UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPa
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - FACET
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS,- CUBT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOSÉ ANTÔNIO GOMES CAVALCANTE

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE APLICADAS EM ALGUMAS SITUAÇÕES COTIDIANAS

ABAETETUBA-PARÁ

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPa
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA - FACET
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO BAIXO TOCANTINS,- CUBT
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

JOSÉ ANTÔNIO GOMES CAVALCANTE

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE APLICADAS EM ALGUMAS SITUAÇÕES COTIDIANAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Programa de Mestrado em Matemática em Rede Nacional -PROFIMAT -UFPA/CUBT como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa.

Abaetetuba-Pará
2020

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE APLICADAS EM ALGUMAS SITUAÇÕES COTIDIANAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Colegiado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia - FACET/CUBT/UFPA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 16 de junho de 2020.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aubedir Seixas Costa (Orientador)
PROFMAT

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Coedeiro (Membro)
PROFMAT

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg (Membro Externo)
UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado forças para superar os obstáculos que a vida me impôs.

A minha esposa Cristina Silva Ribeiro, aos filhos Eric Ribeiro Cavalcante, Érica Ribeiro Cavalcante, Alana Ribeiro Cavalcante e Alan Ribeiro Cavalcante, pelo companheirismo e apoio.

Aos colegas e amigos de curso, professores e coordenação pela compreensão nos meus momentos de dificuldade, em particular quando tive crises de transtorno do pânico, de ansiedade e de depressão, a todos esses valorosos amigos, o meu mais sincero e profundo agradecimento. Pois sem a compreensão dos senhores não teria chegado à conclusão deste curso.

E ao Campus Universitário de Abaetetuba por contribuir com o desenvolvimento da Amazônia Tocantina.

" O dom da fala foi concedido aos homens não para que enganassem uns aos outros, mas sim para que expressem seus pensamentos uns aos outros".

Santo Agostinho;

Resumo

Este trabalho estuda Análise Combinatória e Probabilidade. Partindo de situações-problema introduzir os conceitos de Princípio multiplicativo e suas consequências como Permutações e Combinações. Utilizar diferentes recursos para resolver problemas combinatórios como, por contagem direta, diagrama de árvore, tabelas de dupla entrada e Principio Multiplicativo, reconhecendo a necessidade do uso da multiplicação na resolução de problemas combinatórios e da divisão para reduzir agrupamentos repetidos. A partir de situações-problema possibilitar ao aluno a compreensão de que muitos dos fenômenos do cotidiano são de natureza aleatória; descrever espaço amostral e evento associado a um experimento aleatório. E a partir de experimentos e problemas propostos definir probabilidade e suas aplicações na resolução de problemas diversos. Aspectos iniciais da teoria são mostrados bem como exemplos para facilitar sua compreensão. O trabalho é direcionado principalmente a capacitação de professores de matemática e a estudantes do Ensino Médio que queiram dominar a teoria e aprender técnicas e estratégias para resolver problemas de Análise Combinatória e Probabilidade. Palavras chave: Matemática. Análise Combinatória. Probabilidade. Resolução de problemas.

Abstract

This work studies Combinatorial Analysis and Probability. Starting from problem situations, introduce the concepts of multiplicative principle and its consequences as Permutations and Combinations. Use different resources to solve combinatorial problems such as, by direct counting, tree diagram, double entry tables and Multiplicative Principle, recognizing the need to use multiplication to solve combinatorial problems and division to reduce repeated clusters. Based on problem situations, it allows the student to understand that many of the everyday phenomena are of a random nature; describe sample space and event associated with a random experiment. And from experiments and proposed problems, define probability and its applications in solving various problems. Initial aspects of the theory are shown as well as examples to facilitate its understanding. The work is mainly aimed at training mathematics teachers and high school students who want to master the theory and learn techniques and strategies to solve Problems of Combinatorial Analysis and Probability. Keywords: Mathematics. Combinatory Analysis. Probability. Problem solving.

Abreviaturas

BNCC - Base Nacional Comum de Currículos.

ENQ - Exame Nacional de Qualificação - PROFMAT

ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio.

LDBN - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

OBMEP - Olimpíadas Brasileiras de Matemática.

PCNEM - Programas Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

SAEB - Sistema de Avaliação do Ensino Básico.

Sumário

Introdução

A motivação para escolher este tema foram as dificuldades de alunos, da **E.E.E.F.M. Jerônimo Milhomem Tavares**, localizada em Limoeiro do Ajuru/Pa, em compreender adequadamente a teoria combinatória e probabilística e aplicá-las a situações diversas. Para minimizar tais dificuldades foram propostos, em reuniões pedagógicas, o trabalho de oficinas com os professores de Matemática da referida escola para que tais conteúdos fossem ministrados de forma contextualizada e condizente com as necessidades de aprendizagem dos alunos. É consenso entre muitos professores de Matemática que Combinatória e Probabilidade são alguns dos ramos da Matemática mais difíceis de serem ensinados e aprendidos pelos alunos, pois apesar dos problemas serem formulados numa linguagem relativamente simples requer uma base teórica sólida, conhecimentos matemáticos prévios, raciocínio e análise profunda para serem resolvidos. Como estudante, durante minha vida acadêmica, desde o Ensino Médio, tive dificuldades para solucionar problemas de contagem e probabilidade, mas essas dificuldades me motivaram a buscar cursos de aperfeiçoamentos para superá-las. E assim escolhi esse tema tanto pelas vivências de sala, como pelas minhas próprias dificuldades e de colegas de profissão. Das minhas experiências docentes, percebi que muitos dos meus alunos tinham dificuldades em compreender o total de possibilidades de certos eventos, como por exemplo, se num baile há 10 rapazes e 8 moças, quantos casais podem ser formados? Achavam que eram possíveis formar 8 casais, pois bastaria apenas associar um rapaz com uma das moças e sobrariam 2 rapazes sem par. Certa vez, ao ministrar aula sobre probabilidade, um aluno me perguntou qual a chance de ganhar no "jogo do bicho", que possuem 25 números. Respondi que bastaria fazer 25 apostas simples, uma em cada número, que o mesmo teria o prazer de ganhar, mesmo não tendo retorno do dinheiro apostado. De modo geral, vê-se que os alunos têm muitas curiosidades e perguntas sobre situações cotidianas que envolvem combinatória e probabilidade. Pois, vive-se num mundo onde há mais situações que envolvem o acaso do que aquelas que envolvem certezas absolutas e daí a necessidade de se saber o total de possibilidades ou a chance da ocorrência de certos eventos ou experimentos aleatórios para tomada de decisões. Neste trabalho nos propomos a discutir o tema "Combinatória e Probabilidade" visando contribuir com a capacitação de professores e alunos da rede pública de ensino de Limoeiro do Ajuru de modo a lhes proporcionar condições de desenvolver o tema em questão, de forma contextualizada, possibilitando aos atores do Ensino um melhor entendimento dos conceitos de Combinatória e Probabilidade.

Contribuindo assim com aprendizagens significativas e, permitindo-lhes compreender sua realidade e inserção social, para que atue como sujeitos de transformação do conhecimento, possibilitando-lhes uma relação ativa entre educando e objeto a ser estudado, e com isso possam desenvolver capacidades de relacionar o tema em discussão do ambiente escolar com suas consequências e aplicações práticas do cotidiano. Este trabalho visa, também, apresentar a teoria combinatória e probabilística de forma simples e clara; sem, contudo, abandonar o rigor matemático, para melhor compreensão e aquisição dos conhecimentos teóricos; assim como tratar o conteúdo de ensino de forma contextualizada, aproveitando-se ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos o contexto histórico e o contexto pessoal ou social do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo ensinado e aprendido, levando-se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim este trabalho, pretende também, desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. A compreensão dos conceitos básicos do Princípio Multiplicativo e suas consequências, experimento aleatório, espaço amostral, evento, definição de probabilidade e sua aplicação são os objetivos principais deste trabalho, correlacionando com outras áreas do conhecimento. Este trabalho tem caráter descritivo-bibliográfico, tendo como referenciais teóricos as obras de Ross (2010), Morgado (1991), Hazzan (2004) e Lima et alii (2006). Neste trabalho serão desenvolvidas noções de Combinatória e Probabilidades voltada a capacitação de professores do Ensino Médio para aplicação na resolução de alguns problemas do cotidiano. Esta proposta surgiu das necessidades de minimizar dificuldades dos professores de Matemática do Ensino Médio de apresentarem a teoria de maneira eficaz e que possibilite aos alunos fácil compreensão e aplicação a situações diversas. Para que tais objetivos sejam alcançados, propõe-se o uso dos seguintes procedimentos metodológicos:

1. Inicialmente, deverão ser apresentados os pré-requisitos básicos, como simplificação de números racionais, transformação de números racionais em decimais, noções de conjuntos, porcentagem e Aritmética, necessários a aplicação da teoria;

2. Desenvolver o raciocínio combinatório por meio de situações-problema que envolvam contagens;

3. Utilizar instrumentos para efetuar contagens, como árvores de possibilidades e tabela de dupla entrada;

4. Resolver problemas que envolva o raciocínio combinatório, de modo que seja possível determinar suas soluções por representações diversas (tabelas, gráficos, diagrama de árvores, contagem direta, etc.);

5. Levar os alunos a reconhecerem a necessidade do uso da multiplicação na resolução de problemas de contagem;

6. Realizar contagens, aplicando a multiplicação e a divisão para reduzir agrupamentos repetidos;

7. Apresentar o Princípio Fundamental, como método geral de contagem, e suas consequências como as Permutações e Combinações;

8. Levantar, com os alunos, situações que motivaram o desenvolvimento da teoria das probabilidades, como os jogos de azar, eventos meteorológicos, biológicos, etc. e, de acordo com as chances de ocorrência das situações listadas, pedir que os classifiquem como: impossível, pouco provável e provável;

9. Descrever o espaço amostral associado a um experimento aleatório;

10. Compreender e descrever evento como um subconjunto do espaço amostral;

11. Realizar o seguinte experimento: em dupla, lançar uma moeda 20 vezes consecutivas e anotar os resultados, verificando quantas duplas obtiveram o mesmo resultado e, após os experimentos e suas análises, calcular as chances de ocorrência de caras e coroas, comparar os resultados e, em seguida definir probabilidade com base no modelo frequencial;

12. Compreender e aplicar na resolução de situações-problemas as noções de união, interseção e complementar de eventos;

13. Compreender espaço amostral reduzido, definir e aplicar noções de probabilidade condicional e suas consequências;

14. Resolver problemas que envolva o raciocínio probabilístico, de modo que seja possível determinar suas soluções;

15. Formar grupos ou duplas para resolver problemas propostos; 16) Propor pesquisa do uso de probabilidade no cotidiano;

16. Solicitar aos alunos que, em grupo, elaborem seus próprios problemas e que os troquem para resolvê-los e;

17. Integrar os conceitos estudados com outras disciplinas.

O caráter da pesquisa é descritivo. No capítulo 1, serão apresentados métodos de contagem e o Princípio Fundamental da Contagem com suas consequências e aplicações, como Combinações e Permutações. No capítulo 2, será apresentada a definição e os axiomas da probabilidade, assim como, algumas proposições simples e exemplos. No capítulo 3, será apresentado a definição de probabilidade condicional e suas consequências. E o capítulo 4, é destinado a aplicação da teoria combinatória e da probabilidade para a resolução de algumas situações problemas cotidianos. Considerando que a Teoria das Probabilidades surgiu das necessidades de solucionar problemas sobre jogos de azar é que este trabalho busca abordar este tema retomando e discutindo problemas antigos como o "problema dos pontos" e propondo a realização de experimentos como lançamentos de dados e apresentação de xadrez, baralho, dominó, etc e resolução de problemas diversos. No livro História da Matemática, de Carl Boyer [1], encontra-se a citação de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), um dos maiores matemáticos e astrônomos de todos os tempos, que assim se pronunciou sobre a Teoria das Probabilidades: "É notável que uma matéria que nasceu das considerações sobre jogos de azar se tivesse elevado ao nível das mais importantes realizações do espírito humano". Para Carl Boyer [1] "Não é então surpreendente ver tanto Euler quanto D'Alembert escrevendo sobre problemas de expectativa de vida, o valor de uma anuidade, loterias, e outros aspectos da ciência social". Ainda segundo Boyer "as probabilidades tinham sido um dos interesses principais dos amigos de *Euler, Daniel e Nicolas Bernoulli.* Segundo os cálculos de Euler, publicados nas Memórias da Academia de Berlim em 1751, um pagamento de 350 coroas deveria comprar para um recém-nascido uma anuidade de 100 coroas a começar dos 20 anos e continuando pelo resto da vida. Entre os problemas de loteria que ele publicou na mesma revista no ano de 1765, o seguinte é o mais simples: "Suponha que n bilhetes são numerados consecutivamente de 1 a n e que três bilhetes são tirados ao acaso, qual é a probabilidade de que três números consecutivos sejam retirado". Atualmente, a Teoria das Probabilidades estão presente cotidianamente nas ciências econômicas, biológicas, na atuaria, fenômenos meteorológicos, etc. Para Lima eti alii [5] "A Teoria das Probabilidades é o ramo da Matemática que cria, desenvolve e em geral pesquisa modelos que podem ser utilizados para estudar experimentos ou fenômenos aleatórios".

