $c = \frac{3}{4}\sqrt{2}\pi$  pois,  $\frac{c-0}{0-\frac{3}{4}} = -\sqrt{2}\pi$ .
- (vii) A função  $f$  não possui assíntotas horizontais ou oblíquas, pois, ela é periódica. E como  $f$  é limitada também não possui assíntotas verticais.
- (viii) As extremidades de  $f$  são pontos que ajudam a construir o esboço do gráfico. Esses pontos são  $(0, 1)$  e  $(1, -1)$ .

Reunindo todas as informações acima e pela proposição A.9 fazendo  $f(x) = -f(x+1)$  com  $x \in [1, 2]$ , temos que o esboço do gráfico de  $f$  está na figura 2.6.

Figura 2.6: Esboço do gráfico de  $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$ .



Fonte: Autor.

# Capítulo 3

## Funções Quase-periódicas

Neste capítulo introduziremos a teoria básica de funções quase-periódicas. Na primeira seção mostraremos um caso de função não periódica, em seguida, na segunda seção definiremos função quase-periódica, mostramos algumas propriedades e damos exemplos, nas três últimas seções falaremos sobre a caracterização, aplicação e o gráfico de funções quase-periódicas.

### 3.1 Quase periodicidade

Para motivar o estudo das funções quase-periódicas vamos iniciar essa seção com o seguinte exemplo.

A função real

$$f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2})x,$$

definida a valores reais, não é periódica. De fato, a razão  $\frac{2\pi\sqrt{2}}{2\pi} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  e então podemos usar a contra positiva da observação 2.2 para garantir a não periodicidade de  $f$ . Consequentemente, não existe um número  $\tau$  real de modo que

$$f(x + \tau) = f(x),$$

para todo  $x$  real. No entanto, observe que para qualquer número real  $\tau$

$$f(x + \tau) = \text{sen}(2\pi x) \cos(2\pi\tau) + \text{sen}(2\pi\tau) \cos(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos(2\pi\sqrt{2}\tau) + \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}(2\pi\sqrt{2}\tau),$$

para todo  $x$  real. Tomando  $\tau$  inteiro a equação acima se transforma em

$$f(x + \tau) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos(2\pi\sqrt{2}\tau) + \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}(2\pi\sqrt{2}\tau),$$

qualquer que seja  $x$  real. Dado o intervalo  $(\frac{-\varepsilon}{2\pi}, \frac{-\varepsilon}{2\pi})$ , por densidade existem  $m, \tau \in \mathbb{Z}$  tal que

$\tau\sqrt{2} - m \in \left(\frac{-\varepsilon}{2\pi}, \frac{\varepsilon}{2\pi}\right)$ . Daí, para algum  $-1 < \theta < 1$  é válido  $\tau\sqrt{2} - m = \theta \left(\frac{\varepsilon}{2\pi}\right)$ . Com isso,

$$f(x + \tau) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos\left(2\pi\left(m + \theta\frac{\varepsilon}{4\pi}\right)\right) + \\ \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}\left(2\pi\left(m + \theta\frac{\varepsilon}{4\pi}\right)\right), |\theta| \leq 1,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $m \in \mathbb{Z}$ . Usando a periodicidade da função seno e cosseno, podemos dizer que

$$f(x + \tau) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) + \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Com isso, podemos reorganizar a equação acima da seguinte forma

$$f(x + \tau) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) - \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) + \\ + \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$f(x + \tau) = f(x) - \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) + \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right),$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . A partir disso tem-se

$$|f(x + \tau) - f(x)| = |-\text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x) \cos\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) + \cos(2\pi\sqrt{2}x) \text{sen}\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right)|,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Usando a desigualdade triangular chegamos a

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq |\text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)| \left| \cos\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) - 1 \right| + |\cos(2\pi\sqrt{2}x)| \left| \text{sen}\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) \right|,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Usando o lema 2.9 e como as funções seno e cosseno possuem imagem  $[-1, 1]$  obtemos,

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \left| \cos\left(\frac{\theta\varepsilon}{2}\right) - 1 \right| + \frac{|\theta|\varepsilon}{2}, \text{ com } |\theta| \leq 1,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Agora, veja que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\cos\frac{\theta\varepsilon}{2} - 1}{\frac{\theta\varepsilon}{2}} \right| = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos\frac{\theta\varepsilon}{2} - 1}{\frac{\theta\varepsilon}{2}} \right|,$$

usando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos\frac{\theta\varepsilon}{2} - 1}{\frac{\theta\varepsilon}{2}} \right| = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\frac{\theta}{2} \text{sen}\frac{\theta\varepsilon}{2}}{\theta} \right| = \left| \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{sen}\frac{\theta\varepsilon}{2} \right| = |\text{sen}0| = 0$$

Portanto, para  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\left| \frac{\cos\frac{\theta\varepsilon}{2} - 1}{\frac{\theta\varepsilon}{2}} \right| < 1 \Leftrightarrow \left| \cos\frac{\theta\varepsilon}{2} - 1 \right| < \frac{|\theta|\varepsilon}{2}.$$

Com tudo isso podemos então dizer que

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq \frac{|\theta|\varepsilon}{2} + \frac{|\theta|\varepsilon}{2},$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Por fim,

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq |\theta|\varepsilon,$$

para todo  $x$  real. Com isso vemos que a diferença  $f(x + \tau) - f(x)$  é limitada uniformemente, para todo  $x$  real. Logo,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

A diferença acima está uniformemente limitada, logo, sempre podemos encontrar um inteiro  $\tau$  de modo que o módulo da diferença  $f(x + \tau) - f(x)$  seja tão pequeno quanto se queira.

## 3.2 Definição e propriedades das Funções Quase-periódicas

**Definição 3.1** *Seja  $y = f(x)$  uma função real definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Dado um número real  $\varepsilon > 0$ , um número  $\tau$  é chamado um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$  se*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

**Exemplo 6** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \sin(x)$ . O gráfico de  $f$  está representado na Figura 3.1. Esta função não é periódica, pois, não existe  $P$  de modo que  $f(x + P) = f(x), \forall x$ . Agora, defina  $g(x) = f(x + 3\sqrt{2}\pi) - f(x)$ . Usando a fórmula da adição de arcos e simplificando a expressão encontramos*

$$g(x) = (\cos(3\sqrt{2}\pi) - 1) \sin x + \sin(3\sqrt{2}\pi) \cos x.$$

*Pela Observação 2.1, a imagem de  $g$  é*

$$\left[ -\sqrt{(\cos 3\sqrt{2}\pi - 1)^2 + (\sin 3\sqrt{2}\pi)^2}, \sqrt{(\cos 3\sqrt{2}\pi - 1)^2 + (\sin 3\sqrt{2}\pi)^2} \right].$$

*O gráfico de  $g$  pode ser visto na figura 3.2 e pela proposição 2.5 podemos concluir que  $g$  é periódica.*

*Com tudo o que vimos, se tomarmos  $\tau = 3\sqrt{2}\pi$  então*

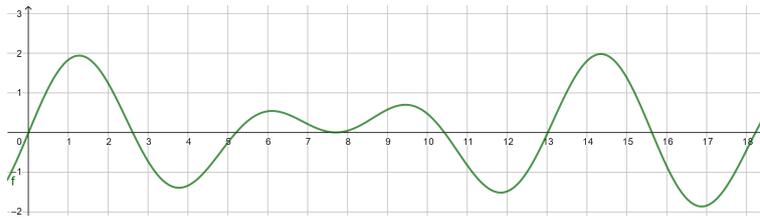
$$|f(x + 3\sqrt{2}\pi) - f(x)| \leq \varepsilon$$

*onde  $\varepsilon = \sqrt{(\cos 3\sqrt{2}\pi - 1)^2 + (\sin 3\sqrt{2}\pi)^2}$ . Logo,  $\tau = 3\sqrt{2}\pi$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ .*

**Proposição 3.1** (i) *Se  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ , então  $\tau$  também é um  $\varepsilon'$ -quase período de  $f$  para todo  $\varepsilon' > \varepsilon$ .*

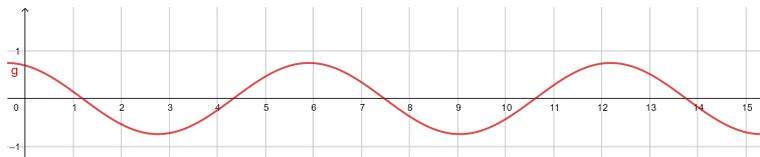
(ii) *Se  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$  então  $-\tau$  também é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ .*

Figura 3.1: Gráfico da função  $f$ .



Fonte: Autor.

Figura 3.2: Gráfico da função  $g$ .



Fonte: Autor.

(iii) Se  $\tau_1$  é um  $\varepsilon_1$ -quase período de  $f$  e  $\tau_2$  é um  $\varepsilon_2$ -quase período de  $f$ , então  $\tau_1 \pm \tau_2$  é um  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ -quase período de  $f$ .

### Demonstração.

(i) É trivial.

(ii) Basta ver que  $|f(x + \tau) - f(x)| = |f((x + \tau) - \tau) - f(x + \tau)|, \forall x \in \mathbb{R}$ . Escreva  $x' = x + \tau$ . Então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau) - f(x)| = \sup_{x' \in \mathbb{R}} |f(x' - \tau) - f(x')| \leq \varepsilon.$$

Logo,  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$  se, e só se  $-\tau$  também é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ .

