Universidade Estadual do Piauí
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação–PROP
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Desigualdades Matemáticas: Contexto para o Ensino Médio com Problemas Olímpicos

Elienai Stanley Barros de Sousa

Teresina

2020

Elienai Stanley Barros de Sousa

Desigualdades Matemáticas: Contexto para o Ensino Médio com Problemas Olímpicos

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UESPI como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Natã Firmino Santana Rocha

Teresina
2020

ELIENAI STANLEY BARROS DE SOUSA

DESIGUALDADES MATEMÁTICAS: CONTEXTO PARA O ENSINO MÉDIO COM PROBLEMAS OLÍMPICOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Mestrado em Matemática do PROFMAT/UESPI, como requisito obrigatório para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Área de concentração: MATEMÁTICA
Aprovado por:

Natã Firmino Santana Rocha

Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha - Presidente e examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Afonso Norberto da Silva

Prof. Dr. Afonso Norberto da Silva - Examinador
Universidade Estadual do Piauí - UESPI

Prof. Dr. Mykael de Araújo Cardoso - Examinador Externo
Universidade Federal do Piauí - UFPI

TERESINA
Novembro/2020

S725d Sousa, Elienai Stanley Barros de.
Desigualdades matemáticas: contexto para o ensino médio com problemas olímpicos / Elienai Stanley Barros de Sousa. – 2020.
61 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Piauí - UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Teresina - PI, 2020.
Área de Concentração: Matemática.
"Orientador: Prof. Dr. Natã Firmino Santana Rocha."

1.Ensino de Matemática. 2. Desigualdades matemáticas. 3. Olimpíadas de matemática. 4. Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino médio. I. Título.

CDD: 510.07

Ficha Catalográfica elaborada pelo Serviço de Catalogação da Universidade Estadual do Piauí - UESPI
Ana Angélica Pereira Teixeira (Bibliotecária) CRB 3ª/1217

Elienai Stanley Barros de Sousa graduou-se em Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI) no ano de 2014, cursou Complementação Pedagógica pelo Instituto Cotemar no ano de 2017, graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Piauí (UFPI) no ano de 2020. Atualmente é professor da rede privada de Teresina-PI.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, meus maiores e melhores orientadores na vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por sua infinita misericórdia, que em meio a uma pandemia, me deu saúde e forças para concluir este trabalho. Sou grato a Ti, Senhor, de todo coração!

À minha Mãe, Socorro Barros, e meu Pai, João Luis, que mesmo em meio às dificuldades financeiras, lutaram para que eu tivesse uma educação adequada. Obrigado por tudo.

À minha esposa Kayane Fernandes, que afligiu-se e suportou os meus momentos de estresse e irritação com este trabalho. Minha companheira para toda a vida. Eu te amo!

Às minhas irmãs, Priscila Barros e Natália Ionah, por todo o apoio moral, principalmente, nos momentos de tribulação, pois sempre estenderam a mão para ajudar.

A todos os meus colegas da turma do PROFMAT/UESPI, em especial ao Felipe Brandão, Erimar Oliveira e Thiago Amaral que são para mim irmãos. Obrigado a todos!

Aos excepcionais professores do PROFMAT/UESPI pelos ensinamentos, orientações e sermões, muitas das vezes severos, porém, importantes e necessários para uma formação de excelência. Obrigado a todos!

Ao meu orientador Natã Firmino pelas orientações, paciência e compreensão. Além das várias horas de reuniões online, em que pelos conselhos profissionais e de vida era algo constante. Muito obrigado por tudo!

Agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho. Obrigado a todos!

“O sentido da vida é ajudar o próximo.”

Enéas Carneiro

RESUMO

Este trabalho visa realçar a importância das desigualdades para o ensino da Matemática, trazendo diversas aplicações em olimpíadas. Inicialmente é feita uma breve análise da abordagem deste tema nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em alguns livros didáticos utilizados nas redes pública e privada de ensino no Brasil. Em seguida, apresenta-se algumas das principais desigualdades matemáticas, por exmplo, desigualdade triangular, desigualdade de Cauchy-Schwarz, desigualdade de Bernoulli, desigualdade de Young, desigualdade de Chebyshev, desigualdade de Erdös-Mordell e desigualdade das médias, explorando suas aplicações na literatura e em problemas de olimpíadas nacionais e internacionais de matemática.

Palavras-chave: Desigualdades Matemáticas, Parâmetros Curriculares Nacionais, Olimpíadas de Matemática.

ABSTRACT

This work aims to highlight the importance of inequalities for the teaching of Mathematics, introducing several applications in olympics. In its content, a brief analysis of the approach of this theme is made in the *Parâmetros Curriculares Nacionais* and in some textbooks used in public and private education networks. Moreover, some of the main mathematical inequalities are presented, for example, Triangle inequality, Cauchy-Schwarz inequality, Bernoulli's inequality, Young's inequality, Chebyshev's inequality, Erdös-Mordell inequality and inequality of means, exploring their applications in literature and in problems of national and international mathematics olympics.

Keywords: Mathematical Inequalities, *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Mathematics Olympics.

Sumário

1 Introdução

As desigualdades matemáticas de números reais podem ser compreendidas como uma relação entre dois o mais números, onde tal relação é estabelecida com o uso de um dos símbolos $>$ (maior que), $<$ (menor que), $\leq$ (menor que ou igual a) e $\geq$ (maior que ou igual a). Na matemática, as desigualdades aparecem em todas as áreas como ferramentas poderosas para a resolução de muitos problemas, principalmente, problemas em que se quer maximizar ou minimizar uma expressão.

São muitas as desigualdades matemáticas e elas existem das mais simples, como por exemplo as inequações do 1° e 2° grau, onde é fácil entendê-las e não exigem mais do que um moderado conhecimento de produtos notáveis, até as mais complexas, como por exemplo a desigualdade de Jensen, que está apresentada nesse trabalho. A escolha deste tema surgiu enquanto cursava a matéria MA12 (Matemática Discreta) no mestrado profissional (PROFMAT), onde tive um maior contato com as desigualdades entre as médias e isso despertou o interesse em continuar estudando sobre as desigualdades matemáticas.

Este trabalho tem o objetivo de enfatizar a importância das Desigualdades Matemáticas para o ensino da Matemática e suas aplicações em Olimpíadas, principalmente nas experiências e nos problemas que abordam a necessidade de se comparar um conjunto de medidas. É a partir desse estudo e do conjunto de procedimentos abordados nesse tema que podemos compreender como uma desigualdade atua e quais são as principais regras para a sua resolução, sempre que possível.

As olimpíadas de matemática são competições que expõem os participantes a problemas desafiadores sobre matemática que exigem um conhecimento apurado sobre o tema. Existem diversas olimpíadas de matemática, muitas internacionais como por exemplo a IMO (International Mathematical Olympiad) e também nacionais como por exemplo a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), OPIM (Olimpíada Piauiense de Matemática), dentre outras. É comum em muitos problemas apresentados nas olimpíadas a presença de desigualdades matemáticas mais complexas e suas aparições nas olimpíadas aumentam a cada ano. Com isso, as olimpíadas são uma ponte e um dos motivos para o conhecimento e estudo das desigualdades matemáticas.

Os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) são diretrizes elaboradas pelo Governo Federal com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. Na disciplina de matemática podemos notar as desigualdades matemáticas como ferramentas que auxiliam ao alcance e êxito de algumas diretrizes que apresentamos neste trabalho.

No Capítulo 2, é apresentado um breve estudo sobre os PCN's e a Matemática, mais especificamente sobre o uso das Desigualdades Matemáticas, passando por uma análise do documento até as aplicações do conteúdo matemático de maneira ampla. Em seguida, é realizada uma sucinta análise comparativa de alguns livros didáticos utilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e de outras obras também muito utilizadas como fonte de pesquisa, fazendo um comparativo de como as Desigualdades Matemáticas são abordadas e alguns resultados importantes.

No Capítulo 3, apresenta-se algumas desigualdades importantes, como a conhecida desigualdade triangular, desigualdade de Cauchy-Schwarz, Bernoulli e outras, acompanhadas com aplicações, em sua maioria, olímpicas.

No Capítulo 4, enfatizamos a desigualdade que não só aparece no ensino fundamental como também se prolonga por todo o Ensino Médio que é a Desigualdade das Médias juntamente com suas aplicações e implicações. Definimos as noções preliminares e os devidos conceitos, juntamente com problemas de Otimização, Geometria e Aritmética a fim de que seja esclarecido de maneira lúdica o uso dessas desigualdades.

Nas considerações finais, é realizado uma análise do trabalho bem como, a importância do mesmo para os discentes e docentes do ensino médio, e por fim apresentadas as sugestões e referências, lista dos livros, artigos e os trabalhos estudados.

2 As Desigualdades na Educação Básica

Nesse Capítulo é feito um estudo sobre a relação entre os Parâmetros Curriculares Nacionais do Brasil e as Desigualdades Matemáticas, desde uma breve leitura do documento até as aplicações do conteúdo matemático de maneira ampla. Em seguida, uma passagem pelos livros didáticos utilizados pelo PNLD na educação pública e outras obras também muito usadas, fazendo uma comparação de como as Desigualdades Matemáticas são abordadas e alguns resultados importantes.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

A seguir são citados alguns trechos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e em seguida são feitos comentários que associam estes ao desenvolvimento do estudo das desigualdades. As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) fazem comentários complementares acerca dos PCNs. Os direcionamentos desses documentos serão bases das aplicações que faremos nesta seção.

De acordo com os PCNs, no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e agora estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade.

Nos anos iniciais do ensino fundamental o aluno deve aprender a comparar dois números, geralmente dois naturais, com o uso dos símbolos $>$, $<$, $\leq$ e $\geq$. Logo após, a comparação estende-se ao Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$) e, por fim, em uma boa aplicação das frações, compara-se os Números Racionais ($\mathbb{Q}$). Ainda no ensino fundamental, aprende-se a resolver as inequações, cujas técnicas são muito parecidas com a resolução de equações, exceto pelo fato de que a desigualdade se inverte quando se multiplica uma inequação por um número real negativo. Uma vez compreendido, incorporado e amadurecido o conceito de desigualdade, o aluno estará preparado para entender problemas mais elaborados envolvendo desigualdades que aparecerão no ensino médio, e que o ajudarão a resolver problemas, investigar, analisar, modelar e compreender.

Os PCNs exibem uma série de finalidades do ensino da Matemática no Ensino Médio. Se destacam algumas a seguir.

I. Aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

II. Analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

III. Expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

IV. Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação;

Em relação ao primeiro item, as desigualdades surgem naturalmente nas demais ciências e nas atividades tecnológicas, por exemplo, a quantidade máxima de antibiótico que deve ser administrada de tal forma que o organismo do paciente não seja prejudicado, o peso máximo de água que uma barragem suporta, o torque mínimo que um motor deve gerar para colocar um automóvel em movimento. O aluno deve estar ciente de que esses problemas envolvem desigualdades.

Quanto ao segundo item, deve-se enfatizar que vivemos em uma época de revolução tecnológica, que nos cerca de várias informações, muitas delas contraditórias, que nos levam a tomar uma decisão se baseando em mais uma delas. O conhecimento das desigualdades pode nos auxiliar a tomar decisões de forma coerente e justificada. Escolher entre um pagamento à vista ou a prazo, entender o porquê da destinação de recursos públicos ser maior para uma determinada área do que para outra, escolher abastecer o automóvel com etanol ou gasolina, escolher o plano telefônico para o dispositivo móvel, são alguns dos problemas em que há muitas opções e informações onde devemos comparar mais do que um valor para tomar uma decisão ou formar uma opinião.

O terceiro item é associado ao que já foi dito no parágrafo anterior, uma vez tomada uma decisão é necessário convencer-se ou convencer a outrem sobre o motivo de tê-la tomado. Isso exige correta linguagem e raciocínio. Manipular algebricamente uma desigualdade, invocar alguma desigualdade notória e construir um raciocínio que mostra que a desigualdade explica bem o motivo das decisões são desafios que este item nos proporciona.

O quarto item mostra que o aluno deve estar seguro e confiante quanto à decisão tomada. Uma vez que a decisão foi tomada e devidamente justificada, ele fica realizado em saber que está tomando uma decisão que as desigualdades mostraram ser a mais correta e eficiente, segura ou vantajosa. Saber que o dinheiro renderá mais na aplicação escolhida, que o automóvel andará quando o motor fornecer o torque julgado como mínimo, que a compra a prazo trará mais vantagem e que a barragem não vai se romper mostram que o professor obteve êxito em dar o sentimento de satisfação ao aluno ao ver que pôde tomar uma decisão baseado no que aprendeu. Seguro da decisão, ele poderá compartilhá-la, tendo êxito em (III), até convencer mais pessoas a tomá-la.

