UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
PRÓ-REITORIA DE PESUISA, PÓS GRADUAÇÃO E INOVAÇÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

LAECIO AMAURY DA SILVA LUCENA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico

SÃO LUÍS - MA
2020

LAECIO AMAURY DA SILVA LUCENA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT-UFMA, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

SÃO LUÍS - MA
2020

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Lucena, Laecio Amaury da Silva.
Trigonometria no Triângulo Retângulo : uma proposta de sequência didática no Ensino Básico / Laecio Amaury da Silva Lucena. - 2020.
73 f.

Orientador(a): Antonio José da Silva.
Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

1. Ensino de Matemática. 2. Ensino de Trigonometria. 3. Sequência Didática. I. Silva, Antonio José da. II. Título.

LAECIO AMAURY DA SILVA LUCENA

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: uma proposta de sequência didática no Ensino Básico

Dissertação apresentada ao Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT-UFMA, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio José da Silva

Aprovada em:

Banca Examinadora

Prof. Dr. Antônio José da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Drª. Valeska Martins de Sousa (Interno)
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Prof. Dr. Nilson Santos Costa (Externo ao PROFMAT)
Universidade Federal do Maranhão – UFMA

Não vês que somos viajantes?
E tu me perguntas:
Que é viajar?
Eu respondo com uma palavra: é avançar!
Experimentais isto em ti
Que nunca te satisfaças com aquilo que és
Para que sejas um dia aquilo que ainda não és.
Avança sempre! Não fiques parado no caminho.

Santo Agostinho

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem Ele nada é possível.

Aos meus filhos Arthur e Lucas. Vocês são tudo para mim. Amo vocês!

À minha esposa Michelle, pelo apoio e incentivo em cada passo dado, além de toda a paciência por ela concedida em diferentes momentos.

À minha família, meu pai Antônio e mãe Maria, minhas irmãs Layana e Marisa, meu irmão Antônio e minha prima Mayra, pelo incentivo e apoio dado durante esta trajetória, fazendo com que o caminho percorrido tenha sido menos árduo.

Ao grande amigo Luís Herbert, a qual sempre ofereceu ajuda nos momentos em que necessitei.

Aos Professores Anselmo, Cleber, Josenildo, Jairo, Valeska, Valdiane, que contribuíram para o meu crescimento profissional e intelectual e principalmente para a minha realização pessoal.

Aos colegas de turma PROFMAT-UFMA 2017, Ana Gabriela, Alvimar, Aldivan, Anacleto, Arnaldo, Clenilton, Denison, Wallace e Lenildo pela união, pela colaboração e acolhida e, principalmente, pelas lições de vida e amizade. Nossas experiências foram valiosas para a minha formação e me ensinaram, na prática, a real importância de um grupo.

Agradeço à CAPES pelo financiamento do PROFMAT

Ao meu orientador Dr. Antonio José Silva pelas orientações ativas ao longo de todo este tempo. Sua orientação foi essencial na minha formação acadêmica, pedagógica e na concretização deste trabalho. Levo comigo sua competência, seu carinho e amizade.

RESUMO

Esta pesquisa surgiu da necessidade de tornar o estudo dos conceitos da trigonometria mais atrativos aos alunos do Ensino Médio de escolas públicas no Estado do Maranhão. A situação-problema que impulsiona esta pesquisa é a dificuldade de alunos na aprendizagem de conteúdos da trigonometria e a dificuldade de um ensino que promova a aprendizagem de alunos e alunas desde o ensino fundamental até o Ensino Médio. Foram aplicadas duas sequências didática. Uma com os alunos do nono ano da Unidade Integrada Antônio Fernandes de Sousa, escola municipal, localizada no município de Gonçalves Dias, Maranhão. A outra sequência foi aplicada com os alunos do primeiro ano do ensino Médio da escola Sulamita Lúcio do Nascimento, única escola do ensino médio no município de Gonçalves Dias. Este trabalho apresenta, além da análise de práticas realizadas, sugestões de atividade práticas para trabalhar o tema de Trigonometria no Triângulo Retângulo, contribuindo assim para o desenvolvendo das habilidades exigidas no dia a dia dos alunos. As sequências didáticas aplicadas nas escolas públicas permitiram ao docente avaliar melhor a execução dos conteúdos. Ao observar as respostas, percebeu as aprendizagens assim como dificuldades apresentadas pelos discentes no estudo da Trigonometria. As sequências mostraram-se eficientes na perspectiva do ensino e das aprendizagens.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Ensino de Trigonometria. Sequências Didáticas.

ABSTRACT

This research arose from the need to make the study of trigonometry concepts more attractive to high school students from public schools in the State of Maranhão. The problem situation that drives this research is the difficulty of students in learning trigonometry content and the difficulty of teaching that promotes the learning of male and female students from elementary to high school. Two didactic sequences were applied. One with the students of the ninth year of the Integrated Unit Antônio Fernandes de Sousa, a municipal school, located in the city of Gonçalves Dias, Maranhão. The other sequence was applied to the students of the first year of high school at Sulamita Lúcio do Nascimento, the only high school in the city of Gonçalves Dias. This work presents, in addition to the analysis of practices carried out, practical activity suggestions for working on the topic of Trigonometry in the Right Triangle, thus contributing to the development of the skills required in the students' daily lives. The didactic sequences applied in public schools allowed the teacher to better evaluate the execution of the contents. When observing the answers, he noticed the learning as well as the difficulties presented by the students in the study of Trigonometry. The sequences proved to be efficient from the perspective of teaching and learning.

Keywords: Mathematics teaching. Teaching Trigonometry. Didactic Sequences.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao lecionar a disciplina Matemática para o 9º ano do Ensino fundamental e para as três séries do Ensino Médio facilmente percebemos a grande dificuldade que os alunos têm com essa disciplina, em especial com o tema Trigonometria. Descrever uma única causa para essa dificuldade com esse tema é impossível, visto que não é uma, mas sim, várias causas.

O presente trabalho surgiu da necessidade de tornar o estudo dos conceitos da trigonometria mais interessantes, mais aplicáveis no dia a dia dos alunos, algo possível pois a trigonometria faz parte da matemática, foi sendo criada historicamente pela humanidade e evoluindo paralelamente ao ser humano. Boyer (1974) conclui em seus estudos que a trigonometria teve origem nas necessidades do homem em fazer estudos sobre a navegação, a astronomia e a agrimensura, tendo surgido com os povos egípcios e babilônicos.

Os estudos da trigonometria iniciaram por volta de 190 a. C. Eves (2004) relata que os astrônomos babilônicos utilizaram inicialmente a trigonometria em suas pesquisas na astronomia para medir ângulos e distâncias, principalmente na localização de pontos sobre a superfície da Terra.

É indiscutível que outros povos além dos babilônicos e egípcios utilizaram a trigonometria em suas pesquisas. Eves (2004) diz que os muçulmanos utilizaram a trigonometria na construção de suas tábuas trigonométricas. Siqueira (2013) descreve que no Brasil a trigonometria apareceu inicialmente nas escolas da artilharia, onde os exames aplicados eram baseados em geometria, artilharia e aritmética.

Atualmente, a trigonometria começa a ser trabalhada no Ensino Fundamental e mais notadamente no 9º ano, dando início aos estudos das primeiras ideias, com foco no triângulo retângulo, continuando e aprofundando no ensino médio. Hoje com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), esse tema não é mais encontrado no ensino fundamental e consequentemente grande parte dos livros didáticos do 9º ano que chegarão nas escolas neste ano de 2020 não terão esse tema.

Tudo que foi descrito até este momento justifica a escolha desse tema para esta pesquisa de mestrado. Essa escolha foi realizada pensando em contribuir para a aprendizagem mais dinâmica, porém consistente e sempre se aproximando da realidade dos alunos e contribuindo para o trabalho dos professores de matemática.

A situação-problema que impulsiona esta pesquisa é a dificuldade de alunos na aprendizagem de conteúdos da trigonometria e a dificuldade de ensino que promova a aprendizagem de alunos e alunas desde o ensino fundamental até o ensino médio em princípio, o que pode gerar problemas também no ensino superior durante a formação profissional. Por tanto, esta pesquisa objetiva apresentar uma sequência didática sobre trigonometria que possa diminuir a distância entre o ensino e a aprendizagem.

Vale registra alguns trabalhos já publicados sobre o tema trigonometria no triângulo retângulo e que a partir de uma análise crítica tiveram grande contribuição para elaboração desta dissertação. Cometti (2019) fez um estudo bibliográfico e de campo sobre Resolução de Problemas aplicada ao ensino da Trigonometria. Oliveira (2018) apresentou aplicações da Trigonometria em diversas áreas, como Astronomia, Engenharia, Topografia. Calasans (2019) apresentou uma sequência didática elaborada no intuito de servir de alternativa ao estudo de alguns dos conteúdos de trigonometria previstos para o segundo ano do ensino médio.

É importante ressaltar que não são poucas as vezes em que o conteúdo de trigonometria deixa de ser mostrado para os alunos como algo de utilidade em sua vida. Acreditamos que o interesse por parte dos alunos aumenta com a resolução de problemas agradáveis, trabalhados em grupo, principalmente em sala de aula onde são discutidos, analisados, experimentando resoluções e tiradas as possíveis dúvidas entre os próprios alunos e dos alunos com os professores.

Para tanto foram aplicadas duas sequências didáticas. Uma com os alunos do nono ano da Unidade Integrada Antônio Fernandes de Sousa, escola municipal, localizada no município de Gonçalves Dias, Maranhão. Essa escola foi escolhida por ter aproximadamente 55% das matrículas do Ensino Fundamental II, atendendo tanto aluno da zona urbana como da zona rural, oferecendo assim, um bom reflexo da realidade dos alunos nesse município. A outra sequência foi aplicada com os alunos do primeiro ano do ensino Médio da escola Sulamita Lúcio do Nascimento, única escola do ensino médio no município de Gonçalves Dias, sendo assim, a única opção. Essa escola funciona três turnos, tendo sete salas funcionando em cada turno, sendo duas do primeiro ano por turno. A sequência didática foi aplicada com os alunos dos primeiros anos do turno matutino, representado 39% do total dos alunos dessa série.

Este trabalho apresenta uma sugestão de atividade prática para trabalhar o tema de Trigonometria no Triângulo Retângulo, contribuindo assim para o desenvolvendo das habilidades exigidas no dia a dia dos alunos.

Para o desenvolvimento desse trabalho foi elaborado e aplicado uma lista de questões com os alunos das duas escolas referidas, cujo objetivo foi diagnosticar o nível de aprendizagem dos mesmos sobre o tema. Visto o resultado, foi elaborado uma sequência didática e aplicada com os mesmos alunos, obedecendo o passo a passo da sequência.

No final da sequência foi aplicada outra lista de questões, semelhantes a primeira lista, essa em anexo no final desse trabalho, e o resultado foi analisado e apresentado em dois gráficos. Podendo assim, concluir que trabalhar com sequências didática não é fácil, porém motivador e gratificante, pois o resultado mostrou um avanço significativo na aprendizagem do tema de Trigonometria no Triângulo Retângulo.

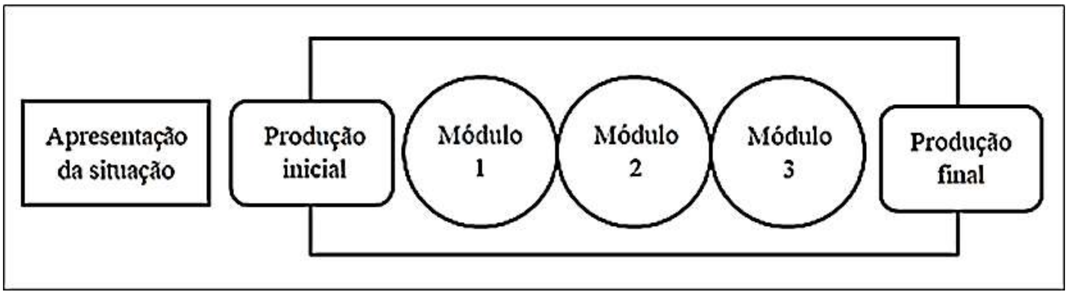
2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Segundo Zabala (2014), uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos.

Para Babinski (2017), uma Sequência Didática está constituída por uma série de situações estruturadas ao longo de uma quantidade definida de aulas, tendo como objetivo tornar possível o desenvolvimento do conhecimento dos alunos. Apesar de a sequência ser estruturada previamente, o seu cumprimento deve ser flexível o suficiente para atender às necessidades e às dificuldades dos alunos no processo. Assim, permitindo que o objetivo seja alcançado.

Para Dolz, Noverraz e Schneuwly (2004), as etapas de uma sequência didática envolvem: Apresentação da situação, produção inicial, aplicação dos módulos e produção final. A estrutura pode ser observada no diagrama abaixo.

Figura 01: Diagrama de uma sequência didática.



Fonte: Dolz, Noverraz e Schneuwly, (2004)

Segundo o diagrama acima uma sequência didática inicia-se, pela apresentação da situação, ou seja, é uma seção de abertura, onde é descrita a tarefa de exposição escrita ou oral que os discentes realizarão. Em seguida, parte-se para a produção inicial, o qual servirá de diagnóstico das competências anteriormente adquiridas pelos alunos, aqui o professor identifica os encaminhamentos que deverá seguir. Na produção inicial são realizados os módulos, esses módulos são exercícios ou atividades que permitem que os alunos aprendam sobre os temas abordados na sequência didática, o número de módulos depende do assunto estudado e do nível de conhecimento dos alunos. Na produção final o professor avalia todo o processo e os alunos colocam em prática todos os conhecimentos adquiridos.

Para os autores Peretti e Costa (2013, p.6)

> Para haver uma sequência didática é necessário apresentar ao aluno atividades práticas, lúdicas com material concreto e diferenciado

> apresentando desafios cada vez maiores aos alunos permitindo a construção do conhecimento. Ao iniciar a sequência didática, é necessário efetuar um levantamento prévio dos conhecimentos dos alunos e, a partir desses, planejar uma variedade de aulas com desafios e/ou problemas diferenciados, jogos, análise e reflexão. Aos poucos, faz-se necessário aumentar a complexidade dos desafios e orientações permitindo um aprofundamento do tema proposto.

Segundo Zabala (2014), para que um modelo de sequência didática seja válido, deve-se analisar diversos fatores de sua estrutura. Devendo existir atividades que permitam constar os conhecimentos prévios dos discentes. Os conteúdos novos devem ser propostos de forma significativa e prático. As atividades devem ser apropriadas ao nível de desenvolvimento de cada aluno e devem ser desafios alcançáveis. No Livro “A Prática Educativa: Como Ensinar”, o autor apresenta Quatro Unidades Didáticas como exemplo que são genéricos e que servem para diferentes níveis de ensino.

2.1 UNIDADES DIDÁTICAS

2.1.1 A primeira unidade possui cinco etapas:

1ª Etapa: Comunicação da lição (Exposição do tema).

Nesta etapa o professor ou a professora expõe o tema. Enquanto explica, os alunos tomam notas. O professor ou a professora permite alguma pergunta, a que responde oportunamente. Quando acaba, define a parte do tema que será objeto da prova que vale nota.

2ª Etapa: Estudo individual sobre o livro-texto (Estudo do tema).

Neste momento cada um dos meninos e meninas, utilizando diferentes técnicas (quadros, resumos, sínteses), realiza o estudo do tema.

3ª Etapa: Repetição do conteúdo aprendido (Prova ou Exame).

Cada menino ou menina, individualmente, memoriza os conteúdos da lição que supõe será objeto da prova ou exame.

4ª Etapa: Prova ou exame.

Nesta etapa, em classe, todos os alunos respondem às perguntas do exame durante uma hora.

5ª Etapa: Avaliação.

Por fim, o professor ou a professora comunica aos alunos os resultados obtidos.

2.1.2 A segunda unidade possui oito etapas:

1ª Etapa: Apresentação, por parte do professor ou da professora, de uma situação problemática.

O professor ou a professora expõe aos alunos uma situação conflitante que pode ser solucionada por meios matemáticos, se a situação é matematizável (frações) ou de qualquer outra área.

2ª Etapa: Busca de soluções.

O professor ou a professora pede aos meninos e meninas que exponham diferentes formas de resolver o problema ou a situação.

3ª Situação: Exposição do conceito e o algoritmo.

O professor ou a professora aproveita as propostas dos alunos para elaborar o novo conceito (fração) e ensinar o modelo de algoritmo (operações de frações), o problema ou a situação.

4ª Situação: Generalização.

O professor ou a professora demonstra a função do modelo conceitual e o algoritmo em todas aquelas situações que cumprem determinadas condições.

5ª Situação: Aplicação.

Os alunos, individualmente, aplicam o modelo a diversas situações.

6ª Situação: Exercitação.

Os alunos realizam exercícios do uso do algoritmo.

7ª Situação: Prova ou exame.

Em classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.

8ª Situação: Avaliação.

O professor ou a professora comunica aos alunos os resultados obtidos.

2.1.3 A terceira unidade possui oito etapas:

1ª Situação: Apresentação, por parte do professor ou da professora, de uma situação problemática relacionada a um tema.

O professor ou a professora desenvolve um tema sobre um fato ou acontecimento, destacando os aspectos problemáticos e os que são desconhecidos para os alunos.

2ª Situação: Diálogo entre professor ou professora e alunos.

O professor ou a professora estabelece um diálogo com os alunos e entre eles e promove o surgimento de dúvidas, questões e problemas relacionados com o tema.

3ª Situação: Comparação entre diferentes pontos de vista.

O professor ou a professora facilita diferentes pontos de vista e promove a discussão em grupo.

4ª Etapa: Conclusões.

A partir da discussão do grupo e de suas contribuições, o professor ou a professora estabelece as conclusões.

5ª Etapa: Generalização.

Com as contribuições do grupo e as conclusões obtidas, o professor ou a professora estabelece as leis, os modelos interpretativos ou os princípios que se deduzem deles.

6ª Etapa: Exercícios de memorização.

Os meninos e meninas, individualmente, realizam exercícios de memorização que lhes permitam lembrar os resultados das conclusões e da generalização.

7ª Etapa: Prova ou exame.

Na classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.

8ª Etapa: O professor ou a professora comunica aos alunos os resultados obtidos

2.1.4 A quarta unidade possui dez etapas:

1ª Etapa: Apresentação da situação-problema.

Apresentação por parte do professor ou da professora de uma situação problemática relacionada com um tema.

O professor ou a professora desenvolve um tema em torno de um fato ou acontecimento, destacando os aspectos problemáticos e os que são desconhecidos para os alunos.

2ª Etapa: Proposição de problemas ou questões.

Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, expõem as respostas intuitivas ou suposições sobre cada um dos problemas e situações propostos

4ª Etapa: Proposta das fontes de informação.

Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, propõem as fontes de informação mais apropriadas para cada uma das questões: o próprio professor, uma pesquisa bibliográfica, uma experiência, uma observação, uma entrevista, um trabalho de campo.

5º Etapa: Busca da informação.

Os alunos, coletiva e individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, realizam a coleta dos dados que as diferentes fontes lhes proporcionaram. A seguir selecionam e classificam estes dados.

6ª Etapa: Elaboração das conclusões.

Os alunos, coletiva e/ou individualmente, dirigidos e ajudados pelo professor ou professora, elaboram as conclusões que se referem às questões e aos problemas propostos.

7ª Etapa: Generalização das conclusões e síntese.

Com as contribuições do grupo e as conclusões obtidas, o professor ou professora estabelece as leis, os modelos e os princípios que se deduzem do trabalho realizado.

8ª Etapa: Exercícios de memorização.

Os meninos e meninas, individualmente, realizam exercícios de memorização que lhes permitam lembrar dos resultados das conclusões, da generalização e da síntese.

9ª Etapa: Prova ou exame.

Na classe, todos os alunos respondem às perguntas e fazem os exercícios do exame durante uma hora.

10ª Etapa: Avaliação.

A partir das observações que o professor fez ao longo da unidade e a partir do resultado da prova, este comunica aos alunos a avaliação das aprendizagens realizadas.

Podemos observar que cada modelo apresentado tem começo meio e fim, ou seja, começa com uma apresentação sege com um desenvolvimento e finaliza com uma avaliação.

3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA REALIZADA EM SALA DE AULA

Com o objetivo de avaliar o desenvolvimento dos alunos em relação ao conteúdo abordado na sequência didática Trigonometria no Triângulo Retângulo, preparamos dois testes, um teste com 9 questões e outro com 10, sobre o mesmo tema. O teste foi proposto aos alunos do nono ano do Ensino Fundamental e com os discentes do 1º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas do município de Gonçalves Dias, Maranhão, alunos esses entre 11 e 14 anos de idade. O teste era formado por questões que foram retiradas de provas de grandes vestibulares ou de avaliações externas do país nos últimos anos. O tempo disponível foi de 100 minutos e apenas 40 alunos do nono ano do ensino fundamental e 40 alunos do primeiro ano do ensino médio participaram desse trabalho.

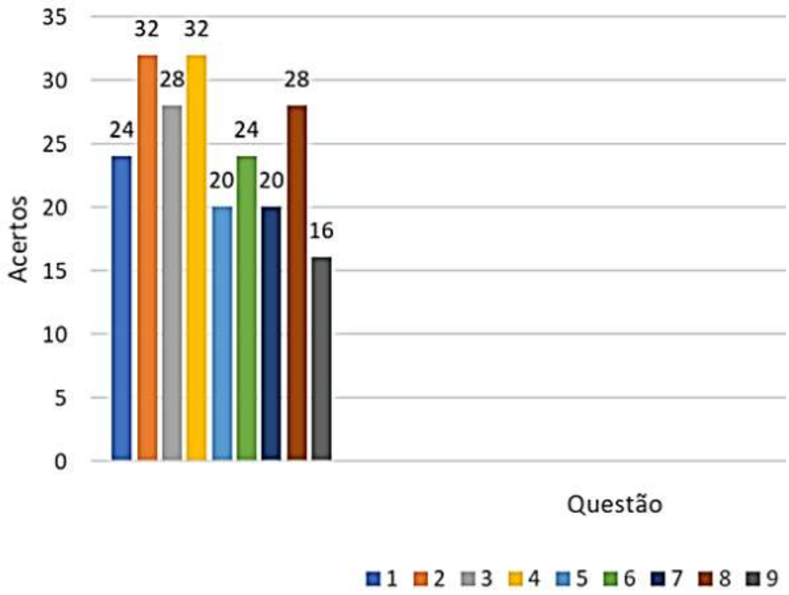
A primeira questão era referente ao Teorema de Pitágoras e as Razões trigonométricas, nessa questão a grande dificuldade foi identificar que era necessário aplicas esses dois conceitos. Essa questão apareceu no vestibular da Santa Casa. Dos 40 alunos que fizeram esse teste observamos que, 60% dos alunos do nono ano acertaram e esse percentual aumentou para 80% de acerto com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Na segunda questão aplicada com os alunos do ensino fundamental eles deveriam determinar a altura de uma rampa através da tangente, 90% acertaram. Já os alunos do Ensino Médio deveriam calcular a área de um triângulo.

Todas as outras questões envolviam as razões trigonometria do triângulo retângulo.

Abaixo o gráfico com a quantidade de acertos por questões. Por ano.

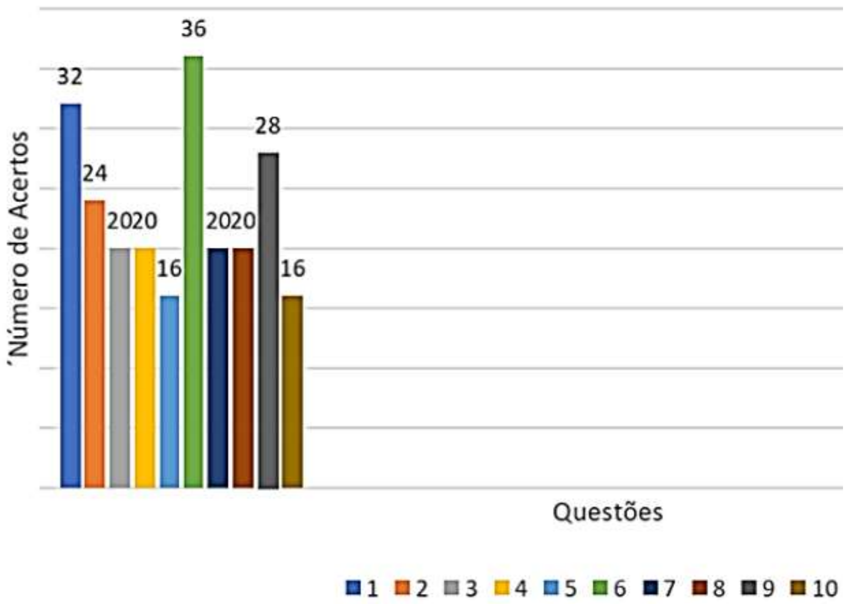
Figura 02: Gráfico de acertos do nono ano



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 2, mostra que após a aplicação da sequência didática, 8 das 9 questões forma resolvidas corretamente por 50% ou mais dos alunos do nono ano. Nota-se ainda que as questões 02 e 04 foram corretamente resolvidas por 80% dos discentes. A única questão que ficou com um percentual de acertos abaixo de 50 % foi a questão 09, questão essa que trazia um ângulo de 57º e suas medidas do seno, cosseno e da tangente com valores aproximando de três casas decimais.

Figura 3: Gráfico de acertos – 1º ano



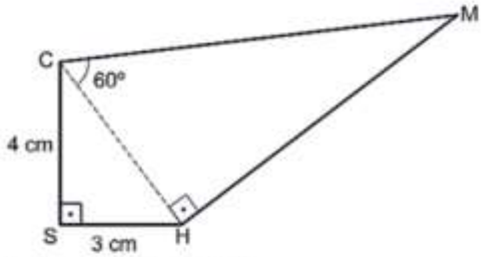
Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 3, mostra que após a aplicação da sequência didática, 8 das 10 questões forma resolvidas corretamente por 50% ou mais dos alunos do primeiro ano do ensino médio. Nota-se ainda que a questão 06 foi corretamente resolvida por 90% dos discentes. Duas foram as questões que ficaram com um percentual de acertos abaixo de 50 % e que foi a questão 05 e a questão 10. Tanto a questão 05 como a 10 tratavam de duas situações-problema mais complexas exigindo dos alunos uma maior análise e interpretação de texto.

Outras considerações: A questão quando exigiam um conteúdo que também é visto no Ensino Fundamental e trabalhado em sala, tinham um maior percentual de acertos. Uma grande dificuldade encontrada é na interpretação dos enunciados das questões. A seguir anexamos o teste aplicado.

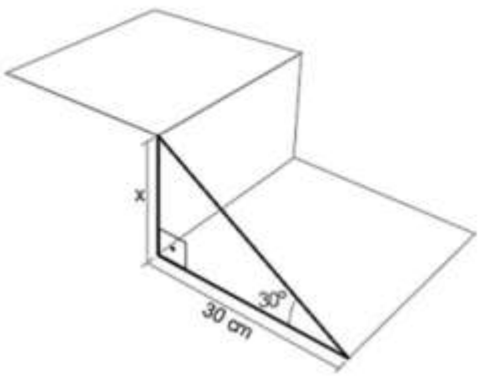
Figura 04: Testes aplicados aos alunos do 9º ano – parte 01

Questão 01. (Santa Casa) No polígono HSCM, $\overline{CS}$ = 4 cm, $\overline{SH}$ = 3 cm e o ângulo entre $\overline{CH}$ e $\overline{CM}$ é igual a 60°, como mostra a figura.



Qual a medida de $\overline{CM}$?

Questão 02 - (Senac) Uma escada possui degraus idênticos de largura 30 cm e altura desconhecida, indicada na figura abaixo por x.

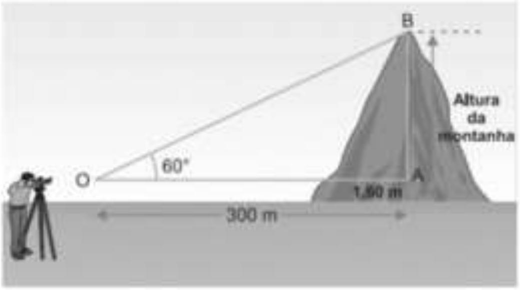


Sabendo que cada degrau vence um desnível de 30°, o valor aproximado de x, em centímetros, é de:

Questão 03 - Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° e percorre 8 km em linha reta. Determine a altura em que se encontra o avião ao percorrer essa distância.

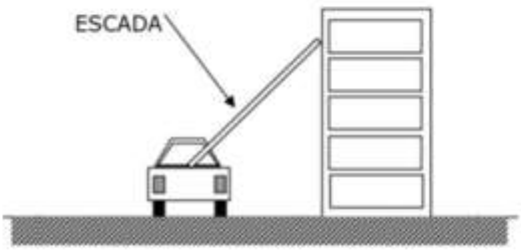
Questão 04 - (UEG-GO) Do alto de um edifício de 24 metros de altura, um engenheiro vê o topo de um outro edifício mais alto, observando-o sob um ângulo de 30º. Sabendo que a distância entre os dois edifícios é de 100 metros, a altura do edifício mais alto é:

Questão 05 - Para determinar a altura de uma montanha, um topógrafo colocou-se com seu teodolito a 300 m da montanha.



Posiciona o aparelho que lhe fornece a medida do ângulo de visada de parte do morro, igual a 60°. Sabendo que o teodolito tem altura de 1,60 m, o topógrafo pode determinar a altura da montanha. Qual é essa altura? Adotando ($\sqrt{3}$ = 1,732)

Questão 6 - Uma escada de bombeiro pode ser estendida até o comprimento máximo de 20 m, formando um ângulo de 60° com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo.

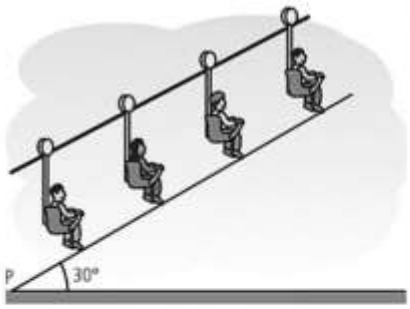


Qual a altura máxima, em m, que a escada pode atingir? (Use $\sqrt{3}$ = 1,732)

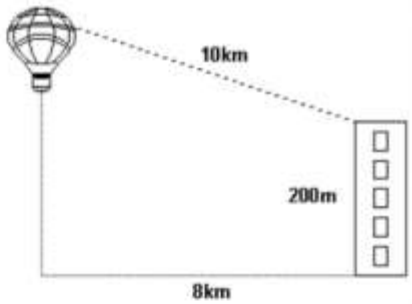
Questão 07 - A figura abaixo representa um teleférico que será construído para transportar pessoas do ponto P até uma altura de 150 metros em relação ao solo. Sabendo-se que o cabo ficará perfeitamente reto e esticado e que a velocidade das cadeiras ao longo do cabo será constante e igual a 1 metro por segundo. Qual o tempo em minutos no deslocamento do ponto P até o ponto mais alto alcançado pel a pessoa?

Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

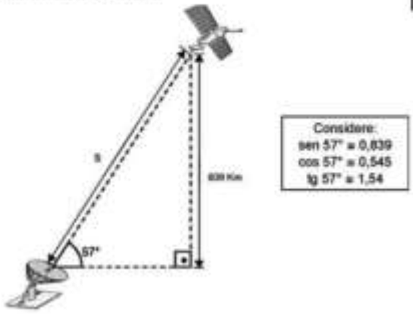
Figura 05 : Testes aplicados aos alunos do 9º ano – parte 02



Questão 08 - (UFLA) Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10km?



Questão 09 - No desenho abaixo está representado o instante em que um satélite de órbita baixa transmite o sinal para uma antena receptora.

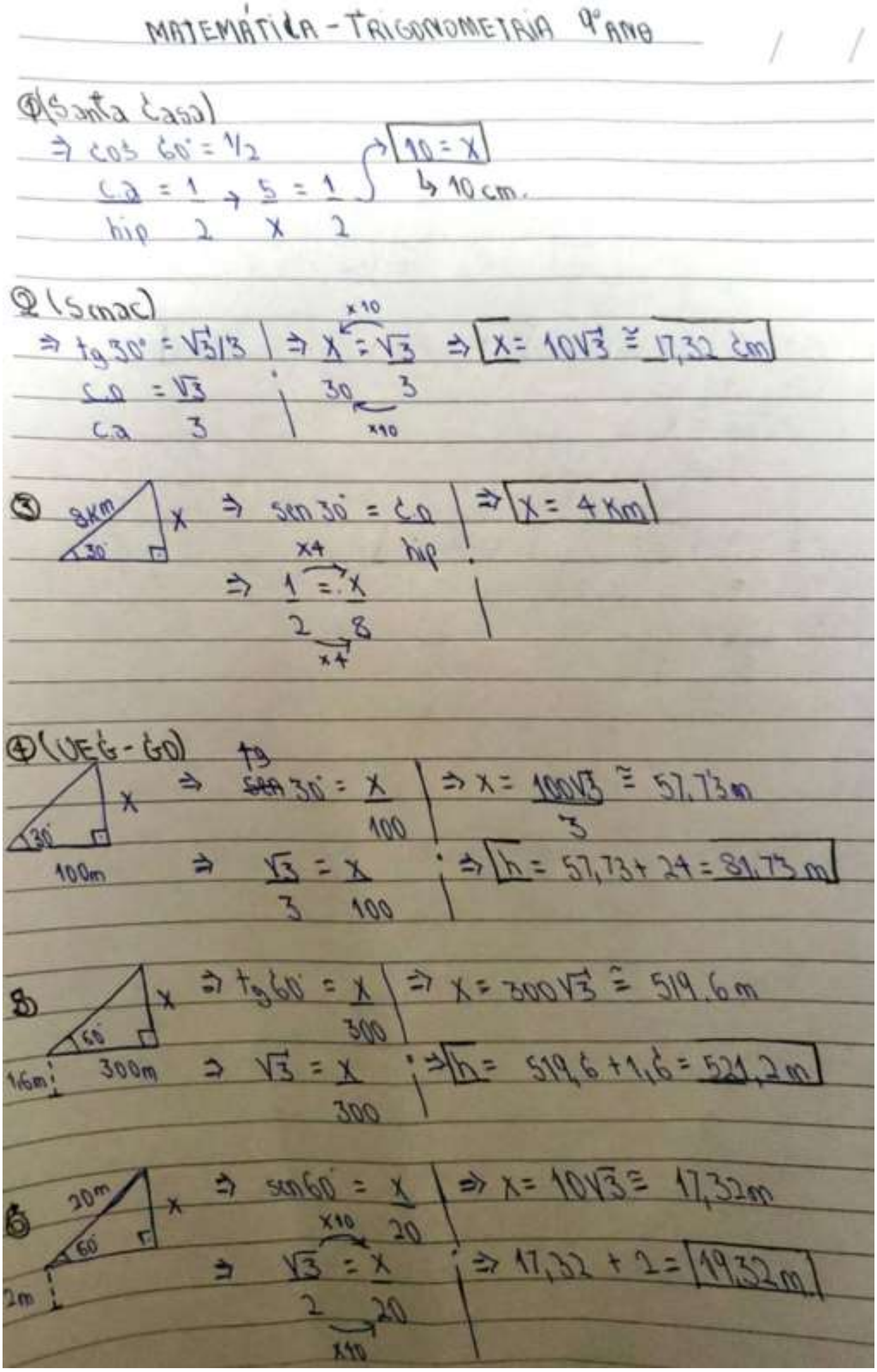


Qual é a distância S que esse sinal de satélite deve percorrer para chegar até a antena receptora?

Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

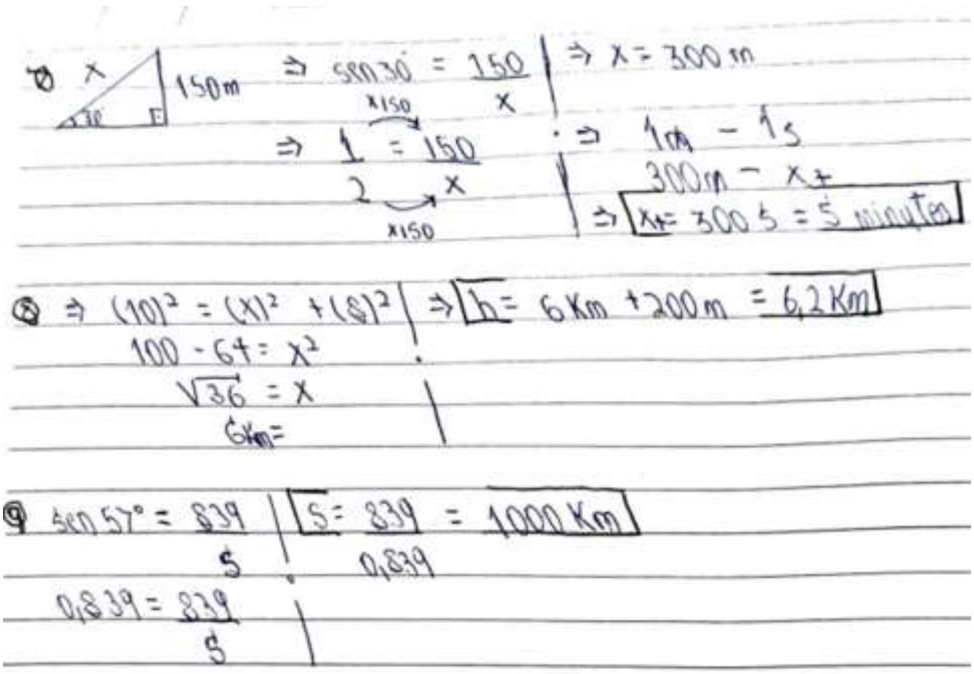
As questões apresentadas nas figuras 04 e 05 foram escolhidas por apresentarem enunciados bons e variados, com ótima linguagem e sensata dosagem de rigor buscando assim dinamizar, enriquecer e aprimorar os conhecimentos dos alunos do nono ano do Ensino Fundamental.