(iii) Da hipótese temos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_1) - f(x)| \leq \varepsilon_1 \text{ e } \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_2) - f(x)| \leq \varepsilon_2$$

da definição de supremo temos que

$$|f(x + \tau_1) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_1) - f(x)| \text{ e } |f(x + \tau_2) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_2) - f(x)|$$

logo

$$|f(x + \tau_1) - f(x)| + |f(x + \tau_2) - f(x)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

como  $|f(x + \tau_2) - f(x)| = |-f(x + \tau_2) + f(x)|$  e utilizando a desigualdade triangular fazemos

$$|f(x + \tau_1) - f(x) - f(x + \tau_2) + f(x)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

que implica em

$$|f(x + \tau_1) - f(x + \tau_2)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

como isso é válido para todo  $x \in \mathbb{R}$  vale também para o supremo desse conjunto, isto é,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_1) - f(x + \tau_2)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

Tome agora  $x = x' - \tau_2$  e substitua na desigualdade acima ficando com

$$\sup_{x' \in \mathbb{R}} |f(x' + \tau_1 - \tau_2) - f(x')| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

esse  $x'$  pode ser qualquer número real então  $\tau_1 - \tau_2$  é um  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ -quase período de  $f$ . O caso  $\tau_1 + \tau_2$  é análogo, basta considerar que  $-\tau_2$  é um  $\varepsilon_2$ -quase período (pelo item (ii)) e tomar  $x = x' + \tau_2$ .

**Corolário 3.2** *Se  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ , então,  $n\tau$  é um  $n\varepsilon$ -quase período de  $f$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração.** Primeiramente, vamos mostrar para os números naturais. Por Hipótese,  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ .

- Para  $n = 1$  a propriedade é válida.
- Suponha que a propriedade é válida para algum  $n \in \mathbb{N}$ , ou seja,  $n\tau$  é um  $n\varepsilon$ -quase período de  $f$ .
- Como  $n\tau$  é um  $n\varepsilon$ -quase período de  $f$  e  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$  pelo item (iii) da Proposição 3.1 temos que  $n\tau + \tau$  é um  $(n\varepsilon + \varepsilon)$ -quase período de  $f$ , ou seja  $(n + 1)\tau$  é um  $(n + 1)\varepsilon$ -quase período de  $f$ .

Pelo Princípio da Indução (veja o Axioma A.1) a propriedade é válida para qualquer natural. Para um número negativo  $n$ , basta ver que  $n = -n(-\tau)$  e pelo item (ii) da proposição 3.1, se  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$  então  $-\tau$  também é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ . Assim, usando a demonstração anterior concluímos que a propriedade é válida para todos os inteiros.

Do item (i) da proposição anterior podemos concluir que  $E(\varepsilon, f) \subset E(\varepsilon', f)$  quando  $\varepsilon' > \varepsilon$ . Já de (ii) concluímos que o conjunto dos  $\varepsilon$ -quase períodos de  $f$  é simétrico em relação a origem.

**Notação 3.3** *Denotaremos por  $E(\varepsilon, f)$  o conjunto de todos os  $\varepsilon$ -quase períodos de  $f$ .*

**Definição 3.2** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, dizemos que  $f$  é uma função **uniformemente quase periódica** quando o conjunto  $E(\varepsilon, f)$  for relativamente denso para qualquer  $\varepsilon > 0$ .*

Da definição podemos concluir que toda função periódica contínua é uniformemente quase-periódica, pois, para qualquer  $\varepsilon \geq 0$  o conjunto  $E(\varepsilon, f)$  contém todos os números  $nP$  (onde  $n$  é inteiro e  $P$  é o período fundamental da função.) o que implica que o conjunto é relativamente denso.

Também podemos concluir, a partir da definição, que, se  $f$  é uma função uniformemente quase periódica não constante então  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  não existe. Para isso, sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  de modo que  $f(a) \neq f(b)$ . Fixe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|f(a) - f(b)| > 3\varepsilon.$$

Seja  $l = l(\varepsilon)$  o intervalo de definição. Então, para qualquer inteiro  $n$  existe  $\tau_n \in [n, n + l]$  tal que

$$|f(a + \tau_n) - f(a)| < \varepsilon, |f(b + \tau_n) - f(b)| < \varepsilon.$$

Da duas desigualdades anteriores e da desigualdade triangular obtemos

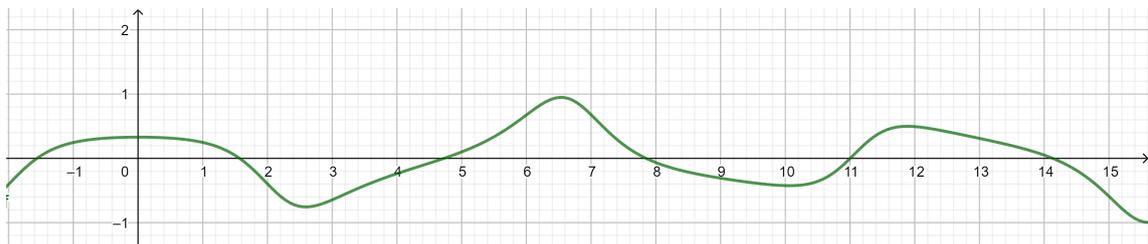
$$|f(a + \tau_n) - f(b + \tau_n)| > \varepsilon.$$

Fazendo  $a + \tau_n \rightarrow \infty$  e  $b + \tau_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , podemos concluir que o  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  não existe.

**Notação 3.4** Denotaremos por  $l_\varepsilon$  o comprimento dos intervalos que contém algum número de  $E(\varepsilon, f)$ .

**Exemplo 7** A função  $f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \frac{\cos t}{2 + \cos(\sqrt{2}t)}$  que tem como gráfico a Figura 3.3 é uma função quase periódica.

Figura 3.3: Gráfico de  $f(x) = \frac{\cos t}{2 + \cos(\sqrt{2}t)}$



Fonte: Autor.

**Exemplo 8** A função  $f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x)$  é uniformemente quase periódica.

A uma grande dificuldade em mostrar pela definição que algumas funções são quase-periódicas. Para facilitar isso na próxima seção caracterizaremos as funções quase-periódicas por meio de um outro conceito.

**Teorema 3.5** *Qualquer função uniformemente quase-periódica é limitada.*

**Demonstração.** Tomando  $\varepsilon = 1$  e denotando por  $M$  o máximo de  $|f(x)|$  em um intervalo  $[0, l_1]$  (ele existe pelo Corolário A.2 do Teorema A.1). Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , podemos fixar um número  $\tau \in E(\varepsilon, f)$  de maneira que  $x + \tau$  pertence a  $[0, l_1]$  e daí

$$|f(x + \tau)| \leq M.$$

Usando a desigualdade triangular obtemos

$$|f(x)| = |f(x) + f(x + \tau) - f(x + \tau)| \leq |f(x + \tau) - f(x)| + |f(x + \tau)|.$$

Logo,

$$|f(x)| \leq 1 + M$$

para qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ . Assim o teorema está provado.

**Teorema 3.6** *Qualquer função uniformemente quase-periódica é uniformemente contínua.*

**Demonstração.**

Dado um  $\varepsilon > 0$ , tome um número  $l_\varepsilon$  e um  $\delta > 0$  de modo que  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{3}\varepsilon$  para quaisquer  $x_1, x_2 \in [0, l_\varepsilon/3 + 1]$  quando  $|x_1 - x_2| < \delta$ .

Agora, sejam  $x', x''$  dois reais quaisquer de modo que  $|x' - x''| < \delta$ . Como o conjunto  $E(\varepsilon/3, f)$  é relativamente denso, então, existe um  $\tau \in E(\varepsilon/3, f)$  em que os números  $x' + \tau$  e  $x'' + \tau$  pertencem ao intervalo  $[0, l_\varepsilon/3 + 1]$ . Então pela continuidade de  $f$  temos

$$|f(x' + \tau) - f(x'' + \tau)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Por outro lado a quase periodicidade de  $f$  garante que

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Então, usando a desigualdade triangular, podemos concluir que

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x' + \tau)| + |f(x' + \tau) - f(x'' + \tau)| + |f(x'' + \tau) - f(x'')| < \varepsilon.$$

O que prova o teorema.

**Corolário 3.7** *Se  $f$  é uniformemente quase periódica, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  (dependente de  $\varepsilon$ ) tal que o conjunto  $E(\varepsilon, f)$  contém o intervalo  $(-\delta, \delta)$ .*

**Demonstração.** Pelo teorema anterior,  $f$  é uniformemente contínua. Assim, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$  quando  $|x - y| < \delta$ . Tome  $0 < \delta' < \delta$  então  $|(x + \delta') - x| < \delta$  implica que  $|f(x + \delta') - f(x)| < \varepsilon$ . Com isso temos que  $\delta'$  é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ . Pelo item (ii) da proposição 3.1,  $-\delta'$  também é um  $\varepsilon$ -quase período de  $f$ . Como isso é válido para qualquer  $\delta' < \delta$  então  $(-\delta, \delta)$  está contido em  $E(\varepsilon, f)$ .

**Teorema 3.8** *Se  $f$  é uniformemente quase periódica então  $cf$  (onde  $c$  é uma constante) e  $f^2$  também são.*

**Demonstração.**

Como  $f$  é quase periódica, existe  $\tau \in E(\varepsilon, f)$  de modo que

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Assim

$$|cf(x + \tau) - cf(x)| < |c|\varepsilon$$

vemos que  $E(\varepsilon, f) \subset E(|c|\varepsilon, cf)$  e  $cf$  é quase periódica.