A gênese da Teoria das Probabilidades

A origem dos jogos remonta aos primórdios da história da humanidade. Por exemplo, quase todas as culturas primitivas desenvolveram algum tipo de jogo de dados. Não se tratando, pois de invenção de um só povo, certamente existiram causas comuns para a origem desse tipo de jogo; e uma hipótese razoável é que ele tenha se desenvolvido a partir de ritos religiosos de adivinhação. Por exemplo, pelo resultado do lançamento dos dados sobre um altar sagrado o sacerdote poderia "ficar sabendo" da disposição dos deuses quanto a uma dada questão. Nesse tempo, nada era considerado aleatório entendia-se que o resultado do lançamento dependia única e exclusivamente da vontade soberana dos deuses. O "ancestral" do atual dado é um osso chamado astrágalo. Em alguns animais, como o carneiro e a cabra, o astrágalo lembra remotamente um cubo, mas com apenas quatro faces regulares-duas estreitas e duas largas. Um jogo comum na Grécia antiga consistia em lançar quatro astrágalos; nesse caso a jogada em geral mais valoriza da era aquela em que os ossos mostravam faces diferentes (a jogada de Vênus). O mais antigo dado conhecido (3000 a.c) é de argila e foi encontrado numa escavação feita no norte do Iraque. A origem do jogo de cartas também é obscura, mas sua invenção costuma ser creditada a egípcios, chineses e indianos. A introdução das cartas na Europa ocidental ocorreria mais tarde, por meio das cruzadas. Porém, só depois da invenção da imprensa, no século XV, as cartas deixariam de ser acessíveis apenas aos bem aquinhoados. Nesse mesmo século, na França, os baralhos tomariam a feição como os conhecemos hoje, com suas cartas de espadas, copas, paus e ouro. O despontar da Teoria das Probabilidades dependia, porém, de alguns fatores que só começaram a se cristalizar por volta do fim do Renascimento, especialmente a aceitação de equiprobabilidade, ou seja, da regularidade dos eventos aleatórios em condições ideais, em contraposição ao determinismo de fundo religioso ou místico que permeava o pensamento até então (por exemplo, a aceitação do fato de que no lançamento de um dado honesto a probabilidade de se obter uma ou outra face é a mesma). Um dos mais antigos problemas da Teoria das Probabilidades, conhecido como "problemas dos pontos", é o da divisão justa das apostas entre dois jogadores cujo jogo foi interrompido por algum motivo. A primeira versão impressa aparece na obra do frade Luca Pacioli (1445-1514): "Num jogo de bola entre duas equipes, as apostas somam 22 ducados e são necessários 60 pontos para que uma delas seja ganhadora. Por algum incidente, o jogo é interrompido quando uma tem 50 pontos e a outra 30. Como dividir o prêmio entre as duas equipes"? Erradamente, Pacioli respondeu que as apostas deveriam ser divididas na razão 5 : 3, ou seja, a razão entre os pontos feitos. Ocorre que o problema dos pontos é muito mais difícil do que pode parecer à primeira vista, e somente em 1654, mais um século e meio depois de sua publicação, o matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) iria resolvê-lo com generalidade. Muito antes, porém, o erro da resposta de Pacioli já tinha sido apontado, e até ridicularizado, pelo médico, matemático e astrólogo Girolano Cardano (1501 - 1576), numa obra intitulada Practica aritmética e generalis (Aritmética geral prática), impressa em 1539. De fato, nessa obra, o autor diz ironicamente, entre outras coisas, que até uma criança perceberia o erro de Pacioli. Só que ele, ao resolver o problema, também chegou a uma solução incorreta. Neste trabalho, resolveremos o problema dos pontos numa versão moderna assim como outros problemas de aplicação da Teoria das Probabilidades. Não obstante esse erro, Cardano foi um dos maiores matemáticos de seu tempo e um precursor da Teoria das Probabilidades. É de sua autoria o primeiro livro a tratar, substancialmente e com fundamento, dessa matéria: Liber de ludo aleae (O livro dos jogos de azar), escrito por volta de 1550, mas só impresso em 1663. Autor de cerca de noventa obras, sobre diversas áreas, Cardano tinha razão especial para escrever esse livro: era um jogador compulsivo. Segundo consta de sua autobiografia, jogou xadrez por mais de quarenta anos e dados por cerca de 25 anos. Deve-se levar em conta, porém, que em sua época o jogo talvez fosse o passatempo predominante. Nessa obra de Cardano, já se encontrava a noção básica de probabilidade da ocorrência de um evento, descrita como quociente entre a soma das possíveis maneiras de ele ocorrer e a totalidade das possíveis ocorrências.

Considerações iniciais De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível Fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas. O trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento. Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN (2002), o ensino da Matemática deve contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também a contextualização sociocultural. Visando a contribuição sobre as orientações curriculares, a escolha de conteúdos; a forma de trabalhar os conteúdos; a proposta pedagógica e a organização curricular são fatores fundamentais para aprendizagens significativas e duradouras. Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano, sem desconsiderar o contexto do surgimento da teoria matemática. Além do mais faz-se necessário fazer referências a História da Matemática com o objetivo de colocar o leitor em contato com a história da criação do conhecimento em Matemática ou simplesmente situá-lo na linha do tempo. A forma de trabalhar os conteúdos deve sempre agregar um valor formativo no que diz respeito ao desenvolvimento do pensamento matemático. Isso significa colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático-nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva e resolver problemas interessantes. No entanto, a escola que tem como objetivo preparar o aluno para um aprendizado permanente e prepará-lo para a vida precisa refletir sobre o significado das competências que pretende desenvolver nos alunos. Entre essas competências destacamos: contextualização sociocultural, ou seja, compreender a construção do conhecimento como um processo histórico, em estreita relação com as condições sociais, políticas e econômicas de uma determinada época, de modo a permitir a aquisição de uma visão crítica da ciência em constante construção, sem dogmatismos nem certezas definitivas. E ainda, fazer uma avaliação diagnóstica. Pois a avaliação é um conjunto de ações organizadas com a finalidade de obter informações sobre o que foi assimilado pelo estudante, de que forma e em que condições. Para tanto, é preciso elaborar um conjunto de procedimentos investigativos que possibilitem o ajuste e a orientação adequada. A avaliação deve funcionar por um lado, como um instrumento que possibilite ao avaliador analisar criticamente a sua prática; e, por outro, como instrumento que apresente ao avaliado a possibilidade de saber sobre seus avanços, dificuldades e possibilidades. Para Fernanda Campos (2003 apud Dante [2]), "o processo avaliativo tem o papel de indicar a toda a comunidade escolar o andamento do processo de ensino e de aprendizagem" e, dessa forma, apontar caminhos que viabilizem aprendizagens cada vez mais significativas e que contribuam para o crescimento dos estudantes. Aos professores, coordenadores e diretores, o processo de avaliação deve fornecer parâmetros para reflexão sobre as práticas pedagógicas da escola, sobre as metodologias usadas nas aulas, bem como sobre os recursos e materiais didáticos utilizados. Os próprios instrumentos de avaliação devem ser continuamente repensados, desse modo, é necessário que os professores promovam, sempre que necessário, alterações nos seus planejamentos, redimensionando os objetivos a serem alcançados. Os resultados da avaliação também devem orientar a escola, com um todo, nos processos de reforço escolar. Aos estudantes, a avaliação tem como função de permitir que verifiquem sua evolução e crescimento, seus erros, suas dificuldades e o que aprenderam. Essa reflexão deverá ser capaz de mobilizá-los para compreender e corrigir eventuais erros, retomar e recuperar conceitos e promover maior envolvimento nas discussões em sala de aula.

Capítulo 1

Análise Combinatória

Neste capítulo será definido o Princípio Básico da Contagem e suas consequências como as Permutações e Combinações, assim como exemplos que ilustrem tais conceitos. O conceito de Análise Combinatória e Probabilidade são fundamentais em Matemática, e desempenham papel crucial na Matemática Aplicada. Grande parte dos problemas Estatísticos, das Ciências Econômicas, Ciências Biológicas são modelados usando-se Probabilidade. A Análise Combinatória é a parte da Matemática que estuda os processos de contagem. Ela surgiu da necessidade de se calcular o número de possibilidades que podem ocorrer numa certa experiência, sem precisar descrever cada uma dessas possibilidades. O estudo da Análise Combinatória começou no século XVI com o matemático italiano Niccolo Fontana (1500-1557), também conhecido como Tartaglia. A este, seguiram-se os franceses Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662). A Análise Combinatória é também o suporte da Teoria das Probabilidades, apoiando-se no Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo.

1.1 Contagens diretas e tabelas

Quando descrevemos todas as possibilidades de uma experiência ou evento, fazemos uma contagem direta. No dia-a-dia, estamos acostumados a fazer contagens diretas como, por exemplo, quantos dias faltam para nosso aniversário, de quantas maneiras diferentes podemos combinar duas camisas com três calças, etc. Consideremos o exemplo: de quantas maneiras diferentes podemos combinar 2 camisas diferentes com 3 calças também diferentes?

Organizando uma tabela com todas as combinações possíveis, temos:

	$Calca_1(K_1)$	$Calca_2(K_2)$	$Calca_3(K_3)$
$Cammisa_1(C_1)$	C_1K_1	C_1K_2	C_1K_3
$Cammisa_2(C_2)$	C_2K_1	C_2K_2	C_2K_3

Portanto, temos 6 maneiras diferentes.

1.2 Exercícios resolvidos

Exemplo 1.2.1. Lançando-se uma moeda duas vezes seguidas, quais os resultados possíveis?

Resolução Há duas possibilidades em cada lance: sair cara ou coroa. Designando cara por C e coroa por K, temos:

1º lance	2º lance
C	C
C	K
K	C
K	K

Temos, portanto: 4 possibilidades diferentes.

Exemplo 1.2.2. Lançando-se um dado duas vezes seguidas, quais as possibilidades de que a soma obtida seja igual a 9? **Resolução:** Sabemos que o dado é um cubo, onde as faces são enumeradas de 1 a 6 e que duas faces opostas somam sempre 7. As possibilidades de a soma obtida ser igual a 9, são:

1º lance	2º lance
3	6
4	5
5	4
6	3

Temos, portanto 4 possibilidades.

Exemplo 1.2.3. Dado o conjunto $E = \{1, 3, 4\}$, obter todos os números de dois algarismos distintos com os elementos de E. Resolução:

$$\begin{array}{ccc} 1\,\text{com}\,3 \rightarrow 13 & 1\,\text{com}\,3 \rightarrow 13 & 4\,\text{com}\,1 \rightarrow 41 \\ 1\,\text{com}\,4 \rightarrow 14 & 3\,\text{com}\,4 \rightarrow 34 & 4\,\text{com}\,3 \rightarrow 43 \end{array}$$

Logo, os números são: $13, 14, 31, 34, 41\,\text{e}\,43$.

Exemplo 1.2.4. Quantos e quais são os anagramas que podemos formar com as letras da palavra RUA?

Resolução: Dá-se o nome de anagrama, quando trocamos de lugar as letras de uma palavra e obtemos outras palavras com ou sem sentido. Temos, assim:

$$RUA, RAU, URA, UAR, ARU, AUR.$$

Portanto, podemos formar 6 anagramas.

Exemplo 1.2.5. Quantas peças tem um jogo de dominó comum? **Resolução:** Vamos descrever as peças:

	0	1	2	3	4	5	6
0	00	01	02	03	04	05	06
1		11	12	13	14	15	16
2	4		22	23	24	25	26
3				33	34	35	36
4					44	45	46
5						55	56
6							66

Contando as peças, temos $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$ (nº de peças de cada linha da tabela) ou $7 \times 7 - (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 49 - 21$ (nº de quadrinhos da tabela) $-$ (nº de quadrinhos vazios da tabela) Um jogo de dominó tem, portanto, 28 peças.