Logo, tais finalidades sevem, além do mais, para o amadurecimento do aluno tanto no aspecto cognitivo como no aspecto comportamental, visto que diante do que já foi apresentado, o discente quando se deparar com um problema terá o ímpeto de tratá-lo da melhor forma possível de acordo com os conhecimentos adquiridos além de buscar compreender os conceitos matemáticos segundo a semiótica da lógica matemática, ou seja, sempre aferindo uma justificativa para cada sentença.

Para [3] os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também um papel importantíssimo para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê em meio a uma gigantesca quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística. No tratamento desses temas, a mídia, as calculadoras e os computadores adquirem importância natural como recursos que permitem a abordagem de problemas com dados reais e requerem habilidades de seleção e análise de informações.

Portanto, os PCN's reforçam o que já foi discutido com respeito a tomada de decisão com base em várias informações. Aqui assume-se que as Ciências Humanas também fazem parte do rol de aplicações, além disso, de enfatizar o uso de computadores para auxiliarem os cálculos ou servirem como fonte de pesquisa.

2.2 Análise de livros e materiais didáticos

Nesta seção serão analisados as referências [1], [6], [7], [8], [9] e [17] que são livros didáticos utilizados em sala de aula do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD)[1] de 2018 ou que são volumes de uma das mais importantes coleções de Matemática elementar disponíveis, inferindo subjetivamente sobre a abordagem algébrica e geométrica assim como as definições clássicas de Triângulo e Função.

Em cada um dos livros didáticos analisados, todos apresentam um capítulo que trata dos Conjuntos Numéricos. Dentro deste capítulo, na seção em que tratam dos Números Reais ($\mathbb{R}$), todos fazem a apresentação desses por meio da reta real, apresentando o conceito de desigualdade com o tratamento geométrico, *Um número real a é menor do que um número real b se o ponto que representa a na reta real está à esquerda do ponto que representa b, ou um número real a é maior do que um número real b se o ponto que representa a na reta real está à direita do ponto que representa b*, ver [9].

Vale ressaltar que em DANTE (ver referência [6]), traz também uma definição algébrica, ou seja, *Um número real a é menor do que um número real b se a diferença b-a for maior do que zero, ou suas formas equivalentes.* O tratamento geométrico se mostra bem eficiente, principalmente quando é necessário verificar alguma desigualdade por meio de uma comparação, onde pelo menos um dos números é um real negativo. Além disso, o tratamento algébrico tem suas vantagens, principalmente na resolução de problemas,

[1] O PNLD é um programa do governo que consiste em avaliar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática e regular.

no entanto, de acordo com as obras analisadas, são exibidos após a introdução da definição geométrica. Isso fica bem evidente ao desenhar a reta real e inserir os pontos que representam os números.

As aplicações imediatas são os intervalos de números reais, a função módulo e a resolução de inequações afim. Os problemas que os livros propõem nesse tópico são bem interessantes, pois a maioria segue as orientações de DANTE [2] e relaciona a solução do problema com um fato cotidiano. Vejamos um exercício citado por BALESTRI, ver [1].

Exemplo 2.1. Para uma visita agendada, um técnico de informática cobra uma taxa fixa de R$ 20,00 mais uma taxa de R$ 25,00 por hora trabalhada. Em uma única visita, quantas horas esse técnico precisa trabalhar para receber mais de R$ 120,00?

Solução. Interpretando o problema, queremos encontrar o valor númerico x de horas que ultrapasse 120 reais. Então, conseguimos a seguinte inequação:

$$20 + 25x > 120.$$

Somando (-20) em ambos os membros da inequação, obtemos:

$$25x > 100.$$

Multiplicando toda a inequação por $\dfrac{1}{25}$, teremos:

$$x > 4.$$

Aqui, fica evidente que em 4 horas, o técnico irá receber 120 reais. Logo, para cada hora trabalhada a partir dessas 4, ele irá receber um valor maior que 120.

□

Vejamos agora outro exercício bastante comum que aparece nos livros didáticos mencionados:

Exemplo 2.2. Em uma escola de inglês é cobrada uma mensalidade de R$ 240,00 e uma taxa de inscrição de R$ 100,00. Qual a quantidade máxima de meses que um aluno que possui R$ 2000,00 poderá frequentá-la?

Solução. Note que montaremos uma inequação com os 100 reais de taxa fixa e os 240 reais da mensalidade, lembrando que não pode ultrapassar a quantia de 2000 reais que o aluno tem. Logo,

$$100 + 240x \leq 2000.$$

Daí, somando -100 em ambos os membros da inequação acima, teremos

$$240x \leq 1900.$$

Multiplicando toda a inequação pelo valor positivo $\dfrac{1}{240}$, obtemos

$$x \leq \frac{1900}{240},$$

ou seja,

$$x \leq 7,92.$$

A quantidade máxima de meses que esse aluno poderá frequentar a escola é 7, pois x é o maior inteiro menor que 7.92.

$\square$

Nessa questão, o resultado é exato porque estamos procurando um "maior inteiro positivo possível". Isso é comum em muitas questões de inequações envolvendo polinômios do 1º grau, é fácil observar que as soluções das inequações são conjuntos numéricos e, na maioria das vezes, possuem infinitos resultados.

Quando procuramos o resultado de uma equação, buscamos um número que represente a exatidão de uma situação. Quando procuramos o resultado de uma inequação, estamos atrás de um conjunto numérico que satisfaça determinada sentença ou condição.

Exercícios desse tipo repetem-se nos demais livros. Todos também fazem o estudo das desigualdades com a função quadrática, geometria, probabilidades, dentre outros detalhando o que mais especificamente acontece quando uma função é maior ou menor que zero em relação ao seu comportamento do gráfico, surgindo assim novas definições sobre monotonicidade, e também suas diversas aplicações nas diversas áreas do conhecimento. Precisamente, o sinal de desigualdade dá várias informações sobre o que você está estudando, um fato que podemos ver na definição de Probabilidade mais adiante.

Abaixo, seguem algumas desigualdades muito importantes encontradas nesses livros, e que são algumas dentre as várias desigualdades estudadas no ensino médio.

Considere a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. A função f é denominada função quadrática. Sabemos que seu gráfico é uma parábola cujo vértice é dado pelas coordenadas

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Assim, podemos concluir que, para todo $x \in \mathbb{R}$, valem as seguintes desigualdades:

$$f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ se } a > 0$$

$$f(x) \leq \frac{4ac-b^2}{4a}, \text{ se } a<0$$

Surgem situações interessantes de máximos e mínimos com problemas que possuem mais do que uma variável, geralmente os problemas nos dão um sistema de duas equações, em que uma delas nos informa algo a respeito do produto entre essas duas variáveis e a outra a respeito da soma. Ao resolver o sistema encontramos uma equação quadrática em uma das variáveis. Vejamos um exercício de [8].

Exemplo 2.3. Entre todos os retângulos de perímetro 20cm, determine aquele cuja área é máxima. Qual é essa área?

Solução. Se considerarmos x e y as medidas dos lados de um retângulo, queremos maximizar a área $x \cdot y$ sabendo o perímetro $2x+2y=20$, ou seja, $x+y=10$. Se escrevemos que $y=10-x$, então a expressão para a área torna-se $x\cdot(10-x)=-x^2+10x$, ou seja, uma equação quadrática na variável x, com $a=-1, b=10ec=0$. Portanto

$$-x^2+10x \leq \frac{-10^2}{4\cdot(-1)}$$

que implica em

$$-x^2+10x \leq 25$$

e como queremos o retângulo com área máxima, então

$$-x^2+10x = 25$$

onde temos

$$x=y=5.$$

□

Definição 2.4 (Triângulo)**.** Triângulos são figuras geométricas formadas por três segmentos de reta que se encontram nas extremidades. Assim, são polígonos com três lados, três ângulos e três vértices. Um triângulo é um polígono que possui três lados e que necessariamente é uma figura plana cujos lados são segmentos de reta.

As desigualdades a seguir possuem valiosa importância no ensino da Geometria. Essas desigualdades vem acompanhadas por uma série de resultados que vem imediatamente após o seu estudo:

1. (*Desigualdade Triangular*) Garante que num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

2. (*Soma dos ângulos internos é igual a* 180) Se refere ao fato de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser igual a soma da medida de dois ângulos retos.

Vemos que nos livros didáticos essas definições são bem lúdicas e de fácil entendimento sempre acompanhadas de exemplos e ilustrações para simplificar a forma de o aluno entender, compreender e posteriormente replicar os novos conceitos matemáticos nos futuros exercícios propostos contidos no livro, respeitando sempre a lógica matemática. Além disso, há vários exercícios resolvidos passo a passo para que o aluno fixe o modelo de solução e tente replicar nos desafios que o livro traz consigo, uma excelente ideia para trazer o estudante para a leitura do livro didático e desmistificar o pensamento que livro de matemática é só números e cálculos, visto que há toda uma teoria explicada para finalizar um simples cálculo. Observamos que as desigualdades que aparecem nos livros didáticos, são realmente as desigualdades mais simples e elementares. A seguir é apresentado algumas das desigualdades não elementares que são bastante encontradas em olimpíadas.

3 Desigualdades e Aplicações

Este capítulo apresenta algumas das principais desigualdades matemáticas, a saber, desigualdade triangular, Cauchy-Schwarz, Bernoulli, Young e Chebyshev, juntamente com diversas aplicações na própria literatura e em problemas olímpicos. Com isso, pretende-se explorar alternativas para o ensino e a aprendizagem da matemática, principalmente para turmas de estudos avançados que buscam uma excelência em participações de olimpíadas nacionais e internacionais.

3.1 Desigualdade Triangular

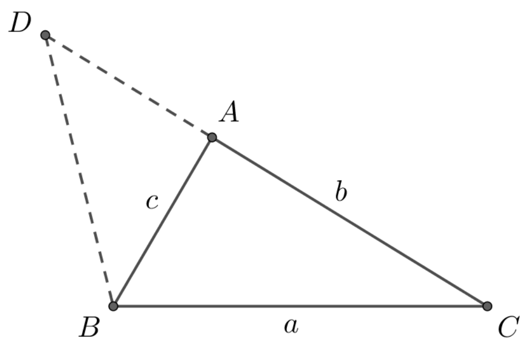
As Desigualdades Geométricas são tão antigas quanto a própria geometria. O livro 1 de Os Elementos (Euclides) contém diversos teoremas sobre desigualdades entre os lados e os ângulos de um triângulo, dentre eles está a Desigualdade Triangular que é estudada a seguir.

Teorema 3.1 (Desigualdade Triangular)**.** *A soma das medidas de dois lados quaisquer de um triângulo é sempre superior à medida do terceiro.*

Demonstração. Consideremos um triangulo ABC e um ponto D na semirreta oposta à semirreta AC, tal que

$$\overline{AD} = \overline{AB}, \tag{1}$$

conforme a figura a seguir.



Assim temos que

$$\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AD}. \tag{2}$$

Por (1), temos $\overline{DC} = \overline{AC} + \overline{AB}$. Note que o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$. Logo, $C\hat{D}B = A\hat{B}D$. Como A é interno ao ângulo $C\hat{B}D$, então $C\hat{B}D > A\hat{B}D$. Daí resulta que

$$C\hat{B}D > C\hat{D}B. \tag{3}$$

Observando a condição (3) no triângulo BCD e sabendo que ao menor ângulo corresponde o menor lado, então $\overline{BC} < \overline{DC}$. Daí, usando (2), temos que $\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}$. Ou seja, $a < b + c$.

Analogamente, mostra-se ainda que $b < a + c$ e $c < a + b$.

$\square$

3.1.1 Aplicações

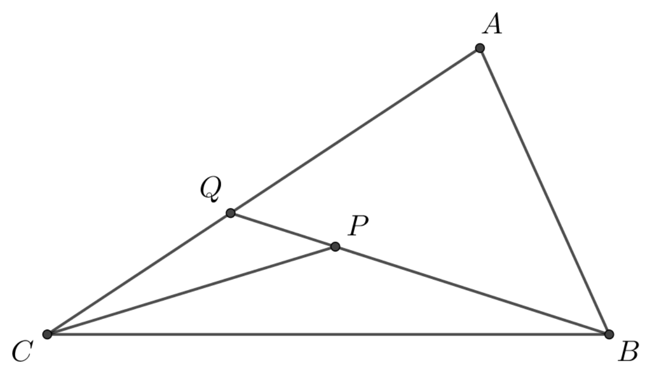
A Desigualdade Triangular talvez seja uma das mais famosas na literatura matemática, com aplicações em diversas áreas. Com o intuito de mostrar sua utilidade em olimpíadas de matemática, apresentamos abaixo problemas da OBM dos anos de 2014 e 2016.

