UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Alex Santos Moura Diniz

Uma análise histórica sobre *Os Elementos* de Euclides

São Luís - MA
2020

Alex Santos Moura Diniz

Uma análise histórica sobre *Os Elementos* de Euclides

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Santana Campos Costa

São Luís - MA

2020

Ficha gerada por meio do SIGAA/Biblioteca com dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Núcleo Integrado de Bibliotecas/UFMA

Diniz, Alex Santos Moura.
Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides / Alex Santos Moura Diniz. - 2020.
82 p.

Orientador(a): José Santana Campos Costa.
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Rede - Matemática em Rede Nacional/ccet, Universidade Federal do Maranhão, São Luís - MA, 2020.

1. Álgebra geométrica. 2. Aplicações. 3. Equivalência de áreas. 4. Matemática - Estudo Ensino. I. Costa, José Santana Campos. II. Título.

Alex Santos Moura Diniz

Uma análise histórica sobre *Os Elementos* de Euclides

Dissertação apresentada ao PROFMAT / Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em ____ / ____ / 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Santana Campos Costa (UFMA)

Prof. Dr. Marlon César Santos de Oliveira (UEMA)

Prof. Dr. Jairo Santos da Silva (UFMA)

À minha esposa, às minhas irmãs, aos meus irmãos e à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por esta boa dádiva, por ter colocado pessoas maravilhosas que me deram todo o suporte preciso para a realização deste sonho, pela sabedoria e paciência necessárias no decorrer do curso e principalmente na elaboração desta pesquisa acadêmica.

À minha querida esposa, Odenira Diniz, por toda dedicação e compreensão pelos momentos ausentes em que me reservei à pesquisa e confecção deste trabalho.

Ao meu filho João Pedro Caldas Diniz pela parceria e de onde pude tirar forças de encorajamento e de otimismo para suportar todas as resistências, percalços, lamúrias, enfim, todas as contradições que, aliás e infelizmente, são naturais na caminhada humana, considerando que no mundo teremos aflições, sendo comum superar as críticas para alcançar a vitória.

À minha família, sobretudo na pessoa de minha mãe, Maria Ferreira Santos, inspiradora no que se refere à matemática financeira e que soube suportar a minha ausência, quando estive empenhado nas atividades acadêmicas, pelo suporte educacional e por não me deixar desistir nos momentos de dificuldade.

Aos meus irmãos Alan Santos Moura Diniz, meu mestre em habilidades matemáticas, e Alamir Santos Moura Diniz, meu tutor, mentor na condução dos conhecimentos.

Ao meu orientador Prof. Dr. José Santana Campos Costa pela singular ajuda e dedicação a meu trabalho.

Aos Professores Anselmo B. Raposo Junior, Elivaldo R. Macedo, Luis Fernando C. Amaral, Marcos A. F. Araújo, Renata de F. L. Carvalho, Valeska M. de Souza e Cleber A. Cavalcanti por toda cordialidade, compreensão, conversa e disponibilidade para a promoção do meu desenvolvimento em matemática.

Ao Prof. Dr. Antônio José da Silva, Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Rede Nacional – Matemática – PROFMAT/CCET/UFMA, Servidor de elevado espírito público, por todas as iniciativas para o bom andamento deste mestrado, bem como pela excelente prestação de serviço junto à Coordenação do Programa, objetivando sempre em atender satisfatoriamente aos Discentes e em defesa destes.

Aos meus colegas de turma (Aléssio A. dos S. Dias, Antônio B. L. Gaspar, Edu S. Pinheiro, Fabiano Calácio Silva, José de R. S. Neto, Lenildo M. de Azevedo, Marco A. S. de Aquino, Paulo R. R. da Silva, Rafael S. Miranda, Sadoc F. R. Filho, Stênio H. do N. Cerqueira e Wagner de J. P. Sá) que passaram pelas mesmas dificuldades, mas seguiram com perseverança e camaradagem em busca dos objetivos.

Aos colegas da turma PROFMAT/UFMA 2019 (Celso H. A. Berredo, David S. Costa, João R. de Carvalho, Laécio A. da S. Lucena, Leudilene de J. R. Costa, Moises R. Dourado, Orley de B. Santos, Valdir de O. Junior e Waleff M. Leal) pelo suporte, recepção, aliança, consideração, respeito e interação na reta final deste mestrado.

À Universidade Federal do Maranhão por intermédio do PROFMAT pela oportunidade de acesso ao conhecimento, pelo desenvolvimento desta competência com a diplomação, possibilitando ensinamentos que levarei para toda a minha vida.

Enfim, a todas as amigas e a todos os amigos do decurso desta história, sem os quais seria impossível a concretização desta etapa.

"*O que existe e vive precisa ser cuidado para continuar a existir e a viver: uma planta, um animal, uma criança, um idoso, nosso planeta [...] A essência do ser humano reside no cuidado*".

Leonardo Boff

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma análise histórica da obra *Os Elementos* de Euclides, sua estrutura, o método utilizado, suas definições, axiomas e proposições, que consistem em aspectos relevantes para aplicação direta em sala de aula no ensino de matemática com impacto na educação básica. A inquietude que justifica a motivação do desenvolvimento deste trabalho reside na possibilidade de compartilhar para estudantes do Ensino Médio e Fundamental (anos finais) os conhecimentos presentes em *Os Elementos* de Euclides. O que apresentamos neste trabalho é a utilização dos conhecimentos presentes na obra de Euclides na resolução de problemas no ensino da matemática, notadamente no que se refere ao livro 1 e 2, em particular acerca de equivalência de áreas, Teorema de Pitágoras, quadratura de figuras planas e álgebra geométrica grega. Vale ressaltar que a tradução objeto deste trabalho trata-se da primeira tradução completa para o português feita a partir do texto grego. Concluímos que esta obra pode ser utilizada na educação básica, tornando o método mais simples na resolução de problemas, considerando os recursos disponíveis, bem como a realidade do aluno e da comunidade escolar.

Palavras-chave: Equivalência. Quadratura. Euclides. *Os Elementos*.

ABSTRACT

In this work, we present a historical analysis of the work The Elements of Euclid, its structure, the method used, its definitions, axioms and propositions, which consist of relevant aspects for direct application in the classroom in the teaching of mathematics with an impact on basic education. The concern that justifies the motivation for the development of this work lies in the possibility of sharing the knowledge present in Os Elements de Euclides for high school and elementary students (final years). What we present in this work is the use of the knowledge present in Euclides' work in solving problems in the teaching of mathematics, especially with regard to book 1 and 2, in particular about the equivalence of areas, Pythagorean Theorem, square of flat figures and Greek geometric algebra. It is worth mentioning that the translation object of this work is the first complete translation into Portuguese made from the Greek text. We conclude that this work can be used in basic education, making the method simpler in solving problems, considering the available resources, as well as the reality of the student and the school community.

Keywords: Equivalence. Quadrature. Euclid. *The elements*.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE SIGLAS

a.C.	Antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
d.C.	Depois de Cristo
E.C.	Era Comum
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) fortalece a formação de Professores por meio de uma abordagem em conteúdos que podem ser explorados na prática da educação básica. Temas tais como contagem, probabilidade, médias, matemática financeira, geometria e teoria dos números são vistos em profundidade e assim revisitados autores como Euclides e sua obra *Os Elementos*. O que chama atenção reside no seguinte questionamento: por que o conteúdo sobre equivalência de áreas, ao modo de pensar grego, constante em *Os Elementos* de Euclides não são por vezes abordados na Educação Básica de forma destacada?

Essa obra é um tratado matemático e geométrico consistindo de 13 livros escritos pelo matemático grego Euclides em Alexandria por volta de 300 a.C. Apesar de *Os Elementos* ser primariamente um livro de geometria, ele também inclui resultados que seriam classificados hoje como teoria dos números. Investigamos essa problematização na literatura, tendo-se em vista, sua vasta aplicabilidade nas resoluções de conceitos como geometria e aritmética.

Entretanto, é pouco mencionado nas bibliografias adotadas na Educação Básica, assim percebemos a necessidade da elaboração deste trabalho como meio de compartilhar o conhecimento e que compreende aspectos relevantes para o ensino da matemática. Neste trabalho, portanto, desenvolvemos um estudo sobre *Os Elementos* de Euclides, com a finalidade de analisar esta obra para propor uma melhor utilização desses conteúdos com impacto na Educação Básica, por meio de uma aprendizagem significativa do ensino da matemática, compreendendo a realidade do aluno e da comunidade escolar.

As proposições de *Os Elementos* são de dois tipos: teoremas, que se propõe a demonstrar, por exemplo, em um triângulo retângulo, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos; outro teorema: as alturas de um triângulo se encontram em um único ponto; mais um teorema: as medianas de um triângulo qualquer se encontram em um único ponto; os teoremas são demonstrados usando somente as definições, os primeiros princípios (os Axiomas) e teoremas já demonstrados; e construções, que são problemas para que sejam construídos (feitos), por exemplo, a primeira proposição de *Os Elementos* de Euclides, a Proposição 1 do Livro I, normalmente denotado assim I.1, é um problema de construção, que pede: dado um segmento, construir um triângulo equilátero com esse segmento como lado, que aos dias atuais é extremamente simples, elementar.

Uma impressão que há é a de que *Os Elementos* é uma obra que trata apenas de geometria, mas isso não é verdade como podemos verificar por exemplo no Livro VII onde encontramos 22 definições e 39 proposições, cuja relevância abrange a introdução dos números e o algoritmo de Euclides para determinação do máximo divisor comum entre dois números; no Livro VIII que é constituído por 27 proposições que tratam, principalmente, dos números enquanto progressão geométrica; no Livro IX em cujo volume encontramos 36 proposições sobre a demonstração da existência infinita de números primos; e no Livro X que dispõe de 16 definições e 115 proposições, cujo aspecto relevante é a teoria dos números irracionais.

Dado esta introdução, organizamos este trabalho começando pela apresentação de alguns pontos preliminares, já a partir do próximo capítulo (capítulo 2), quais sejam, os Aspectos Históricos, a Influência de Os Elementos de Euclides e a Crítica e Apócrifos[1]. No Capítulo 3 apresentamos os XIII LIVROS da obra de Euclides, destacando o Método e a Estrutura e o Conteúdo. No Capítulo 4, apresentamos a obra de Euclides na Educação Básica, destacando a Aplicação com significado por intermédio da Equivalência de áreas e o Teorema de Pitágoras, da quadratura de figuras planas e da álgebra geométrica grega. Por fim, têm-se as considerações finais. Para este trabalho, utilizamos (Bicudo, 2009) a primeira tradução completa para o português feita a partir do texto grego.

---

[1] Referente a atribuir a autores celebrados obras que não tinham sido escritas por eles.

1 PRELIMINARES

Aqui vamos destacar o antes de Euclides e o depois de Euclides até a contemporaneidade, frisando a importância da história da matemática como metodologia de ensino, evidenciando também a aplicabilidade com materiais do cotidiano do aluno da educação básica.

1.1 Aspectos Históricos

Quem foi Euclides: pouquíssimo se sabe sobre a vida de Euclides; há relatos, em fontes posteriores, de que ele foi um dos diretores da Academia que corresponde mais ou menos a Universidade com Museu em Alexandria; há várias anedotas, relatos sobre Euclides.

Sobre a existência de Euclides, existem três posicionamentos: 1 – Opinião prevalecente: Euclides realmente existiu, foi uma figura histórica e escreveu *Os Elementos*, além de outras obras (ele escreveu vários livros, um deles sobre cônicas que se perdeu e é sabido por referências posteriores; ele escreveu um livro sobre ótica; escreveu livros sobre problemas de geometria, mas pouquíssimo se sabe sobre a vida de Euclides); 2 - Euclides foi o líder de um grupo de matemáticos que escreveram, individualmente, partes dos *Elementos* (esta opinião tem base quando considera que *Os Elementos* tem diversos estilos, é uma obra bastante heterogênea e com muitas diferenças de exposição matemática; assim, baseado nisso, teria Euclides apenas coordenado a elaboração de *Os Elementos*); e 3 – Opinião minoritária: Euclides não existiu, foi o nome escolhido por um grupo de matemáticos de Alexandria (da mesma maneira, atualmente – nos tempos modernos – século XX, um grupo de matemáticos adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki[2] e escreveu dezenas e dezenas de obras com esse nome).

É possível localizar o período em que Euclides viveu baseando-se em testemunhas que se referem a ele como, por exemplo: viveu ou nasceu antes, depois ou no tempo de determinada pessoa; todavia, dado o já exposto, Carl B.

[2] Nicolas Bourbaki é o pseudônimo de um grupo de matemáticos na sua maioria franceses, que escreveram uma série de livros com o objetivo de fundamentar toda a matemática na teoria dos conjuntos. Os cinco membros fundadores foram: Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsart e André Well.