1.2.1 Exercícios propostos:

Exemplo 1.2.6. Dado o conjunto $E = \{a, b, c, d\}$, obter todos os elementos formados por duas letras distintas com os elementos de E?

Exemplo 1.2.7. Lançando um dado duas vezes seguidas, quais as possibilidades de obtermos soma igual a 8?

Exemplo 1.2.8. Daniela tem 4 saias e 2 blusas. De quantas e quais maneiras ela pode combinar as duas peças?

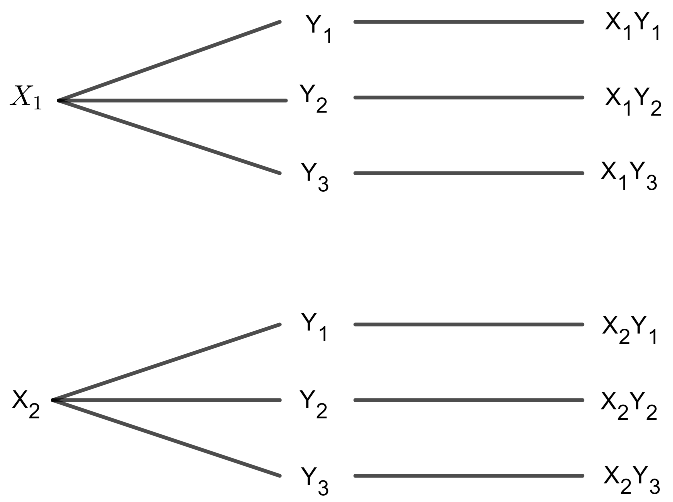
Exemplo 1.2.9. No lançamento de um dado e de uma moeda, quantos e quais são os resultados possíveis?

Exemplo 1.2.10. Marília fez um jogo da Quina e apostou os números: $12, 26, 40, 45, 62$ e 80. Em quantas quinas ela apostou? Quais foram essas quinas?

1.3 Diagrama de árvore

Vimos que utilizando o método da contagem direta, descrevemos todas as possibilidades de uma experiência ou evento, porém, em outras situações, a contagem direta pode ser trabalhosa ou, até mesmo, impossível.

Suponha, por exemplo, que quiséssemos saber de quantas maneiras diferentes é possível preencher o volante da Quina, apostando cinco dezenas, mantendo o número 47 e combinando-o com os outros 79 números. Esta seria uma tarefa para a Análise Combinatória, que calcularia o número total de possibilidades, sem a necessidade de descrever cada uma delas. O diagrama de árvore, também conhecido como diagrama de possibilidades, é um esquema utilizado para enumerar todas as possibilidades de um evento com o objetivo de facilitar a resolução dos problemas de contagem. Note que a árvore é construída da esquerda para a direita e que o número de "ramos" que saem de cada ponto corresponde ao número de possibilidades em que o evento pode ocorrer. Por exemplo, retomemos o nosso problema de como combinar duas camisas com três calças diferentes. Pelo diagrama de árvore, temos: Denominamos camisa por X e calça por Y:



Temos, portanto, 6 possibilidades.

1.3.1 Exercícios propostos:

Exemplo 1.3.1. Plínio e Rubens disputam entre si um torneio de tênis. O primeiro a ganhar 2 partidas seguidas ou 3 alternadas vence o torneio. Quais são os resultados possíveis no torneio?

Exemplo 1.3.2. Representar no diagrama de árvore os anagramas da palavra AMOR.

Exemplo 1.3.3. Representar no diagrama de árvore a quantidade de números naturais de dois algarismos distintos que podemos formar com os algarismos $5, 6, 7$ e 8.

Exemplo 1.3.4. Representar no diagrama de árvore as palavras começadas pela consoante S da palavra SAPO.

Exemplo 1.3.5. Duas equipes X e Y, disputam um torneio de vôlei. A primeira a ganhar 2 jogos seguidos ou 4 jogos alternados vence o torneio. De quantas maneiras o torneio pode acontecer?

Exemplo 1.3.6. Duas pessoas, Antônio e Benedito, praticam um jogo no qual em cada partida há um único vencedor. O jogo é praticado até que um deles ganhe 2 partidas ou 4 partidas tenham sido jogadas, o que ocorrer primeiro. Quais as sequencias possíveis de ganhadores?

Exemplo 1.3.7. Suponha que no início de um jogo você tenha $R\$2000,00$ e que só possa jogar enquanto tiver dinheiro. Supondo que em cada jogada você perde ou ganha $R\$1000,00$, quais são os possíveis resultados ao final de três jogadas?

Exemplo 1.3.8. Um homem tem oportunidade de jogar no máximo 5 vezes na roleta. Em cada jogada, ele ganha ou perde $R\$1000,00$. Começará com $R\$1000,00$ e parará de jogar antes de cinco vezes, se perder todo seu dinheiro ou se ganhar $R\$3000,00$, isto é, se tiver $R\$4000,00$. De quantas maneiras o jogo poderá se desenrolar?

Exemplo 1.3.9. Uma urna tem 10 bolinhas numeradas de $1,2,3,\cdot,10$. Três bolinhas são extraídas sucessivamente, sem reposição. De quantas formas os números das bolinhas formam uma P.A. na ordem em que foram extraídas?

Exemplo 1.3.10. Em um baile há r rapazes e m moças. Um rapaz dança com 5 moças, um segundo rapaz dança com 6 moças, e assim sucessivamente. O último rapaz dança com todas as moças. Qual é a relação entre m e r?

Exemplo 1.3.11. Uma moto tem combustível suficiente para somente três voltas num circuito. Pedro, Manoel e Antônio disputam, por meio do lançamento de uma moeda, a oportunidade de dar cada volta, do seguinte modo:

I O lançamento da moeda é efetuado antes de cada volta;

II Se coroa, a vez é de Manoel;

III Se cara, a vez é de Pedro;

Se a mesma face ocorrer consecutivamente, a vez é de Antônio. Se a primeira volta for dada por Pedro, quantas voltas poderá dar Antônio?

1.4 Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Nos casos em que as alternativas de escolhas forem muitas, a contagem direta e o diagrama de árvore são poucos práticos. Para essas situações, usamos o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, que é um método algébrico para determinar o número total de possibilidades. Este método consiste em multiplicar o número de possibilidades de cada etapa da experiência. Para entendermos melhor, observemos atentamente o exemplo a seguir:

Exemplo 1.4.1. Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher? Chamando os homens de h_1, h_2, h_3 e as mulheres de m_1, m_2, m_3, m_4 é fácil ver que há 4 casais nos quais o homem é h_1, outros 4 nos quais o homem é h_2 e outros 4 nos quais o homem é h_3. O número de casais é, portanto $4+4+4+4 = 3 \times 4 = 12$.

O exemplo acim ilustra o Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio da Multiplicação, o qual diz: **Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2 é xy.** Assim, no exemplo, para formar um casal devemos tomar as decisões

d_1 escolha do homem;

d_2 escolha da mulher.

Como d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal, isto é, de tomar as decisões d_1 e d_2 é $3 = 12$.

Note que o uso do Princípio de Multiplicação permite obter o número de elementos do conjunto

$$\{h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4\}$$

De um modo geral se uma decisão D_1 pode ser feita de N_1 maneiras, uma decisão D_2 de N_2 maneiras, ..., uma decisão D_k de N_k maneiras, então o número de maneiras de realizar $D_1, D_2, \cdots, D_k$, em sequência, é $N1_{\times}N_2 \times \cdots \times N_k$.

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi)

Exemplo 1.4.2. Temos três cidades $X, Y,$ e Z. Existem quatro rodovias que ligam X com Y e cinco que ligam Y com Z. Partindo de X e passando por Y, de quantas formas pode-se chegar até Z?

Solução: Há 4 modos de escolher a rodovia que ligam X com Y e 5 modos de escolher a rodovia que ligam Y com Z. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, há $4 \times 5 = 20$ formas de chegar a Z partindo de X e passando por Y.

Exemplo 1.4.3. Um teatro tem 5 portas. De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode entrar e sair do teatro? **Solução:** Existem 5 possibilidades para entrar no teatro e 5 possibilidades para sair do teatro. Pelo Princípio Fundamental da contagem existem $5 \times 5 = 25$ maneiras diferentes para entrar e sair do teatro.

Exemplo 1.4.4. Um edifício tem 8 portas. De quantas formas uma pessoa poderá entrar e sair do edifício por uma porta diferente da qual usou para entrar?

Solução: Há 8 formas de escolher uma porta para entrar. Como não pode sair pela porta que entrou restam 7 maneiras de escolher uma porta para sair. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $8 \times 7 = 56$ maneiras de entrar e sair do edifício.

Exemplo 1.4.5. Quantos números de dois algarismos podem ser formados, usando os dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

Solução: Como não é mencionado se os algarismos devem ser distintos, então consideramos os números formados de dois algarismos distintos ou não. Há 8 modos de escolher o algarismo das dezenas e 8 modos de escolher o algarismo das unidades. Logo, podem ser formados $8 \times 8 = 64$ números com dois algarismos distintos ou não.

1.5 Permutações

Quantos diferentes arranjos ordenados das letras a, b e c são possíveis? Por enumeração direta vemos que são 6, ou seja, abc, abc, bca, acb, cabe cba. Cada combinação é conhecida como uma permutação. Assim, vê-se que um conjunto de 3 objetos permite 6 permutações possíveis. Esse resultado poderia ser obtido a partir do princípio básico, já que o primeiro objeto da permutação pode ser qualquer um dos três, o segundo objeto pode então ser escolhido a partir dos dois restantes e o terceiro objeto da permutação é o objeto restante. Assim, há $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutações possíveis. Suponha agora que tenhamos n objetos. O emprego de um raciocínio similar àquele que acabamos de utilizar no caso das três letras mostra então que há

$$n(n-1)(n-2)...3.2.1 = n!$$

Permutações diferentes dos n objetos. Logo, permutação P de n objetos é dada por $P_n = n!$

Exemplo 1.5.1. Uma turma de teoria da probabilidade é formada por 6 homens e 4 mulheres. Aplica-se uma prova, os estudantes são classificados de acordo com o seu desempenho. Suponha que nenhum estudante tenha tirado a mesma nota.

(a) Quantas diferentes classificações são possíveis?

(b) Se os homens forem classificados apenas entre si e as mulheres apenas entre si, quantas diferentes classificações são possíveis?

Solução:

(a) Como cada classificação corresponde a um arranjo particular das 10 pessoas, a resposta é $10! = 3628800$.

(a) Como há 6! Possíveis classificações dos homens entre si e 4! Classificações possíveis das mulheres entre si, segue do princípio básico que há $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$ classificações possíveis neste caso.

Vamos agora determinar o número de permutações de um conjunto de n objetos quando não for possível distinguir certos objetos de outros. Para tornar essa situação um pouco mais clara, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 1.5.2. Quantos diferentes arranjos de letras podem ser formados a partir das letras $PERPER$? Solução: Primeiro notamos que as letras $P_1E_1R_1P_2E_2R_2$ permitem 6! Permutações quando os $3PS$ e os $3ES$ são diferentes uns dos outros. Entretanto, considere qualquer uma destas permutações por exemplo, $P_1P_2E_1P_3E_2R$. se agora permutarmos os PS e os ES entre si, então o arranjo resultante continuará a ser $PPEPER$. Isto é, todas as 3!2! Permutações

$$
\begin{array}{ll}
P_1P_2E_1P_3E_2R & P_1P_2E_2P_3E_1R \\
P_1P_3E_1P_2E_2R & P_1P_3E_2P_2E_1R \\
P_2P_1E_1P_3E_2R & P_2P_1E_2P_3E_1R \\
P_2P_3E_1P_1E_2R & P_2P_3E_2P_1E_1R \\
P_3P_1E_1P_2E_2R & P_3P_1E_2P_1E_1R \\
P_3P_2E_1P_1E_2R & P_3P_2E_2P_1E_1R
\end{array}
$$

São da forma $PPEPER$. Portanto, há $\frac{6!}{3!2!} = 60$ arranjos possíveis das letras PEPPER.

Em geral, o mesmo raciocínio usado no Exemplo ([?]) mostra que há $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$.

Permutações diferentes de n objetos, dos quais n_1 são parecidos, n_2 são parecidos, . . . n_r são parecidos.

Exemplo 1.5.3. Quantos diferentes sinais, cada um deles formado por nove bandeiras alinhadas, podem ser feitos a partir de um conjunto de quatro bandeiras brancas, três bandeiras vermelhas e duas azuis se todas as bandeiras de mesma cor forem idênticas?
Solução: Há

$$\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

sinais diferentes.

