UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Isabella Basílio Josaphá

A lógica e o desenvolvimento do raciocínio

Juiz de Fora

2020

Isabella Basílio Josaphá

A lógica e o desenvolvimento do raciocínio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2020

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Josaphá, Isabella Basílio.
A lógica e o desenvolvimento do raciocínio / Isabella Basílio Josaphá. – 2020.
74 f. : il.

Orientador: Eduard Toon
Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), 2020.

1. Lógica proposicional. 2.Fake news. 3. Desafio. I.Toon, Eduard, orient. II. Título.

Isabella Basílio Josaphá

A lógica e o desenvolvimento do raciocínio

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal de Juiz de Fora como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em 14 de julho de 2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduard Toon - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

P/

Prof. Dr. Sérgio Guilherme de Assis Vasconcelos
Universidade Federal de Juiz de Fora

P/

Profa. Dra. Marli Regina dos Santos
Universidade Federal de Ouro Preto

AGRADECIMENTOS

Venho, primeiramente, agradecer a Deus por toda a força necessária para permanecer no mestrado, pois só Ele sabe o quanto eu pensei em desistir. Foram vários os motivos que afastavam-me desse sonho e também foram várias as pessoas que me buscaram pelas mãos e me aproximavam Dele novamente.

Agradeço a minha família, em especial, minha mãe, Cely, meu pai, Josaphá, minha prima, Maria Rita, e minha tia, Cássia, que são as pessoas que mais escutaram minhas histórias. Agradeço à família Rosa por existirem em minha vida e por serem a minha força de vontade para crescer sempre, por acreditarem em mim de olhos fechados. Agradeço às minhas antigas amigas, Gabriela e Fernanda, e, também, aos novos colegas de mestrado, que me influenciaram a continuar de alguma forma. Em especial, agradeço ao Lima, por nos representar muito bem e pelas boas conversas, ao Clarimundo, por tornar minhas aulas mais divertidas, e ao Thales, por ser a pessoa que mais me ajudou quando queria desistir e por ter se tornado um grande amigo que levarei para vida. Não posso deixar de citar aqui a Thamyres, que me ajudou bastante nessa caminhada, compartilhando livros e conhecimento, e a equipe do Caed, que também fazem parte dessa história de força, incentivo e amizade. Por fim, gostaria de agradecer ao meu orientador pela paciência e pela grande ajuda para finalizar esse trabalho.

Obrigada a todos vocês!

RESUMO

O presente trabalho destaca o papel e a relevância do raciocínio lógico e do pensamento crítico em situações cotidianas, ressaltando a importância de serem abordados na Educação Básica, em especial no Ensino Médio, por meio de ações e metodologias que valorizem o desafio e a análise de situações problema investigativas. Para que o aluno tenha um conhecimento prévio e seja capaz de compreender tais discussões em torno da lógica, é apresentado a teoria de lógica proposicional, em linguagem adequada para alunos de Ensino Médio, com o auxílio de exemplos e situações que podem auxiliar na contextualização dos casos apresentados. Este trabalho visa contribuir com o ensino e aprendizagem do tema, trazendo desafios matemáticos que requerem a lógica proposicional e/ou a lógica argumentativa para serem desvendados. Tal proposta pretende contribuir com o trabalho docente, apresentando problemas contextualizados e suas soluções comentadas, de forma que o professor possa utilizá-la, total ou parcialmente, como motivadora para o ensino aprendizagem da lógica em sala de aula. Em meio ao fluxo de informações que, na atualidade, circulam nos diversos meios em que interagimos, o raciocínio lógico e habilidades de análise e argumentação têm se mostrado importantes para o discernimento e tomada de decisão quanto ao que nos chega. Estamos imersos em um momento no qual as *fake news* vêm ganhando espaço e se fortalecendo. Portanto, analisar uma frase ou discurso crítica e logicamente, discernindo sobre as informações apresentadas, se mostra relevante não apenas em termos do conhecimento pedagógico do tema, mas também como forma de contribuir para a não manutenção de informações falaciosas.

Palavras-chave: Desafio. *Fake news*. Lógica argumentativa e proposicional. Raciocínio.

ABSTRACT

This paper highlights the role and relevance of logical reasoning and critical thinking in everyday situations, emphasizing the importance of it being addressed in Basic Education, especially in High School, through actions and methodologies that value challenge and analysis of investigative problem situations. In order for the student to have prior knowledge and be able to understand such discussions around logic, the propositional logic theory is presented, in suitable language for high school students, with help from examples and situations that can help in placing presented cases in context. This work aims to contribute for teaching and learning of the theme, bringing mathematical challenges that require propositional logic and/or argumentative logic to be unveiled. This proposal intends to contribute to the teaching work, presenting contextualized problems and their commented solutions, so that the teacher can use it, totally or partially, as a motivator for teaching logic learning in classroom. Amid the flow of information that currently circulates in the various media channels in which we interact, logical reasoning and analysis and argumentation skills have been shown to be important for discerning and decision making as to what comes to us. We are immersed in a moment in which *fake news* has been gaining space and becoming stronger. Therefore, analyzing a sentence or speech critically and logically, and discerning about the presented information is relevant not only in terms of pedagogical knowledge in this topic, but also as a way of contributing for non-maintenance of fallacious information.

Keywords: Challenge. *Fake news*. Argumentative and propositional logic. Reasoning.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É grande o volume de informações que circula nos mais diversos meios, sejam elas boas ou ruins, verdadeiras ou falsas, com as mais diversas intensões, como informar, divulgar, especular ou mesmo manipular o possível receptor.

As informações são facilmente divulgadas e cabe ao leitor analisá-las de forma crítica para concluir a veracidade ou falsidade de tais informações. Em meio a essa avalanche de coisas que nos chegam, principalmente, por meio da internet, é comum, em especial nas redes sociais, recebermos desafios matemáticos, intitulados como desafios lógicos, que aparecem na tela de dispositivos digitais, retendo a atenção do leitor que se debruça sobre ele, buscando meios de solucioná-lo como um desafio aceito e que deve ser concluído.

No dia a dia a palavra "lógica" é comumente utilizada em várias situações, como, por exemplo, quando uma pessoa, ao observar grandes nuvens escuras no céu, conclui que é lógico que irá chover, ou quando uma mãe pede para o filho retirar o copo do braço do sofá porque, do jeito que ele é desastrado, é lógico que irá derrubá-lo. Tais afirmações são feitas baseadas em fatos observados ou vivenciados anteriormente e que nos levam a emitir juizos ou ponderações sobre uma determinada situação.

A junção de fatos e afirmações recebe o nome de argumento que, de acordo com (1) é uma coleção de afirmações, uma das quais é chamada de "conclusão" e cuja verdade procura-se estabelecer. As outras afirmações são chamadas de "premissas" e essas afirmações pretendem conduzir o encadeamento de raciocínios e relações entre elas para chegar-se à conclusão.

O termo lógica está presente no meio escolar e acadêmico quando escutamos de nossos mestres que, ao formular uma frase ou expor um argumento, devemos ter a habilidade de argumentar logicamente. Possuir tal habilidade pode aumentar a capacidade de solucionar problemas e favorecer o poder de argumentação e de elaboração de estratégias. Mas desde que ano escolar tal habilidade deveria ser abordada, conforme o rigor exigido, de forma a auxiliar no desenvolvimento de um pensamento crítico? É possível abordá-la de um modo menos mecânico e mais "divertido" e envolvente para alunos?

Para responder tais perguntas, devemos, primeiramente, entender o que seria essa tal lógica que, segundo (2), "trata do estudo do raciocínio, ou seja, sistemas que definem como pensar de forma mais crítica no que diz respeito a opiniões, inferências e argumentos, dando sentido ao pensamento". De acordo com (3), "o estudo da Lógica é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto". Conforme (4), "o modo como a lógica é incorporada na matemática escolar pode definir o sucesso ou insucesso do desenvolvimento da capacidade de argumentar em Matemática". Por isso se mostra importante não apenas apresentá-la, mas refletir sobre os modos como ela pode ser abordada junto aos alunos a fim de envolvê-los e explorar suas capacidades e habilidades.

Diante das diversas ramificações e possibilidades de se abordar o estudo da lógica, vamos nos ater em discutir e analisar a lógica argumentativa e proposicional em uma linguagem coloquial e simbólica, mas adequada, inclusive, a alunos do ensino médio, trazendo exemplos que auxiliem na compreensão das ideias apresentadas. Acreditamos que alunos do ensino médio são capazes de desenvolver e praticar o raciocínio lógico e o pensamento crítico quando estimulados a desenvolverem atividades desafiadoras e instigantes que serão apresentadas nesse trabalho.

Para alcançar tais objetivos, iremos discutir, no segundo capítulo, a lógica argumentativa e o pensamento crítico. Serão apresentados argumentos presentes em nosso cotidiano para aguçar a tomada de decisão sobre a veracidade dos mesmos. No terceiro capítulo, discutiremos sobre a lógica proposicional, estabelecendo uma linguagem formal em que se pode expressar com clareza, precisão e emitir juízo de verdadeiro ou falso para determinadas frases, denominadas proposições.

E por fim, no quarto capítulo, inspirados em problemas que buscam prender a atenção do leitor, e que comumente são vistos em redes sociais, iremos propor desafios matemáticos que requerem a utilização da lógica proposicional e/ou da lógica argumentativa e do pensamento crítico para que sejam desvendados. Pela natureza desafiadora das atividades propostas e pelo elo com a lógica, esperamos despertar no aluno um desejo incessante de resolver tais problemas, assim como o mesmo desejo de aprender a matéria necessária para resolvê-lo.

2 RACIOCÍNIO LÓGICO E PENSAMENTO CRÍTICO

A lógica pode ser pensada como uma maneira de analisar uma sequência de raciocínios. Conforme explica (5)

> [...] Na Grécia Antiga, a formação do homem grego incluía três disciplinas básicas: a Lógica, a Gramática e a Retórica. O estudo da Gramática (**gramma** quer dizer **letra**, em grego) era uma condição necessária para o domínio da língua, tanto na forma oral como na escrita. A lógica (ou Dialética) dizia respeito ao exercício da capacidade de argumentação, no discernimento entre os bons e maus argumentos. Na Retórica, o ponto fundamental era o convencimento dos outros, a persuasão. O currículo mínimo para a vida na cidade, para a formação política (**pólis** quer dizer **cidade**, em grego), era constituído por essas três disciplinas, sendo chamado **Trivium**. Era destinado a todos os cidadãos, e nesse fato reside a origem moderna da palavra "trivial".

É importante destacar que a lógica não cria conhecimento, mas nos dá regras para organizar e lidar com ele. Estaremos interessados, a partir daqui, em analisar argumentos e concluir sobre sua validade, ou seja, vamos atribuir a uma frase declarativa um valor de verdadeiro ou falso. Podemos, por exemplo, ler a seguinte frase: "O Atlético mineiro é um time de futebol do Rio de Janeiro" e, se conhecer um pouco do futebol brasileiro ou sobre esse time, concluir que a frase é falsa. Observe, agora, a placa a seguir e analise a informação que ela traz, dizendo se é verdadeira ou falsa.

Figura 1 - Placa

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Se dissermos que a frase é verdadeira, então ela deve ser falsa e se dissermos que é falsa, a frase tem que ser verdadeira, levando-nos à um paradoxo no qual a atribuição de verdadeiro ou falso sempre leva a uma contradição entre conclusão e a informação dada. Portanto, considerando o objetivo desta dissertação, ela não fará parte do nosso estudo.

Agora, imagine que você está em um estabelecimento público e que existam portas que somente pessoas autorizadas possam entrar e em uma dessas portas está fixada uma placa informativa, representada na imagem a seguir.

Figura 2 - Porta

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

As vivências no cotidiano levarão a maioria das pessoas a entender que, depois de abri-la, ela deva ser fechada imediatamente (esse é o objetivo da placa). Mas, se alguém mais atento e criterioso com a linguagem ler essa placa poderia questionar o porquê de ali haver uma porta e não uma parede. A palavra "sempre", contida na frase, indica que essa porta nunca poderá ser aberta, portanto, não precisaria de uma porta naquele local.

Nesse exemplo, analisamos somente uma frase e concluímos que ela não expressa a informação desejada. Portanto, essa frase está mal formulada e não é válida, quando olhada de um ponto de vista da lógica.

A lógica se preocupa com a análise e o estabelecimento de relações entre um conjunto de frases, dentre elas as proposições dadas, ou premissas, e a conclusão. Essa relação é denominada argumento. O argumento está inserido no cotidiano de todos nós, seja para pedir um desconto, fazer uma campanha política ou para convencer a população de que a terra não é plana.

Um argumento lógico será classificado em válido ou inválido. Segundo (1), "um argumento é válido se for impossível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa (ao mesmo tempo). Dizemos que um argumento é inválido se não for válido". Em outras palavras, o único caso em que podemos afirmar a veracidade de uma conclusão é quando temos premissas verdadeiras em um argumento válido. Caso o argumento seja válido, e pelo menos uma premissa seja falsa, nada podemos afirmar sobre a veracidade ou falsidade da conclusão, ou seja, um argumento válido nem sempre é um bom argumento, pois pode ter sido produzido a partir de uma, ou de todas as premissas falsas.

Já quando o argumento é inválido, também conhecido como falácia (vamos nos ater em exemplificar as falácias estruturais), tanto premissas verdadeiras quanto as falsas podem produzir conclusões verdadeiras e falsas.

Devemos ter em mente que validade e verdade são bem diferentes no ponto de vista lógico. As premissas e a conclusão são classificadas em verdadeiras ou falsas e a validade é uma propriedade dos argumentos. É incorreto falar em proposições válidas ou inválidas, elas só podem ser verdadeiras ou falsas.

Vamos estudar a forma básica de argumentação, conhecida como silogismo, que, segundo (6), "é a ferramenta lógica mais famosa do filósofo grego Aristóteles, que criou as primeiras regras formais da lógica que regiam o bom raciocínio, o pensamento claro e o argumento confiável".

Um silogismo é um tipo de argumento simples que consiste em três proposições: as duas primeiras proposições são as premissas e a terceira é a conclusão. Vejamos alguns exemplos:

Argumento 1)

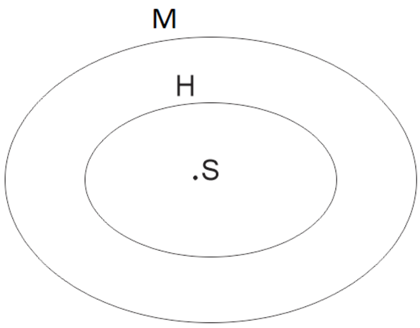
Premissa 1: Todos os homens são mortais.

Premissa 2: Sócrates é homem.

Conclusão: Sócrates é mortal.

Do ponto de vista lógico, Sócrates está dentro do conjunto de todos os homens que, por sua vez, está dentro do conjunto dos mortais. Portanto, Sócrates é mortal. Observe o diagrama a seguir, onde o conjunto dos mortais está representado pela letra M, o conjunto dos homens está representado pela letra H e Sócrátes está representado pela letra S.