Veja agora que

$$|(f(x + \tau))^2 - (f(x))^2| = |(f(x + \tau) + f(x)) \cdot (f(x + \tau) - f(x))|$$

pelo teorema 3.5 existe  $M = \sup |f(x)|$  logo

$$|(f(x + \tau))^2 - (f(x))^2| < |(M + M) \cdot (f(x + \tau) - f(x))| < 2M\varepsilon.$$

então  $E(\varepsilon, f) \subset E(2M\varepsilon, f^2)$ ,  $f$  é quase periódica.

**Teorema 3.9** *Se  $f$  é uniformemente quase periódica e  $\inf |f(x)| = m > 0$  então  $\frac{1}{f}$  também é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** De fato, temos que

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$$

e a partir daí

$$\left| \frac{1}{f(x + \tau)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \left| \frac{f(x + \tau) - f(x)}{f(x + \tau) \cdot f(x)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{m^2}.$$

assim  $E\left(\frac{\varepsilon}{m^2}, \frac{1}{f}\right)$  contém  $E(\varepsilon, f)$  e conseqüentemente é relativamente denso. Isso é válido para um  $\varepsilon$  arbitrário, então, o teorema está provado.

Os três casos anteriores são casos particulares do teorema a seguir.

**Teorema 3.10** *Se  $f$  é uniformemente quase periódica então qualquer composição de  $f$  com uma função uniformemente contínua é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Seja  $g$  uma função uniformemente contínua e  $f$  uniformemente quase periódica. Se  $\tau \in E(\varepsilon, f)$  temos que  $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$  então

$$|g(f(x + \tau)) - g(f(x))| < \varepsilon'$$

pela uniformidade de  $g$ . Tomando  $\varepsilon$  como os  $\varepsilon'$ -quase períodos de  $g$  vemos que  $E(\varepsilon, f) \subset E(\varepsilon', g)$  o que implica que  $E(\varepsilon', g)$  é relativamente denso. Com isso mostramos que  $g$  é uniformemente quase periódica.

**Teorema 3.11** *Se a sequência  $(f_n(x))$  de funções uniformemente quase periódicas converge uniformemente para  $f$ , então  $f$  é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Como a sequência de funções converge uniformemente para  $f$ , dado  $\varepsilon$ , existe  $f_{n_0}$  tal que

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Seja  $\tau \in E\left(\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right)$ . Então usando a desigualdade triangular podemos fazer

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq |f(x+\tau) - f_{n_0}(x+\tau)| + |f_{n_0}(x+\tau) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon.$$

com isso temos que

$$E\left(\frac{\varepsilon}{3}, f_{n_0}\right) \subset E(\varepsilon, f)$$

mostrando que  $E(\varepsilon, f)$  é relativamente denso para qualquer  $\varepsilon$ . Consequentemente  $f$  é uniformemente quase periódica.

**Lema 3.12** *Dados quaisquer dois números  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (com  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ ) positivos, existe um  $\delta > 0$  dependente de  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  tal que  $E(\varepsilon_2, f)$  contém todos os números cuja distância do conjunto  $E(\varepsilon_1, f(x))$  não é maior que  $\delta$ .*

**Demonstração.** Pelo corolário 3.7 do teorema 3.6 existe  $\delta$  dependente de  $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$  tal que o intervalo  $(-\delta, \delta) \subset E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, f)$ . E pelo item (iii) da proposição 3.1 temos que a soma de quaisquer dois números de  $E(\varepsilon_1, f)$  e  $E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, f)$  é um  $\varepsilon_2$ -quase período de  $E(\varepsilon_2, f)$ . Isso significa que se  $\tau \in E(\varepsilon_1, f)$  e  $(-\delta, \delta) \subset E(\varepsilon_2 - \varepsilon_1, f)$  então  $(\tau - \delta, \tau + \delta) \subset E(\varepsilon_2, f)$ . O que prova o lema.

**Lema 3.13** *Se  $\varepsilon, \delta$  são dois números positivos arbitrários e  $f_1, f_2$  duas funções uniformemente quase periódicas, o conjunto de números de  $E(\varepsilon, f_1)$  cuja distância do conjunto  $E(\varepsilon, f_2)$  são menores do que  $\delta$ , é relativamente denso.*

**Demonstração.** Vamos considerar os conjuntos  $E\left(\frac{1}{2}\varepsilon, f_1\right)$  e  $E\left(\frac{1}{2}\varepsilon, f_2\right)$  e  $l = k\delta$  (com  $k$  inteiro) dentro dos dois conjuntos. Dividindo o intervalo  $(-\infty, \infty)$  em intervalos  $((n-1)l, nl)$  onde  $n$  cobre todos os naturais. Podemos dizer que dentro de cada intervalo  $((n-1)l, nl)$  encontramos  $\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)}$  pertencentes aos conjuntos  $E\left(\frac{1}{2}\varepsilon, f_1\right)$  e  $E\left(\frac{1}{2}\varepsilon, f_2\right)$  respectivamente. Com isso temos que  $(n-1)l < \tau_1^{(n)} < nl$  e  $(n-1)l < \tau_2^{(n)} < nl$  consequentemente

$$-l < \tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} < l.$$

Seja  $\lambda_i$  o intervalo  $(i-1)\delta \leq x < i\delta$ , de modo que a diferença  $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$  sempre pertença a um dos intervalos  $\lambda_i (i = -k+1, \dots, k)$ . É fácil ver que existe um inteiro  $n_0$  que para qualquer inteiro  $n$  faz corresponder um  $n' (-n_0 \leq n' \leq n_0)$  de modo que a diferença  $\tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')}$  está no mesmo intervalo que  $\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)}$ . Logo,

$$\tau_1^{(n)} - \tau_2^{(n)} = \tau_1^{(n')} - \tau_2^{(n')} + \theta\delta, (-1 < \theta < 1)$$

que implica

$$\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')} = \tau_2^{(n)} - \tau_2^{(n')} + \theta \delta.$$

Pelo item (iii) da proposição 3.1 as diferenças  $\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}$  e  $\tau_2^{(n)} - \tau_2^{(n')}$  pertencem respectivamente a  $E(\varepsilon, f_1)$  e  $E(\varepsilon, f_2)$ . Com isso a distância de  $\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}$  ao conjunto  $E(\varepsilon, f_2)$  é menor que  $\delta$ . Podemos ver que o módulo da diferença de  $\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}$  para dois valores consecutivos de  $n$  é menor do que  $(2n_0 + 3)l$ , com isso o conjunto  $\{\tau_1^{(n)} - \tau_1^{(n')}\}$  é relativamente denso e o lema está provado.

**Teorema 3.14** *Para um dado  $\varepsilon > 0$  e para quaisquer duas funções uniformemente quase periódicas  $f_1$  e  $f_2$  o conjunto  $E(\varepsilon, f_1) \cap E(\varepsilon, f_2)$  é relativamente denso.*

**Demonstração.** Tome um  $\varepsilon_1$  positivo tal que  $\varepsilon_1 < \varepsilon$ . Pelo lema 3.12 existe um  $\delta > 0$  tal que todos os números cuja distância do conjunto  $E(\varepsilon_1, f_1)$  é menor do que  $\delta$ , pertencem a  $E(\varepsilon, f_1)$ . Agora, pelo lema anterior, o conjunto  $G$  dos números de  $E(\varepsilon_1, f_2)$  cujas distâncias do conjunto  $E(\varepsilon_1, f_1)$  são menores que  $\delta$ , e consequentemente pertencem a  $E(\varepsilon, f_1)$ , que é relativamente denso, ou seja, o conjunto  $E(\varepsilon, f_1) \cap E(\varepsilon_1, f_2)$ , e mais precisamente  $E(\varepsilon, f_1) \cap E(\varepsilon, f_2)$  é relativamente denso.

**Teorema 3.15** *A soma de duas funções uniformemente quase periódicas é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Tome um  $\varepsilon > 0$  e seja  $\tau$  um número do conjunto

$$E\left(\frac{\varepsilon}{2}, f_1\right) \cap E\left(\frac{\varepsilon}{2}, f_2\right).$$

Então,

$$|f_1(x + \tau) + f_2(x + \tau) - f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x + \tau) - f_1(x)| + |f_2(x + \tau) - f_2(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

o que implica que  $\tau$  pertence ao conjunto  $E(\varepsilon, f_1 + f_2)$ . Portanto,

$$E\left(\frac{\varepsilon}{2}, f_1\right) \cap E\left(\frac{\varepsilon}{2}, f_2\right) \subset E(\varepsilon, f_1 + f_2)$$

de modo que  $E(\varepsilon, f_1 + f_2)$  é relativamente denso, concluindo a prova do teorema.

Este teorema pode facilmente ser generalizado para um número  $n \in \mathbb{N}$  de funções uniformemente quase periódicas.

**Teorema 3.16** *O produto de duas funções uniformemente quase periódicas é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Pelo teorema anterior, as funções  $f_1 + f_2$  e  $f_1 - f_2$  são uniformemente quase periódicas e pelo teorema 3.8 os seus quadrados também são uniformemente quase

periódicas. Assim, o produto  $f_1 \cdot f_2$  pode ser representado como a soma de duas funções uniformemente quase periódicas, como segue,

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = \frac{1}{4}(f_1(x) + f_2(x))^2 - \frac{1}{4}(f_1(x) - f_2(x))^2.$$

Assim, o teorema está provado.