1.6 Permutações caóticas

Uma permutação dos números $(1, 2, \cdots, n)$ é dita caótica quando nenhum número está no seu lugar primitivo. Assim, as permutações 2143 e 3142 são caóticas mas 1342 não é (1 está no seu lugar primitivo). Para calcular o número D_n de permutações caóticas de $(1, 2, \cdots, n)$, defina-se $A_i =$ conjunto das permutações caóticas de $(1, 2, \cdots, n)$ em que o número i ocupa o i-ésimo lugar, $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Queremos calcular o número de elementos do conjunto das permutações caóticas de $(1, 2, \cdots, n)$ que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n$. temos

$$S_0 = n(\Omega) = n!S_1 = \sum_{i=1}^{n} n(A_i)$$

O número de permutações caóticas de $(1, 2, ..., n)$ é

$$D_n = n![\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(1)^{-n}}{n!}]$$

. Demonstração: ver referência bibliográfica (Análise Combinatória e Probabilidade de Augusto César Morgado) Por exemplo, $D_4 = 9$

1.7 Combinações

O número C de grupos diferentes de r objetos que podem ser formados a partir de um total de n objetos é dado por:

$$C_{n,r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.1}$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Análise Combinatória e Probabilidade de Augusto César Morgado [7])

Notação e terminologia

Definimos , para $\binom{r}{n}$, para $n \leq r$ como

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{1.2}$$

E dizemos que $\binom{n}{r}$ representa o número de combinações possíveis de n objetos em grupos de r elementos de cada vez. Por convenção, define-se $0! = 1$. Com isso, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Além isso, assume-se que $\binom{n}{i} = 0$ quando $i < 0$ ou $i > n$.

Exemplo 1.7.1. Um comitê de três pessoas deve ser formado a partir de um grupo de 20 pessoas. Quantos comitês diferentes são possíveis?

Solução: Há $\binom{20}{3} = \frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$ comitês possíveis.

Exemplo 1.7.2. De um grupo de cinco mulheres e sete homens, quantos comitês diferentes formados por duas mulheres e três homens podem ser formados? E se dois dos homens estiverem brigados e se recusarem a trabalhar juntos? Solução: Como há $\binom{5}{2}$ grupos possíveis de duas mulheres e $\binom{7}{3}$ grupos possíveis de três homens, o princípio básico diz que há $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5\times4}{2\times1}\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 350$ comitês possíveis formados por duas mulheres e três homens. Suponha agora que dois dos homens se recusem a trabalhar juntos. Como um total de $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$ dos $\binom{7}{3} = 35$ grupos possíveis de três homens contém os dois homens brigados, tem-se $35 - 5 = 30$ grupos não contendo ambos os homens brigados. Como há ainda $\binom{5}{2} = 10$ maneiras de escolher as duas mulheres, há $30 \times 10 = 300$ comitês possíveis neste caso.

Os valores $\binom{n}{r}$são frequentemente chamados de coeficientes binomiais.

A identidade a seguir é útil em análise combinatória:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r_1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n \tag{1.3}$$

Teorema 1.7.1. O Teorema binomial

$$(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{1.4}$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Ross [9])

Exemplo 1.7.3. Expanda $(x+y)^3$ Solução: Aplicando o Teorema binomial temos

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^0y^3 + \binom{3}{1}x^1y^2 + \binom{3}{2}x^2y^1 + \binom{3}{3}x^3y^0 = y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 \quad (1.5)$$

Capítulo 2

Axiomas de Probabilidades

Neste capítulo, introduzimos os conceitos de espaço amostral e eventos, os axiomas da probabilidade, algumas proposições simples, espaços amostrais equiprováveis e a definição de probabilidade como uma função contínua de um conjunto e como medida de crença.

2.1 Espaços amostrais e eventos

Considere um experimento cujo resultado não se pode prever com certeza. Entretanto, embora o resultado do experimento não seja conhecido antecipadamente, vamos supor que o conjunto de todos os resultados possíveis seja conhecido. Esse conjunto é conhecido como espaço amostral do experimento e é representado pela letra SA seguir, vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1.1. Se o resultado de um experimento consiste na determinação do sexo de um bebê recém-nascido, onde o resultado g significa que o bebê é menina e b que o bebê é menino, então

$$S = \{g, b\}$$

Exemplo 2.1.2. Se o resultado de um experimento é a ordem de chegada de uma corrida entre 7 cavalos numerados de 1 a 7, então $S = \{\text{todas as } 7! \text{ permutações de } (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)\}$

Exemplo 2.1.3. Se o experimento consiste em jogar duas moedas, então o espaço é formado pelos quatro pontos a seguir:

$$S = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

Exemplo 2.1.4. Se o experimento consiste em jogar dois dados, então o espaço amostral e formado por 36 pontos

$$S = \{(i, j); i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exemplo 2.1.5. . Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então o espaço amostral é formado por todos os números não negativos, isto é:

$$S = \{x : 0 \leq x \leq \infty\}$$

Qualquer subconjunto E do espaço amostral é conhecido como um evento. Em outras palavras, um evento é um conjunto formado pelos possíveis resultados do experimento. Se o resultado do experimento estiver contido em E, então dizemos que E ocorreu. A seguir listamos alguns exemplos de eventos.

No exemplo 2.1.1 anterior, se $E = \{g\}$, então E é o evento em que o bebê é uma menina. Similarmente, se $F = \{b\}$, então F é o evento em que o bebê é um menino.

No exemplo 2.1.2, se $E = \{\text{todos os resultados em } S \text{ começando com um } 3\}$, então E é o evento que o cavalo 3 vence a corrida.

No exemplo 2.1.3, se $E = \{(H, H), (H, T)\}$, então E é o evento em que a primeira moeda lançada dá cara.

No exemplo 2.1.4, se $E = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$, então E é o evento em que a soma dos dados é igual a 7. No exemplo 2.1.5, se $E = \{x : 0 \leq x \leq 5\}$, então E é o evento em que o transistor não funciona mais que 5 horas.

Para quaisquer dois eventos E e F de um espaço amostral S, definimos o novo evento $E \cup F$ como sendo formado por todos os resultados que pertencem a E ou a F ou a E e F simultaneamente. Isto é, o evento $E \cup F$ ocorrerá se E ou F ocorrer. O evento $E \cup F$ é chamado de união dos eventos E e F.

De forma similar, para quaisquer dois eventos E e F, também podemos definir o novo evento EF, chamado de interseção de E e F, como sendo formado por todos os resultados que estão tanto em E quanto em F, isto é, o evento EF (às vezes escrito $E \cap F$) ocorre apenas se$E$ e F ocorrerem. Se $EF = \emptyset$, então se diz que E e F são mutuamente exclusivos.

Definimos uniões e interseções de mais de dois eventos de forma similar. Se $E_1, E_2, \cdots$ são eventos, então a união desses eventos, representados como,$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, é definida como o evento formado por todos os resultados que aparecem em E_n para pelo menos um valor de $n = 1, 2, 3, \cdots$. Similarmente, a interseção dos eventos E_n, representada como $\bigcap_{n=1}^{\infty}$, é definida como o evento formado pelos resultados que aparecem em todos os eventos $E_n, n = 1, 2, \cdots$

Finalmente, para quaisquer eventos E, definimos o novo evento E^c, chamado de complemento de E, como o evento formado por todos os resultados do espaço amostral que não estão contidos em E isto é, E^c ocorrerá se e somente se E não ocorrer.

Para quaisquer dois eventos E e F, se todos os resultados de E também estiverem em F, dizemos que E está contido em F, ou que E é um subconjunto de F e escrevemos $E \subset F$ (ou, de forma equivalente, $F \supset E$). Assim, Se $E \subset F$ e $F \subset E$, dizemos que E e F são iguais e escrevemos $E = F$. As operações de uniões, interseções e complementares de eventos obedecem as regras da álgebra. Leis comutativas: $E \cup F = F \cup E$, $EF = FE$ Leis associativas: $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$, $(EF)G = E(FG)$

Leis distributivas:$(E \cup F)G = EG \cup FG$, $EF \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$

Leis de DeMorgan: $(\bigcup_{i=1}^{n} E_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (E_i)^c$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Ross [9])

2.2 Axiomas da probabilidade

Vamos definir uma probabilidade de um evento em termos de sua frequência relativa: suponhamos que um experimento, cujo espaço amostral é S, seja realizado repetidamente em condições exatamente iguais. Para cada evento E do espaço amostral S, definimos $n(E)$ como o número de vezes que o evento E ocorre nas n primeiras repetições do experimento. Então, $P(E)$, a probabilidade do evento E, é definida como

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n} \tag{2.1}$$

Isto é, $P(E)$ é definida como a proporção (limite) de tempo em que E ocorre. Ela é também a frequência limite de E. Agora, considere um experimento cujo espaço amostral é S. para cada evento E do espaço amostral S, assumimos que um número $P(E)$ esteja definido e satisfaça os três axiomas a seguir:

Axioma 2.2.1. $0 \leq P(E) \leq 1$

Axioma 2.2.2. $P(S) = 1$

Axioma 2.2.3. Para cada sequência de eventos mutuamente exclusivos $E_1, E_2, ...$ (isto é, eventos para os quais $E_iE_j = \emptyset$ quando $i \neq j$),

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \tag{2.2}$$

Sendo $P(E)$ a probabilidade do evento E. Assim, o Axioma 2.2.1 diz que a probabilidade de o resultado do experimento ser o resultado de E é igual a algum número entre 0 e 1. O Axioma 2.2.2 diz, com probabilidade 1, que o resultado será um ponto contido do espaço amostral S. O Axioma 2.2.3 diz que, para qualquer sequência de eventos mutuamente exclusivos, a probabilidade de pelo menos um desses eventos ocorrer é justamente a soma de suas respectivas probabilidades.

Exemplo 2.2.1. Se um experimento corresponde ao lançamento de uma moeda e se supomos que a probabilidade de dar cara é igual à de dar coroa, então temos

$$P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, se a moeda tivesse sido adulterada e identificássemos a sua probabilidade de dar cara como sendo duas vezes de dar coroa, então teríamos,

$$P(H) = \frac{2}{3} \text{ e } P(T) = \frac{1}{3}$$

Exemplo 2.2.2. Se um dado é jogado e supomos que seus lados tenham a mesma probabilidade de aparecer, então teremos $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$. Do Axioma 2.2.3, tem-se que a probabilidade de sair um número par é igual a

$$P(2,4,6) = P(2) = P(4) = P(6) = \frac{1}{2}$$

2.3 Algumas proposições simples

Nesta seção, apresentaremos algumas proposições simples envolvendo probabilidades.

Proposição 2.3.1.

$$P(E^c) = 1 - P(E) \tag{2.3}$$

A Proposição 2.3.1 diz que a probabilidade de um evento não ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade de ele ocorrer. Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi).

Proposição 2.3.2. Se $E \subset F$, então $P(E) \leq P(F)$. Essa proposição diz que, se o evento E está contido no evento F, então a probabilidade de E não é maior que a probabilidade de F. Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi)

Proposição 2.3.3.

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF) \tag{2.4}$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi [9])

Exemplo 2.3.1. José leva dois livros para ler durante as férias. A probabilidade de ele gostar do primeiro livro é $0,5$, de gostar do segundo livro é de $0,4$ e de gostar de ambos os livros é de $0,3$. Qual é a probabilidade de que ele não goste de nenhum dos livros?

Solução: Seja B_1 o evento "José gosta do livro i", $i = 1,2$. Então a probabilidade de José gostar de pelo menos um dos livros é

$$P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 B_2) = 0,5 + 0,4 - 0,3 = 0,6 \tag{2.5}$$

E a probabilidade de José não gostar de nenhum dos livros é

$$P(B_1 \cup B_2)^c = 1 - P(B1 \cup B2) = 1 - 0,6 = 0,4 \tag{2.6}$$

Proposição 2.3.4.

$$\begin{aligned} P(\textstyle\bigcup_{i=1}^n E_i) &= \textstyle\sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \ldots + \\ &(-1)^{r+1} \textstyle\sum_{i_1 < I_2 < \ldots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \ldots E_{i_r}) + \ldots \\ &(-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \ldots E_n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

A soma $\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(E_{i_1}E_{i_2}\ldots E_{i_r})$ é feita ao longo de todos os $\binom{r}{n}$ subconjuntos possíveis de temanho r do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$

A Proposição 2.3.4 diz que a probabilidade da união de n eventos é igual à soma das probabilidades individuais desses eventos, menos a soma das probabilidades desses eventos dois a dois, mais a soma das probabilidades desses eventos três a três, e assim por diante. Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi)

2.4 Espaços amostrais equiprováveis

Em muitos experimentos, é natural supor que todos os resultados presentes no espaço amostral sejam igualmente prováveis. Por exemplo, considere um experimento cujo espaço amostral S é um conjunto finito, digamos, $S = \{1, 2, \ldots, N\}$. Nesse caso, é natural supor que

$$P(1) = P(2) = \cdots = P(N)$$

o que implica, dos axiomas 2.2.2 e 2.2.3 que

$$P(\{i\}) = \frac{1}{N} i = 1, 2, \ldots, N$$

Dessa equação, resulta do Axioma 2.2.3 que, para cada evento E,

$$P(E) = \frac{\#E}{\#S}$$

Colocando em palavras se supomos que todos os resultados de um experimento são igualmente prováveis, então a probabilidade de qualquer evento E é igual à proporção de resultados no espaço amostral que estão contidos em E.