Figura 06: Testes resolvidos aos alunos do 9º ano – parte 01



Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

Figura 07: Testes resolvidos aos alunos do 9º ano – parte 02



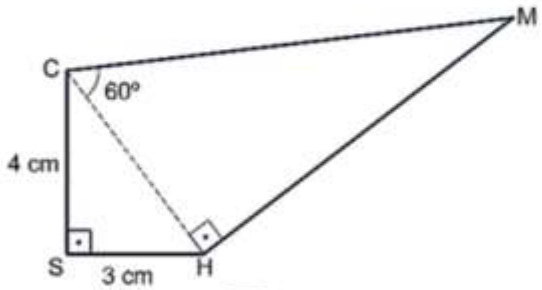
Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

A escolha dos testes resolvidos foi feita de forma aleatória, ou seja, não foi escolhido o teste do aluno que resolveu mais nem o teste do aluno que resolveu menos. Na análise das soluções acima nota-se que se trata de um aluno bem organizado e com um bom conhecimento de trigonometria no triângulo retângulo. É importante ressaltar que ele tem um ótimo domínio dos outros assuntos da matemática que foram usados na resolução das questões e uma boa interpretação de texto.

É importante destacar que se trata de um aluno do nono ano, que mora na zona rural, de uma escola municipal, da zona urbana tendo que se deslocar todos os dias da semana, e que por vários motivos passa semanas sem assistir uma aula e mesmo assim está adquirindo as habilidades necessárias para sua série.

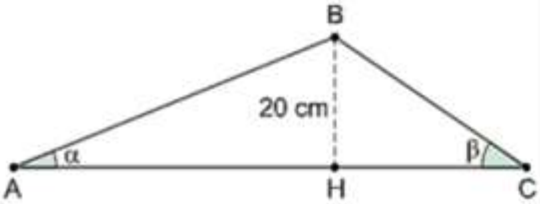
Figura 08: estes aplicados aos alunos do 1º ano – parti 02

01. (Santa Casa) No polígono HSCM, $\overline{CS}$= 4 cm, $\overline{SH}$ = 3 cm e o ângulo entre e é igual a 60º, como mostra a figura.



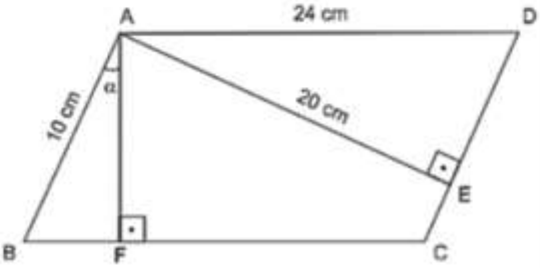
Qual a medida de $\overline{CM}$?

02. A altura de um triângulo ABC, relativamente ao vértice B, é 20 cm, conforme mostra a figura.



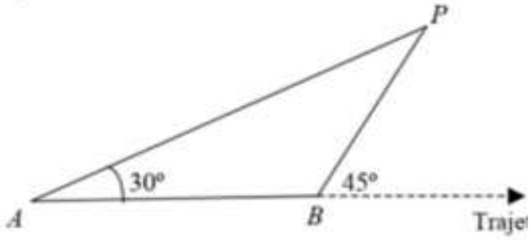
Sendo os valores de tg $\alpha = 2/5$ e a tg$\beta = 2/3$. Qual a área do triângulo ABC?

03. A figura, cujas dimensões indicadas estão em centímetros, mostra um paralelogramo ABCD.

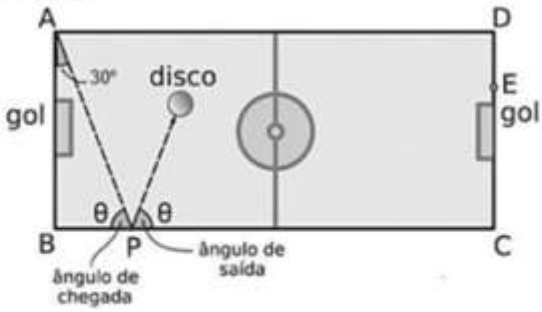


Sabendo-se que os triângulos ABF e ADE são semelhantes, é correto afirmar que cosα é igual a:

04. Para determinar a distância de um barco até à praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo de 30º fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, e sempre em linha reta, ele seguiu até ao ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, agora sob um ângulo de 45º, como ilustrado na figura abaixo. Se a distância percorrida pelo barco do ponto A ao ponto B foi de 1000 metros, então a menor distância do barco até ao ponto fixo P é, em metros, igual a trajetória do barco



05. O aero Hockey é um jogo em que duas pessoas rebatem um disco deslizante sobre uma mesa retangular com o objetivo de acertar o gol de seu adversário, conforme ilustra a figura abaixo, em que AB mede 90 centímetros e BC mede 3 metros.



Durante uma partida, um dos jogadores lançou o disco, partindo do ponto A, que primeiramente atingiu o lado BC no ponto P, de modo que o trajeto linear AP formou um ângulo de 30° com o lado AB da mesa, que, em seguida, rebateu diversas vezes nos lados BC e DA da mesa até atingir o lado CD no ponto E. Sabe-se que o trajeto linear do disco, ao bater no ponto P, forma com o lado BC um ângulo de chegada θ igual ao ângulo de saída, como ilustra a figura, e o processo se repete, alternando-se os lados AD e BC até o disco atingir o ponto E. Com base nas informações apresentadas, responda aos seguintes

Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

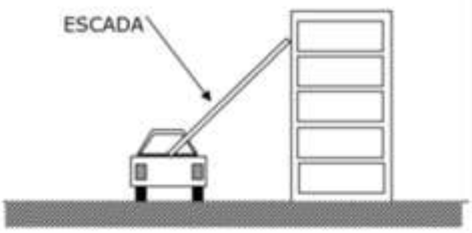
Figura 09: Testes aplicados aos alunos do 1º ano – parte 02

itens, registrando as justificativas para as respostas apresentadas. (Obs.: considere $\sqrt{3}$= 1,732.)

A) Quantas vezes o disco bate em ambos os lados até atingir o lado CD do jogador adversário?

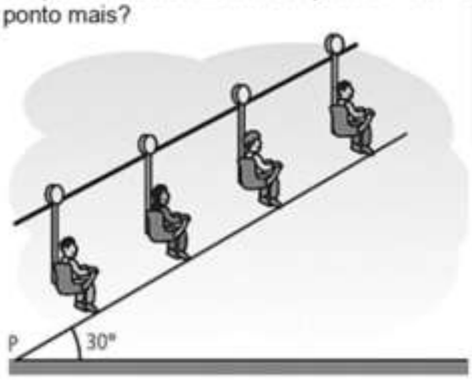
B) Qual é a distância, em cm, entre os pontos D e E?

06. Uma escada de bombeiro pode ser estendida até o comprimento máximo de 20 m, formando um ângulo de 60º com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo.



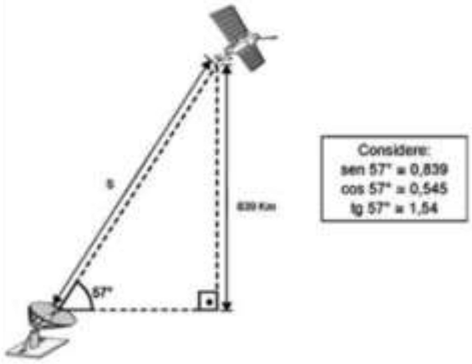
Qual a altura máxima, em m, que a escada pode atingir? (Use $\sqrt{3}$ = 1,732)

07. (Vunesp) A figura representa um teleférico que será construído para transportar pessoas do ponto P até uma altura de 100 metros em relação ao solo. Sabendo-se que o cabo ficará perfeitamente reto e esticado e que a velocidade das cadeiras ao longo do cabo será constante e igual a 1 metro por segundo. Qual o tempo de deslocamento do ponto P até o ponto mais?



08. Se β = (sen15º + sen60º)·(sen15º - sen60º)+(cos15º+cos60º)·(cos15º-cos60º), então podemos afirmar que β é um número irracional.

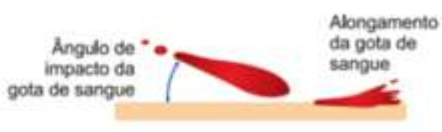
09. No desenho abaixo está representado o instante em que um satélite de órbita baixa transmite o sinal para uma antena receptora.



Qual é a distância S que esse sinal de satélite deve percorrer para chegar até a antena receptora?

10. Uma das finalidades da Ciência Forense é auxiliar nas investigações relativas à justiça civil ou criminal. Observe uma ideia que pode ser empregada na análise de uma cena de crime. Uma gota de sangue que cai perfeitamente na vertical, formando um ângulo de 90º com a horizontal, deixa uma mancha redonda. À medida que o ângulo de impacto com a horizontal diminui, a mancha fica cada vez mais longa. As ilustrações mostram o alongamento da gota de sangue e a relação trigonométrica envolvendo o ângulo de impacto e suas dimensões.

Alongamento da gota de sangue



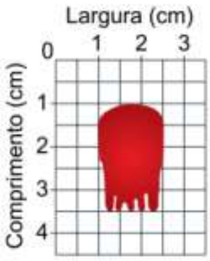
Relação trigonométrica

Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

Continuação da questão 10.

(Ana Paula Sebastiany *et al.* "A utilização da Ciência Forense e da Investigação Criminal como estratégia didática na compreensão de conceitos científicos". *Didáctica de la Química*, 2013. Adaptado.)

Considere a coleta de uma amostra de gota de sangue e a tabela trigonométrica apresentadas a seguir.



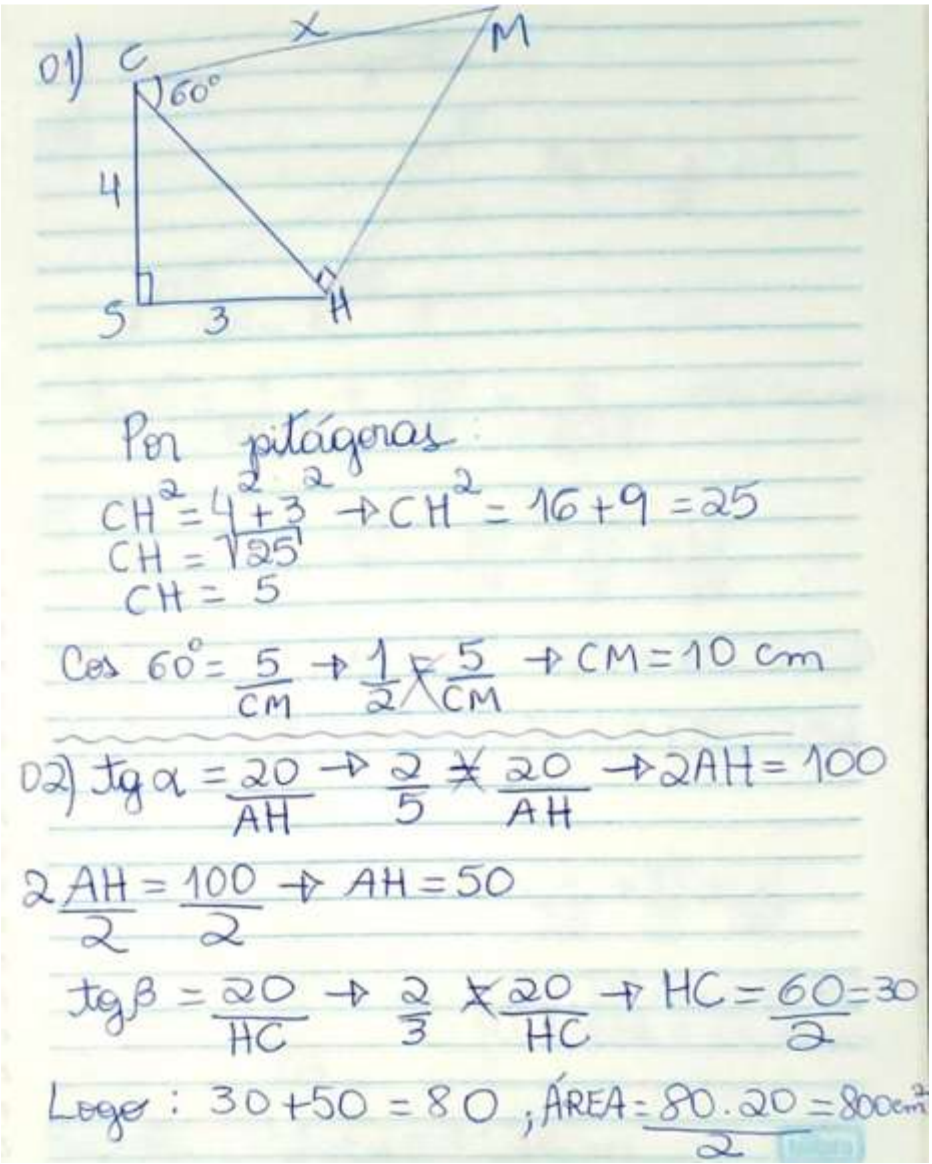
α	sen α	cos α	tg α
31º	0,51	0,85	0,60
37º	0,60	0,80	0,75
53º	0,80	0,60	1,32
59º	0,85	0,51	1,66
74º	0,96	0,28	3,50

De acordo com as informações, qual o ângulo de impacto da gota de sangue coletada na amostra?

Fonte: https://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads

Assim como ocorreu com a escolha das questões do Ensino Fundamental as questões apresentadas nas figuras 08 e 09 foram escolhidas por apresentarem enunciados bons e variados, com ótima linguagem e sensata dosagem de rigor buscando assim dinamizar, enriquecer e aprimorar os conhecimentos dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio. É importe salientar que algumas das questões apresentadas no Ensino Fundamental fora aqui apresentada novamente.

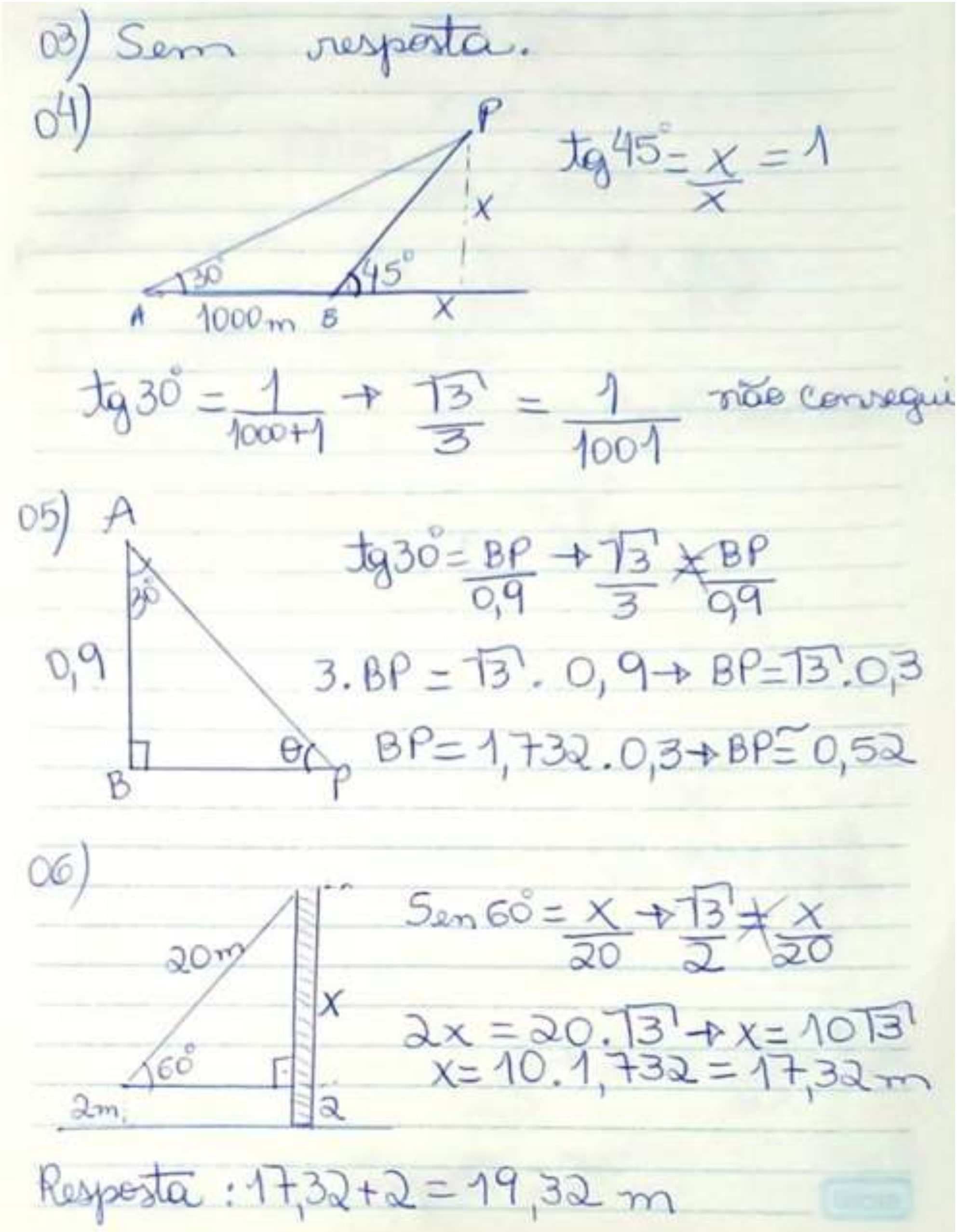
Figura 10: Testes resolvidos pelos alunos do 1º ano – parte 01



Fonte: Elaborado pelo autor.

Podemos concluir que as questões 01 e 02 foram entendidas por essa aluna, assim como pela maioria (ver figura 03). Na questão ela percebeu que tinha que usar o teorema primeiro Pitágoras e só depois usar as razões trigonométricas do triângulo retângulo. Na questão 02 a aluna aplicou as razões trigonométricas nos ângulos alfa e beta, encontrando assim a base do triângulo, concluindo com o cálculo da área.