**Corolário 3.17** *Se  $f_1$  e  $f_2$  são funções uniformemente quase periódicas e  $\inf |f_2(x)| > 0$  então  $\frac{f_1}{f_2}$  é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Pelo teorema 3.9 a função  $1/f_2$  é uniformemente quase periódica, e assim

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = f_1(x) \cdot \frac{1}{f_2(x)}$$

é o produto de duas funções uniformemente quase periódicas. O que garante pelo teorema anterior que  $\frac{f_1}{f_2}$  é uniformemente quase periódica.

**Teorema 3.18 (Bochner's)** *Se a derivada de uma função uniformemente quase periódica é uniformemente contínua então ela também é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Tome uma sequência  $(h_n)$  de números reais com  $\lim h_n = 0$ . Sendo  $\theta$  um real com  $0 \leq \theta \leq 1$ , pelo Teorema do Valor Médio (veja ??) podemos escrever

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x + \theta h_n).$$

Na equação acima a expressão da esquerda é a diferença de duas funções uniformemente quase periódicas, logo, ela também é uniformemente quase periódica. Agora, veja que  $f'(x + \theta h_n)$  com  $n = 1, 2, \dots$  forma uma sequência de funções uniformemente quase periódicas que converge uniformemente para  $f'(x)$  o que pelo teorema 3.11 garante que  $f'$  é uniformemente quase periódica.

### 3.3 Caracterização de funções quase periódicas

S. Bochner introduziu o conceito de função normal em [11] a partir da convergência de sequências de funções, provando que essa propriedade é única e exclusiva das funções uniformemente quase periódicas. Isso significa que toda função normal é uniformemente quase periódica e que a recíproca também é válida.

**Definição 3.3** *Uma função contínua  $f$  é chamada de normal, se, dada uma sequência  $(h_n)$  de números reais, existe uma subsequência de  $h_{n_i}$  tal que a sequência de funções  $f(x + h_{n_i})$  converge uniformemente.*

**Lema 3.19** Dada uma função  $f$  uniformemente quase periódica e uma sequência de números reais  $(h_n)$ , para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe uma subsequência  $(h_{n_i})$  de modo que

$$|f_j(x + h_{n_i}) - f_k(x + h_{n_i})| < \varepsilon$$

para todo  $j, k \in \mathbb{N}$ .

**Demonstração.** Qualquer  $h_n$  pode ser escrito como

$$h_n = \tau_n + r_n,$$

onde  $h_n \in E\left(\frac{\varepsilon}{4}, f\right)$  e  $r_n$  satisfaz a desigualdade  $0 \leq r_n \leq l_{\varepsilon/4}$ . Para cada  $h_n$ , consideremos apenas uma representação nessa forma. Seja  $r$  o limite do conjunto de todos os  $r_i$ . Agora, defina  $\delta$  de modo que

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

quando  $|x'' - x'| < 2\delta$ .

Assim, o conjunto de todos os  $h_n$  para os quais  $r - \delta < r_n < r + \delta$  satisfaz a condição do lema. Pois, sejam  $h_j, h_k$  dois desses valores, então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_j) - f(x + h_k)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_j - \tau_k + r_j - r_k) - f(x)|,$$

usando a desigualdade triangular,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_j - \tau_k + r_j - r_k) - f(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_j - \tau_k + r_j - r_k) - f(x + r_j - r_k)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + r_j - r_k) - f(x)|$$

cada um dos dois últimos termos é menor do que  $\frac{\varepsilon}{2}$ , pois  $\tau_j - \tau_k$  é um  $\varepsilon$ -quase período e  $|\tau_j + \tau_k| < 2\delta$ . Portanto,

$$|f(x + h_j) - f(x + h_k)| < \varepsilon.$$

**Teorema 3.20** Toda função uniformemente quase periódica é normal.

**Demonstração.** Seja  $(h_n)$  uma sequência de números reais. Pelo lema anterior, podemos escolher uma subsequência  $h_{n_i}$  de modo que para quaisquer dois inteiros positivos  $j, k$  e para todo  $x$ ,

$$|f(x + h_{n_j}) - f(x + h_{n_k})| < 1.$$

Da mesma forma, podemos escolher uma subsequência  $(h_{n_i}^{(2)})$  da sequência  $(h_n)$  de modo que para quaisquer dois inteiros positivos  $j$  e  $k$  e para todo  $x$ ,

$$|f(x + h_{n_j}^{(2)}) - f(x + h_{n_k}^{(2)})| < \frac{1}{2}.$$

Então escolhemos uma subsequência  $(h_{n_j}^{(3)})$  da sequência  $(h_{n_i}^{(2)})$  tal que

$$|f(x + h_{n_j}^{(3)}) - f(x + h_{n_k}^{(3)})| < \frac{1}{3},$$

e assim por diante. Pegue agora a sequência de funções

$$f(x + h_{n_1}), f(x + h_{n_2}^{(2)}), f(x + h_{n_3}^{(3)}), \dots \quad (3.1)$$

Sendo  $j$  e  $k$  inteiros positivos. Temos que

$$|f(x + h_{n_j}^{(j)}) - f(x + h_{n_k}^{(k)})| < \frac{1}{j},$$

o que mostra que a sequência de funções (3.1) é uniformemente convergente. E, como a sequência  $(h_n)$  foi escolhida arbitrariamente, o teorema está provado.

**Teorema 3.21 (Recíproca)** *Qualquer função normal é uniformemente quase periódica.*

**Demonstração.** Suponha que  $f$  não é uma função uniformemente quase periódica. Então, existe um  $\varepsilon > 0$  tal que o conjunto  $E(\varepsilon, f)$  não é relativamente denso.

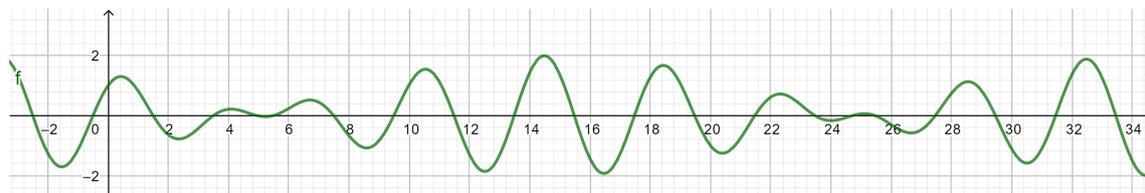
Tome um número real arbitrário  $h_1$  e seja  $(a_2, b_2)$  um intervalo de comprimento maior do que  $2|h_1|$  que não contém números de  $E(\varepsilon, f)$ . Seja  $h_2$  o centro desse intervalo. Evidentemente,  $h_2 - h_1$  pertence ao intervalo  $(a_2, b_2)$  e não pertence a  $E(\varepsilon, f)$ . Defina agora um intervalo  $(a_3, b_3)$  de comprimento maior do que  $2(|h_1| + |h_2|)$  que não contém números de  $E(\varepsilon, f)$ . Seja  $h_3$  o centro de  $(a_3, b_3)$ . Pela mesma razão anterior os números  $h_3 - h_1, h_3 - h_2$  não pertencem a  $E(\varepsilon, f)$ . De maneira semelhante, definimos  $h_4, h_5, \dots$  para que nenhum dos  $h_i - h_j$  pertençam a  $E(\varepsilon, f)$ . Assim, para qualquer  $i$  e  $j$  temos,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i) - f(x + h_j)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + h_i - h_j) - f(x)| > \varepsilon.$$

Assim, não existe subsequência da sequência  $(f(x + h_i))$  é uniformemente convergente, o que contraria a suposição que  $f$  é normal e, com isso, o teorema está provado.

**Exemplo 9** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida por  $f(x) = \text{sen}(\sqrt{2}x) + \text{cos}(\sqrt{3}x)$ , veja seu gráfico na Figura 3.4. Então  $f$  não é periódica, mas, é quase periódica.*

Figura 3.4: Gráfico de  $f(x) = \text{sen}(\sqrt{2}x) + \text{cos}(\sqrt{3}x)$



Fonte: Autor.

Agora, seja  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência de números reais. Veja que:

- $(\text{sen}(\sqrt{2}s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1]$ ;

- $(\cos(\sqrt{2}s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1]$ ;
- $(\sin(\sqrt{3}s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1]$ ;
- $(\cos(\sqrt{3}s_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset [-1, 1]$ .

Assim, pelo Teorema A.6, existem:

- Uma subsequência  $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  da sequência  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de modo que  $(\sin(\sqrt{2}s_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$  converge;
- Uma subsequência  $(s_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$  da sequência  $(s_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de modo que  $(\cos(\sqrt{2}s_{n_{k_i}}))_{i \in \mathbb{N}}$  converge;
- Uma subsequência  $(s_{n_{k_i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  da sequência  $(s_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$  de modo que  $(\sin \sqrt{3}(s_{n_{k_i_j}}))_{j \in \mathbb{N}}$  converge;
- Uma subsequência  $(s_{n_{k_i_j_p}})_{p \in \mathbb{N}}$  da sequência  $(s_{n_{k_i_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  de modo que  $(\cos \sqrt{3}(s_{n_{k_i_j_p}}))_{p \in \mathbb{N}}$

Pelo Teorema A.7 as subsequências acima são todas sequências de Cauchy (veja Definição A.1). Denotando  $s_{n_{k_i_j_p}} = \beta_p$ , com  $p \in \mathbb{N}$ . Assim, dado  $\varepsilon > 0$ , para a subsequência  $(\beta_p)_{p \in \mathbb{N}}$  de  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  temos que:

- Existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  de modo que  $|\sin(\sqrt{2}\beta_p) - \sin(\sqrt{2}\beta_m)| < \frac{\varepsilon}{4}$ , para todos  $p, m \geq n_1$ ;
- Existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  de modo que  $|\cos(\sqrt{2}\beta_p) - \cos(\sqrt{2}\beta_m)| < \frac{\varepsilon}{4}$ , para todos  $p, m \geq n_2$ ;
- Existe  $n_3 \in \mathbb{N}$  de modo que  $|\sin(\sqrt{3}\beta_p) - \sin(\sqrt{3}\beta_m)| < \frac{\varepsilon}{4}$ , para todos  $p, m \geq n_3$ ;
- Existe  $n_4 \in \mathbb{N}$  de modo que  $|\cos(\sqrt{3}\beta_p) - \cos(\sqrt{3}\beta_m)| < \frac{\varepsilon}{4}$ , para todos  $p, m \geq n_4$ .