Figura 3 - Diagrama 1



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Notamos que o argumento 1 é válido e as premissas são verdadeiras, portanto a conclusão também é verdadeira.

Observe a seguir um argumento inválido produzido a partir de pelo menos uma premissa falsa e conclusão verdadeira:

Argumento 2)

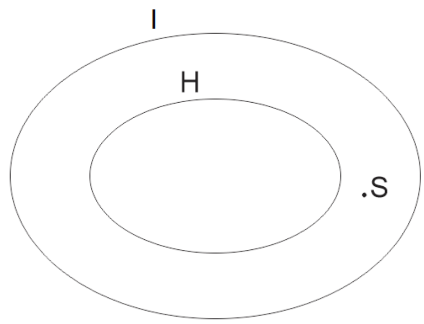
Premissa 1: Todo homem é imortal.

Premissa 2: Sócrates é imortal.

Conclusão: Sócrates é homem.

Observe o diagrama a seguir onde o conjunto dos imortais está representado pela letra I, o conjunto dos homens está representado pela letra H e Sócrates está representado pela letra S.

Figura 4 - Diagrama 2



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Todo homem é imortal, portanto H está contido em I. Sócrates é imortal e também está contido em I. Mas nada pode garantir que Sócrates esteja dentro do conjunto dos homens. Portanto, a não ser que tenhamos certeza que Sócrates é ser humano, e não, por exemplo, um deus da mitologia grega, não podemos afirmar se a conclusão é verdadeira ou falsa.

Observe, também, que pelo menos uma das premissas falsa não tem relação com a validade do argumento, vejamos.

Argumento 3)

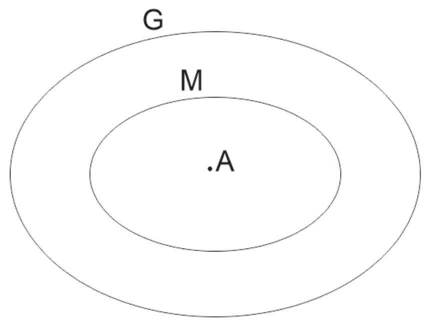
Premissa 1: Todo matemático é um gênio.

Premissa 2: A autora dessa dissertação é formada em matemática.

Conclusão: A autora dessa dissertação é um gênio.

Do ponto de vista lógico, podemos observar que a autora dessa dissertação está dentro do conjunto de todos os matemáticos que, por sua vez, está dentro do conjunto dos gênios. Portanto, a autora dessa dissertação é um gênio. Observe o diagrama a seguir, onde o conjunto dos gênios está representado pela letra G, o conjunto dos matemáticos está representado pela letra M e a autora dessa dissertação está representada pela letra A.

Figura 5 - Diagrama 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Podemos verificar que o argumento 3 é válido mas isso não garante que a conclusão seja verdadeira. Nesse exemplo, a premissa 1 é falsa, pois nada garante que todos os matemáticos são gênios e a conclusão também é falsa, pois a autora dessa dissertação está longe de ser um gênio.

Agora, se colocarmos no lugar dela o grande Pitágoras, teremos ainda um argumento válido, com uma premissa falsa e uma conclusão verdadeira. Então, nada podemos afirmar sobre a conclusão de um argumento válido com premissa falsa ainda que o argumento seja valido.

E por fim, observe o próximo argumento:

Argumento 4)

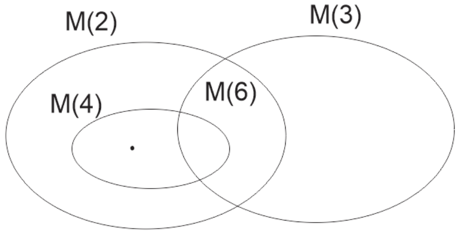
Premissa 1: Todo múltiplo de 6 é divisível por 2

Premissa 2: 4 é divisível por 2

Conclusão: 4 é múltiplo de 6

Podemos afirmar que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, pois dizer que todo múltiplo de 6 é divisível por 2 não é o mesmo que afirmar que todo número divisível por 2 é múltiplo de 6. O próprio 4 é um contra exemplo disso. Ou seja, o argumento é inválido. Vamos analisar o diagrama desse argumento, onde o conjunto dos múltiplos de 2 está representado por M(2), o conjunto dos múltiplos de 3 está representado por M(3), o conjunto dos múltiplos de 4 está representado por M(4) e o conjunto dos múltiplos de 6 está representado por M(6).

Figura 6 - Diagrama 4



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Portanto, nem todos os múltiplos de 4 são múltiplos de 6, o que torna esse argumento inválido.

Como resumo sobre argumentos e suas premissas, e ressaltando que argumentos válidos construídos a partir de premissas verdadeiras produzem sempre conclusões verdadeiras, observe o quadro a seguir:

Quadro 1 - Argumentos e suas conclusões.

Argumentos	**Premissas**	**Conclusão**	**Exemplo**
Válidos	Verdadeiras	Verdadeiras	Argumento 1
Válidos	Pelo menos uma falsa	Verdadeiras ou falsas	Argumento 3
Inválido	Verdadeiras	Verdadeiras ou falsas	Argumento 4
Inválido	Pelo menos uma falsa	Verdadeiras ou falsas	Argumento 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Compreender a relação entre as proposições dadas e o argumento utilizado, permite compreender o encadeamento das ideias e identificar a criação de argumentos falaciosos. Muitos desses argumentos tentam convencer pela apelação, que utiliza o excesso de emoção para tentar persuadir com maus argumentos.

O termo falácia, do latino fallere que significa enganar, é um raciocínio errado mascarado em relações aparentemente válidas. Na lógica e na retórica, uma falácia é um argumento logicamente incoerente, sem fundamento, inválido ou falho, que se vale de um aparente rigor na tentativa de provar o que se alega.

Na atualidade, em meio à avalanche de informações que nos chegam, é muito comum nos depararmos com essas informações falaciosas, as *fake news*, que, traduzindo para o português, sao as notícias falsas. Esse tipo de notícia vem sendo amplamente divulgado em sites de jornalismo duvidoso, em redes sociais como o WhatsApp e outros meios de comunicação. As *fake news* são uma grande arma para manipular o pensamento das pessoas, ou de grupos, e convencê-las de algo que não é verdade. No Brasil, produzir e/ou compartilhar *fake news* não se configura como crime, mas isso não impede a justiça de enquadrar um produtor dessas notícias falsas por calúnia, por exemplo.

Diz o ditado popular que uma mentira dita mais de 100 vezes torna-se verdade. É basicamente assim que as notícias falsas criam força e ganham defensores. E como identificar e se proteger de uma *fake news*? Não existe uma "receita de bolo" para se livrar dessas falsas notícias, mas desenvolver o pensamento crítico e o raciocínio lógico pode auxiliar a identificar informações que parecem duvidosas, e checá-las, bem como identificar argumentos inválidos usados para se chegar à conclusão que se quer enfatizar.

Vamos analisar um trecho de uma reportagem sobre *fake news* do jornal "Folha de São Paulo":

> [...] O estudo também revelou que 85,2% dos eleitores do Bolsonaro entrevistados leram a notícia que Fernando Haddad implementou o kit gay e 83,7% acreditaram na história. Dos eleitores de Haddad entrevistados, 61% viram a informação e 10,5% acreditaram nela.
>
> CEO e fundador da Avaaz, Ricken Patel disse que a democracia brasileira está se afogando em notícias falsas. "Essas histórias foram armas tóxicas cuidadosamente fabricadas para destruir a elegibilidade de um candidato. E, com a ajuda do Facebook e WhatsApp." (7)

Seria essa reportagem sobre *fake news* uma *fake news*? A primeira pergunta que devemos fazer a nós mesmos é sobre a fonte dessa notícia. Ela existe e é confiável? Nesse caso sim, ela existe e, segundo a Associação Brasileira de Anunciantes (8), esse jornal é confiável. Já, segundo o presidente Bolsonaro, o jornal nao é confiável e por isso ele cancelou todas as assinaturas do governo federal com o mesmo (9).

Outra pergunta que deve ser feita é sobre as citações da reportagem. No recorte citado aqui, foi apresentado uma fala de Ricken Patel. Quem é essa pessoa? Ricken Patel existe e é co-fundador da Avaaz.org, que é uma rede de mobilização social global na internet. No próprio site da Avaaz, está a citação dessa fala de Ricken (10).

Agora cabe a você decidir sobre a veracidade ou falsidade dessa notícia. O importante aqui é que você veja alguns caminhos a se percorrer.

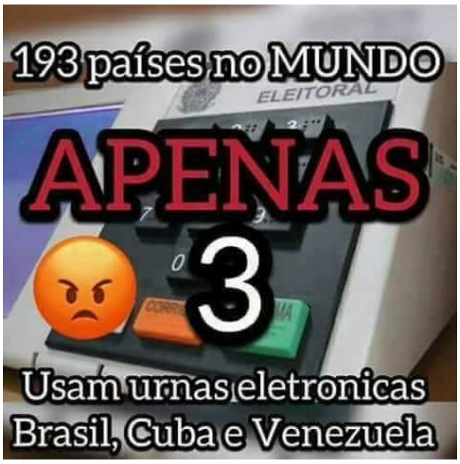
A seguir, apresentamos uma lista de perguntas que podem ser feitas sobre uma determinada notícia.

- A notícia é ambígua? Caso seja, já estamos falando de um mal argumento que deve ser descartado.
- As evidências são válidas? Verifique informações tiradas de outras notícias.
- A fonte é duvidosa? Verifique se existe um autor para a notícia e de onde ela vem.

- Outras fontes de pesquisas confiáveis falaram sobre a mesma notícia? Um bom jornal não deixaria de exibir uma notícia importante.
- A notícia é impressionante, degradante ou apelativa demais? Duvide deste tipo de notícia caso somente um local esteja divulgando-a.

Outro exemplo de *fake news*, bem simples, vem de uma imagem, apresentada a seguir, que circulou pelo WhatsApp em 2018.

Figura 7 - Fake News



Fonte: SAKAMOTO (2018)

Essa imagem diz que apenas três países no mundo utilizam a urna eletrônica, mas é fácil invalidar esse argumento. Vários sites confiáveis disponibilizam essa informação, como a Agência Brasil (12), que publicou um levantamento feito pelo Instituto para Democracia e Assistência Eleitoral Internacional, mostrando que, em todo o mundo, 35 países já utilizam sistemas eletrônicos para captação e apuração de votos. O Tribunal Superior Eleitoral (13) também publicou uma nota de esclarecimento sobre esse assunto. Note ainda que o fato de apenas 3 países usarem a urna poderia estar relacionado a fatores econômicos mas, ao enfatizar países considerados "comunistas" e resaltar o *emoji* zangado, visa alimentar um sentimento de invalidação da urna eletrônica.

É claro que cada notícia merece um olhar diferenciado e, por isso, não podemos listar regras rígidas a serem seguidas, mas é bom saber por onde começar e ter em mente, principalmente, que estamos rodeados por *fake news* e, portanto, todas as notícias, antes de serem compartilhadas, devem ser verificadas.

Diante de alguns tipos de argumentos apresentados aqui, vemos a necessidade de formalizar um pouco mais esse conteúdo apresentado e nos aprofundarmos na lógica matemática proposicional, apresentada no próximo capítulo.

3 LÓGICA PROPOSICIONAL

Neste capítulo, daremos início ao estudo formal de lógica proposicional, voltado para o entendimento de proposições, tabelas verdades, conectivos lógicos e operações lógicas sobre proposições.

Faremos, em cada um desses itens, um estudo detalhado para que o leitor seja capaz de compreender, identificar e trabalhar com sentenças lógicas.

3.1 PROPOSIÇÃO

Para introduzirmos um dos conceitos mais elementares da lógica, é interessante relembrarmos o que é sentença e seus tipos. Segundo (14), "a sentença, também denominada "frase", é um enunciado de sentido completo", isto é, ela possui a capacidade de transmitir ideias por si só, podendo ou não conter um verbo, e é composta apenas por uma ou várias palavras.

As sentenças podem ser de vários tipos, sendo:

i. Declarativas: É a constatação de um fato pelo emissor. É pontuada com ponto final.

- O filme Titanic é de ação.
- A capital do Brasil é Brasília.

ii. Interrogativas: O emissor faz uma pergunta ao interlocutor. Pode ser pontuada com ponto de interrogação ou ponto final.

- Que dia é hoje?
- Gostaria de saber se deseja um café.

iii. Imperativas: O emissor ordena ou faz um pedido. Pode ser pontuada com ponto de exclamação ou ponto final.

- Faça as malas.
- Não corra!

iv. Exclamativas: O emissor exprime um estado emotivo, exteriorizando seus sentimentos. Sempre é pontuada com ponto de exclamação.

- Que bolo delicioso!
- Que dia maravilhoso!

v. Optativas: Utilizada para exprimir um desejo, uma vontade. Sempre é pontuada com ponto de exclamação.

- Vá com Deus!
- Que chegue logo o verão!

Definição 1. ***Proposição*** *é uma sentença declarativa, expressa por meio de palavras ou símbolos, a qual possa ser considerada, sem ambiguidade, verdadeira ou falsa.*

Observe que é fácil atribuir um valor de verdadeiro ou falso a uma sentença declarativa, mas isso não ocorre com os outros tipos de sentenças. No âmbito da lógica, estamos interessados somente naquelas sentenças que podemos atribuir essa classificação, e somente uma delas.

Assim, toda frase declarativa expressa por meio de palavras (com sujeito e predicado) ou símbolos, e que possamos atribuir, sem ambiguidade, o valor lógico de verdadeiro ou falso, denominados V e F, respectivamente, será uma proposição.

Exemplos:

a) O Brasil fica no continente africano.

b) $3 + 4 = 7$.

c) $5 \geq 8$.

Observe que em **a)** a proposição é expressa por palavras, em que o sujeito é "O Brasil" e o predicado é "fica no continente africano". Essa proposição é falsa (F), visto que é conhecido que o Brasil fica na América do Sul. Já em **b)** e **c)** as proposições são expressas por meio de símbolos matemáticos e são verdadeira (V) e falsa (F), respectivamente.

3.2 PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA LÓGICA

Já sabemos que devemos atribuir uma classificação às proposições entre verdadeira ou falsa, ditos valores verdade. Mas podemos atribuir o valor de verdadeira e falsa ao mesmo tempo a uma determinada proposição?

A resposta é NÃO! Ao se tratar de lógica proposicional, existem dois princípios fundamentais que a regem (veja (15)), sendo:

i. princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

ii. princípio do terceiro excluído: Toda a proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

3.3 CLASSIFICAÇÃO DAS PROPOSIÇÕES LÓGICAS

Podemos classificar as proposições em simples ou compostas.

A **proposição simples** é uma frase declarativa que expressa um pensamento completo acerca de um objeto. Ela não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. Em outras palavras, possui apenas um objeto de estudo. Essas proposições simples serão indicadas por letras minúsculas de nosso alfabeto, chamadas letras proposicionais.

