UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JOSÉ DA SILVA BACELAR JÚNIOR

USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

FORTALEZA
2013

JOSÉ DA SILVA BACELAR JÚNIOR

USO DO GEOGEBRA NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA
2013

PÁGINA DE ASSINATURAS

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus Pais, Bacelar e Graça, pela Herança do Saber.

Às minhas Irmãs, Geyza, Geyslene e Geyla pela nossa Amizade, União e Parceria.

À minha Mulher, Regina Celi, pela Cumplicidade, Compreensão e Amor que me fortalece para vencer todos os obstáculos que a Vida me proporciona.

RESUMO

Este estudo destina-se a utilizar as ferramentas do software Geogebra, na versão 4.2, para desenvolvimento do conteúdo de trigonometria como: Ciclo Trigonométrico, Funções Trigonométricas e das Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo, Lei dos Senos, Lei dos Cossenos, Área do Triângulo e Relação Fundamental entre que são abordados no ensino médio e servirão de apoio aos professores e/ou alunos em seus aprofundamentos e/ou conclusões no assunto.

Palavras chave: Trigonometria, Geogebra

ABSTRACT

This study is intended to use the software tools Geogebra, version 4.2, for developing the content of trigonometry as: Cycle Trigonometric, Trig Functions and Trig Reasons Triangle Rectangle, Law of Sines, Law of cosines, and the Triangle Area Fundamental relationship between that are covered in high school and will provide support to teachers and / or Students in their insights and / or conclusions on the subject.

Keywords: trigonometry, GeoGebra

S U M Á R I O

1. INTRODUÇÃO

Tendo em vista as dificuldades enfrentadas pelos professores de matemática com relação ao processo de ensino aprendizagem dos nossos educandos, e sabendo ainda que muitos destes professores não usam as ferramentas da informática de forma adequada, apresento este material como uma opção para aprimorar seu uso e disponibilizar com mais eficiência os recursos dos professores de matemática do ensino médio em suas aulas de trigonometria. Com a utilização das ferramentas de um software que está em evidência no âmbito da Educação Matemática: o Geogebra, na versão 4.2, foram abordados a construção do Ciclo Trigonométrico, das Funções Trigonométricas, das Razões Trigonométricas num triângulo retângulo, a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos e a fórmula da Área do Triângulo através da trigonometria dentre outros. Além disso, foram inseridas algumas atividades para serem realizadas, com o objetivo de facilitar a aprendizagem dos alunos na disciplina de matemática.

2. A TRIGONOMETRIA E SUAS DEFINIÇÕES

Trigonometria {trigo=triangular, meteria=medida} teve origem no estudo das relações entre as medidas dos lados e em particular no triângulo e retângulos. As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia-a-dia, até mais complexas na ciência e na alta tecnologia) como pelo papel central que desempenham na análise.

A trigonometria teve seu início na antiguidade remota, quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares ao redor da terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido. Se "c" é o comprimento da corda, "α" é o ângulo e "r" o raio da circunferência então "$c = 2r\, sen(\alpha/2)$". Esta é a origem da palavra *seno*, que provém de uma tradução equivocada do árabe para o latim, quando se confundiu o termo *jiba* (corda) com *jaib* (dobra, cavidade, *sinus* em latim). [Cfr. "Meu professor de Matemática", pág. 187.]

O objetivo da trigonometria era o tradicional problema da resolução de triângulos, que consiste em determinar os seis elementos dessa figura (três lados e três ângulos) quando se conhecem três deles, sendo pelo menos um deles um lado.

Posteriormente, com a criação do Cálculo Infinitesimal, e do seu prolongamento que é a Análise Matemática, surgiu a necessidade de atribuir às noções de seno, cosseno e suas associadas tangente, cotangente, secante e cossecante, o status de função real de uma variável real. Assim, por exemplo, ao lado de $cos\ \hat{A}$, o cosseno do ângulo Â, tem-se também $cos\ x$, o cosseno do número real x, isto é, a função $cos: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$. Analogamente, têm-se as funções sen, tg, cotg, sec e cossec, completando as funções trigonométricas.

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos, etc.

A importância das funções trigonométricas foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é uma soma (finita ou infinita) de funções do tipo: $cos\ (n.x) + b.sen(\ n.x)$. Para que se tenha uma ideia da relevância deste fato, que deu origem a chamada Análise de Fourier, basta dizer que, segundo o banco de dados da revista *"Mathematical Reviems"*, o nome mais citado nos títulos dos trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é Fourier.

3. APRESENTAÇÃO DO SOFTWARE GEOGEBRA

3.1 ORIGEM DO GEOGEBRA

O GeoGebra é um software gratuito e de acesso livre, de modo que pode ser copiado e distribuído sem fins lucrativos. Tal software foi desenvolvido com o intuito de ser uma ferramenta educacional que auxilia, de forma dinâmica, no ensino da Matemática através de funcionalidades que envolvem o uso de geometria, álgebra, cálculo, tabelas, estatística, dentre outras. Sua criação se deve a Markus Hohenwarter, da Universidade de Salzburg, que iniciou o projeto no ano de 2001.

3.2 INSTALAÇÃO DO SOFTWARE

Para baixar e instalar gratuitamente a última versão do Software GeoGebra no idioma português, basta ir ao sítio eletrônico http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/installers e proceder aos comandos indicados na página, após selecionar o sistema operacional em uso no computador que receberá o software, conforme a figura abaixo, que representa a interface para instalação do programa.

Figura 1: Página para download

3.3 INTERFACE DO PROGRAMA

Após a instalação do software, faz-se necessária a análise da janela inicial do GeoGebra, que é composta por uma barra de menus, barra de ferramentas, janela de visualização, janela de álgebra, campo para entrada de fórmulas, conforme se visualiza na figura a seguir.

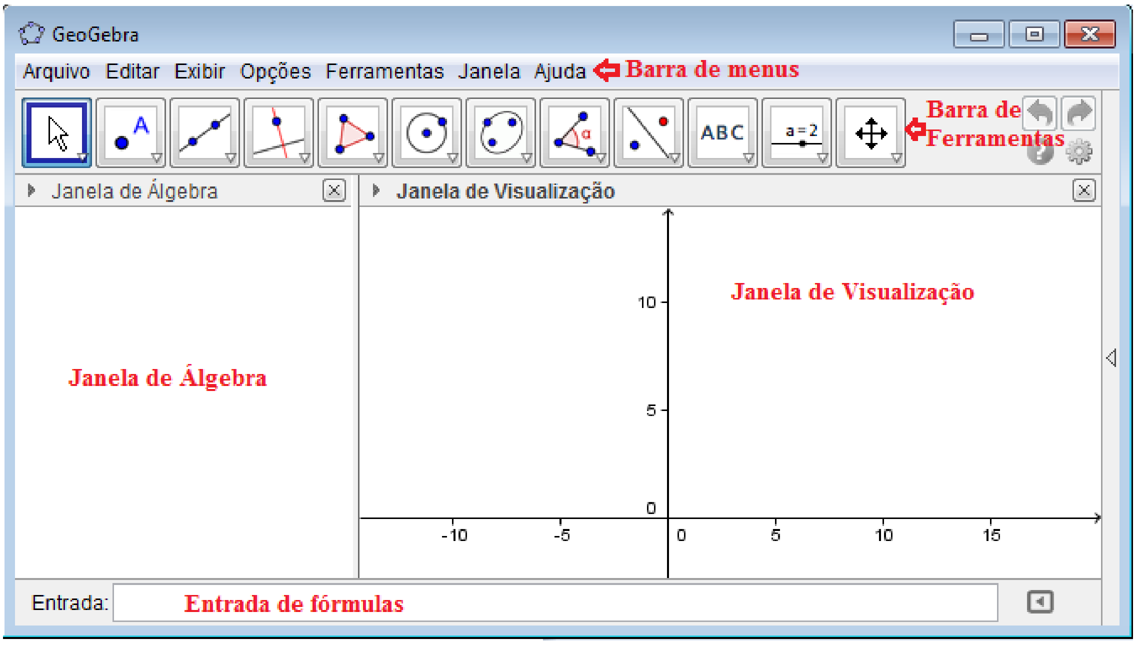


Figura 2: Interface do GeoGebra

Importante se faz a análise de cada um desses componentes, bem como de suas possíveis utilizações, desse modo, os subtópicos seguintes serão dedicados ao estudo dos ícones e suas funcionalidades.

3.3.1 Caixa de Ferramentas do GeoGebra

Na caixa de ferramentas estão localizados os principais ícones para a utilização das funcionalidades do software GeoGebra. Abaixo, para acessá-los, basta clicar em cada um dos ícones e selecionar a opção desejada. Os ícones serão apresentados um a um, assim como suas funções.

3.3.1.1 Ferramentas de seleção

Este ícone apresenta três opções de ferramentas: “Mover”, “Rotação em Torno de um Ponto” e “Gravar para Planilha de Cálculos”, para expandir as opções, basta clicar no canto inferior direito do botão, conforme demonstra a figura abaixo:

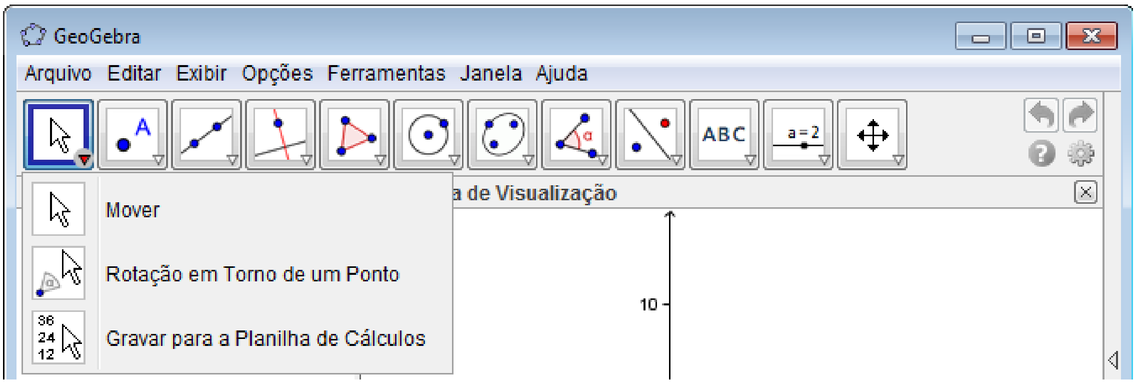


Figura 3: Ferramentas de seleção

Mover: Permite arrastar ou selecionar um ou mais objetos.

Rotação em torno de um ponto: Permite selecionar primeiro o centro de rotação e, depois, arrastar o objeto.

Gravar para planilha de cálculos: Permite selecionar primeiro o objeto que será rastreado e, depois, alterar a construção.

3.3.1.2 Ferramentas de Ponto

A ferramenta ponto apresenta seis possibilidades de funcionalidade: “Novo Ponto”, “Ponto em Objeto”, “Vincular/Desvincular Ponto”, “Inserção de Dois Objetos”, “Ponto Médio ou Centro” e “Número Complexo”, que podem ser selecionadas após clicar no canto inferior direito do ícone, conforme se visualiza na figura abaixo

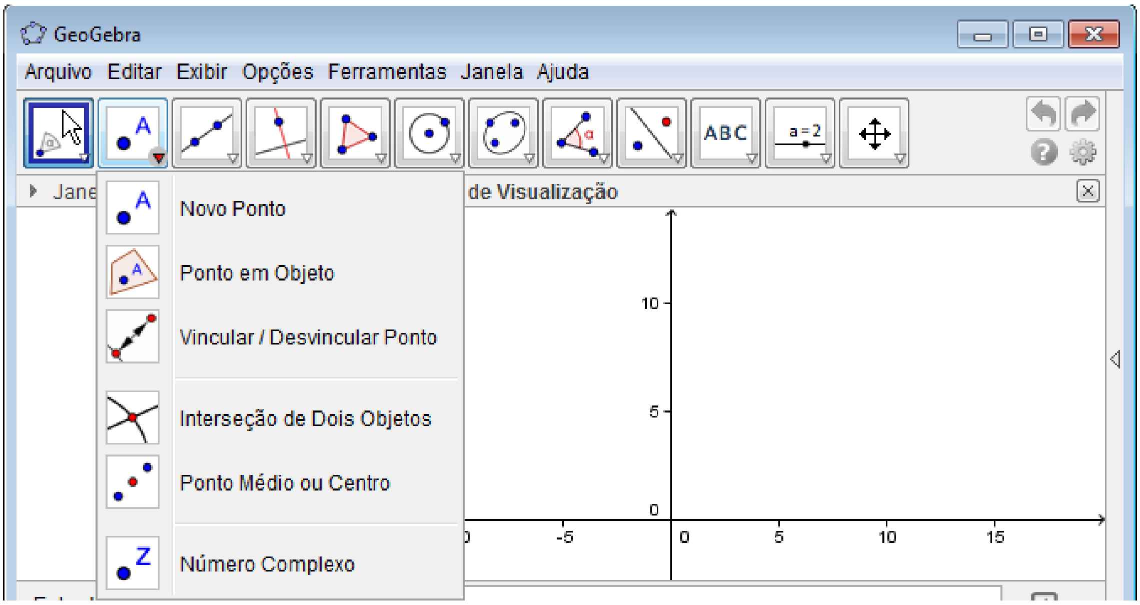


Figura 4: Ferramentas de Ponto

Novo ponto: Permite inserir pontos através do clique na janela de visualização ou sobre um objeto.

Ponto em Objeto: Permite inserir pontos através do clique no interior de um objeto ou em sua fronteira.

Vincular / Desvincular ponto: Para vincular os itens, clique em um ponto e em um objeto.

Interseção de dois objetos: Selecione dois objetos ou clique diretamente na interseção.

Ponto médio ou centro: Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica.

Número Complexo: Clique na janela de visualização para criar um número complexo.

3.3.1.3 Ferramentas de Reta

A ferramenta de reta apresenta ao usuário sete alternativas: “Reta definida por Dois Pontos”, “Segmento definido por Dois Pontos”, “Segmento com Comprimento

Fixo", "Semirreta Definida por Dois Pontos", "Caminho Poligonal", "Vetor Definido por Dois Pontos" e "Vetor a Partir de um Ponto", de acordo com a seguinte figura:

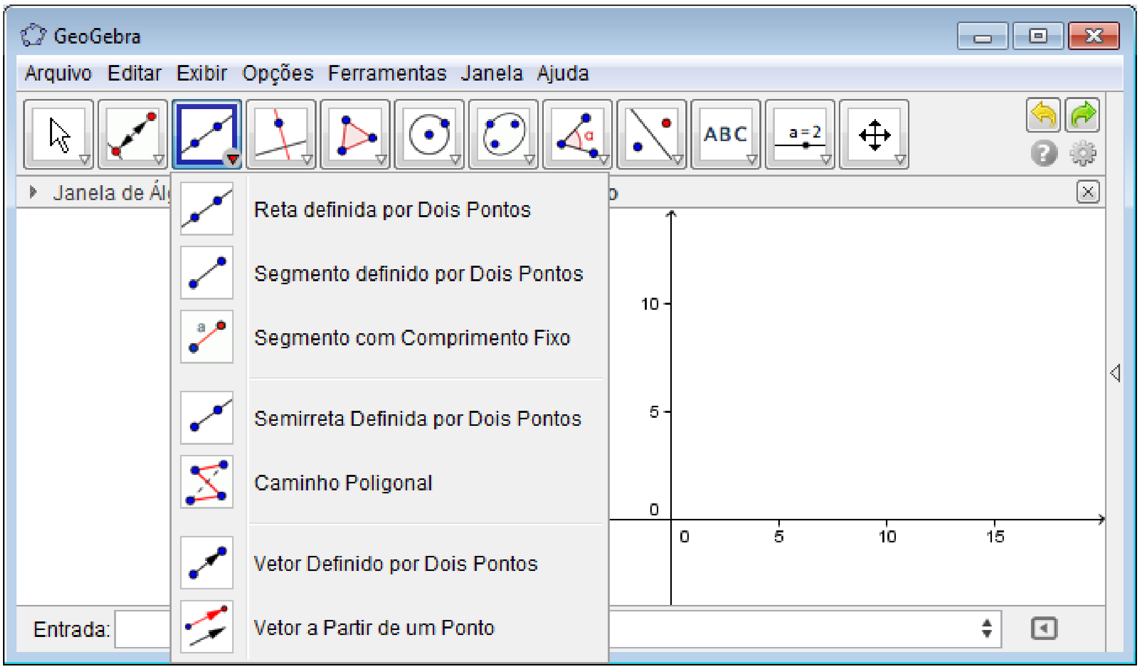


Figura 5: Ferramentas de Reta

Reta definida por dois pontos: Selecione dois pontos.

Segmento definido por dois pontos: Selecione dois pontos.

Segmento com comprimento fixo: Selecione primeiro um ponto e, depois, digite o comprimento do segmento.

Semirreta definida por dois pontos: Selecione primeiro a origem e, depois, um outro ponto.

Caminho poligonal: Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.

Vetor definido por dois pontos: Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade.

Vetor a partir de um ponto: Selecione primeiro o ponto de origem e, depois, um vetor.

3.3.1.4 Ferramentas de Retas Específicas

A ferramenta de retas específicas apresenta oito ramificações: “Reta Perpendicular”, “Reta Paralela”, “Mediatriz”, “Bissetriz”, “Reta Tangente”, “Reta Polar ou Diametral”, “Reta de Regressão Linear” e “Lugar Geométrico”, representadas na figura abaixo:

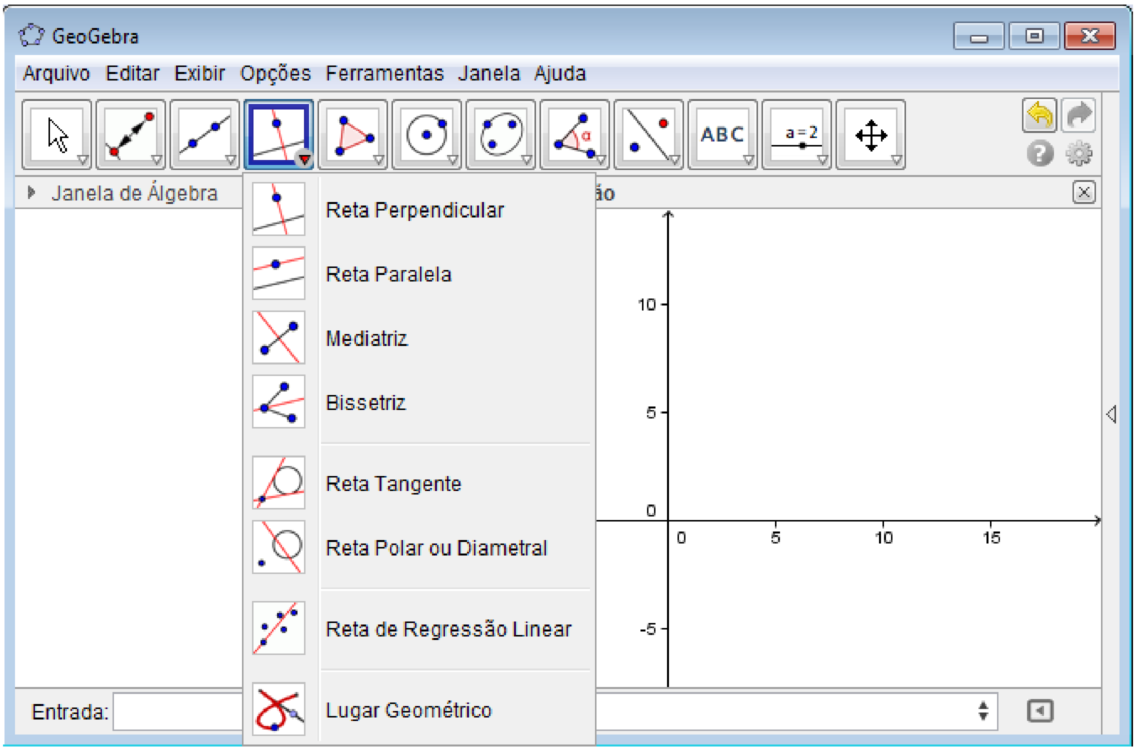


Figura 6: Ferramentas de Retas Específica

Reta perpendicular: Selecione primeiro o ponto, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor).

Reta paralela: Selecione primeiro o ponto, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor).

Mediatriz: Selecione dois pontos ou um segmento.

Bissetriz: Selecione três pontos ou duas retas.

Reta tangente: Selecione primeiro um ponto e, depois, um círculo, uma cônica ou uma função.

Reta polar ou diametral: Selecione primeiro um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma cônica.

Reta ou regressão linear: Selecione pontos usando o retângulo de seleção ou selecione uma lista de pontos.

Lugar geométrico: Selecione o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante.

3.3.1.5 Ferramentas de Polígonos

A opção ferramenta de polígonos permite o uso de quatro ícones: "Polígonos", "Polígono Regular", "Polígono rígido" e "Polígono semideformável", conforme demonstrado na figura abaixo colacionada:

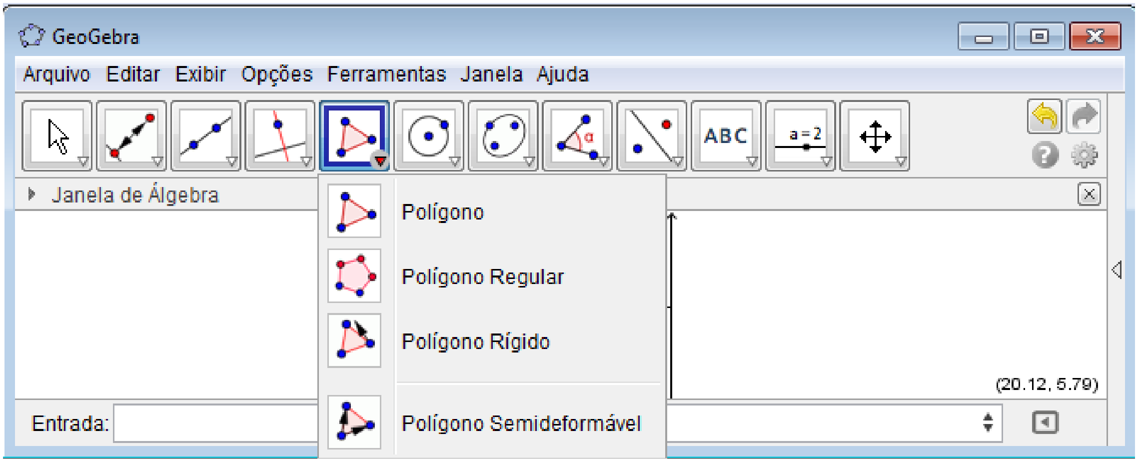


Figura 7: Ferramentas de polígonos

Polígono: Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vétice inicial.

Polígono regular: Selecione primeiro dois pontos e, depois, digite o número de vétices.

Polígono rígido: Selecione todos os vértices e, então clique no primeiro vértice novamente (ou apenas clique sobre um polígono para fazer uma cópia rigida).

Polígono semideformável: Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vétice inicial.

3.3.1.6 Ferramentas de Curvas

A ferramenta de curvas permite a seleção de sete funcionalidades: “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”, “Círculo dados Centro e Raio”, “Compasso”, “Círculo definido por Três Pontos”, “Semicírculo Definido por Três Pontos”, “Arco Circular dados Centro e Dois Pontos”, “Arco Circular definido por Três Pontos”, “Setor Circular dados Centro e Dois Pontos” e “Setor Circular Definido por Três Pontos”, conforme se vê adiante:

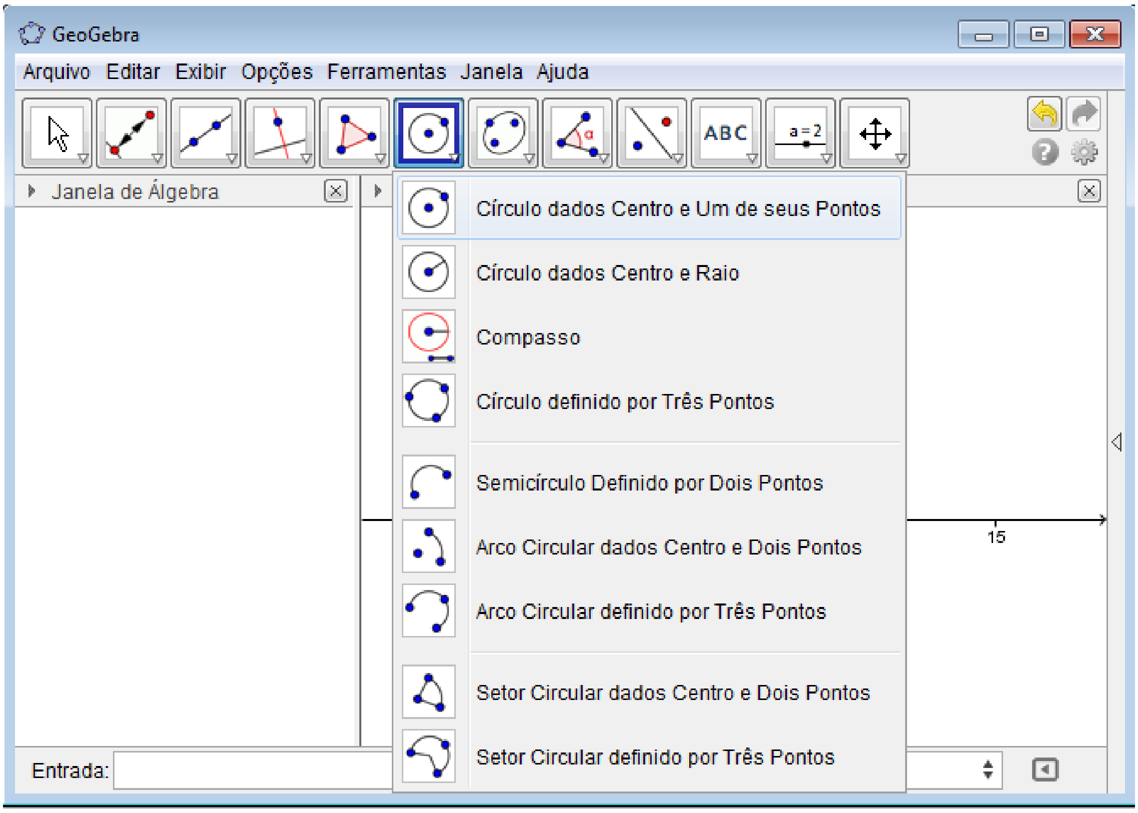


Figura 8: Ferramentas de Curvas

Circulo dados o centro e um de seus pontos: Selecione o centro e, depois, um ponto do círculo.

Circulo dados o centro e o raio: Selecione o centro e, depois, digite a medida do raio.

Compasso: Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio e, depois, o centro.

Circulo definido por três pontos: Selecione três pontos do círculo.

Semicírculo definido por dois pontos: Selecione dois pontos.

Arco circular dados o centro e dois pontos: Selecione o centro e, depois, dois pontos.

Arco circular definido por três pontos: Selecione três pontos.

Setor circular dados o centro e dois pontos: Selecione o centro e, depois, dois pontos.

Setor circular definido por três pontos: Selecione três pontos.

3.3.1.7 Ferramentas de Cônicas

A funcionalidade de cônicas apresenta quatro opções: “Elipse”, “Hipérbole”, “Parábola” e “Cônica definida por Cinco Pontos”, de acordo com a figura baixo:

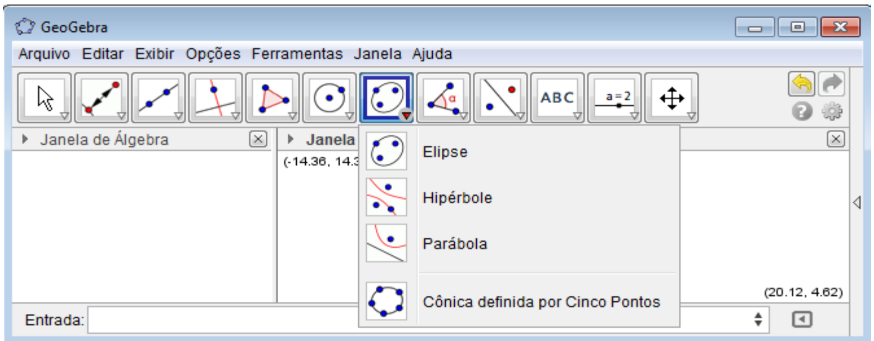


Figura 9: Ferramentas de Cônicas

Elipse: Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse.

Hipérbole: Selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole.

Parábola: Selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz.

Cônica definida por cinco pontos: Selecione cinco pontos da cônica.

3.3.1.8 Ferramentas de Medidas

As ferramentas de medidas são divididas em seis opções de ícones: “Ângulo”, “Ângulo com Amplitude Fixa”, “Distância, Comprimento ou Perímetro”, “Área”, “Inclinação e “Criar Lista”, de acordo com a seguinte figura:

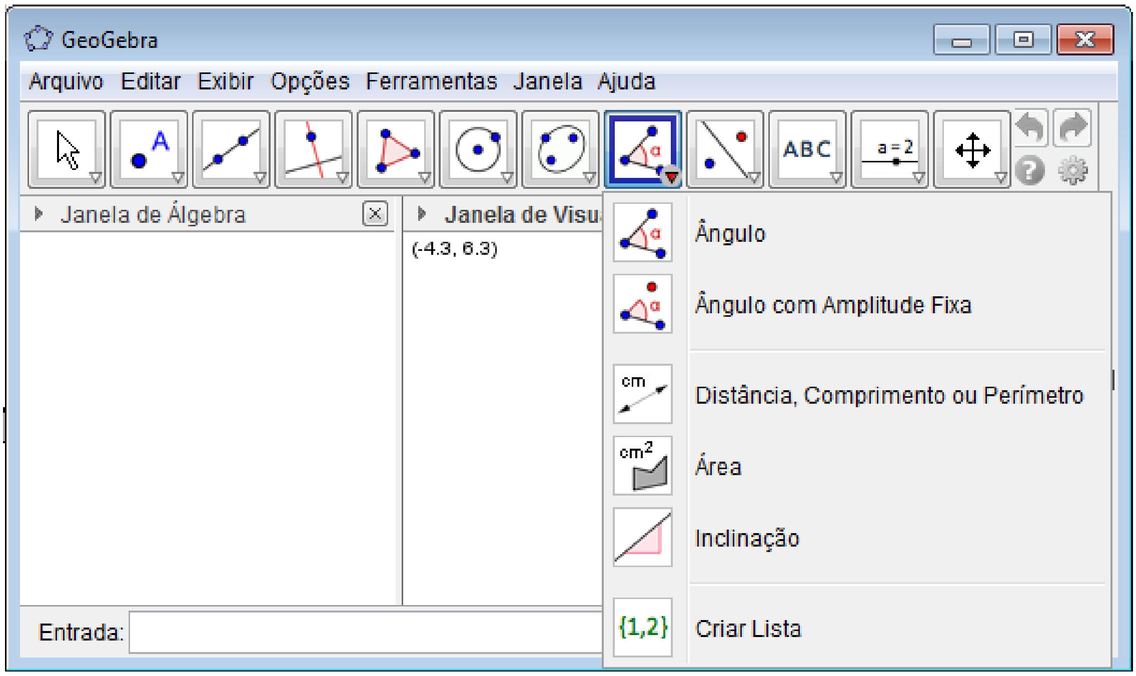


Figura 10: Ferramentas de Medidas

Ângulo: Selecione três pontos ou duas retas .

Ângulo com amplitude fixa: Selecione um ponto, um vétice e uma amplitude para o ângulo.

Distância, comprimento ou perímetro: Selecione dois pontos, um segmento, um polígono ou círculo.

Área: Selecione um polígono, um círculo ou uma elipse.

Inclinação: Selecione uma reta (ou semirreta ou um segmento).

Criar listar: Arraste e marque um retângulo em torno dos objetos.

3.3.1.9 Ferramentas de Translação

A ferramenta de translação apresenta seis possibilidades de utilização: “Reflexão em Relação a um Reta”, “Reflexão em Relação a um Ponto”, “Reflexão em Relação a um Círculo (Inversão)”, “Rotação em Torno de um Ponto por um Ângulo”, “Translação por um Vetor” e “Homotetia dados Centro e Razão”, de acordo com a figura a seguir:

Figura 11: Ferramentas de Translação

Reflexão em relação a uma reta: Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão.

Reflexão com relação a um ponto: Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro da reflexão.

Reflexão em relação a um circulo (inversão): Selecione primeiro o objeto e, depois, o círculo.

Rotação em torno de um ponto por um ângulo: Selecione primeiro o objeto, depois o centro e, então, o ângulo de rotação.

Translação por um vetor: Selecione primeiro o objeto a ser transladado e, depois, um vetor.

Homotetia dados centro e razão: Selecione o objeto, depois o centro e, a razão da homotetia.

3.3.1.10 Ferramentas Extras

A ferramenta de extra apresenta, conforme figura abaixo, sete opções de ícones variados: "Inserir Texto", "Inserir Imagem", "Caneta", "Função à Mão Livre", "Relação entre Dois Objetos", "Calculadora de Probabilidades" e "Inspetor de Funções".

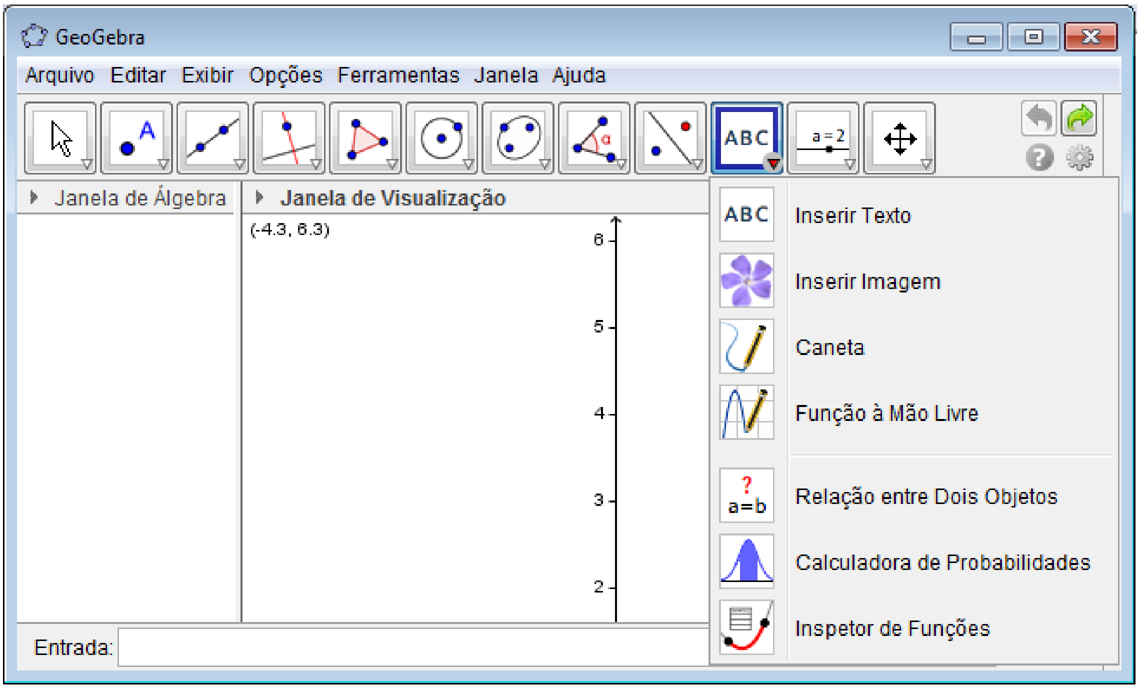


Figura 12: Ferramentas Extras

Inserir texto: Clique na área de trabalho ou em um ponto para criar um texto.