Agora, tome  $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$ . Então, para todos  $p, m \geq n_0$  e  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x + \beta_p) - f(x + \beta_m)| = |\sin(\sqrt{2}(x + \beta_p)) + \cos(\sqrt{3}(x + \beta_p)) - \sin(\sqrt{2}(x + \beta_m)) - \cos(\sqrt{3}(x + \beta_m))|,$$

usando a desigualdade triangular, teremos,

$$|f(x + \beta_p) - f(x + \beta_m)| \leq |\sin(\sqrt{2}(x + \beta_p)) - \sin(\sqrt{2}(x + \beta_m))| + |\cos(\sqrt{3}(x + \beta_p)) - \cos(\sqrt{3}(x + \beta_m))|,$$

utilizando a fórmula de adição de arcos, obtemos,

$$\begin{aligned} |f(x + \beta_p) - f(x + \beta_m)| &\leq |\sin(\sqrt{2}x)| \cdot |\cos(\sqrt{2}\beta_p) - \cos(\sqrt{2}\beta_m)| + \\ &\quad + |\cos(\sqrt{2}x)| \cdot |\sin(\sqrt{2}\beta_p) - \sin(\sqrt{2}\beta_m)| + \\ &\quad + |\cos(\sqrt{3}x)| \cdot |\cos(\sqrt{3}\beta_p) - \cos(\sqrt{3}\beta_m)| + \\ &\quad + |\sin(\sqrt{3}x)| \cdot |\sin(\sqrt{3}\beta_p) - \sin(\sqrt{3}\beta_m)|, \end{aligned}$$

podemos então dizer que,

$$|f(x + \beta_p) - f(x + \beta_m)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

com isso, vemos que  $(f(x + \beta_p))_{p \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de Cauchy e dessa maneira o  $\lim_{p \rightarrow \infty} f(x + \beta_p)$  existe. Como a desigualdade acima é válida para qualquer  $x$  real,  $f(x + \beta_p)$  converge uniformemente, onde podemos concluir que  $f$  é uma função normal e consequentemente pelo Teorema 3.20,  $f$  é uma função quase periódica.

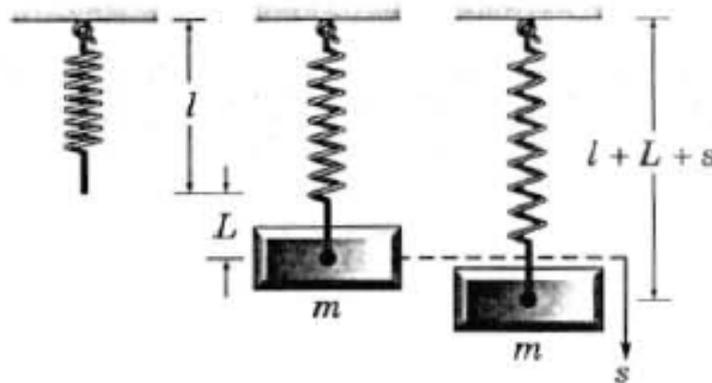
**Observação 3.1** *A demonstração da normalidade de  $f$  acima, é análoga a uma demonstração feita em [9].*

### 3.4 Aplicação

#### Exemplo 10 Sistema massa-mola sem amortecimento

Considere uma mola vertical de comprimento  $l$ , presa a ela um objeto de massa  $m$  que causa um alongamento  $L$  para baixo (que iremos considerar como o sentido positivo). Veja a Figura 3.5 que ilustra o sistema. No ponto onde a massa está presa a mola, existem duas forças que atuam sobre ele, a força gravitacional que é dada por o módulo de  $mg$  que puxa para baixo, onde  $g$  representa a gravidade, e, a força advinda da mola que puxa para cima e pode ser dada pela Lei de Hooke por  $F_m = -kL$ , onde  $k$  é a constante elástica da mola. Veja a Figura 3.6 para uma representação dessas forças. Se considerarmos o sistema em equilíbrio essas duas forças se anulam, ou seja,  $mg - kL = 0$ .

Figura 3.5: Sistema massa mola



Fonte: Referência [5].

Aqui nos descreveremos o movimento da massa na presença de uma força externa. Vamos denotar por  $s(t)$  o deslocamento da massa a partir da sua posição inicial de equilíbrio

Figura 3.6: Forças.



Fonte: Referência [5].

em função do tempo  $t$ , que tem sentido positivo para baixo. Pela Lei de Newton, podemos relacionar esse deslocamento as forças que agem sobre ele, da seguinte forma,

$$ms''(t) = f(t),$$

onde  $s''(t)$  representa a aceleração da massa e  $f$  a força resultante que age sobre o sistema. Para determinar essa força resultante  $f$  devemos considerar quatro forças.

- O peso da massa dado por  $mg$  que sempre age para baixo.
- A força da mola  $F_m$  que sempre age para restaurar a mola à sua posição de equilíbrio e é proporcional ao alongamento  $L + s$  da mola. Caso  $L + s > 0$  a força da mola está para cima pois a mola está distendida. Logo, pela Lei de Hooke,

$$F_m = -k(L + s).$$

No segundo caso, se  $L + s < 0$ , a mola está comprimida e a força da mola está para baixo, e também pela Lei de Hooke,

$$F_m = k|L + s|.$$

Mas, como  $L + s < 0$  então  $|L + s| = -(L + s)$  e com isso  $F_m = -k(L + s)$ . De qualquer forma a força da mola sempre é dada por  $F_m = -k(L + s)$ .

- A força de resistência, ou amortecimento,  $F_d$ , age sempre no sentido contrário ao sentido do movimento da massa. Vamos supor que essa força é proporcional a velocidade  $s'(t)$  da massa. No caso em que  $s'(t) > 0$  temos que a massa está se movendo para baixo e  $F_d$  será dada por

$$F_d(t) = -\lambda s'(t),$$

onde  $\lambda$  representa uma constante positiva chamada constante de amortecimento. No caso em que  $s'(t) < 0$  a massa está se movendo para cima e  $F_d$  atua para baixo e pode ser dada por  $F_d = \lambda|s'(t)|$ , como  $s'(t) < 0$  então  $|s'(t)| = -s'(t)$ , o que implica  $F_d(t) = -\lambda s'(t)$ . Com isso vemos que em qualquer caso  $F_d(t) = -\lambda s'(t)$ .

- Existe também uma força externa  $F(t)$  que pode ser aplicada na massa em qualquer sentido, apontando para cima ou para baixo, sendo positiva ou negativa.

Consideradas as quatro forças, pela Lei de Newton, podemos reescrever a força resultante da seguinte maneira

$$ms''(t) = mg + F_m(t) + F_d(t) + F(t) = mg - k[L + s(t)] - \lambda s'(t) + F(t).$$

Como  $mg - kL = 0$ , podemos descrever o sistema massa mola pela equação do deslocamento ( $s$ ) em função do tempo ( $t$ )

$$ms''(t) + \lambda s'(t) + ks(t) = F(t). \quad (3.2)$$

Suponha agora que a força externa  $F(t)$  seja dada por  $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$  onde  $F_0$  representa a amplitude da força e  $\omega$  a frequência. Então, a equação (3.2) fica

$$ms''(t) + \lambda s'(t) + ks(t) = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.3)$$

Vamos considerar um sistema massa-mola sem amortecimento, ou seja,  $\lambda = 0$  e consequentemente a equação (3.3) fica

$$ms''(t) + ks(t) = F_0 \cos(\omega t). \quad (3.4)$$

A forma da solução geral da equação (3.4) depende se a frequência  $\omega$  da força externa é diferente da frequência natural  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  do sistema sem a força. No caso em que elas são diferentes, ou seja,  $\omega_0 \neq \omega$  a solução geral da equação (3.4) é

$$s = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t),$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas pela condição inicial. Veja que se  $\frac{\omega}{\omega_0}$  for um número irracional, então, a solução para a equação (3.4) não é periódica, mas, é quase periódica.

No segundo caso, temos que  $\omega_0 = \omega$  e a forma da solução geral da equação (3.4) será

$$s = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t),$$

que é uma solução periódica.

**Observação 3.2** A construção da equação que representa o deslocamento no sistema acima foi retirada de [5], nesta mesma referência podem ser encontradas as demonstrações das soluções dessa equação.