Problema 3.2. (OBM - 2014. [13]) Se P é um ponto no interior de um triângulo ABC, então

a) $\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC}$.

b) $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} < \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$.

Solução. Vamos iniciar provando o item **a)**. No triângulo ABC prolongue a semirreta $\overrightarrow{BP}$ até que a mesma encontre o lado $\overline{AC}$ no ponto Q.



Aplicando a desigualdade triangular (ver Teorema 3.1) sucessivamente aos triângulos CPQ e ABQ, obtemos

$$\overline{PB} + \overline{PC} < \overline{PB} + (\overline{PQ} + \overline{CQ}) = \overline{BQ} + \overline{CQ} < (\overline{AB} + \overline{AQ}) + \overline{CQ} = \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Agora mostraremos o item **b)**. De forma análoga ao item anterior, temos

$$\begin{cases} \overline{PA}+\overline{PB} & < & \overline{AC}+\overline{BC}; \\ \overline{PB}+\overline{PC} & < & \overline{AB}+\overline{AC}; \\ \overline{PA}+\overline{PC} & < & \overline{AB}+\overline{BC}. \end{cases}$$

Somando as três desigualdades membro a membro, obtemos

$$2(\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}) < 2(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}).$$

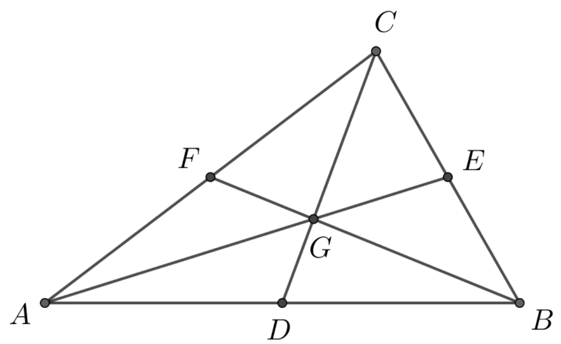
Consequentemente,

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} < \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}.$$

□

Problema 3.3. (OBM - 2016. [13]) Provar que em todo triângulo a soma dos comprimentos das medianas é menor que o perímetro do triângulo e maior que o semiperímetro deste.

Solução. Tomemos um triângulo ABC qualquer, cujos lados medem a, b e c, onde m_a é a mediana relativa ao vértice A, m_b é a mediana relativa ao vértice B, m_c é a mediana relativa ao vértice C e p é seu semiperímetro.



Sejam $\overline{AB}=c$, $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AE}=m_a$, $\overline{BF}=m_b$ e $\overline{CD}=m_c$. Observe que

$$\overline{AG}=\frac{2}{3}m_a, \quad \overline{BG}=\frac{2}{3}m_b \quad \text{e} \quad \overline{CG}=\frac{2}{3}m_c.$$

Primeiro vamos provar que $p < m_a+m_b+m_c$. De fato, aplicando o Teorema 3.1 nos triângulos AGB, AGC e BGC, temos

$$\overline{AG}+\overline{GB} > \overline{AB}, \quad \overline{AG}+\overline{CG} > \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{BG}+\overline{GC} > \overline{BC}.$$

Dessa forma, chegamos a

$$\begin{cases} \dfrac{2}{3}m_a + \dfrac{2}{3}m_b & > & c; \\ \\ \dfrac{2}{3}m_a + \dfrac{2}{3}m_c & > & b; \\ \\ \dfrac{2}{3}m_b + \dfrac{2}{3}m_c & > & a. \end{cases}$$

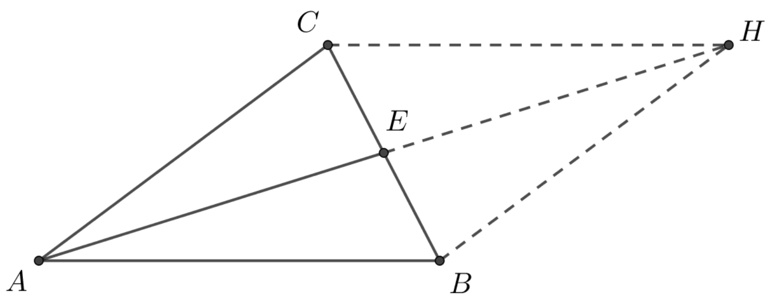
Somando as três inequações, teremos

$$\frac{4}{3}m_a + \frac{4}{3}m_b + \frac{4}{3}m_c > a + b + c = 2p,$$

e assim

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4} \cdot 2p = \frac{3p}{2} > p.$$

Agora, vamos demonstrar que $m_a + m_b + m_c < 2p$. Com efeito, prolongando AE até o ponto H de tal modo que $\overline{AE} = \overline{EH} = m_a$.



Como $\overline{CE} = \overline{EB}$, segue que $AEB \cong HEC$ e $AEC \cong HEB$. Assim, $\overline{AB} = \overline{CH} = c$ e $\overline{AC} = \overline{BH} = b$. Usando a desigualdade triangular (ver Teorema 3.1) no triangulo ACH, teremos

$$\overline{AH} < \overline{AC} + \overline{CH} \Rightarrow 2\overline{AE} < b + c.$$

Portanto, $2m_a < b + c$. Analogamente,

$$2m_b < a + c \text{ e } 2m_c < a + b.$$

Logo, somando membro a membro as três desigualdades, obtemos

$$2m_a + 2m_b + 2m_c < 2a + 2b + 2c,$$

isto é,

$$m_a + m_b + m_c < a + b + c = 2p.$$

Daí, concluímos que

$$p < m_a + m_b + m_c < 2p.$$

$\square$

3.2 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Este importante resultado aparece com mais detalhes em [11] e tem aplicação em várias áreas da Matemática, como na Álgebra Linear (na aplicação de vetores) e na Análise, dentre outras. Também é bastante abordado em provas de Olimpíadas de Matemática e estudos olímpicos, os quais serão tratados mais a frente neste trabalho. A seguir será apresentada uma demonstração usando trinômio do segundo grau.

Teorema 3.4 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz, [11]). *Sejam $a_1, \cdots, a_n$ e $b_1, \cdots, b_n$ números reais, não todos nulos $n \geq 1$, tem-se que*

$$|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n| \leq \left(\sqrt{a_1^2 + \ \cdots \ + a_n^2}\right)\left(\sqrt{b_1^2 + \ \cdots \ + b_n^2}\right).$$

E a igualdade ocorre se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $a_j = \alpha b_j$, com $1 \leq j \leq n$.

Demonstração. Considere o trinômio $f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ \cdots \ + (a_nx - b_n)^2$. Desenvolvendo as parcelas de $f(x)$ temos,

$$f(x) = (a_1^2 + \ \cdots \ + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \ \cdots \ + a_nb_n)x + (b_1^2 + \ \cdots \ + b_n^2).$$

Note que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Desse modo, o discriminante de $f(x)$ deve ser menor ou igual a zero. Assim,

$$[-2(a_1b_1 + \ \cdots \ + a_nb_n)]^2 - 4(a_1^2 + \ \cdots \ + a_n^2)(b_1^2 + \ \cdots \ + b_n^2) \leq 0.$$

Logo,

$$4(a_1b_1 + \ \cdots \ + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + \ \cdots \ + a_n^2)(b_1^2 + \ \cdots \ + b_n^2).$$

Multiplicando ambos os membros da inequação por $\frac{1}{4}$ e extraindo a raiz quadrada, temos

$$|a_1b_1 + \ \cdots \ + a_nb_n| \leq \left(\sqrt{a_1^2 + \ \cdots \ + a_n^2}\right)\left(\sqrt{b_1^2 + \ \cdots \ + b_n^2}\right).$$

A igualdade acontece quando $f(x) = 0$, ou seja, $f(x)$ tem uma raiz real α. Portanto, fazendo $x = \alpha$, temos

$$f(\alpha) = (a_1\alpha - b_1)^2 + (a_2\alpha - b_2)^2 + \ \cdots \ + (a_n\alpha - b_n)^2 = 0.$$

Consequentemente,

$$(a_1\alpha - b_1) = (a_2\alpha - b_2) = \ \cdots \ = (a_n\alpha - b_n) = 0.$$

Então, $a_j = \alpha b_j$, com $1 \leq j \leq n$. Por fim, note que a recíproca é trivial.

$\square$

3.2.1 Aplicações

Nesta seção serão abordados algumas aplicações da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, dentre elas alguns problemas de olimpíadas, com o intuito de ampliar o conhecimento sobre este importante resultado.

A primeira dessas aplicações constitui uma excelente alternativa ao uso do Cálculo, no qual esse problema é resolvido utilizando o Método dos Multiplicadores de Lagrange.

Problema 3.5. Determine o menor e o maior valor da expressão $E = 2x + 3y + 6z$ para valores de x, y, z satisfazendo a condição $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução. Note que a condição imposta sobre x, y, z pode ser entendida geometricamente, sendo que esses valores representam coordenadas de um ponto que está situado sobre a esfera de centro na origem e raio 1.. Aplicando a desigualdade de Cauchy (ver Teorema 3.4), teremos

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Por hipótese, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, assim

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq 49.$$

Podemos concluir que a expressão E tem -7 e 7 como valores mínimo e máximo, respectivamente. Contudo, podemos empregar a condição de proporcionalidade para verificar quais x, y, z determinam esses -7 e 7 como extremos. Como os membros da desigualdade de Cauchy se tornam iguais mediante a existência de proporcionalidade entre seus termos, conforme demonstrado anteriormente, temos

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6}, \text{ onde } y = \frac{3x}{2} \text{ e } z = 3x.$$

Substituindo $y = \dfrac{3x}{2}$ e $z = 3x$ em $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e resolvendo em função de x, obtemos as soluções

$$\Big(-\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}\Big) \text{ e } \Big(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\Big).$$

$\square$

O próximo problema foi retirado da Olimpíada Internacional de Matemática que aconteceu em 2007 no Vietnam.

Problema 3.6. (IMO 2007 - Vietnam. [16]) Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ reais positivos tais que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x_{n+1}$. Prove que

$$\sqrt{x_1(x_{n+1} - x_1)} + \cdots + \sqrt{x_n(x_{n+1} - x_n)} \leq \sqrt{x_{n+1}(x_{n+1} - x_1) + \cdots + x_{n+1}(x_{n+1} - x_n)}.$$

Solução. Considere $y_j = x_{n+1} - x_j$, para $1 \leq j \leq n$. Pelo Teorema 3.4, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{x_1 y_1} + \sqrt{x_2 y_2} + \cdots + \sqrt{x_n y_n} &\leq (\sqrt{x_1 + \cdots + x_n})(\sqrt{y_1 + \cdots + y_n}) \\ &\leq (\sqrt{x_{n+1}})(\sqrt{y_1 + \cdots + y_n}) \\ &\leq \sqrt{x_{n+1} y_1 + \cdots + x_{n+1} y_n}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Problema 3.7. (CVETKOVSKI [5]) Sejam a, b e c números reais positivos, prove que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Solução. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}_*^+$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \geq (1 + 1 + 1)^2 = 9.$$

Fazendo a substituição $x = \sqrt{b+c}$, $y = \sqrt{a+c}$ e $z = \sqrt{a+b}$, temos que

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2},$$

o que é equivalente a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} \geq \frac{9}{2},$$

isto é,

$$\frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{c}{a+b} + 1 \geq \frac{3}{2} + 3.$$

Portanto, somando -3 em ambos os membros da desigualdade acima, segue o resultado.

□

3.3 Desigualdade de Bernoulli

A Desigualdade de Bernoulli é um resultado clássico que pode ser visto com mais detalhes em [11] que sempre é abordado no estudo de diversas áreas da Matemática, dentre elas Otimização e Matemática Discreta. A seguir a Desigualdade de Bernoulli será enunciada e demonstrada através do primeiro Princípio da Indução Finita[2].

Teorema 3.8 (Desigualdade de Bernoulli)**.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \geq -1$. Então*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Demonstração. Vamos utilizar o Princípio de Indução Finita. Note que, para $n = 1$, temos

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$

Suponha agora que a desigualdade seja válida para n, ou seja,

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \tag{4}$$

com $x \geq -1$. Mostraremos que também vale para o sucessor de n. De fato, como $(1+x) \geq 0$ então ao multiplicar ambos os membros de (4) por $(1+x)$, obtemos

$$(1+x)^n(1+x) \geq (1+n \cdot x)(1+x).$$

Daí,

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x + x + n \cdot x^2.$$

Agrupando os termos em comum, teremos

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x + n \cdot x^2.$$

Como $n \cdot x^2 \geq 0$, temos que

$$(1+x)^{n+1} \quad \geq \quad 1 + (n+1) \cdot x.$$

Portanto, por indução, conclui-se que $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ com $x \geq -1$.