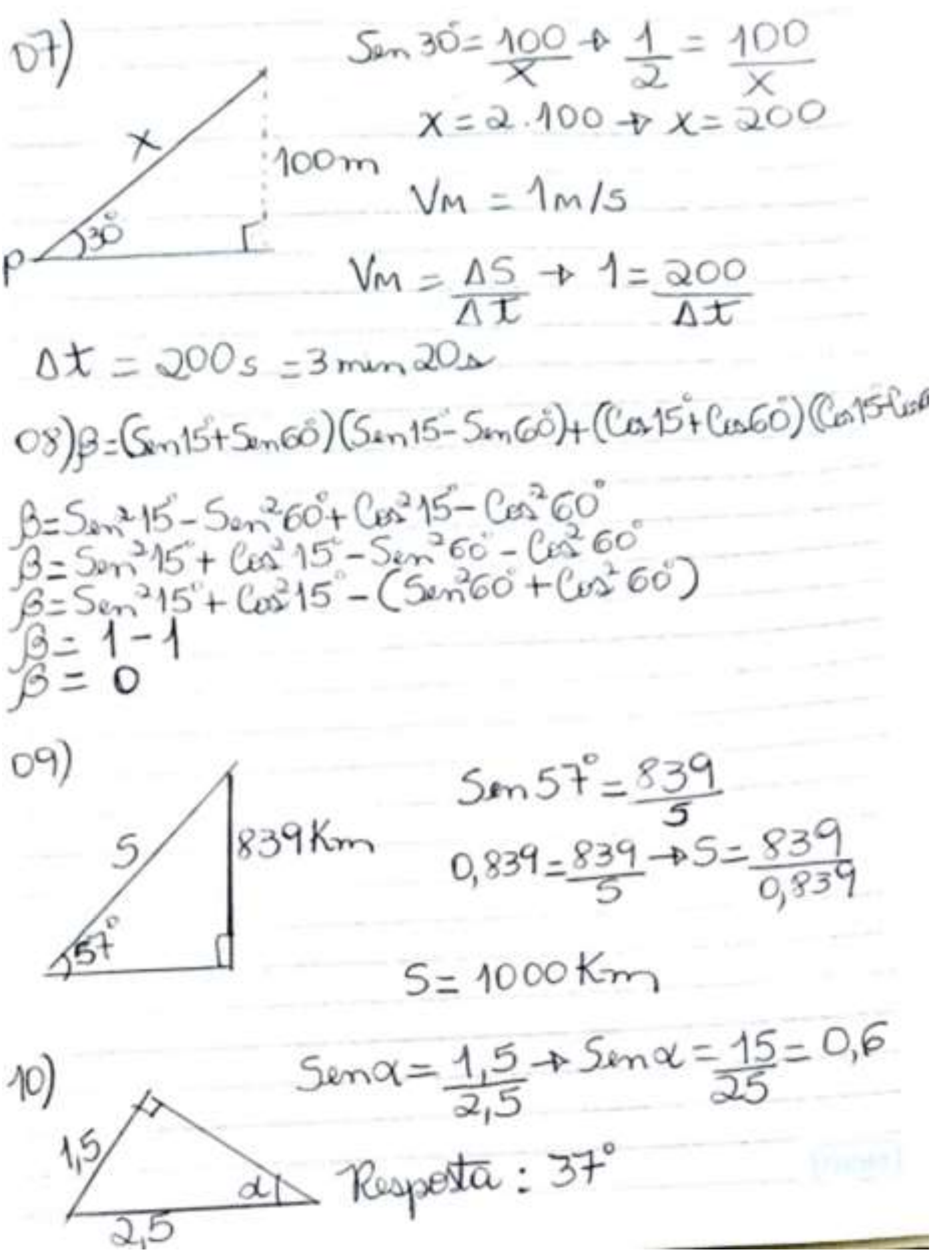
Figura 11: Testes resolvidos pelos alunos do 1º ano – parte 02



Fonte: Elaborado pelo autor

Percebe-se que a aluna não colocou nada no cálculo da questão 03 (sem resposta) ficando abaixo da média dos alunos, pois mais de 50% acertaram essa questão. Na questão 04 a aluna tentou, mas não teve êxito (não consegui) ficando com o resultado também abaixo da média dos alunos da sua série dessa escola.

Figura 12: Testes resolvidos pelos alunos do 1º ano – parte 03



Fonte: Elaborada pelo autor

Através dessas sequências didática, foi possível verificar as inúmeras dificuldades e também os conhecimentos que os alunos e alunas possuem, os quais não são possíveis de se perceber totalmente no dia a dia escolar, diante de várias compilações como, tempo, falta de planejamento, desinteresse e da grande quantidade de alunos em sala de aula.

Após a aplicação da sequência didática e dos testes concluímos que o trabalho com resolução de problemas na sala de aula é de grande importância para o bom desempenho dos alunos. Proporciona a eles mais segurança e confiança. Vale ressaltar ainda que uma grande dificuldade apresentada por vários alunos é na interpretação do texto da questão, principalmente nas questões do ENEM onde o enunciado das questões é longo. Durante o teste enfatizamos a importância da leitura das questões o que viabilizou a interpretação correta do aluno e assim sua resolução pelo mesmo.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde o início da minha carreira como professor de Matemática convivo com sentimentos de alegria e de frustração. Todo esse sentimento sempre me coloca em um processo de reflexão sobre minhas práticas de ensino. Mas, mesmo assim, não conseguia me desprender de trabalhar de maneira mais tradicional. Posto isso, trabalhar com uma sequência didática foi um excelente desafio. De maneira nenhuma foi fácil, ao contrário, o trabalho foi bem maior. Mas ao mesmo tempo foi gratificante poder testar algo novo e ver os alunos interessados nos temas estudados

Vale ressaltar que há mais de uma maneira de implementar uma sequência didática, esse trabalho é apenas uma proposta que, sim, deve ser melhorada. Não é uma obrigação é um desejo de redirecionar a atenção na sala de aula, concentrando-a nos aprendizes e na aprendizagem.

Desenvolver um trabalho diferenciado ao método que chamamos de tradicional, no qual o professor é o protagonista do processo, passando a responsabilidade da aprendizagem para o aluno é um processo difícil, tanto para o professor, quanto para os alunos. Em muitos momentos me senti “desconfortável” na sala de aula simplesmente pelo fato de não ir ao quadro e expor um conteúdo de maneira “tradicional”. Numa sequência didática os alunos, passam a serem mais responsáveis pela própria aprendizagem, também apresentam dificuldades em mudar principalmente quando se está “enraizado” ao método tradicional

Construir uma sequência que seja adequado ao ensino de Trigonometria do Triângulo Retângulo não é fácil. É importe que se gaste um tempo treinando seus alunos a como resolver problemas de maneira mais adequada, assim como oferecer vários problemas, voltado para o objetivo do conhecimento que se está trabalhando.

Outro fator importante no processo é proporcionar condições para que o aluno construa suas próprias soluções, ou seja, que faça um planejamento. É importante ensina-lo a gerenciar seu tempo da melhor maneira possível. Se importante disponibilize questões clássicas, por exemplo, pois certamente essas levarão os alunos a resolverem outras. Não se esqueça de que outro ponto importante é sempre verificar se os alunos estão resolveram as questões em tempo hábil, afinal sem esse passo o método não funcionará de maneira adequada.

Caso alguns alunos não tenham resolvido em tempo, uma alternativa é colocá-los em um mesmo grupo para que possam, interagir e posteriormente resolver as atividades.

Apesar de que nem todos os alunos conseguiram acompanhar, principalmente por conta das construções, das dúvidas, da falta de base, via-se a atenção deles.

Considero, enfim, a experiência com um resultado positivo, pois a aplicação da atividade, obtive retorno de alguns alunos que seguirão para os próximos anos, muito mais preparados.

REFERÊNCIAS

BABINSKI, A. L. **Sequência didática (SD): experiência no ensino da matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em matemática em Rede Nacional) - Faculdade de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2017.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação; Conselho Nacional de Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2017

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

COMETTI, Rodrigo dos Santos. **O ensino da trigonometria em triângulo retângulo através de resolução de problemas**. 2019.

D'AMBROSIO, U. ´ **Algumas reflexões sobre a resolução de problemas**. Disponível em http://issonaoeproblemaseu.blogspot.com/2010/09/algumas-reflexoes-sobre-resolucao-de.html. Acesso em: 25 agosto. 2019.

DOLZ, Joaquim; NOVERRAZ, Michele; SCHNEUWLY, Bernard. **Sequências didáticas para o oral e a escrita: apresentação de um procedimento**. . In: SCHNEUWLY, Bernard.; DOLZ, Joaquim. e colaboradores. Gêneros orais e escritos na escola. [Tradução e organização: Roxane Rojo e Glaís Sales Cordeiro]. Campinas-SP: Mercado de Letras, 2004.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1995. Trad. Hygino H. Domingues.

MORGADO, Augusto C.; WAGNER, E.; PERDIGAO, M. P. **Trigonometria, Números Complexos**. Coleção do professor de, 1992.

MORGADO, Augusto César et al. **Temas e Problemas Elementares**. Coleção do Professor de matemática, SBM, 2005.

OLIVEIRA, Aline Calasans. **Uma Proposta de Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria no Ensino Médio** de,2019. Disponível em: https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170110294.

PERETTI, Lisiane; TONIN DA COSTA, Gisele Maria. **Sequência Didática na Matemática**. In: Revista de Educação do Ideau, v.8, n.17.

REIS, Fabiana dos. **Uma visão geral da trigonometria: história, conceitos e aplicações**. 2016, 84p. dissertação (Mestrado em matemática) apresentada a Universidade Federal de Ponta Grossa. Ponta Grossa, 2016. Disponível em: http://tede2.uepg.br/jspui/bitstream/prefix/1506/1/Fabiana%20Reis.pdf. Acesso em: 25 agosto. 2019.

SIQUEIRA, Thiago Carneiro de Barros. **Trigonometria no triângulo retângulo**: conhecimentos para seu ensino na formação de professores. 2013, 137p. Dissertação

(Pós-Graduação em Educação Matemática) apresentada a Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande-MS. Acesso: em 25 agosto de 2019.

ZABALA, Antoni; ARNAU, Laia. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução de Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010. 197 p.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**; tradução: Ernani F. da F. Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

APÊNDICE A

A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (9ª ANO - EF - SD)

Componente curricular: Matemática **Ano**: 9º **Bimestre**: 4º

Quantidade de aula: 9 aulas de aproximadamente 50 minutos.

Tema: A Trigonometria no Triângulo Retângulo

Relevância para a aprendizagem

Na geometria, o Teorema de Pitágoras tem grande importância, pois permite o cálculo da altura de uma árvore, de um prédio, a largura de um rio, permitindo a construção de inúmeras edificações etc.

O Teorema de Pitágoras corresponde a uma relação que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Contudo, existem relações que envolvem tanto as medidas dos lados de um triângulo retângulo quanto as medidas dos ângulos. O estudo do método para calcular as medidas dos lados e/ou dos ângulos de um triângulo retângulo faz parte do ramo da Matemática denominado Trigonometria.

Compreender as razões trigonométricas auxiliará o aluno a identificar as diversas aplicações em situações reais. Além disso, contribuirá nos estudos nas áreas da Geometria Analítica, na Geometria Espacial, nos Números Complexos, na Física, na Astronomia, na Engenharia, na Arquitetura e em outras áreas.

Objetivos da aprendizagem

- Construir um Triângulo Retângulo.
- Conceituar seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.
- Reconhecer o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo como razões trigonométricas.
- Obter os valores do seno, do cosseno e da tangente de 30°, 45° e 60°.
- Aplicar os conceitos de seno, cosseno e tangente na resolução de problemas.
- Aplicar os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos notáveis na resolução de problemas.

Objetos do conhecimento

- Triângulo Retângulo

- Razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Razões trigonométricas para ângulos de 30º, 45º e 60º

Desenvolvimento

1ª Etapa: (Uma aula de 50 minutos)

Atividade 01: Desenhando o Triângulo Retângulo

Nesta atividade os alunos são orientados a desenhar um triângulo retângulo e identificar seus elementos.

1º Passo

i. Desenhar um segmento horizontal $\overline{AB}$ medindo 12 cm (esse segmento será um dos lados do triângulo).

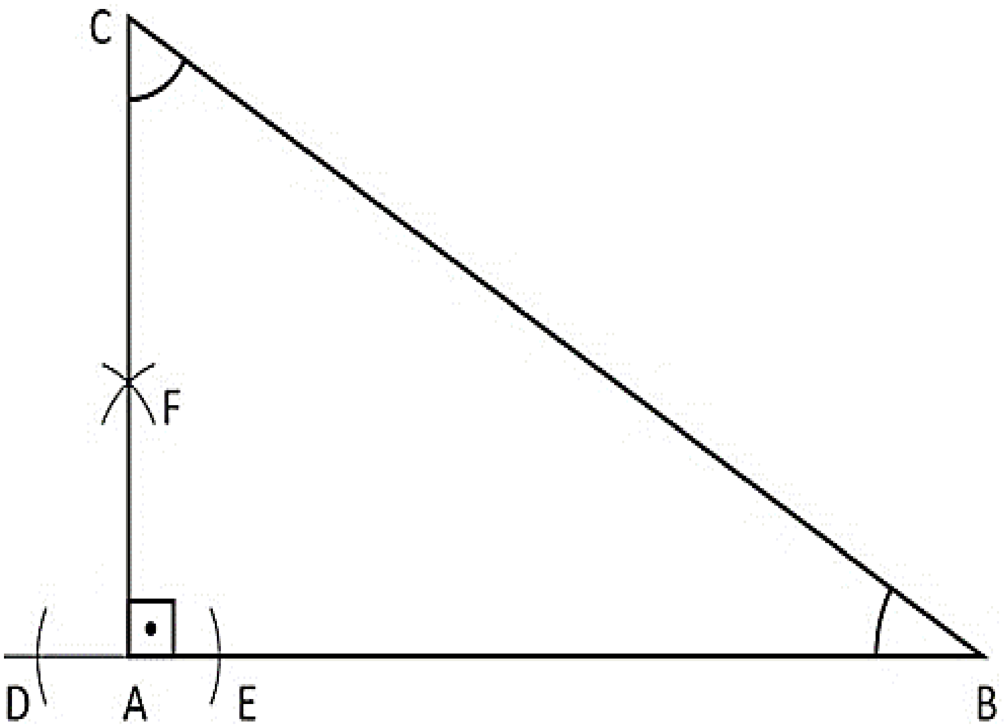
2º Passo

i. Prolongar o segmento $\overline{AB}$ em *A*.
ii. Com ponta-seca no extremo *A*, traçar um arco que intercepte o segmento $\overline{AB}$ no ponto *D* e, no prolongamento, marcando o ponto *E*.
iii. Com a ponta-seca do compasso no ponto *E* e uma abertura um pouco maior que $\overline{AE}$, trace um arco sobre o ponto *A*.
iv. Repita a operação com a ponta-seca no ponto *D*.
v. A intersecção dos arcos definirá o ponto *F*.

Veja o esquema a seguir.

3º PASSO

i. Desenhe o segmento $\overline{AC}$ com medida 9 cm, passando por F. Esse segmento será um dos lados do triângulo.
ii. Em seguida, trace o segmento que une B e C. Esse segmento $\overline{BC}$ será um outro lado do triângulo.

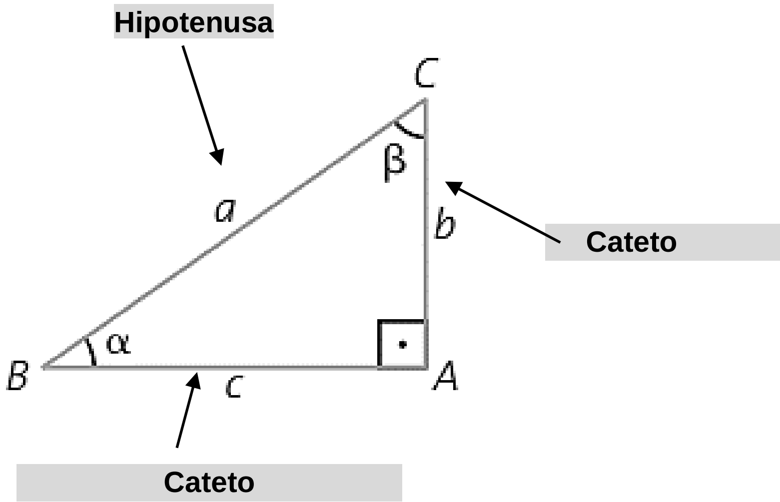


Feita a medida do comprimento do segmento $\overline{BC}$ espera-se que seja encontrada uma medida igual a 15 cm.

2ª Etapa: Nomear os Lados e os Ângulos do Triângulo Retângulo (duas aulas de 50 minutos)

Esta etapa permite avaliar os conhecimentos dos alunos sobre os elementos do triângulo retângulo.

Neste momento os alunos devem desenhar um triângulo com as indicações dos seus elementos.



Neste momento os alunos são perguntados em que vértice está o ângulo reto nesse triângulo. Eles devem expressar suas respostas oralmente. Em seguida os alunos deverão nomear o lado que está oposto ao ângulo reto na figura. Basta que indique na figura: hipotenusa.

Observamos a figura com eles, apontando cada lado: hipotenusa, cateto, cateto.

Retome a figura desenhada, e escreva as definições:

Definição 01. Um triângulo é classificado com triângulo retângulo quando um de seus ângulos é igual a 90º.

Definição 02. O lado oposto ao ângulo reto é denominado **hipotenusa**, enquanto os outros dois lados do triângulo são chamados de **catetos**.

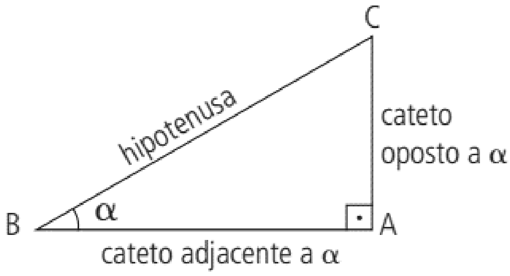
Tomando o triângulo ABC, como ilustrado na figura acima, onde o vértice A é o vértice onde está o ângulo reto. Temos que:

i. $\overline{BC}$ = a, é a hipotenusa;
ii. $\overline{AC}$ = b e $\overline{AB}$ = c, são os catetos;
iii. $\angle B\hat{A}C$ = Â = 90, é o ângulo reto do triângulo retângulo;
iv. $\angle A\hat{B}C = \hat{B} = \alpha$ e $\angle A\hat{C}B = \hat{C} = \beta$, são os ângulos agudos.