Exemplos:

a) O número 16 é um quadrado perfeito.

b) O número 1 é primo.

Já a **proposição composta** é formada pela composição de duas ou mais proposições, unidas por conectivos lógicos, que iremos estudar a seguir. Essas proposições serão indicadas por letras maiúsculas de nosso alfabeto.

A representação P(a, b, c, d) indica que a proposição composta P é formada pelas proposições simples a, b, c e d.

As proposições componentes de uma proposição composta podem ser, elas mesmas, proposições compostas. Exemplos:

P: $1 + 2 = 3$ e $2 \neq 1$

Q: $1 + 2 = 3$ ou $2 \neq 1$

R: Se $1 + 2 = 3$, então $2 \neq 1$.

S: Se $1 + 2 = 3$ ou $2 \neq 1$, então Pedro venceu o desafio.

Observe que, em **P**, nosso objeto de estudo seria analisar a proposição simples a: $1 + 2 = 3$ e a proposição simples b: $2 \neq 1$. Essas duas proposições a e b foram conectas pelo conectivo “e”. Já em **Q**, as mesmas proposições simples a e b foram conectadas pelo conectivo “ou”. Em **R**, essas proposições foram conectadas por “se ..., então ...”, isto é, se a, então b. E, por fim, em **S**, a proposição composta **Q** e a proposição simples “Pedro venceu o desafio” foram conectadas por “se ..., então ...”, formando uma nova proposição composta.

3.4 CONECTIVOS LÓGICOS

Os conectivos lógicos, também chamados de operadores lógicos, são os responsáveis por unir proposições simples, transformando-as em compostas, ou servem apenas para mudar o valor lógico de uma proposição simples. No quadro a seguir, estão apresentados esses conectivos com seus respectivos símbolos.

Quadro 2 - Conectivos

Conectivo Lógico	Símbolo
Negação	$\sim$
Conjunção	$\wedge$
Disjunção inclusiva	$\vee$
Disjunção exclusiva	$\underline{\vee}$
Condicional	$\rightarrow$
Bicondicional	$\leftrightarrow$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Vamos exemplificar a utilização de cada um desses conectivos utilizando a proposição simples p: o triângulo retângulo é equilátero e, quando necessário, a proposição simples q: o triângulo retângulo é equiângulo.

- Negação: $\sim p$

  O triângulo retângulo **não** é equilátero.

- Conjunção: $p \wedge q$

  O triângulo retângulo é equilátero **e** equiângulo.

- Disjunção inclusiva: $p \vee q$

  O triângulo retângulo é equilátero **ou** equiângulo.

- Disjunção exclusiva: $p \underline{\vee} q$

  Ou o triângulo retângulo é equilátero **ou** ele é equiângulo.

- Condicional: $p \rightarrow q$

  Se o triângulo retângulo é equilátero, **então** ele é equiângulo.

- Bicondicional: $p \leftrightarrow q$

  O triângulo retângulo é equilátero **se, e somente se**, ele é equiângulo.

3.5 VALOR LÓGICO

Um dos nossos maiores objetivos com esse estudo é saber dizer se uma proposição, seja ela simples ou composta, possui valor lógico verdadeiro ou falso.

Para exemplificar, vamos analisar uma fala de Pinóquio no filme Shrek Terceiro, em que o Príncipe Encantado quer encontrar Shrek e pergunta a Pinóquio onde Shrek está.

Príncipe Encantado:

– Você. Você não pode mentir. Então me diga, boneco, onde está Shrek?

Pinóquio:

– Uh, hmm, bem, uh, eu não sei onde ele não está.

Como o nariz de Pinóquio não cresceu ao falar essa frase, isso quer dizer que a frase é verdadeira. Observe que Pinóquio utilizou, algumas vezes, a negação para formular essa proposição simples. Mas, o fato de essa proposição simples ser verdadeira, significa que Pinóquio sabe onde Shrek está? (Discutiremos essa questão na subseção **3.7.1**).

É a partir do estudo do valor lógico dessa proposição que saberemos responder a essa pergunta.

Como dito anteriormente, uma proposição só pode assumir um dos seguintes valores lógicos, V ou F, e somente um deles. Assim, considere que **V(p)** indica o valor lógico da proposição **p** e vamos assumir a seguinte notação:

Se a proposição **p** for **verdadeira**, então **V(p) = V** e se a proposição **p** for **falsa**, então **V(p) = F**.

O valor lógico de uma proposição composta depende exclusivamente dos valores lógicos de suas proposições componentes e dos conectivos lógicos que as ligam e que serão analisados por meio de uma tabela verdade, que será vista na próxima seção.

Exemplos:

p: O Sol é verde.

V(p) = F

q: Um hexágono tem seis lados.

V(q) = V

r: Dois é raiz da equação $x^2 + 3x - 4 = 0$

V(r) = F

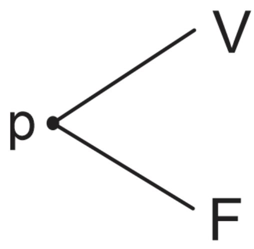
3.6 TABELA VERDADE

A tabela verdade é uma maneira prática de dispor organizadamente os valores lógicos envolvidos em uma proposição composta.

Inicialmente, vamos analisar o diagrama de árvore com todas as possibilidades de valoração das proposições componentes. Os possíveis valores lógicos das proposições compostas serão estudados mais adiante.

Como **uma** proposição simples p pode ser somente verdadeira ou somente falsa, seu diagrama terá dois ramos, observe:

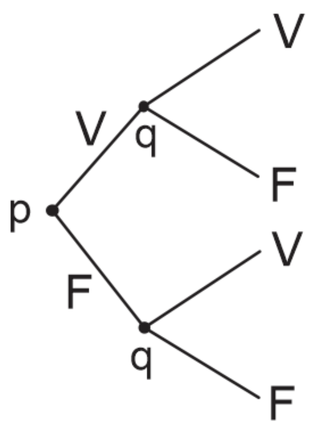
Figura 8 - Diagrama de árvore 1



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Já uma proposição composta por **duas** proposições simples, **P(p, q)**, terá quatro ramos em seu diagrama, observe:

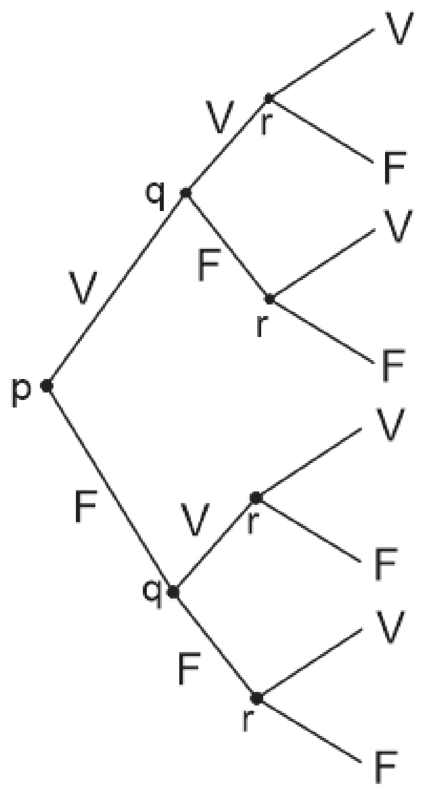
Figura 9 - Diagrama de árvore 2



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Uma proposição composta por **três** proposições simples, **P(p, q, r)**, terá oito ramos em seu diagrama, observe:

Figura 10 - Diagrama de árvore 3



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

E assim por diante, quanto maior o número de proposições simples que compõe uma proposição composta, maiores são as possibilidades de respostas lógicas e maior a quantidade de ramos do diagrama. Essas possíveis respostas lógicas serão dispostas, organizadamente, em uma tabela verdade que terá a quantidade de linhas equivalente à quantidade de ramos do diagrama de árvore, e a quantidade de colunas base igual à quantidade de proposições simples, componentes da composta.

Utilizaremos o teorema a seguir para descobrir qual é essa quantidade de linhas necessárias para montar a tabela verdade, desconsiderando a primeira linha que serve para identificar as proposições componentes.

Teorema 3.6.1. *(15) O número de linhas distintas de uma tabela verdade é dado por* 2^n*, em que* n *é o número de proposições simples componentes e 2 representa o número de valores lógicos possíveis (V ou F).*

Observe que este teorema utiliza o princípio multiplicativo estudado em análise combinatória.

Após descobrir o número de linhas da tabela verdade, vamos preencher essa tabela. A $1^{\underline{a}}$ coluna deve ter as $\frac{2^n}{2^1}$ primeiras linhas com valor lógico verdadeiro e as restante com valor lógico falso, a $2^{\underline{a}}$ coluna deve ter as $\frac{2^n}{2^2}$ primeiras linhas com valor lógico verdadeiro, as próximas $\frac{2^n}{2^2}$ linhas com valor lógico falso, as próximas $\frac{2^n}{2^2}$ linhas com valor lógico verdadeiro e, por fim, as últimas $\frac{2^n}{2^2}$ linhas com valor lógico falso. Esse processo será repetido até que a última coluna tenha, alternadamente, valores verdadeiros e falsos.

Para cada uma das proposições apresentadas anteriormente, a tabela verdade será

Quadro 3 - Tabela verdade de 2 linhas

p
V
F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Quadro 4 - Tabela verdade de 4 linhas

p	**q**
V	V
V	F
F	V
F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Quadro 5 - Tabela verdade de 8 linhas

p	**q**	**r**
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Generalizando, seja n o número de proposições simples componentes da proposição composta P. Cada coluna base, C_i, em que i varia de 1 a n deverá ter, alternadamente, $\frac{2^n}{2^i}$ valores lógicos verdadeiros e, depois, $\frac{2^n}{2^i}$ valores lógicos falsos até que se preencha toda a coluna.

3.7 OPERAÇÕES LÓGICAS SOBRE PROPOSIÇÕES

Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições chamadas operações lógicas. Estas obedecem às regras de um cálculo, denominado cálculo proposicional. Estudaremos a seguir as operações lógicas fundamentais.

3.7.1 Negação

A negação de uma proposição p é uma proposição cujo valor lógico é a verdade (V), quando p é falsa, e a falsidade (F), quando p é verdadeira.

Simbolicamente, a negação de p indica-se com a notação "$\sim p$", que se lê: "não p". Assim, "não p" tem valor lógico **oposto** ao de p.

Observe que negar uma proposição não é torná-la falsa, e sim trocar sua valoração.

Exemplo: A proposição "O Sol é uma estrela", que é verdadeira, não é negação da proposição "O Sol é um planeta", que é falsa.

Em linguagem de conjuntos, a negação de uma proposição p, representada pelo conjunto P, é o complementar de P. Simbolicamente, dizemos que $\sim P = P^C = \overline{P}$.

Exemplo: A negação da proposição p, que representa o conjunto dos números reais tais que a soma desse número com o natural 3 resulta em um valor positivo, representada por $P = \{x \in \mathbb{R}, x + 3 > 0\}$ é $\overline{P} = \{x \in \mathbb{R}, x + 3 \leq 0\}$.

O valor lógico da negação de uma proposição é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade, em que a primeira coluna representa a proposição base e a segunda coluna a operação negação dessa proposição:

Quadro 6 - Tabela verdade da negação

p	**$\sim$ p**
V	F
F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Exemplos: Observe o quadro a seguir:

Quadro 7 - Exemplos de negação

Proposição	**Negação**
p: O Sol é um planeta	$\sim$ p: O Sol não é um planeta.
q: $2 + 3 = 5$	$\sim$ q: $2 + 3 \neq 5$
r: Rio de Janeiro é um país.	$\sim$ r: Rio de Janeiro não é um país. $\sim$ r: Não é verdade que Rio de Janeiro é um país. $\sim$ r: É falso que Rio de Janeiro é um país.

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Voltando à fala de Pinóquio no filme de Shrek, vamos montar a tabela verdade dessa proposição.

Primeiro, deveremos identificar quantas linhas terá a tabela verdade da proposição “eu não sei onde ele não está”.

Seja a proposição p: eu sei onde ele está. Como temos apenas uma proposição simples, a tabela verdade terá $n = 1$ colunas e $2^1 = 2$ linhas, sendo a primeira com valor lógico verdadeiro e a segunda com valor lógico falso.

Quadro 8 - Pinóquio primeira parte

p
V
F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Ao negar uma vez a proposição p teremos $\sim p$: eu sei onde ele não está. A tabela verdade de $\sim p$ será

Quadro 9 - Pinóquio segunda parte

p	$\sim$ p
V	F
F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Mas ainda assim não temos a frase dita por Pinóquio. Para chegarmos nela, basta negar mais uma vez a proposição simples p, ou seja, $\sim (\sim p)$: eu não sei onde ele não está. A tabela verdade de $\sim (\sim p)$ será

Quadro 10 - Pinóquio terceira parte

p	$\sim$ p	$\sim$ ($\sim$ p)
V	F	V
F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe que a tabela verdade de $\sim (\sim p)$ é igual à tabela verdade de p. Como a proposição componente é a mesma, e as duas tabelas possuem colunas idênticas, podemos chegar na seguinte conclusão.

Sabemos que Pinóquio disse a verdade com a frase $\sim (\sim p)$, pois caso contrário seu nariz iria crescer, apenas a linha 1 da tabela apresentada anteriormente nos interessa e, então, concluímos que $V(\sim p)$ = F e $V(p)$ = V, ou seja, **Pinóquio sabe onde Shrek está**.

Essa “igualdade” de tabelas será aprofundada mais adiante na seção 3.8 que trata de proposições equivalentes.

3.7.2 Conjunção

Duas proposições p e q podem ser combinadas pelo conectivo **e** para formar uma proposição composta denominada conjunção das proposições originais. Simbolicamente, a conjunção de p e q é a proposição composta p $\wedge$ q que se lê “p e q”.

Quando uma pessoa diz que, em um determinado dia, irá arrumar a casa e irá fazer uma caminhada, a expressão “e”, do ponto de vista lógico, representa a ocorrência desses dois acontecimentos nesse dia.

Exemplos: Dadas as proposições:

1. - p: Viçosa é uma cidade universitária;
   - q: Viçosa é do tamanho de Belo Horizonte.

   A conjunção é:

   A = p $\wedge$ q: Viçosa é uma cidade universitária e é do tamanho de Belo Horizonte.

2. - p: $2 < 3$;
   - q: $2 \neq 1$.

   A conjunção é:

   B = p $\wedge$ q: $2 < 3$ e $2 \neq 1$.

O símbolo $\wedge$ pode ser usado, também, para definir a intersecção de dois conjuntos:

$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}.$$

A conjunção de duas proposições (p $\wedge$ q) é verdadeira se, e somente se, p e q são ambas verdadeiras, e é falsa nos demais casos.