Boyer nos indica o momento em que Euclides é situado no tempo, relacionando este momento a questões estratégicas político-militares, vejamos:

> A morte de Alexandre, o Grande, levou a disputas entre os generais do exército grego; mas em 306 A.C. o controle da parte egípcia do império estava firmemente nas mãos de Ptolomeu I, e esse governante pode voltar a atenção para esforços construtivos. Entre seus primeiros atos está a criação em Alexandria de uma escola ou instituto conhecido como Museu, insuperado em seu tempo. Como professores ele chamou um grupo de sábios de primeira linha, entre eles o autor do texto de matemática mais bem sucedido de todos os tempos – *Os elementos* (*Stoichia*) de Euclides. Considerando a fama do autor e de seu *best seller*, sabe-se notavelmente pouco sobre a vida de Euclides. Tão obscura ficou sua vida que nenhum lugar de nascimento é associado a seu nome. (BOYER, 1974, p. 74)

Ainda neste raciocínio, situando Euclides ao contexto histórico de Ptolomeu I, com uma possível demanda de Ptolomeu a Euclides, fazendo também um resgate, tempos depois de Ptolomeu I, em que Arquimedes havia citado Euclides, fortalece a existência de Euclides nesse contexto histórico, como nos esclarece Irineu Bicudo, analisemos:

> E não muito mais jovem do que esses é Euclides, o que reuniu os *Elementos*, tendo também, por um lado, arranjado muitas das coisas de Eudoxo e tendo, por outro lado, aperfeiçoado muitas das coisas de Teeteto, e ainda tendo conduzido as coisas demonstradas frouxamente pelos predecessores a demonstrações irrefutáveis. E esse homem floresceu no tempo do primeiro Ptolomeu; pois, também Arquimedes, tendo vindo depois do primeiro, menciona Euclides, e, por outro lado, também dizem que Ptolomeu demandou-lhe uma vez se existe algum caminho mais curto que os *Elementos* para a geometria e ele respondeu não existir atalho real na geometria. (BICUDO, 2009, p. 41)

Por fim, para fechar este entendimento a respeito do período em que viveu Euclides, em que pese as controvérsias, aliás, naturais para a construção do conhecimento, encontramos em Rogério Santos Mol informações que ratificam o já apresentado, vejamos:

> O século IV a.C. foi marcado pela conquista da Grécia por Felipe II da Macedônia e pelo fim da autonomia e da democracia nas cidades gregas. O filho e sucessor de Felipe, Alexandre, conhecido como o Grande, expandiu e unificou o império grego. Ao conquistar o Egito, em 332 a.C., fundou, às margens do Mediterrâneo, a cidade de Alexandria, que se tornou a capital de seu império. Alexandria viria a ocupar o lugar de Atenas como principal polo de conhecimento e cultura do mundo grego. Com a morte de Alexandre, em 323 a.C., Ptolemeu Sóter (323-283 a.C.), um de seus generais, se estabeleceu como rei do Egito, dando início a uma dinastia. Um ato de Ptolemeu I como governante do Egito teria consequências decisivas para a história da ciência: a fundação, em Alexandria, de uma instituição de estudo e ensino denominada Museu, o “templo das Musas” — deusas que, na mitologia grega, inspiravam as criações literária e artística.

> Contando com o apoio da família real dos Ptolemeu, o Museu de Alexandria atraiu sábios do mundo inteiro e, pelos seis séculos seguintes, seria o principal centro de produção científica da humanidade. O Museu era dotado de uma biblioteca, criada com a missão de reunir todo o conhecimento disponível no mundo antigo, cujo acervo chegou a dispor de mais de 700.000 rolos de papiro. O Museu de Alexandria foi palco para o estudo de diversas disciplinas, dentre elas a literatura, a medicina e a astronomia, com um destaque especial para a matemática. Na órbita do Museu, a matemática grega teve o seu período áureo no século III a.C, notabilizando-se tanto pelos avanços técnicos e conceituais, quanto pelo magnífico trabalho de sistematização de conhecimentos, cujos resultados mais visíveis estão nos *Elementos* de Euclides. (MOL, 2013, p. 45)

Muito embora se tenha certeza da existência de Euclides, mas é encontrada dúvida em relação à autoria de *Os Elementos*, todavia Boyer deixa claro que Euclides é o autor desta obra, indo mais além, que Euclides escreveu vários tratados e temas variados:

> Embora edições de *Os elementos* frequentemente identificassem o autor como Euclides de Megara, e um retrato de Euclides em Megara frequentemente apareça em histórias da matemática, trata-se de um erro de identidade. O verdadeiro Euclides de Megara era um discípulo de Sócrates e, embora se preocupasse com lógica, não se sentia mais atraído pela matemática que seu mestre. Nosso Euclides, em contraste, é conhecido como Euclides de Alexandria, porque foi chamado para lá ensinar matemática. Da natureza de seu trabalho pode-se presumir que tivesse estudado com discípulos de Platão, se não na própria Academia. Lendas associadas com Euclides o pintam como um bondoso velho. [...] Euclides e *Os elementos* são frequentemente considerados sinônimos; na realidade o homem escreveu cerca de uma dúzia de tratados, cobrindo tópicos variados, desde óptica, astronomia, música e mecânica até um livro sobre secções cônicas. Com exceção de *A esfera* de Autólico, os livros de Euclides que sobreviveram são os mais antigos tratados gregos existentes; no entanto, do que Euclides escreveu mais da metade se perdeu, inclusive algumas das obras mais importantes, como o tratado sobre cônicas. (BOYER, 1974, p. 74)

Em que pese a indicação clara da autoria de *Os Elementos* ser de Euclides a que se observar a questão quanto a originalidade do texto, pois sabemos que o texto que nos chega na atualidade é resultado de um resgate histórico minucioso, não sendo, portanto, a obra, a rigor, deixada por Euclides, mas sim o resultado de uma reconstituição, a esse respeito Irineu Bicudo nos ajuda:

> Por entendermos que a tradução de um texto antigo, de uma tradição com pensamentos próprios e próprios modos de expressão é um ato de reverência e entrega, adotamos, como Chateaubriand, uma *versão literal*, "em toda a força do termo", esperando acordar no leitor a curiosidade que o conduza a acompanhar a tradução contra o original, "linha por linha, palavra por palavra". [...] Por isso, por permanecermos o mais possível ligado ao original, prevenimos poder o leitor estranhar algumas vezes o resultado alcançado. Usamos como texto grego a edição de Heiberg-Stamatis, da Editora Teubner, de Leipzig, 1969-1977. [...] O que significa falar do texto

> grego dos *Elementos* de Euclides? Qual o sentido de se mencionar a *edição de Heiberg-Stamatis*? Tendo essa obra sido escrita por volta do final do século IV a.C., é difícil que se possa imaginar ter chegado até nós o manuscrito do seu autor, o chamado manuscrito autógrafo. De fato, não possuímos tais manuscritos dos autores clássicos - gregos e latinos. [...] Se não temos os originais, possuímos cópias. [...] De fato, [...] pois quem diz cópia, diz erro. Para agravar a situação, relativamente aos *Elementos*, os manuscritos mais antigos sobreviventes distam séculos de Euclides. [...] o filólogo, voltado à Ecdótica, trata de, com apoio nos manuscritos, trazer à luz, por reconstituição, aquele original, o texto autógrafo, o arquétipo de que os que temos são cópias. [...] A *edição de Heiberg-Stamatis* do texto grego dos *Elementos* é o que Heiberg diz, com a confirmação de Stamatis, ser a coisa mais próxima do texto original de Euclides. (BICUDO, 2009, p. 20-21, 32)

Rogério Santos Mol contribui esclarecendo por exemplo que a primeira tradução completa dos *Elementos* para o latim é de Adelardo de Bath que viveu de 1.080 a 1.152 E.C; esclarece também o brilhantismo de *Os Elementos* de Euclides, suas muitas edições e utilização para o ensino, vejamos:

> Esta foi a mais brilhante obra matemática grega e um dos textos que mais influenciaram o desenvolvimento da matemática e da ciência. Foi um dos livros mais editados e lidos em toda a história, tendo sido usado como livro-texto no ensino de matemática até o final do século XIX e início do século XX. [...] Sábios europeus, como o inglês Adelardo de Bath (c. 1080-1152), usaram as bases estabelecidas pelos cruzados no Oriente Próximo para travar contato com a cultura e a ciência árabes. Adelardo, a saber, foi o responsável pela primeira tradução completa dos *Elementos* de Euclides para o latim. (MOL, 2013, p. 45, 76)

Aliás, a respeito sobre livro-texto, bem como sobre livros de Euclides que sobreviveram até hoje e também finalizando o quesito quanto a originalidade, Carl B. Boyer aduz a possibilidade de *Os Elementos* ter sido uma obra que seria comparada por outra, em que pese a inexistência desta, conforme apresenta a seguinte informação:

> Cinco obras de Euclides sobreviveram até hoje: *Os elementos*, *Os dados*, *Divisão de figuras*, *Os fenômenos* e *Óptica*. [...] *Os fenômenos*, de Euclides, é muito semelhante a *A esfera* de Autólico [...]. Uma comparação entre as duas mostra que os dois autores se aproveitaram fortemente de uma tradição de livros-texto que era bem conhecida de sua geração. É possível que o mesmo seja verdade quanto a *Os elementos* de Euclides, mas, nesse caso, não há obra contemporânea preservada com a qual seja comparada. [...] Ocasionalmente, no entanto, autores posteriores interpolaram no texto escólios explicativos, e tais adições foram copiadas por escribas posteriores como parte do texto original. Algumas dessas aparecem em todos os manuscritos existentes agora. O próprio Euclides não manifesta qualquer pretensão de originalidade, e é claro que ele utilizou grandemente obras de seus predecessores. Acredita-se que a ordenação seja dele, e presumivelmente algumas provas foram fornecidas por ele; mas afora isso é difícil avaliar o grau de originalidade dessa obra, a mais renomada na história da matemática. (BOYER, 1974, p. 75, 77)

A seguir podemos observar uma cronologia[3] histórica da matemática e, na sequência, uma resposta menos imprecisa sobre como e quando começou a matemática (GARBI, 2009, p. 6) e onde está situado Euclides, vejamos:

- **35.000** a.C – Povos das tribos Bosquímanos na África registram números nos Ossos de Lebombo;
- **± 30.000** a.C. – Povos paleolíticos na Europa central e França registram 'números' em ossos;
- **± 25.000** a.C. – Desenhos geométricos rudimentares são usados;
- **9.000** a.C. – A agricultura começa a ser praticada na Mesopotâmia, onde hoje está o Iraque;
- **± 5.000** a.C. – Um sistema decimal está em uso no Egito;
- **± 4.000** a.C. – Calendários babilônicos e egípcios em uso;
- **± 3.400** a.C. – Os primeiros símbolos para os números estão em uso no Egito;
- **± 3.000** a.C. – O ábaco é desenvolvido no Oriente Médio e em áreas envolta do Mediterrâneo. Um objeto parecido com o ábaco é usado na China; Numerais hieroglíficos em uso no Egito; Babilônicos começam a utilizar um sistema de numeração sexagesimal para registrar transações financeiras. É um sistema posicional, porém sem uma posição de valor zero;
- **± 2.770** a.C. – Calendário egípcio em uso;
- **2.650** a.C. – Construção da grande pirâmide de Quéops;
- **± 2.400** a.C. – Notação posicional na Mesopotâmia;
- **± 2.000** a.C. – Harappans adota um sistema decimal uniforme de pesos e medidas;
- **± 1.950** a.C. – Babilônicos resolvem equação quadrática;
- **± 1.900** a.C. – O Papiro Moscou (também conhecido como Papiro Golenishev) é escrito. Ele contém detalhes da geometria Egípcia;
- **± 1.850** a.C. – Babilônicos conhecem o teorema de Pitágoras;
- **± 1.800** a.C. – Babilônicos usam tabelas (tábuas) de multiplicação;

[3] Cronologia extraída de pesquisas realizadas no site *wikipédia* e no portal de conteúdo UOL, ver em referências.