### 3.5 Gráfico de uma função quase periódica

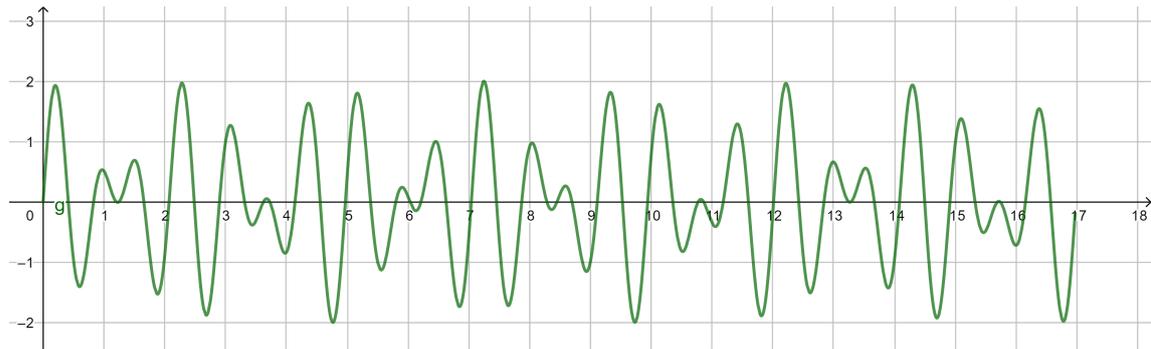
O gráfico de uma função quase periódica não é tão simples de construir, muitas vezes precisamos de utilizar recursos computacionais. Mas, dado o gráfico da função para o intervalo  $[0, \tau]$  onde  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período podemos estimar uma região onde o gráfico da função estará contido em um intervalo escolhido.

**Exemplo 11** O gráfico de  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$ .

Se  $\tau$  for um  $\varepsilon$ -quase período podemos dividir a reta de domínio da função em intervalos  $[i\tau, (i+1)\tau]$  com  $i \in \mathbb{Z}$ .

Sendo assim, vamos tomar  $\tau = 12\sqrt{2}$  um  $\varepsilon$ -quase período para  $\varepsilon = 0,2$ . Dado o gráfico de  $f$  no intervalo  $[0, \tau]$  (veja Figura 3.7) podemos determinar a região onde o gráfico de  $f$  estará contido em todos os intervalos  $[i\tau, (i+1)\tau]$  com  $i \in \mathbb{Z}$ .

Figura 3.7: O gráfico de  $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$  no intervalo  $[0, \tau]$

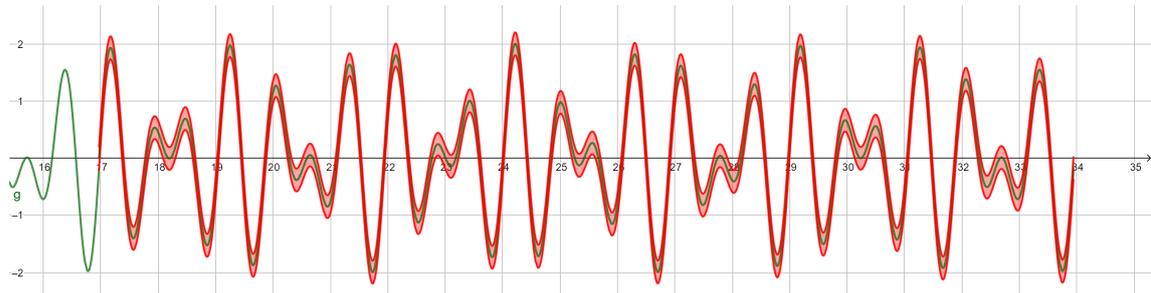


Fonte: Autor.

Como  $|f(x + \tau) - f(x)| \leq \varepsilon$  temos que  $-\varepsilon \leq f(x + \tau) - f(x) \leq \varepsilon$ , então,  $f(x) - \varepsilon \leq f(x + \tau) \leq f(x) + \varepsilon$ . Logo, o gráfico de  $f$  no intervalo  $[\tau, 2\tau]$  está contido na região determinada por  $f(x) - \varepsilon$  e  $f(x) + \varepsilon$  com  $x \in [0, \tau]$ , transladada para o intervalo  $[\tau, 2\tau]$ , que está ilustrado na Figura 3.8.

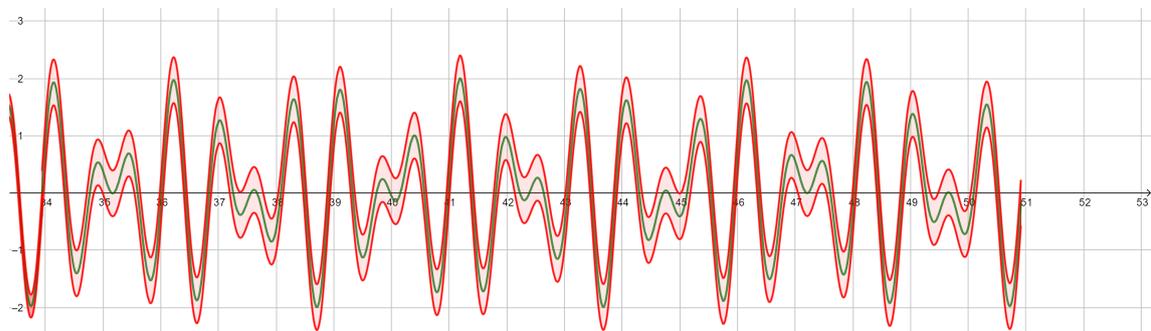
Pelo Corolário 3.2 temos que  $2\tau$  é um  $2\varepsilon$ -quase período. Sendo assim, de modo análogo ao que fizemos anteriormente temos que o gráfico de  $f$  no intervalo  $[2\tau, 3\tau]$  está contido na região determinada por  $f(x) - 2\varepsilon$  e  $f(x) + 2\varepsilon$  com  $x \in [0, \tau]$ , transladada para o intervalo  $[2\tau, 3\tau]$  conforme Figura 3.9.

Figura 3.8: O gráfico de  $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$  no intervalo  $[\tau, 2\tau]$



Fonte: Autor.

Figura 3.9: O gráfico de  $f(x) = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(2\pi\sqrt{2}x)$  no intervalo  $[\tau, 3\tau]$ .



Fonte: Autor.

Com isso, se quisermos determinar a região onde o gráfico de  $f$  se encontra para um dos intervalos  $[i\tau, (i+1)\tau]$  com  $i \in \mathbb{Z}$ , podemos usar o Corolário 3.2 e ver que  $i\tau$  é um  $i\varepsilon$ -quase período. Logo, o gráfico de  $f$  no intervalo  $[i\tau, (i+1)\tau]$  estará contido na região determinada por  $f(x) - i\varepsilon$  e  $f(x) + i\varepsilon$  com  $x \in [0, \tau]$ , transladada para o intervalo  $[i\tau, (i+1)\tau]$ .

**Observação 3.3** *Veja que a medida que  $x$  aumenta a região onde o gráfico de  $f$  se encontra ficará cada vez maior pois como vimos no Corolário 3.2, se  $\tau$  é um  $\varepsilon$ -quase período então  $n\tau$  é um  $n\varepsilon$ -quase período.*

# Capítulo 4

## Conclusões

As funções trigonométricas são comumente estudadas no ensino básico, na maioria das vezes se trabalha com a função seno e cosseno, que são periódicas. É possível que possam aparecer problemas com a soma de duas ou mais funções desse tipo, assim, como vimos no trabalho essa soma pode não ser periódica, e sim quase periódica.

Neste trabalho fizemos a apresentação das funções periódicas junto com suas propriedades e apresentamos uma aplicação. E, motivados pela possibilidade de se encontrar com as funções quase periódicas ainda no ensino básico fizemos a sua apresentação formal, definindo-as, caracterizando-as, dando exemplos, mostrando algumas de suas propriedades e também mostrando uma aplicação.

Sentimos que o objetivo do trabalho foi alcançado e que a construção desse trabalho mostra que às vezes podemos nos deparar com objetos matemáticos básicos mas que são pouco tratados e muitas vezes nem notados. Com isso, vemos a necessidade do professor estar preparado para lidar com essas situações que necessitam de uma formação matemática sólida.

# Referências Bibliográficas

- [1] LIMA, E. L.; *Análise Real, vol.1: Funções de uma variável*, 12<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, (2018).
- [2] LIMA, E. L.; *Curso de Análise, vol.1*, 15<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro - RJ: IMPA, (2019).
- [3] MUNIZ NETO, A. C.; *Fundamentos de Cálculo*, 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (2015).
- [4] BESICOVITCH, A. S. *Almost Periodic Functions*. 1<sup>a</sup> edition republished, Cambridge - Dover Publication, Inc., (1954).
- [5] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R.C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Tradução e revisão: Valéria de Magalhães Iório. - Rio de Janeiro : LTC, (2010).
- [6] BOHR, H. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I*. Acta Mathematica, 45, 29-127, (1925).
- [7] BOHR, H. *Fastperiodische Funktionen*. Berlin: Springer-Verlag, (1934).
- [8] LEVITAN, B.M., ZHIKOV, V.V. *Almost periodic function and differential equations*. Cambridge: University press, (1982).
- [9] RAMPASSO, G. C. *Soluções quase periódicas para equações diferenciais funcionais*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UNESP, São José do Rio Preto, (2015).
- [10] BOHR, H., LANDAU, E. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 37, 269-272, (1914).
- [11] BOCHNER, S. Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. Math. Ann. 96, 119-147 (1927).
- [12] GONDAR, J. L., CIPOLATTI, R. *Iniciação a Física Matemática: Modelagem de Processos e Métodos de Solução*. Rio de Janeiro: IMPA, (2016).
- [13] <https://pt.findagrave.com/memorial/37791303/harald-bohr>. Último acesso em 16 set. 2020.