□

Ainda com base em [11], a seguir abordamos duas variações da Desigualdade de Bernoulli (ver Teorema 3.8).

[2]Dado um subconjunto S do conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, tal que 1 pertence a S e sempre que um número n pertence a S, o número $n+1$ também pertence a S, tem-se que $S = \mathbb{N}$.

Proposição 3.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e x um número real positivo. Então,*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^2.$$

Demonstração. O argumento desta demonstração é baseado no primeiro Princípio de Indução Finita. Para $n = 1$, temos

$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x + \frac{1 \cdot (1-1)}{2} \cdot x^2.$$

Suponha a expressão

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^2, \tag{5}$$

verdadeira para n e $x \in \mathbb{R}_+$. Mostraremos que também vale para o sucessor de n. Com efeito, como x é positivo, então multiplicando $(1+x)$ em ambos os membros da desigualdade (5), chegamos a

$$(1+x)^n(1+x) \geq \left(1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^2\right)(1+x).$$

Agora, efetuando a propriedade distributiva no segundo membro da desigualdade, obtemos

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^2 + x + n \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^3.$$

Logo,

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x + \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot x^2 + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^3.$$

Observe que

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot x^3 \geq 0, \quad \text{uma vez que} \quad n \in \mathbb{N} \quad e \quad x > 0.$$

Consequentemente,

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x + \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot x^2,$$

.

□

Proposição 3.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e x um número real não nulo. Então,*

$$(1+x)^{2n} \geq 1 + (2n)x$$

.

Demonstração. Para $n = 1$, temos

$$(1+x)^{2\cdot 1} = (1+x)^2 = 1 + 2\cdot x + x^2 \geq 1 + 2\cdot 1\cdot x,$$

pois $x^2 \geq 0$. Suponha a expressão

$$(1+x)^{2n} \geq 1 + 2nx. \tag{6}$$

válida para n, com $x \neq 0$. Mostraremos que também vale para o sucessor de n. De fato, multiplicando ambos os membros da desigualdade (6) por $(1+x)^2$, chegamos a

$$(1+x)^{2n}(1+x)^2 \geq (1+2nx)(1+x)^2.$$

Por hipótese de indução, concluímos que

$$(1+x)^{2n}(1+x)^2 \geq (1+2nx)(1+2x).$$

Fazendo a distribuição e agrupando os termos, obtemos

$$(1+x)^{2n+2} \geq 1 + 2(n+1)\cdot x + 4nx^2.$$

Como $x \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se $4nx^2 > 0$. Logo $(1+x)^{2(n+1)} \geq 1 + 2(n+1)\cdot x$. Portanto, por indução conclui-se que $(1+x)^{2n} \geq 1 + 2\cdot n\cdot x$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \neq 0$.

□

3.3.1 Aplicações

Agora vamos a uma aplicação abordada na Olimpíada Internacional de Matemática que ocorreu em 2001 nos Estados Unidos.

Problema 3.11. (IMO 2001 - Estados Unidos. [16]) Seja $a_0, a_1, ...$ uma sequência infinita e arbitrária de números positivos. Mostre que a desigualdade

$$1 + a_n > a_{n-1}\cdot \sqrt[n]{2}$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n.

Solução. É interessante notar que no caso em que a sequência $a_n = C$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\frac{1+C}{C} > \sqrt[n]{2}.$$

O lado esquerdo na desigualdade anterior é sempre maior que um. O lado direito é uma sequência decrescente e que tende a 1 a medida que n se torna cada vez maior.

Logo, existirá um certo número natural n_0 a partir do qual todos os termos satisfazem a desigualdade.

Para a solução do problema geral, usaremos a desigualdade de Bernoulli (ver Teorema 3.8), com $x = \frac{1}{n}$, concluindo

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2.$$

Daí,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{2}.$$

Como $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1} \cdot \sqrt[n]{2}.$$

Logo, para concluir a prova, basta mostrar que

$$1 + a_n > a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

é válida para um número infinito de inteiros positivos n. Nesse caso

$$1 + a_n > a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq a_{n-1} \cdot \sqrt[n]{2}.$$

A demonstração será feita por contradição. Isto é, suponha que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, vale que

$$1 + a_n \leq a_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Dividindo os dois lados por $n + 1$, teremos

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq a_{n-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1}.$$

Desse modo

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} \leq \frac{a_{n-1}}{n}.$$

Somando as desigualdades anteriores quando n varia de N até $m \in \mathbb{N}$, com $m > N$, teremos

$$\sum_{n=N}^{m} \left(\frac{1}{n+1}\right) + \sum_{n=N}^{m} \left(\frac{a_n}{n+1}\right) \leq \sum_{n=N}^{m} \left(\frac{a_{n-1}}{n}\right).$$

Observe o desenvolvimento dos dois últimos somatórios e veja que existem muitos termos idênticos que podemos simplificar, ou seja

$$\sum_{n=N}^{m} \left(\frac{a_n}{n+1}\right) = \frac{a_N}{N+1} + \frac{a_{N+1}}{N+2} + \cdots + \frac{a_{m-1}}{m} + \frac{a_m}{m+1}$$

e

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_{n-1}}{n}\right)=\frac{a_{N-1}}{N}+\frac{a_N}{N+1}+\frac{a_{N+1}}{N+2}+\cdots+\frac{a_{m-1}}{m}.$$

Com isso, segue que

$$\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right)+\frac{a_m}{m+1}\leq\frac{a_{N-1}}{N}$$

e, consequentemente

$$\frac{a_m}{m+1}\leq\frac{a_{N-1}}{N}-\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Onde podemos afirmar que para m suficientemente grande o somatório $\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ será maior que $\frac{a_{N-1}}{N}$, tornando o segundo membro da desigualdade acima, negativo. E esta é uma contradição, pois $a_m > 0$ e $m > 0$.

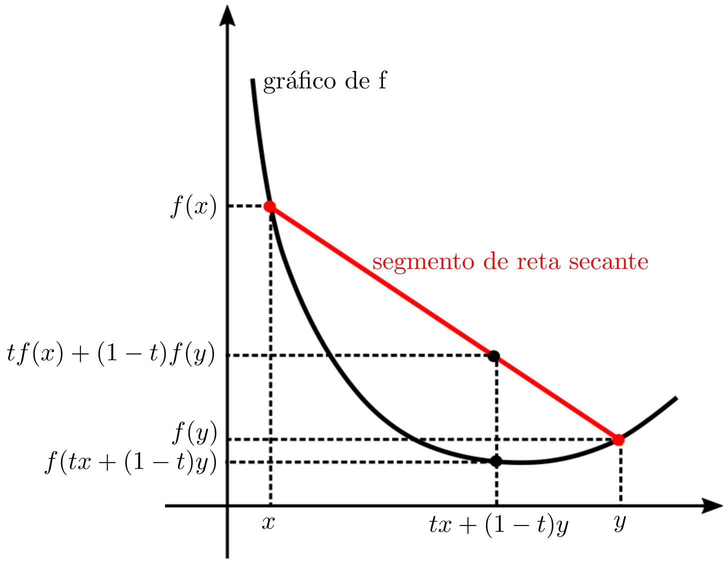
□

3.4 Desigualdade de Jensen

Uma outra importante desigualdade é a Desigualdade de Jensen, que é a chave de muitas questões envolvendo funções contínuas. Bastante abordada em problemas de Otimização, tem esse nome em homenagem ao matemático dinamarquês Johan Ludwig William Valdemar Jensen (1859-1925). Antes de apresentar o enunciado e a demonstração desse importante resultado, vamos definir os conceitos de funções convexas e côncavas fundamentais para o resultado.

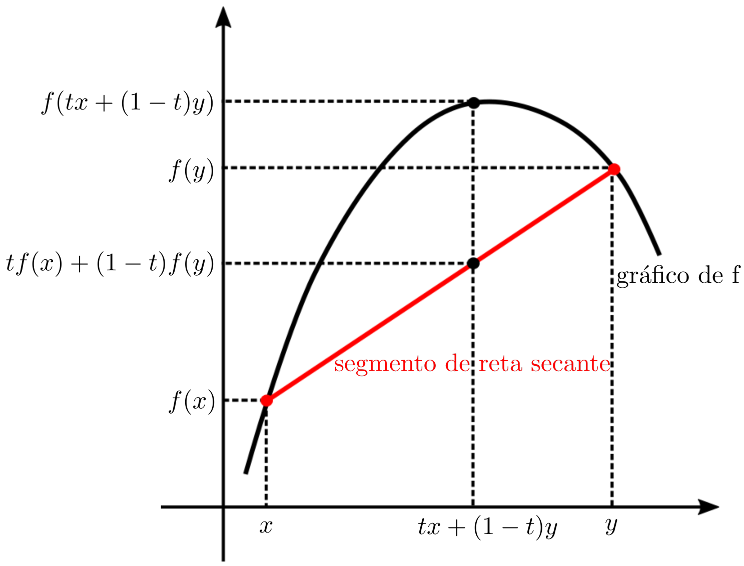
Definição 3.12. Seja $U \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $t \in (0,1)$. Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita convexa em U se $f(t\cdot x+(1-t)\cdot y)\leq t\cdot f(x)+(1-t)\cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in U$.

Geometricamente, a definição acima traz que f é convexa se o segmento de reta secante que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ sempre está acima ou coincide com o gráfico de f para qualquer escolha de pontos x e y em U.



Definição 3.13. Seja $U \subset \mathbb{R}$ um conjunto e $t \in (0,1)$. Uma função $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita côncava em U se $f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) > t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y)$, para quaisquer $x, y \in U$.

Com interpretação geométrica similar a função convexa, se a função f é côncava o segmento de reta secante que passa pelos pontos $(x, f(x))$ e $(y, f(y))$ sempre está abaixo do gráfico de f para qualquer escolha de pontos x e y em U.



Agora, estamos prontos para enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, a Desigualdade de Jensen.

Teorema 3.14 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ e $t_1, t_2, ..., t_n \in (0,1)$, com $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ então:*

i) *Se f for convexa, então*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n),$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

ii) *Se f for concava, então*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) > t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n).$$

Demonstração. Suponha que f seja uma função convexa. Daí pelo Princípio de Indução Finita, para o caso $n = 2$, segue da própria definição de função convexa. Agora, suponha a afirmação válida até um certo $n > 2$, ou seja,

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n),$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Mostraremos que também vale para $n + 1$. Considere $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in I$ e $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1} \in (0, 1)$, tais que, $t_1 + t_2 + \cdots + t_n + t_{n+1} = 1$. Defina

$$y = \frac{t_1x_1 + \cdots + t_nx_n}{1 - t_{n+1}} = s_1x_1 + \cdots + s_nx_n,$$

com $s_j = \dfrac{t_j}{1 - t_{n+1}}$, para $1 \leq j \leq n$. Como $s_1 + \cdots + s_n = 1$ e $s_j \in (0, 1)$, para $1 \leq j \leq n$, segue da hipótese de indução que $y \in I$. Daí,

$$t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} = (1 - t_{n+1})y + t_{n+1}x_{n+1} \in I.$$

Pela convexidade da f, tem-se

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) = f((1-t_{n+1})y+t_{n+1}x_{n+1}) \leq (1-t_{n+1})f(y)+t_{n+1}f(x_{n+1}),$$

com igualdade se, e só se, $y = x_{n+1}$. Por outro lado,

$$f(y) = f(s_1x_1+\cdots+s_nx_n) \leq s_1f(x_1)+\cdots+s_nf(x_n) = \frac{1}{1-t_{n+1}}(t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)),$$

com igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Unindo as desigualdades, temos

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) &\leq (1 - t_{n+1})f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + \cdots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

com igualdade se, e só se, $x_1 = \cdots = x_n = x_{n+1}$. Como queríamos demonstrar.

A demonstração é análoga para o caso de f ser côncava e pode ser encontrada em [10].

$\square$

3.4.1 Aplicações

Nesta seção são abordados problemas de olimpíadas de matemática nacional e internacional como aplicação da Desigualdade de Jensen (ver Teorema 3.14).