- **± 1.750** a.C. – Os babilônicos resolvem equações algébricas lineares e quadráticas, compilam tábuas de raízes quadradas e cúbicas. Usam o teorema de Pitágoras e matemática para estender o conhecimento de astronomia;
- **± 1.700** a.C. – O Papiro Rhind (também conhecido como Papiro Ahmes) é escrito. Esse papiro mostra que os egípcios desenvolveram muitas técnicas de solução de problemas. Multiplicação é baseada em repetição de duplicações, e divisões em sucessivas divisões por dois;
- **± 1.360** a.C. – Um sistema decimal sem zero começa a ser usado na China;
- **1.100** a.C. – Os mais antigos documentos comprovando a existência de atividades matemáticas na China;
- **± 1.000** a.C. – Chineses usam tábuas de contagem para calcular;
- **± 800** a.C. – Baudhayana é o autor de uma das mais antigas sulvasutras indianas;
- **± 750** a.C. – Manava escreve uma Sulvasutra;
- **± 600** a.C. – Apastamba escreve a sulvasutra mais interessante do ponto de vista da matemática;
- **585** a.C. – Tales de Mileto traz o conhecimento babilônico para a Grécia. Ele usa geometria para resolver problemas como o cálculo da altura de pirâmides e as distâncias de embarcações até a costa;
- **540** a.C. – Pitágoras de Samos muda-se para Crotona na Itália e ensina matemática, geometria, música e reencarnação;
- **± 500** a.C. – O sistema numérico sexagesimal babilônico é usado para registrar e predizer a posição do Sol, da Lua e de planetas; Obra de Panini sobre o sânscrito é precursora da moderna teoria formal da linguagem;
- **± 477** a.C. – Um sistema de contagem utilizando-se pauzinhos aparece na China;
- **± 465** a.C. – Hipasus escreve sobre uma esfera de 12 pentágonos, a qual deve se referir ao dodecaedro;
- **± 450** a.C. – Os gregos começam a utilizar numerais escritos; Zenão de Eleia apresenta seus paradoxos;
- **± 440** a.C. – Hipócrates da ilha Jônia de Quios escreve Elementos, a primeira compilação de elementos da geometria;
- **427** a.C. – Nascimento de Platão;

- **± 425** a.C. – Teodoro de Cirene demonstra que certas raízes quadradas são irracionais. Já havia sido demostrado anteriormente, mas não se sabe por quem;
- **± 420** a.C. – Hípias de Elis inventa o quadratriz do qual ele pode ter se utilizado para trissecionar um ângulo e calcular a quadratura do círculo; incomensuráveis;
- **± 400** a.C. – Babilônicos usam um símbolo para indicar uma casa vazia em seus registros numéricos de escrita cuneiforme, mas não se acredita que esse símbolo era considerado um número;
- **± 399** a.C. – Morte de Sócrates;
- **387** a.C. – Platão funda sua Academia em Atenas;
- **± 375** a.C. – Arquitas de Tarento desenvolve a mecânica. Estuda o problema clássico de duplicação do cubo e aplica teoria matemática à música e, também, constrói o primeiro autômato;
- **370** a.C. – Trabalhos de Eudoxo sobre proporções, incomensuráveis e exaustão (limites);
- **± 360** a.C. – Eudoxo de Cnido desenvolve a teoria da proporção e o método da exaustão;
- **± 350** a.C. – Menaecmus sobre secções cônicas;
- **± 347** a.C. – Dinostrato sobre a quadratriz; Morte de Platão;
- **± 340** a.C. – Aristeu escreve os Cinco Livros sobre secções cônicas; Papo de Alexandria escreve Sinagoga ou Coleção;
- **± 335** a.C. – Eudemus, História da Geometria;
- **332** a.C. – Fundação de Alexandria;
- **± 330** a.C. – Autólico de Pitane escreve sobre a esfera móvel (ou a esfera em movimento) que estuda a geometria da esfera, um texto sobre astronomia;
- **323** a.C. – Morte de Alexandre, o Grande;
- **322** a.C. – Morte de Aristóteles;
- **± 320** a.C. – Eudemo de Rodes escreve a História da geometria;
- **± 300** a.C. – *Euclides passa um desenvolvimento sistemático da geometria em seu Stoicheion (Os Elementos). Também escreve as leis de reflexão em Catoptrics (do grego kátoptron, espelho)*;
- **± 260** a.C. – Aristarco de Samos utiliza um método geométrico para calcular a distância do sol e da lua à terra. Também propôs que a terra orbita o sol;

- **± 250** a.C. – Em 'Da Esfera e do Cilindro', Arquimedes mostra a fórmula para o cálculo de volume da esfera e do cilindro. Em 'A medida do círculo' ele mostra uma aproximação do valor do 'pi' que permitirá aproximações melhoradas. Em 'Dos corpos Flutuantes' ele apresenta o conhecido Princípio de Arquimedes e começa estudos de hidrostática. Escreve trabalhos em geometria bi e tridimensional, estudando círculos, esferas e espirais. Suas ideias são bem à frente das de seus contemporâneos e inclui aplicações de uma forma inicial de integração;
- **± 230** a.C. – Erastótenes de Cirene estima a circunferência da Terra com uma precisão espantosa, encontrando um valor cerca de 15% maior;
- **± 225** a.C. – As cônicas, de Apolônio de Perga;
- **212** a.C. – Morte de Arquimedes;
- **± 180** a.C. – Cissóide de Diocles, Conchóide de Nicomedes, Hipsícles e o círculo de 360º;
- **± 140** a.C. – Trigonometria de Hiparco;
- **± 60** a.C. – Geminus sobre o postulado das paralelas;
- **± 75** – Obras de Heron de Alexandria;
- **± 100** – Nicômaco: Aritmética; Menelau de Alexandria: Esferas;
- **± 125** – Teon de Esmirna e a matemática platônica;
- **± 150** – Ptolomeu: O Almagesto;
- **± 250** – Diofante: Aritmética;
- **± 320** – Papo de Alexandria: Coleções Matemáticas;
- **± 370** – Hipátia de Alexandria desenvolve estudos de extrema relevância para a matemática; depois da morte trágica, como um mártir do paganismo, terminou a gloriosa fase da matemática alexandrina e de toda matemática grega e a matemática na Europa Ocidental entraria em estagnação, onde nada mais seria produzido por um período de 1 mil anos e por cerca de doze séculos nenhum nome de mulher matemática foi registrado;
- **390** – Teon de Alexandria;
- **415** – Morte de Hipatia;
- **± 470** – Tsu Ch'ung-Chi e o valor aproximado de π;
- **476** – Nascimento de Aryabhata;
- **485** – Morte de Proclo;

- **500** – Hindus criam o conceito de zero;
- **520** – Antêmio de Trales e Isidoro de Mileto;
- **524** – Morte de Boécio;
- **526** – Morte de Teodorico;
- **529** – Fechamento da Escola de Atenas;
- **560** – Comentários de Eutócio sobre Arquimedes;
- **622** – Hégira de Maomé (Era muçulmana);
- **628** – Brahmagupta escreve Brahmasphuta Siddhanta;
- **641** – Queimada a Biblioteca de Alexandria;
- **650** – Numerais hindus;
- **662** – O bispo Sebokht menciona os numerais hindus;
- **775** – Obras hindus traduzidas para o árabe;
- **±830** – Abu-Abdula Mohamed ibn-Musa Al-Khwarizmi escreve sobre álgebra;
- **901** – Morte de Thabit ibn-Qurra;
- **998** – Morte de abu'l-Wefa;
- **1.028** – Escola em Chartres;
- **1.039** – Morte de Alhazen;
- **1.048** – Morte de Albiruni;
- **1.114** – Nascimento de Bhaskara;
- **1.123** – Morte de Omar Caiam;
- **1.120** – Adelardo de Bath produz a versão latina dos Elementos, a partir da versão árabe realizada 300 anos antes;
- **1.150** – Obras de Bhaskara;
- **1.202** – Fibonacci: Liber abaci;
- **1.260** – Trissecção de Johannes Campanus de Novara; Jordanus Nemorarius: Arithmetica;
- **1.270** – William de Moerbeke traduz Arquimedes;
- **1.274** – Morte de Nasir Eddin;
- **1.303** – Chu Shi-Kié e o Triângulo de Pascal;
- **1.328** – Bradwardine: Liber de proportionibus;
- **1.348** – A Peste Negra devasta a Europa;
- **1.360** – Latitude de formas de Oresme;

- **1.436** – Morte de al-Kashi;
- **1.453** – Queda de Constantinopla;
- **1.482** – Primeira edição impressa de *Os Elementos*, em Veneza;
- **1.500/1576** – Tartaglia, Cardano e Ferrari – Equações polinomiais de terceiro e quarto graus;
- **1.526/1573** – Rafael Bombelli – insuficiência dos números reais;
- **1.550** – John Napier, na Escócia, desenvolve o sistema de logaritmos;
- **1.564/1.642** – Galileu Galilei, físico e matemático italiano, precursor do método científico, reconhece na matemática a linguagem imprescindível para a física;
- **1.571/1.630** – Johannes Kepler, astrônomo alemão, descreve as Leis da Gravitação;
- **1.595/1.630** – Bonaventura Cavalieri, precursor dos Cálculos Diferencial e Integral;
- **1.596/1.650** – René Descartes, filósofo racionalista francês, dá uma interpretação algébrica às construções geométricas, na geometria analítica;
- **1.601/1.665** – Pierre de Fermat, matemático francês, continua o trabalho de Diofanto com a teoria dos números;
- **1.608/1.647** – Evangelista Torricelli, italiano, desenvolve trabalhos em Hidráulica e determina o peso do ar;
- **1.623/1.662** – Blaise Pascal, filósofo e matemático francês, formula as bases das leis da probabilidade moderna, hidrostática e propaga uma doutrina religiosa que ensina a experiência de Deus através da fé e não da razão;
- **1.629/1.695** – Contribuições do físico e matemático holandês Christian Huygens à astronomia e ondulatória;
- **1.642/1.727** – “Anos Milagrosos” de Isaac Newton. Descreve os princípios que regem a mecânica clássica e desenvolve o cálculo infinitesimal e integral;
- **1.646/1.716** – Gottfried Wilhelm Leibniz, filósofo e matemático alemão, trava com Isaac Newton uma das mais famosas disputas do século 18 pela primazia do desenvolvimento do cálculo;
- **1.654/1.748** – Os irmãos suíços os Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli produzem resultados importantes em cálculo e estatística;

- **1.685/1.731** – Brook Taylor, matemático inglês, começa a lidar com somas infinitas cujos resultados são finitos. Aqui começa a ser desvendado o paradoxo de Zenão;
- **1.707/1.855** – Desenvolvimento da álgebra dos complexos e análise matemática: Leonhard Euler, Jean Le Rond D'Alembert, Joseph-Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace, Adrien Marie Legendre;
- **1.777/1.855** – Carl Friedrich Gauss traz incontáveis contribuições à teoria dos números, análise, álgebra, astronomia, geodésia, magnetismo;
- **1.789/1.857** – August Louis Cauchy e a notação para a teoria dos conjuntos;
- **1.802/1.832** – Niels Henrik Abel e Evariste Galois, apesar de morrerem muito jovens, deixam trabalhos pioneiros em física teórica e teoria de grupos;
- **1.823/1.825** – A teoria dos números é o palco da grande controvérsia entre Leopold Kronecker e Bolyai, Lobachevsky e, claro, Gauss de novo: Geometrias não-euclidianas;
- **1.862/1.943** – David Hilbert – depois de Euclides, a geometria tem outros axiomas. A matemática pensa sobre si mesma;
- **1.872/1.970** – Bertrand Russel, Whitehead e Frege – Lógica, teoria dos conjuntos e paradoxos;
- **1.877/1.977** – Teoria de séries e análise, G. H. Hardy, J. E. Littlewood e S. Ramanujan;
- **1.903/1.957** – John Von Neumann – teoria dos jogos e computação;
- **1.918** – Georg Cantor – Criou a noção de números transfinitos, de potência do enumerável e do contínuo, a aritmética dos números transfinitos, etc;
- **1.931** – Kurt Gödel – elementos indecidíveis na matemática;
- **1.912/1.954** – Alan Turing – Computação, criptografia e inteligência artificial; e
- **1.994** – Após 350 anos envolto em mistério, Andrew Wiles finalmente demonstra o último Teorema de Fermat.