O valor lógico da conjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade, em que a primeira e a segunda coluna representam as proposições base e a terceira coluna a operação conjunção dessas proposições:

Quadro 11 - Tabela verdade da conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Exemplo: Dadas as conjunções A e B acima, e sendo V(p $\wedge$ q) = V(p) $\wedge$ V(q), daremos o valor lógico das mesmas.

Na proposição composta A, temos V(p) = V e V(q) = F. Assim, V(A) = V(p $\wedge$ q) = V $\wedge$ F = F

Na proposição composta B, temos V(p) = V e V(q) = V. Assim, V(B) = V(p $\wedge$ q) = V $\wedge$ V = V.

3.7.3 Disjunção Inclusiva

Duas proposições p e q podem ser combinadas pelo conectivo **ou** para formar uma proposição composta denominada disjunção das proposições originais. Simbolicamente, a disjunção de p e q é a proposição composta p $\vee$ q que se lê "p ou q".

Quando uma pessoa diz que, em um determinado dia, irá arrumar a casa ou irá fazer uma caminhada, a expressão "ou", do ponto de vista lógico, representa a ocorrência de apenas um desses acontecimentos, ou dos dois acontecimentos nesse dia.

Exemplos: Dadas as proposições:

1. - p: Viçosa é uma cidade universitária;
   - q: Viçosa é do tamanho de Belo Horizonte.

   A disjunção é:

   C = p $\vee$ q: Viçosa é uma cidade universitária ou é do tamanho de Belo Horizonte.

2. - p: $2 < 3$;
   - q: $2 \neq 1$.

   A disjunção é:

   D = p $\vee$ q: $2 < 3$ ou $2 \neq 1$.

O símbolo $\vee$ pode ser usado, também, para definir a união de dois conjuntos:

$$\text{A} \cup \text{B} = \{x; x \in A \vee x \in B\}.$$

A disjunção de duas proposições (p $\vee$ q) é falsa se, e somente se, p e q são ambas falsas, e é verdadeira nos demais casos.

O valor lógico da disjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade, em que a primeira e a segunda coluna representam as proposições base e a terceira coluna a operação disjunção dessas proposições:

Quadro 12 - Tabela verdade da disjunção inclusiva

p	**q**	**p $\vee$ q**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Exemplo: Dadas as disjunções C e D acima, e sendo V(p $\vee$ q) = V(p) $\vee$ V(q), daremos o valor lógico das mesmas.

Na proposição composta C, temos que V(p) = V e V(q) = F. Assim, V(C) = V(p $\vee$ q) = V $\vee$ F = V

Na proposição composta D, temos que V(p) = V e V(q) = V. Assim, V(D) = V(p $\vee$ q) = V $\vee$ V = V.

3.7.4 Disjunção Exclusiva

A expressão "ou", como dito anteriormente, tem a função de inclusão, mas, em muitas proposições, queremos apenas a ocorrência de uma das proposições base, e não das duas simultaneamente. Na frase "Maria tem 29 ou 30 anos de idade", se a primeira proposição base for verdadeira então a segunda tem que ser falsa e vice-versa, pois Maria não pode ter 29 e 30 anos ao mesmo tempo. Para esses casos, em que a ocorrência de duas proposições ao mesmo tempo não seria possível, utilizamos a disjunção exclusiva.

Assim, quando desejarmos expressar uma proposição composta em que apenas uma das proposições base possa ser verdadeira para que a composta também o seja, utilizaremos a expressão "ou... ou" que representa a exclusão.

uas proposições p e q podem ser combinadas pelo conectivo **"ou... ou"** para formar uma proposição composta denominada disjunção exclusiva das proposições originais. Simbolicamente, a disjunção exclusiva de p e q é a proposição composta p $\underline{\vee}$ q que se lê "ou p ou q".

Quando uma pessoa diz que, em um determinado dia, ou irá arrumar a casa ou irá fazer uma caminhada, a expressão “ou... ou”, do ponto de vista lógico, representa a ocorrência de apenas um desses acontecimentos.

Exemplos: Dadas as proposições:

1.
   - p: Viçosa é uma cidade universitária;
   - q: Viçosa é do tamanho de Belo Horizonte.

   A disjunção exclusiva é:

   G = p $\veebar$ q: Ou Viçosa é uma idade universitária ou é do tamanho de Belo Horizonte.

2.
   - p: $2 < 3$;
   - q: $2 \neq 1$.

   A disjunção exclusiva é:

   H = p $\veebar$ q: ou $2 < 3$ ou $2 \neq 1$.

O símbolo $\veebar$ pode ser usado, também, para definir a seguinte operação, denominada de diferença simétrica entre conjuntos:

$$(A \cup B)\backslash(A \cap B) = \{x; x \in A \veebar x \in B\}$$

A disjunção exclusiva de duas proposições (p $\veebar$ q) é falsa se, e somente se, p e q são ambas falsas ou ambas verdadeiras, e é verdadeira nos demais casos.

O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade, em que a primeira e a segunda coluna representam as proposições base e a terceira coluna a operação disjunção exclusiva dessas proposições:

Quadro 13 - Tabela verdade da disjunção exclusiva

p	**q**	**p $\veebar$ q**
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Exemplo: Dadas as disjunções exclusivas G e H acima, e sendo V(p $\veebar$ q) = V(p) $\veebar$ V(q), daremos o valor lógico das mesmas.

Na proposição composta G, temos que V(p) = V e V(q) = F. Assim, V(G) = V(p $\veebar$ q) = V $\veebar$ F = V

Na proposição composta H, temos que V(p) = V e V(q) = V. Assim, V(H) = V(p $\veebar$ q) = V $\veebar$ V = F.

3.7.5 Condicional

Duas proposições p e q podem ser combinadas pelo conectivo **se ..., então** para formar uma proposição composta, denominada condicional das proposições originais. A primeira proposição p é denominada de antecedente e a segunda proposição q é o consequente da condicional. Simbolicamente, a condicional de p e q é a proposição composta $p \rightarrow q$ que geralmente se lê "se p, então q".

Mas existem outras formas de se ler a condicional $p \rightarrow q$, como:

- p implica q;
- p é suficiente para q;
- q é necessário para p;
- p consequentemente q;
- Quando p, q;
- No caso de p, q;
- q, contanto p;
- q, se p;
- q, no caso de p;
- Todo p é q.

Quando uma pessoa diz que, em um determinado dia, se ela arrumar a casa, então irá fazer uma caminhada, a expressão "se ..., então", do ponto de vista lógico, representa a não ocorrência do segundo acontecimento caso o primeiro não ocorra nesse dia. A condicional tem uma relação de causa e efeito ou causa e consequência.

Um outro bom exemplo é quando um pai promete ao filho um carro, caso ele passe no vestibular, em que a causa será passar no vestibular e a consequência será ganhar um carro. Se o filho passar no vestibular e ganhar o carro, o pai disse a verdade. Se ele não passar, e ainda, assim ganhar o carro, o pai também disse a verdade pois nenhuma consequência foi imposta caso ele não passasse. Agora, se o filho passar no vestibular e não ganhar o carro, o pai mentiu.

É interessante observar que a causa tem como resultado a consequência, mas a consequência não tem como resultado a causa. No exemplo acima, se o filho ganha o carro, não necessariamente foi por que ele passou no vestibular.

Exemplos: Dadas as proposições:

1. - p: Viçosa é uma cidade universitária;
   - q: Viçosa é do tamanho de Belo Horizonte.

   A condicional é:

   I = p $\rightarrow$ q: Se Viçosa é uma cidade universitária, então ela é do tamanho de Belo Horizonte.

2. - p: $2 < 3$;
   - q: $2 \neq 1$.

   A condicional é:

   J = p $\rightarrow$ q: Se $2 < 3$, então $2 \neq 1$.

O símbolo $\rightarrow$ pode ser usado, também, para definir a seguinte operação entre conjuntos:

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \equiv x; x \in A \rightarrow x \in B$$

A condicional de duas proposições (p $\rightarrow$ q) é falsa se, e somente se, p é verdadeira e q é falsa, e é verdadeira nos demais casos.

O valor lógico da condicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade, em que a primeira e a segunda coluna representam as proposições base e a terceira coluna a operação condicional dessas proposições:

Quadro 14 - Tabela verdade da condicional

p	**q**	**p $\rightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Exemplo: Dadas as condicionais I e J acima, e sendo V(p $\rightarrow$ q) = V(p) $\rightarrow$ V(q), daremos o valor lógico das mesmas.

Na proposição composta I, temos que V(p) = V e V(q) = F. Assim, V(I) = V(p $\rightarrow$ q) = V $\rightarrow$ F = F

Na proposição composta J, temos que V(p) = V e V(q) = V. Assim, V(J) = V(p $\rightarrow$ q) = V $\rightarrow$ V = V.

3.7.6 Bicondicional

Duas proposições p e q podem ser combinadas pelo conectivo **se, e somente se**, para formar uma proposição composta denominada bicondicional das proposições originais. Simbolicamente, a bicondicional de p e q é a proposição composta p $\leftrightarrow$ q que geralmente se lê "p se, e somente se, q".

Mas existem outras formas de se ler a bicondicional p $\leftrightarrow$ q, como:

- p é condição suficiente e necessária para q;
- q é condição suficiente e necessária para p;

Quando uma pessoa diz que, em um determinado dia, ela irá arrumar a casa se, e somente se, fizer uma caminhada, a expressão "se, e somente se", do ponto de vista lógico, representa a ocorrência do primeiro acontecimento, caso o segundo ocorra, e a ocorrência do segundo acontecimento, caso o primeiro ocorra. A bicondicional tem uma função de igualdade. Ela representa toda condicional que pode ser invertida sem prejuízo em seu significado.

Observe as duas condicionais a seguir:

- Se um determinado número somado com 3 resulta em 5, então esse número é o 2.
- Se um determinado número é o 2, então esse número somado com 3 resulta em 5.

Ambas podem ser representadas por uma única frase, tal que um determinado número somado com 3 resulta em 5 se, e somente se, esse número é o 2.

Exemplos: Dadas as proposições:

1. - p: Viçosa é uma cidade universitária;
   - q: Viçosa é do tamanho de Belo Horizonte.

   A bicondicional é:

   K = p $\leftrightarrow$ q: Viçosa é uma cidade universitária se, e somente se, ela é do tamanho de Belo Horizonte.

2. - p: $2 < 3$;
   - q: $2 \neq 1$.

   A bicondicional é:

   L = p $\leftrightarrow$ q: $2 < 3$ se, e somente se, $2 \neq 1$.

O símbolo $\leftrightarrow$ pode ser usado, também, para definir a seguinte operação que representa a igualdade entre dois conjuntos:

$$A \subset B \text{ e } B \subset A \equiv x; x \in A \leftrightarrow x \in B$$

A bicondicional de duas proposições (p $\leftrightarrow$ q) é falsa quando as proposições componentes possuem valorações opostas e é verdadeira nos demais casos.

O valor lógico da bicondicional de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela verdade, em que a primeira e a segunda coluna representam as proposições base e a terceira coluna a operação bicondicional dessas proposições:

Quadro 15 - Tabela verdade da bicondicional

p	**q**	**p $\leftrightarrow$ q**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Exemplo: Dadas as bicondicionais K e L acima, e sendo V(p $\leftrightarrow$ q) = V(p) $\leftrightarrow$ V(q), daremos o valor lógico das mesmas.

Na proposição composta K, temos V(p) = V e V(q) = F. Assim, V(K) = V(p $\leftrightarrow$ q) = V $\leftrightarrow$ F = F

Na proposição composta L, temos V(p) = V e V(q) = V. Assim, V(L) = V(p $\leftrightarrow$ q) = V $\leftrightarrow$ V = V.

3.8 EQUIVALÊNCIA LÓGICA

A tabela verdade de uma proposição X é formada pelas colunas das proposições componentes e pela própria proposição X, quando X é composta.

Dito isto, dizemos que duas tabelas verdade, referentes às proposições P e Q, são idênticas quando as proposições componentes de P e Q coincidem e quando essas tabelas verdade apresentam a mesma valoração na ordem das linhas correspondentes.

Vejamos um exemplo:

Sejam p uma proposição simples e X, Y proposições compostas tais que $X = p \vee p$ e $Y = p \wedge p$. Obtemos assim, as seguintes tabelas verdade:

Quadro 16 - Equivalência 1

p	$p \wedge p$
V	V
F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Quadro 17 - Equivalência 2

p	$p \vee p$
V	V
F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe que as proposições componentes de X e Y são iguais e cada linha correspondente possui mesma valoração. Portanto, dizemos que X é equivalente a Y. Simbolicamente, dizemos que

$$X \equiv Y.$$

Observação: Vale destacar aqui uma equivalência muito utilizada intuitivamente em discursos ou formalmente em métodos demonstrativos.

Tal equivalência é conhecida como **contraposição** ou **contrapositiva** e utiliza o raciocínio “inverso”. Vejamos um exemplo:

Pedro foi ao fisioterapeuta e o médico lhe disse que, se ele correr todos os próximos 30 dias, então irá fortalecer o músculo desejado.

Passados os 30 dias, Pedro retornou ao fisioterapeuta e disse que o músculo desejado não tinha se fortalecido. Então, o fisioterapeuta rapidamente concluiu que ele não havia corrido os 30 dias.

Chamaremos a condicional acima de proposição X, em que o antecedente é a proposição simples p: Se Pedro correr todos os próximos 30 dias e o consequente é a proposição simples q: Pedro irá fortalecer o músculo desejado.

Ao negar o consequente e concluirmos a negação do antecedente em uma condicional, estamos utilizando a contrapositiva. A equivalência lógica representada abaixo diz que se uma condicional é verdadeira, a sua contrapositiva também o é.

Quadro 18 - Tabela verdade da contrapositiva

p	**q**	**$\sim$ p**	**$\sim$ q**	**p $\rightarrow$ q**	**$\sim$ q $\rightarrow\sim$ p**
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**F**	**F**
F	V	V	F	**V**	**V**
F	F	V	V	**V**	**V**

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.9 NEGAÇÃO DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Vimos como negar uma proposição simples na subseção **3.7.1**, mas, para negar proposições compostas, utilizaremos fórmulas de negação que produzem expressões equivalentes à negação das proposições, buscando sempre inverter a valoração da proposição original.

3.9.1 Negação da Conjunção

Para negar uma conjunção p $\wedge$ q, vamos observar primeiramente sua tabela verdade, apresentada abaixo, e obter uma proposição composta que produza uma coluna $\sim$ (p $\wedge$ q) com valoração oposta a p $\wedge$ q.

Quadro 19 - Tabela verdade da negação da conjunção

p	**p**	**p $\wedge$ q**	**$\sim$ (p $\wedge$ q)**
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe, na primeira linha da tabela, que a conjunção é verdadeira quando ambas as proposições são verdadeiras, ou seja, V(p) = V, V(q) = V e V(p $\wedge$ q) = V.

Devemos obter $V(\sim(p\wedge q))$ = F. Para isto, basta que a primeira proposição, ou a segunda proposição, seja falsa, escrevendo $\sim p\vee\sim q$, obtemos uma valoração equivalente à valoração de $\sim(p\wedge q)$.