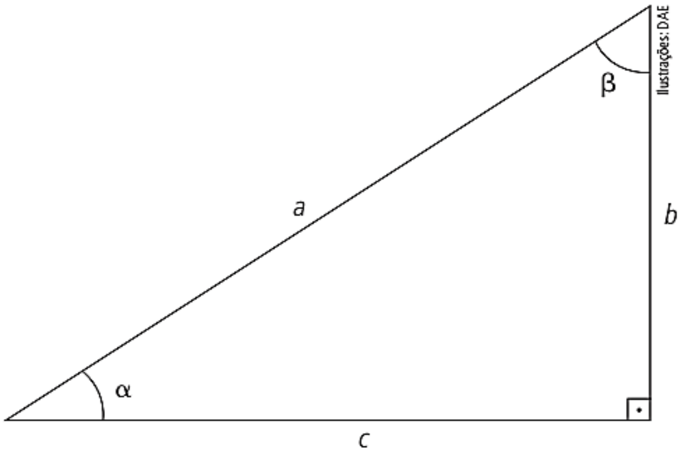
Considerando os ângulos agudos do triângulo retângulo e, de acordo com o ângulo agudo considerado, os catetos recebem designação diferentes:

O cateto que tem o vértice do ângulo considerado como uma de suas extremidades é chamado de cateto adjacente ao ângulo.

O cateto que não tem o vértice do ângulo considerado como um de seus pontos é chamado de cateto oposto ao ângulo. Veja a figura:



Neste momento apresentamos uma atividade. Pedimos aos alunos que considerando o triângulo abaixo, determine:



a) Qual é a hipotenusa?

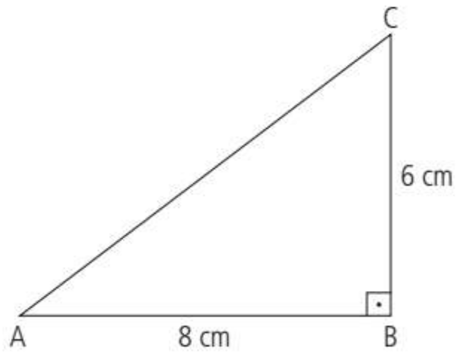
b) Qual é o cateto oposto a α?

c) Qual é o cateto adjacente a α?

d) Qual é o cateto oposto a β?

e) Qual é o cateto adjacente a β?

Para uma aprendizagem mais consistente resolveremos uma outra atividade. No triângulo retângulo da figura a seguir, calculemos os valores de:



sen Â=

cos Â =

tg Â =

sen $\hat{C}$=

cos $\hat{C}$ =

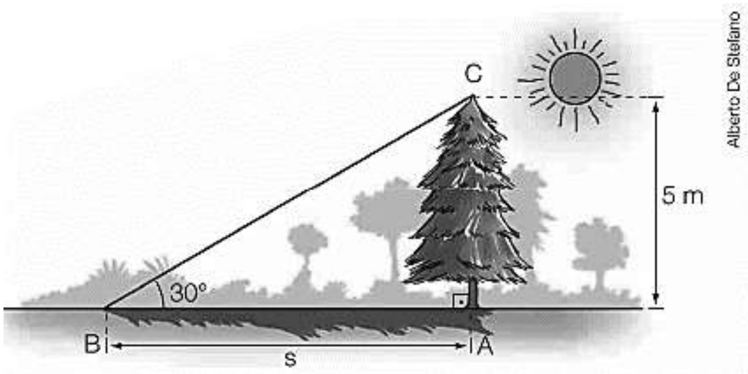
tg $\hat{C}$=

Etapa 03: As razões trigonométricas (4 aulas de 50 minutos)

Solicite ao aluno que analise as seguintes situações-problema.

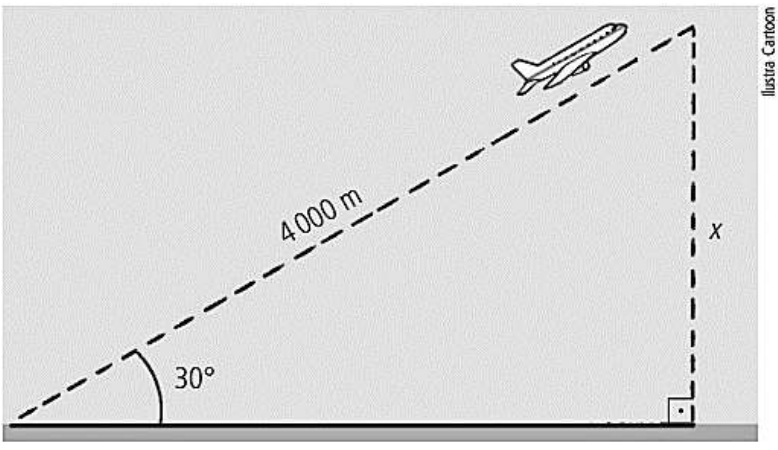
Situação 01: O comprimento da sombra de uma árvore.

Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? Veja a ilustração.



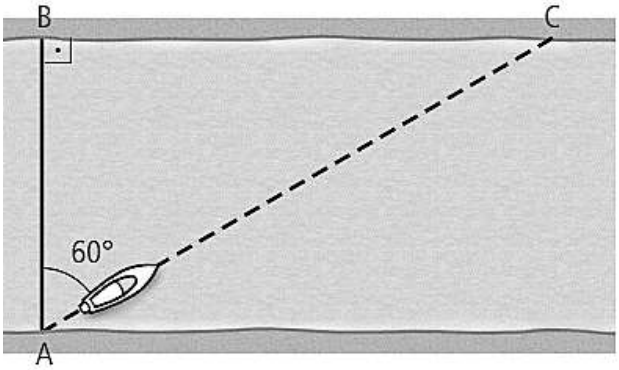
Situação 02: A altura do avião.

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4 000 m em linha reta? Veja a ilustração.



Situação 03: A largura do rio.

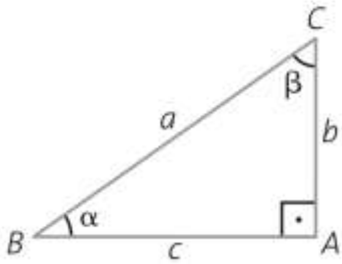
A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C? Veja a ilustração.



Fonte: (Unama-PA)

Agora, realize breves discursões sobre as medidas pedidas, e fale que para resolver questões desse tipo, devemos utilizar o conhecimento das chamadas razões trigonométricas do triângulo retângulo. Vejamos quais são elas:

Dado um triângulo ABC retângulo em A (Â = 90º), em que o ângulo A$\hat{B}C$ $é\ igual\ a\ \alpha$ e o ângulo A$\hat{C}B$ $é\ igual\ a\ \beta,$ como na figura abaixo, identificamos seis razões entre os lados de ABC, que denominamos razões trigonométricas.



As principais são:

- O *seno* de α (sen α), que é a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo (sen $\alpha = \frac{b}{a}$).
- O cos*seno* de α (cos α), que é a razão entre o cateto adjacente a $\boldsymbol{\alpha}$ e a hipotenusa do triângulo (cos $\alpha = \frac{c}{a}$).
- A *tangente* de α (tg α), que é a razão entre o cateto oposto a α e cateto adjacente (tg $\alpha = \frac{b}{c}$).

As razões inversas das três acima (seno, cosseno e tangente) são chamadas, respectivamente, de cossecante, secante e cotangente de α.

De modo análogo podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo β, ou seja:

- O *seno* de β (sen β), que é a razão entre o cateto oposto a β e a hipotenusa do triângulo (sen β = $\frac{c}{a}$).
- O cos*seno* de β (cos β), que é a razão entre o cateto adjacente a β e a hipotenusa do triângulo (cos β = $\frac{b}{a}$).
- O *tangente* de β (tg β), que é a razão entre o cateto oposto a β e cateto adjacente (tg β = $\frac{c}{b}$).

De modo a reduzir o tamanho das escritas destas grandezas, é comum designar como fizemos acima, cosseno apenas por cos, seno apenas por sen e tangente apenas por tg ou tag.

Resumindo, dado um triângulo retângulo onde Â = 90º, BC = a e AC = b e AB = c, temos:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \frac{b}{a},\ \cos \alpha = \frac{c}{a}\ ,\ \text{tg } \alpha = \frac{b}{c},\ \text{sen } \beta = \frac{c}{a},\ \cos \beta = \frac{b}{a} \text{ e tg } \beta = \frac{c}{b}}$$

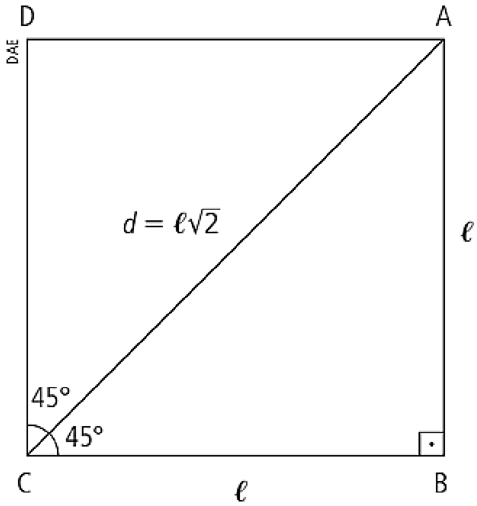
Perceba que sen α $=$cos β e que cos α $=$ sen β. Além disso, note que:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{\cancel{hipotenusa}} \cdot \frac{\cancel{hipotenusa}}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} \Rightarrow tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}.$$

Algumas aplicações importantes: **Ângulos notáveis**.

Problema: Construa uma tabela com os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de medidas de 30º, 45º e 60º.

a) Calculem sen 45º, cos 45º e tg 45º utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado representado abaixo.



Considerando o triângulo retângulo isósceles ABC, de hipotenusa AC = d e catetos AB = BC = l. Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$l^2 + l^2 = d^2 \Rightarrow d = l\sqrt{2}.$$

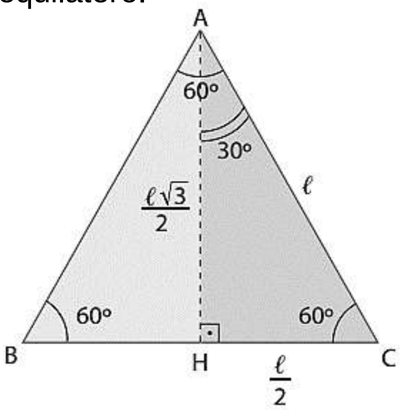
Como os catetos de um triângulo retângulo isósceles possuem mesmo comprimento o seno e cosseno de 45º são iguais:

sen45º = $\frac{L}{d} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, racionalizando temos, sen 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

cos 45º = $\frac{L}{d} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, racionalizando temos, cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 45º = $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}$, logo, tg 45º = 1

b) Calculem sen 30º, cos 30º, tan 30º, sen 60º, cos 60º e tg 60º utilizando um triângulo equilátero.



Consideremos, agora, um triângulo equilátero ABC de lado l. Traçando a altura a partir de A, que intersecta $\overline{BC}$ em H. Temos que $\overline{AC}$ = l e $\overline{HC}$ = $\frac{l}{2}$, $\angle H\hat{C}A =$ 60º e $\angle H\hat{A}C =$ 30º. A Altura h além de altura, é mediana e bissetriz.

Como o triângulo AHC é retângulo, pelo teorema de Pitágoras:

$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Longrightarrow h^2 = \frac{3.L^2}{4} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$

Assim no triângulo AHC, temos:

I. **Para o ângulo de medida 30º:**

sen 30º = $\frac{\frac{L}{2}}{L} \Longrightarrow$ sen 30º = $\frac{\cancel{L}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{L}} = \frac{1}{2}$; logo, **sen 30º = $\frac{1}{2}$.**

cos 30º = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} \Longrightarrow$ cos30º $= \frac{\cancel{L}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{L}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; logo, **cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

tg30º = $\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow$ tg30º = $\frac{\cancel{L}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{L}\sqrt{3}}$, racionalizando temos, **tg30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$**

II. **Para o ângulo de medida 60º:**

sen60º = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} \Longrightarrow$ sen60º $= \frac{\cancel{L}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{L}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; logo, **sem 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

cos 60º = $\frac{\frac{L}{2}}{L} \Longrightarrow$ cos 60º = $\frac{\cancel{L}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{L}} = \frac{1}{2}$; logo, **cos 60º = $\frac{1}{2}$.**

tg60º = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} \Longrightarrow$ tg 60º = $\frac{\cancel{L}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{L}}$, logo **tg60 =$\sqrt{3}$**

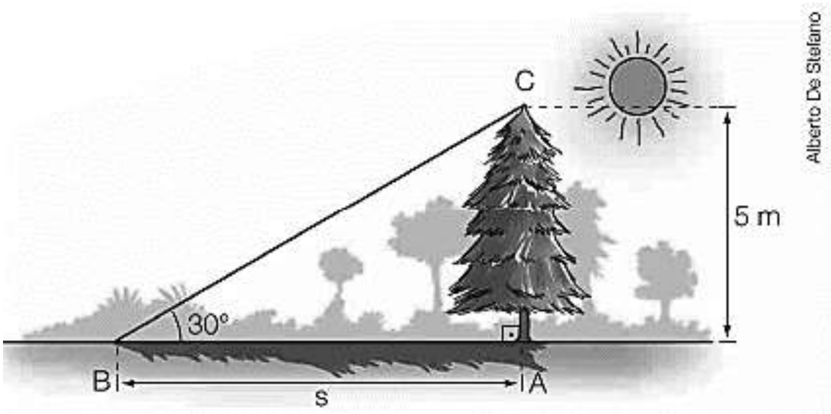
Podemos assim, construir uma tabela que indica os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30º, 45º e 60º).

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Agora, podemos responder as situações-problema propostas. Vejamos:

Situação 01: O comprimento da sombra de uma árvore.

Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? Veja a ilustração.



Solução:

Para calcular o tamanho da sombra dessa árvore, fazemos:

tg30º = $\frac{5}{s}$ ⇒ s ·tg30º = 5, como a tan30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ temos, s · $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 5 ⇒ s · $\sqrt{3}$ = 15 ⇒

s = $\frac{15}{\sqrt{3}}$, racionalizando o denominador desta fração obtemos

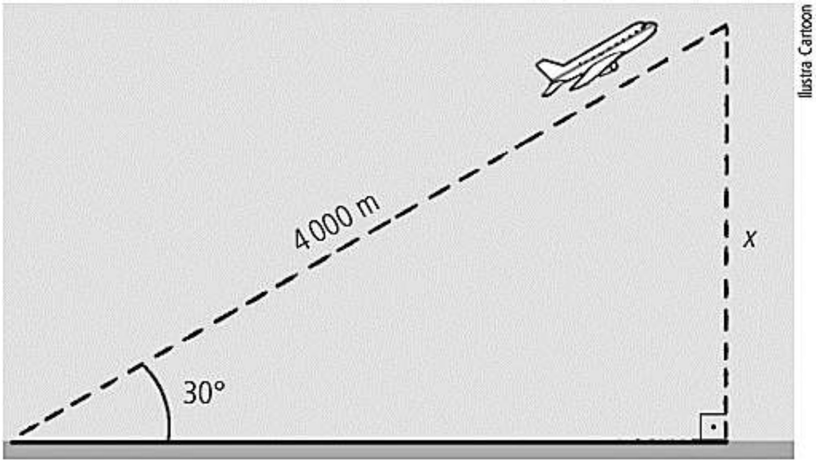
s = $\frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$, tomando $\sqrt{3}$ = 1,732 teremos s = 5·1,732 = 8,66.

Logo, o comprimento da sombra da árvore é de aproximadamente 8,66 metros

Nota: tangente de um ângulo= $\frac{cateto\ oposto\ a\ esse\ \hat{a}ngulo}{cateto\ adjacente\ a\ esse\ \hat{a}ngulo}$

Situação 02: A altura do avião.

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4 000 m em linha reta? Veja a ilustração.



Solução:

Para calcular a altura deste avião, faremos:

sen30º= $\frac{x}{4000} \Longrightarrow x = 4000 \cdot sen30$, como sen30º = $\frac{1}{2}$, temos

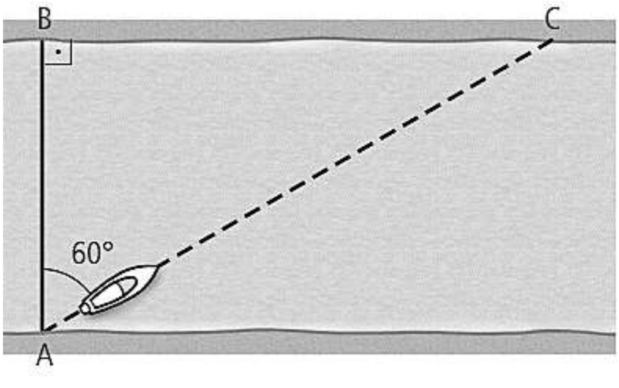
$x = 4000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2000.$

Logo, o avião encontra-se a uma altura de 2000m ou 2km.

Nota: seno de um ângulo= $\frac{cateto\ oposto\ a\ esse\ \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$

Situação 03: A largura do rio.

A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C?



Fonte: (Unama-PA)

Solução:

Para calcular a distância ($\overline{AC}$) percorrida pelo barco, faremos:

Cos60º = $\frac{120}{\overline{AC}} \Longrightarrow \overline{AC} \cdot$ cos60º = 120, como cos60º = $\frac{1}{2}$, temos

$\overline{AC} \cdot \frac{1}{2} = 120 \Longrightarrow \overline{AC} = 2 \cdot 120 \Rightarrow \overline{AC} = 240.$

Logo, a distância percorrida pelo barco foi de 240 metros.

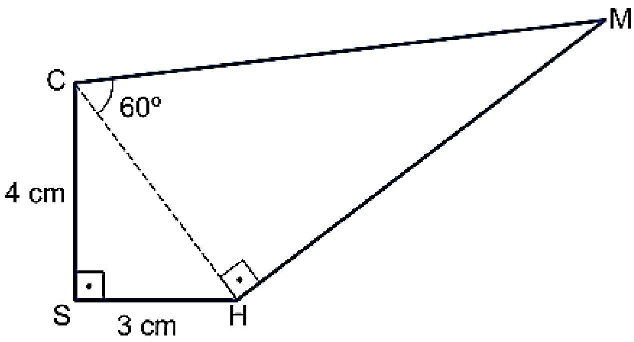
Nota: cosseno de um ângulo= $\frac{cateto\ adjacente\ a\ esse\ \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$

Etapa 04. Aferição do objetivo da aprendizagem

Questões para auxiliar na aferição do objetivo de aprendizagem

Questão 01

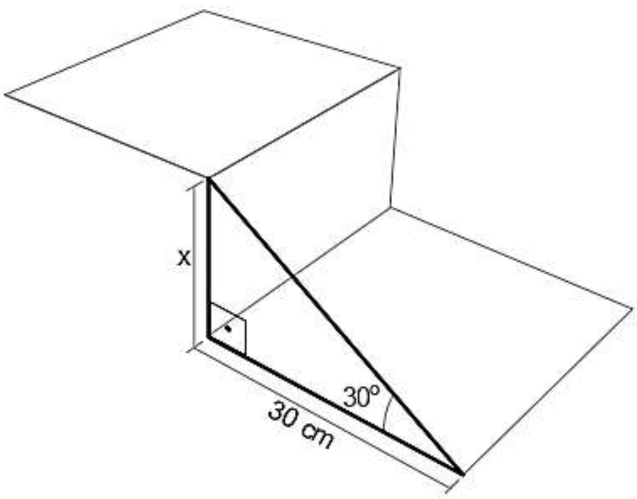
(Santa Casa) No polígono HSCM, $\overline{CS}$ = 4 cm, $\overline{SH}$ = 3 cm e o ângulo entre é igual a 60º, como mostra a figura.