Garbi nos faz um alerta sobre como e quando começou a matemática nos dando a possibilidade de uma resposta menos imprecisa, situando a agricultura como sendo o provável momento para o início da matemática, com uma certa cautela, sobretudo no que se refere a algum tipo de movimento comercial, sendo sabido que este movimento é anterior às transformações agrícolas, analisemos:

> Se fizesse sentido dar uma resposta menos imprecisa sobre como e quando começou a matemática, poderíamos dizer que foi com o início da Revolução Agrícola, por volta de 9.000 a.C. Tal resposta, entretanto, deve ser recebida com muita cautela porque se sabe, por exemplo, que muitos milênios antes daquela revolução já existia razoável volume de comércio entre pessoas e tribos e nenhum comércio se faz sem rudimentos de aritmética. (GARBI, 2009, p. 6)

Na cronologia exposta anteriormente podemos identificar que Euclides está situado por volta de 300 a.C., onde se destaca que ele passa um desenvolvimento sistemático da geometria em seu *Os Elementos*, porém, há que se frisar que Garbi sinaliza uma obra de Hipócrates, da ilha jônia de Quios (± 440 a.C.), como precursora de *Os Elementos* de Euclides:

> [...] Hipócrates imortalizou-se ao produzir um célebre livro em que reuniu, de modo lógico e organizado, a geometria da época (tal livro foi um precursor de Os Elementos e acredita-se que várias proposições do livro III de Euclides foram descobertas por Hipócrates). (GARBI, 2009, p. 37)

Destacamos a obra *Os Elementos* de Euclides não somente por ser objeto de estudo deste trabalho, mas devida a grandiosidade de sua importância, em particular pela sua antiguidade expressivamente duradoura, admirada e contributiva, e influência em toda a história da humanidade; trataremos mais acerca deste quesito no item seguinte, mas sobre esse ponto de vista, nos detalha Carl B. Boyer:

> Os Elementos de Euclides não só constituem a mais antiga obra matemática grega importante a chegar até nós, mas o texto mais influente de todos os tempos. [...] Talvez nenhum livro, além da Bíblia, possa se gabar de tantas edições, e certamente nenhuma obra matemática teve influência comparável à de Os Elementos de Euclides. (BOYER, 1974, p. 87)

De fato, é impressionante a relevância de *Os Elementos* de Euclides, Irineu Bicudo nos apresenta tal sentimento por meio do prefácio da obra *Euclid. The Creation of Mathematics* [Euclides. A criação da matemática] do matemático alemão Benno Artmann, por outro lado destaca a acessibilidade da obra de Euclides, bem como a completude de *Os Elementos*, no que se refere ao conhecimento matemático, em uma denominação do filósofo Immanuel Kant, apreciemos:

> Este livro é para todos os amantes da matemática. É uma tentativa de entender a natureza da matemática do ponto de vista da sua fonte antiga

> mais importante. [...] nos *Elementos* encontramos tantas amostras de bela matemática que são facilmente acessíveis e que podem ser minuciosamente estudadas por qualquer um que possua um treino mínimo em matemática. [...] Vendo tais fenômenos gerais do pensamento matemático que são tão válidos hoje quanto o foram no tempo dos antigos gregos, não podemos deixar de concordar com o filósofo Immanuel Kant, que escreveu em 1783, na introdução à sua filosofia sob o título “Afinal, é a matemática possível?”: “Não há absolutamente livro na metafísica como temos na matemática. Se quiserdes conhecer o que é a matemática, basta olhardes os *Elementos* de Euclides”. (BICUDO, 2009, p. 15-16)

1.2 Influência de *Os Elementos* de Euclides

Os Elementos[4] é ainda considerado uma obra-prima da aplicação da lógica à matemática. Em um contexto histórico, se tem provado enormemente influente em muitas áreas da ciência. Os cientistas Nicolaus Copernicus, Johannes Kepler, Galileo Galilei e Isaac Newton foram todos influenciados pelos *Elementos* e aplicaram seu conhecimento à sua obra. Matemáticos e filósofos como Bertrand Russell, Alfred North Whitehead e Baruch Spinoza tentaram criar seus próprios "elementos" fundamentais de suas respectivas disciplinas, adotando as estruturas dedutivas axiomatizadas introduzidas pela obra de Euclides.

O sucesso de *Os Elementos* é devido primeiramente à sua apresentação lógica da maior parte do conhecimento matemático disponível para Euclides. Muito do material não é formado de ideias originais dele, apesar de que muitas das provas o são. No entanto, o desenvolvimento sistemático do seu assunto, de um pequeno corpo de axiomas a profundos resultados, e a consistência de sua abordagem ao longo de *Os Elementos* encorajou o seu uso como livro de referência por mais de 2000 anos.

Em consonância, Irineu Bicudo alerta acerca do critério que temos que ter quando estudamos a nossa história cultural, nesse particular, pensar que parte da matemática originou-se completamente da genialidade de Euclides, apontando um equívoco de premissa, todavia registrando os devidos créditos a Euclides, vamos entender:

> Um dos capítulos mais importantes da história cultural, embora pouco conhecido, é a transformação do primitivo conhecimento matemático empírico de egípcios e babilônios na ciência matemática grega, dedutiva,

---

[4] O texto completo dos *Elementos* encontra-se, atualmente, disponível gratuitamente, no *site* *www.dominiopublico.gov.br* (*http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf*). Recentemente, Irineu Bicudo (2009) publicou, pela editora da UNESP, uma edição completa de *Os Elementos* traduzida diretamente do grego.

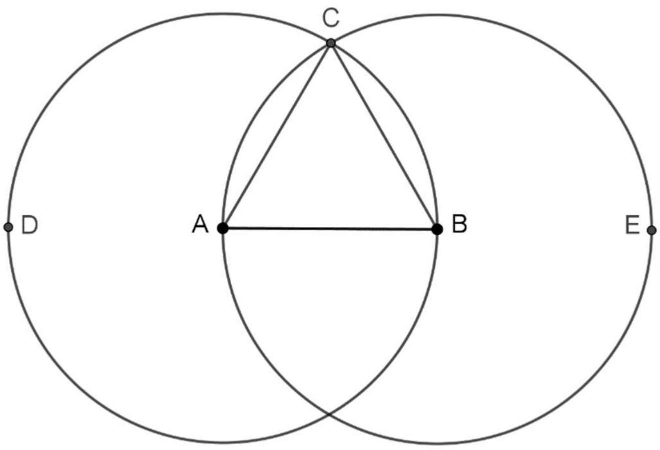
> sistemática, baseada em definições e axiomas. Quem se achegue descuidadamente a essa história terá a impressão de a geometria ter nascido inteiramente radiante da cabeça de Euclides, como Atenas da de Zeus. Tal foi o êxito dos seus *Elementos* no resumir, corrigir, dar base sólida e ampliar os resultados até então conhecidos que apagou, quase que completamente, os rastros dos que o precederam. (BICUDO, 2009, p. 83)

Os Elementos ainda tem sua influência sobre livros modernos de geometria. Além disso, sua abordagem axiomática lógica e suas provas rigorosas são reconhecidamente válidas até hoje. Apesar de *Os Elementos* ser primariamente um livro de geometria, ele também inclui resultados que seriam classificados hoje como teoria dos números. Euclides provavelmente escolheu descrever resultados obtidos na teoria dos números em termos da geometria porque ele não conseguiu desenvolver uma abordagem construtiva à aritmética.

Uma construção usada em qualquer das provas de Euclides requeria uma prova que fosse verdadeiramente possível. Isso evitava o problema que os pitagóricos encontraram com os irracionais, uma vez que suas provas falaciosas geralmente requeriam colocações do tipo "Encontre a maior medida comum de …".

Apesar de seu sucesso, *Os Elementos* tem sido criticado por ter provas e definições insuficientes (pelos padrões da matemática moderna). Por exemplo, na primeira construção do Livro I, Euclides usa uma premissa que não foi nem postulada nem provada: que dois círculos, de raios iguais e cuja a distância entre os centros tem a mesma medida do raio, têm dois pontos de intersecção, vejamos:

Figura 1.1 – Construção de um triângulo equilátero.



Fonte: Autor.

Proposição 1.1 - Construir um triângulo equilátero sobre a reta limitada dada (Proposição 1 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Seja a reta limitada dada AB. É preciso, então, sobre a reta AB construir um triângulo equilátero. Fique descrito, por um lado, com o centro A, e, por outro lado, com a distância AB, o círculo BCD, e, de novo, fique descrito, por um lado, com o centro B, e, por outro lado, com a distância BA, o círculo ACE, e, a partir do ponto C, no qual os círculos se cortam, até os pontos A, B, fiquem ligadas as retas CA, CB. E, como o ponto A é centro do círculo CDB, a AC é igual à AB; de novo, como o ponto B é centro do círculo CAE, a BC é igual à BA. Mas a CA foi também provada igual à AB; portanto, cada uma das CA, CB é igual à AB. Mas as coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si; portanto, também a CA é igual à CB, portanto, as três CA, AB, BC são iguais entre si. Portanto, o triângulo ABC é equilátero, e foi construído sobre a reta limitada dada AB.

[Portanto, sobre a reta limitada dada, foi construído um triângulo equilátero]; o que era preciso fazer. □

Mais tarde, na quarta construção, ele aduziu, sendo muito plausível pensar assim, o movimento de triângulos para provar que se dois lados e dois ângulos são iguais, então eles são congruentes; no entanto, ele nem postulou ou mesmo definiu movimento, muito embora saibamos que a geometria euclidiana é estática.

O movimento crítico iniciou-se provavelmente no final do século XVII, com John Wallis, continuando um pouco difuso durante o século seguinte, com o abade jesuíta Saccheri e os matemáticos Lambert e Gauss. Mas é no século XIX que a crítica a Euclides assume suas últimas consequências, quer nas geometrias alternativas propostas por Bolyai, Lobachewski e Riemann, quer na refundamentação da geometria euclidiana por Moritz Pasch, Richard Dedekind e David Hilbert, que tentaram reformular os axiomas[5] dos Elementos, por exemplo, adicionando um axioma de continuidade e um axioma de congruência.

O matemático e historiador W. W. Rouse Ball pôs as críticas em perspectiva, lembrando que "o fato de que por dois mil anos *Os Elementos* foi o livro

[5] No próximo capítulo trataremos acerca dos célebres cinco axiomas de Euclides presentes no começo do Livro I logo após as definições, destacando o 5º Axioma e suas variantes.

de referência padrão no assunto levanta uma forte indicação de que ele não é inútil para seus propósitos", mais além BOYER assevera:

> [...] É fácil, é claro, criticar a obra de um homem à luz de desenvolvimentos posteriores e esquecer que “suficiente para o dia é o rigor desse dia”. Em seu tempo, Os Elementos, evidentemente, constituiu o desenvolvimento lógico mais rigorosamente tratado da matemática elementar que já fora erigido, e dois mil anos deveriam passar-se antes que surgisse uma apresentação mais cuidadosa. Durante esse longo intervalo a maior parte dos matemáticos considerou a exposição de Euclides como logicamente satisfatória e pedagogicamente aceitável. (BOYER, 1974, p. 78-79)

Nesta trilha, temos também a argumentação e exemplo de Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira, que reforçam o entendimento acerca do imediatismo que se tinha quando se pensava em geometria, o que era rapidamente vinculado a ideia de geometria de Euclides, vejamos:

> Durante muitos séculos, quando se falava em geometria, tinha-se em mente a geometria tal como exposta nos Elementos de Euclides. Mesmo a noção do que é Matemática, do que é rigor em Matemática e de como ela deve ser exposta se baseou nos Elementos durante muito tempo. Assim, por exemplo, Isaac Newton deduziu muitos dos resultados de seu *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural) usando métodos de cálculo infinitesimal mas suas demonstrações seguiam o modelo euclidiano, geométrico. (ROQUE; PITOMBEIRA, 2012, p. 94)

Finalizando este quesito, não era raro nos tempos antigos atribuir a autores celebrados obras que não tinham sido escritas por eles. É dessa forma que os livros apócrifos XIV e XV dos *Elementos* foram por vezes incluídos na coleção. O ilegítimo Livro XIV foi provavelmente escrito por Hípsicles com base em um tratado de Apolônio. O livro dá seguimento à comparação de Euclides de sólidos regulares inscritos em esferas, com o principal resultado sendo o de que a razão das superfícies do dodecaedro e do icosaedro inscritos na mesma esfera é igual à razão dos seus volumes:

$$\frac{\sqrt{10}}{3(5-\sqrt{5})}.$$

O ilegítimo Livro XV foi provavelmente escrito, pelo menos em parte, por Isidoro de Mileto. Este livro inferior cobre entre outros assuntos a contagem do número de arestas e ângulos em sólidos regulares e busca encontrar a medida dos ângulos diédricos formados pelas faces que se encontram em uma aresta.

2 OS XIII LIVROS

O que nos interessa neste trabalho é estudar uma obra de Euclides, especificamente, *Os Elementos*, que foi uma obra composta de 13 livros (como se fossem 13 partes ou 13 capítulos, assim não podemos pensar que Os Elementos é uma obra gigantesca, uma verdadeira enciclopédia de 13 volumes) e extremamente influente para a matemática, inclusive para algumas pessoas Os Elementos de Euclides, num certo sentido, definiu o paradigma do que seja a matemática, de como se faz matemática.

Veremos: 1 – O método de *Os Elementos*; 2 – A Estrutura de *Os Elementos*; 3 – Os cinco famosos axiomas de Euclides, presentes no livro I de sua obra; 4 – A Equivalência de áreas e o Teorema de Pitágoras; 5 – A quadratura de figuras planas; e 6 – A álgebra geométrica grega.

2.1 O Método de Euclides em *Os Elementos*

O método de *Os Elementos*: é o método lógico-dedutivo, tipo de argumentação aceita em matemática, a partir do qual, de certos princípios, os primeiros princípios, que são as definições, os axiomas, são deduzidos os teoremas. Neste contexto, no que se refere a apresentação axiomático-informal das teorias matemáticas, os teoremas são demonstrados utilizando as regras de inferência da lógica matemática, para tanto transcrevemos o seguinte:

> Um modelo axiomático é um conjunto finito de noções primitivas, de axiomas e de regras de inferência, usados para definir objetos e deduzir teoremas. Nas definições se utilizam as noções primitivas ou outras definições previamente feitas. Nas demonstrações dos teoremas podem se utilizar as definições, as noções primitivas, os axiomas, as regras de inferências e os teoremas previamente demonstrados. (FILHO, 2012, p.168)

Da mesma maneira que o Poeta tem um tipo de argumentação, o Político tem um tipo de argumentação, o Advogado tem um tipo de argumentação, os matemáticos têm um tipo aceito de demonstração, que é o método da demonstração matemática, o tipo de argumentação matemática, para garantir o não cometimento de erros ao chegarem nos resultados.