Inserir imagem: Clique na janela de visualização ou em ponto para ajustar o canto esquerdo inferior da imagem.

Caneta: Escreva na janela de visualização. Mude a cor usando a barra de estilo.

Função à mão livre: Desenha uma função ou um objeto geométrico arrastando-se o mouse.

Relação entre dois objetos: Selecione dois objetos.

Calculadora de probabilidades: Cálculo de probabilidades.

Inspetor de funções: Selecione uma função.

3.3.1.11 Ferramentas de Visualização

A opção de visualização apresenta quatro ferramentas, como se vê a seguir: “Controle Deslizante”, “Caica para Exibir/Esconder Objetos”, “Inserir Botão” e “Inserir Campo de Entrada”.

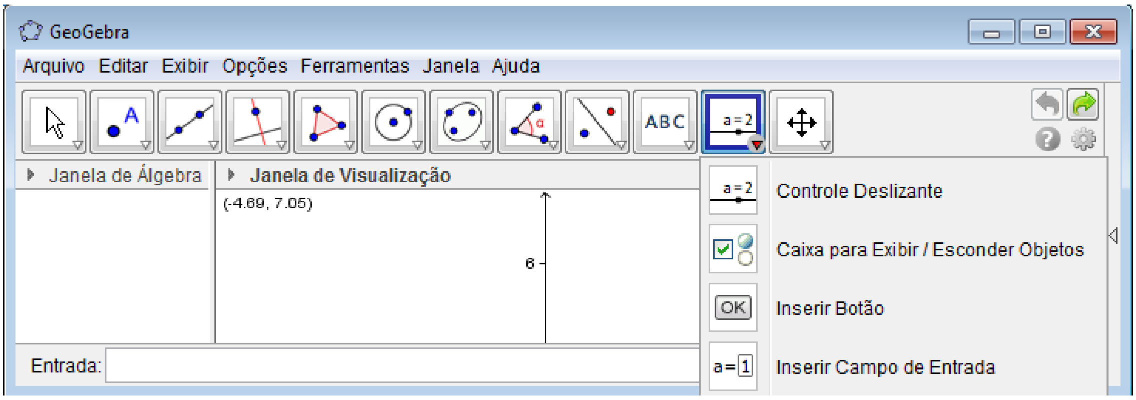


Figura 13: Ferramentas de Visualização

Controle deslizante: Clique na janela de visualização para especificar a posição do controle deslizante.

Caixa para exibir / Esconder objetos: Clique na área de trabalho para criar uma caixa.

Inserir botão: Clique na janela de visualização para inserir um botão.

Inserir campo de entrada: Clique na janela de visualização para inserir um campo de texto.

3.3.1.12 Ferramentas de Exibição

A opção ferramentas de exibição apresenta sete ícones de funcionalidades, conforme a figura seguinte. São elas: “Mover Janela de Visualização”, “Ampliar”, “Reduzir”, “Exibir/Esconder Objeto”, “Exibir/Esconder Rótulo”, “Copiar Estilo Visual” e “Apagar Objeto”.

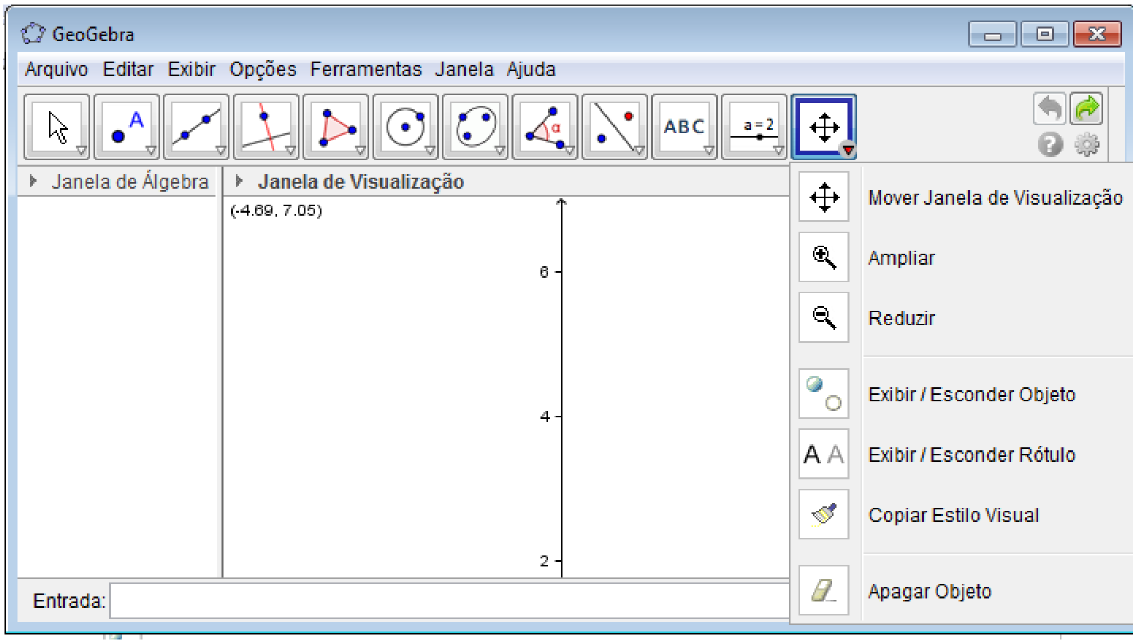


Figura 14: Ferramentas de Exibição

Mover janela de visualização: Arraste a janela de visualização ou um eixo (shift +arrastar).

Ampliar: Clique na área de trabalho para ampliá-la (ou movimente a roda do mouse)

Reduzir: Clique na área de trabalho para reduzí-la (ou movimente a roda do mouse)

Exibir / Esconder objetos: Selecione os objetos e, em seguida, ative uma ou outra ferramenta.

Exibir / Esconder rótulos: Selecione o objeto para exibir / esconder o seu rótulo.

Copiar estilo visual: Clique no objeto modelo e, em seguida, naquele(s) cujo o estilo pretende alterar.

Apagar objeto: Selecione o objeto para apagá-lo.

4. RELAÇÃO FUNDAMENTAL

Este capítulo apresenta o assunto da Relação Fundamental para ser ensinado com o auxílio do software GeoGebra. Segue a Teoria e uma sequência de operações que vão servir para que professores, alunos de Matemática ou interessados vejam e obtenham boas conclusões.

4.1 CONHECENDO A TEORIA

Relação fundamental

Teorema:

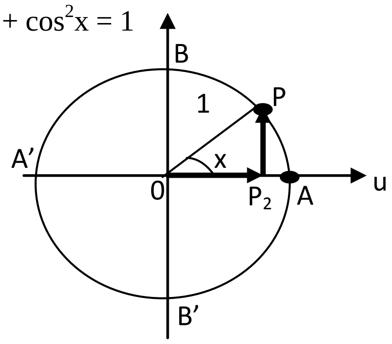
Para todo x real vale a relação:

$$\boxed{sen^2x + cos^2x = 1}$$

Demonstração:

a) Se $x \neq k\pi/2$, e a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então existe o triângulo OP_2P retângulo, portanto:

$|\overline{OP_2}|^2 + |\overline{PP_2}|^2 = |\overline{OP}|^2$ e $sen^2x + cos^2x = 1$

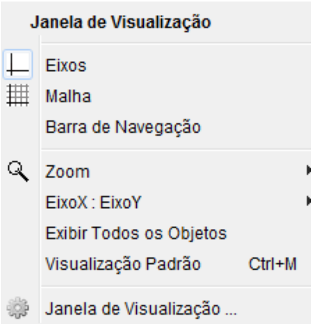


b) Se $x = k\pi/2$, podemos verificar diretamente a tese:

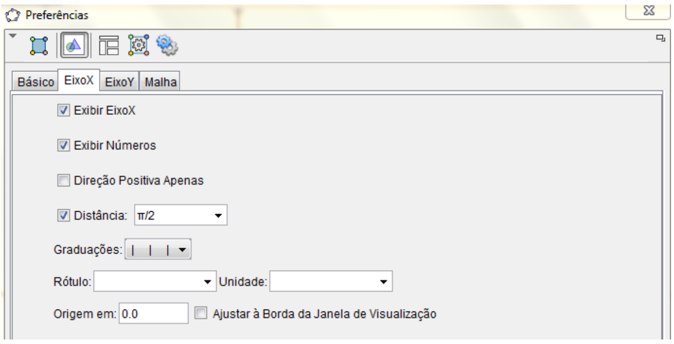
x	senx	cosx	$sen^2x + cos^2x$
0	0	1	1
$\pi/2$	1	0	1
π	0	-1	1
$3\pi/2$	-1	0	1

4.2 INICIANDO AS OPERAÇÕES

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

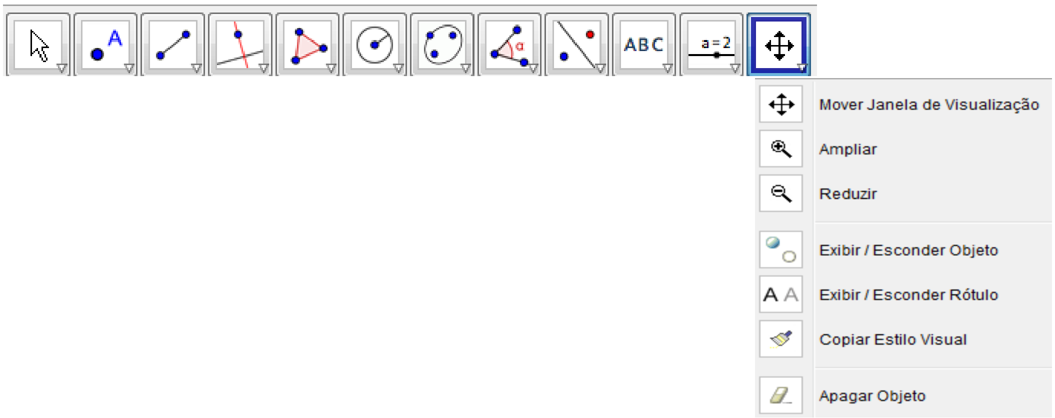


Clique em janela de visualização e surgirá:

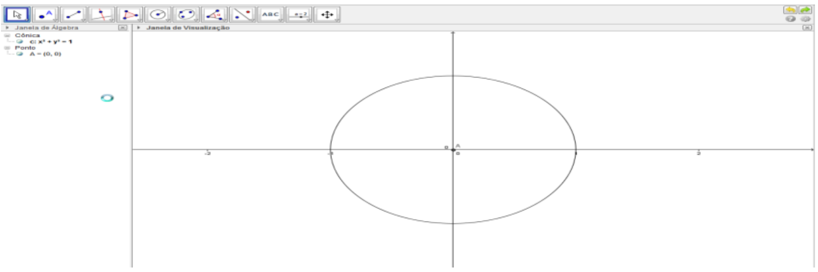


Clique em "Eixo X" e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha 1). Agora faça o mesmo escolhendo o "EixoY".

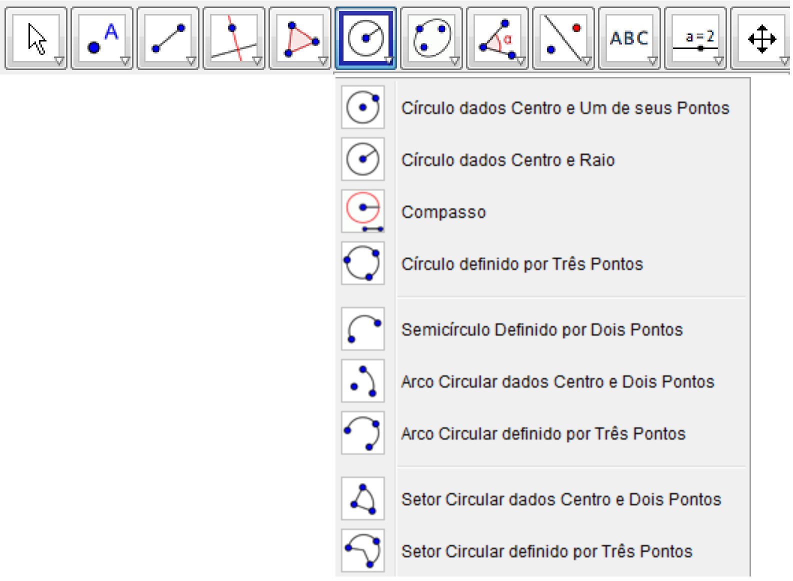
02) Clique na barra de ferramentas "mover janela de visualização".



Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização. Agora amplie os Eixos de forma que fiquem surgindo apenas os pontos (-1,0),(1,0) EixoX e (0,-1) e (0,1) EixoY. A figura ficará:



03) Clique na barra de ferramentas em:

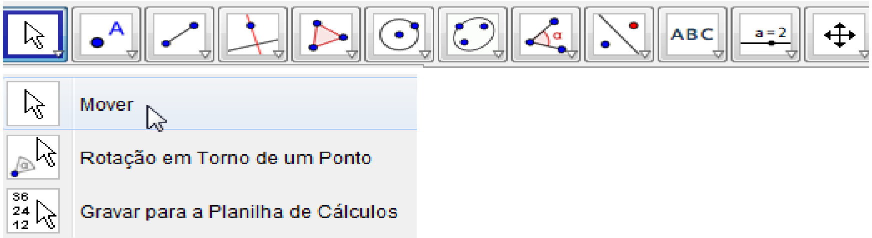


Escolha a opção “Círculo dados Centro e Raio”. Clique no ponto (0,0) para centro e escolha raio 1.

04) Clique na barra de ferramentas em:

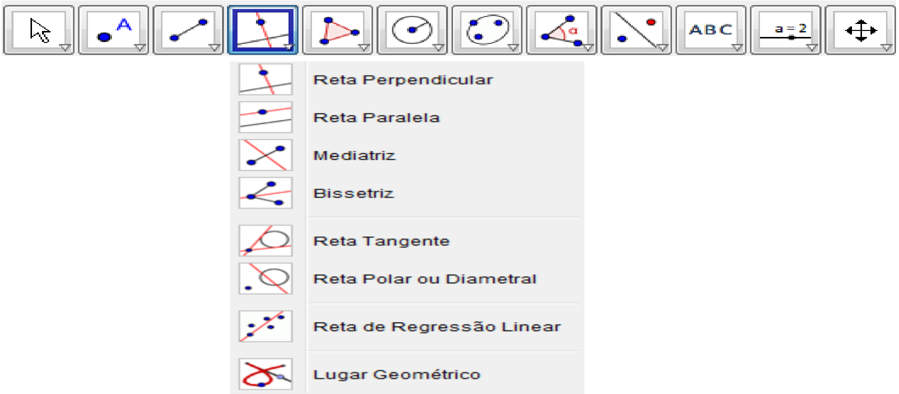
Escolha a opção “segmento definido por Dois Pontos”. E escolha o primeiro ponto no Centro (0,0) e outro sobre a circunferência.

05) Segmento colocado clique na barra de ferramenta em:

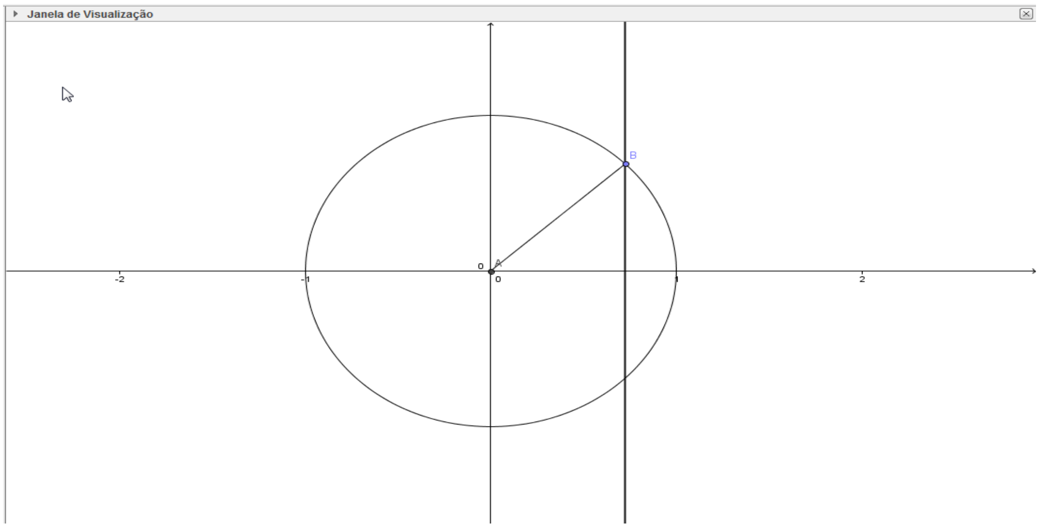


Escolha “Mover”. Então, segurando o mouse no ponto sobre a circunferência, mova o segmento formado pelo ponto (0,0) e este ponto.

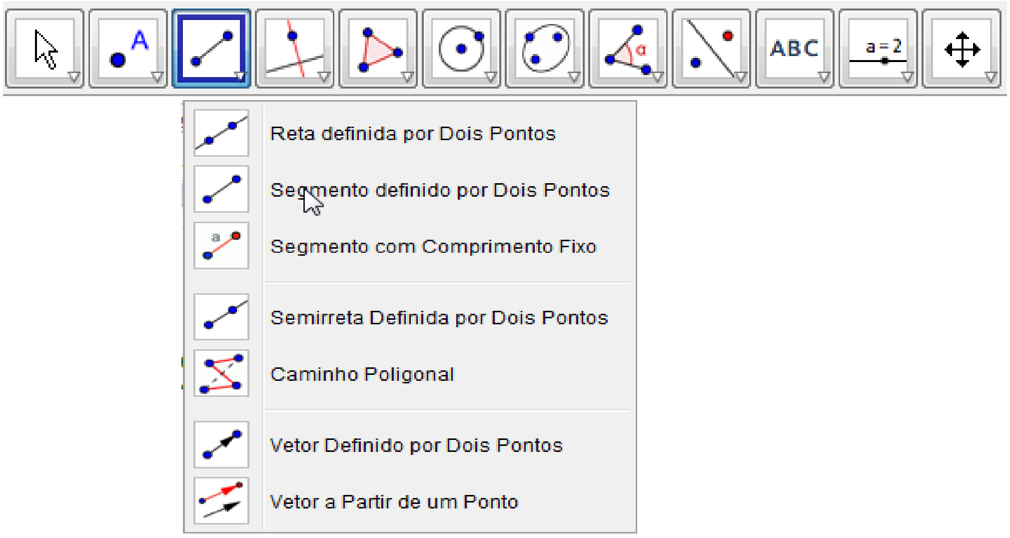
06) Com o ponto sobre a circunferência no primeiro quadrante clique na barra de ferramenta em:



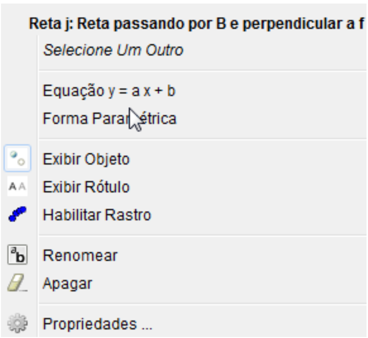
Escolha “Reta perpendicular”. Então clique no ponto sobre a circunferência e no EixoX. Ficará assim:



07) Clique na barra de ferramentas em:

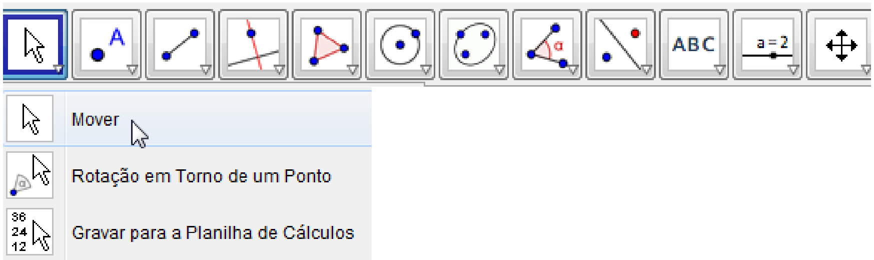


Escolha “segmento definido por dois pontos”. Então forme um segmento clicando no centro (0,0) e o cruzamento da reta perpendicular com o EixoX, em seguida forme outro segmento clicando no ponto B e o cruzamento da reta perpendicular com o EixoX. Agora clique com o botão direito do mouse sobre a reta e surgirá:



escolha a opção “exibir objeto”, e assim a reta desaparecerá.

08) Agora clique na barra de ferramenta em:

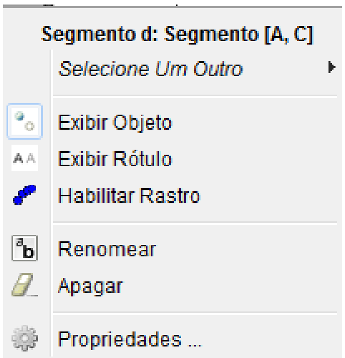


Escolha “Mover”. Então, segurando o mouse no ponto sobre a circunferência, mova o segmento formado em torno da circunferência, aí o ponto sobre o eixo X também se movimentará.

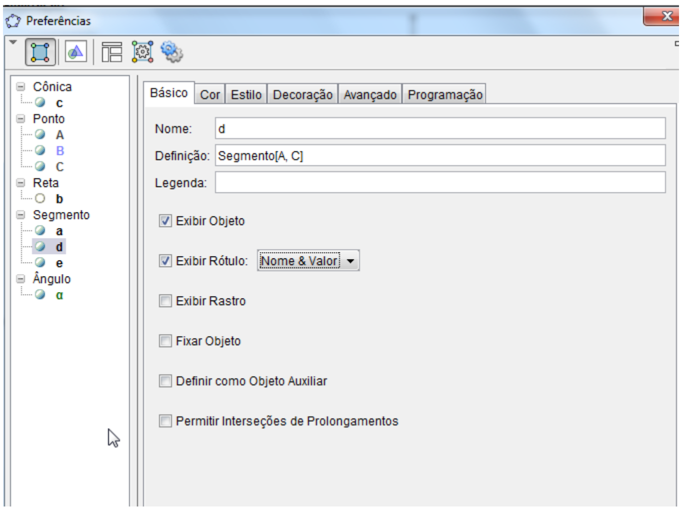
09) Com o ponto sobre a circunferência no primeiro quadrante, vamos forma o ângulo. Clique na barra de ferramenta em:

Escolha a opção “ ângulo”. Então clique primeiro no EixoX entre o ponto existente e o ponto (1,0) e depois clique sobre o segmento de reta que liga o centro (0,0) e o ponto sobre a circunferência.

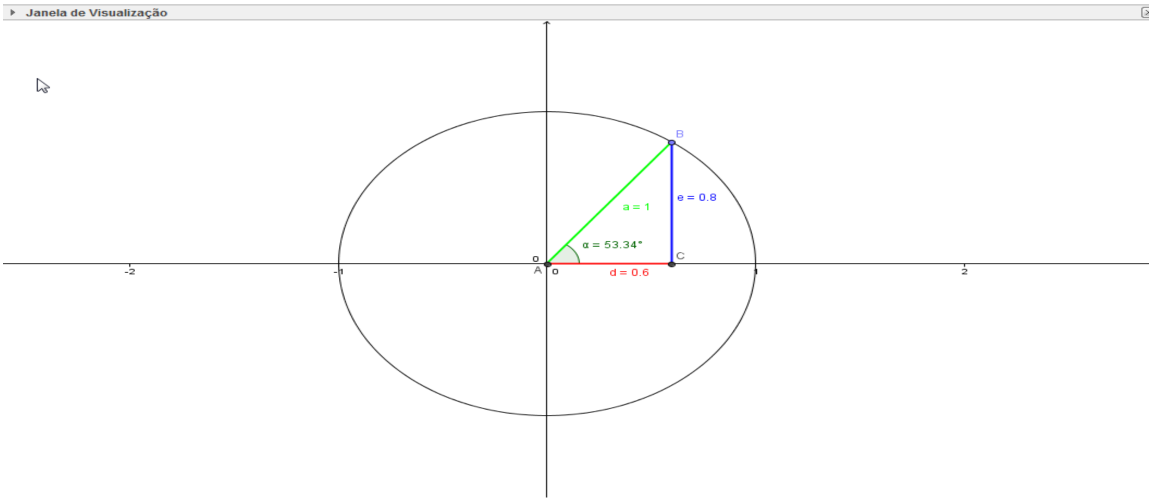
10) Agora clique com o botão direito do mouse sobre o segmento $\overline{AC}$ e surgirá:



Escolha propriedades e surgirá:



Clique em básico, escolha “exibir Rótulo” depois “Nome & Valor”, depois escolha a “Cor” e selecione uma cor, e “Estilo” para aumentar a espessura da linha. Faça a mesma operação com os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Ficará assim:

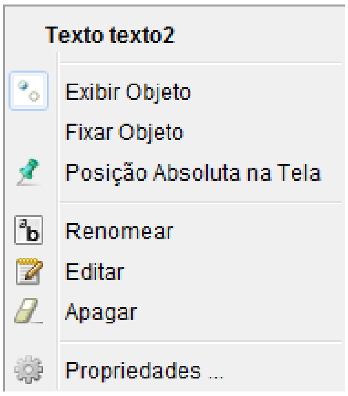


11) Agora vá em entrada e escreva: “SEN^2(α) =” + e^2 e ficará assim:

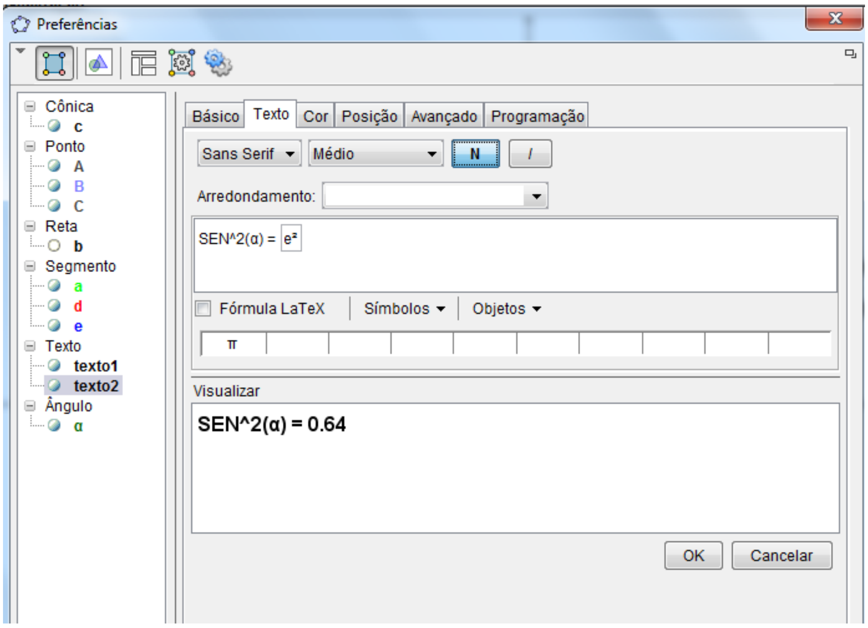
12) Faça o mesmo com: “COS^2(α) =” +d^2.

13) Depois faça o mesmo com: " SEN^2(α) + COS^2(α) = " +(d^2+e^2)

14)Depois mova os quadro para o lado e clique com o botão direito do mouse sobre o quadro do seno e surgirá:

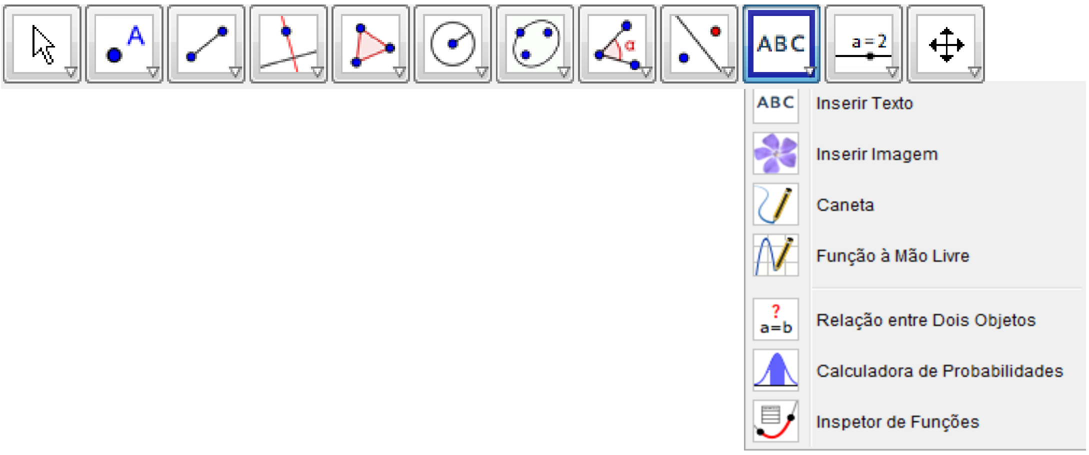


escolha propriedades e surgirá:



Clique em texto e escolha “Médio” e “N”. Faça o mesmo com os outro quadros.

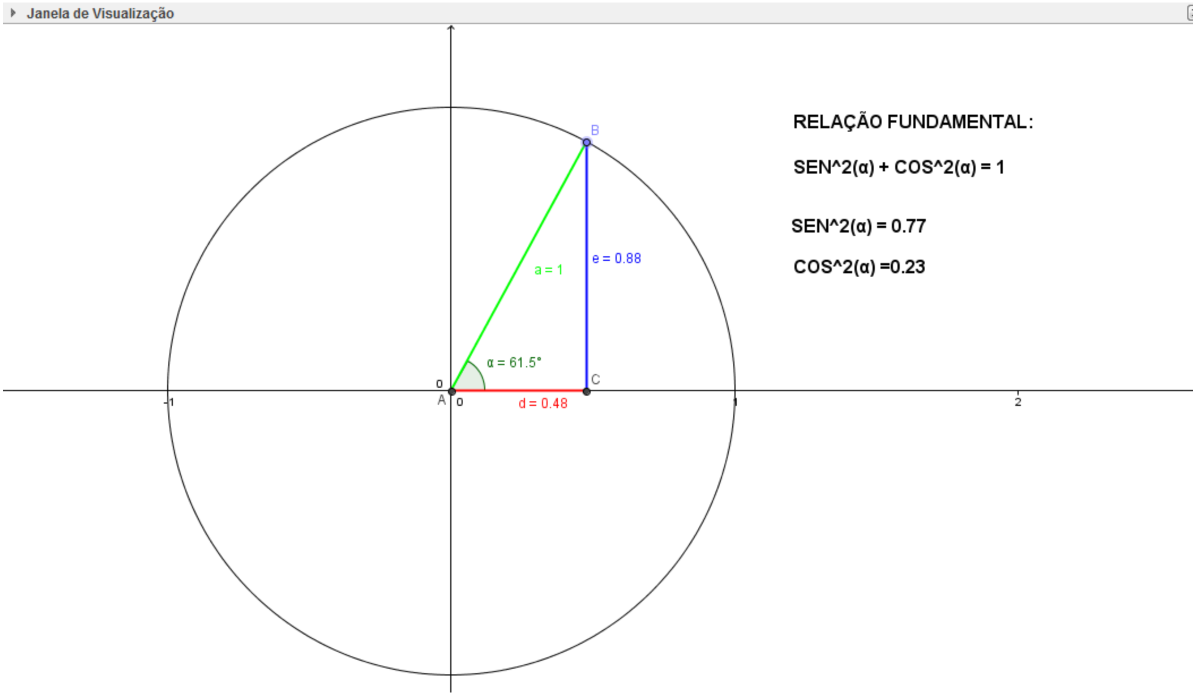
15) Agora na barra de ferramenta clique em:



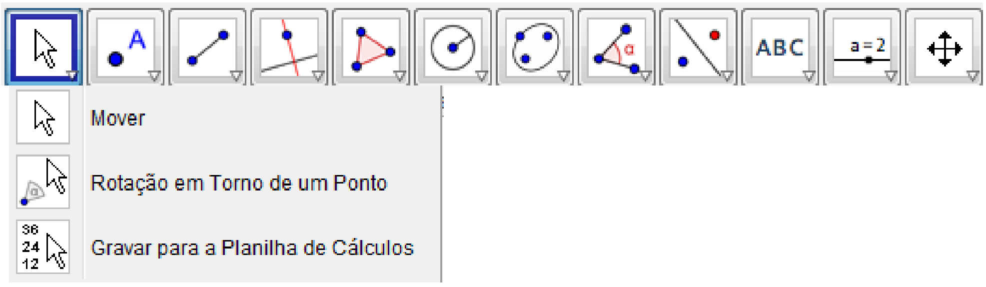
Escolha “Inserir Texto” e clique na janela de visualização e surgirá:

escreva RELAÇÃO FUNDAMENTAL.

Clique com o botão direito do mouse quadro formado escolha propriedades e repita a operação 13. E ficará assim:



16) Clique na barra de ferramentas em:



Escolha mover e mova o ponto B. Veja que a soma de SEN^2(α) com COS^2(α) sempre dá 1.

5. CICLO TRIGONOMÉTRICO

Neste capítulo apresentamos o Ciclo Trigonométrico. Segue a Teoria e uma sequência de operações que vão servir para que professores, alunos de Matemática ou interessados vejam o Ciclo Trigonométrico e obtenham boas conclusões.

5.1 CONHECENDO A TEORIA

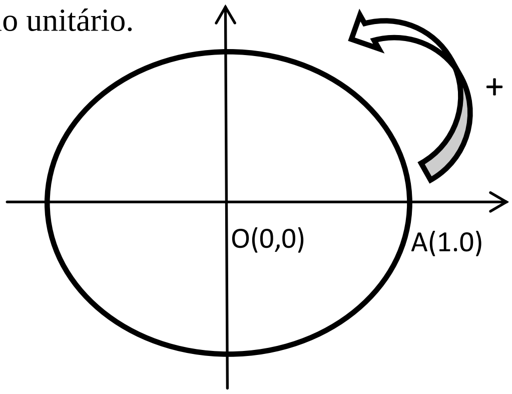
No plano cartesiano, vamos considerar a circunferência de centro na origem O(0,0) e o raio unitário.

Escolhendo então como positivo o sentido anti-horário de percurso dos arcos que serão medidos a partir do ponto A(1,0) de intersecção da circunferência e os semieixos positivos das abscissas.

O círculo trigonométrico corresponde à circunferência de centro O e raio unitário, na qual escolhemos um ponto de origem dos arcos e o sentido do seu percurso.

No círculo trigonométrico a medida absoluta α, em radianos, de um arco e o comprimento l(um) desse arco são iguais, pois a $\alpha = \frac{l}{r}$ e r = 1. E esse é o motivo por que escolhemos r = 1.

No plano cartesiano, vamos considerar a circunferência de centro na origem O(0,0) e o raio unitário.



Escolhendo então como positivo o sentido anti-horário de percurso dos arcos que serão medidos a partir do ponto A(1,0) de intersecção da circunferência e os semieixos positivos das abscissas.

O círculo trigonométrico corresponde à circunferência de centro O e raio unitário, na qual escolhemos um ponto de origem dos arcos e o sentido do seu percurso.

No círculo trigonométrico a medida absoluta α, em radianos, de um arco e o comprimento l desse arco são iguais, pois $\alpha = \frac{l}{r}$ e r = 1. E esse é o motivo por que escolhemos r = 1.