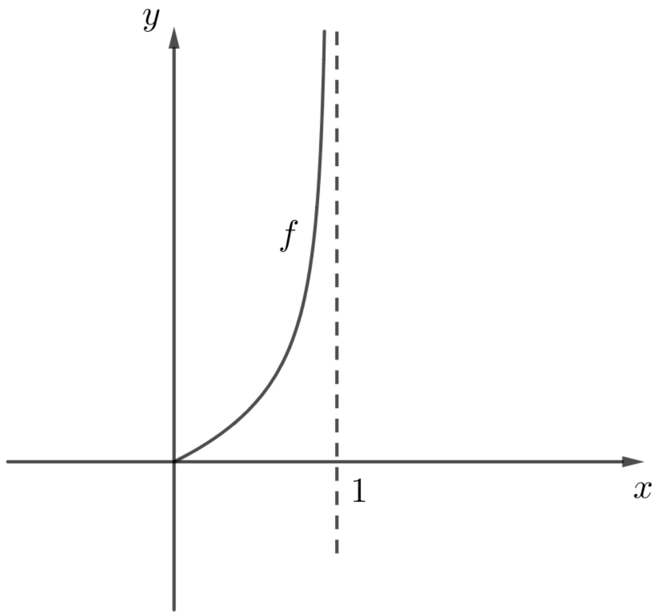
Problema 3.15. (OBM - 2015. [13]) Sejam $x_1, ..., x_n$ reais positivos tal que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Prove que

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Solução. Considere a função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$$

definida em $(0, 1)$. Pela interpretação geométrica da Definição 3.12 é fácil ver que a função $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ é convexa. Vejamos o seu gráfico:



Portanto, aplicando a desigualdade de Jensen (ver Teorema 3.14), temos

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right),$$

o que é equivalente a

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

□

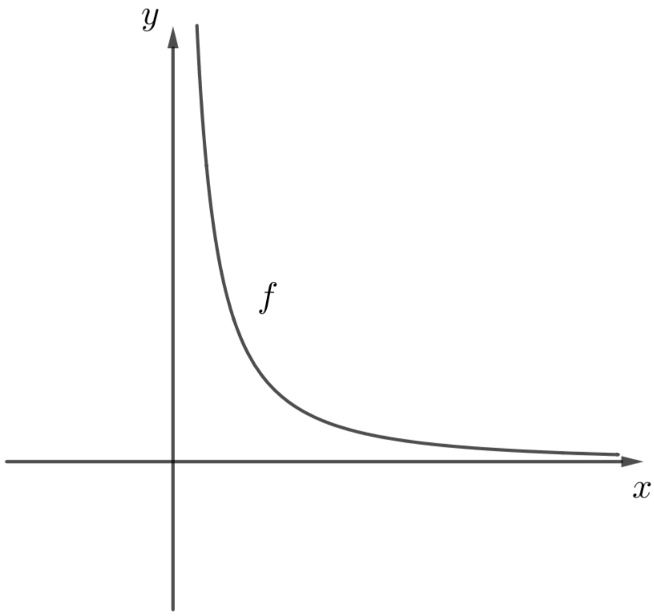
Problema 3.16. (OBM - 2016. [13]) Sejam a, b, c e d números positivos com soma 4. Prove que

$$\frac{a}{b^2+b}+\frac{b}{c^2+c}+\frac{c}{d^2+d}+\frac{d}{a^2+a}\geq\frac{8}{(a+c)\cdot(b+d)}.$$

Solução. Considere a função

$$f(x)=\frac{1}{x(x+1)}.$$

Veja que, por observar geometricamente a Definição 3.12, f é convexa em $(0,+\infty)$. De fato, segue o gráfico dessa função



De acordo com o Teorema 3.14, temos

$$\frac{a}{4}\cdot f(b)+\frac{b}{4}\cdot f(c)+\frac{c}{4}\cdot f(d)+\frac{d}{4}\cdot f(a)\geq f\left(\frac{(a+c)(b+d)}{4}\right).$$

Logo,

$$\frac{a}{4}\cdot f(b)+\frac{b}{4}\cdot f(c)+\frac{c}{4}\cdot f(d)+\frac{d}{4}\cdot f(a)\geq\frac{16}{(a+c)(b+d)[(a+c)(b+d)+4]}.$$

Multiplicando por 4 ambos os membros, temos

$$a\cdot f(b)+b\cdot f(c)+c\cdot f(d)+d\cdot f(a)\geq\frac{64}{(ab+bc+cd+da)^2+4(ab+bc+cd+da)}.$$

Observe que

$$(a-b+c-d)^2\geq 0.$$

Daí,

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ac + bd) - 2(ab + ad + cb + cd) \geq 0.$$

Adicionando $4(ab+bc+cd+ad)$ em ambos os membros da desigualdade acima, temos:

$$(a + b + c + d)^2 \geq 4(a + c)(b + d).$$

Como $a + b + c + d = 4$, temos que:

$$4 \geq (a + c)(b + d).$$

Adicionando 4 em ambos os membros, temos:

$$8 \geq (a + c)(b + d) + 4.$$

Multiplicando toda a desigualdade por $\dfrac{8}{(a + c)(b + d)[(a + c)(b + d) + 4]}$, resulta em:

$$\frac{64}{(ab + bc + cd + da)^2 + 4(ab + bc + cd + da)} \geq \frac{8}{(a + c) \cdot (b + d)}.$$

Portanto,

$$a \cdot f(b) + b \cdot f(c) + c \cdot f(d) + d \cdot f(a) \geq \frac{8}{(a + c) \cdot (b + d)}.$$

E a igualdade valendo sempre que $a = b = c = d$.

$\square$

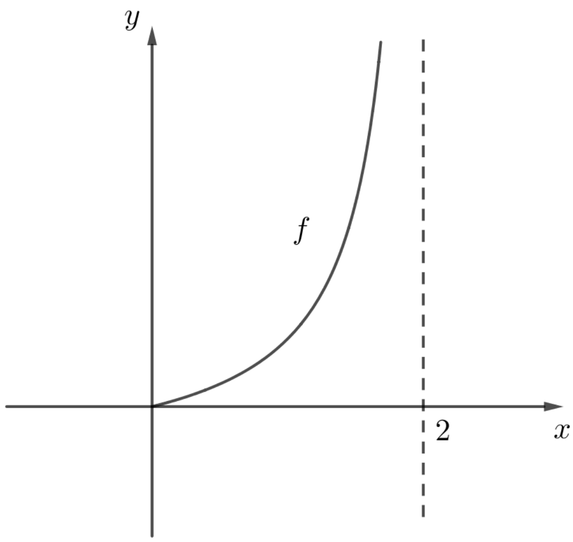
Problema 3.17. (Olimpíada Balcânica) Sejam $n > 1$ e $a_1, ..., a_n$ números reais positivos cuja soma é 1. Para cada i, seja $b_i = \displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_j$. Prove que

$$\frac{a_1}{1 + b_1} + \cdots + \frac{a_n}{1 + b_n} \geq \frac{n}{2n - 1}.$$

Solução. Note que

$$1 + b_j = 1 + (1 - a_j) = 2 - a_j.$$

Observando a geometria da Definição 3.12, chegamos a conclusão que a função $f : (-\infty, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$ é convexa, de acordo com o esboço do gráfico abaixo.



Portanto, pela desigualdade de Jensen (ver Teorema 3.14), temos que

$$\sum_{j=1}^{n} f(a_j) \geq n \cdot f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{2n-1}.$$

□

3.5 Desigualdade de Young

A Desigualdade de Young, encontrada com frequência em problemas de Otimização tem seu nome devido ao matemático William Henry Young (1863-1942) é utilizada também na demonstração da desigualdade de Hölder (que será apresentada mais a frente), sendo também amplamente utilizada no estabelecimento de estimativas com normas em espaços de Sobolev com aplicações na teoria das EDPs não lineares.

Teorema 3.18 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam $p, q > 1$ números reais positivos, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então*

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q},$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração. Usando o fato da função logaritmo natural ser côncava em $(0, +\infty)$, considere reais positivos a_1, a_2 e b_1, b_2 tais que $b_1 + b_2 = 1$. Daí, pela desigualdade de Jensen (ver Teorema 3.14), tem-se que

$$log(b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2) \geq b_1 \cdot log(a_1) + b_2 \cdot log(a_2),$$

com igualdade se, e somente se $a_1 = a_2$. Fazendo $b_1 = \dfrac{1}{p}, b_2 = \dfrac{1}{q}, a = x^p$ e $a_2 = y^q$, obtem-se

$$log\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p}log(x^p) + \frac{1}{q}log(y^q) = log(x \cdot y).$$

Como a função logaritmo natural é crescente, conclui-se que

$$x \cdot y \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

A igualdade acontece quando $x^p = y^q$. De fato, veja que

$$x \cdot y = x \cdot (y^q)^{\frac{1}{q}} = x \cdot (x^p)^{\frac{1}{q}} = x^{\frac{p}{p}} \cdot x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = x^p = x^p \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

□

Uma consequência da Desigualdade de Young é a desigualdade de Hölder que será apresentada a seguir.

3.5.1 Aplicações

A Desigualdade de Hölder é muito utilizada para a demonstração de diversos teoremas em espaços de Lebesgue das funções integráveis (ver [15]), e nos últimos anos bastante abordada nas Olimpíadas Brasileira e Internacional de Matemática, e tem seu nome devido a Otto Ludwig Hölder (1859 - 1937) um alemão matemático nascido em Stuttgart.

Teorema 3.19 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam $a_1, ..., a_n$ e $b_1, ..., b_n$ números reais positivos e $p, q > 1$, tais que, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leq \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i)^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

com igualdade se, e somente se $\dfrac{a_1^P}{b_1^q} = \cdots = \dfrac{a_n^P}{b_n^q}$.

Demonstração. Tome $A = \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i)^p\right]^{\frac{1}{p}}$ e $B = \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i)^q\right]^{\frac{1}{q}}$. Daí,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leq A \cdot B \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq 1.$$

Por outro lado, faça $x_i = \dfrac{a_i}{A}$ e $y_i = \dfrac{b_i}{B}$, desse modo,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p = \frac{1}{A^p}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i)^p = 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n}(y_i)^q = \frac{1}{B^q}\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i)^p = 1.$$

O problema agora é provar que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \leq 1$. Pela Desigualdade de Young (ver Teorema 3.18), segue que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \leq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q}\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1.$$

E vale a igualdade sempre que $x_i = y_i$, ou que $\dfrac{a_i^p}{A^p} = \dfrac{b_i^q}{B^q}$, sempre que $1 \leq i \leq n$. Por outro lado, é imediato verificar que $\dfrac{a_1^p}{b_1^q} = \dfrac{a_2^p}{b_2^q} = \cdots = \dfrac{a_n^p}{b_n^q} = \dfrac{A^p}{B^q}$.

□

A Desigualdade de Minkowski, devida ao matemático Hermann Minkowski (1864-1909) muito utilizada para a demonstração de diversos teoremas em espaços $\mathcal{L}_p$.

Teorema 3.20 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Para $p > 1$ inteiro e x_i, y_i reais positivos, temos*

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^p},$$

com igualdade se, e somente se $\dfrac{x_1}{y_1} = \cdots = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Demonstração. Considere a expressão abaixo

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot (x_i + y_i)^{p-1}$$

Fazendo $q > 1$ de modo que $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{1}{p} = \dfrac{p-1}{p}$ e aplicando a Desigualdade de Hölder (ver Teorema 3.19) em cada um dos somatórios, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^p)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i^p)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i^p)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \left(\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^p)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i^p)\right]^{\frac{1}{p}}\right) \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}.$$

E dividindo tudo por $\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$, segue-se que

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{1-\frac{p-1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^p)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i^p)^{\frac{1}{p}}\right],$$

ou seja,

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i^p)\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i^p)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Portanto,

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(x_i^p)} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n}(y_i^p)}.$$

□

3.6 Desigualdade de Chebyshev

Esse resultado é atribuído ao matemático russo Pafnuty Chebyshev, do século XIX, que apresenta vasta aplicação em diversas áreas e também em provas das Olimpíadas de Matemática e pode ser visto com mais detalhes em [10].

Teorema 3.21 (Desigualdade de Chebyshev, [10])**.** *Se $a_1, a_2, ..., a_n$ ou $b_1, b_2, ..., b_n$ são números reais tais que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, então*

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right),$$

com igualdade se, e somente se $a_1 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = \cdots = b_n$.