Alguns autores, aparentemente (pode não ter sido a intenção), valorizam numa dimensão menor o aporte metodológico (no sentido de metodologia da ciência) do trabalho de Euclides em *Os Elementos*. O importante não foi fazer uma coletânea dos resultados de geometria conhecidos na época, já existiam algumas bem anteriores que não tiveram transcendência, como a de Hipócrates de Quios, Teodoro e Arquitas, que não transcenderam, por exemplo, lemos:

> Fora de disputa, no entanto, está o fato de que a grande maioria – se não a totalidade – dos resultados e de suas respectivas demonstrações já era de domínio comum entre os estudiosos da época. Assim, a boa reputação de Euclides deve-se basicamente à sistematização destes conhecimentos e sua apresentação da maneira mais clara possível. De qualquer modo, cabe notar que alguns detalhes da obra devem-se ao próprio Euclides, como é o caso da escolha dos axiomas e do ordenamento das demonstrações, da demonstração do Teorema de Pitágoras, e da formulação do axioma das paralelas. De maneira original ou não, o mérito dos Elementos está em apresentar a geometria de uma maneira sistemática, dedutiva e com base em um número reduzido de princípios explicitamente admitidos de antemão. (VAZ, 2010, p. 20)

Na realidade, o grande e transcendente mérito de Euclides em *Os Elementos* são as primícias na criação do método axiomático na matemática, que até hoje perdura (evoluído). Seu trabalho vai muito além de uma simples obra que sistematizou a geometria conhecida na sua época, constitui a implementação de um paradigma epistemológico no fazer matemática.

Todavia, as críticas ao rigor lógico-formal de Euclides foi tomando força com o tempo e no século XIX era já uma opinião consensual entre os matemáticos. Existem opiniões divergentes relativas à utilização de figuras nas demonstrações, como a manifestada na tese doutoral de Lopez Vaz. Dela extraímos o seguinte texto:

> À luz de trabalhos recentes acerca do tema, pretende-se promover, em particular, uma nova avaliação daquele que é considerado o primeiro sistema dedutivo rigoroso na história da matemática: a geometria de Euclides, sistematizada nos seus Elementos. Com efeito, a utilização dos diagramas (figuras) como partes essenciais das demonstrações neste sistema fez com que, na modernidade, tal sistema fosse considerado um exemplo de sistema informal, no qual as demonstrações são meros esboços do que seriam verdadeiras demonstrações. (VAZ, 2010, p. 6)

Lopez Vaz estabelece ainda que estas, de acordo com a concepção de demonstração que é comum na modernidade, devem ser compostas exclusivamente de fórmulas, as quais podem ser derivadas umas das outras apenas com base em regras lógicas ou princípios explícitos de antemão (o autor se refere aos sistemas dedutivos axiomáticos formais).

Uma vez que tal concepção tornou-se dominante, por conta de diversos fatores nem sempre interligados, os diagramas que faziam parte das demonstrações euclideanas passaram a ser vistos como uma das principais causas de uma alegada falta de rigor por parte das mesmas.

No presente trabalho pretende-se mostrar que é possível uma interpretação da obra de Euclides que leve em conta a participação dos diagramas (das figuras) nas demonstrações, sem que com isso as demonstrações sejam deficientes em termos de rigor. Tomei nos dá uma ideia da grandiosidade e dificuldade do estudo das fontes do texto de Euclides:

> A importância dos Elementos faz com que o estudo de suas fontes seja uma tarefa desesperadora. Existem dezenas de manuscritos que partem do texto original, levemente alterado por diversas razões bem-intencionadas. Em alguns, por razões didáticas, são acrescentados comentários matemáticos ou históricos, muitas vezes errados. Em outros, aparecem tentativas de corrigir o texto original, apresentando demonstrações mais breves, ou explicitando partes supostamente obscuras do argumento, e mesmo alterando definições. Ironicamente existem estudiosos que encontram erros na versão que tem em mãos, atribuem o erro a estudiosos anteriores, e, ao corrigi-los, apresentam o novo trecho como sendo do próprio Euclides. (TOMEI, 2003, p. 21-22)

O resultado desse refinado e grandioso trabalho descrito por Tomei é que *Os Elementos* de Euclides são os mais antigos textos matemáticos gregos, que nos é possível estudar em sua completude, nos possibilitando entender a importância que essa obra adquiriu ao longo do tempo. Euclides descreve quase todo o conhecimento matemático produzido por seus antecessores, corrigindo, dando uma base sólida e acrescentando novos resultados.

2.2 A Estrutura e o Conteúdo de *Os Elementos* de Euclides

Podemos então identificar a divisão de *Os Elementos* de Euclides, de um modo geral, da seguinte maneira: 1 – geometria plana – Livros I a VI (visto de um modo geral porque o livro V lida com grandezas, que podem ser volumes); 2 – Números, sob o ponto de vista geométrico – Livros VII a X (visto de um modo geral porque o livro X trabalha com segmentos incomensuráveis, que hodiernamente chamamos da classificação dos números irracionais); e 3 – geometria espacial – Livros XI a XIII.

Essa obra de Euclides é extremamente influente para a matemática, inclusive, para alguns, *Os Elementos* num certo sentido definiu o paradigma do que é a matemática, como é que se faz matemática. Avançando a divisão de *Os Elementos*, vem que a autoria de Euclides está assim dividida:

- **Livro I** - Constitui-se por 23 definições, 5 axiomas, 9 noções comuns e 48 proposições, onde temos como aspectos relevantes a congruência de triângulos, as propriedades das retas e paralelas, os paralelogramos e o Teorema de Pitágoras. Resultados básicos de geometria plana (por exemplo ensina a construir um triângulo equilátero);

- **Livro II** – É constituído por 2 definições e 14 proposições, onde é tratado, principalmente a álgebra geométrica. A geometria do retângulo;

- **Livro III** – Possui 11 definições e 37 proposições, cujo aspecto mais relevante ali tratado é a teoria dos círculos. A geometria do círculo;

- **Livro IV** – Encontra-se neste volume 7 definições e 16 proposições que tratam, principalmente, da construção de figuras inscritas e circunscritas (polígonos regulares e o círculo), sendo o ponto alto deste livro a construção do pentágono regular inscrito em um círculo ou, equivalentemente, o decágono regular inscrito em um círculo;

- **Livro V** – Dispõe de 18 definições e 25 proposições cujo tema central é a teoria das proporções de Eudoxo na sua forma puramente geométrica, abordando grandezas em proporções; esse livro marca uma ruptura e é um ponto alto de *Os Elementos*, resolvendo um problema de como trabalhar com grandezas incomensuráveis;

- **Livro VI** – Figuram nesse volume 11 definições e 37 proposições, onde predominam o estudo das figuras semelhantes e proporções na geometria, também faz menção ao Teorema de Pitágoras e a generalização do método de aplicação das áreas. Figuras planas semelhantes (com a aplicação da Teoria das proporções de Eudoxo);

- **Livro VII** – Aqui encontram-se 22 definições e 39 proposições, cuja relevância abrange a introdução dos números e o algoritmo de Euclides para determinação do máximo divisor comum entre dois números. Aritmética básica (Aritmética para os Gregos, mas chamaríamos de Teoria dos Números elementar – define por exemplo o que é o Máximo Divisor Comum, dá o algoritmo de Euclides para achar o Máximo Divisor Comum de dois números, define o que é número primo, número composto, mostra que existe uma infinidade de números primos);

- **Livro VIII** – É constituído por 27 proposições que tratam, principalmente, dos números enquanto progressão geométrica. Números em progressão geométrica e tipos especiais de números (números quadrados, números cúbicos em progressões geométricas, em progressões contínuas);

- **Livro IX** – Neste volume encontramos 36 proposições sobre a demonstração da existência infinita de números primos. Números em progressão geométrica e a teoria dos pares e dos primos;

- **Livro X** – Dispõe de 16 definições e 115 proposições, cujo aspecto relevante é a teoria dos números irracionais. Segmentos de reta incomensuráveis (modernamente diríamos que é o estudo de certos tipos de números irracionais; esse é um livro difícil de ser entendido à luz dos atuais e diferentes hábitos mentais, costumes, linguagem e visão da matemática, tanto é assim que é tido como a *crux mathematical* – a cruz dos matemáticos – uma cruz pesada de carregar, exige um certo esforço para se penetrar no espírito do Livro X e poder apreciar devidamente o que é que Euclides faz);

- **Livro XI** – Constituído por 28 definições e 39 proposições que tratam dos sólidos geométricos. Resultados básicos de geometria espacial (retas perpendiculares a planos, planos paralelos);

- **Livro XII** – Composto por 18 proposições, onde são tratadas as medidas de figuras utilizando o método da exaustão. Áreas e volumes e o método de exaustão de Eudoxo (método que os Gregos usavam para evitar o recurso que chamaríamos hoje de processos infinitos de Limites); e

- **Livro XIII** – São 18 proposições sobre as propriedades dos sólidos regulares. Os sólidos Platônicos (na qual é feita a demonstração – vista no ensino médio da educação básica brasileira – de que existe exatamente 5 poliedros regulares).

2.3 Os célebres 5 Axiomas de Euclides

Os postulados se referem especificamente a enunciados de fatos geométricos. Modernamente não se usa a palavra postulado, somente se fala em axiomas e os axiomas euclidianos são princípios lógicos de caráter geral e amplo, que ele julgava que seriam aplicados não somente na geometria, mas em todo o saber, especialmente o matemático. Os cinco axiomas de Euclides são, tomados de BICUDO (2009, p. 98):

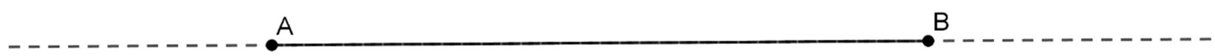
> **A1.** Fique postulado traçar uma linha reta a partir de todo ponto a todo ponto.

Figura 2.1 – O primeiro axioma.

Fonte: Autor.

> **A2.** Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.

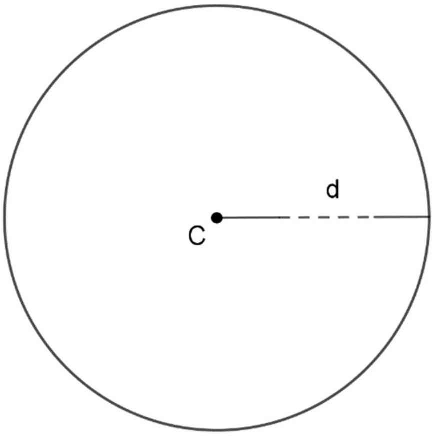
Figura 2.2 – O segundo axioma.



Fonte: Autor.

A3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.

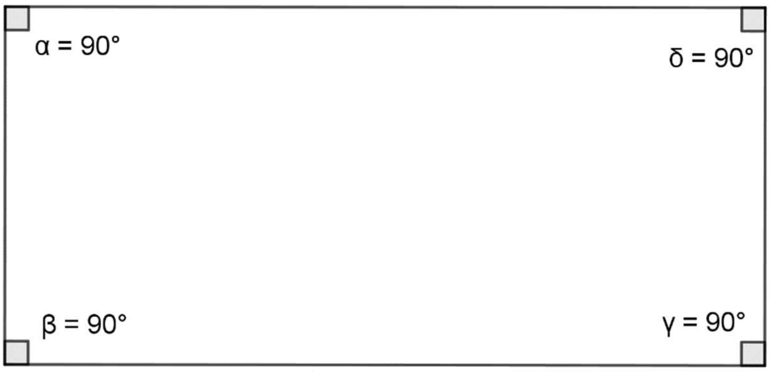
Figura 2.3 – O terceiro axioma.



Fonte: Autor.

A4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

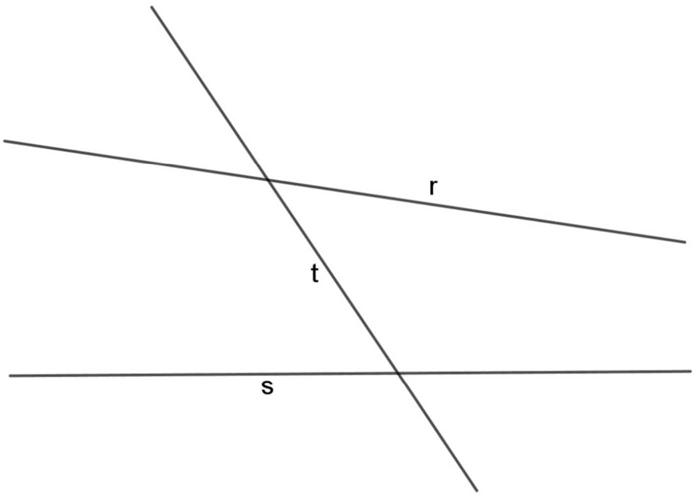
Figura 2.4 – O quarto axioma.