Qual a medida de $\overline{CM}$?

Questão 02

(Senac) Uma escada possui degraus idênticos de largura 30 cm e altura desconhecida, indicada na figura abaixo por x.



Sabendo que cada degrau vence um desnível de 30°, o valor aproximado de x, em centímetros, é de:

Questão 03

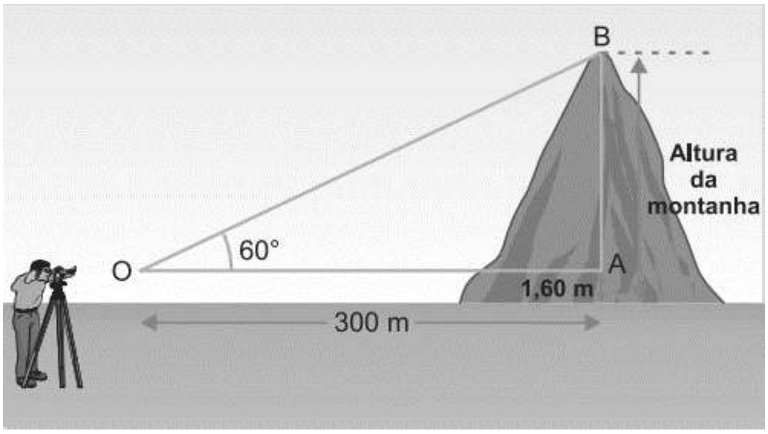
Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° e percorre 8 km em linha reta. Determine a altura em que se encontra o avião ao percorrer essa distância.

Questão 04

(UEG-GO) Do alto de um edifício de 24 metros de altura, um engenheiro vê o topo de um outro edifício mais alto, observando-o sob um ângulo de 30º. Sabendo que a distância entre os dois edifícios é de 100 metros, a altura do edifício mais alto é:

Questão 05

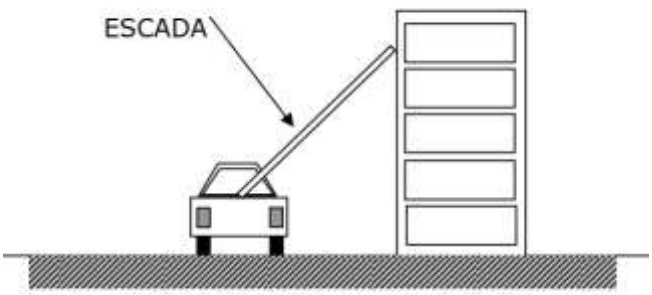
Para determinar a altura de uma montanha, um topógrafo colocou-se com seu teodolito a 300 m da montanha.



Posiciona o aparelho que lhe fornece a medida do ângulo de visada de parte do morro, igual a 60º. Sabendo que o teodolito tem altura de 1,60 m, o topógrafo pode determinar a altura da montanha. Qual é essa altura? Adotando ($\sqrt{3}$ = 1,732)

Questão 6

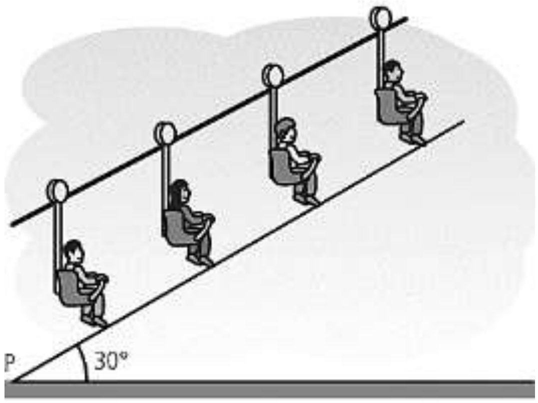
Uma escada de bombeiro pode ser estendida até o comprimento máximo de 20 m, formando um ângulo de 60º com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo.



Qual a altura máxima, em m, que a escada pode atingir? (Use $\sqrt{3}$ = 1,732)

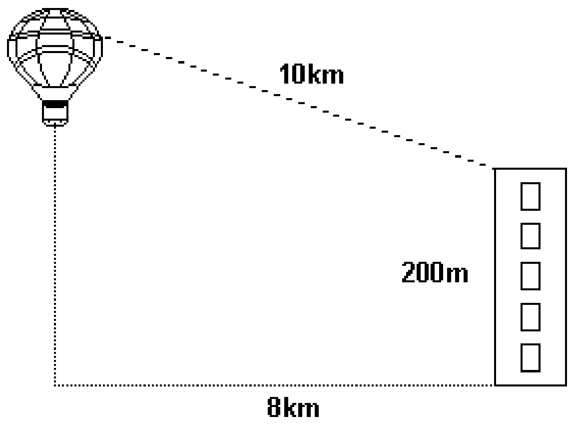
Questão 07

A figura abaixo representa um teleférico que será construído para transportar pessoas do ponto P até uma altura de 150 metros em relação ao solo. Sabendo-se que o cabo ficará perfeitamente reto e esticado e que a velocidade das cadeiras ao longo do cabo será constante e igual a 1 metro por segundo. Qual o tempo em minutos no deslocamento do ponto P até o ponto mais alto alcançado pel a pessoa?



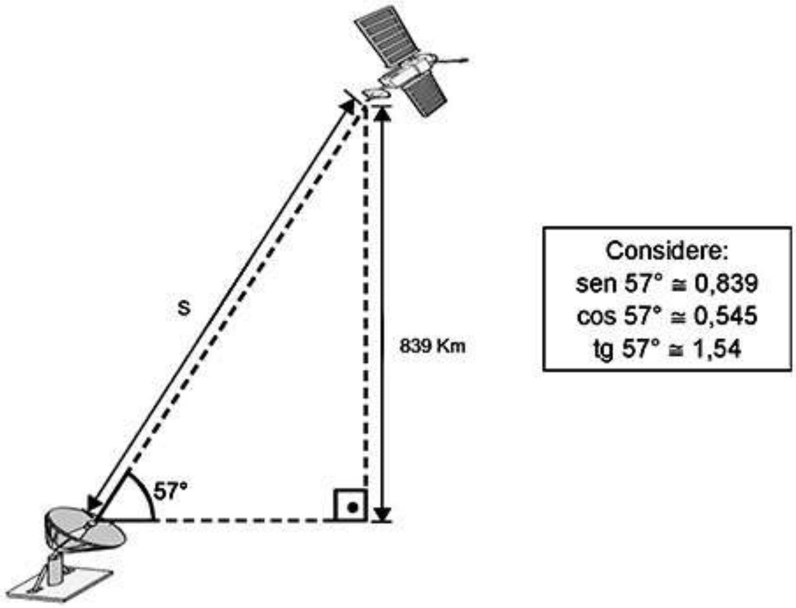
Questão 08

(UFLA) Qual deve ser a altitude do balão para que sua distância ao topo do prédio seja de 10km?



Questão 09

No desenho abaixo está representado o instante em que um satélite de órbita baixa transmite o sinal para uma antena receptora.



Qual é a distância S que esse sinal de satélite deve percorrer para chegar até a antena receptora?

APÊNDICE B
A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (1ª ANO - EM - SD)

Componente curricular: Matemática **Ano**: 1º **Bimestre**: 4º
Quantidade de aula: 10 aulas de aproximadamente 50 minutos.
Tema: A Trigonometria no Triângulo Retângulo

Relevância para a aprendizagem

Um dos teoremas mais importante, se não o mais importante da matemática é o Teorema de Pitágoras, pois entre muitas outras aplicações permite a realização de cálculos importantíssimos. Neste teorema temos uma relação que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Contudo, existem relações que envolvem tanto as medidas dos lados de um triângulo retângulo quanto as medidas dos ângulos.

O estudo do método para calcular as medidas dos lados e/ou dos ângulos de um triângulo retângulo faz parte do ramo da Matemática denominado Trigonometria.

Compreender as razões trigonométricas auxiliará o aluno a identificar as diversas aplicações em situações reais. Além disso, contribuirá nos estudos nas áreas da Geometria Analítica, na Geometria Espacial, nos Números Complexos, na Física, na Astronomia, na Engenharia, na Arquitetura e em outras áreas.

Objetivos da aprendizagem

- Construir um Triângulo Retângulo.
- Conceituar seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.
- Reconhecer o seno, o cosseno, a tangente, a cossecante, a secante e a cotangente de um ângulo como razões trigonométricas.
- Obter os valores do seno, do cosseno, da tangente, da cossecante, da secante e da cotangente de 30°, 45° e 60°.
- Reconhecer as relações entre seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente.
- Aplicar os valores do seno, do cosseno, da tangente, da cossecante, da secante e da cotangente dos ângulos notáveis na resolução de problemas.

Objetos do conhecimento

- Triângulo Retângulo;
- Razões trigonométricas no triângulo retângulo;
- Razões trigonométricas para ângulos de 30º, 45º e 60º.

Desenvolvimento

1ª Etapa: (Uma aula de 50 minutos)

Atividade 01: Desenhando o Triângulo Retângulo

Nesta atividade os alunos são orientados a desenhar um triângulo retângulo e identificar seus elementos.

1º Passo

ii. Desenhar um segmento horizontal $\overline{AB}$ medindo 12 cm (esse segmento será um dos lados do triângulo).

2º Passo

vi. Prolongar o segmento $\overline{AB}$ em *A*.

vii. Com ponta-seca no extremo *A*, traçar um arco que intercepte o segmento $\overline{AB}$ no ponto *D* e, no prolongamento, marcando o ponto *E*.

viii. Com a ponta-seca do compasso no ponto *E* e uma abertura um pouco maior que $\overline{AE}$, trace um arco sobre o ponto *A*.

ix. Repita a operação com a ponta-seca no ponto *D*.

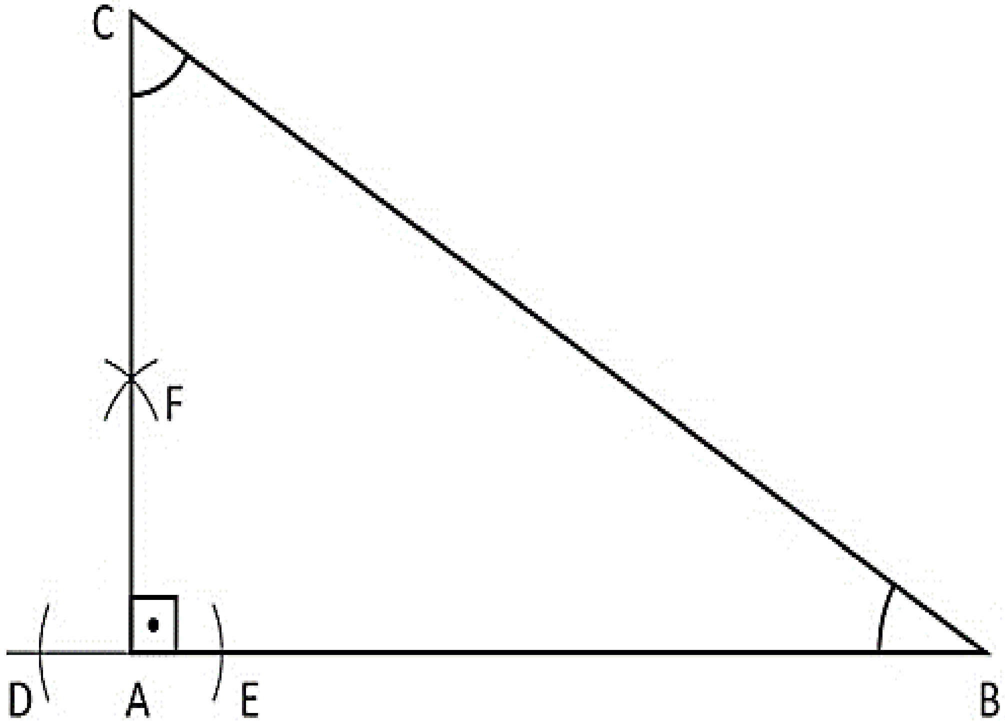
x. A intersecção dos arcos definirá o ponto *F*.

Veja o esquema a seguir.

3º PASSO

iii. Desenhe o segmento $\overline{AC}$ com medida 9 cm, passando por F. Esse segmento será um dos lados do triângulo.

iv. Em seguida, trace o segmento que une B e C. Esse segmento $\overline{BC}$ será um outro lado do triângulo.

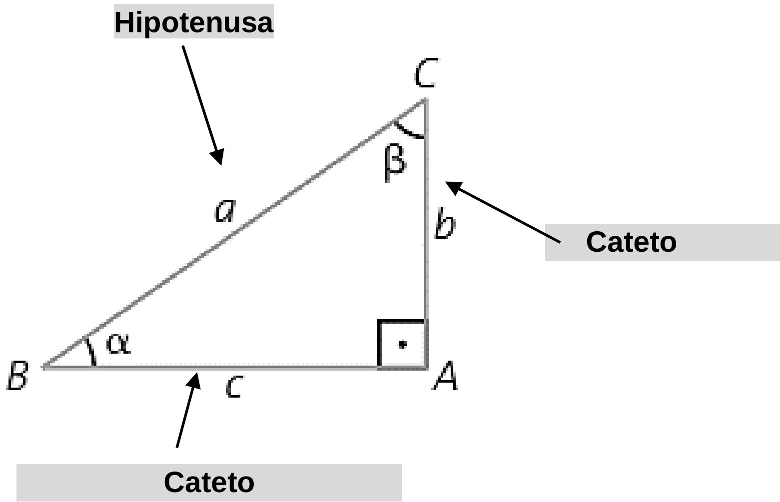


Feita a medida do comprimento do segmento $\overline{BC}$ espera-se que seja encontrada uma medida igual é 15 cm.

2ª Etapa: Nomear os Lados e os Ângulos do Triângulo Retângulo (Duas aulas de 50 minutos)

Esta etapa permite avaliar os conhecimentos dos alunos sobre os elementos do triângulo retângulo.

Neste momento os alunos devem desenhar um triângulo com as indicações dos seus elementos.



Agora, perguntamos aos alunos em que vértice está o ângulo reto nesse triângulo. Eles devem expressar suas respostas oralmente. Em seguida os alunos deverão nomear o lado que está oposto ao ângulo reto na figura. Basta que indique na figura: hipotenusa.

Observamos a figura com eles, apontando cada lado: hipotenusa, cateto, cateto.

Retome a figura desenhada, e escreva as definições:

Definição 01. Um triângulo é classificado como triângulo retângulo quando um de seus ângulos é igual a 90º.

Definição 02. O lado oposto ao ângulo reto é denominado **hipotenusa**, enquanto os outros dois lados do triângulo são chamados de **catetos**.

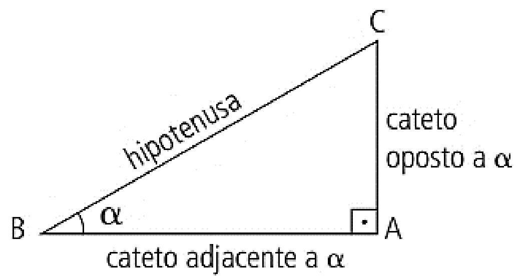
Tomando o triângulo ABC, como ilustrado na figura acima, onde o vértice A é o vértice onde está o ângulo reto. Temos que:

v. $\overline{BC}$ = a, é a hipotenusa;
vi. $\overline{AC}$ = b e $\overline{AB}$ = c, são os catetos;
vii. $\angle B\hat{A}C$ = Â = 90, é o ângulo reto do triângulo retângulo;
viii. $\angle A\hat{B}C = \hat{B} = \alpha$ e $\angle A\hat{C}B = \hat{C} = \beta$, são os ângulos agudos.

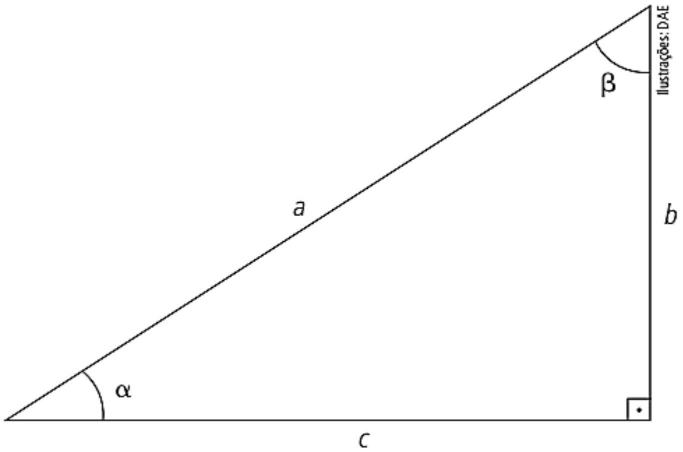
Considerando os ângulos agudos do triângulo retângulo e, de acordo com o ângulo agudo considerado, os catetos recebem designação diferentes:

O cateto que tem o vértice do ângulo considerado como uma de suas extremidades é chamado de cateto adjacente ao ângulo.

O cateto que não tem o vértice do ângulo considerado como um de seus pontos é chamado de cateto oposto ao ângulo. Veja a figura:



Neste momento apresentamos uma atividade. Pedimos aos alunos que considerando o triângulo abaixo, determine:



a) A hipotenusa do triângulo?

b) O cateto oposto a α?

c) O cateto adjacente a α?

d) O cateto oposto a β?

e) O cateto adjacente a β?

f) A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa?

$$\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} =$$

g) A razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa?

$$\frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa} =$$

h) A razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a α?

$$\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} =$$

i) A razão entre a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo α?

$$\frac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \alpha} =$$

j) A razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo α?

$$\frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} =$$

k) A razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto ao ângulo α?

$$\frac{cateto\ adjecante\ a\ \alpha}{cateto\ oposto\ a\ \alpha} =$$

l) A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo β e a hipotenusa?

$$\frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{hipotenusa} =$$

m) A razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo β e a hipotenusa?

$$\frac{cateto\ adjacente\ a\ \beta}{hipotenusa} =$$

n) A razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a β?

$$\frac{cateto\ oposto\ a\ \beta}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} =$$

o) A razão entre a hipotenusa e o cateto oposto ao ângulo β?

$$\frac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \beta} =$$

p) A razão entre a hipotenusa e o cateto adjacente ao ângulo β?

$$\frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \beta} =$$

q) A razão entre o cateto adjacente e o cateto oposto ao ângulo β?