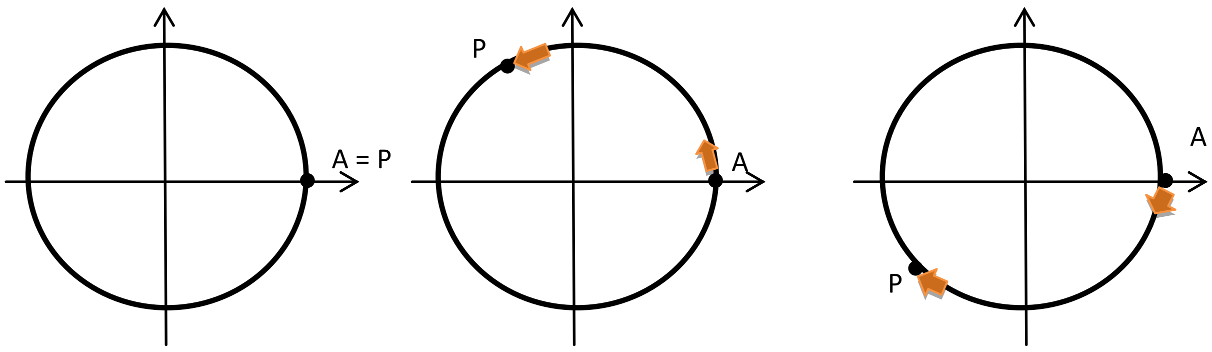
Podemos então, associar a cada número real α um único ponto P do círculo trigonométrico de modo que:

- se α = 0, P neste caso coincida com A.

- se α > 0, percorremos a circunferência no sentido anti-horário.

- se α < 0, percorremos a circunferência em sentido horário.

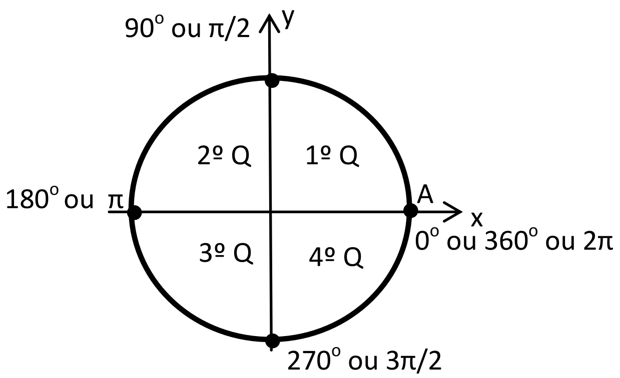
- o comprimento de $\overset{\frown}{AP}$ é o módulo de α.



m($\overset{\frown}{AP}$) = 0 m($\overset{\frown}{AP}$) = α > 0 m($\overset{\frown}{AP}$) = - α se α < 0

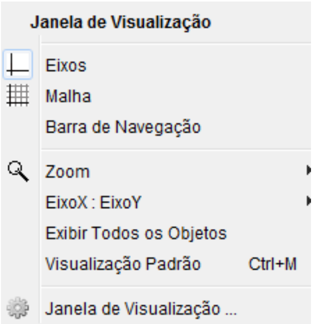
O ponto P é a imagem do círculo trigonométrico.

Os eixos x e y dividem o círculo trigonométrico em quatro partes congruentes chamadas quadrantes numeradas de 1 a 4 e contadas a partir de A no sentido positivo.

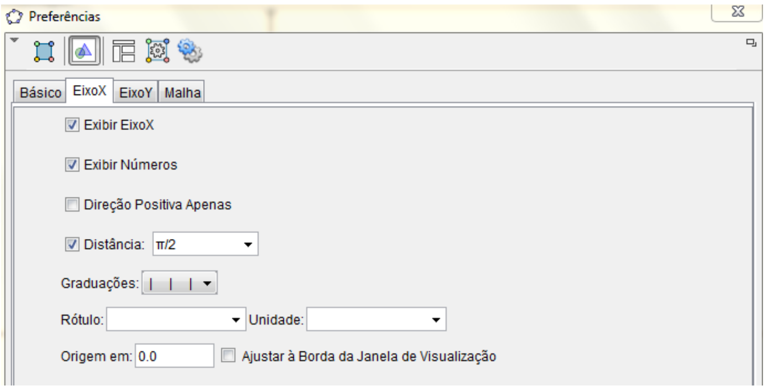


5.2 INICIANDO AS OPERAÇÕES

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:



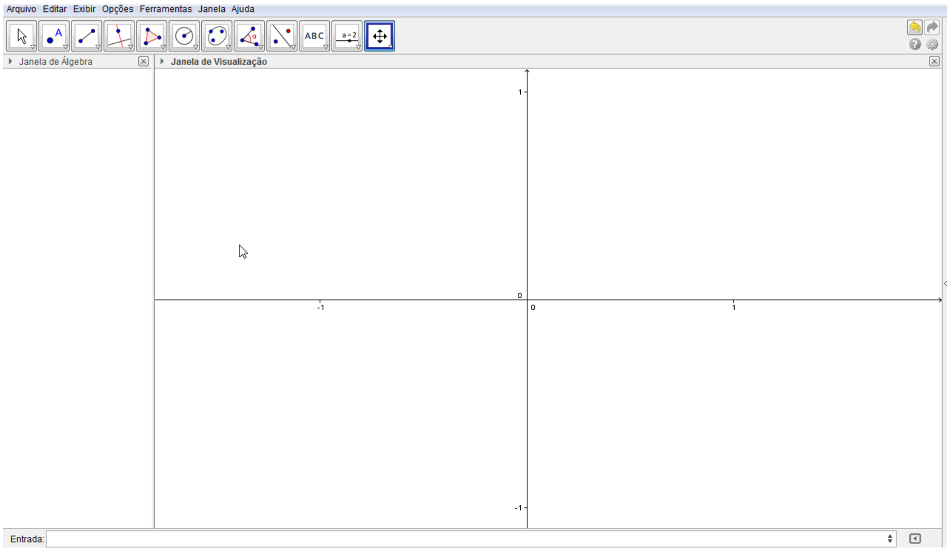
Clique em janela de visualização e surgirá:



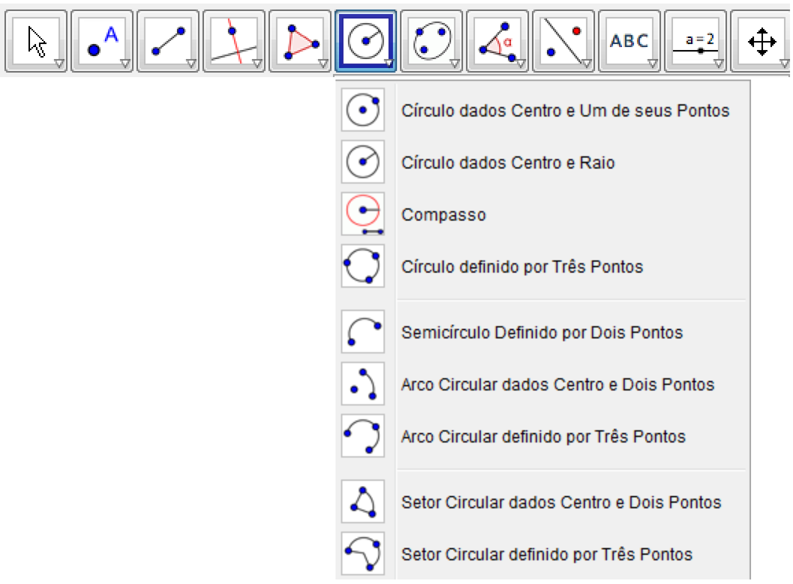
Clique em "Eixo X" e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha 1). Agora faça o mesmo escolhendo o "EixoY".

02) Clique na barra de ferramentas "mover janela de visualização".

Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização. Agora amplie os Eixos de forma que fiquem surgindo apenas os pontos (-1,0),(1,0) EixoX e (0,-1) e (0,1) EixoY. A figura ficará:



03) Clique na barra de ferramentas em:

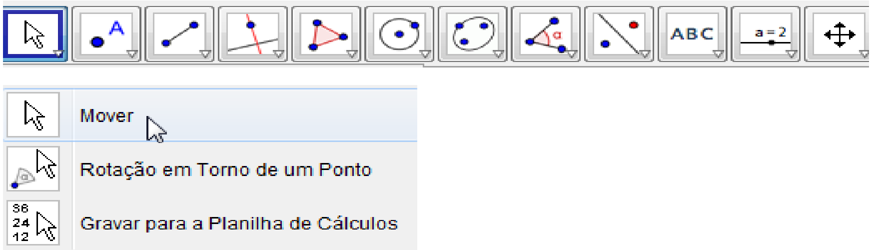


Escolha a opção “Círculo dados Centro e Raio”. Clique no ponto (0,0) para centro e escolha raio 1.

04) Clique na barra de ferramentas em:

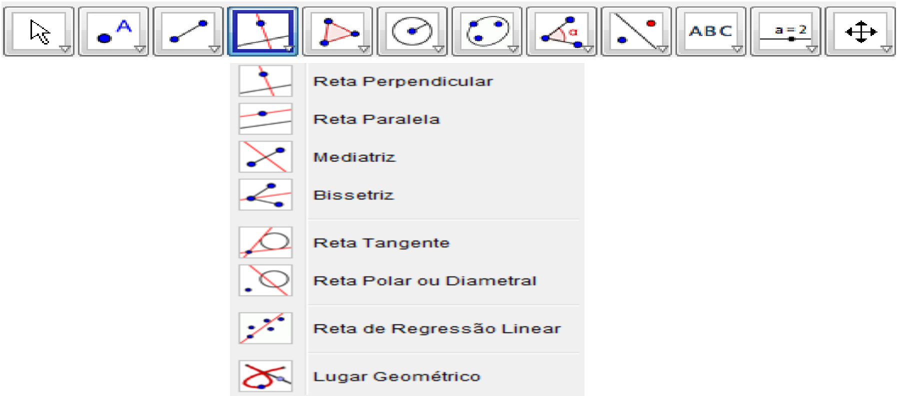
Escolha a opção “segmento definido por Dois Pontos”. E escolha o primeiro ponto no Centro (0,0) e outro sobre a circunferência.

05) Segmento colocado clique na barra de ferramenta em:



Escolha “Mover”. Então, segurando o mouse no ponto sobre a circunferência, mova o segmento formado pelo ponto (0,0) e este ponto.

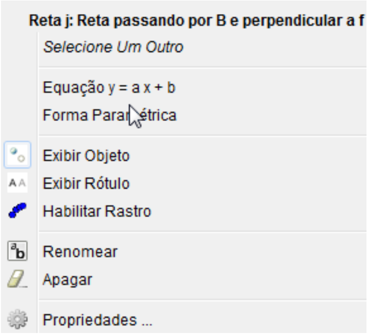
06) Com o ponto sobre a circunferência no primeiro quadrante clique na barra de ferramenta em:



Escolha “Reta perpendicular”. Então clique no ponto sobre a circunferência e no EixoX, em seguida no ponto sobre a circunferência e no EixoY.

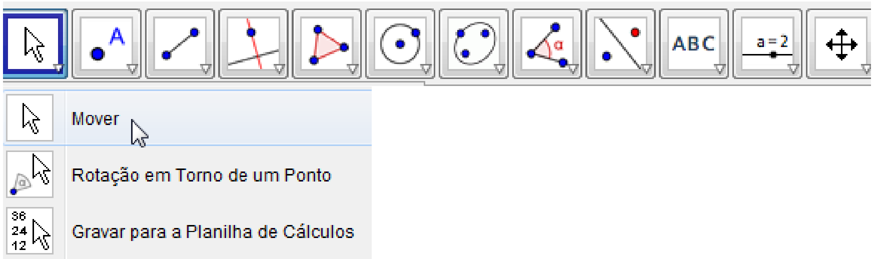
07) Clique na barra de ferramentas em:

Escolha “segmento definido por dois pontos”. Então forme um segmento clicando no centro (0,0) e o cruzamento da reta perpendicular com o EixoX, em seguida forme outro segmento clicando no centro(0,0) e o cruzamento da reta perpendicular com o EixoY. Agora clique com o botão direito do mouse sobre cada reta, uma por vez, e surgirá:



escolha a opção “exibir objeto”, e assim as retas desaparecerão.

08) Agora clique na barra de ferramenta em:

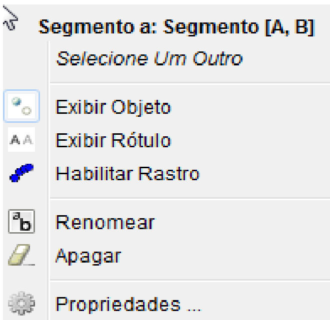


Escolha “Mover”. Então, segurando o mouse no ponto sobre a circunferência, mova o segmento formado em torno da circunferência, aí pontos sobre os eixos também se movimentarão.

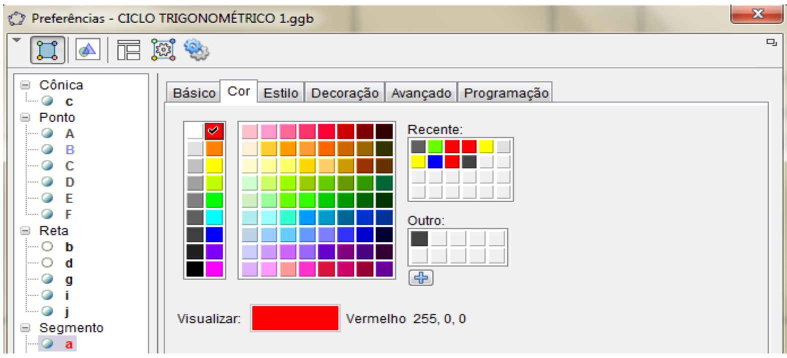
09) Com o ponto sobre a circunferência no primeiro quadrante, vamos forma o ângulo. Clique na barra de ferramenta em:

Escolha a opção " ângulo". Então clique primeiro no EixoX entre o ponto existente e o ponto (1,0) e depois clique sobre o segmento de reta que liga o centro (0,0) e o ponto sobre a circunferência. E assim ângulo formado. Repita a operação 5) e perceba que o ângulo vai de forma continua de 0° a 360° entre o eixoX e segmento de reta que liga o centro (0,0) e o ponto sobre a circunferência.

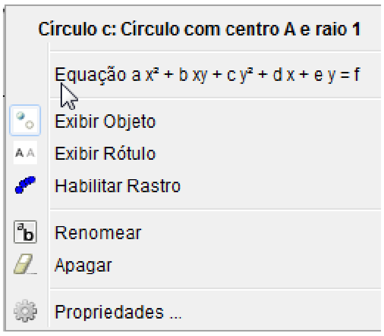
10) Agora vamos agradar o ambiente. Clique com o botão direito do mouse sobre o segmento que une o centro (0,0) à circunferência:



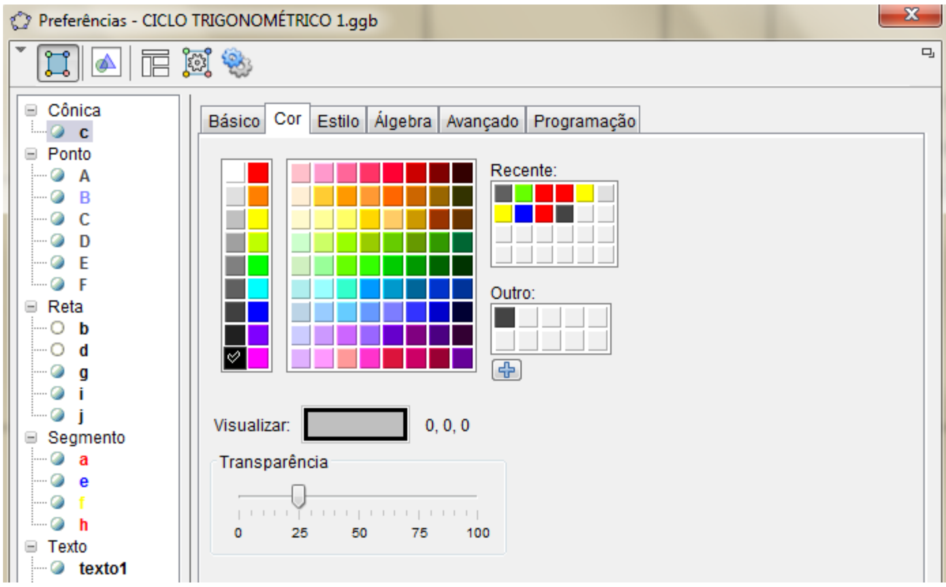
Escolha a opção "propriedades", depois surgirá:



Clique em "cor" e escolha uma, em seguida clique em "estilo" e escolha a espessura 5, ou poderia ser outra. Repita a operação com os outros dois segmentos dos eixos X e Y, somente altere a cor. Agora clique com o botão direito do mouse dentro da circunferência:



Escolha "Propriedades", e depois:

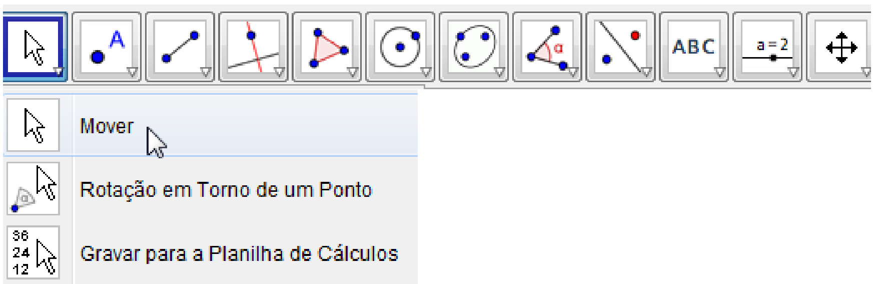


Clique em “cor” e escolha uma, veja que também que poderá utilizar a mesma cor para alterar a parte interior da circunferência em transparência escolhendo o percentual desejado.

11) Na tela onde tem “entrada”:

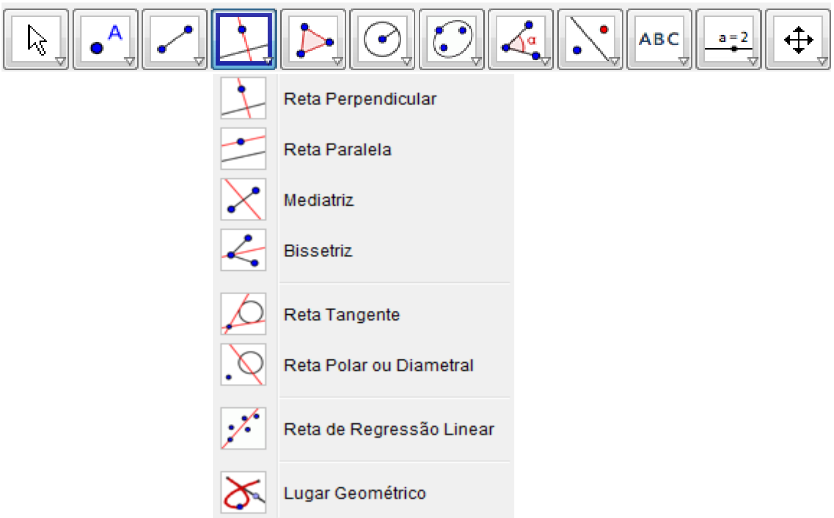
Escreva: “senα = ” +sen(α) . Clique em enter e na tela surgirá na janela de visualização: senα = 0,... .

Clique na barra de ferramenta em:



Escolha “Mover”, e mova o senα para fora do círculo. Repita a operação anterior para: “cosα =” +cos(α). Agora observe que os valores de senα e cosα ficam alterando.

12) Na barra de ferramenta em:

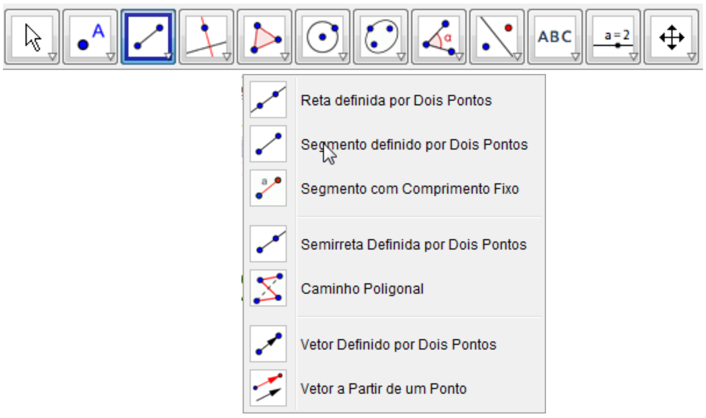


Escolha “reta perpendicular”. Clique no ponto (1,0) e no eixoX. Agora vamos colocar um ponto sobre esta reta formada. Vá para caixa de “entrada”:

e escreva: (1,tan(α)). O ponto ficará sobre a reta.

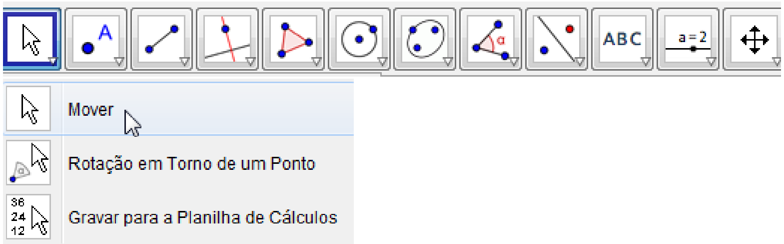
13) Com o ponto sobre a circunferência no primeiro quadrante, vamos forma um segmento unindo o ponto sobre a reta tangente obtido na operação 12).

Para isso clique na barra de ferramenta:



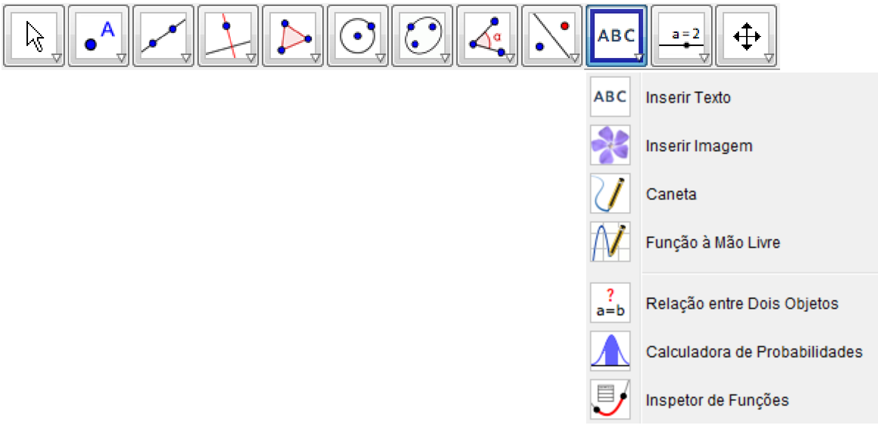
Escolha “segmento definido por dois pontos”. E agora uma os pontos formando o segmento. Agora, faça a operação 10) com esse novo segmento escolhendo a mesmo cor e espessura do segmento do centro (0,0) à circunferência.

14) Na caixa de entrada escreva: “tanα =” +tan(α) e clique em enter. Clique na barra de ferramenta em:

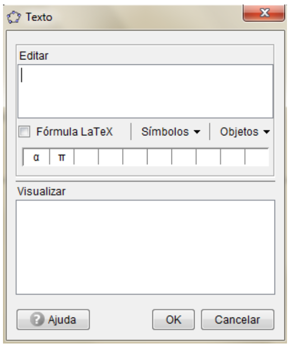


Escolha mover, e mova a tan α para próximo do sen α e cos α. Mova o ponto sobre a circunferência e observe também da mudança dos valores da tan α.

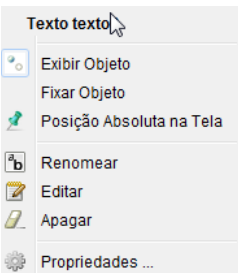
15)Clique na barra de ferramentas em:



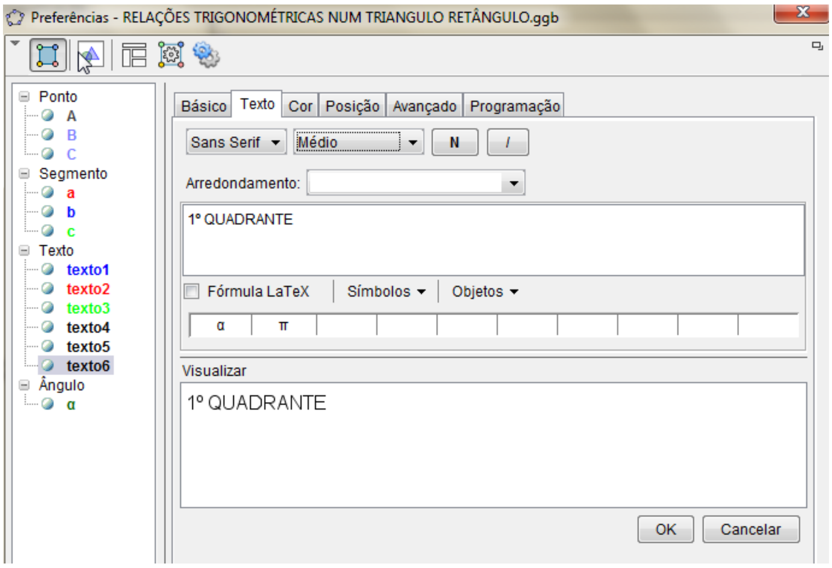
Escolha “inserir Texto”. Clique na janela de visualização e surgirá:



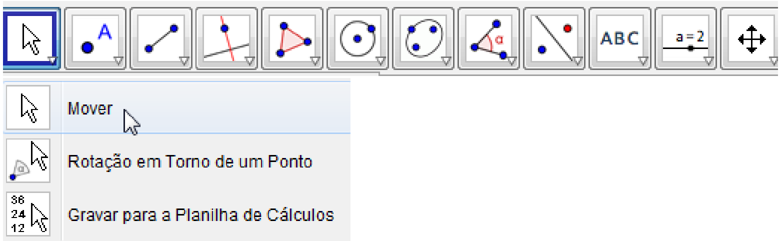
Em editar escreva 1ºQUADRATE. Clique com o mouse com o botão direito sobre o quadro de 1ºQUADRANTE e surgirá:



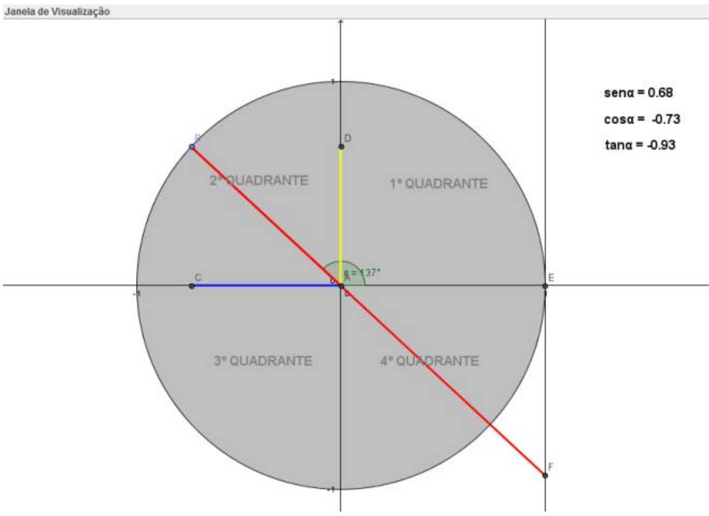
Clique em “Propriedades” e aparece:

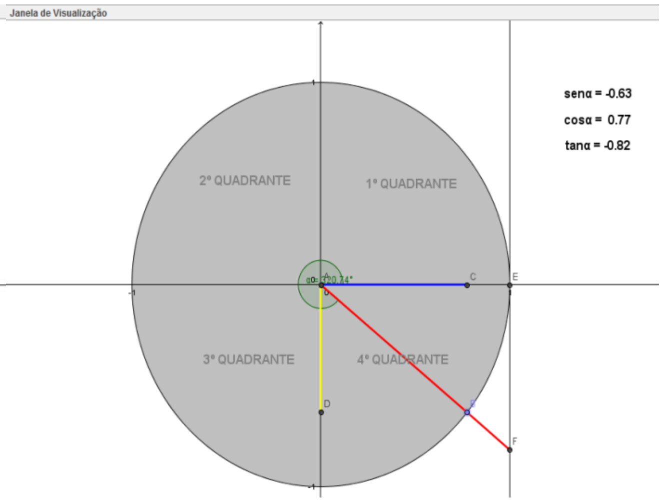


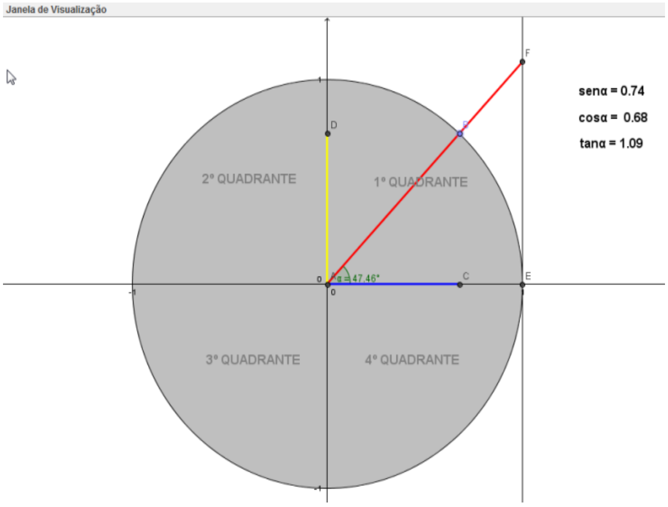
Escolha texto, tamanho médio e “N” negrito. Em seguida escolha a cor. Clique na barra de ferramenta em:

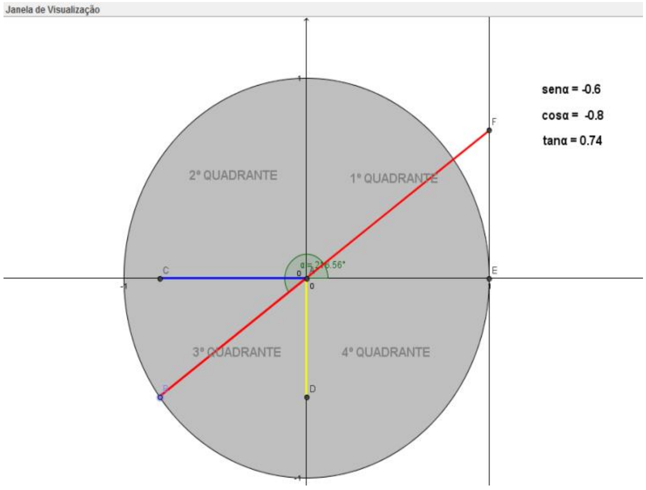


Escolha mover e coloque “1º QUADRANTE” no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico. Repita a mesma operação colocando “2ºQUADRANTE”, “3ºQUADRANTE” e “4ºQUADRANTE”. No final teremos:









5.3 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

- Colocar o sinal de positivo ou negativo para sen α, cos α e tan α em cada quadrante

- Exercícios de redução ao primeiro quadrante.

- Comprovar que:

Para todo x real valem as seguintes igualdades:

1) $\text{sen } x = \text{sen } (\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$

2) $\text{sen } x = -\text{sen } (x - \pi)$ e $\cos x = 2 - \cos(x - \pi)$

3) $\text{sen } x = -\text{sen } (2\pi - x)$ e $\cos x = \cos(2\pi - x)$

4) $\text{sen } x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

6. FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Neste capítulo apresentamos as Funções Trigonométricas. Segue à teoria uma sequência de operações que vão servir para que professores, alunos de Matemática ou interessados obtenham os gráficos das funções: seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

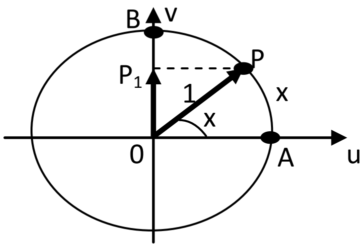
6.1 CONHECENDO A TEORIA

Função Seno

1) Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico de raio unitário. Denominamos seno de x (e indicaremos sen x) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função seno a função f: $\Re \rightarrow \Re$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1}$ = sen x, isto é:

f(x) = sen x



2)Propriedade:

1ª) A imagem da função seno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq$ sen x ≤ 1 para todo x real.

É imediato a justificativa pois, se P está no ciclo, sua ordenação pode variar apenas de -1 a 1.

2ª) Se x pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então sen x é positivo.

De fato, neste caso o ponto P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva

3ª) Se x pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então sen x é negativo.

De fato, neste caso o ponto P está abaixo do seu eixo u e sua ordem é negativa.

4ª) Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então sen x é crescente.

É imediato que, de x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco $\widetilde{AB}$ e sua ordenada cresce. Fato análogo acontece no quarto quadrante.

5ª) Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então sen x é decrescente.

É de imediato que, se x percorre o segundo quadrante, então P percorre o arco $\widetilde{BA}$ e sua ordenada decresce. Fato análogo acontece no terceiro quadrante.

6ª) A função seno é periódica e seu período é 2π.

É imediato que, se sen x = $\overline{OP_1}$ e k ∈ ℤ, então sen (x + k . 2π) = $\overline{OP_1}$ pois x e (x +2 . 2π) têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real:

sen x = sen (x + k . 2π)

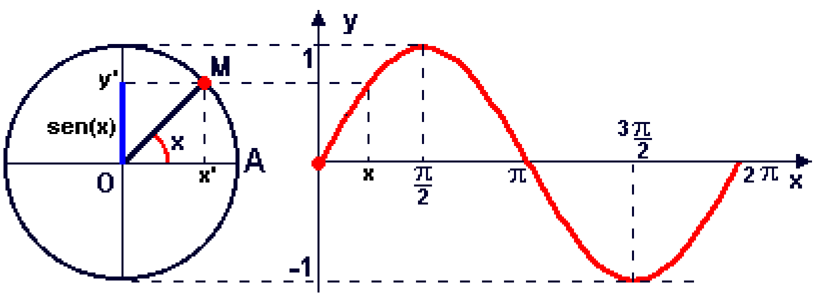
e, portanto, podemos concluir que a função seno é periódica de período 2π.

3) Gráfico

Observe o que acontece com sen x quando o ponto P percorrer o intervalo [0, 2π]. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a ordenada de P varia segunda a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2 π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0

Fazendo um diagrama com x em abscissas e sen x em ordenada, podemos construir o seguinte gráfico, denominado senóide, que nos indica como varia a função f(x) = sen x

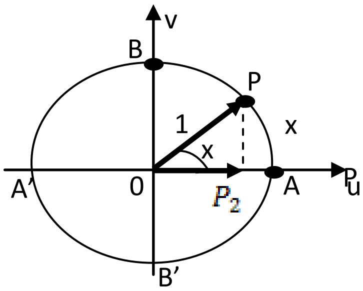


Observemos que, como o domínio da função seno é ℜ, a senóide continua para direita de 2 π e para esquerda de 0.

<u>Função cosseno</u>

1) Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico de raio unitário. Denominamos cosseno de x (e indicamos cos x) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos função cosseno a função f:$\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2}$ = cos x, isto é, f(x) = cos x.



2) Propriedades

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo [-1, 1], isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo x real.

2ª) Se x pertence ao primeiro ou quarto quadrante, então cos x é positivo.

3ª) Se x pertence ao segundo ou terceiro quadrante, então cos x é negativo.

4ª) Se percorre o terceiro ou quarto quadrante, então cos x é crescente.

5ª) Se x percorre o primeiro ou segundo quadrante, então cos x é decrescente.