Demonstração. Note que para todo $i, j \in 1, 2, 3, \ldots, n$ temos:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

isto é,

$$a_ib_i + a_jb_j \geq a_ib_j + a_jb_i.$$

Observe que como os a_i e b_i são igualmente ordenados, concluímos que a desigualdade acima é não negativa.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) &= a_1b_1 + a_1b_2 + a_1b_3 + \ldots + a_1b_n \\
&\quad + a_2b_1 + a_2b_2 + a_2b_3 + \ldots + a_2b_n \\
&\quad + a_3b_1 + a_3b_2 + a_3b_3 + \ldots + a_3b_n \\
&\quad + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\
&\quad + a_nb_1 + a_nb_2 + a_nb_3 + \ldots + a_nb_n \\
&\leq a_1b_1 \\
&\quad + a_1b_1 + a_2b_2 + a_2b_2 \\
&\quad + a_1b_1 + a_3b_3 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_3b_3 \\
&\quad + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \\
&\quad + a_1b_1 + a_nb_n + a_2b_2 + a_nb_n + \ldots + a_nb_n \\
&= n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i
\end{aligned}$$

Note agora que, se $a_1 = \cdots = a_n$ ou $b_1 = \cdots = b_n$, haverá igualdade na desigualdade de Chebyshev. Reciprocamente, suponha que temos a igualdade em tal desigualdade. Como $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ para todos os índices i, j, para haver a igualdade deve ocorrer $(a_i - a_j)(b_i - b_j) = 0$ para todos os $i, j = 1, \ldots, n$. Se existir $1 \leq k \leq n$ tal que $b_k < b_{k+1}$, então $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_k < b_{k+1} \leq \cdots \leq b_n$ e a condição $(a_i - a_{k+1})(b_i - b_{k+1}) = 0$ para todo i garante que $a_i = a_{k+1}$ para $i \leq k$. Portanto, $a_1 = \cdots = a_k = a_{k+1}$. Por outro lado, a partir de $(a_i - a_k)(b_i - b_k) = 0$ para $i > k$, concluímos que $a_{k+1} = \cdots = a_n$. Logo, todos os a_i devem ser iguais.

□

3.6.1 Aplicações

A seguir uma aplicação da Desigualdade de Chebychev retirada do banco de questões da Olimpíada Brasileira de Matemática.

Problema 3.22. (OBM - 2014 - Banco de Questões [13]) Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reais positivos com soma s. Prove que

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Solução. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Então $s - a_1 \geq s - a_2 \geq \cdots \geq s - a_n$. Como $s - a_i > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\frac{1}{s-a_1} \leq \frac{1}{s-a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s-a_n}.$$

Portanto, pela Desigualdade de Chebyshev (ver Teorema 3.21), temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-a_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i \cdot \frac{1}{s-a_i}\right) \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i}\right) = \frac{s}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i}\right).$$

Por outro lado,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s-a_i} \geq n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} (s-a_i)\right)^{-1} = n^2(ns-s)^{-1} = \frac{n^2}{(n-1)s}.$$

Por fim, basta combinar as duas desigualdades acima.

□

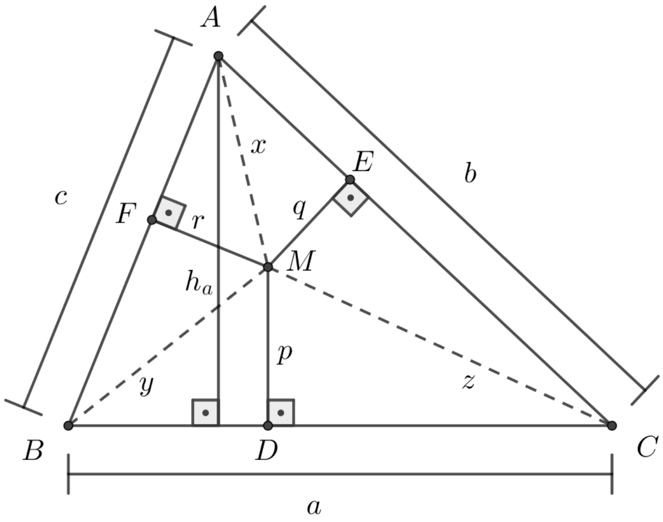
3.7 Desigualdade de Erdös-Mordell

O nome desta desigualdade se dá pelo fato de sua prova ter sido inicialmente um problema proposto pelo matemático húngaro Paul Erdös (1913-1996), na revista American Mathematical Montly em 1935 e por ter sido resolvido primeiramente pelo matemático britânico Louis Joel Mordell (1888-1972). Mas estas provas não eram muito simples, por isso os matemáticos continuaram na busca de uma prova elementar. Em 1957, Nikolas Kazarinoff e em 1958 Bankoff descobriram uma demonstração muito mais simples. Atualmente existem mais de 20 demonstrações diferentes desta desigualdade.

Teorema 3.23 (Desigualdade de Erdös-Mordell)**.** *Seja ABC um triângulo qualquer, de lados medindo a, b e c, e M um ponto interior, tal que $x = \overline{AM}$, $y = \overline{BM}$ e $z = \overline{CM}$. Então, sendo p, q e r, respectivamente, as distâncias de M até os lados BC, AC e AB, então vale a desigualdade*

$$x + y + z \geq 2(p + q + r).$$

Demonstração. Observe a figura a seguir:



Denota-se h_a a distância de A até BC. Desse modo, teremos $S = \dfrac{a \cdot h_a}{2}$. Como S pode ser vista como a soma das áreas dos triângulos BMC, AMC e AMB, então segue-se que $a \cdot h_a = 2S = ap + bq + cr$. Sendo

$$h_a \leq p + x,\ a(p+x) \geq a \cdot h_a = ap + bq + cr \Rightarrow ax \geq bq + cr \Rightarrow x \geq \frac{bq}{a} + \frac{cr}{a}. \tag{7}$$

De modo totalmente análogo concluímos que

$$y \geq \frac{pb}{c} + \frac{ar}{c} \tag{8}$$

e

$$z \geq \frac{aq}{b} + \frac{cp}{b} \tag{9}$$

Somando membro a membro (7), (8) e (9) obtemos:

$$x + y + z \geq p \cdot \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + r \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2p + 2q + 2r = 2(p + q + r).$$

Haja vista que a soma de dois números inversos positivos é sempre maior ou igual a 2.

□

4 Desigualdade das Médias e Aplicações

No capítulo anterior foram estudadas várias desigualdades de grande importância na literatura matemática, embora a maioria delas sejam pouco exploradas durante o ensino básico. Neste capítulo será apresentado um estudo sobre a Desigualdade das Médias, apresentando diversos problemas olímpicos com abordagens direcionadas para o ensino médio.

4.1 Definições Preliminares

Inicialmente apresentamos algumas definições preliminares com o intuito de tornar o trabalho mais leve para o leitor. Estas servirão de embasamento para a demonstração de resultados e aplicações que virão posteriormente. A primeira a ser definida é a mais famosa dentre todas as médias, a Média Aritmética.

Definição 4.1. Dada uma sequência de números reais $x_1, ..., x_n$ definimos como média aritmética o número A tal que,

$$A = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Pode-se observar que a terminologia média aritmética está relacionada à progressão aritmética (P.A.), onde cada termo, exceto pelos extremos, é média aritmética dos termos equidistantes. Note que podemos tomar essa afirmação acima como definição de uma P.A., pois em particular teríamos:

$$a_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{2}, \quad \text{com} \quad i = 2, ..., n-1.$$

Logo,

$$a_{i+1} - a_i = a_i - a_{i-1} = r, \quad \text{com} \quad i = 2, ..., n-1,$$

onde $r \in \mathbb{R}$ denominada razão da P.A.

A possibilidade de ocorrer vários a_i iguais sugere a definição de uma outra média aritmética, onde as grandezas possam ter pesos a elas associados, pesos estes que de alguma forma deem uma ideia de multiplicidade. Então, se agruparmos os termos iguais e multiplicarmos pela frequência de cada um deles teremos a conhecida Média Aritmética Ponderada.

Definição 4.2. Dada uma sequência de números reais $x_1, ..., x_n$, com pesos $p_1, ..., p_n$ definimos como média aritmética ponderada o número P tal que,

$$P = \frac{p_1 \cdot x_1 + \cdots + p_n \cdot x_n}{p_1 + \cdots + p_n}.$$

A seguir será apresentado mais uma das três média clássicas de Pitágoras, a Média Geométrica. As outras duas dessas médias clássicas é a já mencionada Média Aritmética e a Média Harmônica, abordada posteriormente.

Definição 4.3. Dada uma sequência de números reais positivos $x_1, ..., x_n$ definimos como média geométrica o número G tal que,

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n.}$$

Observe que a terminologia média geométrica está relacionada à progressão geométrica (P.G.), onde o módulo de cada termo, exceto os extremos, é média geométrica dos termos equidistantes. De fato temos,

$$|a_i| = \sqrt{a_{i-1} \cdot a_{i+1}}, \quad \text{com} \quad i = 2, ..., n-1.$$

Logo,

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_{i+1}}{a_i} = q, \quad \text{com} \quad i = 2, ..., n-1,$$

onde $q \in \mathbb{R}$ é denominada razão da P.G.

A média harmônica está relacionada ao cálculo matemático das situações envolvendo as grandezas inversamente proporcionais.

Definição 4.4. Dada uma sequência de números reais não nulos $x_1, ..., x_n$ definimos média harmônica o número H tal que,

$$H = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}.$$

Por fim, apresentamos a definição da Média Quadrática que posteriormente se comprovará ser sempre maior ou igual a Média Aritmética.

Definição 4.5. Dada uma sequência de números reais não nulos $x_1, ..., x_n$ definimos média quadrática o número Q tal que,

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

4.2 Desigualdade entre Médias

A desigualdade entre a Média Aritmética e a Média Geométrica, utilizada em diversas aplicações, pode ser vista como uma consequência da desigualdade de Jensen (ver Teorema 3.14). Assim, considere a proposição a seguir.

Teorema 4.6. *Dados números reais não negativos* $x_1, x_2, \dots, x_n$*, sua média aritmética é sempre maior ou igual a média geométrica, ou seja,*

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ \cdots \ + x_n}{n}\right) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Considere os números reais não negativos $x_1, x_2, \dots, x_n$ e, sabendo que a função logaritmo natural é sobrejetiva, temos que existem reais $a_1, a_2, \dots, a_n$, tais que

$$a_j = \log(x_j)^3,$$

com $1 \leq j \leq n$. Vale ressaltar que a função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(x)$ é côncava em todo o seu domínio, então pelo Teorema 3.14 (Desigualdade de Jensen), temos

$$\frac{\log(x_1) + \log(x_2) + \cdots + \log(x_n)}{n} \leq \log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

As propriedades do logaritmo garantem que

$$\log(\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}) \leq \log\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Como a função logaritmo é crescente, verifica-se que

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

□

Agora será apresentado o resultado que exibe a relação entre as médias Geométrica e Harmônica.

[3]Chamamos de logaritmo de um número o expoente a que outro valor (a base) deve ser elevado para produzir este número. Portanto, temos a seguinte definição: $a^x = b \Longleftrightarrow x = \log_a^b$.

Teorema 4.7. *Dados números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$, sua Média Harmônica é sempre menor ou igual a Média Geométrica, ou seja,*

$$\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\right) \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Usando a Teorema 4.6, substituindo os números x_j por $\frac{1}{x_j}$, com $j = 1, 2, ..., n$, vale

$$\frac{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}}.$$

Desse modo, pode-se reescrever da seguinte forma:

$$\frac{\left(\dfrac{1}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}\right)}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{\dfrac{1}{x_1} \cdot \dfrac{1}{x_2} \cdots \dfrac{1}{x_n}}}.$$

Consequentemente,

$$\left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\right) \leq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Como queríamos demonstrar. □

Por fim, a desigualdade entre as médias Aritmética e Quadrática fica estabelecida através do resultado abaixo.

Teorema 4.8. *Dados números reais não negativos $x_1, x_2, ..., x_n$, sua Média Aritmética é sempre menor ou igual a Média Quadrática, ou seja,*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Demonstração. Seja $A \in \mathbb{R}$, a média aritmética dos números $x_1, x_2, \ ... \ , x_n$. Veja que,

$$(x_1 - A)^2 + (x_2 - A)^2 + \cdots + (x_n - A)^2 \geq 0.$$

Desenvolvendo a expressão acima temos,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 2A(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + nA^2 \geq 0.$$

Como $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA$, então

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - nA^2 \geq 0.$$

Consequentemente,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq nA^2.$$

Logo, a desigualdade acima pode ser escrita da forma

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

□

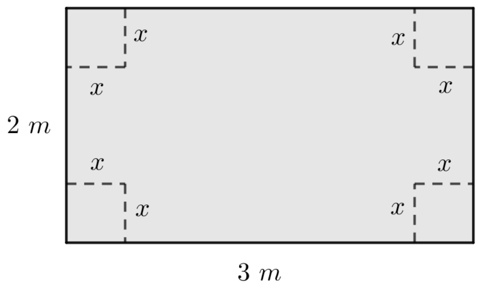
4.3 Problemas de Otimização

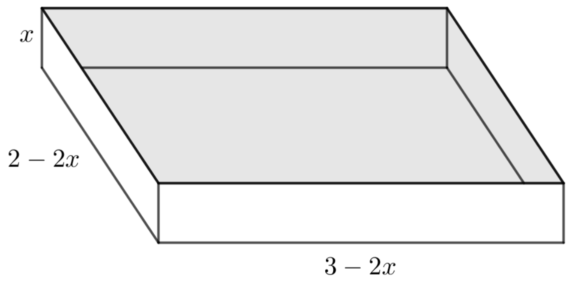
Na seção anterior foram apresentados os resultados que exploram as relações entre as médias Aritmética, Geométrica, Harmônica e Quadrática. Com o intuito de alcançar um dos objetivos principais dessa dissertação, este seção aborda diversas aplicações para as desigualdades das médias em problemas de otimização.