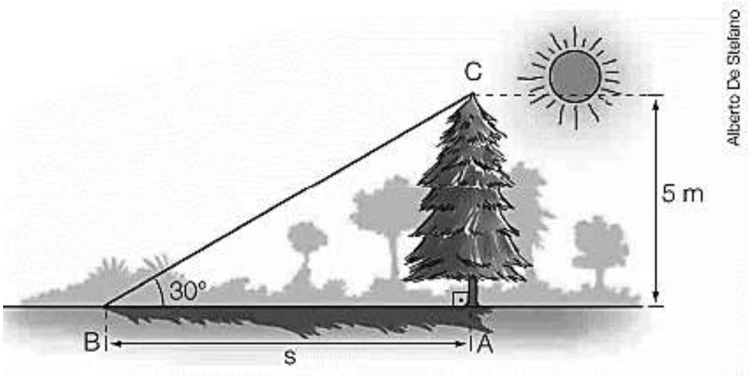
$$\frac{cateto\ adjecante\ a\ \beta}{cateto\ oposto\ a\ \beta} =$$

Etapa 03: As razões trigonométricas (4 aulas de 50 minutos)

Esta etapa iniciaremos solicitando aos alunos que analise as seguintes situações-problema.

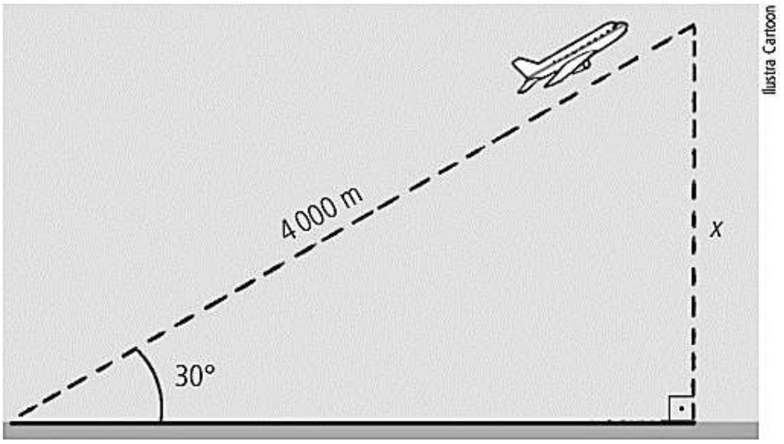
Situação 01: O comprimento da sombra de uma árvore.

Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? Veja a ilustração.



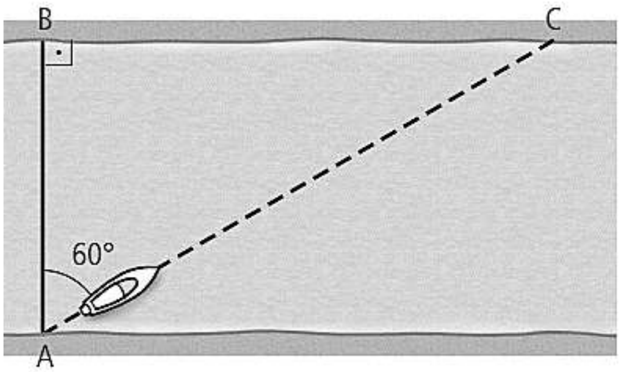
Situação 02: A altura do avião.

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4 000 m em linha reta? Veja a ilustração.



Situação 03: A largura do rio.

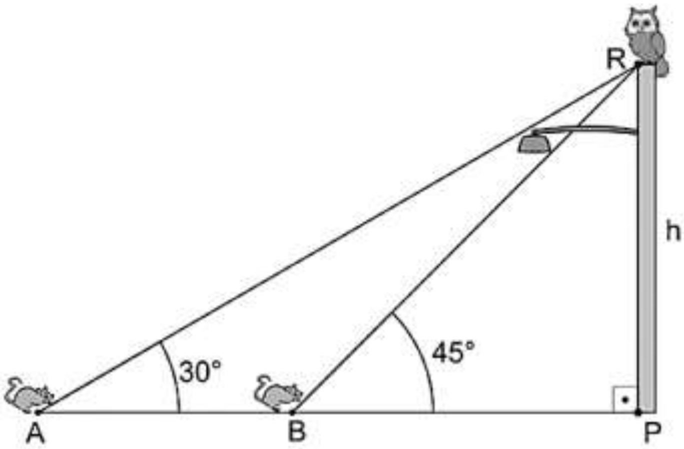
A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C? Veja a ilustração.



Fonte: (Unama-PA)

Situação 04: O deslocamento do rato

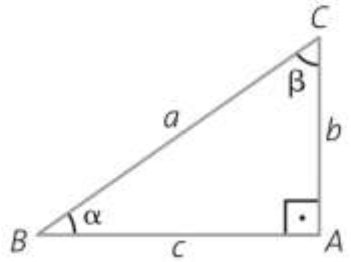
Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30°, conforme mostra a figura abaixo.



O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é? (Use $\sqrt{3}$ = 1,73)

Agora, realize breves discursões sobre as medidas pedidas, e fale que para resolver questões desse tipo, devemos utilizar o conhecimento das chamadas razões trigonométricas do triângulo retângulo. Vejamos quais são elas:

Dado um triângulo ABC retângulo em A (Â = 90º), em que o ângulo $A\hat{B}C$ $é\ igual\ a\ \alpha$ e o ângulo $A\hat{C}B$ $é\ igual\ a\ \beta,$ como na figura abaixo, identificamos seis razões entre os lados de ABC, que denominamos razões trigonométricas.



As principais são:

- O seno de α (sen α), que é a razão entre o cateto oposto a α e a hipotenusa do triângulo (sen $\alpha = \frac{b}{a}$).
- O cos*seno* de α (cos α), que é a razão entre o cateto adjacente a $\boldsymbol{\alpha}$ e a hipotenusa do triângulo (cos $\alpha = \frac{c}{a}$).
- A *tangente* de α (tg α), que é a razão entre o cateto oposto a α e cateto adjacente (tg $\alpha = \frac{b}{c}$).

Suas inversa:

- O *cossecante* de α (cossec α), que é a razão entre a hipotenusa do triângulo e o cateto oposto (cossec α = $\frac{a}{b}$).
- O *secante* de α (sec α), que é a razão entre a hipotenusa do triângulo e o cateto adjacente (sec α = $\frac{a}{c}$).
- O co*tangente* de α (cotg α), que é a razão entre o cateto adjacente a α e o cateto oposto (cotg α = $\frac{c}{b}$).

As razões inversas das três acima (seno, cosseno e tangente) são chamadas, respectivamente, de cossecante, secante e cotangente de α.

De modo análogo podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente do ângulo β, ou seja.

- O *seno* de β (sen β), que é a razão entre o cateto oposto a β e a hipotenusa do triângulo (sen β = $\frac{c}{a}$).
- O cos*seno* de β (cos β), que é a razão entre o cateto adjacente a β e a hipotenusa do triângulo (cos β = $\frac{b}{a}$).
- A *tangente* de β (tg β), que é a razão entre o cateto oposto a β e cateto adjacente (tg β = $\frac{c}{b}$).

Suas inversas:

- O *cossecante* de β (cossec β), que é a razão entre a hipotenusa do triângulo e cateto oposto a β (cossec β = $\frac{a}{c}$).
- O secante de β (sec β), que é a razão entre a hipotenusa do triângulo e o cateto adjacente a β (cos β = $\frac{a}{b}$).
- O co*tangente* de β (cotg β), que é a razão entre o cateto adjacente e cateto oposto a β (tg β = $\frac{b}{c}$).

De modo a reduzir o tamanho das escritas destas grandezas, é comum designar como fizemos acima, cosseno apenas por cos, seno apenas por sen, tangente apenas por tg ou tag, cossecante apenas por cossec, secante por sec e cotangente cotg.

Perceba que sen α $=$cos β e que cos $\alpha = \text{sen}\ \beta$. Além disso, note que:

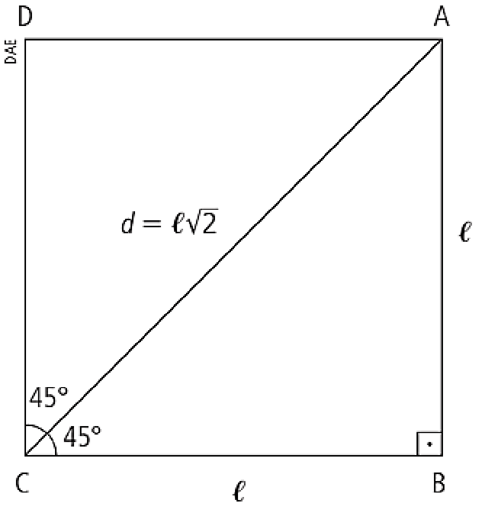
$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}}{\frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}} = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{\cancel{hipotenusa}} \cdot \frac{\cancel{hipotenusa}}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} =$$

$$= \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} \Longrightarrow tg\alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}.$$

Algumas aplicações importantes: **Ângulos notáveis**.

Problema: Construa uma tabela com os valores dos senos, cossenos e tangentes dos ângulos de medidas de 30º, 45º e 60º.

a) Calculem sen 45º, cos 45º, tg 45º, utilizando o triângulo retângulo destacado do quadrado representado abaixo.



Considerando o triângulo retângulo isósceles ABC, de hipotenusa AC = d e catetos AB = BC = l. Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$l^2 + l^2 = d^2 \Longrightarrow d = l\sqrt{2}.$$

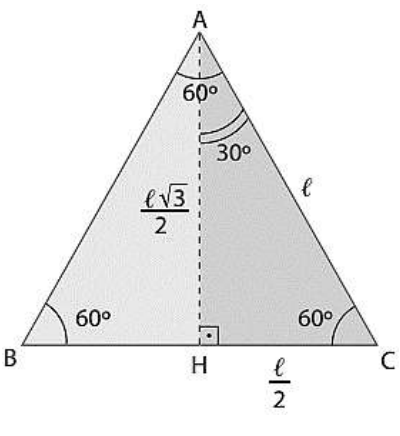
Como os catetos de um triângulo retângulo isósceles possuem mesmo comprimento o seno e cosseno de 45º são iguais:

sen45º $= \frac{L}{d} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, racionalizando temos, sen 45º $= \frac{\sqrt{2}}{2}$.

cos 45º $= \frac{L}{d} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, racionalizando temos, cos 45º $= \frac{\sqrt{2}}{2}$

tg 45º $= \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}}$, logo, tg 45º = 1

b) Calculem sen 30º, cos 30º, tan 30º, sen 60º, cos 60º e tg 60º, utilizando um triângulo equilátero.



Consideremos, agora, um triângulo equilátero ABC de lado l. Traçando a altura a partir de A, que intersecta $\overline{BC}$ em H. Temos que $\overline{AC}$ = l e $\overline{HC} = \frac{l}{2}$, $\angle H\hat{C}A = 60º$ e $\angle H\hat{A}C = 30º$. A Altura h além de altura, é mediana e bissetriz.

Como o triângulo AHC é retângulo, pelo teorema de Pitágoras:

$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Longrightarrow h^2 = \frac{3.L^2}{4} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{3}}{2}$. Assim no triângulo AHC, temos:

III. **Para o ângulo de medida 30º:** (usaremos l maiúsculo (L) pois o l minúsculo é muito parecido com o1)

sen 30º = $\frac{\frac{L}{2}}{L} \Longrightarrow$ sen 30º = $\frac{L}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$; logo, **sen 30º = $\frac{1}{2}$.**

cos 30º = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} \Rightarrow$ cos30º $= \frac{\cancel{L}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{L}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; logo, **cos 30º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

tg30º = $\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow$ tg30º = $\frac{L}{2} \cdot \frac{2}{L\sqrt{3}}$, racionalizando temos, **tg30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$**

IV. Para o ângulo de medida 60º:

sen60º = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{L} \Rightarrow$ sen60º $= \frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; logo, **sem 60º = $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

cos 60º = $\frac{\frac{L}{2}}{L} \Rightarrow$ cos 60º = $\frac{L}{2} \cdot \frac{1}{L} = \frac{1}{2}$; logo, **cos 60º = $\frac{1}{2}$.**

tg60º = $\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{\frac{L}{2}} \Rightarrow$ tg 60º = $\frac{L\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{L}$, logo **tg60 =$\sqrt{3}$**

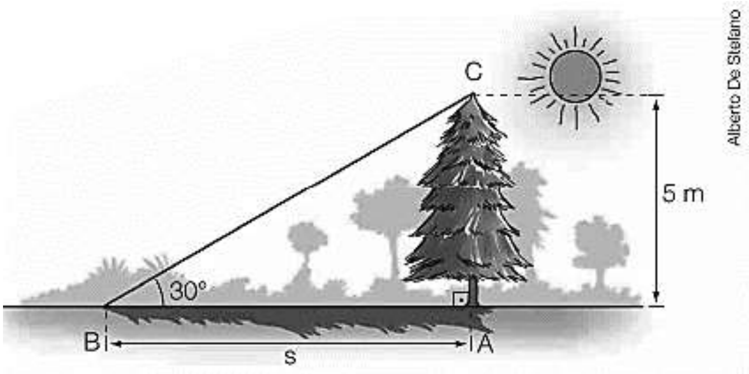
Podemos assim, construir uma tabela que indica os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30º, 45º e 60º).

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Agora, podemos responder as situações-problema propostas. Vejamos:

Situação 01: O comprimento da sombra de uma árvore.

Qual é o comprimento da sombra de uma árvore de 5 m de altura quando o sol está 30º acima do horizonte? Veja a ilustração.



Solução:

Para calcular o tamanho da sombra dessa árvore, fazemos:

tg30º = $\frac{5}{s}$ ⇒ s ·tg30º = 5, como a tan30º = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ temos, s · $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = 5 ⇒ s · $\sqrt{3}$ = 15 ⇒

s = $\frac{15}{\sqrt{3}}$, racionalizando o denominador desta fração obtemos

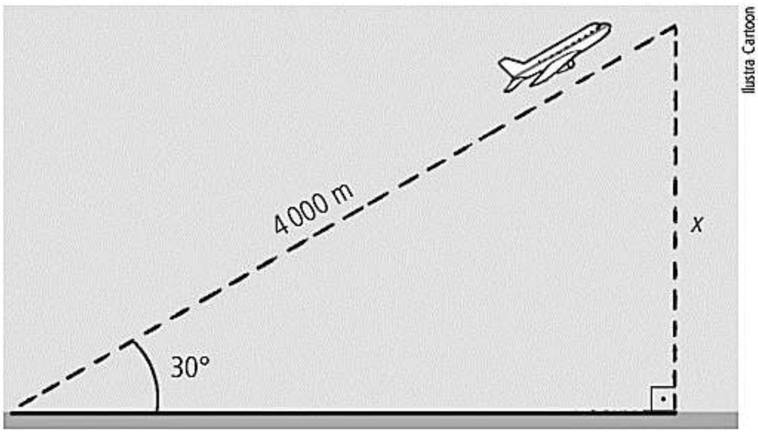
s = $\frac{15}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$, tomando $\sqrt{3}$ = 1,732 teremos s = 5·1,732 = 8,66.

Logo, o comprimento da sombra da árvore é de aproximadamente 8,66 metros

Nota: tangente de um ângulo= $\frac{cateto\ oposto\ a\ esse\ \text{ângulo}}{cateto\ adjacente\ a\ esse\ \text{ângulo}}$

Situação 02: A altura do avião.

Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4 000 m em linha reta? Veja a ilustração.



Solução:

Para calcular a altura deste avião, faremos:

sen30º= $\frac{x}{4000} \Longrightarrow x = 4000 \cdot sen30$, como sen30º = $\frac{1}{2}$, temos

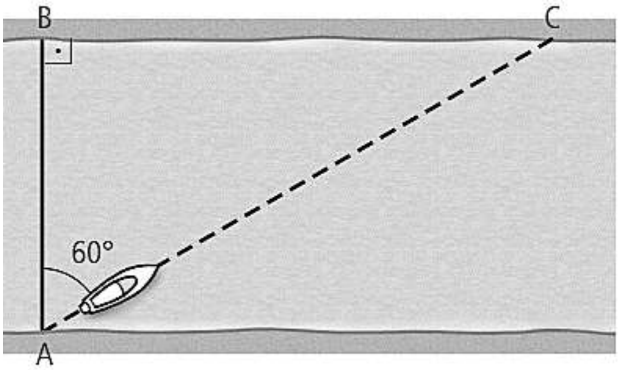
$x = 4000 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2000.$

Logo, o avião encontra-se a uma altura de 2000m ou 2km.

Nota: seno de um ângulo= $\frac{cateto\ oposto\ a\ esse\ \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$

Situação 03: A largura do rio.

A figura abaixo representa um barco atravessando um rio, partindo de A em direção ao ponto B. A forte correnteza arrasta o barco em direção ao ponto C, segundo um ângulo de 60°. Sendo a largura do rio de 120 m, qual é a distância percorrida pelo barco até o ponto C?



Fonte: (Unama-PA)

Solução:

Para calcular a distância ($\overline{AC}$) percorrida pelo barco, faremos:

Cos60º = $\frac{120}{\overline{AC}}$ $\Longrightarrow \overline{AC} \cdot$ cos60º = 120, como cos60º = $\frac{1}{2}$, temos

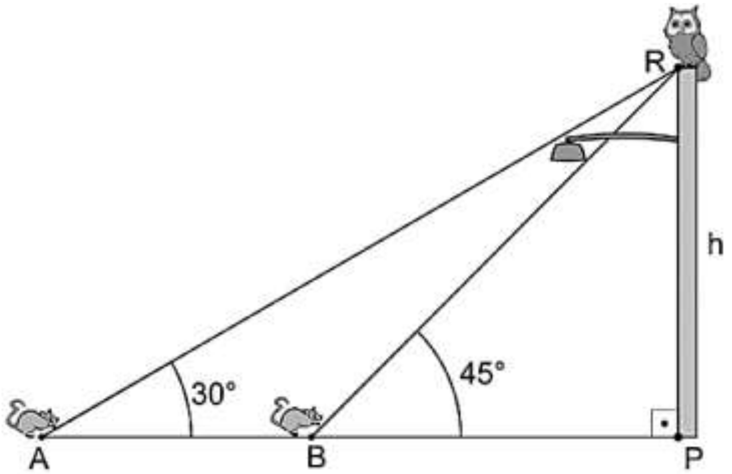
$\overline{AC} \cdot \frac{1}{2}$ = 120 $\Longrightarrow \overline{AC}$= 2 ·120 ⇒ $\overline{AC}$ = 240.

Logo, a distância percorrida pelo barco foi de 240 metros.

Nota: cosseno de um ângulo= $\frac{cateto\ adjacente\ a\ esse\ \hat{a}ngulo}{hipotenusa}$

Situação 04: O deslocamento do rato

Uma coruja está pousada em R, ponto mais alto de um poste, a uma altura h do ponto P, no chão. Ela é vista por um rato no ponto A, no solo, sob um ângulo de 30°, conforme mostra a figura abaixo.