Exemplo 2.4.1. Se dois dados são lançados, qual é a probabilidade de que a soma das faces de cima seja igual a 7? Solução: Como há 6 resultados possíveis, isto é, $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)e(6, 1)$ que resultam na soma dos dados ser igual a 7, a probabilidade desejada é igual a $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exemplo 2.4.2. Se três bolas são "retiradas aleatoriamente" de um recipiente contendo 6 bolas brancas e 5 pretas, qual é a probabilidade de que uma das bolas seja branca e as outras duas sejam pretas? Solução: O espaço amostral é formado por $11 \times 10 \times 9 = 990$ resultados. Além disso, existem $6 \times 5 \times 4 = 120$ resultados nos quais a primeira bola é branca e as outras duas são pretas; $5 \times 6 \times 4 = 120$ resultados nos quais a primeira bola é preta, a segunda é branca e a terceira é preta; e $5 \times 4 \times 6 = 120$ resultados nos quais as duas primeiras bolas são pretas e a terceira é branca. Portanto, supondo o espaço amostral equiprovável, vemos que a probabilidade desejada é igual a

$$\frac{120 + 120 + 120}{990} = \frac{4}{11}$$

Exemplo 2.4.3. Um comitê de 5 pessoas deve ser selecionado de um grupo de 6 homens e 9 mulheres. Se a seleção for feita aleatoriamente, qual é a probabilidade de que o comitê seja formado por 3 homens e 2 mulheres?

Solução: Como cada um dos $\binom{15}{5}$ comitês possíveis tem a mesma probabilidade de ser selecionado, a probabilidade desejada é

$$\frac{\binom{6}{3}\binom{9}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{240}{1001} \tag{2.8}$$

2.5 Probabilidade como uma função contínua de um conjunto

Nesta seção definiremos probabilidade como uma função contínua de um conjunto. Uma sequência de eventos $\{E_n, n \geq 1\}$ é chamada de sequência crescente se

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

E é chamada de sequência decrescente se

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_{n+1} \ldots$$

Se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência crescente de eventos, então definimos um novo evento, representado por $\lim_{n\to\infty} E_n$, como

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Similarmente, se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência decrescente de eventos, definimos $\lim_{n\to\infty} E_n$, como

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

Proposição 2.5.1. Se $\{E_n, n \geq 1\}$ é uma sequência crescente ou decrescente de eventos, então

$$\lim_{n\to\infty} P(E_n) = P(\lim_{n\to\infty} E_n)$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi [9])

2.6 Probabilidade como uma medida de crença

Até agora interpretamos a probabilidade de um evento de certo experimento como sendo uma medida da frequência de ocorrência desse evento quando o experimento é repetido continuamente. Entretanto, existem também outros usos para o termo probabilidade. Por exemplo, todos nós já ouvimos algo como "A probabilidade de que Shakespeare tenha realmente escrito Hamlet é de 90%" ou "A probabilidade de que ***Lee Harvey Oswald*** tenha agido sozinho no assassinato de Kennedy é de $0,8$". Como interpretar essas frases? A interpretação mais simples e natural é a que as probabilidades citadas são medidas da crença de um indivíduo. Em outras palavras, o indivíduo que diz as frases acima está bem certo de que Lee Harvey Oswald agiu sozinho e ainda mais certo de que Shakespeare escreveu Hamlet. Essa interpretação da probabilidade como sendo uma medida de crença é chamada de visão pessoal ou subjetiva da probabilidade. Parece lógico supor que "uma medida de crença" deva satisfazer todos os axiomas da probabilidade. Por exemplo, se temos 70% de certeza de que Shakespeare escreveu Júlio César e 10% de certeza de que foi na realidade Marlowe quem escreveu essa peça, então é lógico supor que temos 80% de certeza de que foi Shakespeare ou Marlowe quem a escreveu. Com isso, seja com a interpretação da probabilidade como uma medida de crença ou como uma frequência de ocorrência em uma longa sequência de experimentos, suas propriedades matemáticas permanecem inalteradas.

Exemplo 2.6.1. Suponha que, em uma corrida de 7 cavalos, você sinta que cada um dos 2 primeiros cavalos tem 20% de chance de vencer, os cavalos 3 e 4 tem uma chance de 15%, e os três cavalos restantes tem uma chance de 10% cada. Seria melhor para você apostar, podendo ganhar o mesmo que apostou, na vitória dos três primeiros cavalos ou na vitória dos cavalos 1,5,6e7?

Solução: Com base em suas probabilidades pessoais a respeito do resultado da corrida, a probabilidade de você vencer a primeira aposta é de $0,2 + 0,2 + 0,15 = 0,55$, enquanto a de vencer a segunda aposta é de $0,2 + 0,1 + 0,1 + 0,1 = 0,5$. Com isso, a primeira aposta é mais atraente.

Capítulo 3

Probabilidade Condicional e Independência

Neste capítulo, introduzimos um dos conceitos mais importantes da teoria da probabilidade. A importância desse conceito é dupla. Em primeiro lugar, estamos frequentemente interessados em calcular probabilidades quando temos alguma informação parcial a respeito do resultado de um experimento; em tal situação, as probabilidades desejadas são condicionais. Em segundo lugar, mesmo quando não temos nenhuma informação parcial sobre o resultado de um experimento, as probabilidades condicionais podem ser frequentemente utilizadas para computar mais facilmente as probabilidades desejadas. Além disso, será abordado eventos independentes, aplicada a fórmula de Bayes e mostrado que a probabilidade condicional satisfaz os axiomas da probabilidade.

3.1 Probabilidades condicionais

Suponha que lancemos dois dados. Suponha também que cada um dos 36 resultados possíveis seja igualmente provável e que portanto tenha probabilidade $\frac{1}{36}$. Além disso, digamos que o primeiro dado seja um 3. Então, dada essa informação, qual é a probabilidade de que a soma dos 2 dados seja igual a 8? Para calcular essa probabilidade, pensamos da seguinte maneira: sabendo que saiu um 3 no dado inicial, existirão no máximo 6 resultados possíveis para nosso experimento, isto é, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$ e $(3,6)$. Como cada um desses resultados tinha originalmente a mesma probabilidade de ocorrência, os resultados deveriam continuar a ter probabilidades iguais. Isto é, dado que o primeiro dado é um 3, a probabilidade (condicional) de cada um dos resultados $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$ e $(3,6)$ é $\frac{1}{6}$, enquanto a probabilidade 9 condicional) dos outros 30 pontos no espaço amostral será igual a $\frac{1}{6}$.

Se E e F representarem, respectivamente, o evento em que a soma dos resultados é igual a 8 e o evento em que o primeiro dado é 3, então a probabilidade que acabamos de obter é chamada probabilidade condicional de que E ocorra dado que F ocorreu e é representada por $P(E|F)$

Definição 3.1.1. Se $P(F) > 0$, então

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1.1. Uma moeda é jogada duas vezes. Supondo que todos os quatro pontos no espaço amostral $S = \{(h,h),(h,t),(t,h),(t,t)\}$ sejam igualmente prováveis, onde h representa cara e t representa coroa, qual é a probabilidade condicional de que dê cara em ambas as jogadas, dado que

a) dê cara na primeira jogada?

b) dê cara em pelo menos uma das jogadas?

Solução: Seja $B = \{(h,h)\}$ o evento em que ambas as jogadas dão cara; $F(h,h),(h,t)$ o evento em que dá cara na primeira moeda, e $A = \{(h,h),(h,t),(t,h)\}$ o evento em dá cara em pelo menos uma jogada. A probabilidade referente letra (a) pode ser obtida de

$$P(B|F) = \frac{P(BF)}{P(F)} = \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

Para a letra (b)

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{P(\{(h,h)\})}{P(\{(h,h),(h,t),(t,h)\})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Exemplo 3.1.2. Celina está indecisa quanto a fazer uma disciplina de francês ou de química. Ela estima que sua probabilidade de conseguir um conceito A seria de $\frac{1}{2}$ em uma disciplina de francês e de $\frac{2}{3}$ em uma disciplina de química. Se Celina decide basear a sua escolha no lançamento de uma moeda honesta, qual é a probabilidade de que ela obtenha um A em química? Solução: Suponha que C seja o evento em que Celina faz o curso de química e A o evento em que ela tira A independentemente do curso que fizer. Então a probabilidade desejada é P(CA), que é calculada usando-se a Equação (3.1) como se segue

$$P(CA) = P(C)P(A|C)$$

3.1.1 A regra da multiplicação

$$P(E1E2E3\dots En) = P(E1)P(E2|E1)P(E3|E1E2)\dots P(E|E1\dots En-1) \tag{3.2}$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi [9])

Exemplo 3.1.3. Um baralho comum de 52 cartas é dividido aleatoriamente em 4 pilhas de 13 cartas cada. Calcule a probabilidade de que cada pilha tenha exatamente um às. Solução: Defina os eventos E_i,$i = 1,2,3,4$, como se segue:

$$
\begin{aligned}
E1 &= \{\text{o às de espadas está em qualquer uma das pilhas}\} \\
E2 &= \{\text{o às de espadas e o às de copas estão pilhas diferentes}\} \\
E3 &= \{\text{os ases de espadas, copas e ouros estão em pilhas diferentes}\} \\
E4 &= \{\text{ todos os 4 ases de espadas estão em pilhas diferentes}\}
\end{aligned}
$$

A probabilidade desejada é $P(E1E2E3E4)$, e, pela regra da multiplicação,

$$P(E1E2E3E4) = P(E1)P(E2|E1)P(E3|E1E2)P(E4|E1E2E3)$$

Agora,

$$P(E1) = 1$$

Já que $E1$ é o espaço amostral S. também,

$$P(E2|E1) = \frac{39}{51}$$

Já que a pilha contendo o às de espadas irá receber 12 das 51 cartas restantes, e

$$P(E3|E1E2) = \frac{26}{50}$$

Já que as pilhas contendo os ases de espadas e copas irão receber 24 das 50 cartas restantes. Finalmente,

$$P(E4|E1E2E3) = \frac{13}{49}$$

Portanto, a probabilidade de que cada pilha receba exatamente 1 às é

$$P(E1E2E3E4) = \frac{39 \times 26 \times 13}{51 \times 50 \times 49} \approx 0,105$$

Isto é, existe uma chance de aproximadamente 10% qe que cada pilna contenha um ás.

3.1.2 Fórmula de Bayes

Suponha os eventos E e F. Podemos expressar E com

$$E = EF \cup EF^c$$

Pois, para que um resultado esteja em E, ele deve estar em E e F ou em E mas não em F (veja a equação 3.1). Como é claro que EF e EF^c são mutuamente exclusivos, temos, pelo Axioma 2.2.3,

$$
\begin{aligned}
P(E) &= P(EF) + EF^c \\
&= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\
&= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)]
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi [9])

Exemplo 3.1.4. Uma companhia de seguros acredita que pessoas possam ser divididas em duas classes: aquelas que são propensas a acidentes e aquelas que não são. A estatística da companhia mostra que uma pessoa propensa a acidentes tem probabilidade de $0,4$ de sofrer um acidente dentro de um período fixo de 1 ano, enquanto essa probabilidade cai para $0,2$ no caso de uma pessoa não propensa a acidentes. Se supomos que 30% da população é propensa a acidentes, qual é a probabilidade de que um novo segurado sofra um acidente no período de um ano posterior à compra de sua apólice?