[14] <https://pt.findagrave.com/memorial/37791303/harald-bohr>. Último acesso em 16 set. 2020.

# Apêndice A

## Primeiro Apêndice

### A.1 Resultados básicos

**Axioma A.1 (Princípio da Indução)** *Seja  $\mathcal{P}$  uma propriedade referente aos números naturais. Se 1 gozar da propriedade  $\mathcal{P}$  e se, do fato de um número natural  $n$  gozar de  $\mathcal{P}$  puder-se concluir que  $n + 1$  goza da propriedade  $\mathcal{P}$ , então todos os números naturais gozam dessa propriedade.*

Para mais detalhes sobre indução consulte [2], que é de onde foi retirado o axioma acima.

**Teorema A.1** *Toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uniformemente contínua.*

**Demonstração.** A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3].

**Corolário A.2** *Toda função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada.*

**Demonstração.** Como  $f$  é uniformemente contínua, para  $\varepsilon = 1$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, y \in [a, b], |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1.$$

Agora, escolha números reais  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$  tais que  $x_i - x_{i-1} < \delta$  para  $1 \leq i \leq k$ , e seja

$$M = \max\{|f(x_1)|, \dots, |f(x_k)|\}.$$

Para  $x \in [a, b]$ , existe  $1 \leq j \leq k$  tal que  $x \in [x_{j-1}, x_j]$ ; em particular,  $|x - x_{j-1}| \leq |x_j - x_{j-1}| < \delta$ . Então da primeira desigualdade e da igualdade acima temos

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j)| < 1 + |f(x_j)| \leq 1 + M.$$

Como o  $x \in [a, b]$  anterior foi escolhido arbitrariamente, temos que  $|f(x)| \leq M + 1$ , para todo  $x \in [a, b]$ , de sorte que  $f$  é limitada.

**Teorema A.3 (Teorema do Valor Médio de Lagrange)** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ , então existe  $c \in (a, b)$  tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [3].

**Corolário A.4** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis. Se  $f' = g'$  em  $I$ , então  $f - g$  é constante.*

**Demonstração.** Suponha que  $f' = 0$  em  $I$ , e fixe  $a < b$  também em  $I$ . Como  $f$  é derivável em  $I$ , temos que  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Logo, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe  $c \in (a, b)$  de modo que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ . Mas, como  $f'(c) = 0$ , temos  $f(b) = f(a)$  e  $f$  é constante em  $I$ . Por fim, como  $f' = g'$  se e somente se  $(f - g)' = 0$ , então  $f - g$  é constante.

**Teorema A.5 (Bolzano-Weierstrass)** *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

**Demonstração.** Vamos provar para uma sequência crescente, os outros casos são análogos. Seja  $(a_n)$  uma sequência crescente e limitada, então existe um  $M$  tal que

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < M.$$

Veja que  $M$  é uma cota superior para o conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  que é um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}$  o que implica que ele possui um supremo, seja  $l$  esse supremo.

Dado  $\varepsilon > 0$  temos que  $l - \varepsilon$  não é mais uma cota superior de  $A$ , então temos que algum elemento do conjunto é maior que  $l - \varepsilon$ , ou seja, existe  $n_0$  natural tal que  $a_{n_0} > l - \varepsilon$  como a sequência é crescente temos que todos os elementos de ordem maior que  $n_0$  são maiores que  $l - \varepsilon$ . Com isso podemos concluir que para  $n \geq n_0$  temos

$$l - \varepsilon < a_n \leq l \Rightarrow l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon,$$

isto é,  $|a_n - l| < \varepsilon$ , a sequência converge para  $l$ .

**Corolário A.6 (Teorema de Weierstrass)** *Toda sequência limitada de números reais possui uma subsequência convergente.*

**Demonstração.** Para demonstrar esse corolário basta mostrar que toda sequência limitada possui uma sequência monótona, daí usasse o teorema de Bolzano-Weierstrass. Vamos dizer que um termo  $x_n$  de uma sequência é *destacado* se  $x_n \geq x_p$  para todo  $p > n$ . Seja  $D \subset \mathbb{R}$  o conjunto de todos os termos destacados da sequência, se esse conjunto for infinito então temos  $D = \{x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \dots\}$  com  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ , o que nos diz que essa subsequência é monótona não crescente. Já se o conjunto  $D$  for finito teremos que  $D = \{x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \dots \geq x_{n_k}\}$  com isso temos que todos os termos de ordem maior que  $n_k$  não são destacados, ou seja,  $x_{n_{k+1}} < x_{n_{k+2}} < x_{n_{k+3}} < \dots$  a subsequência é crescente. Com isso demonstramos o corolário.

**Definição A.1** Uma sequência  $(a_n)$  é chamada de sequência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, existir um  $n_0$  natural tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

**Teorema A.7** Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, ela é uma sequência de Cauchy.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [3].

**Definição A.2** Dizemos que um corpo ordenado  $K$  é Arquimediano se  $\mathbb{N} \subset K$  é ilimitado superiormente.

A definição acima é equivalente a dizer que para qualquer  $a, b \in K$  com  $a > 0$  existe  $n$  tal que  $n \cdot a > b$ . Ou ainda que se  $a \in K$  positivo então existe  $n$  tal que  $0 < \frac{1}{n} < a$ .

**Teorema A.8 (Teorema do Valor Intermediário)** Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas. Se  $f(a) < g(a)$  e  $f(b) > g(b)$  (ou vice-versa), então existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$ . Em particular, se um real  $d$  pertence ao intervalo de extremos  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $f(c) = d$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência [3].

## A.2 Guia de construção do esboço do gráfico de uma função

Quando falamos de função é interessante falar sobre o seu gráfico pois ele faz uma representação visual de como os valores do domínio se relacionam com os do contradomínio. Sendo assim segue a definição formal de gráfico.

A proposição a seguir reduz o problema de construir o esboço do gráfico de uma função a um certo intervalo do domínio.

**Definição A.3** Sejam  $X, Y$  conjuntos não vazios e  $f : X \rightarrow Y$  uma função. O gráfico de  $f$  é subconjunto  $G_f$  do produto cartesiano  $X \times Y$  dado por

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y | y = f(x)\}.$$

**Proposição A.9** Seja  $a \neq 0$  e  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função então o gráfico de:

(a)  $g(x) = f(x + a)$  é obtido trasladando o gráfico de  $f$  de  $-a$ , paralelamente ao eixo das abcissas.

- (b)  $g(x) = f(x) + a$  é obtido trasladando o gráfico de  $f$  de  $a$ , paralelamente ao eixo das ordenadas.
- (c)  $g(x) = -f(x)$  é obtido refletindo o gráfico de  $f$  ao longo do eixo das abscissas.
- (d)  $g(x) = f(-x)$  é obtido refletindo o gráfico de  $f$  ao longo do eixo das ordenadas.
- (e)  $g(x) = af(x)$  é obtido alongando o gráfico de  $f$  verticalmente do fator  $a$ , se  $a > 0$ .
- (f)  $g(x) = f(ax)$  é obtido alongando o gráfico de  $f$  horizontalmente do fator  $a$ , se  $a > 0$ .

### Demonstração.

- (a) Pela definição A.3 temos que se  $(x, y) \in G_f$  então  $f(x) = y$ , veja que  $g(x - a) = f((x - a) + a) = f(x) = y$ , ou seja,  $(x - a, y) \in G_g$ . Agora veja que se  $(x - a, y) \in G_g$  então temos que se  $g(x - a) = y$  que implica  $f((x - a) + a) = y$  daí  $f(x) = y$ , ou seja,  $(x, y) \in G_f$ .
- (b) Se  $(x, y) \in G_f$  então  $f(x) = y$  mas  $g(x) = f(x) + a$  que implica  $g(x) = y + a$  logo  $(x, y + a) \in G_g$ . Agora se  $(x, y + a) \in G_g$  então  $g(x) = y + a$ , como  $g(x) = f(x) + a$  temos  $f(x) + a = y + a$  chegando a  $f(x) = y$ , assim  $(x, y) \in G_f$ .
- (c) Como  $(x, y) \in G_f$ , então  $f(x) = y$ , e daí,  $g(x) = -f(x) = -y$  que implica em  $(x, -y) \in G_g$ . Tomando agora  $(x, -y) \in G_g =$  temos  $g(x) = -y$  usando  $g(x) = -f(x)$  podemos fazer  $-f(x) = -y$  implicando em  $f(x) = y$  e  $(x, y) \in G_f$ .
- (d) Se  $(x, y) \in G_f$ , então  $f(x) = y$ , logo  $g(-x) = f(-(-x)) = f(x) = y$  e daí  $(-x, y) \in G_g$ . Tome agora  $(-x, y) \in G_g$  que implica  $g(-x) = y$ , de  $g(x) = f(-x)$  temos que  $g(-x) = f(-(-x))$  chegando a  $y = f(x)$  mostrando que  $(x, y) \in G_f$ .
- (e) A partir de  $(x, y) \in G_f$  temos  $f(x) = y$ , como  $g(x) = af(x)$ , então  $g(x) = ay$ , ou seja,  $(x, ay) \in G_g$ . Reciprocamente temos que  $(x, ay) \in G_g$  implica  $g(x) = ay$  logo  $af(x) = ay$  chegando a  $f(x) = y$ , conseqüentemente  $(x, y) \in G_f$ .
- (f) De modo análogo as anteriores esta afirmação pode ser demonstrada.