O rato se desloca em linha reta até o ponto B, de onde vê a coruja, agora sob um ângulo de 45° com o chão e a uma distância $\overline{BR}$ de medida $6\sqrt{2}$ metros. Com base nessas informações, estando os pontos A, B e P alinhados e desprezando-se a espessura do poste, pode-se afirmar então que a medida do deslocamento $\overline{AB}$ do rato, em metros, é? (Use $\sqrt{3}$ = 1,73)

Solução:

Para calcular a medida do deslocamento $\overline{\boldsymbol{AB}}$ realizado pelo rato, fazemos:

Como o triângulo BPR é um triângulo retângulo isósceles, então BP=RP =H, pelo teorema de Pitágoras temos: $h^2 + h^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2h^2 = 72 \Leftrightarrow h^2 = 36 \Leftrightarrow h=6$ m.

No triângulo APR, temos:

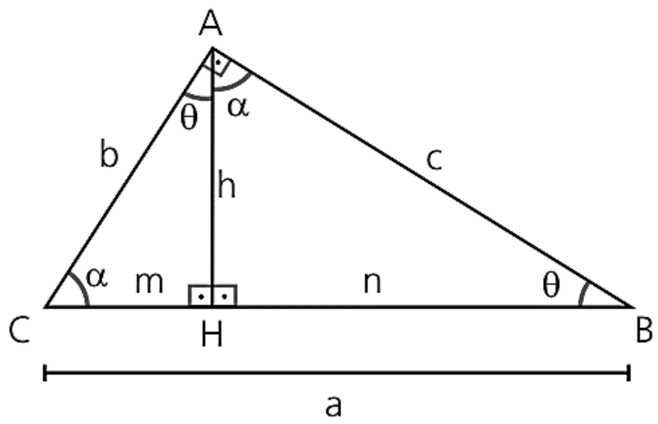
$\text{tg}\hat{A} = \frac{PR}{AP} = \frac{PR}{AB + BP} \Leftrightarrow \text{tg}30^\circ = \frac{h}{AB + h} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{AB + 6} \Leftrightarrow AB + 6 = 6\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$AB=6\sqrt{3} - 6 \Leftrightarrow AB = 6(\sqrt{3} - 1)$, como usaremos $\sqrt{3}$ = 1,732, temos:

AB = 6(3-1,732) = 6·(1,732 – 1) = 6 · 0,732 = 4,392. Logo, o deslocamento do rato foi de aproximadamente 4,40m

Etapa 04. Teorema de Pitágoras x Relação Fundamental

Nesta etapa os alunos analisarão as relações existentes entre seno, cosseno, tangente, cossecante, secante e cotangente. Para isso usaremos o triângulo retângulo a seguir.



Se o triângulo ABC é retângulo em A, então, teremos:

- Hipotenusa = a,
- Catetos: b e c,
- Altura relativa a hipotenusa: $\overline{AH}$ = h,
- Projeção do cateto b sobre a hipotenusa: m,
- Projeção do cateto c sobre a hipotenusa = n.

Chamando os ângulos ∠ABC e ∠BAH de $\theta \; e \; \alpha$ respectivamente vemos facilmente que $\theta \; e \; \alpha$ são complementares, ou seja, somam 90º.

Notamos que, se o ângulo BÂH = θ, temos que HÂC = α, pois $\theta + \alpha$ = 90º. Temos ainda que o ângulo A$\hat{C}$B = θ.

Olhando com atenção veremos que na figura acima temos três triângulos semelhantes. Daí, "nasce" a trigonometria, pois quando definimos seno - cateto oposto sobre a hipotenusa, cosseno- cateto adjacente sobre hipotenusa e tangente – cateto oposto sobre cateto adjacente, temos as razões estudadas em semelhança de triângulo, razões essas nomeadas na trigonometria se seno, cosseno e tangente.

Do triângulo ABC e do triângulo ABH temos:

sen$\alpha = \frac{c}{a} = \frac{n}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$.

Do triângulo ABC e do triângulo AHC temos:

sen$\alpha = \frac{b}{a} = \frac{m}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$.

Chamamos $b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$ de relações métricas no triângulo retângulo.

Somando essas duas relações, temos:

$$b^2 + c^2 = a\text{m} + a\text{n}$$

$$b^2 + c^2 = a(\text{m} + \text{n})$$

Como $m + n = a$, substituindo na equação, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Essa relação é chamada de Teorema de Pitágoras.

Temos uma consequência importante:

Dividindo $b^2 + c^2 = a^2$ por a², obtemos:

$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$, como $\frac{b}{a} =$ senα e $\frac{c}{a} =$ cos α, temos:

$$(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1.$$

Logo,

sen²α + cos²α = 1. (Relação Fundamental da Trigonometria).

Nota: Esta relação vale para todo α. Para nossos estudos α é agudo.

Relações derivadas

Dividindo a relação fundamental por cos²α, obtemos:

sen²α + cos²α = 1 $\Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{cos^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{cos^2\alpha} = \frac{1}{cos^2\alpha} \Rightarrow$ **tg²α + 1 = sec²α.**

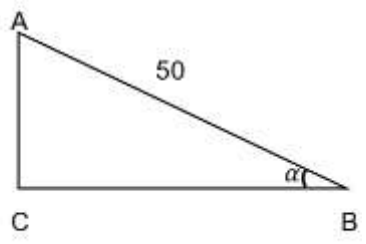
Já dividindo a relação fundamental por sen²α, obtemos:

sen²α + cos²α = 1 $\Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow$ **1 + cotg²α = cossec²α.**

Neste momento apresentamos alguns problemas.

Problema 01. Sabendo que a $tg\ \theta$ = 5 e 0< $tg\ \theta$ < 90°, calcular $cos\ \theta$ e $sen\ \theta$.

Problema 02. No triângulo abaixo tgα=$\frac{4}{3}$ e AB=50cm, qual o perímetro desse triângulo?



Problema 03. Calcule sen α, ta α, a sec α, a cossec α e a cotg α, sabendo que α é um ângulo agudo e que cos α= $\frac{1}{2}$.

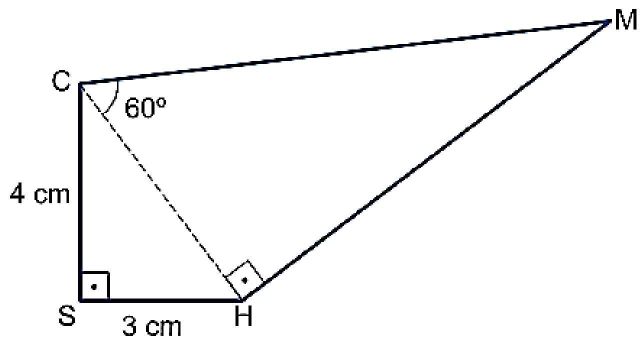
Etapa 05. Aferição do objetivo da aprendizagem

Nesta etapa avaliaremos se os alunos avançaram de um estado de menor para um de maior conhecimento sobre Trigonometria no Triângulo Retângulo. Para isso, registraremos os progressos dos estudantes, observando como eles se saem nas atividades a seguir que é a etapa final.

Questões para auxiliar na aferição do objetivo de aprendizagem

Questão 01

(Santa Casa) No polígono HSCM, $\overline{CS}$ = 4 cm, $\overline{SH}$ = 3 cm e o ângulo entre $\overline{CH}$ e $\overline{CM}$ é igual a 60º, como mostra a figura.

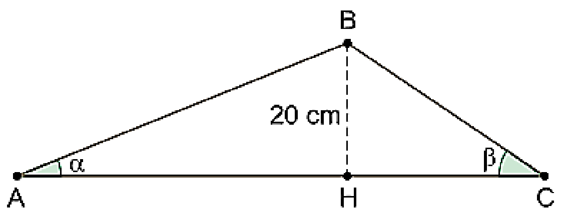


Qual a medida de $\overline{CM}$?

Resolução:

Questão 02

A altura de um triângulo ABC, relativamente ao vértice B, é 20 cm, conforme mostra a figura.

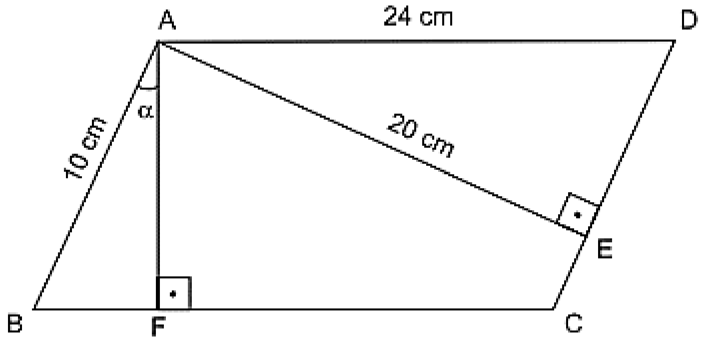


Sendo os valores de tg $\alpha = 2/5$ e a tg$\beta \ = \ 2/3$. Qual a área do triângulo ABC?

Resolução:

Questão 03

A figura, cujas dimensões indicadas estão em centímetros, mostra um paralelogramo ABCD.

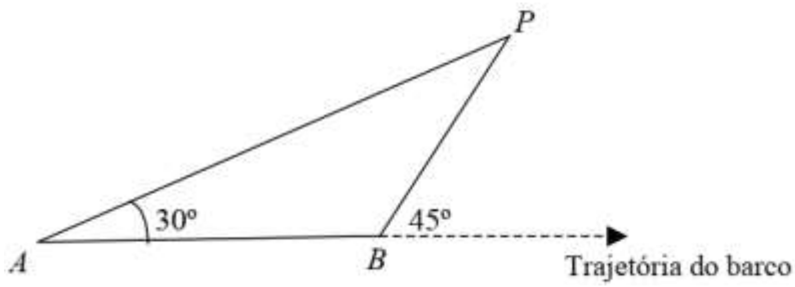


Sabendo-se que os triângulos ABF e ADE são semelhantes, é correto afirmar que $\cos\alpha$ é igual a:

Resolução:

Questão 04

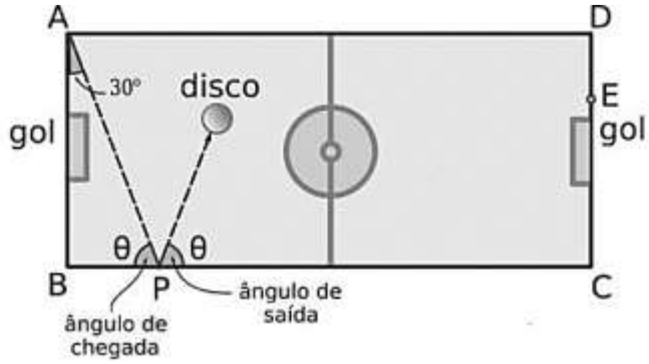
Para determinar a distância de um barco até à praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo de 30º fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, e sempre em linha reta, ele seguiu até ao ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, agora sob um ângulo de 45º, como ilustrado na figura abaixo. Se a distância percorrida pelo barco do ponto A ao ponto B foi de 1000 metros, então a menor distância do barco até ao ponto fixo P é, em metros, igual a



Resolução:

Questão 05

O aero Hockey é um jogo em que duas pessoas rebatem um disco deslizante sobre uma mesa retangular com o objetivo de acertar o gol de seu adversário, conforme ilustra a figura abaixo, em que AB mede 90 centímetros e BC mede 3 metros.



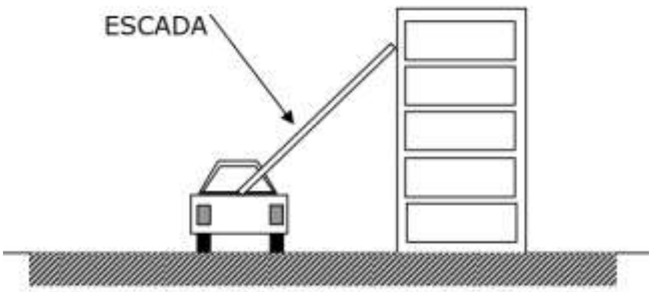
Durante uma partida, um dos jogadores lançou o disco, partindo do ponto A, que primeiramente atingiu o lado BC no ponto P, de modo que o trajeto linear AP formou um ângulo de 30° com o lado AB da mesa, que, em seguida, rebateu diversas vezes nos lados BC e DA da mesa até atingir o lado CD no ponto E. Sabe-se que o trajeto linear do disco, ao bater no ponto P, forma com o lado BC um ângulo de chegada θ igual ao ângulo de saída, como ilustra a figura, e o processo se repete, alternando-se os lados AD e BC até o disco atingir o ponto E. Com base nas informações apresentadas, responda aos seguintes itens, registrando as justificativas para as respostas apresentadas. (Obs.: considere $\sqrt{3}$= 1,732.)

A) Quantas vezes o disco bate em ambos os lados até atingir o lado CD do jogador adversário?

B) Qual é a distância, em cm, entre os pontos D e E?

Questão 6

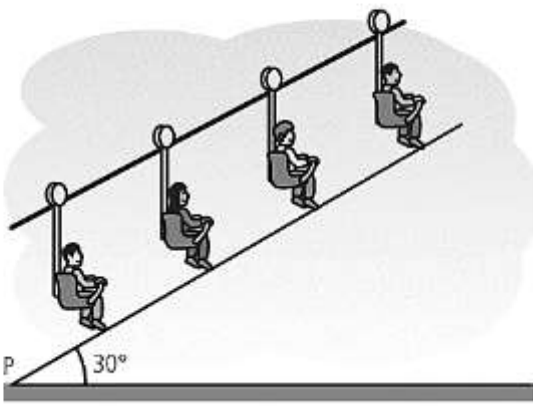
Uma escada de bombeiro pode ser estendida até o comprimento máximo de 20 m, formando um ângulo de 60º com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a 2 m do solo.



Qual a altura máxima, em m, que a escada pode atingir? (Use $\sqrt{3}$ = 1,732)

Questão 07

(Vunesp) A figura representa um teleférico que será construído para transportar pessoas do ponto P até uma altura de 100 metros em relação ao solo. Sabendo-se que o cabo ficará perfeitamente reto e esticado e que a velocidade das cadeiras ao longo do cabo será constante e igual a 1 metro por segundo. Qual o tempo de deslocamento do ponto P até o ponto mais?



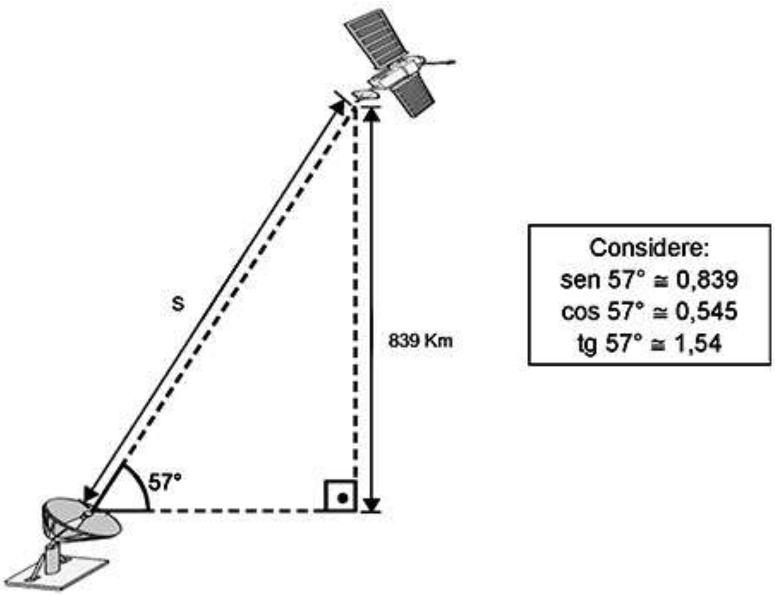
Resolução:

Questão 08

Se β = (sen15º + sen60º)·(sen15º - sen60º)+(cos15º+cos60º)·(cos15º-cos60º), então podemos afirmar que β é um número irracional.

Questão 09

No desenho abaixo está representado o instante em que um satélite de órbita baixa transmite o sinal para uma antena receptora.

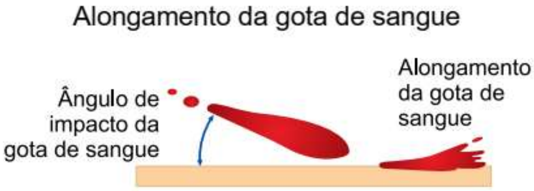


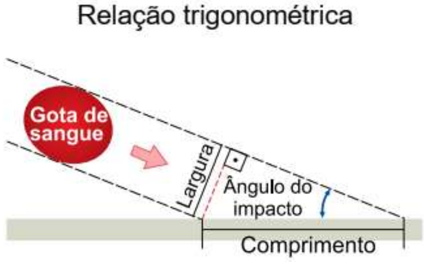
Qual é a distância S que esse sinal de satélite deve percorrer para chegar até a antena receptora?

Questão 10.

Uma das finalidades da Ciência Forense é auxiliar nas investigações relativas à justiça civil ou criminal. Observe uma ideia que pode ser empregada na análise de uma cena de crime.

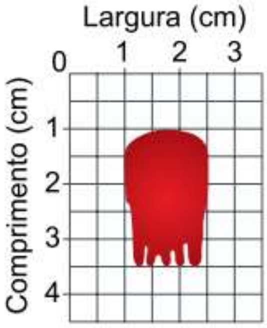
Uma gota de sangue que cai perfeitamente na vertical, formando um ângulo de 90º com a horizontal, deixa uma mancha redonda. À medida que o ângulo de impacto com a horizontal diminui, a mancha fica cada vez mais longa. As ilustrações mostram o alongamento da gota de sangue e a relação trigonométrica envolvendo o ângulo de impacto e suas dimensões.





(Ana Paula Sebastiany *et al*. "A utilização da Ciência Forense e da Investigação Criminal como estratégia didática na compreensão de conceitos científicos". *Didáctica de la Química*, 2013. Adaptado.)

Considere a coleta de uma amostra de gota de sangue e a tabela trigonométrica apresentadas a seguir.



α	sen α	cos α	tg α
31º	0,51	0,85	0,60
37º	0,60	0,80	0,75
53º	0,80	0,60	1,32
59º	0,85	0,51	1,66
74º	0,96	0,28	3,50

De acordo com as informações, qual o ângulo de impacto da gota de sangue coletada na amostra?

APÊNDICE C

Neste apêndice constas as fotos tiradas durante a aplicação da sequência didática e de dois questionais resolvidos pelos alunos que participaram, um do 9º ano e outro do 3º ano.

A seguir anexamos as fotos.

(I) Alunos do 9º do ensino Fundamental realizando avaliação

(II) Alunos do 1º do ensino Médio realizando avaliação.