Fonte: Autor.

A5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Figura 2.5 – O quinto axioma.



Fonte: Autor.

Na literatura existem muitos comentários sobre os critérios de escolha dos axiomas, suas interpretações e consequências. Por exemplo, em BARKER (1964, p. 31) se lê:

> Os três primeiros axiomas de Euclides revelam que ele não está de maneira direta, discutindo nenhum problema concreto de mensuração de terras; com efeito, em condições reais não é sempre possível traçar uma reta que passe por dois pontos dados. Obstáculos vários (montanhas, lagos, parte de um país estrangeiro) impedem, muitas vezes, o traçado.

Para BARKER, em condições reais, não é verdadeiro que um segmento seja indefinidamente prolongável. É óbvio que um segmento vertical só poderá ser prolongado para cima ou para baixo, não pode ser desenhado um círculo no qual o centro tenha sido arbitrariamente selecionado e cujo raio seja apreciavelmente grande, os obstáculos impedirão certamente o traçado.

Euclides sabia de tudo isso, mas as condições práticas não o interessavam. Concebia que, em princípio, uma reta poderia ser traçada de modo a ligar dois pontos quaisquer, fosse ou não possível traçá-la em realidade. BARKER comenta que: "Segundo Euclides, havia um espaço em que inexistia obstáculos absolutos e em volta do qual inexistiam fronteiras exteriores absolutas". Os três primeiros axiomas exprimem certas consequências importantes. O primeiro é adotado em CASTRUCCI (1978) como o primeiro axioma de incidência: $\forall A$ e $\forall B$ ($A \neq B \rightarrow \exists a\ (A \in a \wedge B \in a)$), isto é, quaisquer que sejam os pontos A e B, se A é distinto de B, então existe uma reta *a* tal que A $\in$ *a* e B $\in$ *a*. Desse axioma se infere que a reta determinada por quaisquer dois pontos diferentes é única e que se dois pontos diferentes pertencem a duas retas *a* e *b*, então *a* = *b*. O segundo, estabelece que a linha reta pode ser prolongada em uma única direção, em cada extremidade. Na linguagem moderna um segmento está incluído numa única reta (infinita).

Duas linhas retas diferentes não têm um segmento comum. Do terceiro axioma, segundo BULMER-THOMAS (1956), se deduz que o espaço é infinito porque o raio do círculo não é limitado, decorrendo disso ser o espaço contínuo, não-discreto. Segundo o mesmo autor, o IV e o V axiomas são de uma outra natureza porque não preveem que alguma coisa deve ser feita, como “traçar”, “prolongar”, “descrever”. O axioma impressiona pela evidência, parece que até poderia ser eliminado como axioma. Para BULMER-THOMAS (1956) significa dizer que o ângulo reto é uma grandeza tomada para medir outros ângulos, o que equivale a pressupor o espaço homogêneo ou a invariabilidade das figuras.

O V axioma é uma das pedras angulares sobre as quais descansa a grandiosidade de *Os Elementos* de Euclides, mas também tem sido objeto de muitos debates. Somente no século XIX, as discussões e pesquisas sobre o assunto, com o surgimento das geometrias não-euclidianas, ficaram definitivamente esclarecidas.

A seguir apresentamos um resumo dessas controvérsias, o denominado problema das paralelas, trama longa e complicada, e seus desdobramentos nos fundamentos da matemática. A história do problema das paralelas mostra de forma admirável que a matemática não é uma ciência rígida e dogmática, mas dinâmica e em constante superação das dificuldades. Salta à vista que a formulação não tem a simplicidade presente nos quatro primeiros axiomas, não possui a evidência presente neles.

A complexidade do enunciado faz lhe parecer um teorema mais do que um axioma. Por essa razão, o V axioma chamou a atenção dos matemáticos e gerou dúvidas durante muitos séculos. Será que poderia ser demonstrado a partir dos outros quatro axiomas? Muitos matemáticos tentaram inutilmente demonstrá-lo durante séculos, sem nenhum resultado positivo. O V axioma "debuta em cena” em *Os Elementos*, como vemos abaixo:

> Proposição 29: A reta, caindo sobre as retas paralelas, faz tanto os ângulos alternos iguais entre si quanto o exterior igual ao interior oposto e os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos. BICUDO (2009, p. 120)

Na terminologia moderna pode-se enunciar: *Quando uma reta corta duas paralelas tem-se que: os ângulos alternos internos são iguais; os ângulos correspondentes são iguais e os ângulos colaterais internos são suplementares*. Para provar as 28 proposições anteriores são suficientes os quatro primeiros axiomas, mas para demonstrar a Proposição 29 (Livro I de *Os Elementos* de Euclides) é imprescindível assumir o V axioma. Desde Euclides até o século XIX, a análise do V axioma foi assunto presente nas pesquisas em geometria. O objetivo era provar que o V axioma não era realmente um axioma, mas uma proposição que poderia ser provada assumindo somente os quatro primeiros axiomas, isto é, era um teorema. Simbolicamente, pretendiam provar que $P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge P4 \rightarrow P5$. Alguns historiadores da matemática especulam que o próprio Euclides teve essa percepção, argumentando que ele evitou no possível sua utilização nas demonstrações, ainda ao custo de fazê-las mais complicadas, e que provou o enunciado recíproco do V axioma.

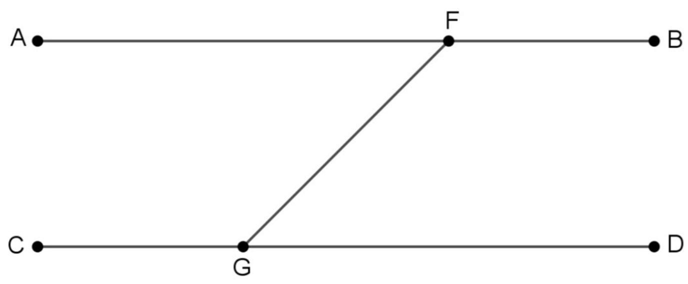
Durante todo esse longo período propuseram-se muitas supostas demonstrações do V axioma, mas todas tinham erros. Frequentemente seus autores utilizavam alguma afirmação geométrica equivalente ao V axioma, mas que era tão evidente que se infiltrava nos raciocínios sem ser percebido pelo próprio autor. Ao submeter as pretensas demonstrações a uma análise lógica rigorosa se descobria o círculo vicioso. Muitos matemáticos gastaram seu tempo e energias tentando provar o V axioma como um teorema. A seguir apresentamos algumas dessas tentativas. Existem relatos que em um tratado perdido de Arquimedes sobre a Teoria das Paralelas aparecia uma tentativa de demonstração do V axioma.

Em um livro de Claudio Ptolomeu (Alexandria, século II), intitulado: Que linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra, que infelizmente também se perdeu, aparece uma tentativa de demonstração do V axioma. Sabemos disso pelos comentários de Proclo (século V) sobre essa obra de Arquimedes. Ao ler o título do livro de Ptolomeu se percebe que se trata do V axioma, pois os ângulos a que se refere são os descritos no enunciado desse axioma. Proclo não reproduz toda a argumentação de Ptolomeu, mas apresenta as demonstrações feitas por Ptolomeu das Proposições 28 e 29 dos Elementos de Euclides (Livro I), sem apelar ao V axioma. Sabemos que é impossível provar a Proposição 29 sem assumir o V axioma ou alguma formulação equivalente, logo em algum lugar há um erro. A seguir, Ptolomeu prova, a partir da Proposição

29, o V axioma. Nesta última parte Ptolomeu está correto, pois caso seja assumida a Proposição 29, pode-se deduzir o V axioma.

Enunciado da Proposição 28 do Livro I de *Os Elementos*: *Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça o ângulo exterior igual ao interior e oposto e no mesmo lado, ou os interiores e no mesmo lado iguais a dois retos, as retas serão paralelas*[6] *entre si*. Demonstrações de Ptolomeu transcritas por Proclo e numa análise lógica dos erros que conduziram a Ptolomeu a acreditar que tinha provado o V axioma, temos: a) Ptolomeu teria utilizado uma definição de paralelismo coincidente com a de Euclides; b) na demonstração da Proposição 28, num passo teria cometido um erro lógico na negação de uma proposição que utilizará para uma prova por redução ao absurdo. Esse erro não traz consequências, pois é possível fazer a demonstração correta da proposição que Ptolomeu utilizou; e c) na demonstração da Proposição 29, o próprio Proclo comenta que Ptolomeu não poderia assumir que: se AB e CD são paralelas, como FB e GD são tão paralelas de um lado quanto AF e CG são do outro, então a soma dos ângulos internos de um lado teria de ser igual à soma dos ângulos internos do outro. A Figura 2.6 ilustra as retas paralelas assumidas por Ptolomeu na tentativa de provar a Proposição 29.

Figura 2.6 – Retas paralelas de Ptolomeu.



Fonte: Autor.

Na realidade, afirmar que FA e GC são tão paralelas para um lado quanto FB e GD são para o outro, é equivalente a afirmar que, por qualquer ponto exterior a uma reta, passa uma única paralela (Axioma de Playfair), que é equivalente ao V

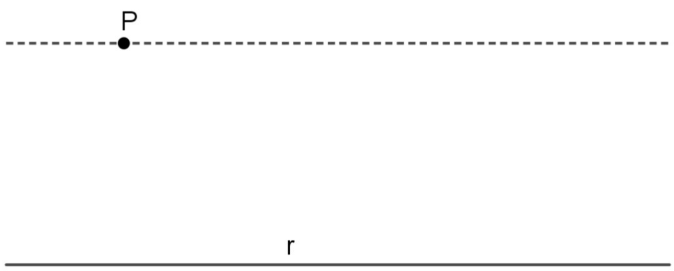
[6] A este respeito, assim consubstancia a Definição 23 do livro I de *Os Elementos* de Euclides: paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 98).

axioma de Euclides. Logo, a demonstração é incorreta. Vejamos a abordagem por Tomei:

> O quinto axioma, em uma versão equivalente sugerida pelo inglês Playfair, afirma que por um ponto P fora de uma reta r, é possível traçar uma única reta que não toca r. Este axioma das paralelas está entre as frases que mais provocaram reflexão em toda a História. [...] A afirmação é tão evidente aos nossos olhos que por dois mil anos geômetras tentaram demonstrá-la a partir dos outros quatro axiomas. Foram apresentadas dezenas de demonstrações, todas erradas. Do século XVIII em diante, alguns estudiosos, entre os quais o jesuíta italiano Saccheri e o alemão Lambert, buscaram uma demonstração por absurdo, como a empregada ao mostrar que a diagonal de um quadro é incomensurável com seu lado: desmente-se o axioma, e procuram-se aí conclusões em contradição com fatos já conhecidos. (TOMEI, 2003, p. 97-98)

Proclo Lício (412-485 d.C.) em seus comentários ao Livro I, criticou duramente o V axioma, escrevendo: "*Deve ser apagado por completo dos axiomas porque se trata de um teorema cheio de dificuldades, [...], e sua demonstração requer várias definições e teoremas. Ainda mais: a proposição recíproca é efetivamente demonstrada pelo próprio Euclides como um teorema. A afirmação de que quando as retas são prolongadas mais e mais, alguma vez se cortarão parece plausível, mas não necessária. Por isto, é claro que devemos dar uma prova deste teorema, que é alheio ao caráter especial dos axiomas.*" A Figura 2.7 ilustra o que foi proposto por Playfair.

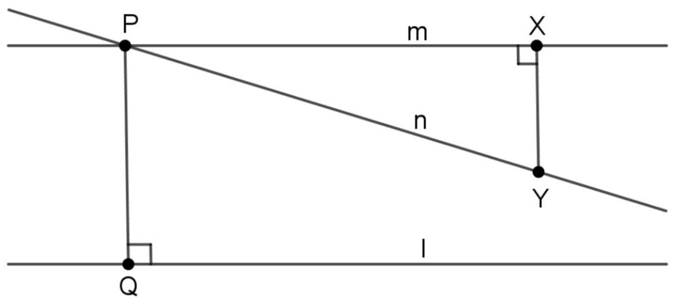
Figura 2.7 – Axioma das paralelas.



Fonte: Autor.

PARICIO (2001, p. 12) reproduz uma "demonstração" do V axioma devida ao próprio Proclo (veja Figura 2.8): Sejam *m* e *l*, duas retas paralelas. Suponhamos que a reta *n* é distinta de *m* e que corta a *m* no ponto *P*. Seja *Q* o pé da perpendicular desde *P* à *l*. Vejamos que *n* corta *l*. Se *n* coincide com a reta *PQ*, *n* corta *l*. Se *n* não coincide com a reta *PQ*, uma das semirretas de *n*, a *PY* está entre a semirreta *PQ* e uma semirreta de *m*. Seja *X* o pé da perpendicular de *Y* até *m*. Agora, se *Y* se desliza até o final de *n*, o segmento *XY* cresce indefinidamente e como a distância entre *m* e *l* é constante, em algum momento deverá cruzar *l*.