Na segunda e terceira linhas, a conjunção é falsa quando uma das proposições é falsa. Para obter $V(\sim(p\wedge q))$ = V, basta transformar a proposição falsa em verdadeira. Assim, deveremos trocar a valoração de p ou de q, escrevendo $\sim p\vee\sim q$, obtemos uma valoração equivalente à valoração de $\sim(p\wedge q)$.

E, por fim, na quarta linha, a conjunção também é falsa quando ambas as proposições são falsas. Para obter $V(\sim(p \wedge q))$ = V basta que p e q sejam verdadeiras. Mas, neste caso, como V(p) = F e V(q) = F, o valor lógico de $\sim p \wedge \sim q$ é equivalente ao valor lógico de $\sim p \vee \sim q$, já que estamos tratando de um “ou” inclusivo.

Assim, a fórmula que nos permite negar uma conjunção, produzindo uma proposição de valoração idêntica a $\sim (p \wedge q)$, é:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

De fato, observe a igualdade das duas últimas colunas na tabela verdade abaixo, garantindo a equivalência entres as proposições:

Quadro 20 - Tabela verdade da equivalência da negação da conjunção

p	**q**	$\sim$ **p**	$\sim$ **q**	$\sim$ **p** $\vee \sim$ **q**	$\sim$**(p** $\wedge$ **q)**
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em outras palavras, devemos negar a primeira proposição, trocar o conectivo “e” por “ou” e depois negar a segunda proposição, como mostra o quadro de exemplos a seguir:

Quadro 21 - Exemplos de negação da conjunção

Proposição	**Negação**
Hoje faz sol **e** faz calor	Hoje **não** faz sol **ou não** faz calor
$3 < x < 5$	$x \leq 3$ **ou** $x \geq 5$
ABC é isósceles **e** retângulo	ABC **não** é isósceles **ou não** é retângulo

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.9.2 Negação da Disjunção

Para negar uma disjunção p $\vee$ q, vamos observar primeiramente sua tabela verdade, apresentada abaixo, e obter uma proposição composta que produza uma coluna $\sim$ (p $\vee$ q) com valoração oposta a p $\vee$ q.

Quadro 22 - Tabela verdade da negação da disjunção

p	**q**	**p $\vee$ q**	**~(p $\vee$ q)**
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe, na primeira linha da tabela, que a conjunção é verdadeira quando ambas as proposições são verdadeiras, ou seja, , V(p) = V, V(q) = V e V(p $\vee$ q) = V.

Na primeira linha, devemos obter $V(\sim\ (p \vee q))$ = F. Para isto, basta que a primeira proposição e a segunda proposição sejam falsas, escrevendo $\sim p \wedge \sim q$, obtemos uma valoração equivalente à valoração de $\sim (p \vee q)$.

Na segunda linha, a conjunção é verdadeira quando uma das proposições é verdadeira. Para obter $V(\sim (p \vee q))$ = F, basta transformar a proposição verdadeira em falsa. Assim, deveremos trocar a valoração de p, escrevendo $\sim p \vee q$. Como $V(\sim p \vee q)$ = F e V($\sim p \wedge \sim q$) = F, essas proposições são, ambas, equivalentes à $\sim (p \vee q)$.

A terceira linha é análoga a segunda, trocando p por q.

E, por fim, na quarta linha, a conjunção é falsa quando ambas as proposições são falsas. Para obter $V(\sim\ (p \vee q))$ = V, basta que p, q, ou ambas, sejam verdadeiras. Mas, neste caso, como V(p) = F e V(q) = F, o valor lógico de $\sim$ p $\vee$ $\sim$ q é equivalente ao valor lógico de $\sim$ p $\wedge$ $\sim$ q e, portanto, equivalente à $\sim (p \vee q)$.

Assim, a fórmula que nos permite negar uma disjunção, produzindo uma proposição de valoração idêntica a $\sim (p \vee q)$, é:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

De fato, observe a igualdade das duas últimas colunas na tabela verdade abaixo, garantindo a equivalência entre as proposições:

Quadro 23 - Equivalência da negação da disjunção

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(\sim p \vee q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em outras palavras, devemos negar a primeira proposição, trocar o conectivo “ou” por “e” e, depois, negar a segunda proposição, como mostra o quadro de exemplos a seguir:

Quadro 24 - Exemplos de negação da disjunção

Proposição	Negação
Hoje chove **ou** faz calor	Hoje **não** chove **e não** faz calor
$x \leq 3$ **ou** $x \geq 5$	$3 < x < 5$
2 é ímpar **ou** primo	2 **não** é ímpar **e não** é primo

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.9.3 Negação da Disjunção Exclusiva

Para negar uma disjunção exclusiva p $\veebar$ q, vamos observar primeiramente sua tabela verdade, apresentada a seguir, e obter uma proposição composta que produza uma coluna $\sim$(p $\veebar$ q) com valoração oposta a p $\veebar$ q.

Quadro 25 - Tabela verdade da negação da disjunção exclusiva

p	q	$p \veebar q$	$\sim(p \veebar q)$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe que a valoração de $\sim$(p $\veebar$ q) é idêntica à valoração de p $\leftrightarrow$ q, na ordem das linhas. Portanto, análise nenhuma precisa ser feita.

Assim, a fórmula que nos permite negar uma disjunção exclusiva, produzindo uma proposição de valoração equivalente a $\sim(p \veebar q)$, é:

$$\sim(p \veebar q) \equiv p \leftrightarrow q$$

De fato, observe a igualdade das duas últimas colunas na tabela verdade abaixo, garantido a equivalência entre as proposições:

Quadro 26 - Equivalência da negação da disjunção exclusiva

p	**q**	**$p \leftrightarrow q$**	**$\sim(p \veebar q)$**
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em outras palavras, devemos retirar o "ou..., ou" e operar as duas proposições com o "se, e somente se", como mostra o quadro de exemplos a sequir:

Quadro 27 - Exemplos de negação da disjunção exclusiva

Proposição	**Negação**
Ou você ganha um carro **ou** ganha uma moto	Você ganha um carro **se, e somente se,** ganhar uma moto
Ou $0! = 1$ **ou** $1! = 1$	$0! = 1 \leftrightarrow 1! = 1$
Ou 12 é par **ou** ímpar	12 é par $\leftrightarrow$ é ímpar

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.9.4 Negação da Condicional

Para negar uma condicional $p \rightarrow q$, vamos observar primeiramente sua tabela verdade, apresentada a seguir, e obter uma proposição composta que produza uma coluna $\sim(p \rightarrow q)$ com valoração oposta a $p \rightarrow q$.

Quadro 28 - Tabela verdade da negação da condicional

p	**q**	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{\sim(p \rightarrow q)}$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observe, na primeira linha da tabela, que a condicional é verdadeira quando ambas as proposições são verdadeiras. Ou seja, V(p) = V, V(q) = V e V($p \rightarrow q$) = V.

Devemos obter V($\sim(p \rightarrow q)$) = F. Para isto, basta que a primeira proposição continue verdadeira e a segunda proposição seja falsa, escrevendo $p \wedge \sim q$, obtemos uma valoração equivalente à valoração de $\sim(p \rightarrow q)$.

Na segunda linha, a condicional é falsa. Para obter V($\sim(p \rightarrow q)$) = V, devemos manter a primeira proposição verdadeira e transformar a segunda proposição falsa em verdadeira. Assim, deveremos trocar a valoração de q, escrevendo $p \wedge \sim q$.

A terceira linha é verdadeira e, para obter V($\sim(p \rightarrow q)$) = F, devemos trocar a valoração da primeira proposição e trocar a valoração da segunda proposição, escrevendo $\sim p \wedge \sim q$. Mas, neste caso, como V(p) = F e V(q) = V, o valor lógico de $\sim p \wedge \sim q$ é equivalente ao valor lógico de $p \wedge \sim q$.

E, por fim, na quarta linha, a condicional é verdadeira quando ambas as proposições são falsas. Para obter V($\sim(p \rightarrow q)$) = F basta que a primeira proposição se mantenha e a segunda proposição seja verdadeira, escrevendo $p \wedge \sim q$.

Assim, a fórmula que nos permite negar uma condicional, produzindo uma proposição de valoração idêntica a $\sim(p \rightarrow q)$, é:

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

De fato, observe a igualdade das duas últimas colunas na tabela verdade abaixo, garantindo a equivalência entre as proposições:

Quadro 29 - Equivalência da negação da condicional

p	**q**	**$\sim$ q**	**p $\wedge \sim$ q**	**$\sim$(p $\rightarrow$ q)**
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Em outras palavras, devemos manter a primeira proposição, trocar o conectivo "se ..., então" por "e" e depois negar a segunda proposição, como mostra o quadro de exemplos a sequir:

Quadro 30 - Exemplos de negação da condicional

Proposição	**Negação**
Se Pedro for aprovado, **então** ganhará um carro	Pedro foi aprovado **e** **não** ganhou um carro
Se $x = 2$ é par, **então** a resposta é x^2	$x = 2$ é par **e** a resposta **não** é x^2
$x = 2 \rightarrow x^2 = 4$	$x = 2$ **e** $x^2 \neq 4$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.9.5 Negação da Bicondicional

Para negar uma bicondicional p $\leftrightarrow$ q volte na seção **3.9.3** e observe que a valoração de $\sim$(p $\leftrightarrow$ q) é idêntica à valoração de p $\veebar$ q, na ordem das linhas. Assim, devemos retirar o "se, e somente se" e operar as duas proposições com "ou..., ou", como mostra a tabela de exemplos a sequir:

Quadro 31 - Tabela verdade da negação da bicondicional

Proposição	**Negação**
Pedro ganhará um carro **se, e somente se,** for aprovado	**Ou** Pedro ganhará um carro, **ou** Pedro será aprovado
Um número é par $\leftrightarrow$ for divisível por 2	**Ou** um número é par, **ou** é divisível por 2
$2x = 3x \leftrightarrow 2 = 3$	**Ou** $2x = 3x$, **ou** $2 = 3$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3.10 QUANTIFICADORES

A sentença $P(x) : x^2 + x = 0$ não pode ser classificada em V ou F, pois nada sabemos sobre a variável x. Este tipo de sentença, que não podemos atribuir uma valoração, é denominada de sentença aberta.

Mas observe que podemos facilmente transformar essa sentença aberta em uma proposição. Para isto, devemos quantificar a expressão.

Observe que dizer que $\exists$ x $\in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 + x = 0$ é uma proposição verdadeira pois, para $x = 0$ e $x = -1$, ambos inteiros, essa afirmação é verdadeira.

O símbolo $\exists$ exibido acima é denominado de **quantificador existencial** e pode ser lido como "pelo menos um", "existe", "algum", entre outros.

A operação lógica de quantificação existencial torna uma sentença aberta em proposição e pode ser realizada sempre que a sentença aberta puder ser classificada em V ou F dentro de um determinado domínio não vazio.

Simbolicamente, seja $A(x)$ uma sentença aberta na variável x. Quantificar existencialmente essa sentença é dizer que

$$\exists \text{ x} \in D, A(x); D \neq \emptyset,$$

em que D é o domínio que contém a variável x e transforma a sentença aberta em proposição.

Agora voltemos a mesma sentença aberta $P(x)$. Se, ao invés de utilizarmos o quantificador existencial, dissermos que todo número inteiro satisfaz tal equação, então transformamos $P(x)$ em uma proposição de valoração falsa, pois, quando $x = 1$, teremos $1^2 + 1 = 0$, o que não é verdadeiro.

De toda forma, sendo esta proposição verdadeira ou falsa, o que nos interessa é que $P(x)$ deixou de ser uma sentença aberta e passou a ser uma proposição.

Desta vez utilizamos um **quantificador universal** que pode ser escrito como "para todo", "todo", "qualquer que seja", entre outros e é representado, simbolicamente, como $\forall$.

Uma particularidade do quantificador universal "todo" é o "nenhum", que representa o complementar de um conjunto.

Ao dizer que "existe pelo menos uma pessoa em uma determinada sala que é homem", o complementar, ou negação dessa frase é dizer que "todas as pessoas em uma determinada sala não são homens". Observe que essa negação também pode ser escrita como "nenhuma pessoa em uma determinada sala é homem".

Desta forma, a palavra "nenhum" também faz o papel de quantificador universal e será classificada como quantificador universal negativo, enquanto que a palavra "todo", e seus derivados, será classificada como quantificador universal positivo.

Vejamos alguns exemplos desses dois quantificadores aplicados em sentenças abertas:

Quadro 32 - Quantificadores

Existencial $\exists$	**Universal** $\forall$
$\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 1$	Seja $M(4)$ o conjunto dos múltiplos de 4, temos $\forall x \in M(4), 2 \vert x$
Seja P o conjunto dos números primos, temos que $\exists x \in P, 2 \vert x$	Seja P o conjunto dos números primos, temos que $\forall x \in P$, x tem apenas dois divisores
Algum homem infeliz torce para o cruzeiro	Todo torcedor do Atlético Mineiro é feliz
Existe um número negativo maior que zero	Nenhum número negativo é maior que zero
$\exists x, y \in \mathbb{I}, \exists z \in \mathbb{N}\ /\ x + y = z$	$\forall a \in \mathbb{Z}$ e $\forall b \in \mathbb{Z}^*$, temos que $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ /\ x + y = x$	

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na última linha do quadro acima, exibimos um exemplo em que utilizamos os dois quantificadores. Neste exemplo, estamos dizendo que para qualquer número real x, existe um número real y tal que $x + y = x$. Essa proposição é verdadeira visto que para $y = 0$, temos $x = x$ para todo x real.

3.10.1 Negação das Proposições Contendo Quantificadores

Para negar **quantificadores universais** basta exibir pelo menos um elemento do conjunto que não satisfaça tal condição. Para negar o quantificador universal positivo "para todo", devemos trocá-lo por "pelo menos um" ou "existe algum" e depois negar a proposição. Já, para negar o quantificador universal negativo, "nenhum", devemos apenas trocar por "algum" ou "nem todos", observe:

Quadro 33 - Negação de quantificador universal

Proposição	**Negação**
Todo homem é imortal	**Pelo menos um** homem **não** é imortal
$\forall x \in \mathbb{N}, x > 3$	$\exists x \in \mathbb{N}, x \leq 3$
Nenhum número primo é par	**Algum** número primo é par
Nenhum aluno compareceu	**Nem todos** os alunos compareceram

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Para negar **quantificadores existenciais**, devemos trocar a palavra "existe (algum)" pelo quantificador universal positivo "todo" e fazer a negação da frase. Porém, se utilizarmos o quantificador universal negativo "nenhum", a frase deverá ser conservada:

Quadro 34 - Negação de quantificador existencial

Proposição	Negação
Algum motorista de carro tem menos de 18 anos de idade	**Todo** motorista de carro **não** tem menos de 18 anos de idade
$\exists x \in \mathbb{N}, x + 2 = 5$	$\forall x \in \mathbb{N}, x + 2 \neq 5$
Existe um número primo par que é maior que 2	**Nenhum** número primo par é maior que 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

E, por fim, para negar os dois quantificadores ao mesmo tempo, em que um se relaciona com o outro, devemos negar os quantificadores e depois negar a proposição que os precede.