Solução: Vamos obter a probabilidade desejada primeiro analisando a condição que diz que o segurado é propenso a acidentes ou não. Suponha que $A1$ represente o evento em que o segurado sofrerá um acidente no período de um ano após a compra de sua apólice, e que A represente o evento em que o segurado é propenso a acidentes. Com isso, a probabilidade desejada é dada por

$$P(A1) = P(A1|A)P(A) + P(A1|Ac)P(Ac) = (0,4)(0,3) + (0,2)(0,7) = 0,26 \tag{3.4}$$

Exemplo 3.1.5. Suponha que um novo segurado sofra um acidente em menos de um ano após a compra da apólice. Qual é a probabilidade de que ele seja propenso a acidentes?
Solução: A probabilidade desejada é

$$P(A|A1) = \frac{P(AA_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A)P(A_1|A)}{P(A_1)} = \frac{(0,3)(0,4)}{0,26} = \frac{6}{13} \tag{3.5}$$

Exemplo 3.1.6. Ao responder uma questão em uma prova de múltipla escolha, um estudante sabe a resposta ou a "chuta". Seja p a probabilidade de que o estudante saiba a resposta e $1-p$ a probabilidade de que ele chute. Suponha que um estudante que chuta a resposta tem probabilidade de acerto de $\frac{1}{m}$, onde m é o número de alternativas em cada questão de múltipla escolha. Qual é a probabilidade condicional de que o estudante saiba a resposta de uma questão dado que ele ou ela a tenha respondido corretamente?

Solução: Suponha C e K representem, respectivamente, o evento em que o estudante responde à questão corretamente e o evento em que ele ou ela realmente saiba a resposta. Agora,

$$\begin{aligned} P(K|C) &= \frac{P(KC)}{P(C)} = \frac{P(C|K)P(K)}{P(C|K)P(K)+P(C|K^c)P(K^c)} \\ &= \frac{p}{P+\dfrac{1}{m}(1-p)} = \frac{mp}{1+(m-1)p} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por exemplo, se $m = 5$, $p = \frac{1}{2}$, então a probabilidade de que o estudante saiba a resposta de uma questão que ele ou ela respondeu corretamente é de $\frac{5}{6}$.

Proposição 3.1.1. Suponhammos que $F_1, F_2, \ldots F_n$ seja um conjunto de eventos mutuamente exclusivos e e exaustivos (o que significa que exatamente um desses eventos deve ocorrer). Suponha também que E tenha ocorrido e que estejamos interessados em determinar qual dos F_j eventos ocorreu. Então, temos

$$P(F_j|E) = \frac{P(EF_j)}{P(E)} = \frac{E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_j)P(F_j)} \tag{3.7}$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi [9])

A Equação 3.7 é conhecida como *fórmula de Bayes*, em homenagem ao *filósofo inglês Thomas Bayes.*

Exemplo 3.1.7. Suponha que tenhamos 3 cartas idênticas, exceto que ambos os lados da primeira carta são vermelhos, ambos os lados da segunda carta são pretos e um dos lados da terceira carta é vermelho enquanto o outro lado é preto. As três cartas são misturadas no interior de um boné; uma carta é selecionada aleatoriamente e colocada no chão. Se o lado de cima da carta escolhida é vermelho, qual é a probabilidade de que o outro lado seja preto? Solução: Suponha que RR, BB e RB representem, respectivamente, os eventos em que a carta escolhida é toda vermelha, toda preta ou vermelha e preta. Além disso, suponha que R seja o evento em que o lado de cima da carta sorteada tem cor vermelha. Então, a probabilidade desejada é obtida por

$$\begin{aligned} P(RB|R) &= \tfrac{P(RB\cap R)}{P(R} = \tfrac{P(R|RB)P(RB)}{P(R|RR)P(RR)+P(R|RB)P(RB)+P(R|BB)P(BB)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{1\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{3.8}$$

portanto, a resposta é $\frac{1}{3}$. Alguns estudantes acham que $\frac{1}{2}$é a resposta porque pensam incorretamente que, dado que um lado vermelho apareça, haverá duas possibilidades igualmente prováveis: de que a carta seja toda vermelha ou que seja vermelha e preta. Seu erro, contudo, está em supor que essas duas possibilidades sejam igualmente prováveis. Pois, se pensarmos em cada carta como sendo formada por dois lados distintos,então veremos que existem 6 resultados igualmente prováveis para o experimento - isto é, $R_1, R_2, B_1, B_2, R_3, B_3$, - onde o resultado é igual a R_1, se o primeiro lado da carta vermelha for virado para cima, R_2, se o segundo lado da carta vermelha for virado para cima, R_3, se o lado vermelho da carta vermelha e preta for virado para cima, e assim por diante. Como o outro lado da carta com lado vermelho virado para cima será preto somente se o resultado for R_3, vemos que a probabilidade desejada é a probabilidade condicional de R_3, dado que R_1, ou R_2, ou R_3, tenham ocorrido, o que é obviamente igual a $\frac{1}{3}$.

3.2 Eventos independentes

Os exemplos anteriores deste secção mostram que $P(E|F)$, a probabilidade condicional de E dado F, não é geralmente igual a $P(E)$, a probabilidade incondicional de E. Em outras palavras, o conhecimento de que F ocorreu geralmente muda a chance de ocorrência de E. Nos casos especiais em que $P(E|F)$ é de fato igual a $P(E)$, dizemos que E é independente de F. Isto é, E é independente de F se o conhecimento de que F ocorreu não mudar a probabilidade de ocorrência de E.

Como $P(E|F) = P(EF)/P(F)$, tem-se a condição em que E é independente de F se

$$P(EF) = P(E)P(F) \tag{3.9}$$

Definição 3.2.1. Dois eventos E e F são chamados de independentes se a equação [**?**] for verdadeira.

Exemplo 3.2.1. Uma carta é selecionada aleatoriamente de um baralho comum de 52 cartas. Se E é o evento em que a carta selecionada é um às e F é o evento em que a carta selecionada é do naipe de espadas, então E e F são independentes. Isso ocorre porque $P(EF) = \frac{1}{52}$, enquanto $P(E) = \frac{4}{52}$ e $P(F) = \frac{13}{52}$.

Exemplo 3.2.2. Duas moedas são lançadas e supõe-se que os 4 resultados possíveis sejam igualmente prováveis. Se E é o evento em que a primeira moeda dá cara e F o evento em que a segunda moeda dá coroa, então E e F são independentes, pois $P(EF) = P((\text{cara, coroa})) = \frac{1}{4}$, enquanto $P(E) = P((\text{cara, cara}), (\text{cara, coroa})) = \frac{1}{2}$ e $P(F) = ((\text{cara, coroa}), (\text{coroa, } (\text{coroa})) = \frac{1}{2}$.

Exemplo 3.2.3. Suponha que joguemos 2 dados honestos. Seja E_1 o evento em que a soma dos dados é igual a 6 e F o evento em que o primeiro dado é igual a 4. Então,

$$P(E|F) = P((4,2)) = \frac{1}{36}$$

enquanto que

$$P(E_1)P(F) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

Com isso, E_1 e F não são independentes.

Proposição 3.2.1. Se E e F são eventos independentes, então E e F^c também o são.

Demonstração veja Sheldon Ross

3.3 P$(\cdot|F)$ É uma probabilidade

Probabilidade condicionais satisfazem todas as propriedades das probabilidades comuns, o que é demonstrado pela Proposição 5.1, que mostra que P(E—F) satisfaz os três axiomas de uma probabilidade.

Proposição 3.3.1. **(a)** $0 \leq P(E|F) \leq 1$

(b) $P(S|F) = 1$

(c) se $E_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$ são eventos mutuamente exclusivos, então

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i|F)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i|F)$$

Demonstração: ver referência bibliográfica (Sheldon Rossi [9]).

Capítulo 4

Aplicação de combinatória e probabilidades em situações cotidianas

De tudo que ensinamos aos nossos alunos, os assuntos que despertam mais interesse são os que envolvem situações do cotidiano. Visando atender as necessidades de formação voltadas para melhor compreensão da realidade e sua inserção social é que foram selecionados problemas diversos de aplicação de probabilidade, como questões objetos de exames: ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), OBMEP (Olimpíadas Brasileira de Matemática da Escola Pública), SAEB (Sistema de Avaliação do Ensino Básico) e ENQ-Profmat (Exame Nacional de Qualificação).

Problema 4.0.1. (Obmep) Patrícia escreveu, em ordem crescente, os inteiros positivos formados por algarismos ímpares: $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, \ldots$ Qual foi o 157^o número que ela escreveu?

Solução: Temos 5 algarismos ímpares: $1, 3, 5, 7e9$. Com 1 algarismos temos 5 números, com dois algarismos temos $5 \times 5 = 25$ números. Com três algarismos temos $5 \times 5 \times 5 = 125$ números. Como $5 + 25 + 125 = 155$, 156^o número é 1111 e o 157^o número é o 1113.

Problema 4.0.2. :(ENEM) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo: Pedro, camisa 6: Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de $2; (1 + 1)$ até $12; (6 + 6)$. Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número da soma dos resultados dos dois dados vai guardar a taça. Tadeu, camisa 2: Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta... Ricardo, camisa 12: Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é possível que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos... Desse diálogo conclui-se que: a) Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos. b) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro. c) Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça. d) Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro. e) Não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente do acaso. Solução: Jogando dois dados, o espaço amostral é composto de 36 elementos, uma vez que cada dado apresenta 6 resultados possíveis. Cada elemento do espaço amostral é do tipo (dado1, dado2). Assim:

$$\begin{aligned}\Omega = \ & \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),\\ & (2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),\\ & (5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.\end{aligned}$$

Para Pedro ser sorteado, a soma dos resultados deve ser 6. Assim, temos 5 elementos do espaço amostral compondo o evento $A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$. Dessa forma, a probabilidade de Pedro ser sorteado é $P_A = \frac{\#A}{\#\omega} = \frac{5}{36}$. Para Tadeu ser sorteado, a soma dos resultados deve ser 2. Assim, temos um único elemento do espaço amostral compondo o evento $B = \{(1,1)\}$. Dessa forma, a probabilidade de Tadeu ser sorteado é $P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{1}{36}$. Para Ricardo ser sorteado, a soma dos resultados deve ser 12. Assim, temos também um único elemento do espaço amostral compondo o evento $C = \{(6,6)\}$. Dessa forma, a probabilidade de Ricardo ser sorteado é $P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{1}{36}$. Com esses resultados, podemos concluir o seguinte:

I) Tadeu não estava equivocado; Pedro estava levando vantagem, pois $P(A) > P(B)$ e $P(A) > P(C)$.

II) Ricardo não estava equivocado; a probabilidade de Pedro ganhar é maior do que a probabilidade de Ricardo e Tadeu juntos, pois $P(A) > P(B) + P(C)$.

A resposta é a alternativa *d*.

Problema 4.0.3. :(OBMEP) Probabilidade e a megasena No jogo da sena concorrem 60 dezenas e são sorteadas 06 dezenas. Pedro apostou em 10 dezenas. Qual é a probabilidade de Pedro acertar:

a) 6 dezenas?

b) 5 dezenas?

c) 4 dezenas?

Solução: o número de sorteios possíveis é $\binom{60}{6} = 50063860$.

a) O apostador acerta 6 dezenas quando são sorteadas 6 das 10 dezenas em que apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $\binom{10}{6} = 210$ modos. Logo, a probabilidade de Pedro acertar as seis dezenas é de $\frac{210}{\binom{10}{6}} = \frac{210}{50063860} = \frac{1}{238400}$

b) O apostador acerta 5 dezenas quando são sorteadas 5 das 10 dezenas em que apostou e 1 das 50 em que não apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de $\binom{10}{5}\binom{50}{1} = 252 \times 50 = 12600$ modos. Logo, a probabilidade de Pedro acertar as cinco dezenas é de $\frac{12600}{50063860} = \frac{1}{3974}$

c) O apostador acerta 4 dezenas quando são sorteadas 4 das 10 dezenas em que apostou e 2 duas das 50 em que não apostou. Tais sorteios podem ser efetuados de. $\binom{10}{4}\binom{50}{2} = 210 \times 1225 = 257250$. A probabilidade de Pedro acertar as quatro dezenas é de $\frac{257250}{50063860} = \frac{1}{195}$

Problema 4.0.4. : (ENQ) O Problema clássico do aniversário Em um grupo de n pessoas, qual a probabilidade de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia? (Supondo que nenhuma tenha nascido em ano bissexto). Solução: Vamos, inicialmente, determinar a probabilidade de que todas façam aniversários em dias distintos. O número de casos possíveis para os aniversários das n pessoas é $365 \times n$. O número de casos favoráveis a que todas aniversariem em dias diferentes é $365 \times 364 \times 363 \times \ldots (365 - n + 1)$, havendo n fatores nesse produto. Portanto, a probabilidade de não haver pelo menos duas pessoas que faça aniversário no mesmo dia é de

$$\frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots (365 - n + 1)}{360^n}.$$

e a de haver pelo menos duas pessoas que tenham o mesmo dia de aniversário é de

$$1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \ldots (365 - n + 1)}{360^n}.$$

A tabela abaixo dá, para alguns valores de n, a probabilidade de haver coincidência de aniversários.