A primeira dessas aplicações é um clássico problema de maximizar o volume de uma caixa. Embora utilizando as ferramentas de derivação o problema tem resolução simples, abaixo é apresentada uma solução baseada na aplicação da desigualdade entre as médias Aritmética e Geométrica (ver Teorema 4.6) que pode ser trabalhada durante o ensino médio.

Problema 4.9. Dispomos de uma folha de cartolina de 2 por 3 metros e queremos construir com a mesma uma caixa aberta, cortando quadrados nos cantos, com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa?

Solução.





Vamos denotar por x o lado do quadrado que devemos recortar em cada canto da cartolina, observando que $0 < x < 1$. Temos então que o volume V da caixa é:

$$V = (2 - 2x)(3 - 2x)x.$$

Para resolver este problemas, usaremos a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (ver Teorema 4.6. Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a(2-2x)+b(3-2x)+cx$ seja constante. Daí,

$$\frac{a(2-2x)+b(3-2x)+cx}{3} \geq \sqrt[3]{abc(2-2x)(3-2x)x}$$

que é equivalente a

$$\frac{(-2a-2b+c)x+2a+3b}{3} \geq \sqrt[3]{abc(2-2x)(3-2x)x}$$

e como $-2a-2b+c=0$ então,

$$\frac{2a+3b}{3} \geq \sqrt[3]{abcV}.$$

Agora observe que para ter o volume máximo, é necessário que aconteça a igualdade

$$a(2-2x) = b(3-2x) = cx,$$

para algum $x \in \mathbb{R}$.

De $a(2-2x) = b(3-2x) = cx$, temos $a(2-2x) = cx$ que é o equivalente a

$$a = \frac{cx}{2-2x} \tag{10}$$

e $b(3-2x) = cx$ que é equivalente a

$$b = \frac{cx}{3-2x}. \tag{11}$$

Substituindo (10) e (11) na equação $-2a - 2b + c = 0$, temos

$$\frac{-2cx}{2-2x} + \frac{-2cx}{3-2x} + c = 0.$$

Multiplicando $\frac{1}{c}$ em ambos os membros, obtemos

$$\frac{-2x}{2-2x} + \frac{-2x}{3-2x} + 1 = 0,$$

e desenvolvendo a equação fracionária, teremos

$$\frac{6x^2 - 10x + 3}{(1-x)(3-2x)} = 0.$$

Então, $6x^2 - 10x + 3 = 0$. Logo, teremos duas soluções:

$$x = \frac{5-\sqrt{7}}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5+\sqrt{7}}{6}.$$

A solução $x = \frac{5+\sqrt{7}}{6}$ não convém, pois $\frac{5+\sqrt{7}}{6} > 1$. Logo, $x = \frac{5-\sqrt{7}}{6}$ é a única solução, pois $0 < \frac{5-\sqrt{7}}{6} < 1$ e calculando as outras dimensões da caixa, temos

$$2 - 2x = 2 - 2(\frac{5-\sqrt{7}}{6}) = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$$

e

$$3 - 2x = 3 - 2(\frac{5-\sqrt{7}}{6}) = \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

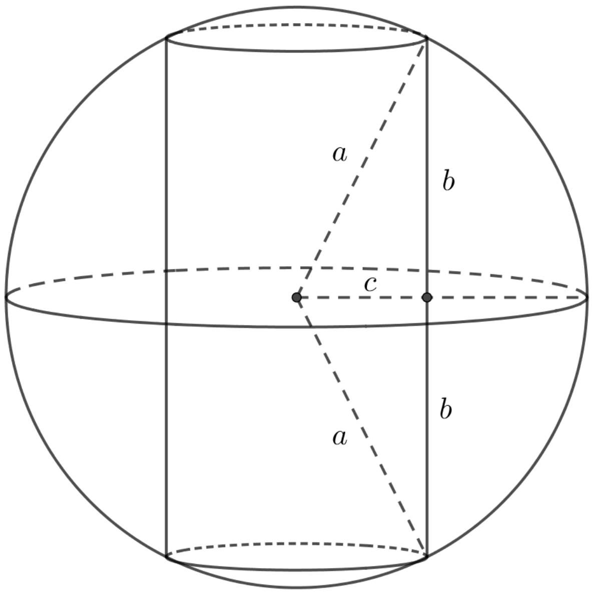
Portanto, a caixa terá dimensões $\frac{1+\sqrt{7}}{3}$, $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ e $\frac{5-\sqrt{7}}{6}$.

□

A seguir abordamos mais um problema de otimização como aplicação do Teorema 4.6, relacionando também uma outra grande área da matemática, a geometria.

Problema 4.10. Encontre as dimensões do cilindro reto de maior área lateral que pode ser inscrito numa esfera de raio $6m$.

Solução.



Vamos iniciar chamando o raio da esfera de a , a altura do cilindro de $2b$ e o raio do cilindro de c. Sabemos que a área lateral de um cilindro é:

$$A_l = 2\pi r h,$$

onde A_l é a área lateral, r é o raio do cilindro, e h é a medida da altura do cilindro. Fazendo as substituições na fórmula da área lateral de um cilindro, teremos

$$A_l = 2\pi(c)(2b) \Longleftrightarrow A_l = 4\pi bc.$$

Pelo teorema de Pitágoras e usando o fato de $a = 6$, temos

$$6^2 = b^2 + c^2 \Longleftrightarrow b^2 + c^2 = 36.$$

Com isso, temos duas equações, $A_l = 4\pi bc$ e $b^2 + c^2 = 36$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, com os termos b^2 e c^2, obtemos

$$\frac{b^2 + c^2}{2} \geq \sqrt{b^2c^2} \Longleftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} \geq bc.$$

Da equação $b^2 + c^2 = 36$, obtemos

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = \frac{36}{2} \Longleftrightarrow \frac{b^2 + c^2}{2} = 18.$$

E substituindo esse resultado na desigualdade das médias, obtemos $bc \leq 18$, onde agora podemos determinar a maior área lateral possível, multiplicando ambos os membros da inequação por 4π, obtendo

$$4\pi bc \leq 18(4\pi),$$

ou seja,

$$A_l \leq 72\pi.$$

Logo a maior área lateral possível é 72π e ocorre quando $b = c$, com isso temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} b^2 & + & c^2 & = & 36 \\ b^2 & = & c^2 \end{cases}$$

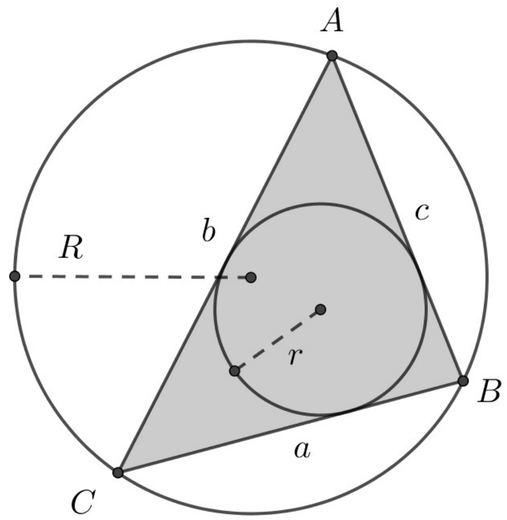
Resolvendo o sistema, encontramos $b = c = 3\sqrt{2}$, e por fim temos as dimensões do cilindro.

□

4.4 Problemas de Geometria

Neste momento será apresentado aplicações das Desigualdades da Médias (ver Teoremas 4.6, 4.7 e 4.8) inseridas na geometria. A primeira delas é uma conhecida desigualdade geométrica estabelecida pelo famoso matemático suíço Leonard Euler. Embora a prova a seguir não foi a original dada por Euler, e sim retirada de [4]. A prova original pode ser vista em [?].

Problema 4.11 (Desigualdade de Euler)**.** Sejam $R > 0$ e $r > 0$, respectivamente, os raios do circuncírculo[4] e do incírculo[5] de um triângulo qualquer ABC, cujos lados medem a, b e c. Então, vale a seguinte desigualdade $R > 2r$.



Solução. Sejam S a área do triângulo ABC e p o seu semiperímetro. Então, $abc = 4R \cdot S,\ S = pr$ e $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$. Note que

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc \tag{12}$$

pois e tomarmos $x = a+b-c,\ y = b+c-a$ e $z = c+a-b$, então teríamos que $2a = y+z,\ 2b = x+z$ e $2c = x+y$.

E pela desigualdade das médias $x+y \geq \sqrt{xy}, x+\ z \geq \sqrt{xz}$ e $z+y \geq \sqrt{zy}$, multiplicando membro a membro estas três desigualdades, obtemos que

$$(x+z)(y+z)(x+y) \geq 8xyz \Leftrightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

Por outro lado, por (12) tem-se ainda que

$$(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) \leq abc \Leftrightarrow 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc.$$

Daí

$$\frac{8S^2}{p} \leq 4R \cdot S \Leftrightarrow 2S \leq pR.$$

Como $S = pr$, concluímos que $R \geq 2r$.

$\square$

[4]Circuncirculo é a circunferência que passa por todos os vértices de um polígono.
[5]Incírculo é a circunferência tangente interiormente a todos os lados de um polígono.

O nome da desigualdade a seguir é devida ao matemático austríaco Roland Weitzenböck (1885-1955). Weitzenböck se destacou em seus trabalhos sobre a Teoria dos Invariantes, especialmente os Invariantes diferenciais.

Problema 4.12 (Desigualdade de Weitzenböck)**.** Sejam a, b e c as medidas dos lados de um triângulo ABC e S a medida de sua área. Então $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, o triângulo ABC for equilátero.

Solução. Pela Desigualdade Triangular, tem-se

$$\begin{cases} a & < & b + c \Rightarrow b + c - a > 0; \\ b & < & a + c \Rightarrow a + c - b > 0; \\ c & < & a + b \Rightarrow a + b - c > 0. \end{cases}$$

Usando a Desigualdade das Médias (ver Teorema 4.6), temos

$$\frac{(b + c - a) + (a + c - b) + (a + b - c)}{3} \geq \sqrt[3]{(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)}. \qquad (13)$$

Por outro lado, para quaisquer números reais positivos a, b e c, valem as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & \geq & 2ab; \\ b^2 + c^2 & \geq & 2bc; \\ c^2 + a^2 & \geq & 2ac. \end{cases}$$

Somando-as membro a membro chegamos em

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + ac + bc).$$

Reescrevendo a desigualdade acima, obtemos

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + ac + bc).$$

Consequentemente

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt{(a + b + c)^4}.$$

Logo, devemos ter

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{\frac{1}{9}(a + b + c)^4}.$$

Portanto, alcançamos a seguinte expressão

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3(a + b + c)\left(\frac{a + b + c}{3}\right)^3}. \qquad (14)$$

Substituindo (13) em (14), teremos

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geq \sqrt{3(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} \\ &= \sqrt{6p(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)}, \end{aligned}$$

onde $2p = a+b+c$ é o perímetro de ABC. Por fim, concluímos que

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &\geq \sqrt{3\cdot 16p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= 4\sqrt{3}\sqrt{p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= 4\sqrt{3}S. \end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $a=b=c$. e portanto, se ABC for equilátero.

□

O próximo problema a ser explorado nesta dissertação foi retirado da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) do ano de 2015. Este é uma aplicação da desigualdade entre as médias Aritmética e Quadrática.

Problema 4.13. (OBM - 2015. [13]) Prove que se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2+b^2 = k\cdot c^2$, então $k > \frac{1}{2}$.