Vejamos a negação dos três últimos exemplos do quadro 42:

1. Seja a proposição

$$p : \exists x, y \in \mathbb{I}, \exists z \in \mathbb{N} \,/\, x + y = z$$

A sua negação será

$$\sim p : \forall x, y \in \mathbb{I}, \forall z \in \mathbb{N} \,/\, x + y \neq z$$

Observe que $V(p) = V$ pois, existem $x = \pi, y = -\pi$ e $z = 0$, tais que $\pi + (-\pi) = 0$.

E $V(\sim p) = F$, visto que para $x = \pi, y = -\pi$ e $z = 0$ a equação $x + y \neq z$ é falsa.

2. Seja a proposição

$$q : \forall a \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall b \in \mathbb{Z}^*, \text{ temos que } \tfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

A sua negação será

$$\sim q : \exists a \in \mathbb{Z} \text{ e } \exists b \in \mathbb{Z}^*, \text{ tal que } \tfrac{a}{b} \notin \mathbb{Q}.$$

Observe que $V(q) = V$ pois essa é a definição do conjunto do números racionais.

Assim, $V(\sim q) = F$, visto que não existem tais números, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, onde $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

3. Seja a proposição:

$$r : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \,/\, x + y = x.$$

A sua negação será

$$\sim r : \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} \,/\, x + y \neq x.$$

Observe que $V(r) = V$ pois, para todo x real, temos $y = 0$ tal que $x + 0 = x$.

E é fácil verificar que $V(\sim r) = F$, visto que para $x = 1$ e $y = 0$ a equação $1 + 0 \neq 1$ é falsa.

4. Uma proposição do tipo $\exists$ ..., $\forall$ ... possui uma ideia análoga à apresentada no exemplo anterior.

3.11 CLASSIFICAÇÃO DAS TABELAS VERDADES

As tabelas verdades podem ser classificadas como tautologia, contradição ou indeterminação, e o que determina uma dessas três classificações é a última coluna da tabela, que contém os resultados de todas as operações.

3.11.1 Tautologia

Se o resultado das operações é todas as valorações verdadeiras, então se trata de tautologia. Em outras palavras, tautologia é uma frase sempre verdadeira. Vejamos um exemplo:

- P: Hoje vai chover ou não vai chover.

Seja p: Hoje vai chover e $\sim$ p: Hoje não vai chover. Observe, a seguir, a tabela verdade de P = p $\vee \sim$ p.

Quadro 35 - Tabela verdade de uma tautologia

p	**$\sim$ p**	**p $\vee \sim$ p**
V	F	V
F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como todas as valorações da última coluna são verdadeiras, então essa proposição é uma tautologia.

Na seção 3.8, falamos sobre proposições equivalentes. Uma outra forma de verificar se duas proposições, P e Q com as mesmas proposições componentes, são equivalentes, será apresentada a seguir:

Teorema 3.11.1. *(16) $P \equiv Q$, se e somente se, a proposição*

$$P \leftrightarrow Q$$

é uma tautologia.

Vamos utilizar esse teorema para mostrar que, para toda condicional existe uma equivalência lógica entre a mesma e sua contrapositiva, ou seja:

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

Chamemos de $P = p \rightarrow q$ e $Q = \sim q \rightarrow \sim p$, então a tabela verdade de $P \leftrightarrow Q$ é:

Quadro 36 - Equivalência e Bicondicional

p	**q**	**$\sim$ p**	**$\sim$ q**	**P**	**Q**	**P $\leftrightarrow$ Q**
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como $P \leftrightarrow Q$ é uma tautologia, então $P \equiv Q$, como queríamos verificar.

3.11.2 Contradição

Se o resultado das operações é todas as valorações falsas, então se trata de contradição. Em outras palavras, contradição é uma frase sempre falsa. Vejamos um exemplo:

- P: Hoje vai chover e não vai chover.

Seja p: Hoje vai chover e $\sim$ p: Hoje não vai chover. Observe, a seguir, a tabela verdade de P = p $\wedge$ $\sim$ p.

Quadro 37 - Tabela verdade de uma contradição

p	**$\sim$ p**	**p $\wedge \sim$ p**
V	F	F
F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Como todas as valorações da última coluna são falsas, então essa proposição é uma contradição.

É interessante obervar que a contradição é bastante utilizada no cotidiano de várias pessoas. Como, por exemplo, em interrogatório policiais. Uma mesma pergunta é feita várias vezes e em momentos diferentes para verificar se a resposta se mantém. Caso ela seja diferente, o discurso do interrogado estará sendo contraditório.

A contradição é também utilizada em métodos demonstrativos. Vejamos um exemplo dentro da geometria euclidiana plana:

Corolário 3.11.2. *(17) Se duas retas distintas m e n são perpendiculares a uma terceira, então m e n não se interceptam.*

Demonstração. Vamos demonstrar por contradição!

Suponha que m e n se interceptam em um ponto P. Ao traçar uma reta perpendicular a ambas, essa reta intercepta m em P_1 e n em P_2. Desta forma, obtemos um triângulo de vértices P_1P_2P em que dois ângulos internos são retos. Um absurdo, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°!

Portanto, m e n não podem se interceptar em P

■

3.11.3 Indeterminação

Quando o resultado das operações apresenta valorações verdadeiras e falsas, então se trata de indeterminação, também conhecido como contingência. Vejamos um exemplo:

- P: Hoje vai chover se, e somente se, o Cruzeiro for rebaixado para a segunda divisão.

Seja p: Hoje vai chover e q: O Cruzeiro for rebaixado para a segunda divisão. Observe, a seguir, a tabela verdade de P = p $\leftrightarrow$ q.

Quadro 38 - Tabela verdade de uma indeterminação

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O resultado final representa uma indeterminação quando os valores da proposição apresentam dois resultados V e F.

4 PRODUTO EDUCACIONAL

Apresentamos a seguir quatorze desafios matemáticos que, para serem desvendados, necessitam de um raciocínio lógico.

Tais desafios envolvem tanto o raciocínio lógico proposicional, quanto o raciocínio lógico não proposicional.

Intitularemos esse raciocínio não proposicional de raciocínio lógico informal. Tal raciocínio utiliza como ferramenta o conhecimento cotidiano e o pensamento crítico para unir informações e chegar a conclusões que, a primeira vista, não são óbvias e requerem um pensamento mais profundo acerca do problema.

Esses desafios, como o próprio nome sugere, são perguntas instigantes que têm como finalidade reter a atenção do leitor e motivá-lo a estudar e entender um pouco da lógica matemática e o poder de uma boa argumentação.

4.1 O SEQUESTRO

Um detetive está investigando o sequestro de Laura, crime realizado por uma única pessoa. Sabe-se que as seguintes afirmações são verdadeiras:

A: Laura embarcou em um avião com destino a Bahia e, após esse embarque, foi sequestrada.

B: Ou Clara ou Amanda estavam no mesmo avião que Laura.

C: Se Clara estava no mesmo avião que Laura, então o taxista que deveria levar Laura para o hotel a sequestrou.

D: Se Amanda estava no mesmo avião que Laura, então o recepcionista do hotel na Bahia sequestrou Laura.

E: Se Pedro foi para Bahia no mesmo voo que Laura, então Laura não foi sequestrada após embarcar em um avião com destino à Bahia.

F: Se Pedro não foi para a Bahia no mesmo voo que Laura, então Amanda não estava no mesmo avião que Laura.

Quem sequestrou Laura?

RESPOSTA:

Para esse desafio vamos apresentar duas respostas válidas.

Resposta a)

Podemos resolver esse problema, analisando logicamente cada uma das proposições compostas.

Como sabemos que é verdade que Laura foi sequestrada depois de embarcar em um avião com destino à Bahia, então podemos concluir que, para a proposição E ser verdadeira, Pedro não foi para Bahia no mesmo voo que Laura.

Com isso, para que a proposição F seja verdadeira, podemos concluir que Amanda não estava no mesmo avião que Laura. Para que a proposição B seja verdadeira, concluímos que Clara estava no mesmo avião que Laura.

E por fim, para que a proposição C seja verdadeira, o taxista que deveria levar Laura para o hotel a sequestrou. E assim, resolvemos nosso problema.

Resposta b)

Outra maneira, mais formal, de se resolver esse problema, é utilizando a tabela verdade.

Considere as seguintes proposições simples:

p: Laura embarcou em um avião com destino a Bahia e, após esse embarque, foi sequestrada.

q: Clara estava no mesmo avião que Laura.

r: Amanda estava no mesmo avião que Laura.

s: O taxista que deveria levar Laura para o hotel a sequestrou.

t: O recepcionista do hotel na Bahia sequestrou Laura.

u: Pedro foi para Bahia no mesmo voo que Laura.

Escrevendo as proposições compostas A, B, C, D, E e F em função das proposições simples acima, temos:

A: (p) e $V(A) = V$;

B: $(q \vee r)$ e $V(B) = V$;

C: $(q \rightarrow s)$ e $V(C) = V$;

D: $(r \rightarrow t)$ e $V(D) = V$;

E: $(u \rightarrow \sim p)$ e $V(E) = V$;

F: $(\sim u \rightarrow \sim r)$ e $V(F) = V$;

As proposições compostas estão representadas na tabela verdade abaixo pelas colunas em azul e as proposições simples estão representadas pelas colunas em verde.

Quadro 42 - Tabela verdade

Linha	p	~p	q	r	~r	s	t	u	~u	p	q v r	q → s	r → t	u → ~p	~u → ~r
1.	V	F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V
2.	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
3.	V	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V
4.	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F
5.	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V
6.	V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	F
7.	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V
8.	V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	V	F	F	V	F
9.	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V
10.	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
11.	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F	V
12.	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
13.	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	F	V
14.	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V
15.	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V
16.	V	F	V	F	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V
17.	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	F	V
18.	V	F	F	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	F
19.	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V
20.	V	F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	F
21.	V	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V	F	V
22.	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	F
23.	V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	V	V	F	F	V
24.	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F
25.	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V
26.	V	F	F	F	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	V
27.	V	F	F	F	V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	V
28.	V	F	F	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V	V	V
29.	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V
30.	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	V	V	V	V
31.	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F	V
32.	V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V
33.	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
34.	F	V	V	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F
35.	F	V	V	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
36.	F	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F
37.	F	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
38.	F	V	V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F
39.	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V	F	F	V	V
40.	F	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F
41.	F	V	V	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
42.	F	V	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	V	V
43.	F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V
44.	F	V	V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V
45.	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	V	F	V	V	V
46.	F	V	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V
47.	F	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V
48.	F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V
49.	F	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V
50.	F	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V	F
51.	F	V	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
52.	F	V	F	V	F	V	F	F	V	F	V	V	F	V	F
53.	F	V	F	V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	V	V
54.	F	V	F	V	F	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F
55.	F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V
56.	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F
57.	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	V	V
58.	F	V	F	F	V	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V
59.	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	V	V	V	V
60.	F	V	F	F	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V	V
61.	F	V	F	F	V	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V
62.	F	V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V
63.	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F	F	V	V	V	V
64.	F	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Observando a tabela verdade, somente as linhas 10 e 12 possuem todas as proposições compostas verdadeiras. Assim, basta analisar qual o valor lógico de cada proposição simples. Observe:

Quadro 43 - Linhas 10 e 12 da tabela verdade

Linha	p	~p	q	r	~r	s	t	u	~u	p	q v r	q → s	r → t	u → ~p	~u → ~r
10.	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
12.	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

A proposição p é sempre verdadeira, assim podemos concluir que Laura embarcou em um avião com destino a Bahia e, após esse embarque, foi sequestrada.

A proposição q é sempre verdadeira, assim podemos concluir que Clara estava no mesmo avião que Laura.

A proposição r é sempre falsa, assim podemos concluir que Amanda não estava no mesmo avião que Laura.

A proposição s é sempre verdadeira, assim podemos concluir que o taxista que deveria levar Laura para o hotel a sequestrou.

Como o sequestro de Laura é obra de uma só pessoa, então já podemos concluir que o taxista a sequestrou.

Mas vamos continuar a análise. t pode ser, inicialmente, verdadeiro ou falso, mas como foi o taxista que sequestrou Laura, então concluímos que não pode ter sido o recepcionista do hotel na Bahia.

A proposição u é sempre falsa, assim podemos concluir que Pedro não foi para Bahia no mesmo voo que Laura.

4.2 GUIA ESPIRITUAL

Um guia espiritual respondia às perguntas de seus clientes somente com “sim” ou “não”e **o cliente poderia fazer, no máximo, duas perguntas que deveriam ser sobre um mesmo assunto**. O guia atendia em suas consultas da seguinte maneira: ora respondia sempre a verdade, ora respondia sempre a mentira. O modo como o ele respondia variava de cliente para cliente e não tinha uma ordem, mas a resposta para um mesmo cliente era sempre verdadeira ou sempre falsa.

João foi consultar com esse guia espiritual e gostaria de saber se deveria aceitar a nova proposta de emprego que havia recebido.

Qual(is) deve(m) ser a(s) pergunta(s) que João deve fazer a esse guia espiritual de maneira que ele saiba se deve ou não aceitar a nova proposta de emprego?

RESPOSTA:

Como João queria saber se deveria aceitar a nova proposta de emprego, a primeira pergunta deverá ser sobre isso, veja abaixo.

Pergunta 1 - Eu devo aceitar a nova proposta de emprego?

Observe que se o guia espiritual estiver falando a verdade, a resposta dessa primeira pergunta bastaria para João, mas o guia também pode estar mentindo, sendo assim, não tem como João saber se deve ou não aceitar a proposta de emprego.

Desta forma, a segunda pergunta, que precisa ser sobre o mesmo assunto da primeira, deve ser feita de forma cuidadosa, para que, ao obter as duas respostas, João saiba interpretá-las corretamente.

Assim, a segunda pergunta deverá ser feita utilizando o artifício da dupla negação caso o guia espiritual esteja mentindo, veja abaixo a segunda pergunta e o quadro.

Pergunta 2 - Se eu perguntasse se devo aceitar a nova proposta de emprego, o senhor diria sim?

Quadro 44 - Guia espiritual

	Pergunta 1	**Pergunta 2**	**Conclusão**
Mentira	Sim	Não	Não
Mentira	Não	Sim	Sim
Verdade	Sim	Sim	Sim
Verdade	Não	Não	Não

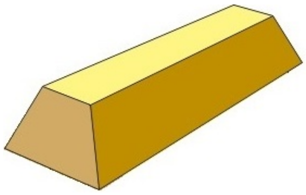
Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Desta forma, quando o guia espiritual fala a verdade, as duas respostas são iguais e representam o conselho do guia espiritual. Já quando ele está mentindo, as duas respostas são contraditórias, indicando que o guia espiritual está mentindo e, portanto, João deverá seguir o conselho da segunda resposta.