N	5	10	15	20	23	25	30	40	45	50
Probabilidade	0,03	0,12	0,25	0,41	0,51	0,57	0,71	0,89	0,94	0,97

O resultado é surpreendente. Em um grupo de 23 pessoas, é mais provável haver duas pessoas com o mesmo dia de aniversário do que todas aniversariarem em dias diferentes.

Problema 4.0.5. : (SAEB) Num país, 410% da população são portadoras de um vírus. Um teste para detectar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a portadores e dá 80% de acertos quando aplicado a não portadores. Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus, dentre aquelas em que o teste classificou como portadoras? Ou, em outras palavras, qual a probabilidade de a pessoa ser realmente portadora do vírus, uma vez que o teste a classificou como portadora? Solução: Observemos que, se 10% da população são de portadores, então 90% são de não portadores. Segundo os dados do problema, o teste confirma que 90% dos portadores (que são 10% da população) possuem o vírus e que, 80% dos não portadores (que são 90% da população) são de fato não portadores do vírus e, portanto, 20% dos não portadores o teste indica como portadores do vírus. O espaço amostral, Ω, é dado pelo percentual de pessoas que o teste indicou como portadores do vírus e o evento A pelo percentual de pessoas portadoras que o teste confirma como portadores do vírus. Agora, considere que o teste foi aplicado aos I habitantes do país. O teste indicou a presença do vírus em:

$$0,9 \times 0,1 \times I + 0,2 \times 0,9 \times xI = 0,09I + 0,18I = 0,27I$$

. E, destas, são portadoras $0,09I$. Logo, o número de resultados possíveis é de $0,27$ da população e o de resultados favoráveis (realmente portadores) é de $0,09$ da população.

Assim, são realmente portadoras do vírus $\frac{0{,}09I}{0{,}27I} = \frac{1}{3} \approx 33,3\%$ das pessoas que o teste classificou como portadoras. Esse número mostra que uma pessoa que fez o teste e foi classificada como portadora tem grande possibilidade de ser "falso-positivo" (normalmente, quando uma pessoa faz um teste desse tipo e o resultado é positivo, os médicos recomendam um novo teste).

Problema 4.0.6. : (Problema dos Pontos) Dois jogadores apostaram $\$R10,00$ cada um em um jogo de cara ou coroa, combinando que o primeiro a conseguir 6 vitórias ficaria com o dinheiro da aposta. O jogo, no entanto, precisa ser interrompido quando um dos jogadores tem 5 vitórias e o outro 3. Qual é a divisão justa da quantia apostada? Solução: O jogador I tem 5 vitórias, faltando apenas uma para vencer o jogo. O jogador II tem apenas 3 vitórias, necessitando de mais 3 para vencer. Portanto, para que II vença, ele tem que vencer três partidas seguidas. Há $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades para os resultados destas partidas e apenas um destes é favorável à vitória de II. Logo, II vence com probabilidade $frac18$, enquanto a probabilidade de vitória de I é $\frac{7}{8}$. Logo, I deve ficar com $R\$17,50$ e II com $R\$2,50$.

Problema 4.0.7. : Uma recepcionista recebeu n chapéus, mas estes ficaram totalmente misturados. Decidiu então devolvê-lo a esmo. Calcular a probabilidade de que nenhum homem receba o seu. Solução: O número de casos possíveis é igual ao número de permutações de n elementos, que é $n!$. O número de casos favoráveis é igual ao número de permutações caóticas de um conjunto de n elementos. Este número é igual a:

$$n! \times [\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \times \frac{1}{n}]$$

A probabilidade buscada igual ao quociente destes números; é, portanto, igual a

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \ldots (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Problema 4.0.8. : A e B lançam sucessivamente um par de dados até que um deles obtenha soma de pontos 7, caso em que a disputa termina e o vencedor é o jogador que

obteve soma 7. Se A é o primeiro a jogar, qual é a probabilidade de A ser o vencedor?
Solução 1: A probabilidade de obter soma 7 é $\frac{6}{36} = \frac{1}{5}$e a de não obter soma 7 é $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ Para A ganhar, ou A ganha na primeira mão, ou na segunda, ou na terceira mão, etc. A probabilidade de A ganhar na primeira mão é $\frac{1}{6}$. Para A ganhar na segunda mão, Anão pode obter soma 7 na primeira mão e B não pode obter soma 7 na primeira mão e A deve obter soma 7 na segunda mão, o que ocorre com probabilidade $(\frac{5}{6})^4 \times \frac{1}{6}$. Para A ganhar na terceira mão, A não pode obter soma 7 nas duas primeiras mãos e B não pode obter soma 7 nas duas primeiras mãos e A deve obter soma 7 na terceira mão, o que ocorre com probabilidade, etc. A probabilidade de A ganhar é que são a soma dos termos de uma `PG` infinita de primeiro termo $\frac{1}{6}$ e razão $(\frac{5}{6})^2$:

$$\frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^2 \times \frac{1}{6} + (\frac{5}{6})^4 \times \frac{1}{6} + \ldots = \frac{\frac{1}{6}}{1 - (\frac{5}{6})^2} = \frac{6}{11}$$

Solução 2: A probabilidade de A ganhar uma mão é de $\frac{1}{6}$; a de B ganhar uma mão é de $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$, pois para B ganhar, A não pode obter soma 7 e B deve obter soma 7, a de ninguém ganhar é de $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$, pois, para que ninguém ganhe, A não pode obter soma 7 e B não pode obter soma 7. A probabilidade de A ganhar é a probabilidade de A ganhar em uma mão em que houve vencedor, isto é,

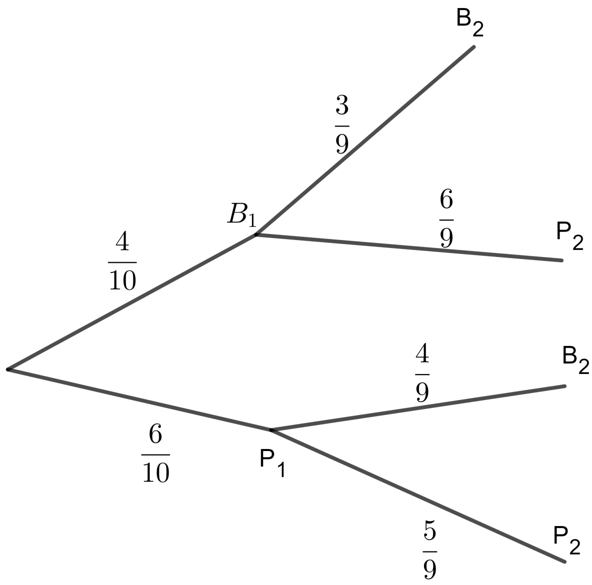
$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}.$$

Problema 4.0.9. : Uma urna contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Sacam-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas dessa urna. Determine a probabilidade de a primeira bola ser branca sabendo que a segunda bola é branca?

Solução 1: Sejam $B_1 = \{$a primeira bola é branca$\}$ e $B_2 = \{$a segunda bola é branca$\}$. Queremos $P(B_1|B_2)$. Logo, $P(B_!|B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)}$. Temos $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P(B_2|B_1) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$, pois a probabilidade de B_1 é $\frac{4}{10}$ e a probabilidade de B_2 uma vez que B_1 tenha ocorrido é de $\frac{3}{9}$. O Cálculo de $P(B_2)$ não é imediato, pois não sabemos como está a urna no momento da segunda extração. Para calcular $P(B_2)$, consideramos todas as possibilidades quanto à primeira bola. Para a segunda bola ser branca, ou a segunda é branca e a primeira foi branca, ou a segunda é branca e a primeira foi preta. Isto é, $P(B_2) = P[(B_1 \cap B_2) \cup P(P_1 \cap B_2)] = P(B_1 \cap B_2) + P(P_1 \cap B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(P_1) \times P(B_2|P_1)$. A probabilidade de P_1 é $\frac{6}{10}$ e a $P(B_2|P_1) = \frac{4}{9}$. Portanto, $P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(P_1) \times P(B_2|P_1) = \frac{2}{15} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{5}$.

Logo, $P(B_1|B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{3}$

Solução 2: Uma maneira eficiente de lidar com experiências que possuem vários estágios é o uso das árvores de probabilidade



Para determinar uma probabilidade usando esse diagrama, basta percorrer todos os caminhos que levam ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos ao longo dos vários caminhos. Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}. \\ P(B_2) &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Logo, $P(B_1|B_2) = \dfrac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \dfrac{1}{3}$.

Problema 4.0.10. (ENEM): Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses alunos em duas línguas estrangeiras: inglês e espanhol. Nessa pesquisa, constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas. Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual é a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

Solução: A probabilidade condicional pedida é: $\dfrac{300}{600} = \dfrac{1}{2} = 50\%$

Problema 4.0.11. : De um total de 100 alunos que se destinam aos cursos de Matemática, Física e Química, sabe-se que:

I. 30 destinam-se à Matemática e, destes, 20 são do sexo masculino.

II. O total de alunos do sexo masculino é 540, dos quais 10 destinam-se à Química.

III. Existem 10 moças que se destinam ao curso de Química.

Nessas condições, sorteando um aluno ao acaso do grupo total e sabendo que é do sexo feminino, qual é a probabilidade de que ele se destine ao curso de Matemática? Solução: Construindo uma tabela temos:

	Matemática(m)	Física(f)	Química(q)	Total
Masculino(M)	20	20	10	50
Femenino(F)	10	30	10	50
Total	30	50	20	100

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P(m|F) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Problema 4.0.12. : (Problema da moeda de Bertrand): Existem três caixas idênticas. A 1ª contém duas moedas de ouro, a 2ª contém uma moeda de ouro e outra de prata e a 3ª, duas moedas de prata. Uma caixa é selecionada ao acaso e da mesma é escolhida uma moeda ao acaso. Se a moeda escolhida for de ouro, qual é a probabilidade de que a outra moeda da caixa escolhida também seja de ouro?

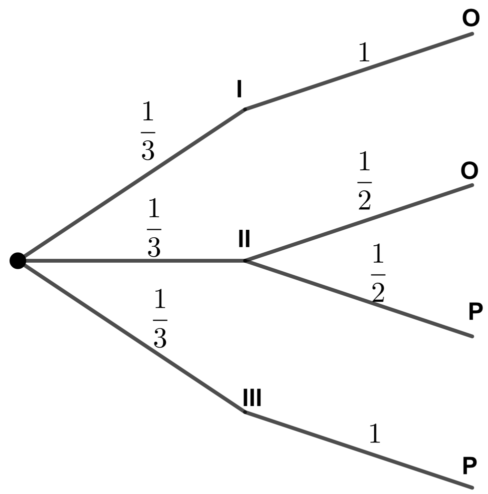
Solução1: É claro que o problema pode ser formulado da seguinte forma: Se a moeda escolhida é de ouro, qual é a probabilidade de que ela tenha vindo da caixa 1 (pois a caixa 1 é a única que contém duas moedas de ouro). Vamos a solução. Sejam os eventos:

- C_1 : a caixa sorteada é a 1ª.
- C_2 : a caixa sorteada é a 2ª.
- C_3 : a caixa sorteada é a 3ª.
- O : a moeda sorteada é de ouro.

Temos:

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap O) &= \frac{1}{3} \times 1 \\ P(O) &= P(C_1 \cap O) + P(C_2 \cap O) + P(C_3 \cap O) \\ P(O) &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + P(\emptyset) = \frac{1}{2} \\ P(C_1|O) &= \frac{P(C_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Solução 2: Pelo diagrama de árvore, temos:



$$
\begin{aligned}
P(C_1 \cap O) &= \frac{1}{3} \times 1 \\
P(O) &= P(C_1 \cap O) + P(C_2 \cap O) + P(C_3 \cap O) \\
P(O) &= \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{2} + P(\emptyset) = \frac{1}{2} \\
P(C_1|O) &= \frac{P(C_1 \cap O)}{P(O)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Problema 4.0.13. : A probabilidade de que um aluno A resolva certo problema é $P(A) = \frac{1}{2}$, a de que um aluno B o resolva é $P(B) = \frac{1}{3}$ e a de que um terceiro aluno C o resolva é $P(C) = \frac{1}{4}$. Qual é a probabilidade de que:

a) Os três resolvam o problema?

b) Ao menos um resolva o problema?