Solução. A desigualdade entre as médias quadrática e aritmética (ver Teorema 4.8) garante que

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}.$$

Por hipótese $a^2+b^2 = k\cdot c^2$, dessa forma

$$\frac{k\cdot c^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Como a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, então $a+b > c$. Consequentemente,

$$\frac{k\cdot c^2}{2} \geq \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

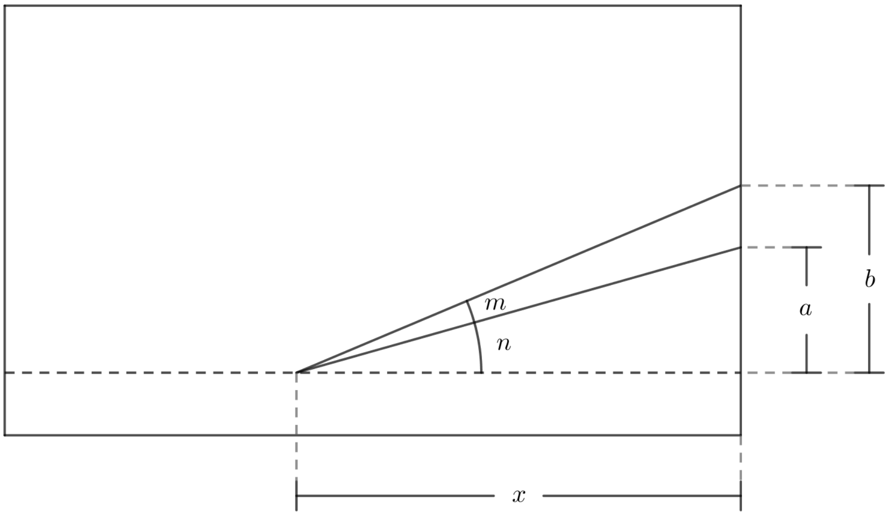
Com isso, concluímos que $k > \frac{1}{2}$.

□

A seguir tem-se uma aplicação que foi utilizada em uma avaliação da disciplina MA11 do PROFMAT em 2011.

Problema 4.14. (PROFMAT [12]: AV2-MA11-2011) Levando em conta que um ângulo é máximo num certo intervalo quando sua tangente é máxima, resolva o seguinte problema: Dentro de um campo de futebol, um jogador corre para a linha de fundo do time adversário ao longo de uma reta paralela à lateral do campo que cruza a linha de fundo fora do gol (ver figura abaixo). Os postes da meta distam a e b da reta percorrida por ele, com $a < b$. Mostre que o jogador vê a meta sob ângulo máximo quando sua distância x ao fundo do campo é igual a $\sqrt{ab}$.

Solução. Em cada instante, o jogador vê a meta sob o ângulo $m = (m+n) - n$, onde



$m+n$ e n são os ângulos entre sua trajetória e as retas que o ligam aos postes da meta, sendo que $tg(m+n) = \dfrac{b}{x}$ e $tg(n) = \dfrac{a}{x}$. Desse modo,

$$tg(m) = \frac{tg(m+n) - tg(n)}{1 + tg(m+n) \cdot tg(n)} = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{\frac{b-a}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{b \cdot a}{x^2}} = \frac{b-a}{x + \frac{b \cdot a}{x}}.$$

Note que $b-a$ é constante, daí segue que $tg(m)$ é máxima quando $x + \dfrac{b \cdot a}{x}$ for mínimo. O problema agora se resume em encontrar o valor de x que minimiza a expressão $x + \dfrac{b \cdot a}{x}$.

Pela Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica (ver Teorema 4.6), temos que:

$$\frac{x + \dfrac{b \cdot a}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{b \cdot a}{x}},$$

ou seja

$$x + \frac{b \cdot a}{x} \geq 2\sqrt{b \cdot a}.$$

Neste caso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = \dfrac{b \cdot a}{x}$. Portanto, quando $x = \sqrt{b \cdot a}$ o jogador vê a meta sob ângulo máximo.

□

4.5 Problemas de Aritmética

Finalizando esse estudo sobre as desigualdade entre as médias (Teoremas 4.6, 4.7 e 4.8), aborda-se problemas olímpicos de aritmética como aplicações.

Problema 4.15. (OBM - 2014. [13]) Prove as desigualdades:

(a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, com a, b e c positivos;

(b) $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n$, com $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$ e $a_i \geq 0$.

Solução. Primeiro vamos provar o item **(a)**. Veja que pela Desigualdade das Médias, temos:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}.$$

E multiplicando,

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Consequentemente,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Agora, segue a demonstração do item **(b)**. Usando ainda a Desigualdade das Médias,

$$1+a_1 \geq 2\sqrt{a_1}$$

$$1+a_2 \geq 2\sqrt{a_2}$$

$$\vdots$$

$$1+a_n \geq 2\sqrt{a_n}$$

E multiplicando,

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \geq 2^n\sqrt{a_1a_2...a_n} = 2^n.$$

□

Problema 4.16. (OBM - 2015. [13]) Prove que $(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$, para quaisquer números reais positivos a, b e c.

Solução. Note que

$$(a+b)(a+c) = a^2 + ac + ab + bc = a(a+b+c) + bc.$$

Por outro lado, usando a Desigualdade das Médias,

$$a(a+b+c) + bc \geq 2\sqrt{a(a+b+c).bc} = 2\sqrt{a^2bc + ab^2c + abc^2} = 2\sqrt{abc(a+b+c)},$$

Portanto,

$$(a+b)(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

$\square$

A próxima aplicação foi retirada da Olimpíada Internacional de Matemática na Argentina em 2012.

Problema 4.17. (IMO 2012 - Argentina. [16]) Seja $n \geq 3$ um inteiro e sejam $a_2,\ a_3, ...,\ a_n$ números reais positivos tais que $a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = 1$. Prove que

$$(1+a_2)^2 \cdot (1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n.$$

Solução. Para o primeiro fator na multiplicação da desigualdade, considere a lista $\{1, a_2\}$. Como ambos números são positivos, podemos aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (ver Teorema 4.6), isto é,

$$\frac{1+a_2}{2} \geq \sqrt{1 \cdot a_2}.$$

Elevando ao quadrado os dois lados da desigualdade, temos

$$(1+a_2)^2 \geq 2^2 \cdot a_2.$$

A igualdade ocorre quando $a_2 = 1$.

Para o segundo fator na multiplicação na desigualdade considere a lista $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, a_3\}$. Como os três números são positivos, então podemos aplicar Teorema 4.6 novamente. Assim

$$\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3}{3} = \frac{1+a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot a_3} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3}.$$

Elevando ao cubo a desigualdade anterior, temos

$$(1+a_3)^3 \geq 3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a_3.$$

A igualdade ocorre quando $a_3 = \frac{1}{2}$.

Generalizando para o k-ésimo termo, com $2 \leq k \leq n$, considere a lista com $k-1$ números iguais a $\frac{1}{k-1}$ e a_k. Ou seja,

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, ..., \frac{1}{k-1}}_{\text{k-1 numeros}}, a_k \right\}.$$

Por aplicar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica (ver Teorema 4.6), obtemos

$$\frac{(k-1)\cdot\frac{1}{k-1}+a_k}{k}\geq\sqrt[k]{\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k}.$$

Elevando a potência k-ésima os dois lados da desigualdade anterior, temos

$$(1+a_k)^k\geq k^k\cdot\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k.$$

A igualdade acontece quando $a_k=\frac{1}{k-1}$.

Com k variando de 2 até n e multiplicando os termos da desigualdade anterior, concluímos

$$\prod_{2}^{n}(1+a_k)^k\geq\prod_{2}^{n}k^k\cdot\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k.$$

Note que, parte do lado direito da desigualdade anterior é um produto telescópico, onde todos os termos se cancelam, exceto um. Logo,

$$\prod_{2}^{n}k^k\cdot\left(\frac{1}{k-1}\right)^{(k-1)}\cdot a_k=2^2\cdot 3^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdots\ (n-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n-2}\right)^{n-2}\cdot n^n\cdot\left(\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=n^n.$$

Portanto,

$$\prod_{2}^{n}(1+a_k)^k\geq n^n\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n.$$

Usando a hipótese no enunciado do problema $a_2\cdot a_3\cdots a_n=1$, podemos reescrever a desigualdade acima da forma

$$\prod_{2}^{n}(1+a_k)^k\geq n^n.$$

Para que aconteça a igualdade devemos ter $a_k=\frac{1}{k-1}$, com $2\leq k\leq n$. Contudo $n\geq 3$ e $a_2\cdot a_3\cdots a_n=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n-1}\neq 1$. Isto é, a igualdade nunca ocorre, provando que a desigualdade é estrita.

$\square$

5 Considerações Finais

Neste trabalho, foi abordado um estudo sobre desigualdades matemáticas e problemas de olimpíadas. Ao longo do trabalho, seguindo as tendências nas práticas pedagógicas mais modernas em Matemática, foi procurado um meio de dar uma significação concreta para os problemas matemáticos envolvendo desigualdades. Foi apresentado como as desigualdades podem ser usadas pelo aluno que quer entender as aplicações e não quer ser iludido. Porém, uma das características mais peculiares da Matemática é a sua idealização, por exemplo, existem equações que jamais conseguimos, ainda, enxergá-la senão por meio de breves ideias do que sejam.

Defendemos que, junto com o maior número possível de aplicações das desigualdades matemáticas interligadas as situações cotidianas dos alunos, seja ensinada a Matemática abstrata e as Olimpíadas de Matemática se mostram como um meio fantástico de fazer isso. Nas Olimpíadas e nos estudos preparatórios são feitos problemas que a princípio sejam úteis somente à própria Matemática, no entanto, o professor deve estimular o aluno a compreender que mesmo sem uma aplicação prática, esse problema de alguma forma contribui para a construção do conhecimento matemático, desenvolve a capacidade de argumentação e colabora para que sejam entendidas e feitas demonstrações com o rigor lógico matemático a respeito de algo que se afirma. E ainda, que traga a dúvida e a curiosidade a alguns deles.

Alguns dos problemas que propusemos e resolvemos são de fato abstratos para a realidade do ensino praticado na educação básica. Os livros didáticos abordam de maneira superficial esses temas e o material a que recorremos é de preparação para Olimpíadas de Matemática. Assim, apenas os alunos mais afortunados que entram em contato com esse tipo de ensino têm a oportunidade de entendê-los.

Ficaremos felizes se o leitor encontrar alguma aplicação mais trivial para eles ou se conseguir despertar nos alunos o encanto pela Matemática abstrata ao exibir estes problemas. Além, é claro, que o próprio aluno após compreendê-los plenamente poderá aplicar o conhecimento obtido por meio desses problemas abstratos em situações diversas, conforme orientação dos próprios parâmetros curriculares nacionais.

Destacamos ao final que através do estudo sobre Desigualdades Matemáticas e as Olimpíadas pudemos perceber que existem várias formas de solucioná-las ou demonstrá-las. No entanto foi priorizado as formas mais básicas, devido ao público alvo que queremos atingir versando sobre todos níveis de conhecimento. Além disso, exibimos as resoluções de diferentes situações problema que vão desde as mais contextualizadas até os de competições matemáticas, ambas bastante significativas para os alunos interessados em matemática. É de conhecimento amplo que a resolução de problemas é necessária no ensino de Matemática, fazendo com que o aluno enfrente novos desafios e otimize sua capacidade de interpretação e raciocínio se tornando mais crítico e investigativo.

Espera-se que o presente estudo sirva de embasamento para futuros trabalhos e que possamos explorar estas desigualdades aplicando recursos mais avançados e mostrando que existem outros caminhos e outras áreas onde as Desigualdades Matemáticas são muito importantes, ampliando nosso público alvo, visto que diversas áreas usam ferramentas básicas de cálculo diferencial e integral e álgebra para aplicações práticas.

Referências

[1] BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia** - Volume 1, 2 e 3. - 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

[2] BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio** - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação.

[3] BRASIL. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação.

[4] BOTTEMA, O., et al. **Geometric Inequalities**. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[5] CVETKOVSKI, Z. **Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems.** Skopje, Macedonia: Springer-Verlag, 2012.

[6] DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações** - Volume 1,2 e 3. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

[7] DOLCE, O.; NICOLAU, J. **Fundamentos de matemática elementar: geometria plana** - Volume 9. . 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[8] IEZZI, G. **Matemática: ciência e aplicações** - Volume 1,2 e 3. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

[9] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções** - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

[10] IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. **Otimização** vol 1. 3. ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2014.

[11] Lima, E.L. **Curso de Análise** volume 1. - 12.ed. - IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[12] **Mestrado Proissional em Rede** - PROFMAT. Disponível em <www.profmat-sbm.org.br/>. Acesso em 23 de março de 2020.

[13] **Olimpíada Brasileira de Matemática**. Disponível em <https://www.obm.org.br/>. Acesso em 19/04/2020.

[14] **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**. Disponível em <http://www.obmep.org.br/index.htm>. Acesso em 19/04/2020.

[15] ROCHA, N. F. **Mathematical Theory of Incompressible Flows: Local Existence, Uniqueness, Blow-up and Asymptotic Behavior of Solutions in Sobolev-Gevrey and Lei-Lin Spaces.** Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2019.

[16] **Site oficial das Olimpíadas Internacionais de Matemática**, http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em 25/07/2019.

[17] SOUZA, J. R. de. **Contato Matemática** - Volume 1, 2 e 3. - . 1. ed. São Paulo: FTD, 2016.