4.3 O OURO DO VIAJANTE

Um viajante precisava pagar sua estadia de uma semana (7 dias) em um hotel, sendo que só possuía uma barra de ouro para pagar.

Figura 11 - Barra de ouro



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

O dono do hotel fez um desafio ao viajante para que ele aceitasse o pagamento em ouro. A proposta foi a seguinte:

“Aceito o pagamento em ouro. Porém, você terá que pagar uma diária de cada vez, e só poderá cortar a barra duas vezes”.

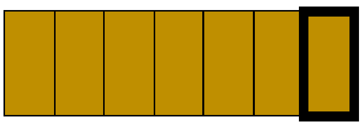
Como o viajante deverá cortar a barra para fazer o pagamento?

RESPOSTA:

Precisamos pensar no esquema de troco, onde o viajante paga a primeira diária com um sétimo da barra e, assim, o dono do hotel já tem esse pedaço que poderá servir de troco, caso seja necessário. Estamos considerando aqui que o dono do hotel não possui ouro em seu estabelecimento. Veja abaixo como podem ser feito esses cortes na barra de ouro.

1^o Dia: Devemos cortar $\frac{1}{7}$ da barra para pagar a primeira diária.

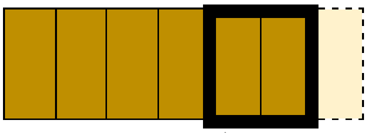
Figura 13 - Primeiro corte na barra de ouro



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

2^o Dia: Para pagar a segunda, basta cortar $\frac{2}{7}$ da barra. Ao pagar com $\frac{2}{7}$ o dono do hotel irá lhe devolver $\frac{1}{7}$ da barra de troco.

Figura 14 - Segundo corte na barra de ouro

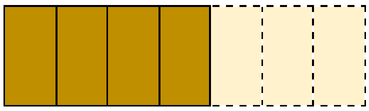


Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

3^o Dia: No terceiro dia você deverá pagar com $\frac{1}{7}$ da barra que já estava cortado.

4^o Dia: No quarto dia você deverá pagar com os $\frac{4}{7}$ restantes e o dono lhe devolverá os $\frac{3}{7}$ que estava com ele.

Figura 15 - Após o segundo corte na barra de ouro



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

5^o Dia: Paga com $\frac{1}{7}$ da barra.

6^o Dia: Paga com $\frac{2}{7}$ da barra e recebe de troco $\frac{1}{7}$.

7^o Dia: Paga com os restantes $\frac{1}{7}$ da barra.

4.4 VIAGEM

Três amigas, Fernanda, Gabriela e Isaura, fizeram uma viagem de final de ano para Salvador. De acordo com a disponibilidade de cada uma, elas saíram de lugares diferentes, em Minas Gerais, e em dias diferentes, para se encontrarem no destino final. Sabe-se que as seguintes afirmações são verdadeiras:

I) Fernanda ou Isaura saíram de Ubá.

II) Gabriela não poderia viajar na quarta-feira.

III) A pessoa que viajou na quarta-feira saiu de Visconde do Rio Branco (VRB).

IV) Gabriela e Isaura não viajaram na quinta-feira.

V) Se Isaura saiu de Ubá, então ela viajou na sexta-feira.

Preencha o quadro abaixo de acordo com as informações acima e descubra de onde cada uma dessas amigas saiu e em qual dia.

Quadro 39 - Viagem

X	**Ubá**	**Viçosa**	**VRB**	**Quarta**	**Quinta**	**Sexta**
Fernanda						
Gabriela						
Isaura						
Quarta				X	X	X
Quinta				X	X	X
Sexta				X	X	X

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

RESPOSTA:

Para facilitar a explicação, vamos criar um referencial de linhas e colunas. As linhas serão numeradas de 1 a 6 e as colunas de G até L.

Com a informação (I), não podemos preencher nada no quadro por enquanto.

Com a informação (II), sabemos apenas que Gabriela não viajou na quarta-feira, preenchendo o quadrado 2J com o valor-verdade F.

Com a informação (III), podemos concluir que Gabriela não saiu de Visconde do Rio Branco, preenchendo os quadrados 2I, 5I e 6I com valor-verdade F e preenchendo o quadrado 4I com valor-lógico V.

Com a informação (IV), podemos preencher os quadrados 2K, 3K, 1L, 3L e 1J com valor-verdade F e os quadrados 1K, 2L e 3J com valor-verdade V. Concluímos então que Fernanda viajou na quinta-feira, Gabriela viajou na sexta-feira e Isaura viajou na quarta-feira.

Como Isaura viajou na quarta-feira, e como a informação (V) é verdadeira, podemos concluir que Isaura não saiu de Ubá, preenchendo o quadrado 3G com valor-verdade F. E voltando a informação (I), concluímos que Fernanda saiu de Ubá, assim, os quadrados 1H, 1I, 2G e 3H são preenchidos com valor-verdade F e os quadrados 1G, 3I e 2H são preenchidos com valor-verdade V.

Podemos concluir então que Fernanda saiu de Ubá na quinta-feira, Gabriela saiu de Viçosa na sexta-feira e Isaura saiu de Visconde do Rio Branco na quarta-feira.

Quadro 45 - Resposta do quadro viagem

		G Ubá	H Viçosa	I VRB	J Quarta	K Quinta	L Sexta
1	**Fernanda**	V	F	F	F	V	F
2	**Gabriela**	F	V	F	F	F	V
3	**Isaura**	F	F	V	V	F	F
4	**Quarta**			V	X	X	X
5	**Quinta**			F	X	X	X
6	**Sexta**			F	X	X	X

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

4.5 PEDRAS PRECIOSAS

Um joalheiro recebeu, fora de sua loja, 27 pedras preciosas que parecem idênticas. É certo que apenas uma dessas pedras possui um peso diferente e maior que as demais. Dispondo apenas de uma balança com dois pratos, ele encontrou a pedra mais pesada com somente 3 pesagens. Como isso foi possível?

RESPOSTA:

PESAGEM 1)

Separe as 27 pedras em 3 conjuntos de 9. Coloque 9 pedras em cada prato da balança e deixe 9 do lado de fora.

- Se os dois pratos tiverem o mesmo peso, então a pedra mais pesada está entre as 9 pedras que ficaram do lado de fora da balança;
- Se um dos pratos abaixar, significa que a pedra mais pesada está nele.

PESAGEM 2)

Pegue o conjunto de 9 pedras que contém a pedra mais pesada e separe em 3 conjuntos de 3. Coloque 3 pedras em cada prato da balança e deixe 3 do lado de fora.

- Se os dois pratos tiverem o mesmo peso, então a pedra mais pesada está entre as 3 pedras que ficaram do lado de fora da balança;
- Se um dos pratos abaixar, significa que a pedra mais pesada está nele.

PESAGEM 3)

Pegue o conjunto de 3 pedras que contém a pedra mais pesada. Coloque 1 pedra em cada prato e deixe 1 do lado de fora.

- Se os dois pratos tiverem o mesmo peso, então a pedra mais pesada é a que ficou do lado de fora;
- Se um dos pratos abaixar, significa que a pedra mais pesada está nele.

4.6 PARQUE DE DIVERSÕES

Dois pais e dois filhos foram ao parque de diversões. Cada um ganhou um prêmio diferente, sendo que ao todo tinham 3 prêmios diferentes. Como isso é possível?

RESPOSTA:

Como cada um ganhou um prêmio diferente e ao todo tinham três prêmios diferentes, então devemos ter apenas 3 pessoas.

Para que dessas 3 pessoas 2 sejam pais e 2 sejam filhos, basta que seja uma família com avô, pai e neto.

4.7 ENTREVISTA DE EMPREGO

Paulo foi a uma entrevista de emprego em que havia três entrevistadores. Cada um deles disse:

Entrevistador 1: - Você não será contratado.

Entrevistador 2: - Duas de nossas afirmações são falsas.

Entrevistador 3: - Três de nossas afirmações são falsas.

Ao final da entrevista, Paulo apertou a mão dos três e agradeceu por ter sido contratado. Paulo agiu corretamente?

RESPOSTA:

Cada uma das três afirmações pode ser verdadeira ou falsa. Vamos analisar cada uma delas.

Se a afirmação 3 é verdadeira, como só há 3 afirmações, então a afirmação 3 tem que ser falsa. Assim, chegamos em uma contradição, pois uma afirmação não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Logo, a afirmação 3 não pode ser verdadeira sendo, portanto, falsa.

Se a afirmação 2 é verdadeira e, como a afirmação 3 é falsa, então a afirmação 1 é falsa. Assim, podemos concluir também que Paulo será contratado e, portanto, agiu corretamente.

Se a afirmação 2 é falsa e, como a afirmação 3 é falsa, temos que a afirmação 1 deverá ser falsa, o que torna a afirmação 3 verdadeira. Mas como sabemos que a afirmação 3 não é verdadeira, concluímos que a afirmação 2 não é falsa.

Portanto, a afirmação 2 é verdadeira.

Assim, podemos concluir que Paulo agiu corretamente.

4.8 CORREIO ELEGANTE

Cássia, Pedro, André e Viviane foram a uma mesma festa junina. Cássia mandou um correio elegante para Pedro. Pedro mandou um correio elegante para André, e André mandou um correio elegante para Viviane. Sabe-se que Cássia é casada e Viviane é solteira. Nessa festa, alguma pessoa casada mandou um correio elegante para alguma pessoa solteira?

RESPOSTA:

A resposta correta é sim. Mesmo não sabendo o estado civil de Pedro e André, podemos afirmar que uma pessoa casada mandou um correio elegante para uma pessoa solteira.

Considerando que uma pessoa pode ser ou casada ou solteira, vamos analisar as possibilidades:

Quadro 46 - Resposta do desafio correio elegante

	Cássia	**Pedro**	**André**	**Viviane**
1	CASADA	SOLTEIRO	SOLTEIRO	SOLTEIRA
2	CASADA	CASADO	SOLTEIRO	SOLTEIRA
3	CASADA	SOLTEIRO	CASADO	SOLTEIRA
4	CASADA	CASADO	CASADO	SOLTEIRA

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Na opção 1, se Pedro e André forem solteiros, a Cássia, que é casada, mandou um correio elegante para o Pedro, que é solteiro.

Na opção 2, se Pedro for casado e André for solteiro, o Pedro que é casado mandou um correio elegante para o André que é solteiro.

Na opção 3, se Pedro for solteiro e André for casado, o André que é casado mandou um correio elegante para a Viviane, que é solteira, e a Cássia que é casada mandou correio elegante para o Pedro, que é solteiro.

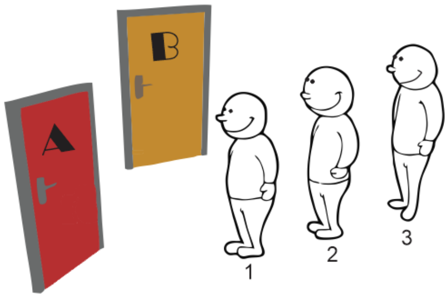
Na opção 4, se Pedro e André forem casados, o André, que é casado, mandou um correio elegante para o a Viviane que é solteira.

4.9 JOGO DAS DUAS PORTAS

Um jogo é composto por duas portas A e B e três jogadores. Ganha o prêmio se pelo menos um dos jogadores, a qualquer momento, entrar na porta correta e nenhum deles errar a porta, ou seja, se não souber qual porta entrar, deve se manter parado.

Ao iniciar a partida, é avisado aos jogadores que serão sorteadas três placas dentre as quatro disponíveis, sendo elas A, A, B e B. Em seguida, eles serão enfileirados e será colocado uma placa nas costas de cada um deles, contendo a letra da porta que deverão entrar. É proibido olhar para trás e um jogador consegue ver apenas as placas dos jogadores que estão a sua frente. A imagem a seguir representa esse jogo.

Figura 12 - Jogo das duas portas



Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

É sempre possível ganhar esse jogo?

RESPOSTA:

As duas únicas possiblidades para o sorteio das placas são duas placas A e uma placa B ou uma placa A e duas placas B. Para cada uma dessas escolhas, sabemos que existem $3 = \frac{3!}{2!}$ formas de ordenar essas placas. Portanto, existem 2 x 3 = 6 formas de serem distribuídas essas placas, sendo elas:

I) A, A, B;

II) A, B, A;

III) B, A, A;

IV) A, B, B;

V) B, A, B;

VI) B, B, A.

No caso I, o jogador 3 pode ver as placas A e A dos jogadores 1 e 2 e, com isso, entra na porta B.

O caso VI é análogo ao caso I.

No caso II, o jogador 3 não sabe se sua placa é A ou B e não se movimenta. A falta de movimento do jogador 3 indica ao jogador 2 que o jogador 3 viu as placas A e B. Como o jogador 2 consegue ver a placa A do jogador 1, ele se dirige a porta B.

Os casos III, IV e V são análogos ao caso II. Sendo assim, sempre é possível um jogador acertar a porta. Portanto, sempre é possível ganhar esse jogo.

4.10 ATIVIDADE EM GRUPO

Simularemos um tribunal em que haverá o juiz (aluno 1), o escrivão (aluno 2), a acusação (grupo 1) e a defesa (grupo 2). Para os alunos, será informado que André está sendo acusado de ter matado João. Analisaremos uma única frase e seus valores lógicos de tal forma que, usando conectivos lógicos, iremos dizê-la contra ou a favor do réu.

Dada a frase:

_ $\underbrace{\textbf{André matou João}}_{p}$ e $\underbrace{\textbf{fugiu para a Bahia}}_{q}$

Sabe-se que é verdade que André fugiu para a Bahia. A partir disso, use conectivos lógicos ($\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) para defender ou acusar o réu de ter matado João.

Exemplo: **É falso que** $\underbrace{\underbrace{\textbf{André matou João}}_{V(p)=?} \text{ e } \underbrace{\textbf{fugiu para a Bahia}}_{V(q)=V}}_{V(p \wedge q)=F}$.

Então, em linguagem lógica a frase acima é a mesma que:

$$p \wedge q = F$$

Logo, estou dizendo que André **não** matou João, pois sabe-se que a tabela verdade da operação conjunção é:

Quadro 40 - Tabela verdade da operação conjunção

p	**q**	**p ∧ q**
V	V	V
V	F	F
F	**V**	**F**
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

Portanto, o único valor lógico para p é V(p) = F, ou seja, é falso que André matou João. Sendo assim, o grupo da defesa deverá escrever 9 possibilidades de frases que defendam André e o grupo da acusação deverá escrever 9 possibilidades de frase que acusam André, de acordo com a frase dada, como mostra o quadro abaixo.