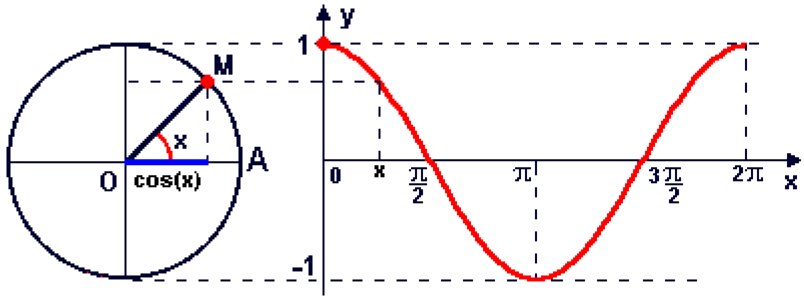
6ª) A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

3) Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo [0, 2π] e vejamos o que acontece com cos x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a abscissa de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fazendo um diagrama com x em abscissa e cos x em ordenada, podemos construir o seguinte gráfico, denominado cossenóide, que nos indica como varia a função f(x) = cos x

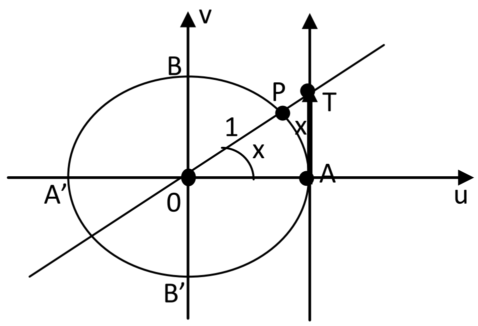


Observe que, como o domínio da função cosseno é $\mathfrak{R}$, a cossenóide continua para direita de 2π e para a esquerda de 0.

Função tangente

1)Definição

Dado um número real x, x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico de raio unitário. Consideramos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de x (e indicaremos tan x) a medida algébrica do segmento do segmento $\overline{AT}$.



Denominamos função tangente a função f: D → $\mathfrak{R}$ que associa a cada real x, x ≠ $\frac{\pi}{2}$ + kπ, o real $\overline{AT}$ = tan x, isto é, f(x) = tan x.

Notemos, que para x = $\frac{\pi}{2}$ + kπ, P está em B ou B´ e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a tan x é definida.

2) Propriedades:

1ª) O domínio da função tangente é D = { $x \in \mathfrak{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ }.

2ª) A imagem da função tangente é $\mathfrak{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que tan x = y.

3ª) Se x pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então tan x é positiva.

4ª) Se x pertence ao segundo ou quarto quadrante, então tan x é negativa.

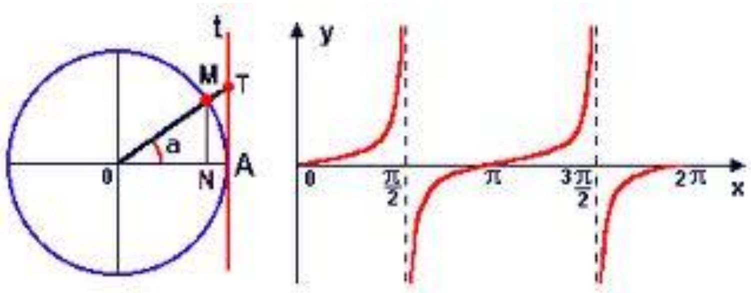
5ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tan x é crescente.

6ª) A função tangente é periódica e seu período é π. Seu período é o menor valor positivo de kπ.

3)Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo [0, 2π] e vejamos o que acontece com tan x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a medida algébrica $\overline{AT}$ varia segundo a tabela.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2 π
tan x	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0

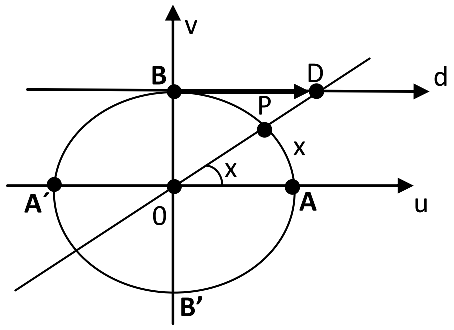


Fazendo um diagrama com x em abscissas e tangente de x em ordenadas, podemos construir o gráfico seguinte, denominado tangentóide, que nos indica a variação da função f(x) = tan x.

Função cotangente

1) Definição

Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico de raio unitário. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (e indicaremos cotan x) a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$. Denominamos função cotangente a função f: D → $\Re$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{BD}$ = cotan x, isto é, f(x) = cotan x.



Notamos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A´ e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D , a cotan x não é definida.

2) Propriedades

1ª) O domínio da função cotangente é D = { $x \in \Re / x \neq k\pi$ }.

2ª) A imagem da função cotangente é $\Re$, isto é, para todo y real existe um real tal que cotan x = y.

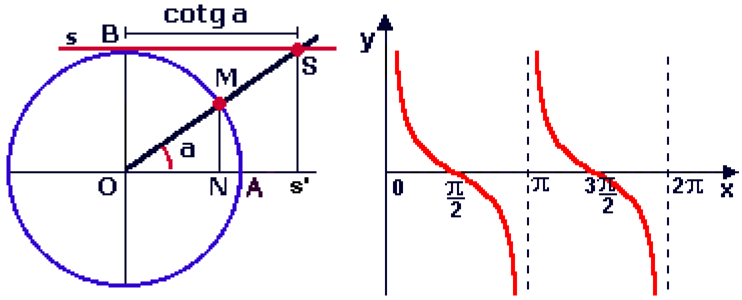
3ª) Se x pertence ao primeiro ou terceiro quadrante, então cotan x é positiva.

4ª) Se x pertence ao segundo ou quarto quadrante, então cotan x é negativa

5ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então cotan x é decrescente.

6ª) A função cotangente é periódica e seu período é π.

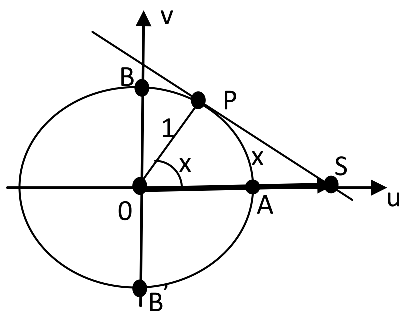
3) Gráfico



Função Secante

1) Definição

Dado um número real x, x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico de raio unitário. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos sec x) a abscissa $\overline{OS}$ do ponto S. Denominamos função secante a função f: D $\rightarrow \mathfrak{R}$ que associa a cada real x, x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. O real $\overline{OS}$ = sec x, isto é, f(x) = sec x.



Notemos que, para x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B´ e, então a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a sec x não é definida.

2)Propriedades

1ª) O domínio da função secante é D = { x $\in \mathfrak{R}$/ x $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ }.

2ª) A imagem da função secante é $\mathfrak{R}$ -]-1, 1[, isto é, para todo real y, com y≤ -1 ou $y \geq 1$, existe um x real tal que sec x = y.

3ª) Se x pertence ao primeiro ou quarto quadrante, então sec x é positiva.

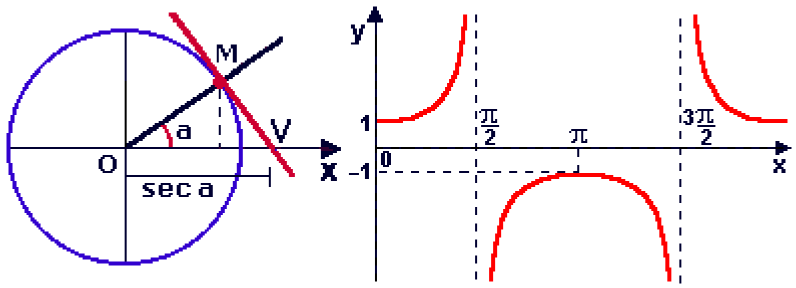
4ª) Se x pertence ao segundo ou terceiro quadrante então sec x é negativa.

5ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então sec x é crescente .

6ª) Se x percorre o terceiro ou quarto quadrante, então sec x é decrescente.

7ª) A função secante é periódica e seu período é 2π.

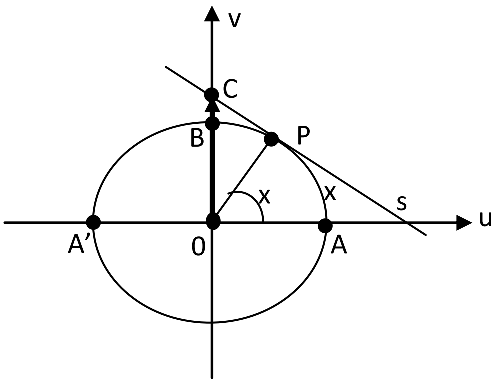
3)Gráfico



Função cossecante

1) Definição

Dado um número real x, x ≠ kπ, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico unitário. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (indicaremos cossec x) a ordenada $\overline{OC}$ do ponto C. Denominamos função cossecante a função f: D → ℜ que associa a cada real x, x ≠ kπ, o real $\overline{OC}$ = cossec x, isto é, f(x) = cossec x.



Notemos que, para x ≠ kπ, P está em A ou A´ e, então a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec x não é definida.

2) Propriedades

1ª) O domínio da função cossecante é D = { x ∈ $\Re$/ x ≠ kπ }.

2ª) A imagem da função cossecante é $\Re$ -] -1, 1[, isto é, para todo real y, com y≤ -1 *ou* $y \geq 1$, existe um x real tal que cossec x = y.

3ª) Se x pertence ao primeiro ou segundo quadrante, então cossec x é positiva.

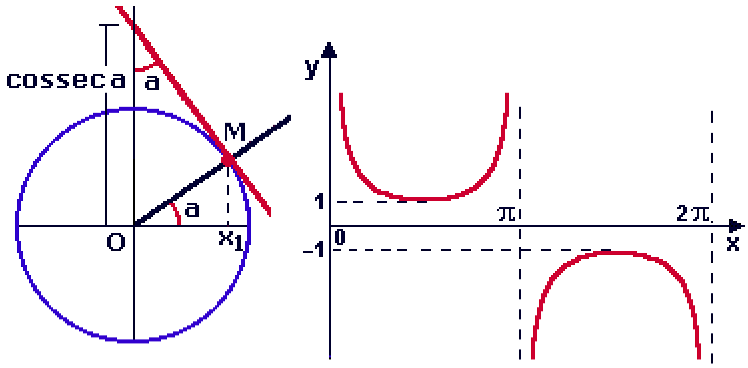
4ª) Se x pertence ao terceiro ou quarto quadrante, então cossec x é negativa.

5ª) Se x percorre o segundo ou terceiro quadrante, então cossec x é crescente.

6ª) Se x percorre o primeiro ou quarto quadrante, então cossecx é descrente.

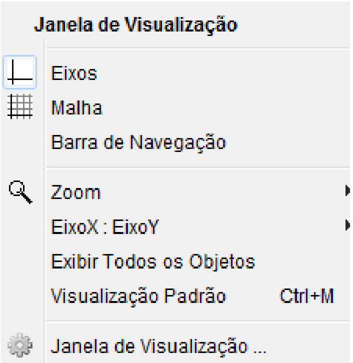
7º) A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

3) Gráfico

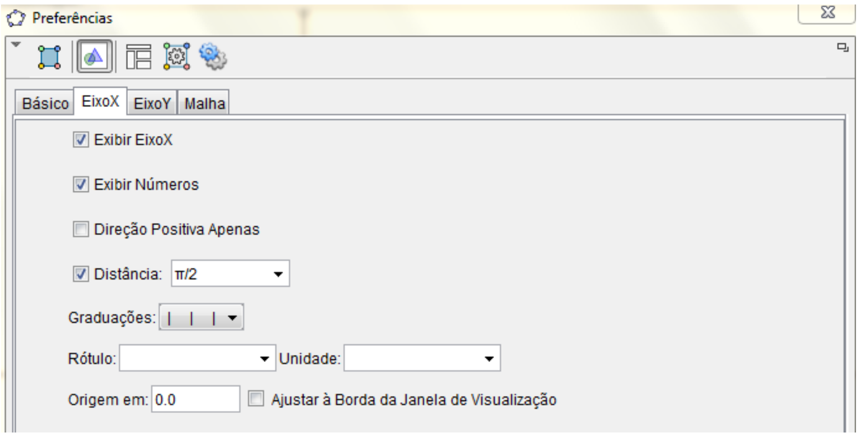


6.2 INICIANDO AS OPERAÇÕES

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

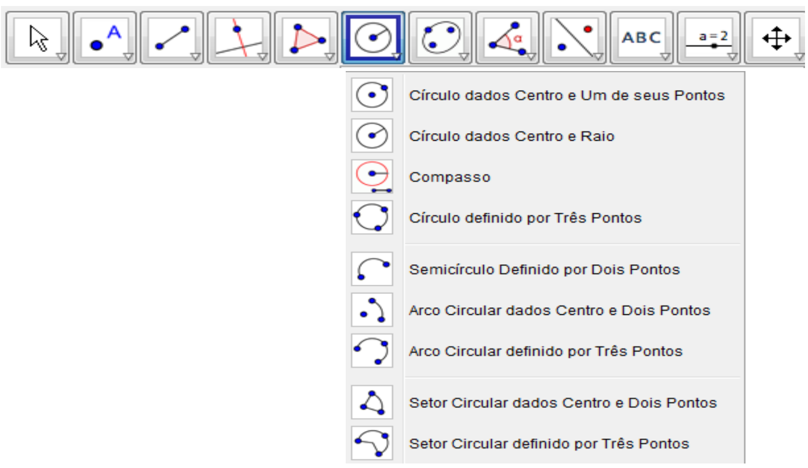


Clique em “Janela de visualização”:



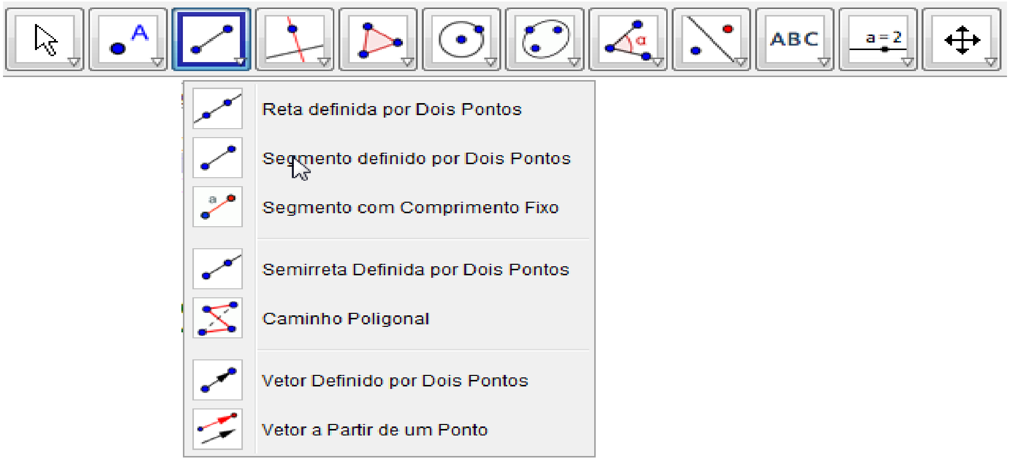
Clique em “Eixo X” e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha π/2). Depois clique em “Eixo Y” e selecione: Exibir Eixo Y, Exibir números, Distância (escolha 1).

02) Clique na barra de ferramentas em:



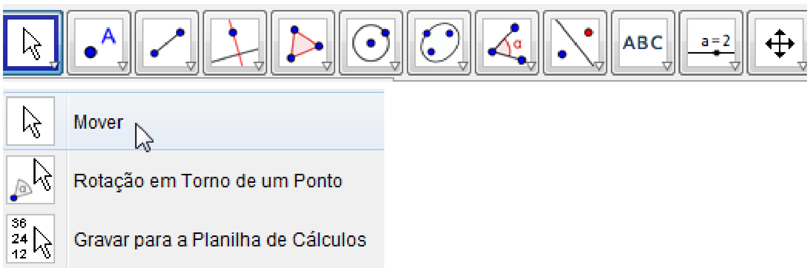
Escolha a opção "Círculo dados Centro e Raio". Clique no ponto (0,0) para centro e escolha raio 1.

03) Clique na barra de ferramentas em:



Escolha a opção "segmento definido por Dois Pontos". E escolha o primeiro ponto no Centro (0,0) e outro sobre a circunferência.

04) Segmento colocado clique na barra de ferramenta em:



Escolha "Mover". Então, segurando o mouse no ponto sobre a circunferência, mova o segmento formado pelo ponto (0,0) e este ponto.

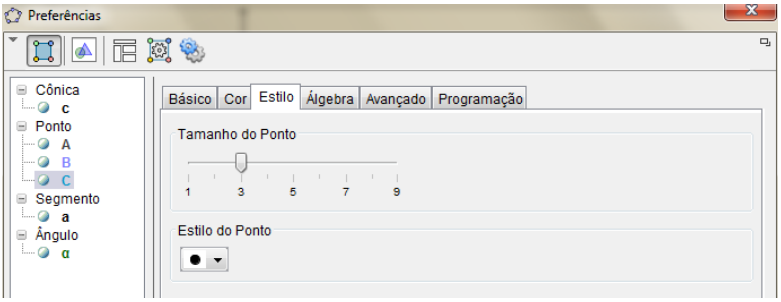
05)Vamos formar o ângulo. Clique na barra de ferramenta em:

Escolha a opção “ ângulo”. Então clique primeiro no Eixo X depois no segmento que une o ponto (0,0) e à circunferência (O segmento deve está no 1º Quadrante). O ângulo surgirá. Repita a operação 4) e perceba que o ângulo vai de forma continua de 0° a 360° entre o Eixo X e segmento de reta que liga o centro (0,0) e o ponto sobre a circunferência.

06) Na tela onde tem “entrada”:

Escreva: (α,sen(α)) e clique em enter. Surgirá um ponto na janela de visualização. Clique com o botão direito do mouse sobre o ponto:

Escolha “Habilitar rastro”. Em seguida Clique novamente com o botão direito do mouse sobre o mesmo ponto e escolha “Propriedades” e surgirá:

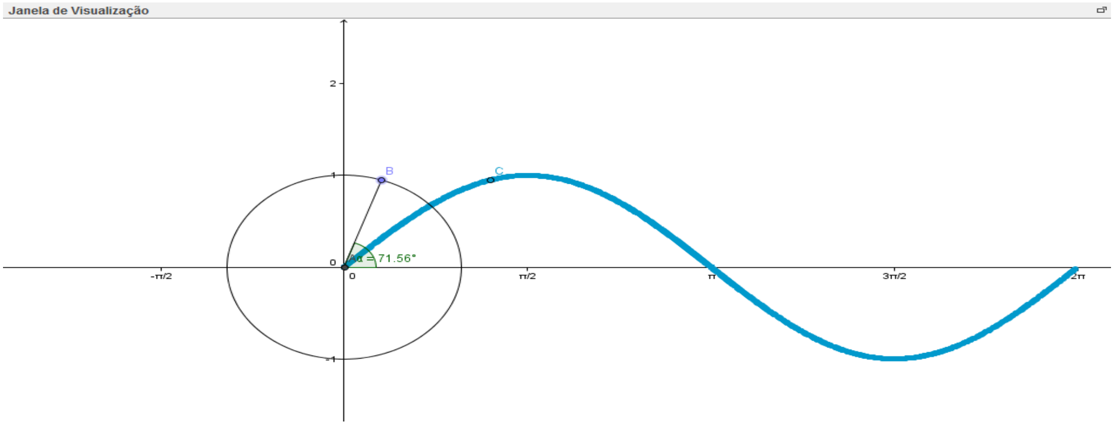


Então escolha “cor” e selecione a cor desejada e “estilo” selecione o tamanho do ponto.

07) Agora clique no ponto B com o botão direito do mouse e surgirá na tela:

Escolha animar e veja a formação da "função seno" no intervalo de [0, 2π]:

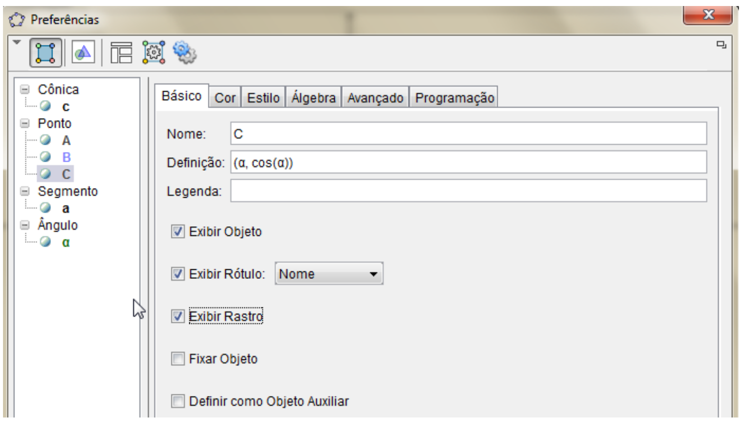
OBS. Para parar clique em:  que fica abaixo no lado esquerdo na janela de visualização.



08) Realize as mesmas operações da 01) até 05) aí na tela onde tem "entrada":

Escreva: (α,cos(α)) e clique em enter. Clique no ponto "C" que surgiu na tela e surgirá:

Escolha "Propriedades". Surgirá na tela:

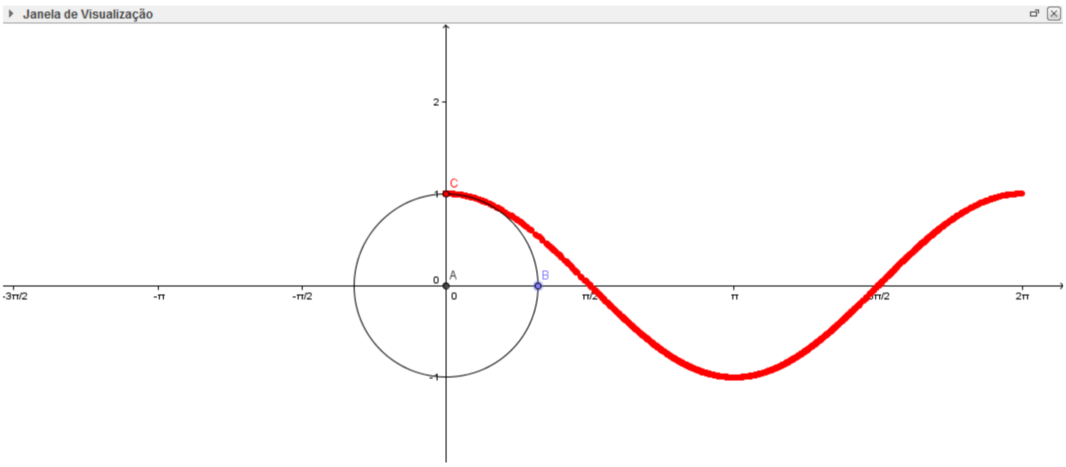


Escolha "Básico" e selecione "Exibir Objeto", "Exibir Rótulo" e "Exibir Rastro". Depois escola a "Cor" e o "Estilo".

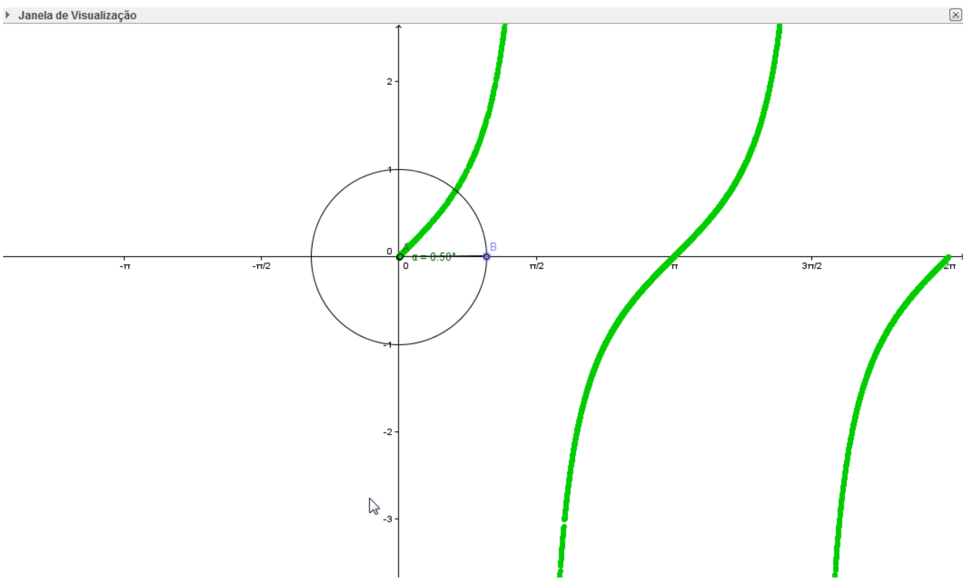
09) Agora clique no ponto B com o botão direito do mouse e surgirá na tela:

Escolha animar e veja a formação da “função coseno” no intervalo de [0, 2π]:

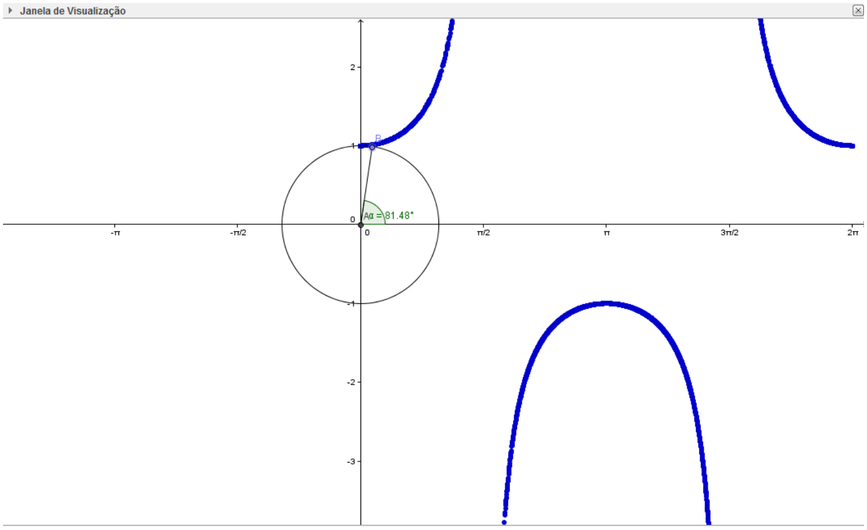
OBS. Para parar clique em:  que fica abaixo no lado esquerdo na janela de visualização.



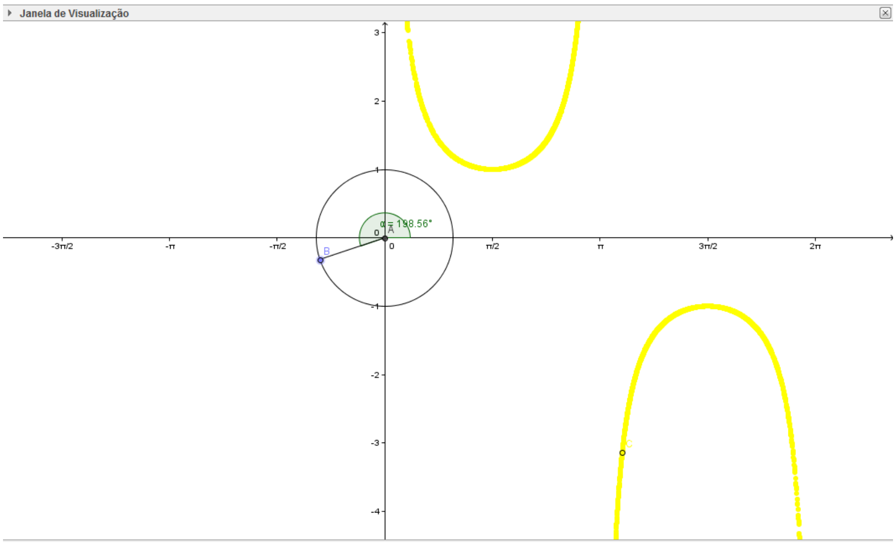
10) Repita com (α,tan(α)) e teremos:



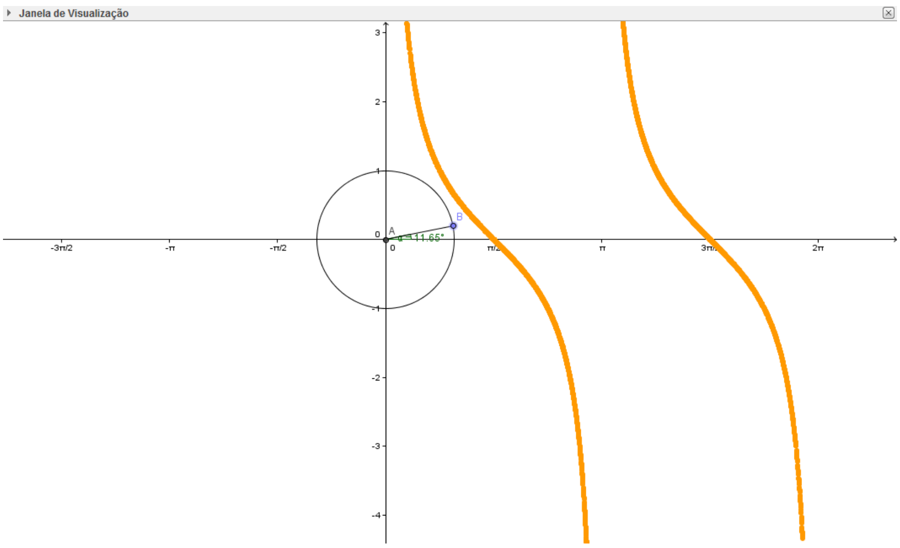
11) Repita com (α,sec(α)) e teremos:



12) Repita com (α,cossec(α)) e teremos:



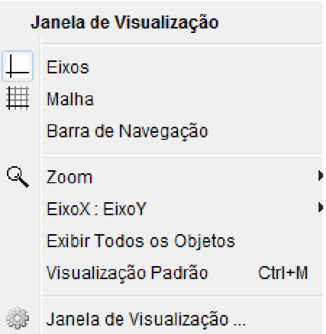
13) Repita com (α,cotan(α)) e teremos:



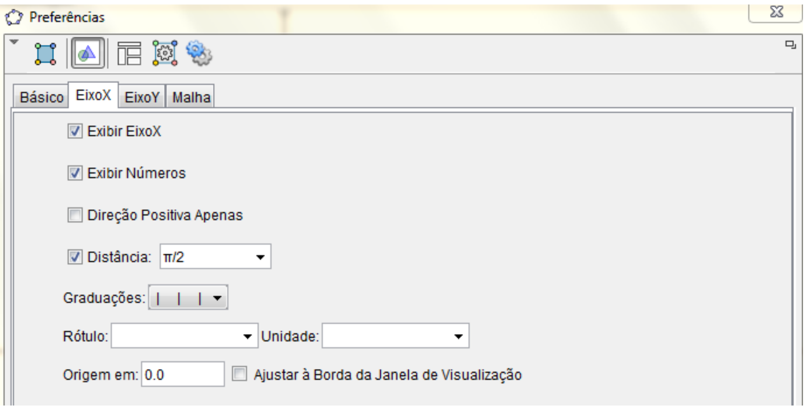
6.3 ATIVIDADE PROPOSTA 1

- Investigar os "efeitos" do parâmetro "a" em f(x) = a.sen(x), para casos particulares.

1) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

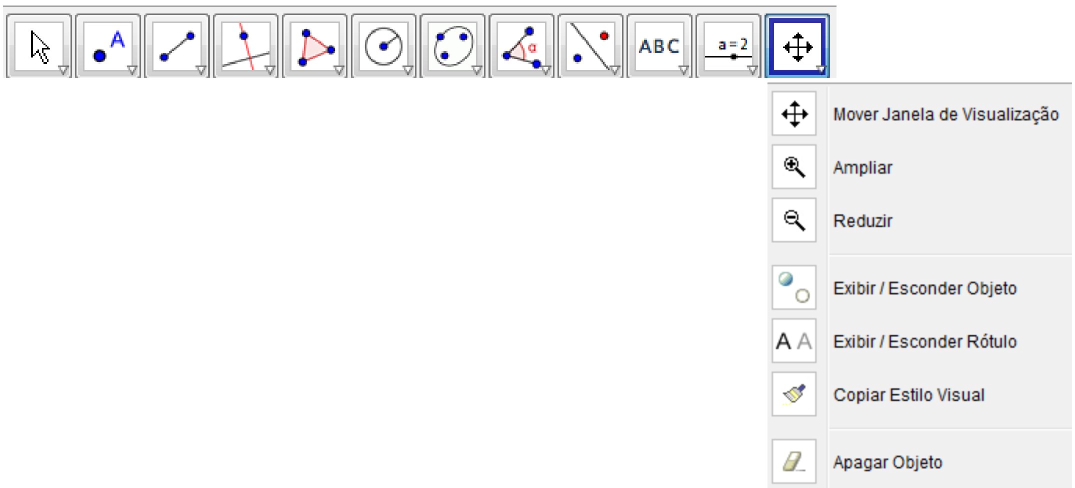


Clique em "Janela de visualização":



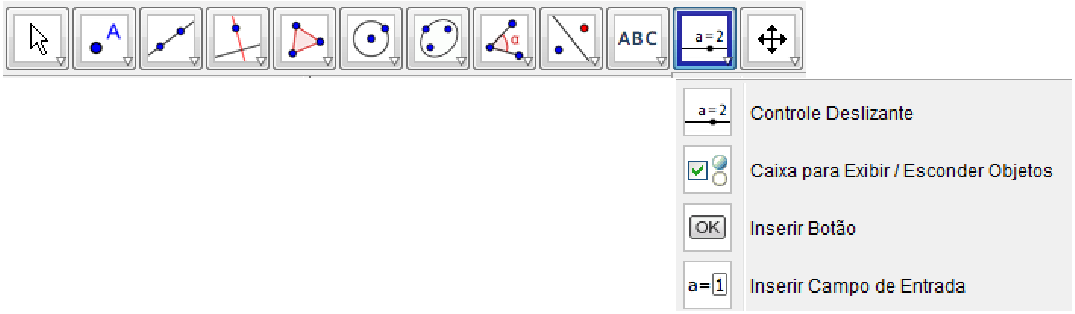
Clique em "Eixo X" e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha $\pi/2$). Depois clique em "Eixo Y" e selecione: Exibir Eixo Y, Exibir números, Distância (escolha 1).

2) Clique na barra de ferramentas "mover janela de visualização".

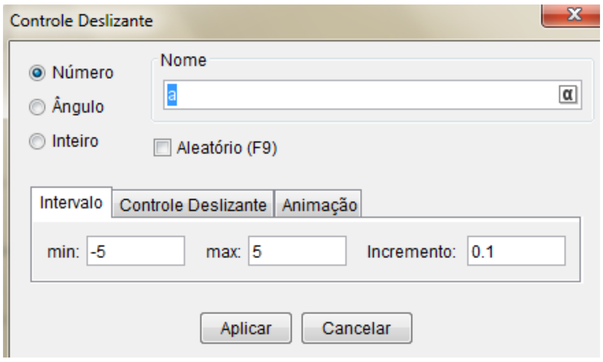


Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização.