Figura 2.8 – Retas paralelas segundo Proclo.



Fonte: Autor.

Paricio observa dois erros na argumentação de Proclo: (i) Uma grandeza pode crescer indefinidamente sem ultrapassar uma cota superior predeterminada; (ii) Não pode ser pressuposto que a distância entre *m* e *l* é constante. Na hipótese está assumido que as retas *m* e *l* são paralelas, mas dizer que "a distância entre duas retas paralelas é constante", é outra hipótese, de fato, equivalente ao V axioma.

Os matemáticos árabes também estudaram a teoria das paralelas, mas sem obter resultados significativos. Como se sabe[7], o Islã iniciou a sua expansão no ano de 622, com a Hégira, data da fuga do profeta Maomé, de Meca para Medina. Rapidamente se expandiu de uma forma extraordinária através de várias conquistas: Damasco (635); Jerusalém (638); Alexandria (643) e Cartago (698).

Constantinopla sofreu assédios em 673 e 717. Em 711 chegam à Espanha e ali se fixam após as derrotas para os franceses, em 732. Com o passar do tempo Bagdá se converteu na "nova Alexandria", isto é, no principal polo da cultura da época. Os Califas de Bagdá foram, em geral, protetores da cultura. Nesse contexto muitas obras matemáticas foram traduzidas ao árabe. As matemáticas dos árabes foram muito destacadas em álgebra, aritmética e trigonometria.

A seguir, observam-se traços de algumas tentativas, por parte de matemáticos árabes, de demonstrar o V axioma. Ibn-al-Haitham (aproximadamente 965-1039), chamado Alhazen no Ocidente, deu uma tentativa de demonstração

[7] Informação extraída de pesquisas realizadas no site *wikipédia*, ver em referências.

argumentando que se um quadrilátero tem três ângulos retos, então o quarto também é reto. Na sua prova, supôs que o lugar geométrico dos pontos equidistantes à uma dada reta é uma reta, caindo na armadilha da equidistância entre as paralelas.

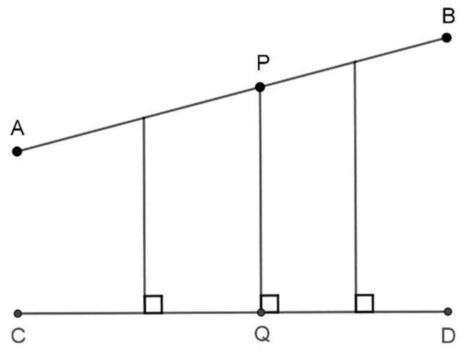
A afirmação de que existam duas retas equidistantes é equivalente ao V axioma. Por outro lado, a propriedade que afirma que em um quadrilátero, se três dos seus ângulos são retos, também é o quarto, também equivale ao V axioma.

Para os árabes o nome de Omar Khayyam (1050-1123) é muito conhecido pelas contribuições na astronomia e na álgebra. Os escritos de Omar sobre a teoria das paralelas aparecem em: *A Verdade das Paralelas e a Discussão sobre a famosa dúvida*, e ocupa a parte I da sua "Discussão sobre as dificuldades de Euclides". Omar Khayyam estudou, 600 anos antes que Saccheri, quadriláteros ABCD em que AB é congruente a CD e os ângulos em A e D são retos.

O persa Nasiraddin-Tusi (1201-1274), astrônomo e matemático, escreveu um tratado sobre a geometria euclidiana e parece ter sido o primeiro a chamar a atenção para a importância, no estudo do quinto axioma, do teorema da soma dos ângulos de um triângulo. Em sua tentativa de provar o V axioma encontra os germes de ideias importantes que seriam desenvolvidas mais tarde.

Nasiraddin apresenta uma demonstração onde começa assumindo como evidente que se duas retas AB e CD são cortadas por uma reta PQ, perpendicular apenas a uma delas, então, as distâncias medidas nas perpendiculares de AB para CD são menores do que PQ no lado em que AB faz um ângulo agudo com PQ, e são maiores onde AB faz um ângulo obtuso, como pode ser visto na Figura 2.9.

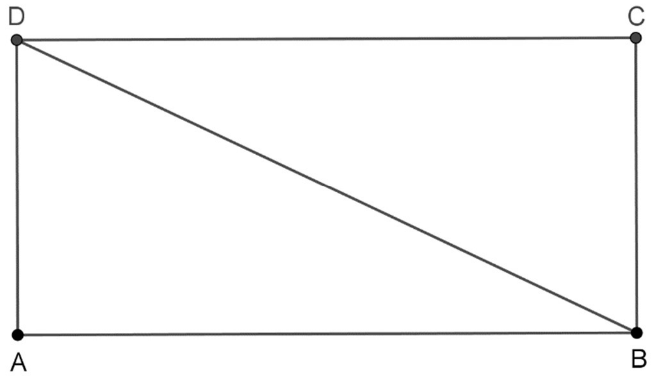
Figura 2.9 – Suposição de Nasiraddin-Tusi.



Fonte: Autor.

Em seguida, ele introduziu uma figura destinada a se tornar famosa. Nas extremidades de um segmento AB (Figura 2.10) ele desenhou igualmente perpendiculares AD e BC do mesmo lado, em seguida, juntou-se C e D.

Figura 2.10 – Gráfico II de Nasiraddin.



Fonte: Autor.

Para provar que ângulos CDA e DCB são ângulos retos, ele recorreu a *reductio ad absurdum*, usando, sem muito cuidado, a suposição mencionada anteriormente. Assim, se o ângulo DCB fosse agudo, DA seria menor do que CB, ao contrário da realidade. Daí, o ângulo DCB não é agudo, nem é obtuso.

É claro que ele tacitamente assumiu aqui que, quando o ângulo DCB é agudo, o ângulo CDA deve ser obtuso. Seu argumento levou à conclusão de que todos os quatro ângulos do quadrilátero são ângulos retos. Em seguida, se DB está empatado, os triângulos ABD e CDB são congruentes e a soma dos ângulos internos de cada um é igual a dois ângulos retos.

Se tudo tivesse até aqui sido rigorosamente provado, o V axioma seguiria facilmente. Nasiraddin apresentou uma prova elaborada e exaustiva, mas sua suposição inicial, de fato implicitamente pressupõe o V axioma. Mais uma vez, uma tentativa falida.

No ocidente, um dos primeiros centros de ensino foi o criado por Gerberto de Aurillac (940-1003), na cidade francesa de Reims. Ele foi um monge beneditino francês formado em Barcelona, nasceu em Auvernia, sul da França, em 940. Gerberto entrou em contato também com a ciência árabe no coração da Catalunha e isto lhe permitiu adquirir uma sólida formação científica. Como um dado curioso, de

999 até seu falecimento em 1003, Gerberto foi papa da Igreja Católica, com o nome de Silvestre II.

Como matemático ele foi o primeiro que introduziu o sistema numérico arábico e expôs suas vantagens em relação à numeração tradicional romana com as letras I, V, X, L, C, D, M. No entanto, não teve êxito com sua proposta, que acabaria sendo adotada duzentos anos mais tarde. Gerberto também estudou o paralelismo, dentre suas obras está a intitulada "Geometria", mas não existem registros de que tenha tentado provar o V axioma.

Nessa obra, se encontra a seguinte definição: Duas linhas retas distintas continuamente uma da outra pelo mesmo espaço e que quando se prolongam indefinidamente nunca se cortam se denominam paralelas; ou seja, equidistantes. Como se observa ele também caiu no "pecado" de embutir a equidistância na definição de retas paralelas.

Possivelmente, o rabi de Avinhon conhecido por Gersónides (1288-1344) foi o primeiro ocidental que analisou o axioma das paralelas. Ele trabalhou com quadriláteros equiláteros e equiângulos. A proposição que estabelece que os ângulos de um quadrilátero equilátero e equiângulo são retos é também equivalente ao V axioma.

Em 1584, na cidade de Roma, Clavius publicou uma edição impressa comentada de *Os Elementos* de Euclides. Nessa edição, às 468 proposições originais de Euclides foram adicionadas mais 671, devidas a Clavius, totalizando 1234 proposições geométricas. Clavius foi chamado por alguns do Euclides do século XVI. Nessa obra monumental ele incluiu uma demonstração do V axioma, na qual de novo se utilizava o argumento errado de que uma linha equidistante a uma linha reta é uma reta.

Neste quesito, há controvérsia em relação à própria obra de Euclides em que o mesmo demonstra a Proposição 27 do livro I de *Os Elementos*, aliás, proposição esta em que muitos acreditavam que seria a demonstração do V axioma, sendo isto totalmente incoerente à finalidade do método lógico dedutivo, que se esforça nas demonstrações utilizando-se apenas de primeiros princípios, axiomas, noções comuns e teoremas já demonstrados.

Todavia estaria Euclides se utilizando, nesta proposição 27 do livro I de *Os Elementos* de uma aplicação direta do V axioma e, portanto, incorrendo num ciclo vicioso, com o qual devemos ter o máximo de cautela, pois apenas afirma o propósito que se quer demonstrar, como podemos analisar no destaque feito em negrito no corpo da demonstração a seguir:

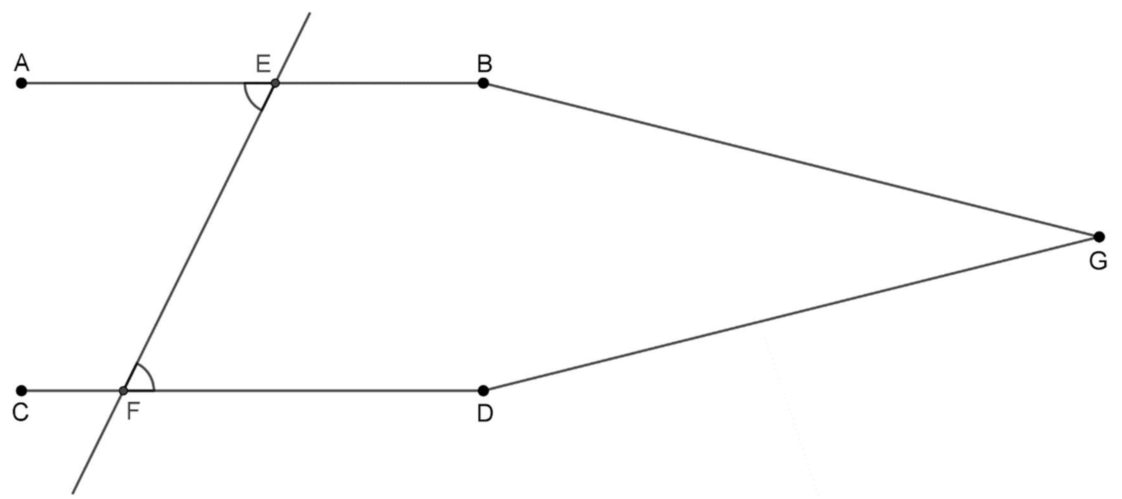
Proposição 2.1 Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas entre si (proposição 27 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Faça, pois, a reta EF, caindo sobre as duas retas AB, CD, os ângulos sob AEF, EFD, alternos, iguais entre si; digo que a AB é paralela à CD. Pois, se não, **sendo prolongadas, as AB, CD encontrar-se-ão ou no lado dos B, D ou no dos A, C**. Fiquem prolongadas e encontrem-se no lado dos B, D no G. Então, o ângulo sob AEF, exterior do triângulo GEF, é igual ao sob EFG, interior e oposto; o que é impossível; portanto, as AB, CD, sendo prolongadas, não se encontrarão no lado dos B, D. Do mesmo modo, então, será provado que nem no dos A, C. Mas as que não se encontram em nenhum dos lados são paralelas; portanto, a AB é paralela à CD.

Portanto, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos alternos iguais entre si, as retas serão paralelas; o que era preciso provar. □

A Figura 2.11 ilustra o problema das retas paralelas fornecido pela proposição 2.1, vejamos:

Figura 2.11 – Retas paralelas, uma aplicação do V axioma.



Fonte: Autor.

Dos múltiplos trabalhos dedicados ao V axioma, merecem especial menção os de Saccheri e Lambert, que deixaram uma pegada significativa no caminho da fundamentação da teoria das paralelas.

O italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) ingressou na ordem dos jesuítas aos 23 anos, foi professor de Teologia num colégio da ordem em Milan e posteriormente lecionou filosofia em Turim. Mais tarde foi professor de matemática na Universidade de Pavia. Nesse período se manifestou seu extraordinário talento para a matemática, especialmente motivado pelo estudo dos Elementos de Euclides. Saccheri ficou admirado pela potência da dedução lógica, em particular pelo método de redução ao absurdo. Posteriormente publicou a "Lógica Demonstrativa", onde aplicava seu método favorito, *reductio ad absurdum*.