Quadro 41 - Atividade em grupo

Defesa	Acusação
É falso que André matou João e fugiu para a Bahia	

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

RESPOSTA:

Quadro 47 - Resposta do desafio atividade em grupo

Defesa	Acusação
É falso que André matou João e fugiu para a Bahia $p \wedge q = F$	André matou João e fugiu para a Bahia $p \wedge q = V$
André não matou João e fugiu para a Bahia $\sim p \wedge q = V$	É falso que André não matou João e fugiu para a Bahia $\sim p \wedge q = F$
É falso que André matou João ou não fugiu para a Bahia $p \vee \sim q = F$	André matou João ou não fugiu para a Bahia $p \vee \sim q = V$
André não matou João ou não fugiu para a Bahia $\sim p \vee \sim q = V$	É falso que André não matou João ou não fugiu para a Bahia $\sim p \vee \sim q = F$
Se André matou João, então não fugiu para a Bahia $p \rightarrow \sim q = V$	É falso que se André matou João, então não fugiu para a Bahia $p \rightarrow \sim q = F$
É falso que se André não matou João, então não fugiu para a Bahia $\sim p \rightarrow \sim q = F$	Se André não matou João, então não fugiu para a Bahia $\sim p \rightarrow \sim q = V$
André não matou João se, e somente se, fugiu para a Bahia $\sim p \leftrightarrow q = V$	É falso que André não matou João se, e somente se, fugiu para a Bahia $\sim p \leftrightarrow q = F$
É falso que André matou João se, e somente se, fugiu para a Bahia $\sim p \leftrightarrow \sim q = F$	André matou João se, e somente se, fugiu para a Bahia $\sim p \leftrightarrow \sim q = V$
É falso que André não matou João se, e somente se, não fugiu para a Bahia $\sim p \leftrightarrow \sim q = F$	André não matou João se, e somente se, não fugiu para a Bahia $\sim p \leftrightarrow \sim q = V$

Fonte: Elaborado pelo autor (2020).

4.11 TEATRO

A fim de sortear dois pacotes de viagens antes de uma peça de teatro, o diretor subiu ao palco a procura dos ganhadores e disse:

_ Existe um homem presente neste teatro e existe uma mulher presente neste teatro, tal que o número do ingresso do homem é igual ao número do ingresso da mulher.

Segundos depois, o assistente disse ao diretor que essa frase não poderia ser verdade. Então é correto afirmar que:

a) Existe um homem presente neste teatro e existe uma mulher presente neste teatro tal que o número do ingresso do homem não é igual ao número do ingresso da mulher.

b) Existe um homem presente neste teatro e qualquer que seja a mulher presente neste teatro, o número do ingresso do homem não é diferente do número do ingresso da mulher.

c) Qualquer que seja o homem presente neste teatro, existe uma mulher presente neste teatro, tal que o número do ingresso do homem não é igual ao número do ingresso da mulher.

d) Qualquer que seja o homem presente neste teatro e qualquer que seja a mulher presente neste teatro, o número do ingresso do homem não é igual ao número do ingresso da mulher.

RESPOSTA:

Vamos analisar a frase dita pelo diretor:

Existe um homem presente neste teatro e existe uma mulher presente neste teatro, tal que o número do ingresso do homem é igual ao número do ingresso da mulher.

Ao negar o quantificador existencial, temos: “Qualquer que seja o homem presente neste teatro” e “qualquer que seja a mulher presente neste teatro”

Ao negar a proposição sem quantificador, temos: “O número do ingresso do homem não é igual ao número do ingresso da mulher”.

Portanto, a resposta correta será a letra d.

“Qualquer que seja o homem presente neste teatro e qualquer que seja a mulher presente neste teatro, o número do ingresso do homem não é igual ao número do ingresso da mulher”.

4.12 O MÁGICO

Em um show, o mágico pegou dois baralhos completos, separou em dois montes com as cartas viradas para baixo, selecionou um participante para retirar uma carta em cada um dos montes e disse:

_ Qualquer que seja a carta do monte à direita e qualquer que seja a carta do monte à esquerda, essas cartas terão o mesmo naipe.

Ao retirar as duas cartas, o participante disse ao mágico:

_ Você mentiu.

Então é correto afirmar que:

a) Existe uma carta no monte à direita e existe uma carta no monte à esquerda, tal que essas cartas não terão o mesmo naipe.

b) Existe uma carta no monte à direita e existe uma carta no monte à esquerda, tal que essas cartas terão o mesmo número.

c) Qualquer que seja a carta do monte à direita, existe uma carta do monte à esquerda, tal que essas cartas são iguais.

d) Qualquer que seja a carta do monte à direita e qualquer que seja a carta do monte à esquerda, essas cartas não terão o mesmo naipe.

RESPOSTA:

Vamos analisar a frase dita pelo mágico:

Qualquer que seja a carta do monte à direita e qualquer que seja a carta do monte à esquerda, essas cartas terão o mesmo naipe.

Ao negar o quantificador universal, temos: "Existe uma carta no monte à direita" e "existe uma carta no monte à esquerda".

Ao negar a proposição sem quantificador, temos: "Essas cartas não terão o mesmo naipe".

Portanto, a resposta correta será a letra a.

"Existe uma carta no monte à direita e existe uma carta no monte à esquerda, tal que essas cartas não terão o mesmo naipe".

4.13 PROVA

Em um dia de prova um professor disse em sua turma que, para todo aluno presente naquela sala, existia uma prova em cima da mesa, tal que se na capa de qualquer uma das provas não tivesse o nome do aluno então ele estava na sala errada.

Pouco tempo depois ele disse que se equivocou e que sua afirmativa era falsa.

Então podemos concluir que:

a) Existe um aluno presente na sala e existe uma prova em cima da mesa, tal que na capa de qualquer uma das provas não tinha o nome do aluno e ele estava na sala errada.

b) Existe um aluno que não está presente na sala e existe uma prova em cima da mesa, tal que na capa de qualquer uma das provas não tinha o nome do aluno ou ele estava na sala errada.

c) Pra todo aluno que está presente na sala, não existe uma prova em cima da mesa, tal que na capa de qualquer uma das provas contenha o nome do aluno e ele não esteja na sala errada.

d) Existe um aluno presente na sala, qualquer que seja a prova em cima da mesa, tal que na capa de qualquer uma das provas não tinha o nome do aluno e ele não estava na sala errada.

RESPOSTA:

Vamos analisar a frase dita pelo professor:

Para todo aluno presente naquela sala, existia uma prova em cima da mesa, tal que, se na capa de qualquer uma das provas não tivesse o nome do aluno então ele estava na sala errada.

Ao negar o quantificador universal, temos: "Existe um aluno presente naquela sala".

Ao negar o quantificador existencial, temos: "Qualquer que seja a prova em cima da mesa".

Ao negar a condicional, temos: "Na capa de qualquer uma das provas não tinha o nome do aluno e ele não estava na sala errada".

Portanto, a resposta correta será a letra d.

"Existe um aluno presente na sala, qualquer que seja a prova em cima da mesa, tal que na capa de qualquer uma das provas não tinha o nome do aluno e ele não estava na sala errada."

Observe que, ao utilizar as regras de negação de quantificadores universais e existenciais, obtivemos uma frase pouco clara. Porém, o trecho que diz "existe um aluno presente na sala, qualquer que seja a prova em cima da mesa" significa, basicamente, que um aluno dentro da sala observou todas as provas em cima da mesa. Já o trecho final que diz "na capa de qualquer uma das provas não tinha o nome do aluno e ele não estava na sala errada" significa que não constava o nome desse aluno na capa de qualquer uma das provas, apesar dele estar na sala correta.

4.14 CALOPSITA

Léo irá ganhar uma calopsita e ao chegar no depósito do avicultor, ele lhe disse:

_ Existe uma calopsita dentro da gaiola, qualquer que seja a gaiola dentro deste depósito, tal que se a calopsita tem mais de 5 anos então ela é fêmea.

Sabendo que o avicultor mentiu, é correto afirmar que:

a) Qualquer que seja a calopsita dentro da gaiola, existe uma gaiola dentro do depósito, tal que a calopsita tem mais de 5 anos e não é fêmea.

b) Qualquer que seja a gaiola dentro deste depósito, existe uma calopsita dentro da gaiola, tal que a calopsita não tem mais de 5 anos e não é fêmea.

c) Qualquer que seja a calopsita dentro da gaiola, existe uma gaiola dentro do depósito, tal que se a calopsita não tem mais de 5 anos então é macho.

d) Qualquer que seja a calopsita dentro da gaiola, existe uma gaiola dentro do depósito, tal que a calopsita tem mais de 5 anos e é fêmea.

RESPOSTA:

Vamos analisar a frase dita pelo avicultor:

Existe uma calopsita dentro da gaiola, qualquer que seja a gaiola dentro deste depósito, tal que se a calopsita tem mais de 5 anos então ela é fêmea.

Ao negar o quantificador existencial, temos: “Qualquer que seja a calopsita dentro da gaiola”.

Ao negar o quantificador universal, temos: “existe uma gaiola dentro do depósito”.

Ao negar a condicional, temos: “A calopsita tem mais de 5 anos e não é fêmea”.

Portanto, a resposta correta será a letra a.

“Qualquer que seja a calopsita dentro da gaiola, existe uma gaiola dentro do depósito, tal que a calopsita tem mais de 5 anos e não é fêmea”.

Da mesma maneira que o desafio anterior, ao utilizar as regras de negação de quantificadores universais e existenciais, obtivemos uma frase pouco clara. Porém, essa negação significa que, dentre todas as calopsitas dentro de gaiolas, uma dessas calopsitas têm mais de 5 anos e não é fêmea.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A sugestão de inserir o conteúdo de lógica matemática na grade curricular do ensino médio surgiu diante de situações vivenciadas, como aluna e professora, em sala de aula e, também, no cotidiano.

Hoje, com o raciocínio lógico um pouco mais desenvolvido do que quando estava no ensino médio, consigo perceber como a maior parte das pessoas que converso, fora do meio acadêmico, sentem uma grande dificuldade de perguntar o que realmente desejam e também sentem dificuldade de interpretar as respostas recebidas.

À primeira vista, esse problema parece ser de português, mas olhando mais a fundo, ele pode estar bastante relacionado à lógica matemática. Eis que estamos falando de discursos falhos, perguntas ambíguas, dupla negação, entre outros.

Nos é cobrado que, além de comunicarmos claramente, sejamos capazes de fazer contas e solucionar problemas. Mas nenhuma dessas opções são tão simples como parecem ser e, muitas vezes, requerem um pensamento crítico e um raciocínio lógico.

O pensar criticamente e logicamente, como um todo, é desejado e buscado por muitos, mas desenvolvido por poucos, e o ensino de lógica matemática nas escolas poderá ser um influenciador e desenvolvedor desse tipo de pensamento.

A ideia aqui exposta vai muito além desse trabalho e requer muito mais que trabalhar a lógica no ensino médio. Seria muito interessante desenvolver o raciocínio lógico em crianças muito antes de entrarem nas escolas. Existem jogos educativos ótimos para isso como, por exemplo, detetive e cara a cara. Mas devido à falta de informação sobre a importância de desenvolver esse raciocínio nas crianças, e até mesmo, à falta de acesso a conteúdos educativos por questões financeiras ou outros motivos, esse desenvolvimento fica a desejar e só é cobrado do jovem quando está prestes a se formar no ensino médio, ou quando ingressa num curso universitário. Seria, talvez, um outro tópico a se discutir, sobre qual é o melhor momento de inserção da criança no processo educativo de pensar logicamente.

REFERÊNCIAS

1 CARNIELLI, Walter A.; EPSTEIN, Richard L.. **Pensamento crítico** - o poder da lógica e da argumentação. 4 ed. São Paulo: Rideel, 2019.

2 SCOLARI, Angélica T.; BERNARDI, Giliane; CORDENONSI, Andre Z.. **O Desenvolvimento do Raciocínio Lógico através de Objetos de Aprendizagem**. Revista Renole, v. 5, n. 2, 2007. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/14253/8169. Acesso em: 22 mai. 2020.

3 COPI, Irving M.. **Introdução à lógica** 2 ed. São Paulo: Mestre Jou, 1974.

4 MATHEUS, Aline Reis.; CANDIDO, Cláudia C..A Matemática e o desenvolvimento do raciocínio lógico. **Revista do Professor de Matemática** (RPM), 2013. Disponível em: http://rpm.org.br/rpm/img/conteudo/files/6_mc11.pdf. Acesso em: 22 mai. 2020.

5 MACHADO, N.J.; CUNHA, M.O.**Lógica e linguagem cotidiana**: Verdade, coerência, comunicação, argumentação. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

6 CLIFF, Dave.**O Prazer da Lógica (Documentário-2013)**. Youtube, 22 mai. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qQ1FzfbUTos&t=2123s. Acesso em: 22 mai. 2020.

7 PASQUINI, Patrícia.**90% dos eleitores de Bolsonaro acreditaram em fake news, diz estudo**. Folha de São Paulo, São Paulo, 2018. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/poder/2018/11/90-dos-eleitores-de-bolsonaro-acreditaram-em-fake-news-diz-estudo.shtml. Acesso em: 22 mai. 2020.

8 Associação Brasileira de Anunciantes.**Pesquisa ABA/TopBrands 2014**. 29 ago. 2017. Disponível em: http://www.aba.com.br/canais/campanhas-mercado/artigos/pesquisa-abatopbrands-2014/. Acesso em: 22 mai. 2020.

9 O Globo. **Bolsonaro manda governo cancelar assinaturas do jornal 'Folha de S. Paulo'**. 31 out. 2019. Disponível em: https://oglobo.globo.com/brasil/bolsonaro-manda-governo-cancelar-assinaturas-do-jornal-folha-de-paulo-24055009. Acesso em: 22 mai. 2020.

10 AVAAZ.**Roubadas pelo WhatsApp! Pesquisa Mostra que Eleições Brasileiras foram "inundadas" por Fake News**. 29 ago. 2017. Disponível em: https://secure.avaaz.org/act/media.php?press_id=917. Acesso em: 22 mai. 2020.

11 SAKAMOTO, Felipe. **Imagem falsa diz que só três países têm voto eletrônico**. Revista Exame, 2018. Il. color. Disponível em: https://exame.com/brasil/imagem-falsa-diz-que-so-tres-paises-tem-voto-eletronico/. Acesso em: 17 out. 2020.

12 Agência Brasil. **Sistema eletrônico de votação já é utilizado em 35 nações**. 24 out. 2018. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/politica/noticia/2018-10/sistema-eletronico-de-votacao-ja-e-utilizado-em-35-nacoes. Acesso em: 22 mai. 2020.

13 Tribunal Superior Eleitoral.**Esclarecimentos**. Disponível em: http://www.tse.jus.br/hotsites/esclarecimentos-informacoes-falsas-eleicoes-2018/somente-3-paises-utilizam-urnas-eletronicas.html. Acesso em: 22 mai. 2020.

14 CUNHA, Celso; CINTRA, Lindley. **Nova gramática do português contemporâneo**. Rio de Janeiro: Lexikon, 2008.

15 ALENCAR FILHO, Edgard de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

16 LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoria dos conjuntos**. 1 ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1974.

17 BARBOSA, João L.M. **Geometria euclidiana plana**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.