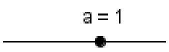
03) Clique na barra de ferramentas em:



Escolha “Controle de Deslizante”. Clique na tela e surgirá:

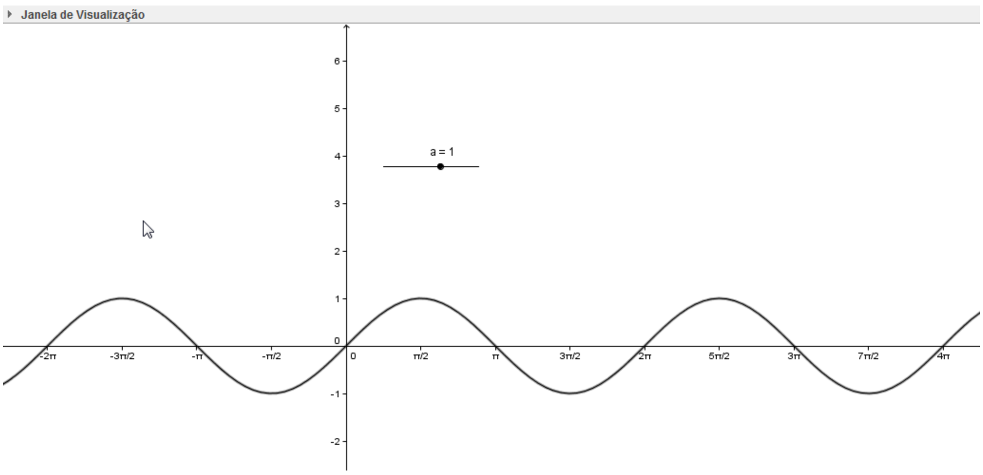


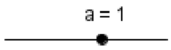
Clique no “enter” e na tela aparece:



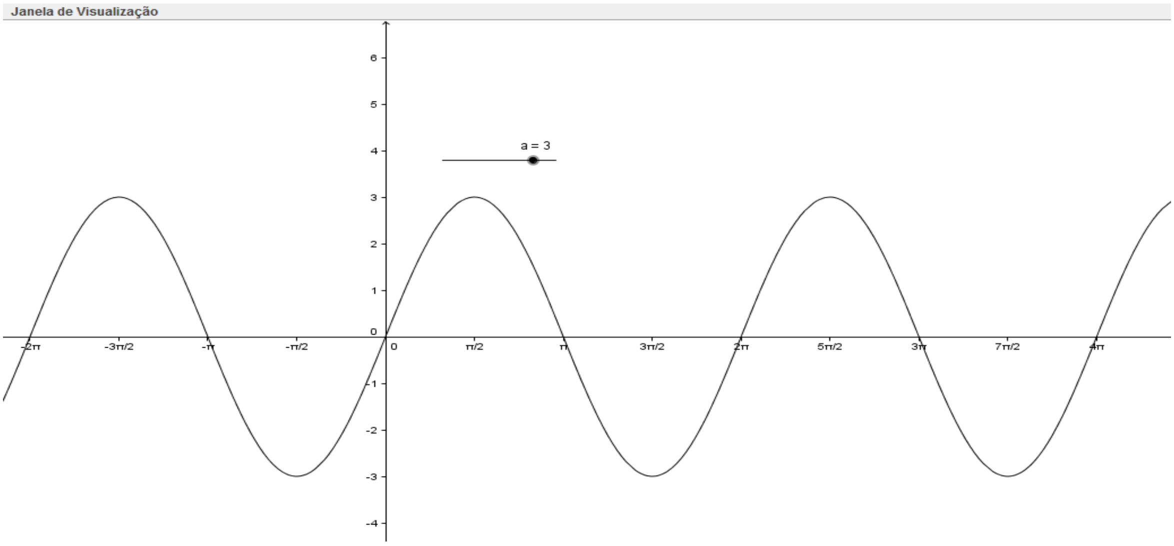
04) Na tela onde tem “entrada”:

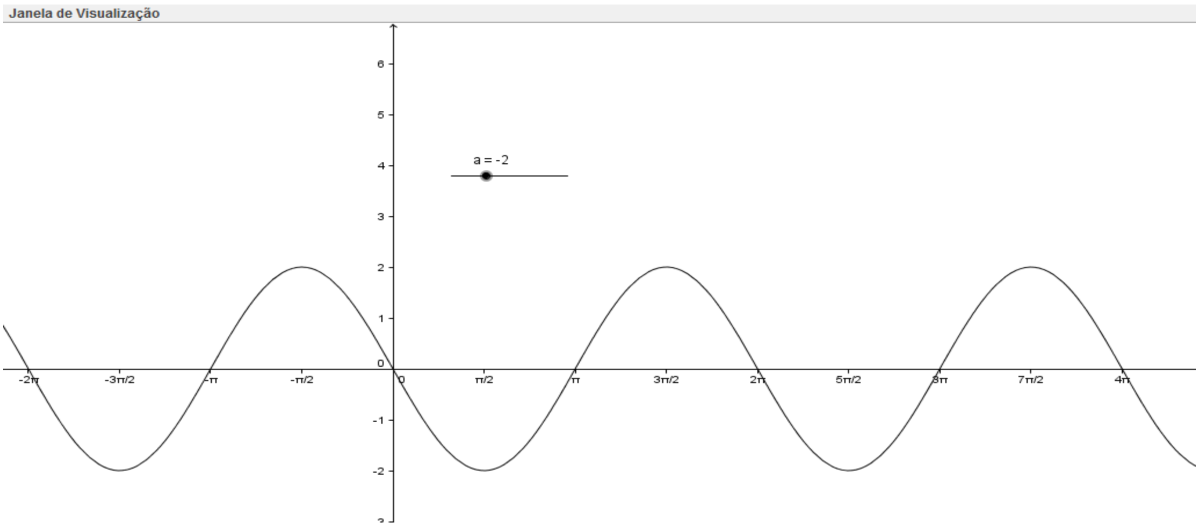
Escreva: f(x) =a*sen(x) e clique “enter”. A função senx surgirá na tela:



5) Mova agora 

de um lado e para o outro e perceba as mudanças da função:





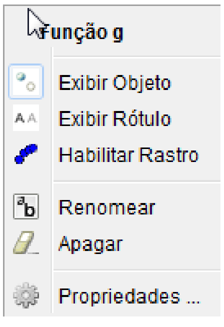
6) Agora que você observou o efeito do parâmentro “a”, coloque no mesmo par de eixos as seguintes funções:

g(x) = 2sen(x)

h(x) = 5sen(x)

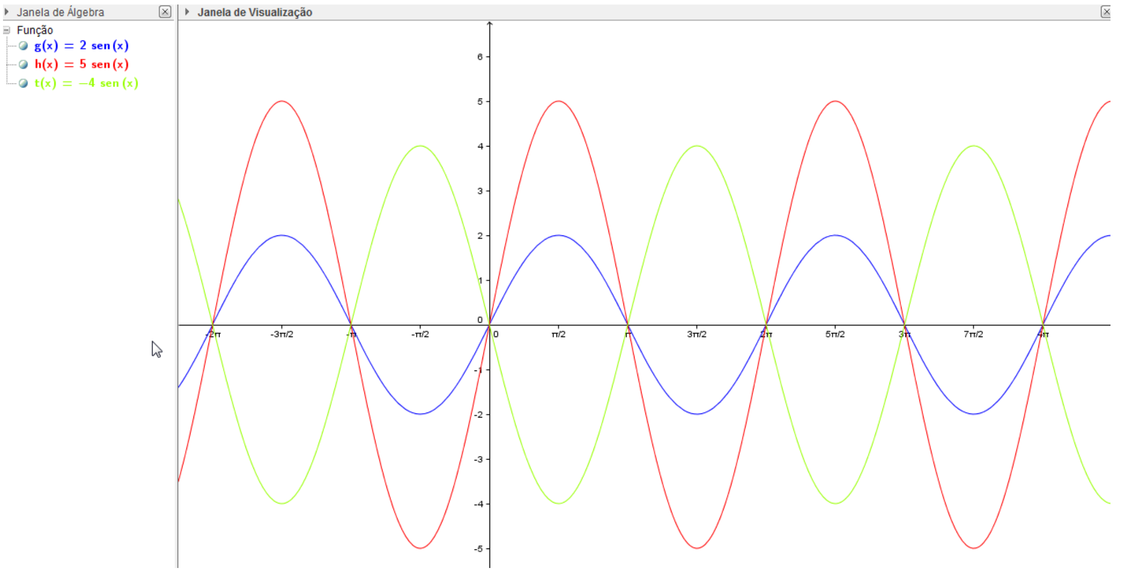
t(x) = - 4sen(x)

OBS. Para melhor diferenciar clique sobre cada função surgirá:



Escolha “Propriedades”. E escolha uma “Cor” para cada função.

Veja como ficará:



Perguntas:

1) O que você pôde perceber com relação a imagem dessas funções?

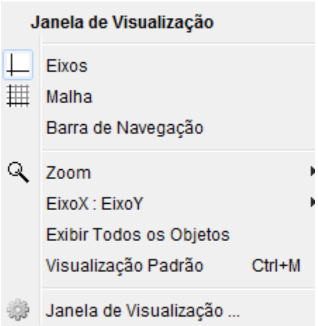
2)Qual é a imagem de cada função?

3) O período de cada função mudou? Qual o período?

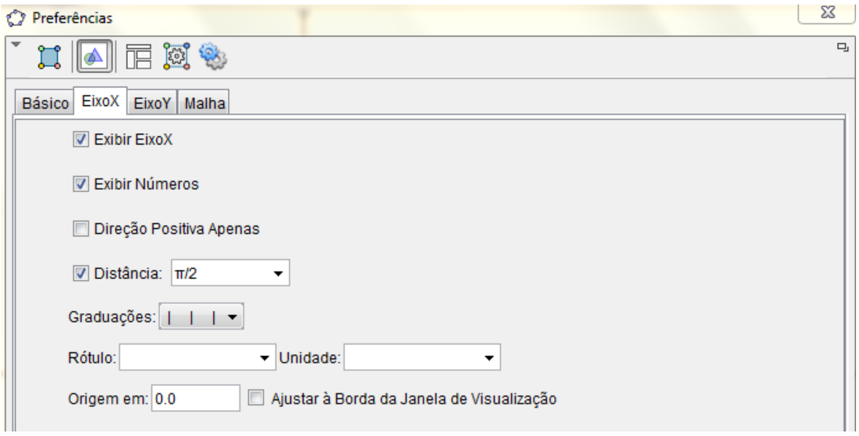
6.4 ATIVIDADE PROPOSTA 2

- Investigar os “efeitos” do parâmetro “b” em f(x) = sen(bx), para casos particulares.

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

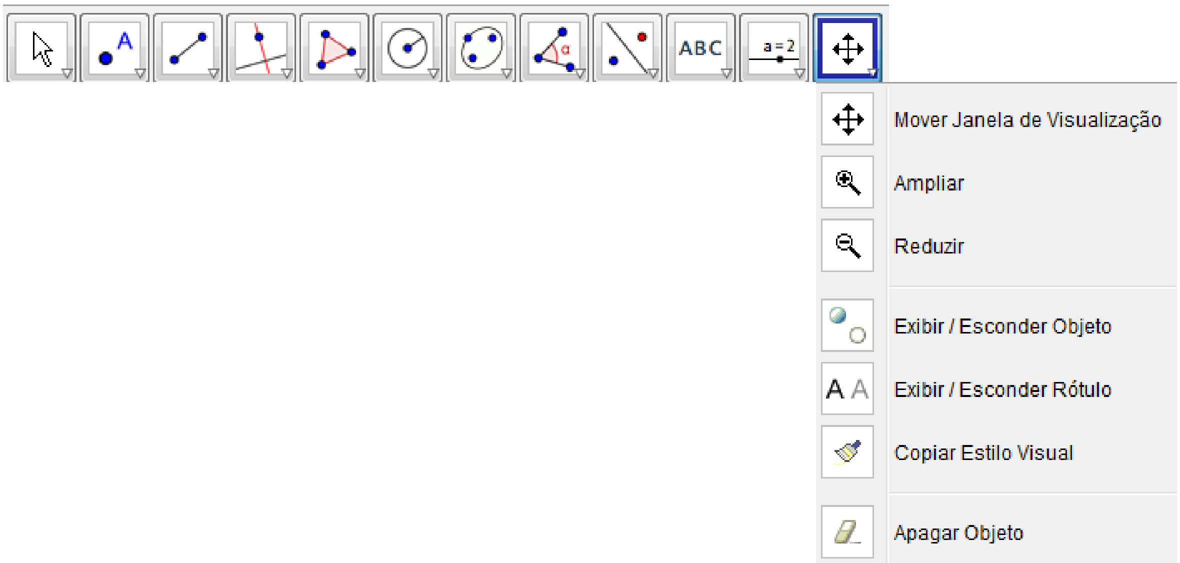


Clique em “Janela de visualização”:



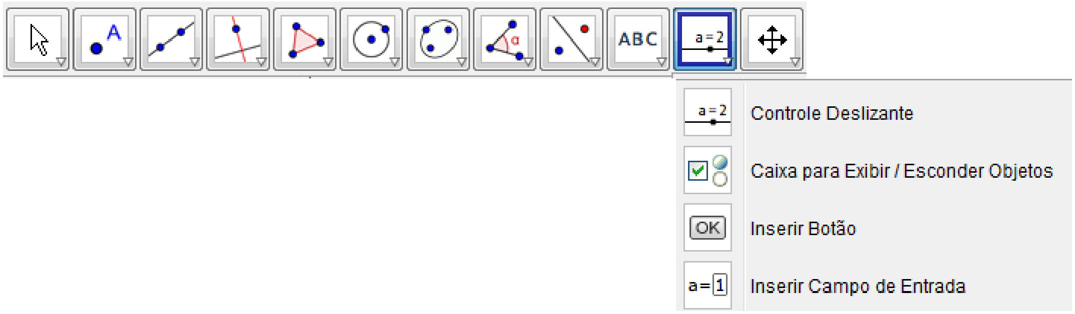
Clique em “Eixo X” e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha π/2). Depois clique em “Eixo Y” e selecione: Exibir Eixo Y, Exibir números, Distância (escolha 1).

02) Clique na barra de ferramentas “mover janela de visualização”.

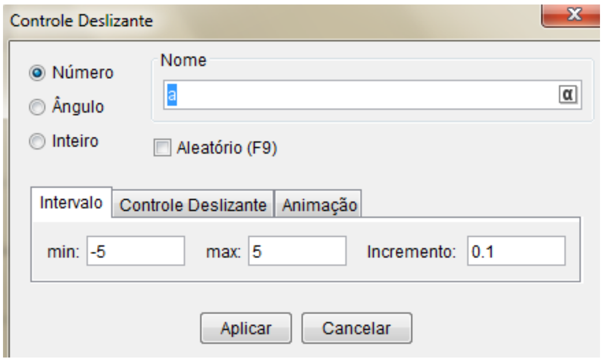


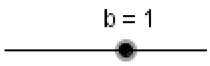
Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização.

Clique na barra de ferramentas em:



Escolha "Controle de Deslizante". Clique na tela e surgirá:

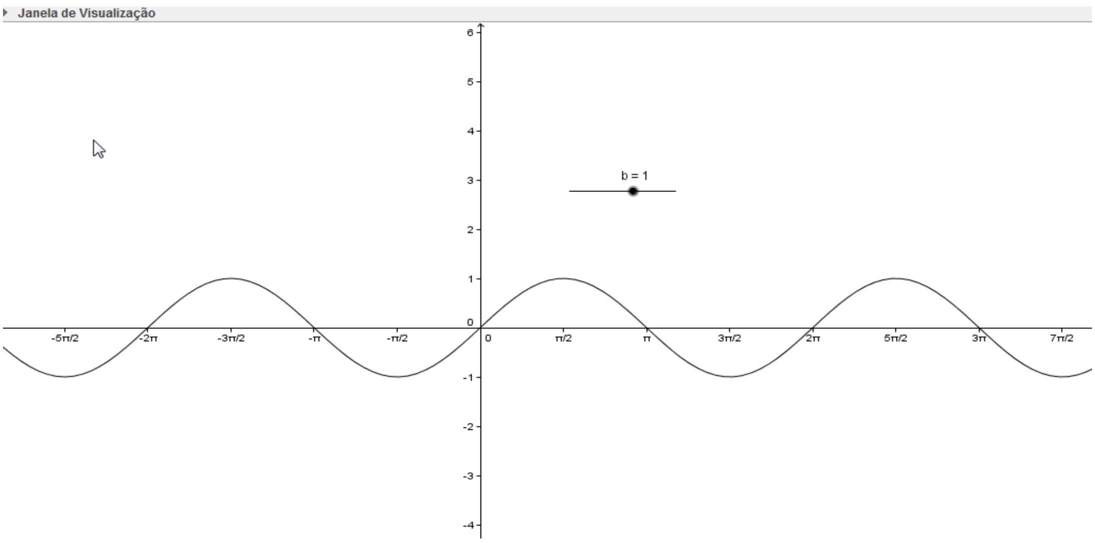


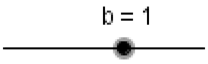
Coloque no "Nome" b e clique no "enter" e na tela 

aparece:

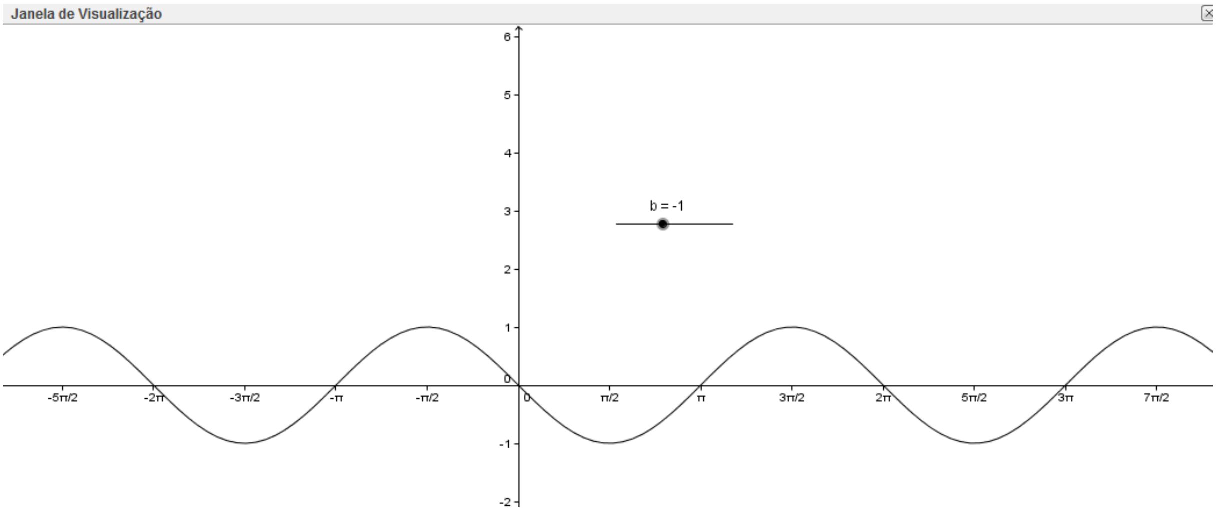
03) Na tela onde tem "entrada":

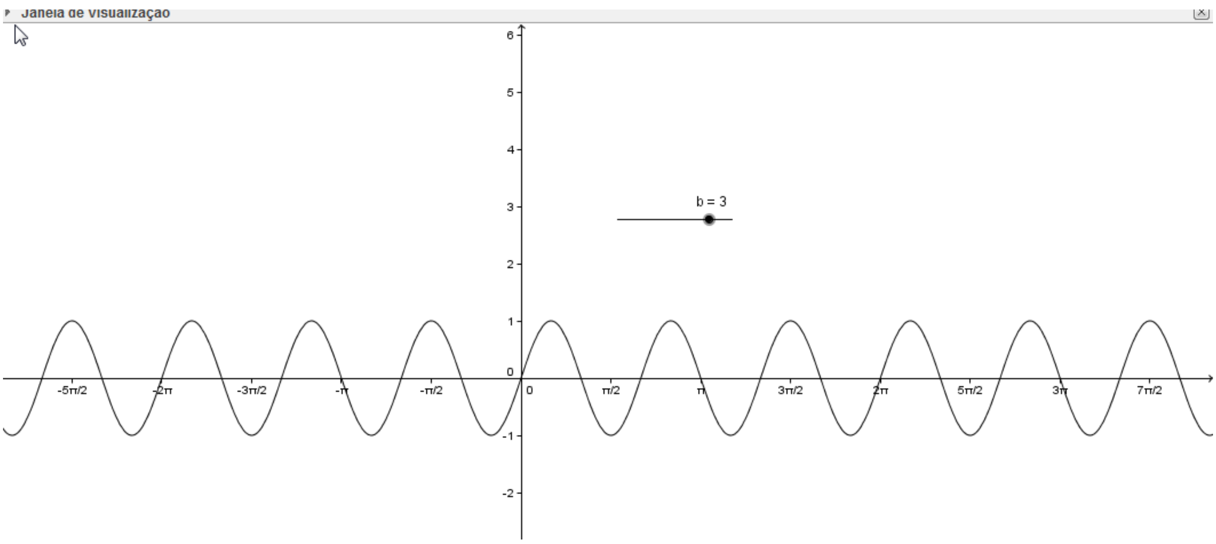
Escreva: f(x) =sen(b*x) e clique "enter". A função senx surgirá na tela:



04) Mova agora 

de um lado e para o outro e perceba as mudanças da função:





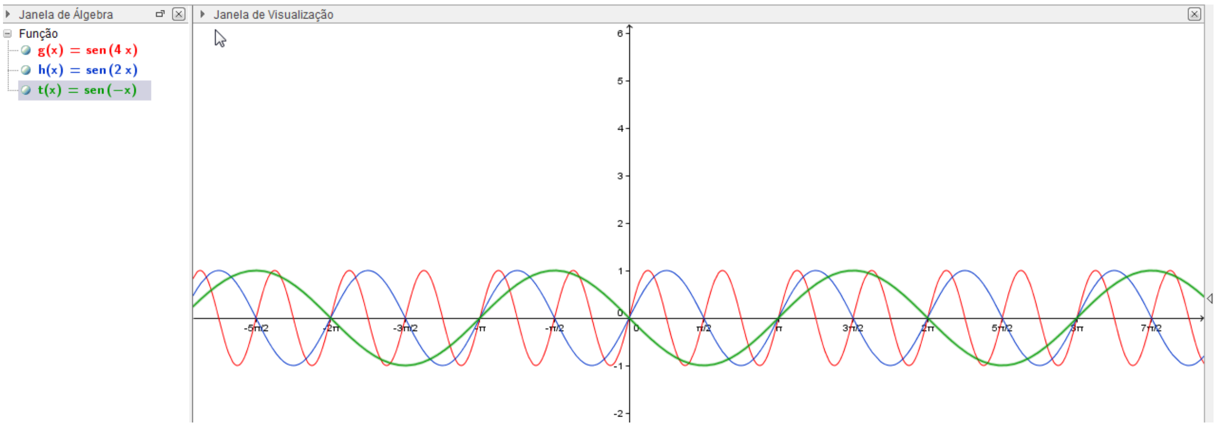
05) Agora que você observou o efeito do parâmentro “b”, coloque no mesmo par de eixos as seguintes funções:

g(x) = sen(2x)

h(x) = sen(4x)

t(x) = sen(-1x)

OBS. Escolha uma cor para cada função e veja como ficará:



PERGUNTAS:

1) O que você pôde perceber com relação a imagem dessas funções?

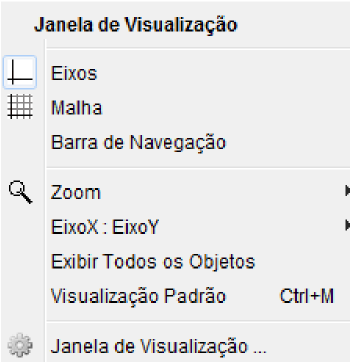
2)Qual é a imagem de cada função?

3) O período de cada função mudou? Qual o período?

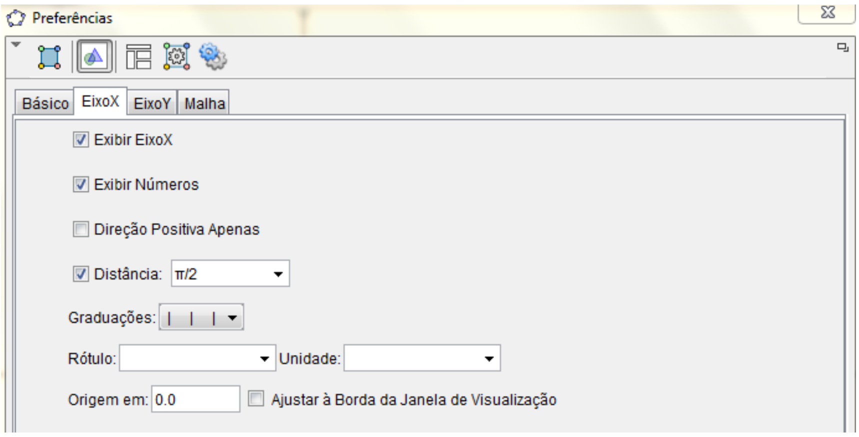
6.5 ATIVIDADE PROPOSTA 3

-- Investigar os “efeitos” do parâmetro “c” em $f(x) = \text{sen}(x + c)$, para casos particulares.

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

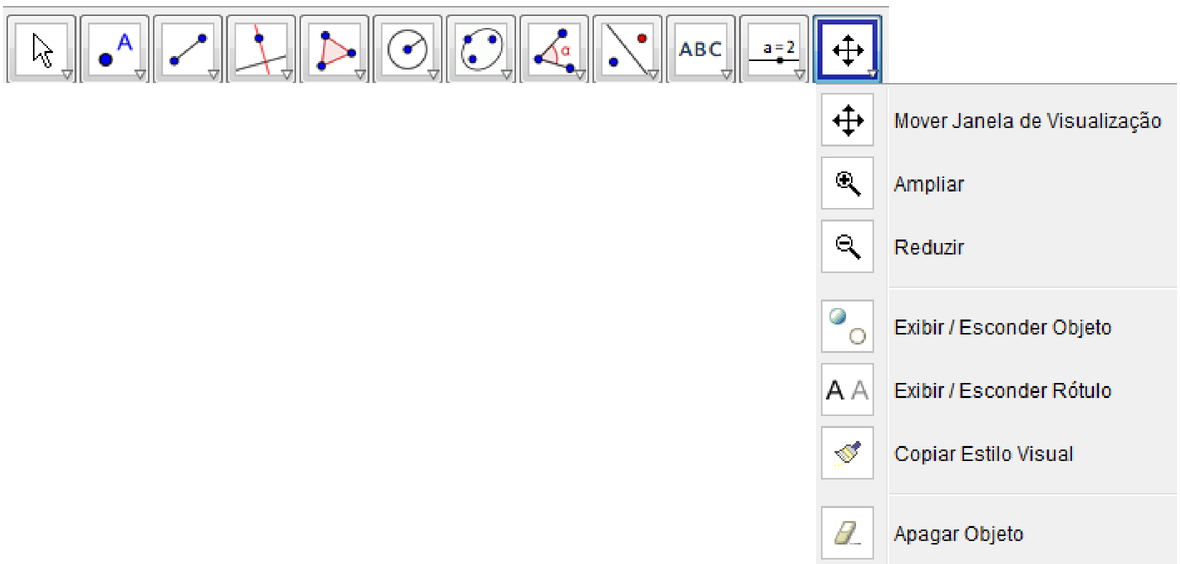


Clique em “Janela de visualização”:



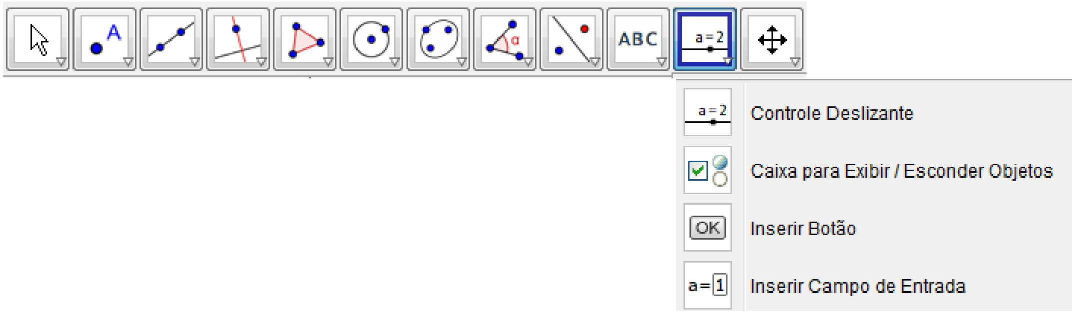
Clique em “Eixo X” e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha $\pi/2$). Depois clique em “Eixo Y” e selecione: Exibir Eixo Y, Exibir números, Distância (escolha 1).

02) Clique na barra de ferramentas “mover janela de visualização”.

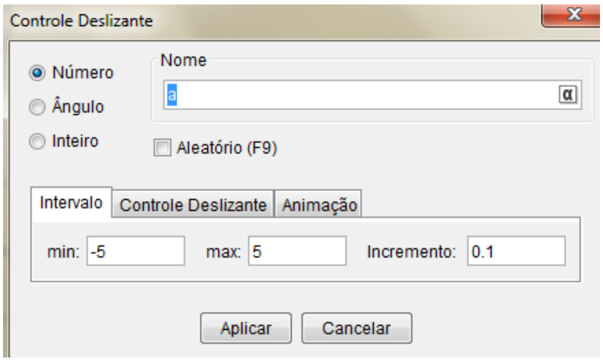


Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização.

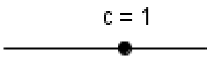
Clique na barra de ferramentas em:



Escolha “Controle de Deslizante”. Clique na tela e surgirá:

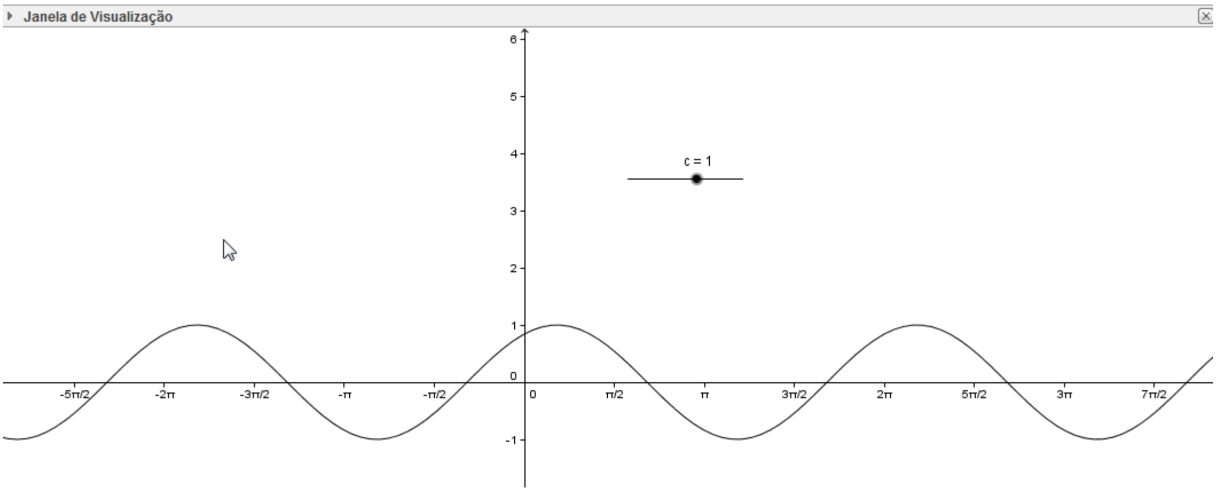


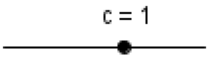
Coloque no “Nome” “c” e clique no “enter” e na tela aparece:



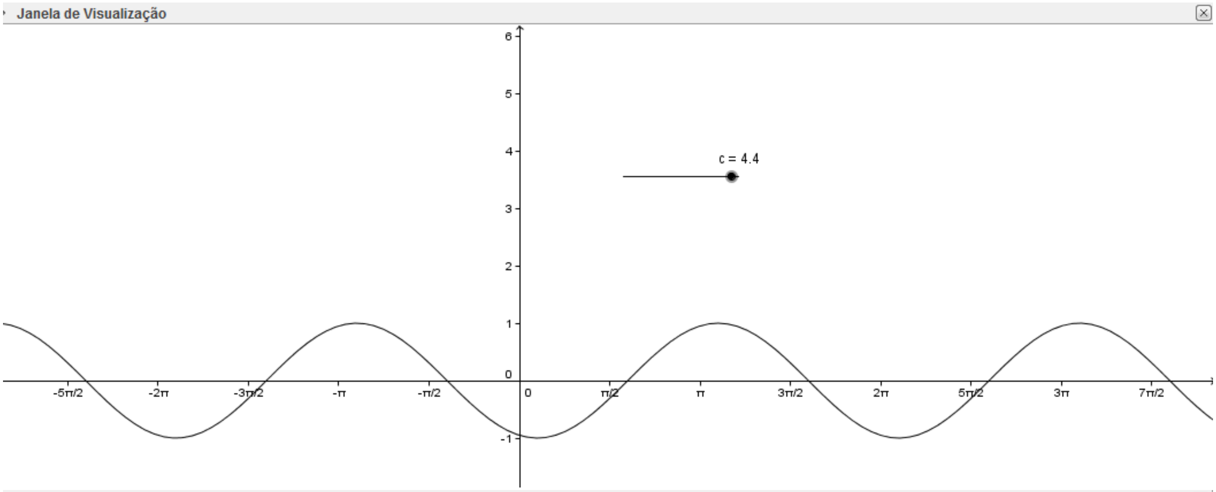
03) Na tela onde tem “entrada”:

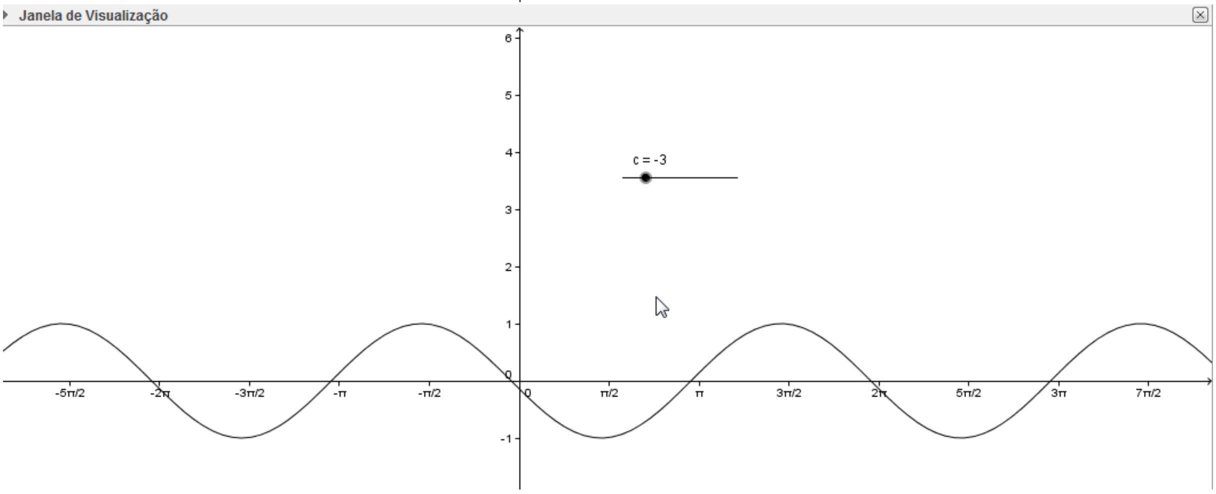
Escreva: f(x) =sen(x +c) e clique “enter”. A função senx surgirá na tela:



04) Mova 

de um lado para o outro e perceba as mudanças da função:





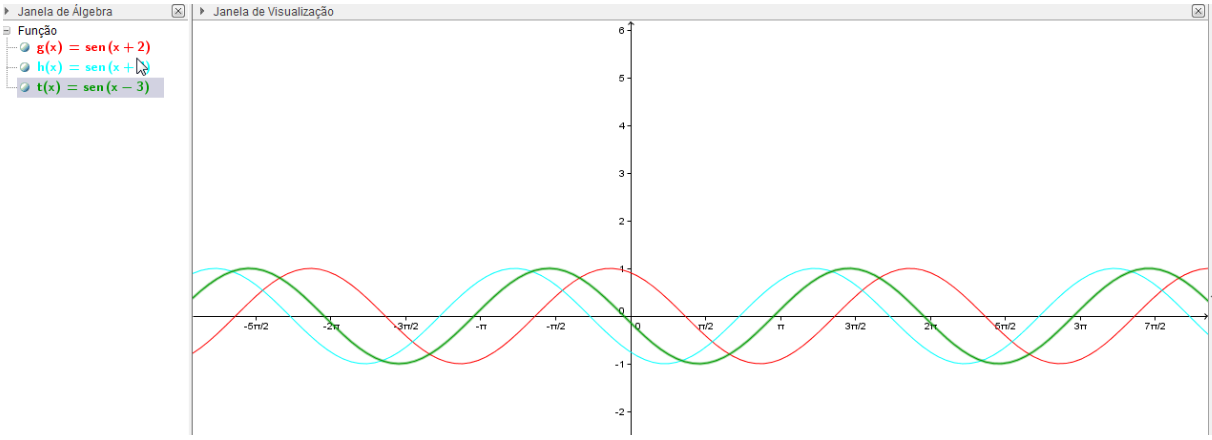
05) Agora que você observou o efeito do parâmentro "c", coloque no mesmo par de eixos as seguintes funções:

$g(x) = sen(x + 2)$

$h(x) = sen(x + 4)$

$t(x) = sen(x - 3)$

OBS. Escolha uma cor para cada função e veja como ficará:



PERGUNTAS:

1) O que você pôde perceber com relação a imagem dessas funções?