As instruções a seguir foram retiradas da referência [3] onde temos uma série de instruções que ajudarão na construção do esboço do gráfico de uma função:

- (i) A proposição anterior reduz o esboço do gráfico da função a um dado intervalo contido no domínio da função.
- (ii) Pelo teste da primeira derivada temos que os pontos de extremos da função são as extremidades do intervalo do domínio ou são as soluções da equação  $f'(x) = 0$ .
- (iii) O estudo da primeira variação da função garante que os intervalos em que a função é crescente (respectivamente decrescente) são os intervalos que são solução da inequação  $f'(x) > 0$  (respectivamente  $f'(x) < 0$ ).

- (iv) Os pontos de inflexão da função estão entre os pontos que são soluções da equação  $f''(x) = 0$ .
- (v) O estudo da segunda variação da função garante que os intervalos em que ela é estritamente convexa (respectivamente estritamente côncava) são os intervalos que são soluções da inequação  $f''(x) > 0$  (respectivamente  $f''(x) < 0$ ).
- (vi) As retas tangentes ao gráfico da função em seus pontos de inflexão ajudam a esboçar melhor o gráfico em uma vizinhança de cada um desses pontos.
- (vii) As assíntotas também ajudam a esboçar o gráfico se existirem.
- (viii) O cálculo dos limites  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ , se fizer sentido, facilita o entendimento do comportamento do gráfico da função para valores grandes de  $|x|$ .
- (ix) A marcação de alguns pontos diferentes dos já citados pode auxiliar na construção do esboço do gráfico.

### A.3 Algumas noções topológicas

**Definição A.4** Sendo  $a$  e  $b$  números reais dizemos que **intervalos** são os seguintes conjuntos:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  *Intervalo fechado.*
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  *Intervalo aberto.*
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$  *Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita.*
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$  *Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita.*
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$  *Semirreta esquerda fechada na origem.*
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$  *Semirreta esquerda aberta na origem.*
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$  *Semirreta direita fechada na origem.*
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$  *Semirreta direita aberta na origem.*

Os quatro primeiros são intervalos limitados e os outros são ilimitados. Para o que se segue iremos chamar um número real de "ponto" e de "reta" o conjunto dos números reais.

**Definição A.5** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $a$  é um **ponto interior** do conjunto  $X$ , quando existe um número  $\varepsilon > 0$  tal que o intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset X$ .

O conjunto de todos pontos interiores de  $X$  é chamado de **interior** de  $X$  e o denotamos por  $\text{int}X$ . Se o ponto  $a \in \text{int}X$  dizemos que o conjunto  $X$  é uma **vizinhança** de  $a$ .

**Definição A.6** Dizemos que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}$  é **aberto** quando  $A = \text{int}A$ , ou seja, todos os pontos do conjunto são interiores.

**Exemplo 12** O ponto  $c$  é interior ao intervalo  $[a, b]$  sempre que  $a < c < b$ , já os pontos  $a$  e  $b$  não são. Com isso vemos que  $\text{int}[a, b] = (a, b)$  e que o intervalo  $[a, b]$  não é uma vizinhança nem de  $a$  nem de  $b$ . Todo intervalo aberto é um conjunto aberto.

**Definição A.7** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que um ponto  $a$  é **ponto de fronteira** de  $X$  quando toda vizinhança de  $a$  contém pontos de  $X$  e de  $X^C$ . Denotamos por  $\text{fr}(X)$  o conjunto de todos os pontos de fronteira do conjunto  $X$ .

**Exemplo 13** Os pontos  $a$  e  $b$  são pontos de fronteira dos intervalos  $[a, b]$  e  $(a, b)$ .

**Definição A.8** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $a$  é um **ponto aderente** ao conjunto  $X$  quando toda vizinhança de  $a \in \mathbb{R}$  contém pelo menos um ponto de  $X$ . O conjunto de todos os pontos que são aderentes a  $X$  é dito o **fecho** de  $X$  e o denotaremos por  $\bar{X}$ .

**Definição A.9** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que o conjunto  $X$  é **fechado** quando  $X = \bar{X}$ .

**Exemplo 14**  $0$  é um ponto aderente ao intervalo  $(0, 1)$ .

**Exemplo 15** Qualquer intervalo fechado é um conjunto fechado.

**Definição A.10** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que um ponto  $a \in \mathbb{R}$  é de **acumulação** quando toda vizinhança de  $a$  contém um ponto de  $X$  diferente de  $a$ . Diz-se que o conjunto de todos os pontos de acumulação é o **derivado** de  $X$  que denotamos por  $X'$ .

**Exemplo 16** O intervalo  $[0, 1]$  é o derivado do intervalo aberto  $(0, 1)$ . Enquanto que o único ponto de acumulação do conjunto  $X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$  é  $0$ .

**Exemplo 17** O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros não possui ponto de acumulação. Basta ver que não existe ponto em que todas as suas vizinhanças contenham um ponto de  $\mathbb{Z}$  diferente dele mesmo.

**Definição A.11** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é **compacto** quando é limitado e fechado.

**Exemplo 18** Os intervalos fechados e limitados são conjuntos compactos.

A definição a seguir é de fundamental importância para o desenvolvimento da teoria de funções quase periódicas.

**Definição A.12** Seja  $X \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que o conjunto  $X$  é **relativamente denso** em  $\mathbb{R}$  quando existe um  $l > 0$  de modo que para todo  $a \in \mathbb{R}$  a interseção  $(a, a + l) \cap X$  não for vazia.

**Definição A.13** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é **denso** em  $\mathbb{R}$  quando qualquer intervalo aberto  $(a, b)$  contém pelos menos um ponto do conjunto  $X$ .

**Observação A.1** Dizer que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é **denso** em  $\mathbb{R}$  significa dizer que ele é relativamente denso para qualquer  $l > 0$ .

**Exemplo 19** O conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros é relativamente denso, mas o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais não é.

**Demonstração.**

Todo intervalo de  $\mathbb{R}$  de comprimento 2 contém pelo menos um número inteiro, por isso  $\mathbb{Z}$  é relativamente denso.

Vamos supor que  $\mathbb{N}$  é relativamente denso em  $\mathbb{R}$ , então, existe um  $l > 0$  de modo que qualquer intervalo de comprimento  $l$  contém um elemento de  $\mathbb{N}$ . Sendo assim, se tomarmos o intervalo  $[a - l, a]$  onde  $a$  é um real negativo, ele deve conter um número de  $\mathbb{N}$  o que não acontece, logo,  $\mathbb{N}$  não pode ser relativamente denso em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 20** O conjunto de todos os períodos de uma função periódica é relativamente denso em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 21** O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos racionais é denso em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Vamos seguir a demonstração feita em [2].

Como  $\mathbb{R}$  é arquimediano (veja a Definição A.2 no apêndice) existe um  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < l$ . Tomemos agora o conjunto  $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid \frac{m}{n} \geq a + l, a \in \mathbb{R}\}$  ele é não vazio pois  $\mathbb{R}$  é arquimediano. Veja que esse conjunto é limitado inferiormente pois  $m \geq n \cdot (a + l)$ , com isso temos que  $A$  possui um ínfimo, seja  $m_0$  o ínfimo de  $A$ , podemos ver que  $\frac{m_0 - 1}{n} < a + l$ , já que  $m_0 - 1$  não está em  $A$ . É fácil ver que  $a < \frac{m_0 - 1}{n} < a + l$ . Basta supor que não, ou seja,  $\frac{m_0 - 1}{n} < a < a + l$  daí teríamos que  $a + l - a < \frac{m_0 - 1}{n} - \frac{m_0}{n}$  que implicaria em  $l < \frac{1}{n}$  que contradiz a primeira afirmação. Podemos concluir que sempre existe um racional dentro do intervalo  $(a, a + l)$  para qualquer  $a, l \in \mathbb{R}$ .

**Proposição A.10** O conjunto de todos os números da forma  $m - n\sqrt{2}$  com  $m, n \in \mathbb{Z}$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

**Demonstração.** Seja  $(a, b)$  um intervalo qualquer de  $\mathbb{R}$ . Como  $\mathbb{R}$  é arquimediano existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $0 < \frac{1}{p} < b - a$ . Agora, tome o conjunto  $A = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \frac{m - n\sqrt{2}}{p} \geq b\}$  ( $A$  é não vazio, para ver isso basta tomar  $n = 0$  e  $m = (\lfloor b \rfloor + 1)p$ ). O conjunto  $B = \{m - n\sqrt{2} \mid (m, n) \in A\}$  é limitado inferiormente por  $b \cdot p$ , logo, possui ínfimo. Sejam  $m_0, n_0$  os inteiros para os quais  $m_0 - n_0\sqrt{2}$  assume o valor do ínfimo. Se  $\frac{m_0 - n_0\sqrt{2} - 1}{p} \leq a < b \leq \frac{m_0 - n_0\sqrt{2}}{p}$  então  $b - a \leq \frac{m_0 - n_0\sqrt{2}}{p} - \frac{m_0 - n_0\sqrt{2} - 1}{p} = \frac{1}{p}$  o que é uma contradição. Logo, Com tudo isso vemos que o conjunto  $m - n\sqrt{2}$  com  $m, n \in \mathbb{Z}$  é denso em  $\mathbb{R}$ .