Solução: Como $A, B \quad$ e $\quad C$ são eventos independentes, temos:

a) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

b) Queremos $P(A \cup B \cup C)$. Tem-se que $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

Capítulo 5

Considerações Finais

Conforme descrito na proposta metodológica deste trabalho, o projeto de pesquisa foi aplicado nas turmas M2MR01 e M2MR02 na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Jerônimo Milhomem Tavares, em Limoeiro do Ajuru, no 3º bimestre letivo de 2018. No desenvolvimento do conteúdo de Combinatória, além das situações-problemas motivacionais aplicadas, os alunos propuseram situações de suas vivências para serem discutidas, como por exemplo: Se uma pessoa vai à praia e possui dois shorts, três blusas e um boné, de quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar? As soluções foram apresentadas pelos alunos por contagem direta, usando o diagrama de possibilidades, tabela de dupla entrada e o Princípio Multiplicativo. Perceberam, também, que a operação básica multiplicação, é a ferramenta primordial na combinatória, assim como a divisão, que é usada para reduzir agrupamentos repetidos. Notaram ainda, que alguns raciocínios utilizados em algumas situações como: Se numa festa há 10 homens e 8 mulheres, quantos casais podem ser formados? Alguns alunos, achavam que eram possíveis formar apenas 8 casais e não 80, pois não levavam em consideração o número de possibilidades de formar os casais. Nos problemas propostos e nos elaborados pelos alunos, notaram que situações que envolvem o raciocínio combinatório estão presentes diariamente em nossas vidas. Estudando probabilidades, os alunos perceberam que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória. Notaram que as situações de acaso e incerteza se manifestam constantemente em muitas situações que realizam e observam. No levantamento de situações que motivaram o desenvolvimento da teoria das probabilidades, como os jogos de azar, os alunos levaram para a sala de aula, baralho, dominó, xadrez, dados, moedas, com os quais foram realizadas algumas atividades, pois alguns alunos se quer sabiam identificar os naipes de um baralho comum, a simetria das peças de um dominó, o número de casas de um tabuleiro de xadrez com as respectivas casas dos vértices, laterais e centrais e, que geralmente um dado honesto é numerado com a soma das faces opostas igual a 7. Levaram, também, para a sala de aula, levantamentos sobre eventos meteorológicos e os classificaram como eventos improvável, pouco provável e provável de acordo com seus percentuais de ocorrência. Porém, a atividade que despertou maior interesse e envolvimento de toda a turma foi o lançamento, em dupla, de uma mesma moeda 20 vezes, anotando seus resultados e determinando as chances de ocorrência de caras e coroas. E como os resultados variaram de experimento para experimento de duplas diferentes, estenderam o lançamento para 50 vezes, procedendo como anteriormente e; notaram que a medida que os lançamentos aumentam, as chances de ocorrência de caras e coroas tendem a se estabilizar em torno de 50%. Após essa atividade, foi definido probabilidade com base no modelo frequencial, ou seja, a chance de ocorrência de um evento pode ser dada como a proporção de vezes que tal evento ocorre em relação ao total de repetições do experimento. Além das atividades ora descritas, foi levantado o seguinte problema: Se em uma turma tem 40 alunos, sendo 20 meninos e 20 meninas e, se for sorteada uma pessoa para fazer um passeio, quem terá mais chance de ser sorteada: um menino ou uma menina? Explique. E após discussão e socialização das respostas foi introduzida a noção de eventos equiprováveis. Foi apresentado aos alunos o seguinte problema: Um dado é lançado e o número da face de cima é observado, se o resultado obtido for ímpar, qual é a probabilidade de ser menor que 3? Em dupla, os alunos procuraram resolver o problema usando as ferramentas já estudadas, porém tiverem dificuldades em determinar o espaço amostral reduzido ou a interseção entre os eventos ser ímpar e menor que 3. Após apresentação das possíveis soluções foi, inicialmente, identificado o espaço amostral S $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a partir do espaço amostral S foi determinado os eventos $A = \{$ o resultado é ímpar$\} = \{1, 3, 5\}$ e o evento $B = \{$ ser menor que $3\} = \{1, 2\}$, feita interseção $AB = \{1\}$ e calculada a $P(B|A) = \frac{1}{3}$. Em seguida, foi mostrado que o evento A pode ser considerado como o novo espaço reduzido em relação ao qual poderia ser calculada a probabilidade de ser ímpar menor que 3. Após a explanação acima, foi definido o importante conceito de Probabilidade Condicional e suas consequências. Após a apresentação da teoria da probabilidade foram formadas duplas para resolver problemas propostos de aplicação e teóricos e, também, solicitado que além do equacionamento formal dos problemas, que apresentassem por escrito os raciocínios utilizados para solucionar tais problemas. Essas atividades foram socializadas com a apresentação das soluções no quadro branco, onde os alunos usaram diferentes recursos como tabelas, diagramas de árvore e recursos lúdicos como dado, baralho, dominó, tabuleiro de xadrez, etc. A seguir, foram solicitados que, em grupos de 5, elaborassem seus próprios problemas e que os trocassem para resolvê-los. Os alunos, inicialmente determinaram as soluções dos problemas e novamente trocaram aleatoriamente com outros grupos, os quais discutiram as soluções dos colegas, apresentaram ressalvas e outras soluções. A culminância dessas atividades se deu por meio de um seminário. Finalmente, foram propostos às turmas a realização de pesquisa do uso de probabilidade no nosso cotidiano, integrando os conceitos estudados com outras disciplinas ou outras áreas de conhecimento. Realizada a pesquisa, sua culminância ocorreu com apresentação de cartazes e slides. E foram abordados principalmente situações relacionadas à Biologia, como o sistema ABO, os antígenos e os fatores Rh_+ e Rh_-, as probabilidades de nascimento quanto ao sexo, as heranças hereditárias, e também sobre jogos de azar como loterias, etc. Conforme ora descrito, no desenvolvimento das atividades propostas, os objetivos foram alcançados e até superada a expectativa de envolvimento dos alunos nas atividades, pois, percebeu-se que para que as aprendizagens aconteçam são necessários conhecer as dificuldades de aprendizagem dos alunos e planejar as aulas para superar tais dificuldades, assim como, propor atividades estimulantes onde os alunos sejam os agentes do processo de ensino e aprendizagem, haja vista que, numa sala de aula numerosa, os alunos se tornam agentes multiplicadores do ensino, auxiliando o professor. Em síntese, a sala de aula é o palco do processo de ensino e aprendizagem e o lócus onde quanto mais se divide o conhecimento mais o mesmo se multiplica, atingindo cada vez mais pessoas e tornando-se a mudança de rumo de suas vidas. A propósito, a Escola Estadual Jerônimo Milhomem Tavares, havia apresentado um dos piores resultados do Ideb em 2009, e ações como a ora descrita, assim como outras voltadas a outras áreas do conhecimento, proporcionaram-lhes melhorias nos seus indicadores como Ideb e as avaliações estaduais, nos últimos anos, além de apresentarem índice significativo de aprovação de alunos para as Universidades Públicas e Privadas do estado, sem cursinho preparatório. A meu ver, o que realmente precisa para a melhoria do Ensino Público Básico, em particular do Ensino Médio, é de Gestão Pedagógica voltada para resultados, com o envolvimento dos atores do ensino, que são os professores, os quais devem planejar suas aulas visando atender às necessidades de aprendizagem de seus alunos, pois o que os alunos precisam, em sua maioria, é de oportunidades, e muitas vezes o ensino está incompatível em relação as suas demandas, que são seus alunos e suas comunidades, principalmente quanto ao uso de metodologias adequadas de ensino. Atualmente é comum, vê-se nas escolas Públicas do Ensino Básico, o uso da "metodologia do trabalho extraclasse"; que são geralmente entregues escritos, plagiados da internet e sem culminância, os quais não indicam aos alunos seus possíveis avanços e servem apenas para obterem a pontuação necessária para aprovação, tornando-os acomodados, sem a preocupação de aprendizagens significativas e duradouras voltada para a inserção social dos seus discentes. Pois, cabe ao professor avaliar continuamente seus alunos, tendo em vista que o processo de avaliação deve fornecer parâmetros para reflexão sobre as práticas pedagógicas da escola, sobre as metodologias usadas nas aulas, bem como sobre os recursos e materiais didáticos utilizados. Os próprios instrumentos de avaliação devem ser continuamente repensados, desse modo, é necessário que os professores promovam, sempre que necessário, alterações nos seus planejamentos, redimensionando os objetivos a serem alcançados. Para isso, é importante que o docente perceba como manter um diálogo entre as diferentes áreas, trazendo o cotidiano do aluno para a sala de aula e aproximando-o do conhecimento científico, desenvolvendo, assim, um ensino capaz de fazer com que os alunos aprendam a relacioná-las. As experiências vivenciadas pelos alunos e pela escola podem ser utilizadas para dar vida e significado ao conhecimento. Dessa forma, é possível abordar questões de outras áreas do conhecimento que não estejam obrigatoriamente ligadas aos alunos, mas que possam estar relacionados aos seus familiares ou a sua comunidade. A prática docente precisa ser organizada de modo que possibilite a formação de um cidadão crítico e, para isso, faz-se necessário trazer para a Matemática situações contextualizadas que proporcionem ampliação de abordagem, estabelecendo conexões com outros saberes, aprofundando as relações das escolas com as experiências cotidianas de cada um deles. As atividades desenvolvidas na proposta metodológica deste trabalho foram estendidas a outros conteúdos da Matemática e a outras disciplinas, na escola ora mencionada. Pois, as situações que despertam maior interesse aos alunos são aquelas que envolvem situações do cotidiano e onde os estudantes são os agentes das ações, mediados pelo professor. O que implica desenvolver atitudes positivas em relação ao objeto do conhecimento, como autonomia, confiança em relação às suas capacidades, perseverança na resolução de problemas e gosto pela busca do conhecimento e pelo trabalho cooperativo, visando atender as suas necessidades de formação voltadas para a compreensão da realidade e sua inserção social. Convém ressaltar, ainda, que as propostas e atividades matemáticas devem possibilitar aos estudantes:

1. Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias e, planejar soluções para problemas novos que exijam iniciativa e criatividade;

2. Aplicar conhecimentos matemáticos para compreender, interpretar e resolver situações-problema do cotidiano ou do mundo tecnológico e científico;

3. Desenvolver a capacidade de comunicação de ideias matemáticas por escrito ou oralmente, promovendo sua capacidade de argumentação e;

4. Analisar e interpretar criticamente dados provenientes de problemas matemáticos, de outras áreas do conhecimento e do cotidiano.

Com esse intuito, que as atividades desenvolvidas e ora apresentadas neste modesto trabalho, as exponho para socialização, críticas, aperfeiçoamento e aprofundamento. Este foi apenas um estudo inicial voltado àqueles que queiram dominar os fundamentos básicos deste ramo da matemática, de forma simples, numa linguagem clara e condizente com este nível de ensino. Entretanto, este trabalho pode ser aprofundado para estudos que objetivem maior domínio da teoria e sua aplicação às várias áreas do conhecimento. Este trabalho mostrou ainda, os conceitos fundamentais e algumas aplicações. O estudo sobre combinatória e teoria das probabilidades é muito extenso. A parte aqui tratada limitou-se a uma introdução.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. História da Matemática. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

[2] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. 1. ed. São Paulo: Ática, 2017.

[3] HAZZAN, Samuel. Fundamentos de matemática elementar: Combinatória e Probabilidade. 7. ed. São Paulo: Atual, 2004.

[4] KÖCHE, José Carlos. Fundamentos de Metodologia Científica: Teoria da ciência e iniciação à pesquisa. 22ª Ed. Rio de Janeiro: Vozes, 1997.

[5] LIMA, Elon Lages et alii. A Matemática do Ensino Médio volume 2: Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[6] LIMA, ElonLages et alii. A Matemática do Ensino Médio volume 4: Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[7] MORGADO, Augusto César de Oliveira et alii. Análise Combinatória e Probabilidade. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

[8] MOREIRA, Carlos Gustavo et alii. Olimpíadas Brasileiras de Matemática: 9ª a 16ª. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[9] ROSS, Sheldon. Probabilidade: um curso moderno com aplicações. - 9ª. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.