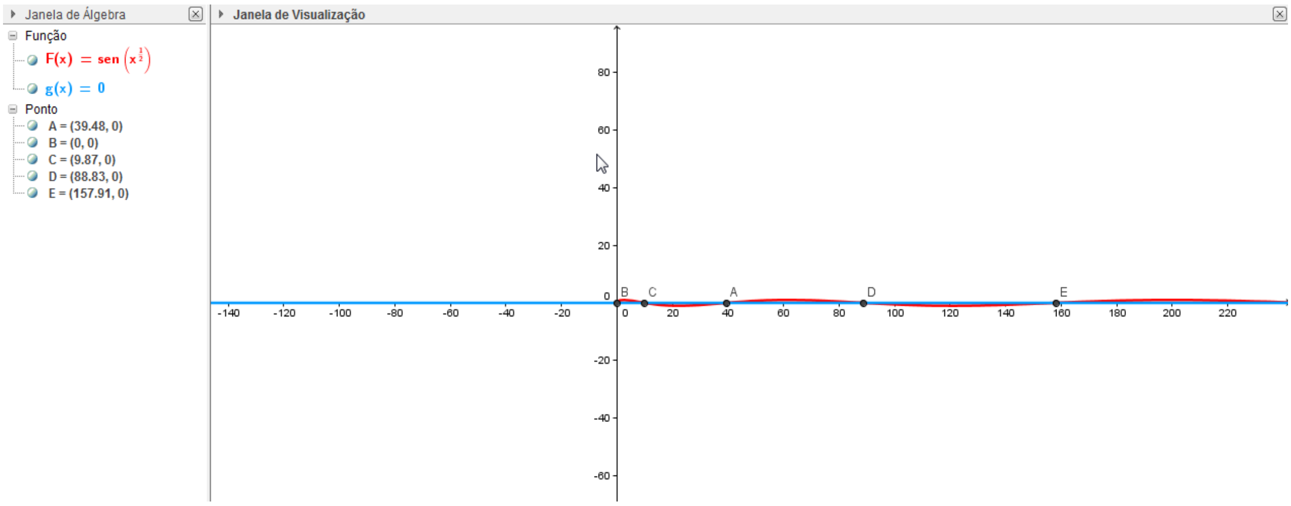
2)Qual é a imagem de cada função?

3) O período de cada função mudou? Qual o período?

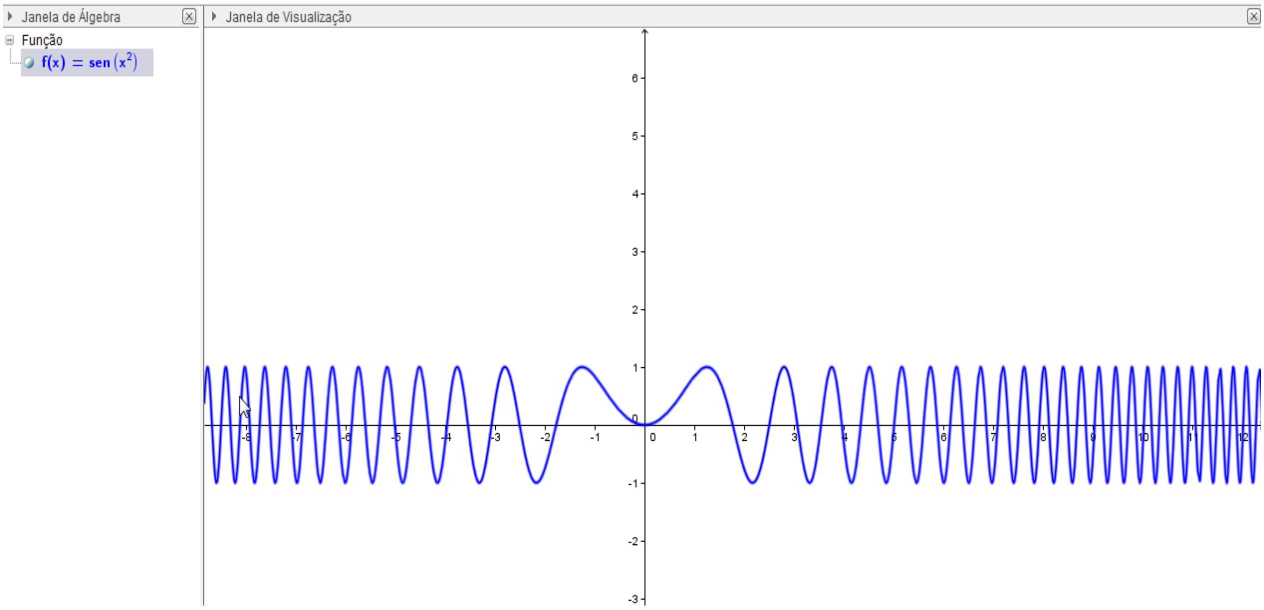
6.6 OBSERVAÇÃO

Podemos observar com ajuda do Geogebra a formação de algumas função não periódica:

a) $f(x) = \text{sen}(\sqrt{x})$, não periódica e alguns pontos de intersecção com a função $g(x) = 0$.



b) $f(x) = \text{sen}(x^2)$



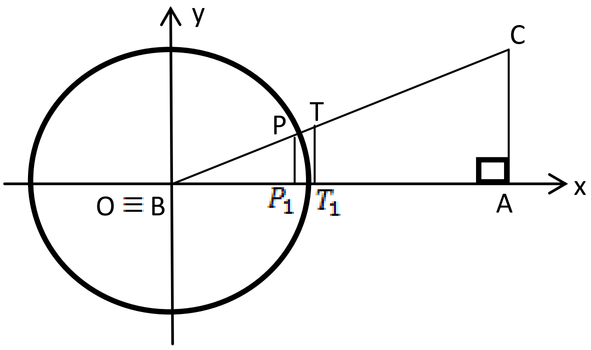
7. RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste capítulo apresentamos as Relações métricas num Triângulo Retângulo. Segue à teoria uma sequência de operações que vão servir para que professores, alunos de Matemática ou interessados obtenham boas conclusões.

7.1 CONHECENDO A TEORIA

Vamos mostrar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC.

Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário e centro no vértice B e vamos fixar um sistema x0y de referencia como mostra a figura abaixo.



1ª) $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{P_1P}{BP} = \frac{CA}{BC} \rightarrow \frac{sen\,\hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \rightarrow \boxed{sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}}$$

Isto é, o seno de um ângulo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa.

2º) $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \rightarrow \frac{cos\,\hat{B}}{1} = \frac{c}{a} \rightarrow \boxed{cos\,\hat{B} = \frac{c}{a}}$$

Isto é, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa.

3ª) $\Delta BTT_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{TT_1}{OT_1} = \frac{AC}{OA} \rightarrow \frac{tg\,\hat{B}}{1} = \frac{b}{c} \rightarrow \boxed{tg\,\hat{B} = \frac{b}{c}}$$

Obs. Notando que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$ e $\hat{A} = 90^0$, decorre $\hat{B} + \hat{C} = 90^0$, isto é, $\hat{B}\ e\ \hat{C}$ são complementares, portanto:

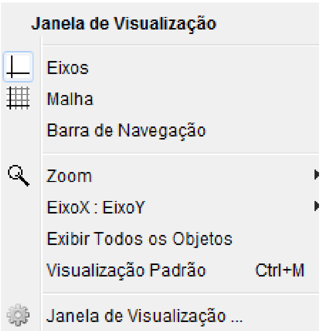
$$sen\ \hat{C} = cos\ \hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{hipotenusa}$$

$$cos\ \hat{C} = sen\ \hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}}{hipotenusa}$$

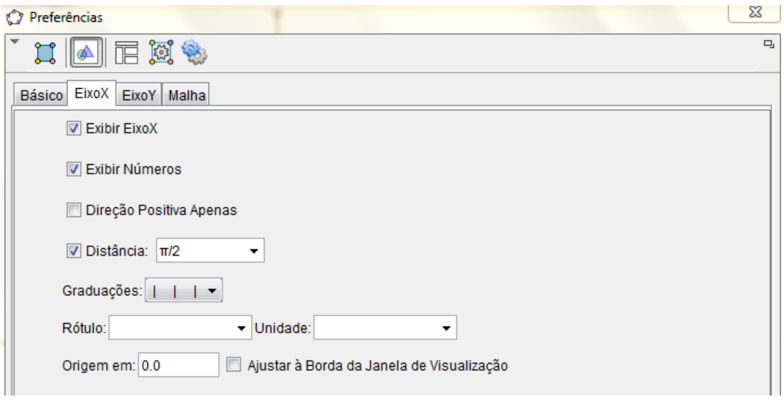
$$tg\ \hat{C} = 1/tg\ \hat{B} = \frac{c}{b} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \hat{C}}{cateto\ adjacente\ a\ \hat{C}}$$

7.2 INICIANDO AS OPERAÇÕES

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:



Clique em janela de visualização e surgirá:

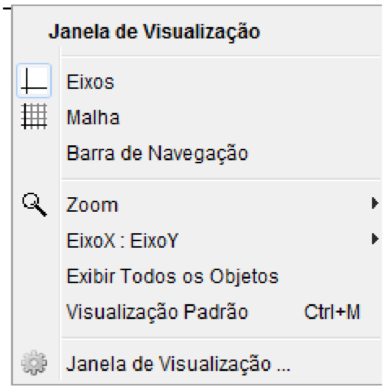


Clique em “Eixo X” e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha 1). Agora faça o mesmo escolhendo o “EixoY”.

02) Clique na barra de ferramentas em:

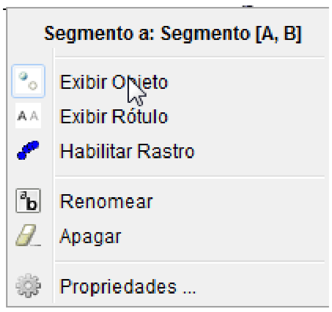
Escolha a opção “segmento definido por dois pontos”. E escolha o primeiro ponto (0,0) e outro pode ser (4,0), formando o primeiro segmento $\overline{AB}$. Em seguida escolha o ponto (0,0) e outro que pode ser (0,3), formando o segmento $\overline{AC}$. E continue para formar o outro segmento escolhendo os pontos (0,3) e (4,0), formando o segmento $\overline{BC}$.

03) Clique com o botão direito do mouse no EixoX , surgirá a janela:

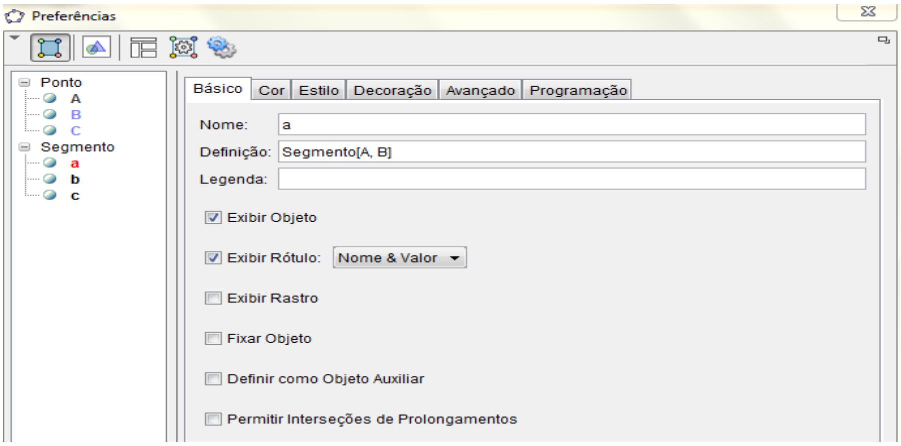


Escolha a opção “Eixos”. E os eixos desaparecem.

04) Vamos deixar o ambiente mais agradável. Com o botão direito do mouse clique no segmento $\overline{AB}$ e surgirá a janela:

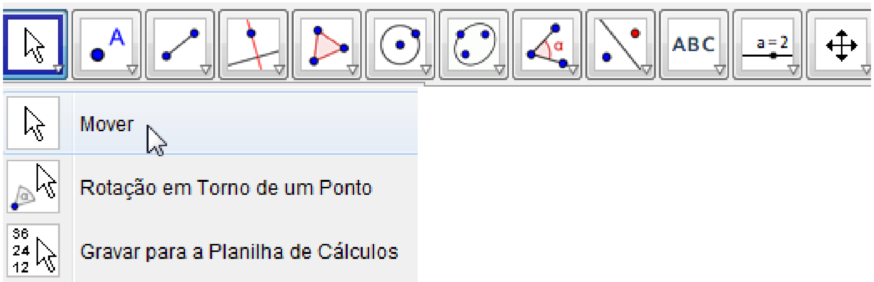


Escolha“propriedade”. Abrirá a seguinte tela:



Clique em “Básico” e selecione “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo – escolha nome & valor”, depois escolha “Cor” e seleciona uma cor, em seguida escolha o “Estilo” e escolha uma espessura de linha. Repita as mesmas operações para o segmento $\overline{AC}$ e para o segmento $\overline{BC}$ alterando somente as cores.

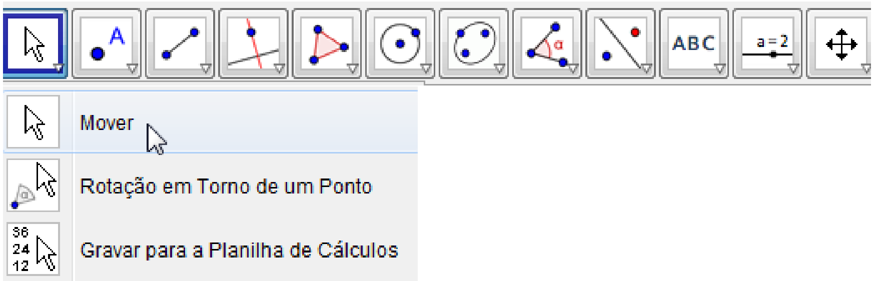
05) Clique na barra de ferramentas em:



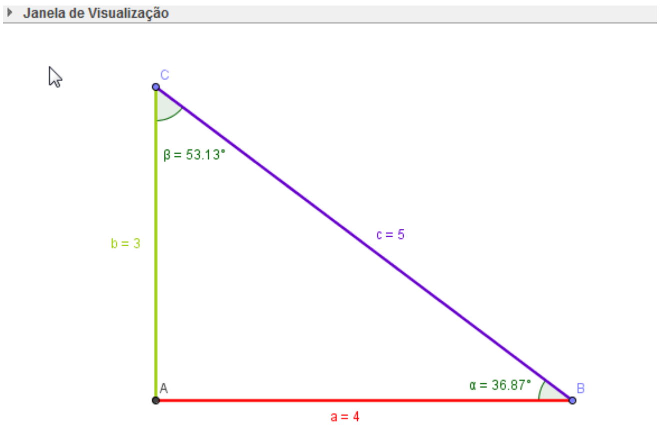
Escolha “Mover”. Mova “a”, “b” e “c” para fora do triângulo.

06) Vamos colocar os ângulos. Clique na barra de ferramenta em:

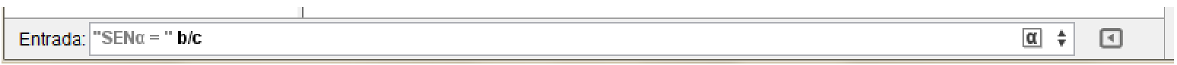
Escolha “Ângulo”. Clique no segmento $\overline{BC}$ e depois no segmento $\overline{AB}$, e surgirá o ângulo α. Em seguida clique no segmento $\overline{AC}$ e depois em segmento $\overline{BC}$, e surgirá o ângulo β. Clique na barra de ferramenta em:



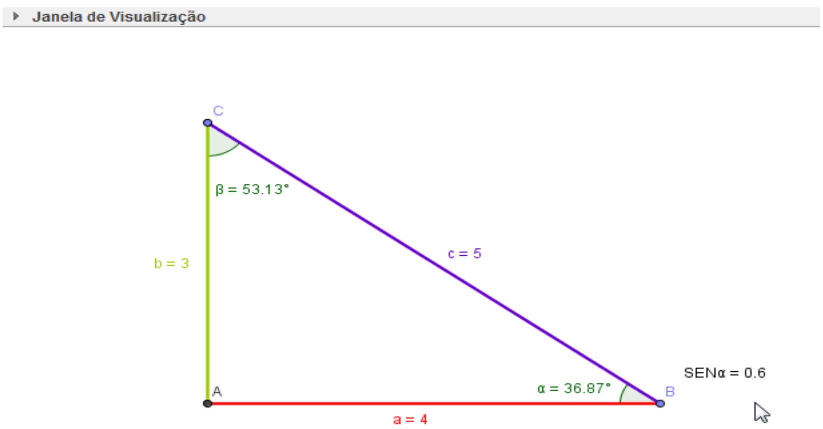
Escolha “Mover”. Mova o “α” e o “β” para dentro do triângulo. Sua tela ficará:



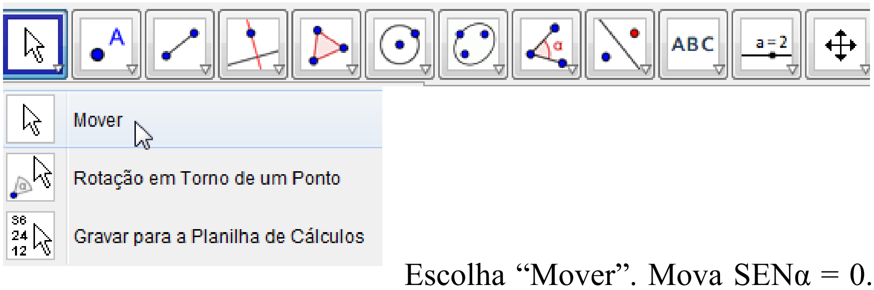
07) Agora vá até:



Escreva: “SENα =” b/c e clique em enter. Surgirá na janela de visualização SENα = 0.6, veja:

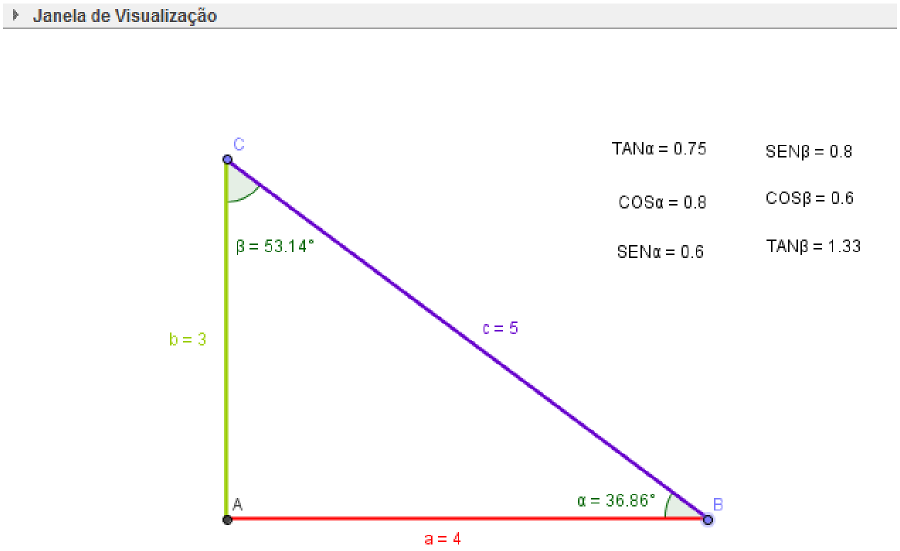


Repita a operação colocando "COSα =" a/c, depois "TANα =" b/a e surgirá na tela COSα = 0.8 e TANα = 0.75. Clique na barra de ferramenta em:



Escolha "Mover". Mova SENα = 0.6, COSα = 0.8 e TANα = 0.75 de forma que fique um abaixo do outro. Faça o mesmo para SENβ= a/c, COSβ = b/c e TANβ = a/b.

08) A figura na janela de visualização ficará:



7.3 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1) Mova os pontos B ou C que mudam os ângulos α e β e comprove as igualdades:

a) sen α = cos β

b) cos α = sen β

2) Mova os pontos B ou C que mudam os tamanhos dos lado a, b e c, e calcule:

a) sen α = $\frac{b}{c}$ e) cos β = $\frac{a}{c}$

b) cos α = $\frac{a}{c}$ d) sen β = $\frac{b}{c}$

c) tg α = $\frac{b}{c}$ f) tg β = $\frac{c}{b}$

8. LEI DOS COSSENOS E DOS SENOS

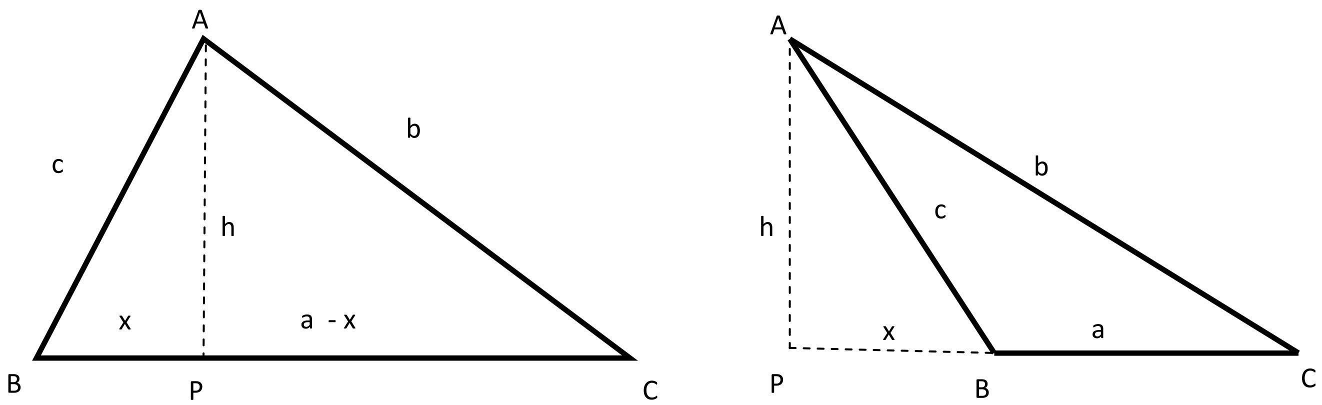
Neste capítulo apresentamos a Lei dos Senos e Lei dos Cossenos. Segue a teoria e uma sequencia de operações que vão servir para que professores, alunos de Matemática ou interessados vejam o obtenham boas conclusões sobre a Lei dos Senos e dos Cossenos.

8.1 CONHECENDO A TEORIA

A Lei dos Cossenos e a Lei dos Senos

Dado o triângulo ABC, sejam a,b, c as medidas dos lados BC, AC e AB respectivamente.

Sejam ainda h = $\overline{AP}$ a altura baixada de A sobre o lado BC. Há duas possibilidades, ilustradas nas figuras, conforme o ponto P pertença ao segmento BC ou esteja sobre seu prolongamento.



No primeiro caso, seja x = $\overline{BP}$ = c . cos $\hat{B}$. O Teorema de Pitágoras aplicado aos triângulos ABP e APC fornece as igualdades

$$c^2 = h^2 + x^2 ,$$

$$b^2 = h^2 + (a - x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 - 2ax = h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

Comparando estas igualdades obtemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}.$$

No segundo caso, x = $\overline{BP}$ = c . cos ($\pi - \hat{B}$)= - c . cos $\hat{B}$. (Note que cos $\hat{B}$ < 0, logo – c . cos $\hat{B}$ é positivo). Novamente Pitágoras, aplicado aos triângulos APB e APC nos dá:

$c^2 = h^2 + x^2$

$b^2 = h^2 + (a + x)^2 = h^2 + x^2 + a^2 + 2ax = h^2 + x^2 + a^2 - 2ac \, . \cos \hat{B}$

Daí resulta, como antes, que

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \, . \cos \hat{B}$

Portanto a igualdade vale em qualquer caso. Ela é a *lei dos cossenos*, da qual o Teorema de Pitágoras é um caso particular, que se tem quando $\hat{B}$ é um ângulo reto.

Evidentemente, tem-se também

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \, . \cos \hat{A}$

e $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \, . \cos \hat{C}$

As mesmas figuras nos dão, no primeiro caso:

h = c . sen $\hat{B}$ = b . sen $\hat{C}$,

logo

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

No segundo caso temos

h = b . sen $\hat{C}$

e h = c . sen ($\pi - \hat{B}$) = c – sen $\hat{B}$,

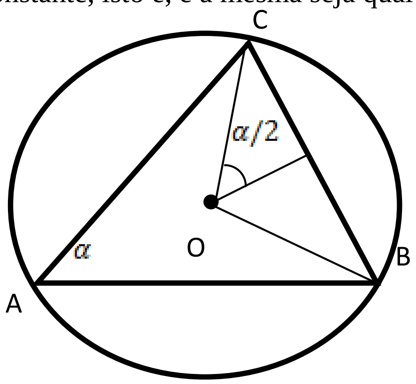
logo novamente:

$$\frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Podemos então concluir que, em qualquer triângulo, tem-se

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Esta é a *lei dos seno*. Ela diz que, em todo triângulo, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto é constante, isto é, é a mesma seja qual for o lado escolhido.



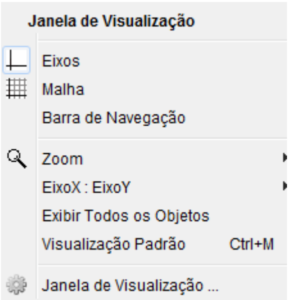
Há uma interpretação geométrica para a razão a / sen $\hat{A}$. Ela é igual ao diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Com efeito, a perpendicularidade OP, baixada do centro do círculo circunscrito sobre o lado BC é também mediana do triângulo isósceles OBC e bissetriz do ângulo CÔB, que é igual a 2 Â. Logo CÔP = Â e daí resulta que α / 2 = r . sen Â, ou seja, $\frac{a}{sen\,\hat{A}}$ = 2r = diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

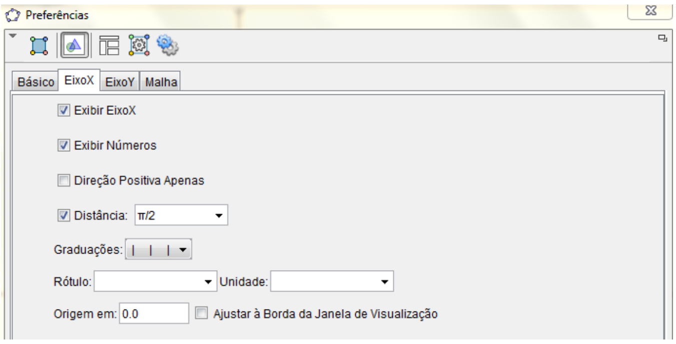
As leis dos cossenos e dos senos permitem obter os seis elementos de um triângulo quando são dados três deles, desde que um seja lado, conforme casos clássicos de congruência de triângulos.

8.2 INICIANDO AS OPERAÇÕES PARA LEI DOS SENOS

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

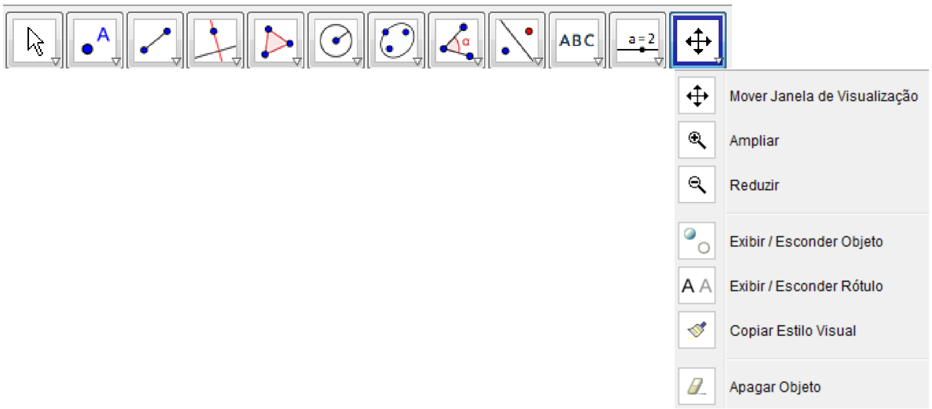


Clique em janela de visualização e surgirá:



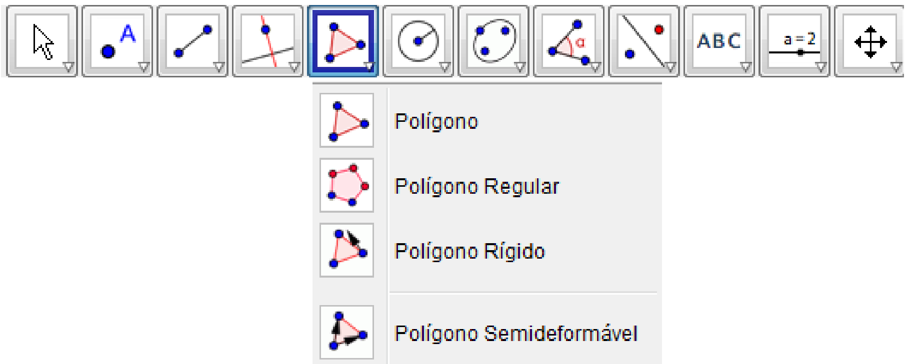
Clique em “Eixo X” e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha 1). Agora faça o mesmo escolhendo o “EixoY”.

02) Clique na barra de ferramentas “mover janela de visualização”.

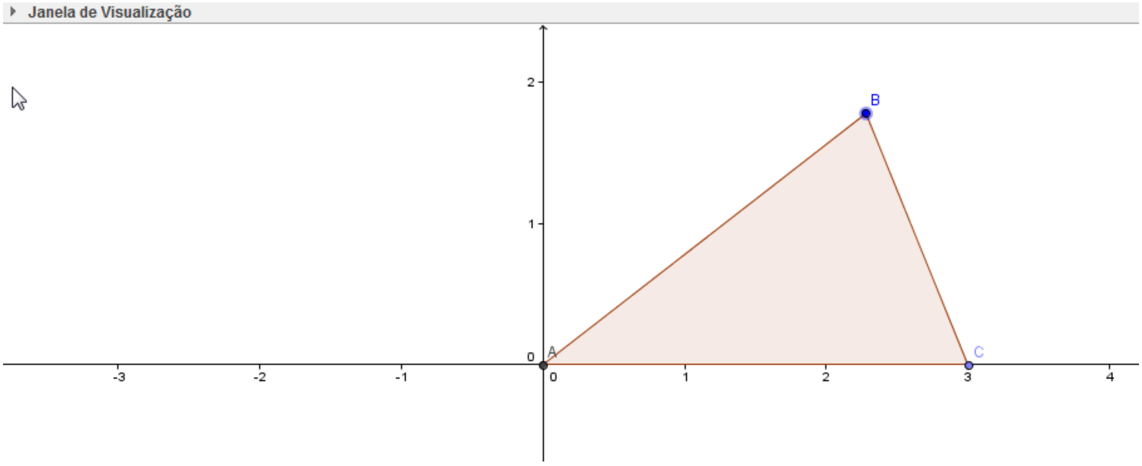


Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização

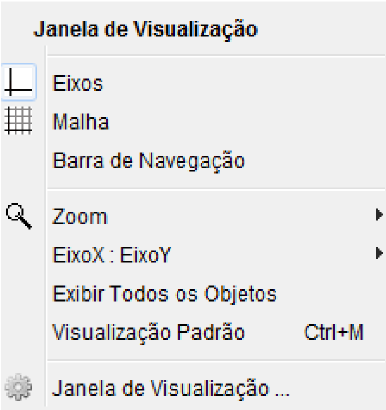
03) Vamos construir um triângulo, clique na barra de ferramenta em:



Escolha “Polígono”. Agora formaremos um triângulo ABC. Escolha o primeiro ponto A(0,0) o segundo ponto B em um lugar qualquer no primeiro quadrante e o ponto C(3,0), feixe o polígono tocando no ponto A(0,0). Veja como ficará:

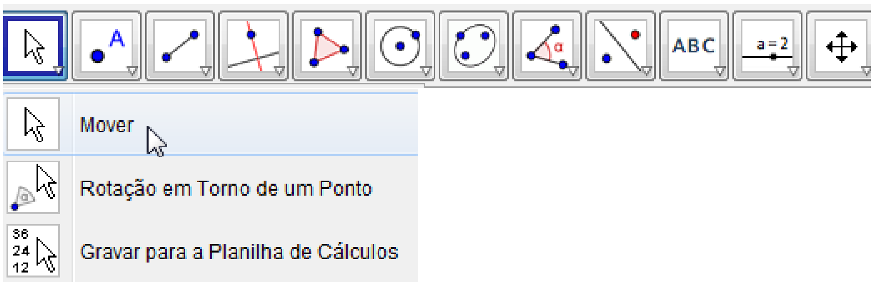


04)Clique sobre o eixo e sugirá :



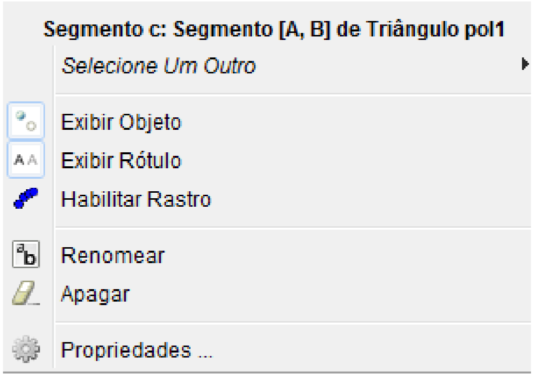
Escolha “Eixos” e os eixos sumirão.

05) Clique na barra de ferramenta em:

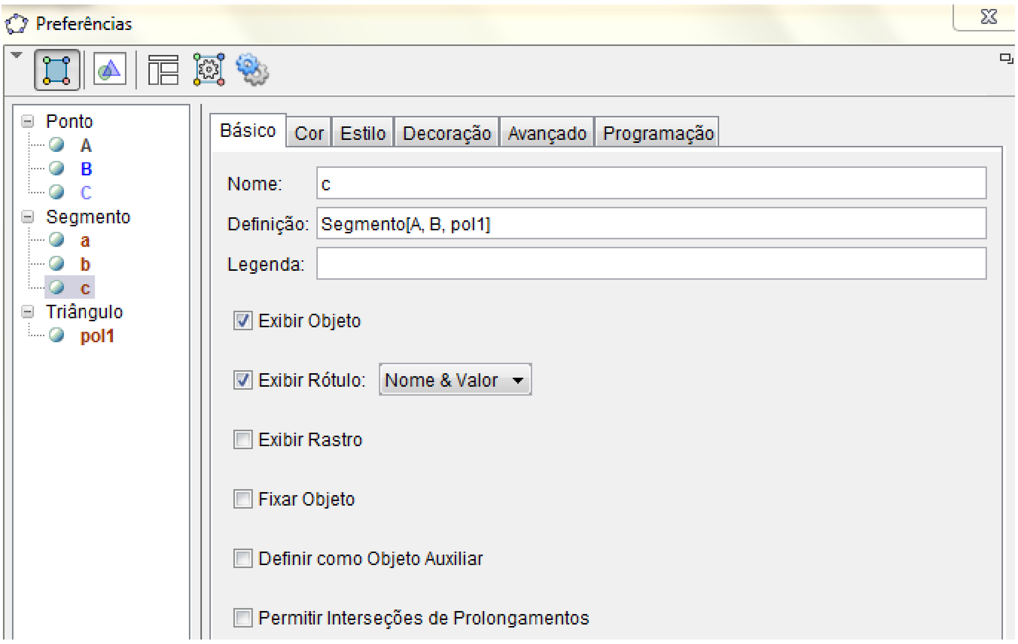


Escolha “Mover”. Coloque o mouse sobre um dos pontos e mova-o, verifique que o tamanho dos lados são alterados.

06) Clique em cada lado do triângulo e surgirá:



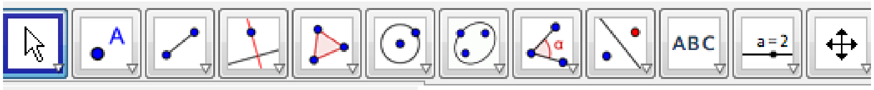
Escolha “Propriedades” e surgirá:

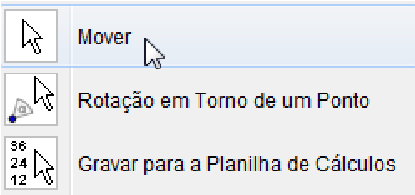


Escolha “Básico” e selecione “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo : Nome & Valor”. Clique em “Cor” escolha uma cor e clique em “Estilo” e escolha a espessura da linha.

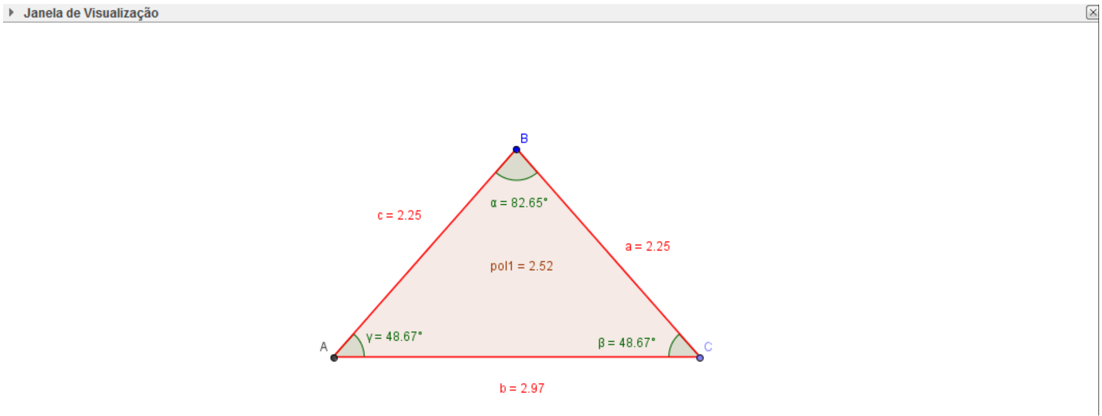
07) Vamos colocar os ângulos. Clique na barra de ferramenta em:

Escolha “Ângulo”. Clique no segmento $\overline{AB}$e depois no segmento $\overline{BC}$, e surgirá o ângulo α. Em seguida clique no segmento $\overline{BC}$ e depois em segmento $\overline{AC}$, e surgirá o ângulo β. Depois clique no segmento $\overline{AC}$ e depois em segmento $\overline{AB}$, e surgirá o ângulo γ. Clique na barra de ferramenta em:

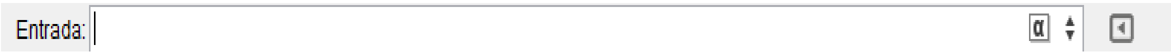


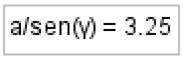


Escolha “Mover”. Mova os ângulos “α”, “β” e “γ” para dentro do triângulo. Sua tela ficará:

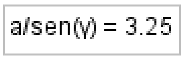


08) Na tela onde tem “entrada”:

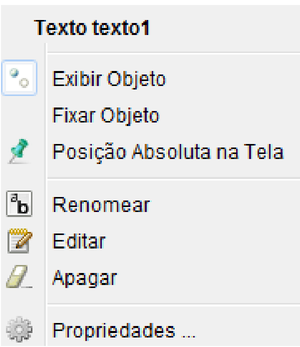


Escreva: “a/sen(γ) =” +a/sen(γ) . Surgirá na  tela .

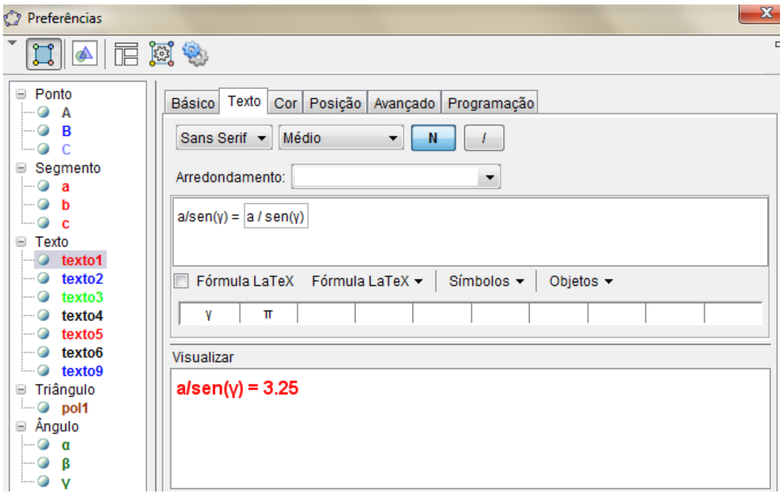
OBS. O valor poderá ser diferente.

Clique em 

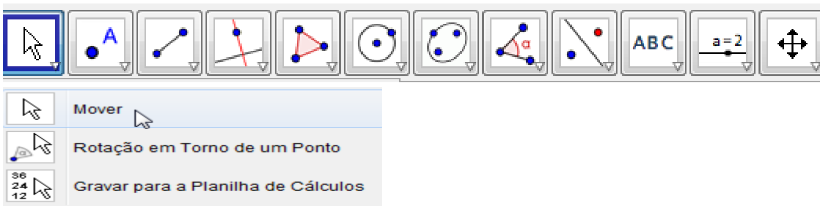
Surgirá:

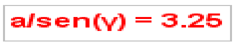


Escolha “Propriedades”. Surgirá:



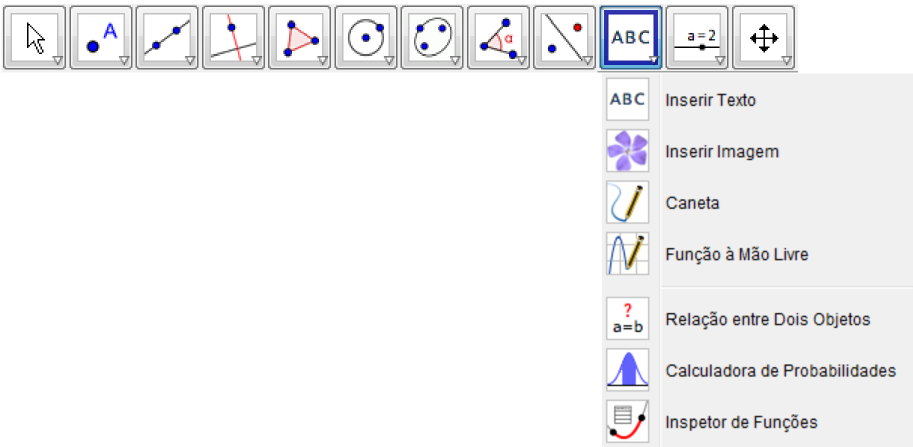
Clique em “Texto” selecione “Médio” e “N”, depois clique em “Cor” e escolha uma cor. Clique na barra de ferramentas em:



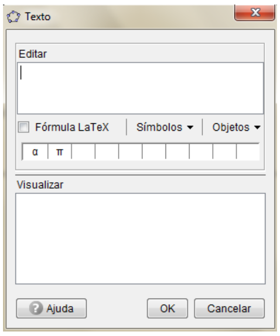
Escolha “Mover”. Mova o  quadro para um lado da janela de visualização.

09) Repita a operação 08) com “b/sen(α) =” + b/sen(α) e com “c/sen(β) =”+ c/sen(β).

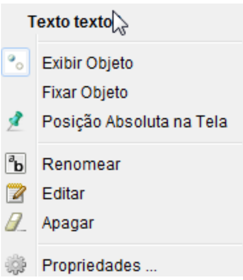
10) Clique na barra de ferramentas em:



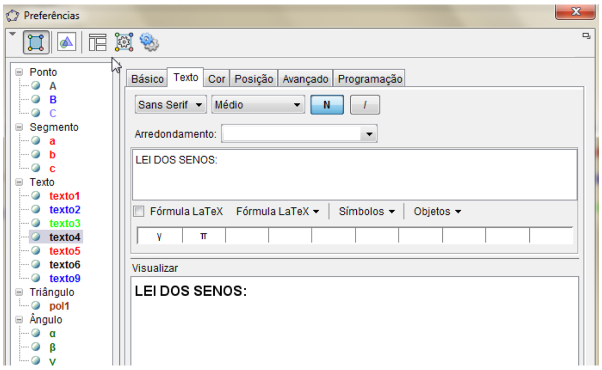
Escolha “inserir Texto”. Clique na janela de visualização e surgirá:



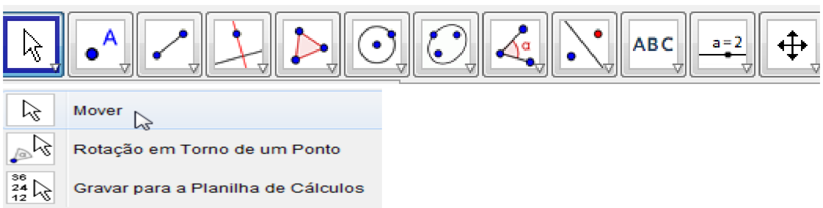
Em editar escreva: LEI DOS SENOS. Clique com o mouse com o botão direito sobre o quadro de LEI DOS SENOS e surgirá:



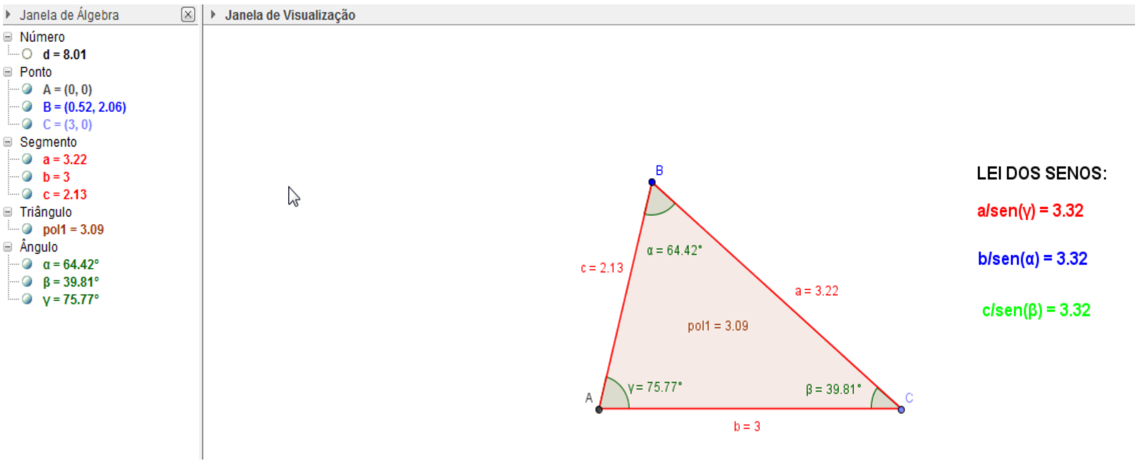
Clique em "Propriedades" e aparece:



Clique na barra de ferramentas em:

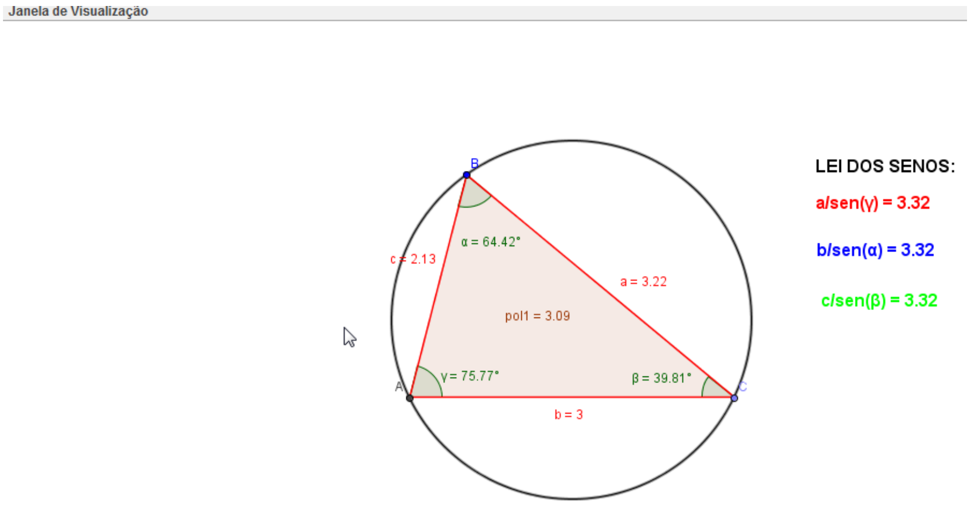


Escolha "Mover". Mova o quadro LEI DOS SENOS para junto das expressões. Sua tela ficará:



11) Clique em ferramentas em:

Escolha " Circulo definido por Três Pontos". Depois clique no ponto A, em seguida nos pontos B e C para formar a circunferência. Ficará assim:

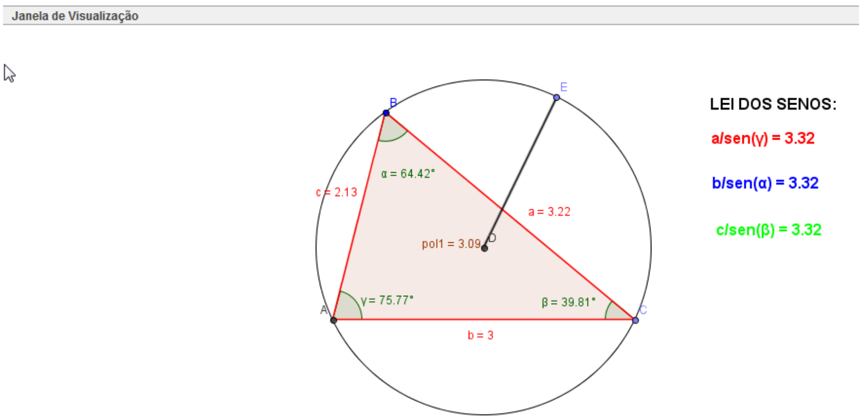


12) Agora clique em ferramenta em:

Escolha “Ponto médio ou Centro”. Clique em qualquer ponto da circunferência e surgirá o ponto D que será o centro dela.

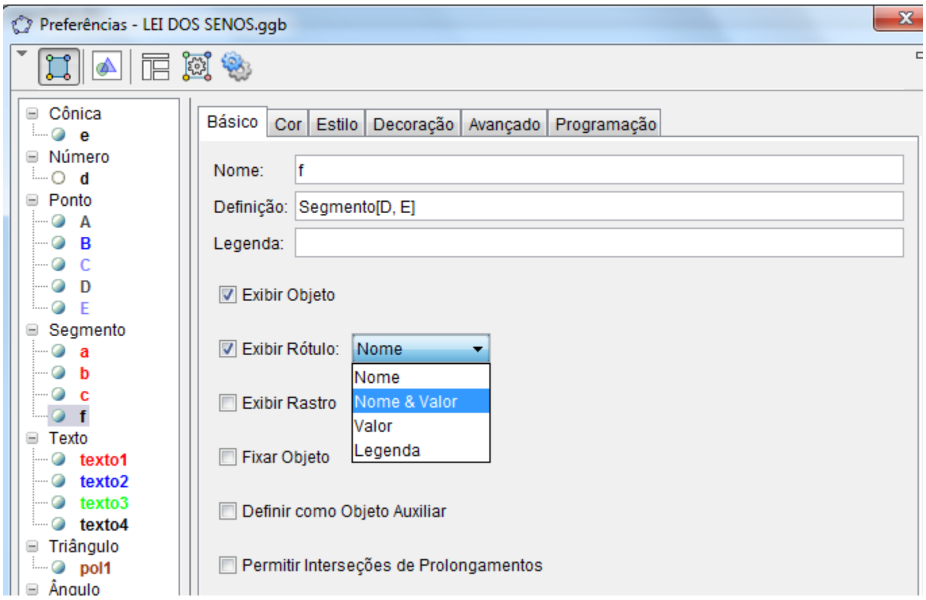
13) Clique em ferramentas em:

Clique em “Segmento definido por Dois Pontos”. Depois clique no ponto D e em qualquer ponto da circunferência. O segmento formado $\overline{DE}$ será o raio. Veja como ficará:



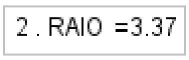
Clique com o botão direito no mouse no segmento $\overline{DE}$ surgirá:

Clique em propriedade e surgirá a tela:



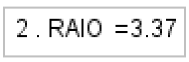
Escolha "Básico" , "Exibir Rótulo": Nome & Valor.

14) Na tela onde tem "entrada":

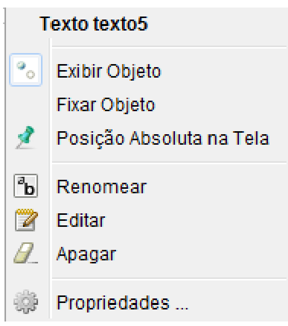
Escreva: "2 . RAIO =" + 2*f . Surgirá 

na tela .

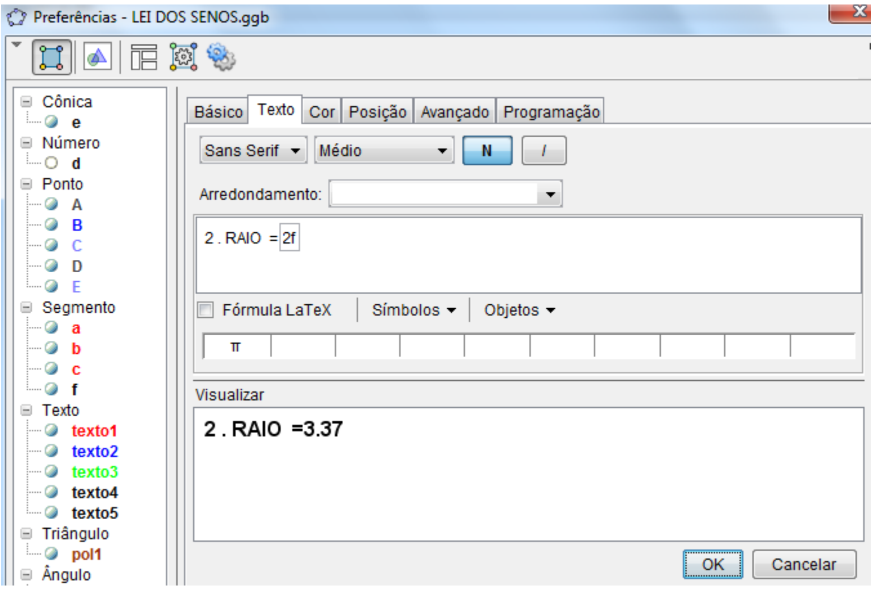
OBS. Pode ser valor diferente.

Clique em 

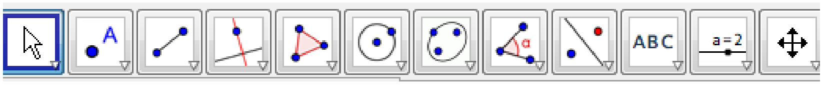
Surgirá:

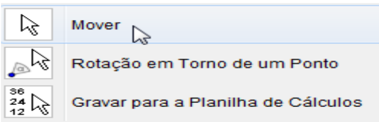


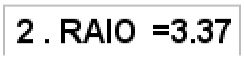
Escolha “Propriedades”. Surgirá:



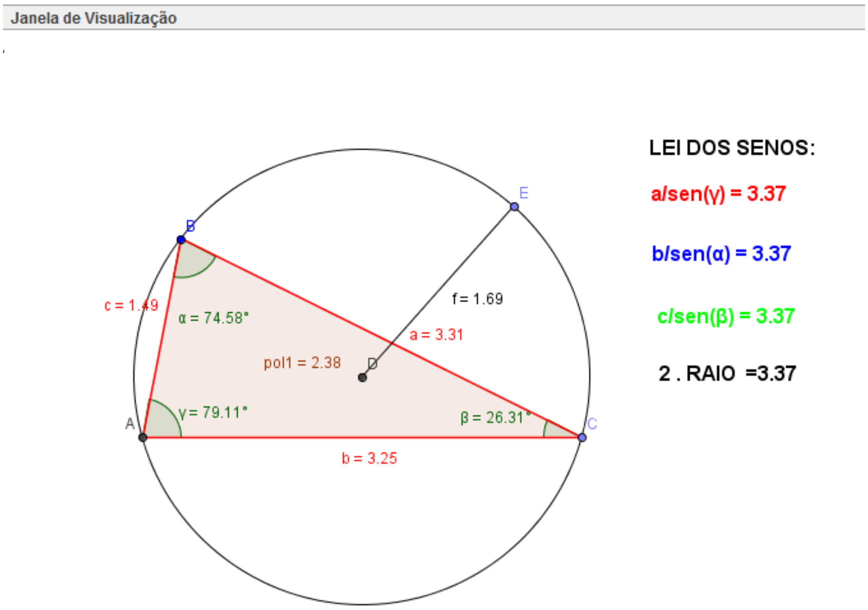
Clique em “Texto” selecione “Médio” e “N”, depois clique em “Cor” e escolha uma cor. Clique na barra de ferramentas em:





Escolha “Mover”. Mova 

o quadro para fica abaixo dos outro quadro na janela de visualização. A tela final ficará assim:

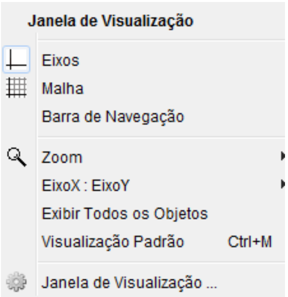


8.3 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

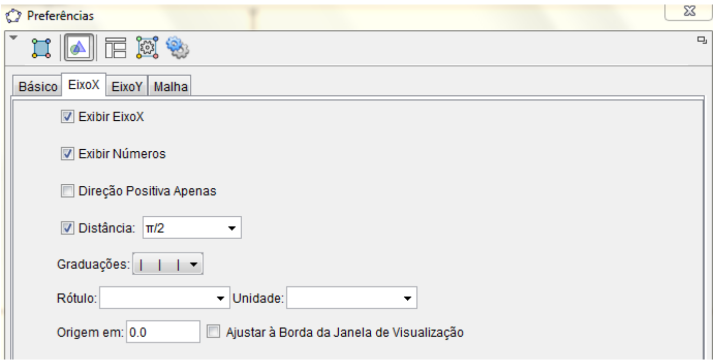
1) Clique em ferramentas na opção Mover e Mova os pontos B ou C para mudar os lados do triângulo e o raio, assim verificar que mesmo com a mudança ainda são válidas as relações.

8.4 INICIANDO AS OPERAÇÕES PARA LEI DOS COSSENOS

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

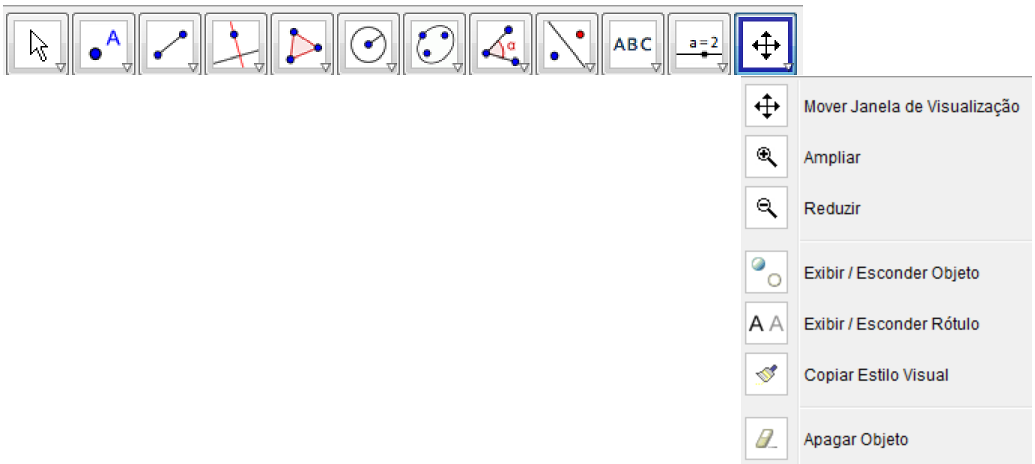


Clique em janela de visualização e surgirá:



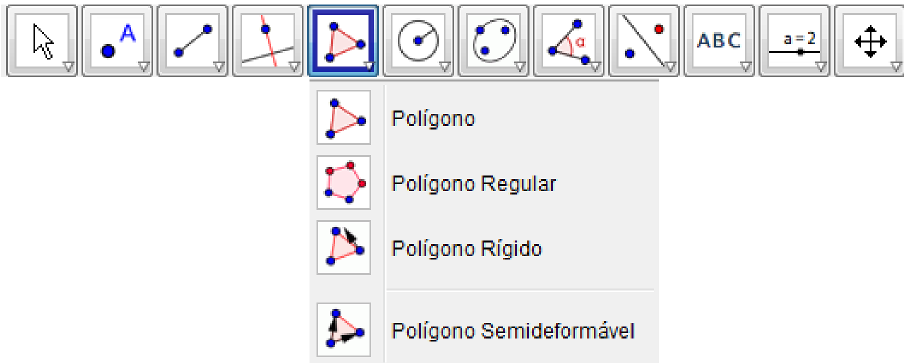
Clique em "Eixo X" e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha 1). Agora faça o mesmo escolhendo o "EixoY".

02) Clique na barra de ferramentas "mover janela de visualização".

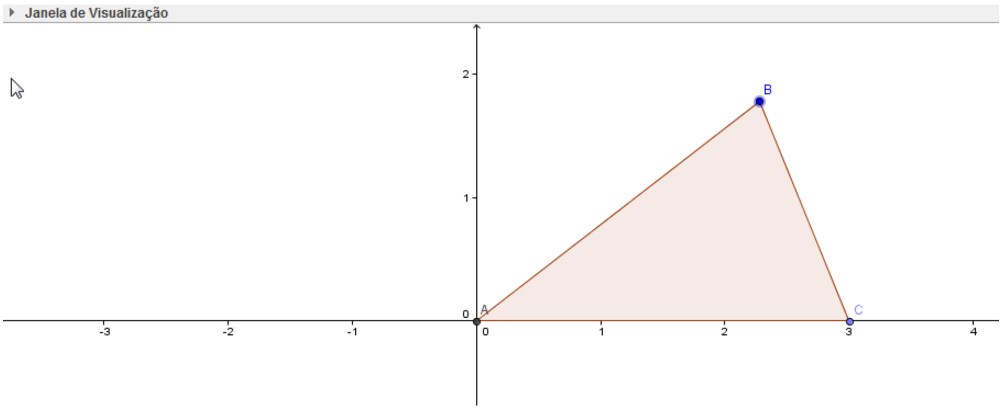


Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização

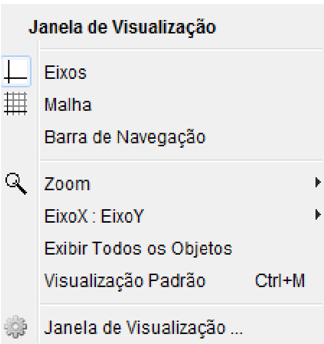
03) Vamos construir um triângulo, clique na barra de ferramenta em:



Escolha “Polígono”. Agora formaremos um triângulo ABC. Escolha o primeiro ponto A(0,0) o segundo ponto B em um lugar qualquer no primeiro quadrante e o ponto C(3,0), feixe o polígono tocando no ponto A(0,0) . Veja como ficará:

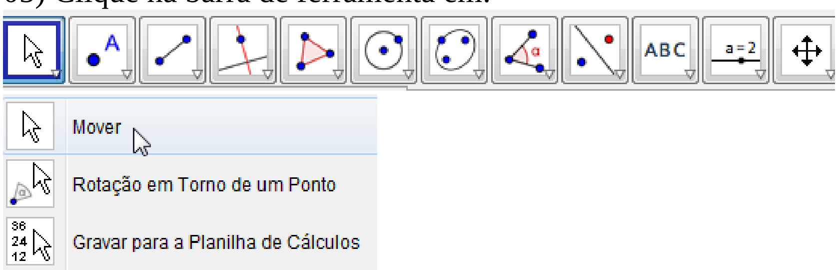


04)Clique sobre o eixo e sugirá :



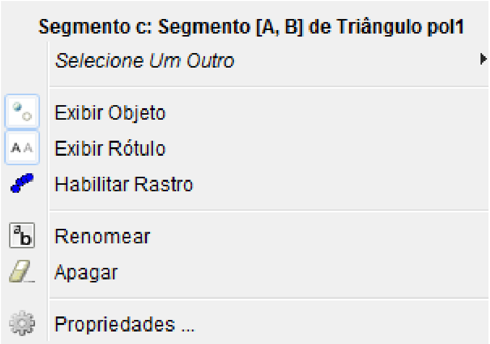
Escolha “Eixos” e os eixos sumirão.

05) Clique na barra de ferramenta em:

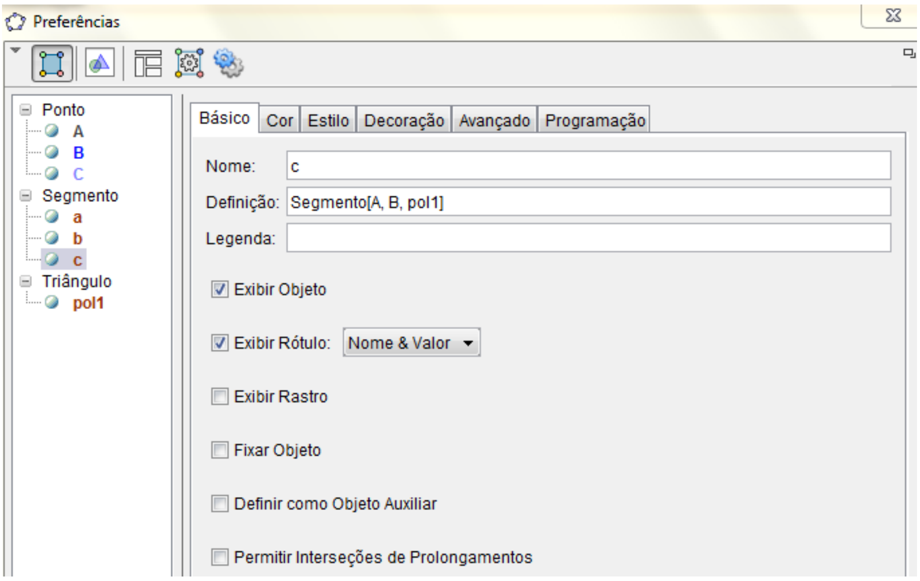


Escolha “Mover”. Coloque o mouse sobre os pontos B ou C e mova-o, verifique que o tamanho dos lados são alterados.

06) Clique em cada lado do triângulo e surgirá:



Escolha “Propriedades” e surgirá:

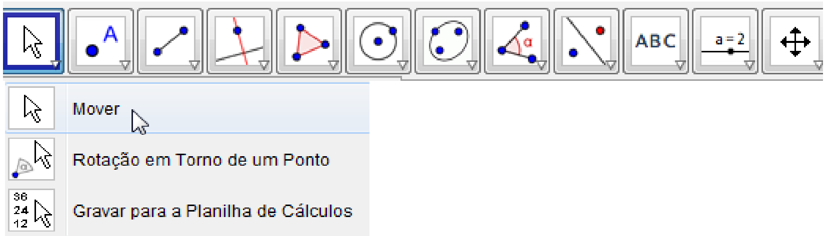


Escolha “Básico” e selecione “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo : Nome & Valor”. Clique em “Cor” escolha uma cor e clique em “Estilo” e escolha a espessura da linha.

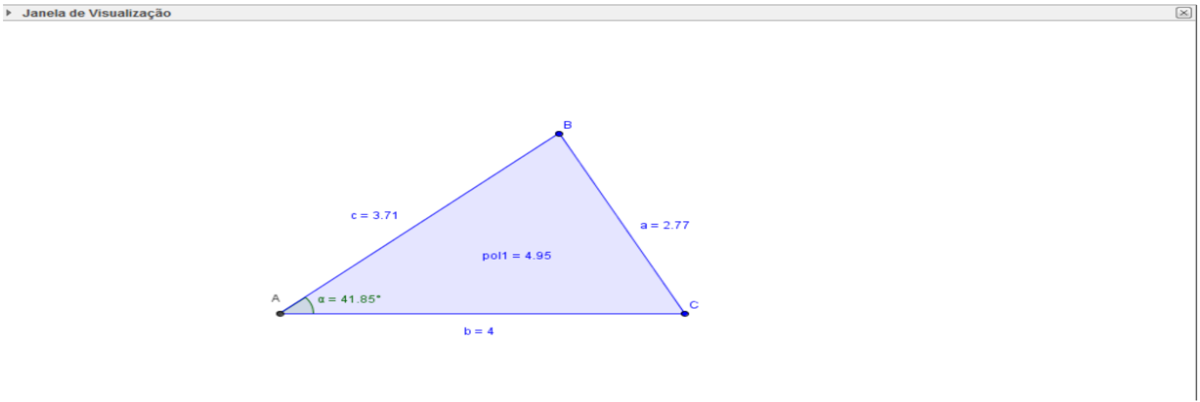
07) Vamos colocar um ângulo no ponto A. Clique na barra de ferramenta em:

Escolha "Ângulo". Clique no segmento $\overline{AC}$e depois no segmento $\overline{AB}$, e surgirá o ângulo α.

No painel de ferramenta Clique em:



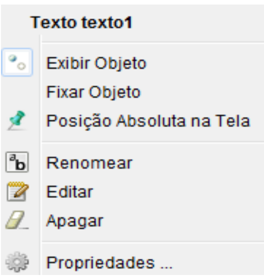
Escolha "Mover". Mova o ângulo "α"para dentro do triângulo. Sua tela ficará:



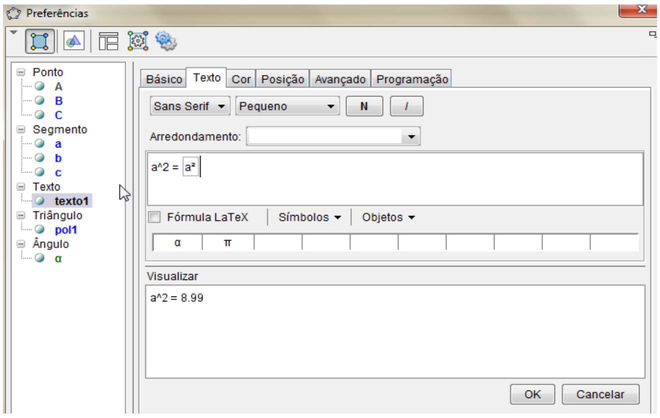
08) Na tela onde tem "entrada":

Escreva: "a^2 ="+a^2. Surgirá na tela: a^2 = 8.99 OBS. Poderá ser com outro valor.

Clique em a^2 = 8.99 .Surgirá:



Escolha "Propriedades". Surgirá:



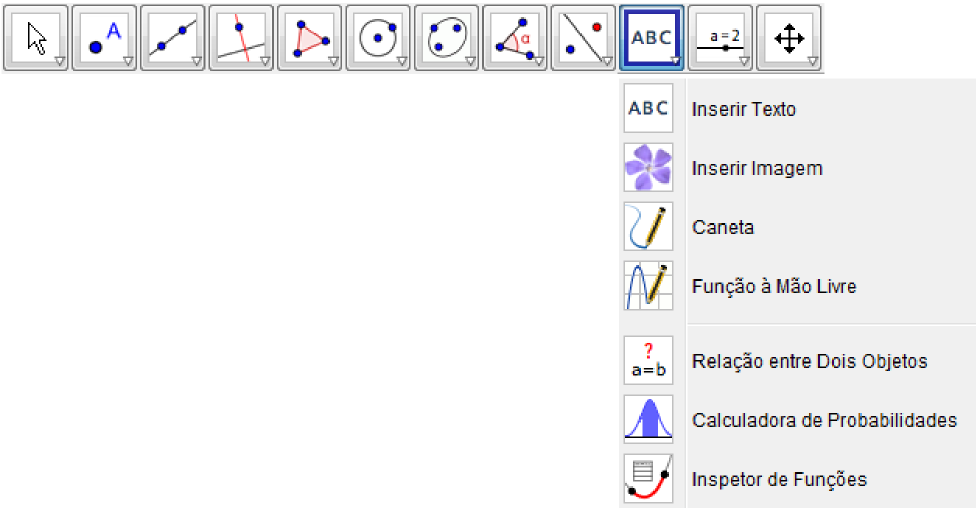
Clique em "Texto" selecione "Médio" e "N", depois clique em "Cor" e escolha uma cor. Clique na barra de ferramentas em:

Escolha "Mover". Mova o quadro **a^2 = 8.99**

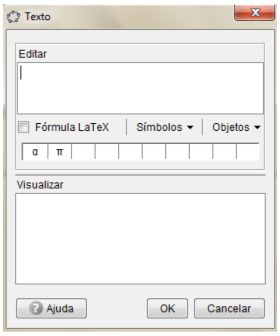
Para um lado da janela de visualização.

09) Repita a operação com: "b^2+c^2 – 2.b.c.cos(α) ="+(b^2+c^2 – 2*b*c*cos(α)) . Surgirá na tela: **b^2+c^2 – 2.b.c.cos(α) = 8.99**.

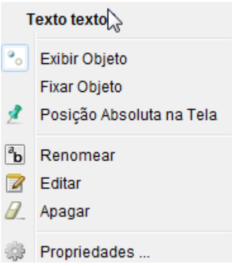
10) Clique na barra de ferramentas em:



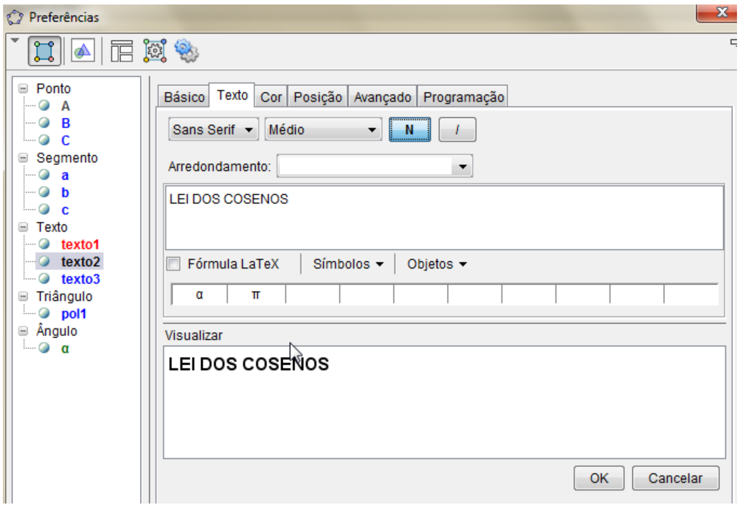
Escolha “inserir Texto”. Clique na janela de visualização e surgirá:



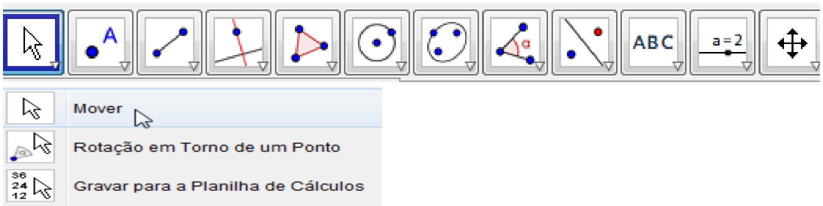
Em editar escreva: LEI DOS COSSENOS. Clique com o mouse com o botão direito sobre o quadro de LEI DOS COSSENOS e surgirá:



Clique em “Propriedades” e aparece:

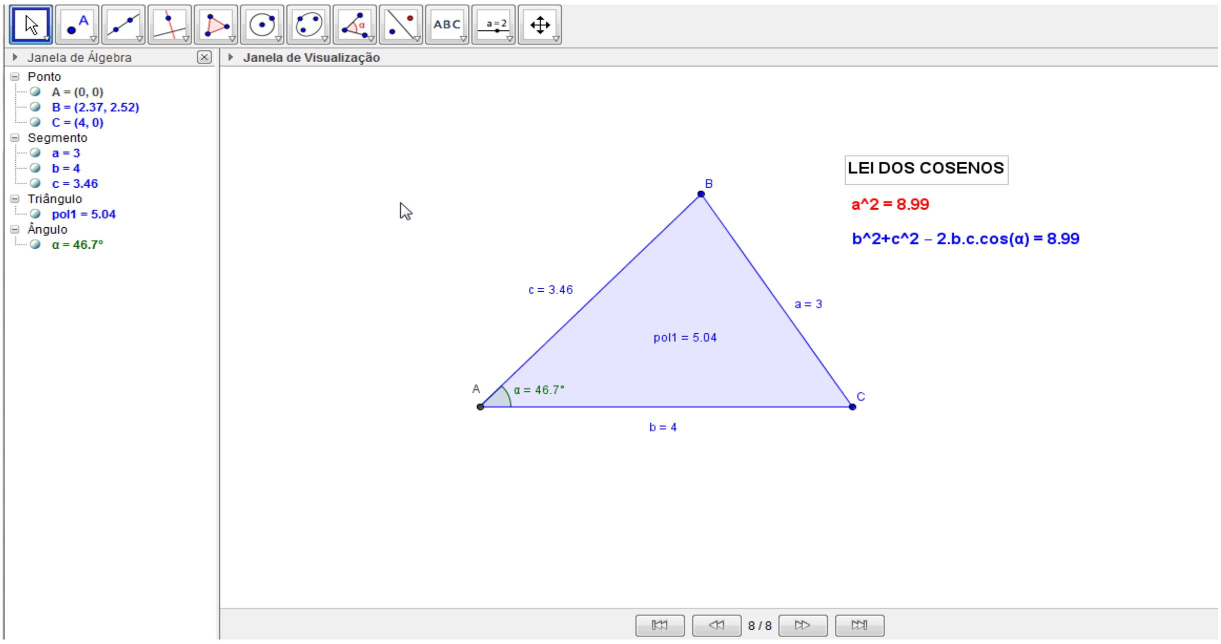


Clique na barra de ferramentas em:



Escolha “Mover”. Mova o quadro LEI DOS COSSENOS para junto das expressões.

Sua tela final ficará:



8.5 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1) Clique em ferramentas na opção Mover e Mova os pontos B ou C para mudar os lados do triângulo, assim verificar que mesmo com a mudança ainda são válidas as relações.

9. ÁREA DE UM TRIÂNGULO

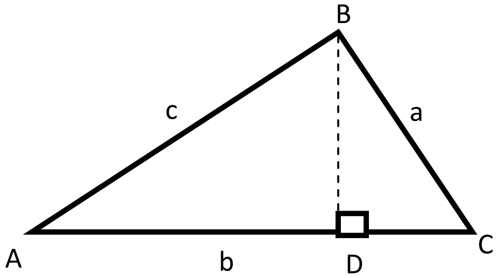
Neste capítulo apresentamos a Área de um Triângulo através da trigonometria. Segue à teoria uma sequência de operações que vão servir para que professores, alunos de Matemática ou interessados vejam e obtenham boas conclusões sobre o cálculo da área de um triângulo a partir dos lados e o ângulo que eles formam.

9.1 CONHECENDO A TEORIA

Teorema:

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semi-produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

1º) Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^0$.



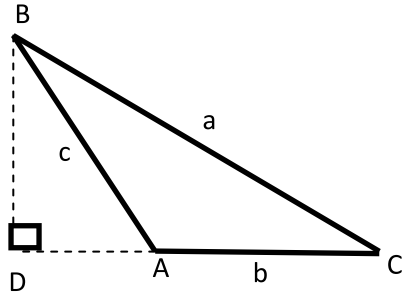
No ΔABD que é retângulo, temos:

$$DB = c\ .sen\ \hat{A}$$

então:

$$\boxed{\acute{A}REA = \frac{AC.DB}{2} = \frac{b\ .\ c}{2}\ .sen\ \hat{A}}$$

2º) Seja ABC um triângulo com $90^0 < \hat{A} < 180^0$



No ΔABD que é retângulo, temos:

$$DB = c\ .sen\ (180^0 - \hat{A}) = c\ .sen\ \hat{A}$$

Então:

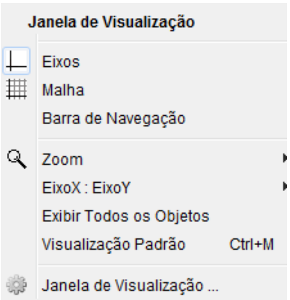
$$\boxed{\acute{A}REA = \frac{AC.DB}{2} = \frac{b\ .\ c}{2}\ .sen\ \hat{A}}$$

3º) Analogicamente provamos que:

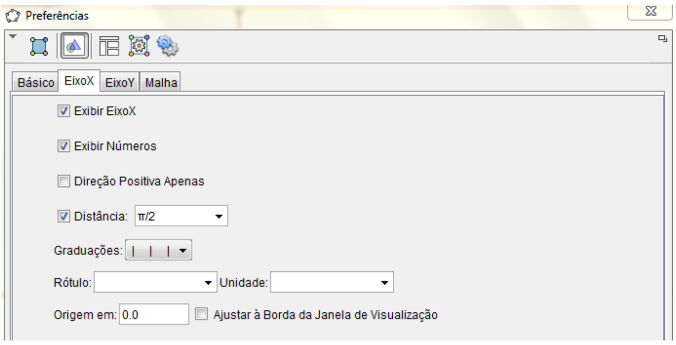
$$\boxed{\acute{A}REA = \frac{a \,.\, b}{2}\,.sen\,\hat{C}}$$ e $$\boxed{\acute{A}REA = \frac{a \,.\, c}{2}\,.sen\,\hat{B}}$$

9.2 INICIANDO AS OPERAÇÕES

01) Clicando no botão direito do mouse na janela de visualização surgirá na tela:

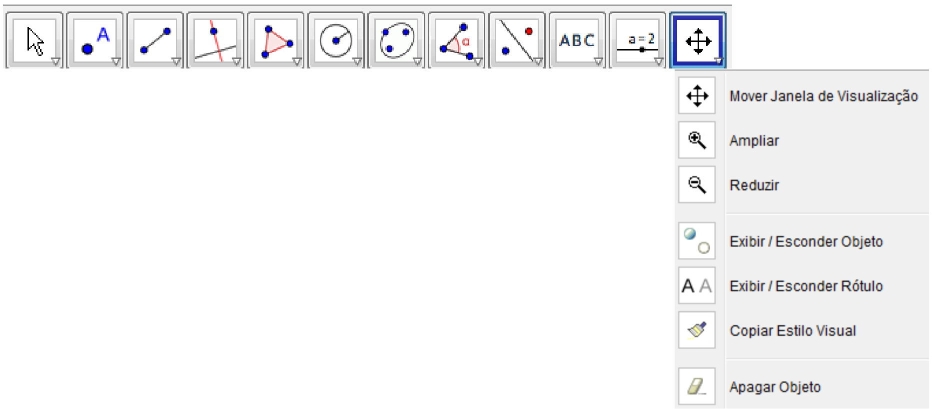


Clique em “janela de visualização” e surgirá:



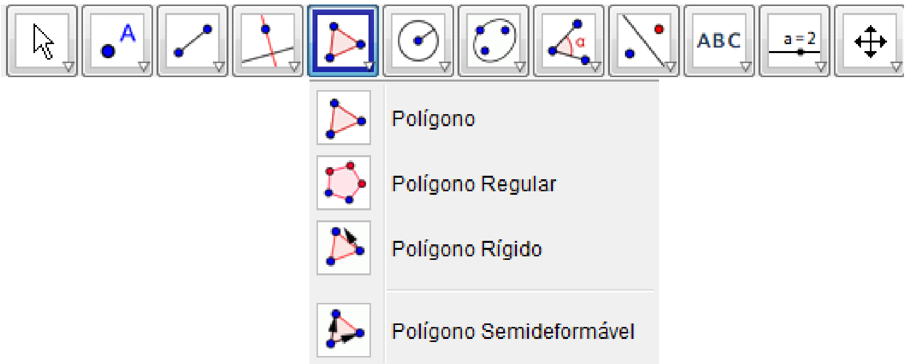
Clique em “Eixo X” e selecione: Exibir Eixo X, Exibir números, Distância (escolha 1). Agora faça o mesmo escolhendo o “EixoY”.

02) Clique na barra de ferramentas “mover janela de visualização”.

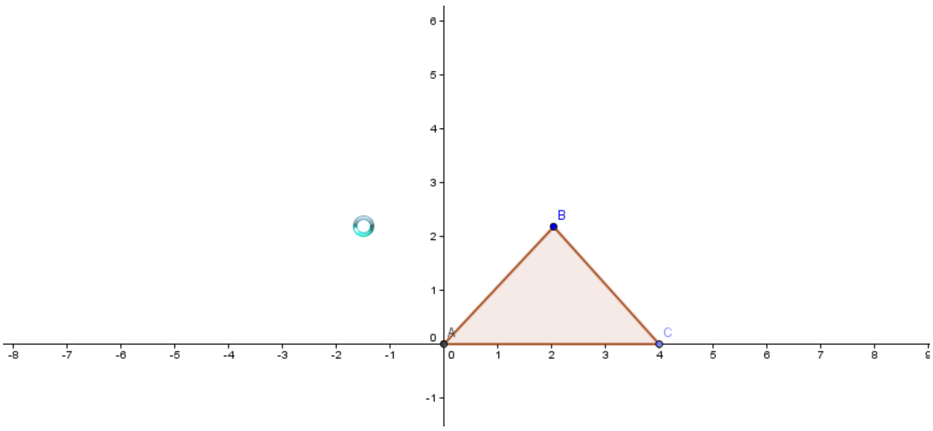


Arraste os eixos de forma que os mesmo fiquem centralizados na janela de visualização

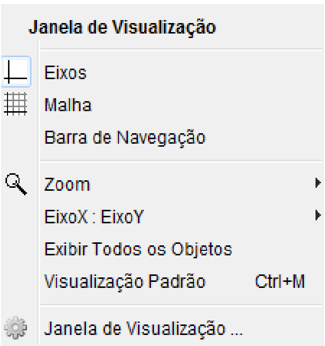
03) Vamos construir um triângulo, clique na barra de ferramenta em:



Escolha "Polígono". Agora formaremos um triângulo ABC. Escolha o primeiro ponto A(0,0) o segundo ponto B em um lugar qualquer no primeiro quadrante e o ponto C(4,0), feixe o polígono tocando no ponto A(0,0) . Veja como ficará:

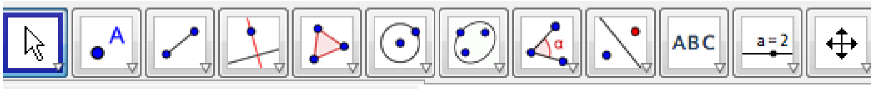


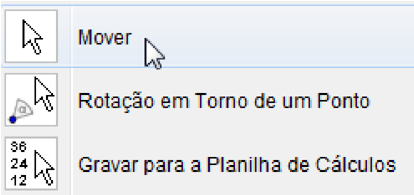
04)Clique sobre o eixo e sugirá :



Escolha "Eixos" e os eixos sumirão.

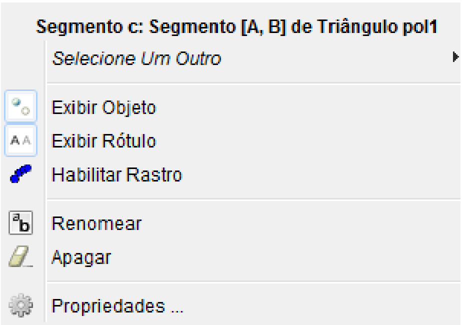
05) Clique na barra de ferramenta em:



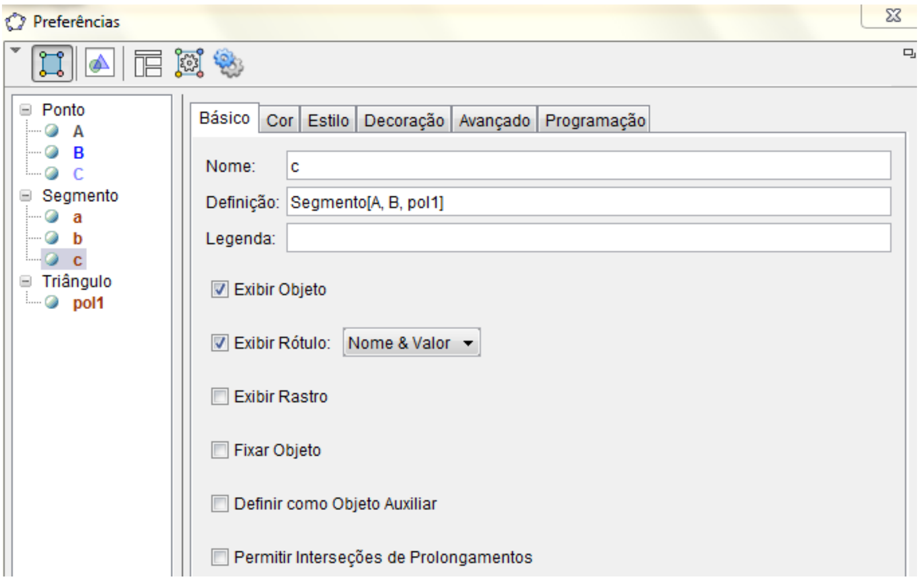


Escolha “Mover”. Coloque o mouse sobre os pontos B ou C e mova-o, verifique que o tamanho dos lados são alterados.

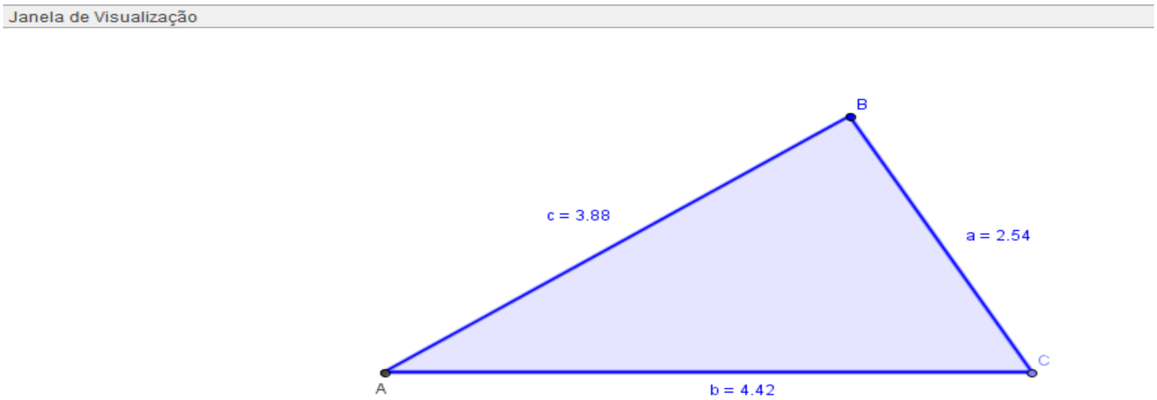
06) Clique, com o botão direito do mouse, em cada lado do triângulo e surgirá:



Escolha “Propriedades” e surgirá:

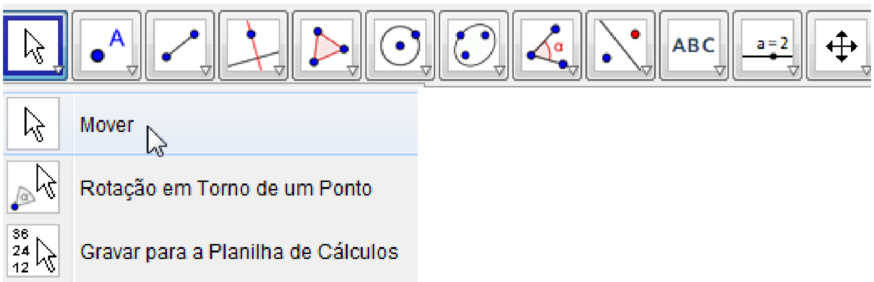


Escolha “Básico” e selecione “Exibir Objeto” e “Exibir Rótulo : Nome & Valor”. Clique em “Cor” escolha uma cor e clique em “Estilo” e escolha a espessura da linha.Se quiser mudar a cor interna do triângulo clique dentro, com o botão direito do mouse, e repita estas operações e clique em “Cor” e escolha a cor. Ficará assim:

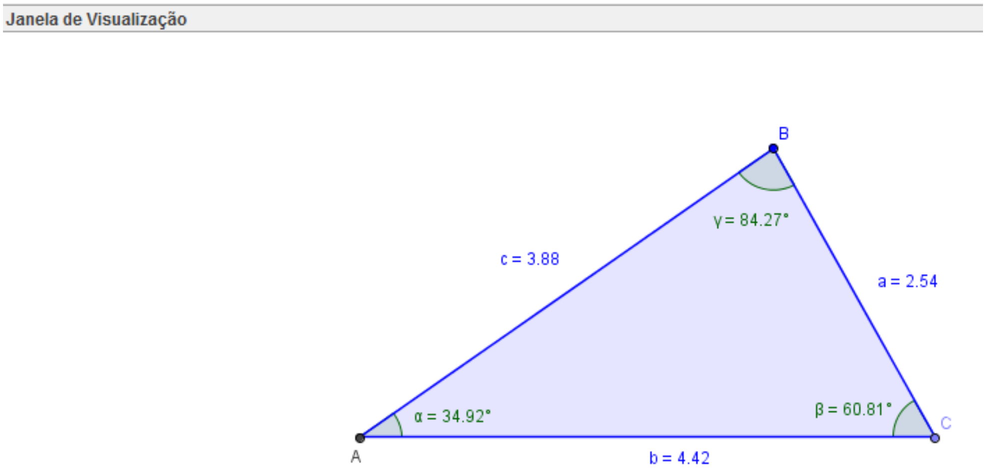


07) Vamos colocar os ângulos. Clique na barra de ferramenta em:

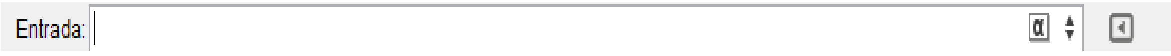
Escolha “Ângulo”. Clique no segmento $\overline{AC}$e depois no segmento $\overline{AB}$, e surgirá o ângulo α. Em seguida clique no segmento $\overline{BC}$ e depois em segmento $\overline{AC}$, e surgirá o ângulo β. Depois clique no segmento $\overline{AB}$e depois em segmento $\overline{BC}$, e surgirá o ângulo γ. Clique na barra de ferramenta em:



Escolha “Mover”. Mova os ângulos “α”, “β” e “γ” para dentro do triângulo. Sua tela ficará:

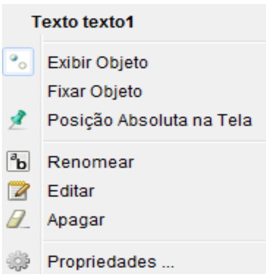


08) Na tela onde tem “entrada”:

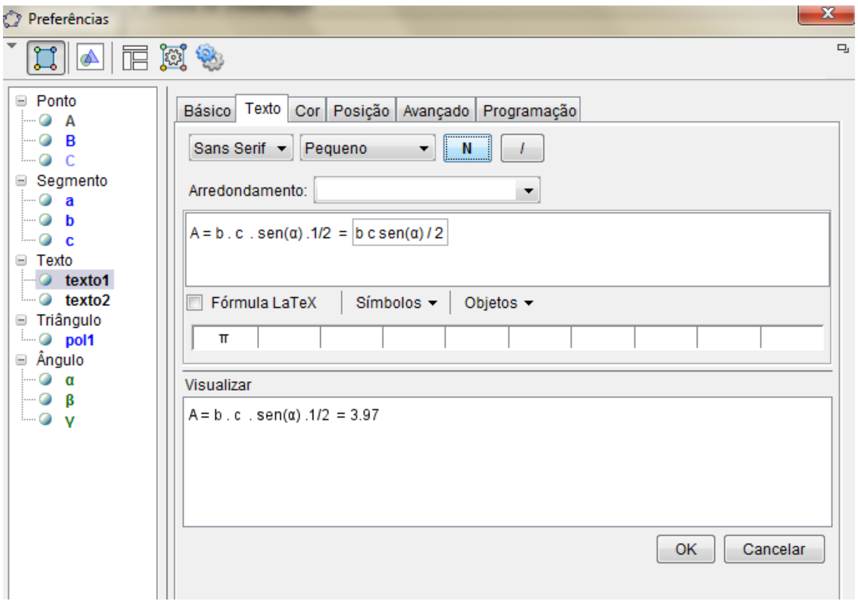


Escreva: “A= b.c.sen(α) =”+b*c*sen(α)/2 . Surgirá na tela: A = b . c . sen(α) .1/2 = 3.97 OBS. Poderá ser com outro valor.

Clique em A = b . c . sen(α) .1/2 = 3.97 .Surgirá:



Escolha “Propriedades”. Surgirá:



Clique em “Texto” selecione “Médio” e “N”, depois clique em “Cor” e escolha uma cor. Clique na barra de ferramentas em:

Escolha “Mover”. Mova o quadro A = b . c . sen(α) .1/2 = 3.97 para um lado da janela de visualização.

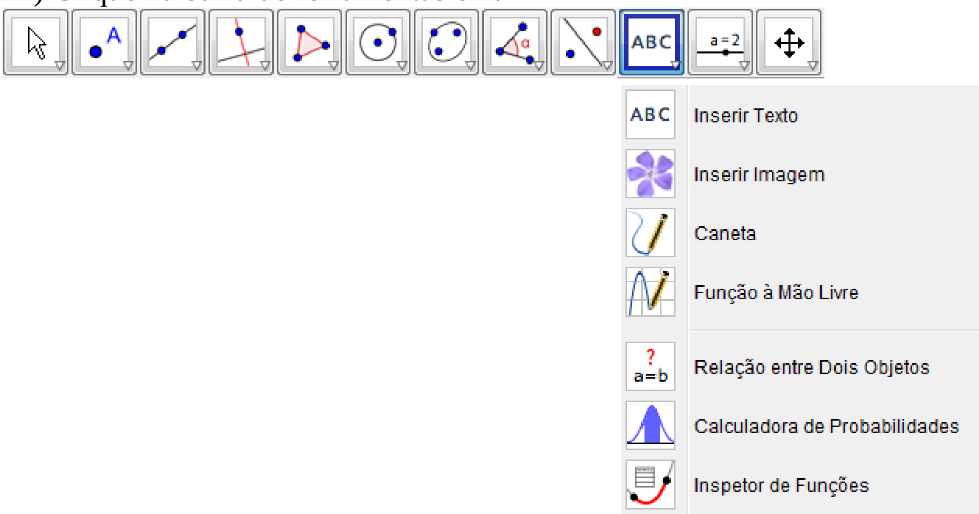
09) Repita a operação com: “A= a.b.sen(β) =”+a*b*sen(β)/2. Surgirá na tela:

A = a . b . sen(β) . 1/2 =3.97

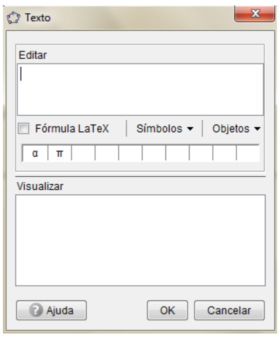
10) Repita mais uma vez a operação com: “A= a.c.sen(γ) =”+a*c*sen(γ)/2. Surgirá na tela:

A = a . c . sen(γ) . 1/2 =3.97

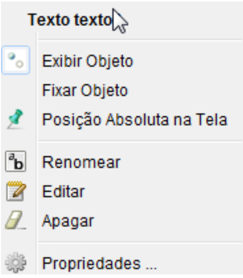
11) Clique na barra de ferramentas em:



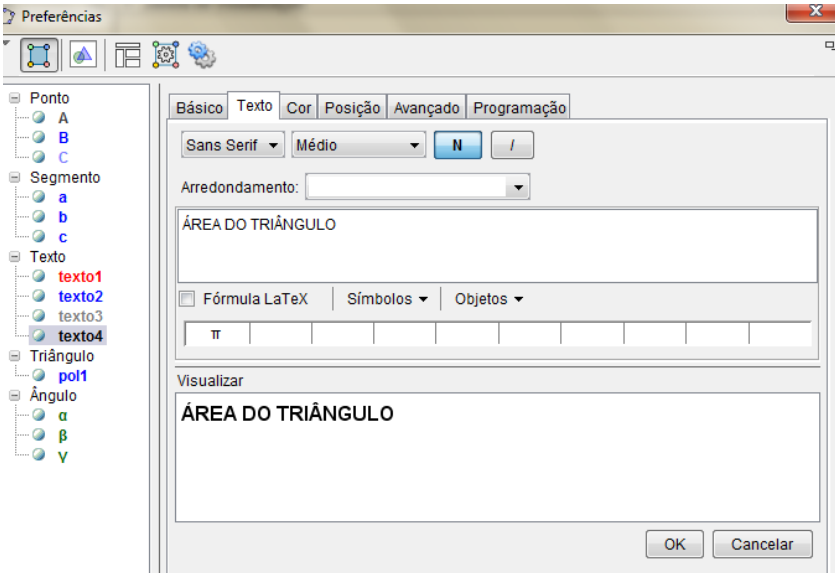
Escolha “inserir Texto”. Clique na janela de visualização e surgirá:



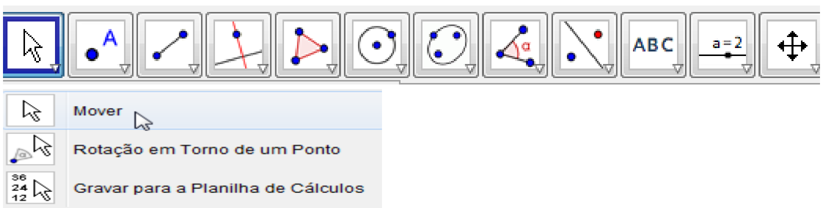
Em editar escreva: ÁREA DO TRIÂNGULO. Clique com o mouse com o botão direito sobre o quadro de ÁREA DO TRIÂNGULO e surgirá:



Clique em “Propriedades” e aparece:

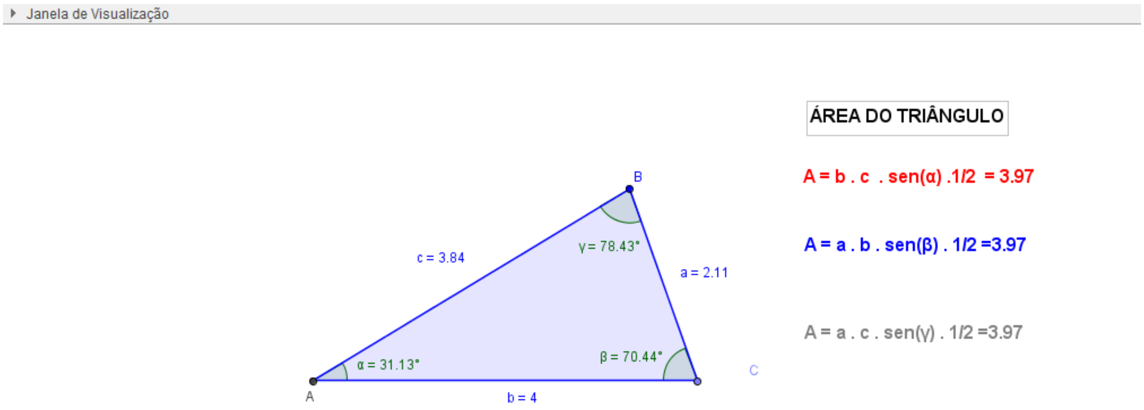


Clique na barra de ferramentas em:



Escolha “Mover”. Mova o quadro ÁREA DO TRIÂNGULO para junto das expressões.

Sua tela final ficará:



9.3 SUGESTÃO DE ATIVIDADE

1) Clique em ferramentas na opção Moves e Mova os pontos B ou C para mudar os lados do triângulo e o raio, assim verificar que mesmo com a mudança ainda são válidas as relações e a área “A” permanece a mesma.

10. CONCLUSÃO

A utilização de tecnologias no ensino de matemática tem sido intensificada principalmente em escolas, e o processo de ensino aprendizagem tem recebido grande influência dessa modernidade.

É importante salientar que com a utilização desses recursos, professores e alunos tem oportunidade de ampliar conhecimento e amadurecer seus pensamentos. Contudo, é necessário perceber que o computador desenvolve um papel de facilitador representando um avanço no ensino de matemática.

Por outro lado, temos por base que a utilização das tendências atuais em Educação Matemática, principalmente na questão tecnológica, se intensifica na busca de mudanças no ensino por questões inovadoras, postura de ensino que vai em contraposto ao mecanicismo ainda adotado nas aulas. Assim acreditamos que a utilização do software Geogebra torna-se uma ferramenta de caráter criativo e construtivo permitindo ao aluno ampliar seus conhecimentos por múltiplas metodologias.

BIBLIOGRAFIA

- Gelson Iezzi, Fundamentos de Matemática Elementar – Trigonometria. Editora: Atual. - 1986.

- LIMA, Elon Lages, A matemática do ensino médio – Volume 1- SBM 2006