Juntando suas habilidades na lógica com o conhecimento dos trabalhos de outros matemáticos sobre as paralelas, se adentrou no trabalho de pesquisa para resolver o Problema das Paralelas. Mas, tomou um caminho diferente do assumido pelos seus predecessores. Saccheri concentrou seus esforços na análise das consequências de negar o V axioma, assumindo os quatro primeiros. Sua esperança era deduzir uma contradição que permitisse, por redução ao absurdo, provar o V axioma. Mas, Saccheri não obteve o que procurava, não achou contradição alguma. Curiosamente, demonstrou muitos resultados "estranhos", que seriam considerados mais tarde como teoremas da geometria não-euclidiana, especificamente da geometria hiperbólica. Ele não enxergou o extraordinário valor dos resultados que havia encontrado. Os descartou por causa da sua fé cega na validade do V axioma.

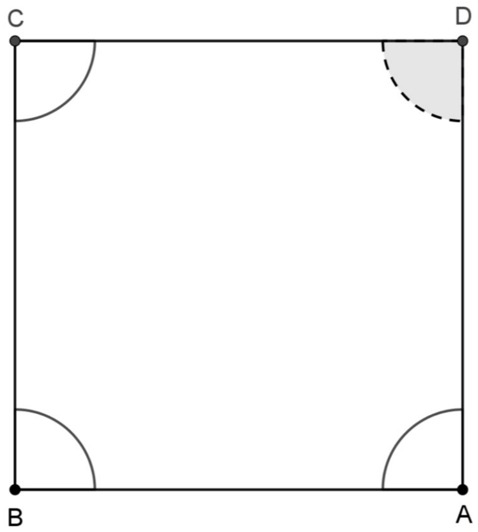
Saccheri apresenta no final da obra uma prova equivocada do V axioma. Alguns estudiosos especulam que essa prova, com "uma gritante falha de argumentação e completamente fora da sagacidade da sua obra", foi devida ao medo da censura da Igreja. Essa opinião é muito discutível. Sua fidelidade a Euclides e o convencimento de que a geometria euclidiana era a única possível, são a explicação mais provável.

Posteriormente, o matemático suíço-alemão Johann Heinrich Lambert (26 de agosto de 1728 - 25 de setembro de 1777) escreveu a obra póstuma intitulada *Die Theorie der Parallel linien* (A teoria das linhas paralelas). No seu trabalho Lambert também pesquisou se o V axioma poderia ser deduzido dos quatro primeiros, ou se seria necessária alguma hipótese adicional. Depois listou diferentes proposições que se provadas implicavam o V axioma.

As ideias de Lambert, desenvolvidas na obra Teoria das linhas paralelas (1766) se aproximam aos raciocínios de Saccheri. Lambert considera o quadrilátero ABCD com os três ângulos A, B e C retos (Figura 2.12).

Em relação ao quarto ângulo podem-se fazer três suposições; ou é agudo, ou é reto, ou é obtuso. Deste modo, surgem aqui novamente três hipóteses. Uma vez estabelecida a equivalência da hipótese do ângulo reto com o V axioma e havendo reduzido a uma contradição a hipótese do ângulo obtuso, Lambert como Saccheri, se vê obrigado a analisar mais a hipótese do ângulo agudo. E novamente esta hipótese conduz Lambert a um sistema geométrico complicado. No entanto, apesar de que este sistema foi profundamente desenvolvido por Lambert, não foi possível encontrar contradição lógica alguma.

Figura 2.12 – Teoria das linhas paralelas



Fonte: Autor.

Também no trabalho de Lambert se encontram as particularidades, paradóxicas a primeira vista, da disposição das retas em um sistema baseado na hipótese do ângulo agudo. Lambert, como Saccheri, não deduziu a falsidade da hipótese do ângulo agudo baseando-se unicamente em que estas particularidades contradizem nossas ideias intuitivas sobre as propriedades das retas.

Mas, a diferença de Saccheri, é não cometer erro algum, que lhe dera legitimidade para considerar descartada a hipótese do ângulo agudo e, portanto, demonstrado o V axioma. Lambert não afirma, em nenhuma parte de sua obra, haver demonstrado o V axioma e chega a firme conclusão de que as restantes tentativas nesta direção não levaram a meta desejada. Em EFÍMOV observamos:

> As demonstrações do axioma euclidiano – escreve Lambert – podem ser levadas tão longe que, a primeira vista, são um detalhe insignificante. Mas, ao fazer uma análise escrupulosa, resulta que reside nesta aparente insignificância, precisamente, a essência do problema; comumente esta contém ou a proposição a demonstrar, ou um axioma equivalente a ela. (EFÍMOV, 1998, p. 19)

E mais, ao desenvolver o sistema de corolários da hipótese do ângulo agudo, Lambert descobre uma analogia deste sistema com a geometria esférica e vê nisto uma possibilidade de sua existência. Lambert previu genialmente a verdadeira solução do problema do V axioma. Em todo caso, ele seguiu o caminho correto muito mais longe do que qualquer um dos que o precederam.

3 ALGUNS RESULTADOS DOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES

Iniciamos este capítulo destacando apontamentos normativos em âmbito local e nacional, a saber respectivamente, o Documento Curricular do Território Maranhense e a Base Nacional Comum Curricular - BNCC. Sabemos que uma das competências específicas de matemática presente no Documento Curricular do Território Maranhense é compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da matemática (aritmética, álgebra, geometria, estatística, probabilidade), mais além, faz a seguinte observação:

> Ainda que o componente curricular matemática esteja dividido em cinco unidades temáticas, é necessário entendermos que haverá a inter-relação entre as mesmas que ajudará na compreensão de que uma unidade precisa da outra e utiliza a outra, principalmente na resolução de situações-problema. Logo, cabe ao professor mostrar essa inter-relação entre as unidades temáticas à medida que elas vão sendo trabalhadas e apresentadas aos estudantes, de modo a construir um conhecimento matemático significativo e de forma dinâmica, e não mais isolada, como um dia já foi o ensino de geometria, por exemplo, que nos livros didáticos se encontravam nas últimas páginas. (MARANHÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO, 2019, item 3, p. 307)

Fortalecendo o entendimento sobre a realidade do aluno a ser considerada no processo de ensino e aprendizagem o DOCUMENTO CURRICULAR DO TERRITÓRIO MARANHENSE segue na linha do referencial teórico que, secundariamente, embasou este trabalho, como podemos constatar em:

> A partir do aprendizado em sala, das experiências vividas, dentro e fora da escola e, ao relacioná-los, a aprendizagem será significativa, favorecendo a formação da personalidade, além de ser um motivador para que se aprenda mais e conscientemente, pois o estudante terá condições de se perceber como partícipe do processo. (MARANHÃO. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO, 2019, p. 10)

Seguindo neste diálogo, tem-se na BNCC um fundamento normativo para um novo olhar no processo de ensino e aprendizagem da matemática, particularmente no que se refere ao resgate do trato que os gregos davam à geometria, chamando a atenção para que o Professor, no processo de ensino e aprendizagem, não se limite a apenas aplicar fórmulas matemáticas, vejamos:

> A geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares

> de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, MEC; SEB, 2018, p. 272-273, v. 1)

Assim, diante de todo o exposto anteriormente, percebemos a necessidade de resgate do significado grego, em particular, a respeito de área, tendo-a como atributo para análise e comparações entre figuras planas, permitindo também que se possa construir a quadratura de uma figura poligonal qualquer, aliando a esta estratégia um aprendizado significativo, não pelo desprezo do raciocínio a duras penas já conquistado com a álgebra, mas complementar a esta.

Proporcionando vivência à concretização deste trabalho, é preciso resgatar o uso de recurso não tecnológico no processo de ensino e aprendizagem, como jogos, brinquedos e brincadeiras tradicionais. Propõe-se a utilização de técnicas de corte e cole, bem como de relação de cores, combinado com o dia a dia do aluno, ao modo da geometria grega. A contextualização dos conteúdos desperta o prazer do aluno em aprender e neste processo novos conhecimentos são adquiridos, os quais têm razão na origem, como bem nos ensina Ausubel fazendo a relação com a relevância do conhecimento do aluno, desta forma temos:

> O conhecimento é significativo por definição. É o produto significativo de um processo psicológico cognitivo (“saber”) que envolve a interação entre ideias “logicamente” (culturalmente) significativas, ideias anteriores (“ancoradas”) relevantes da estrutura cognitiva particular do aprendiz (ou estrutura dos conhecimentos deste) e o “mecanismo” mental do mesmo para aprender de forma significativa ou para adquirir e reter conhecimentos. (AUSUBEL, 2003, p. 4)

Deste modo, no ensino da matemática, em particular da geometria, deve-se considerar os conhecimentos prévios e a realidade do aluno, para que o novo conhecimento tenha relação direta com o seu cotidiano, dando significado ao conhecimento novo construído em sala de aula e possibilitando o protagonismo do estudante, por meio de sua proatividade.

3.1 A equivalência de áreas e o Teorema de Pitágoras

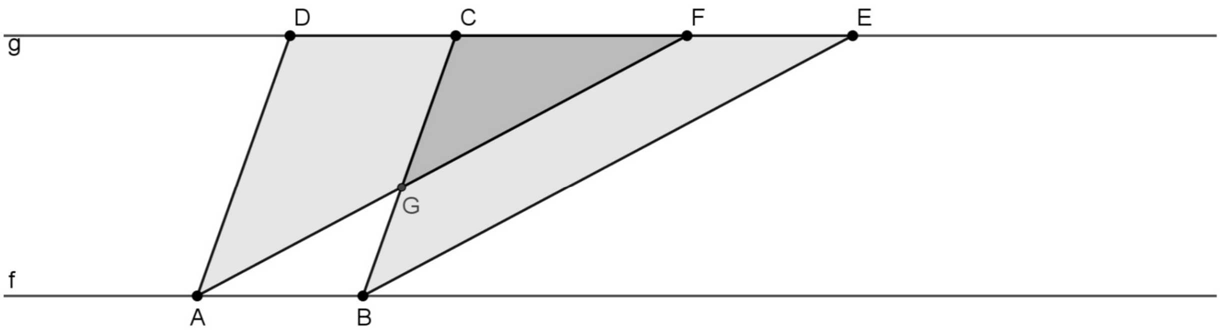
A equivalência de áreas é uma técnica matemática, uma maneira de trabalhar em matemática, que modifica figuras, mantendo suas áreas. Vamos usar a terminologia grega para dizer quando duas figuras são iguais, quando, na nossa linguagem moderna, são congruentes, ou quando tem a mesma área.

Hoje em dia nós distinguimos claramente esses dois entendimentos, quais sejam igualdade e congruência, para os gregos não havia distinção: ou são congruentes, ou tem a mesma área, por exemplo, podia-se muito bem dizer que determinado retângulo é igual a um quadrado, se eles estiverem exatamente a mesma área, então, usaremos, portanto, livremente a palavra igual, ficando claro do contexto com que significado estamos utilizando a palavra igual.

O que os gregos fizeram, e isso é bem anterior a Euclides, foi explicitar e demonstrar a validade de certos procedimentos que eram usados livremente sem, pelo menos que saibamos, nenhuma demonstração. Por exemplo, é sabido que em torno de 1.800 e 2.000 anos antes de Cristo já os indianos usavam nos seus trabalhos sobre altares o que chamamos hoje de o Teorema de Pitágoras; os babilônios[8] usavam o equivalente ao Teorema de Pitágoras; não se sabe como é que eles chegaram a esses resultados, se foi empiricamente, por experiência ou tentativa e erro; não há a menor noção de demonstração, não se encontra a menor ideia de demonstração desses resultados; o que os gregos fizeram foi explicitar esses fatos e demonstrá-los.

Uma das primeiras demonstrações de Euclides é sobre paralelogramos com a mesma base contidos em duas paralelas em que Euclides conclui que esses dois paralelogramos são iguais, conforme exposto na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Paralelogramos de mesma base e entre paralelas.



Fonte: Autor.

[8] Alguns historiadores da Matemática defendem que no tablete babilônico Plimpton 322 há um indício de que os babilônios já estudavam as triplas pitagóricas, o que mostraria que a relação atribuída a Pitágoras já seria conhecida. Esta tese é refutada por E. Robson, em artigo sobre Plimpton 322 (ver em referências).

Essa demonstração é de amplo conhecimento e é superinteressante, aliás, é necessário destacar que nos últimos anos do ensino fundamental ou no ensino médio é bem mais relevante fazer uma demonstração desse tipo do que mandar o aluno calcular a área de um paralelogramo, calcular a área de um retângulo, coisas desse tipo.

A maior parte dos exercícios dos problemas de geometria que se vê nos últimos anos do ensino fundamental e mesmo no ensino médio são simples resultados, aplicações numéricas, cálculo usando fórmulas, não se pensa nas figuras[9], nos objetos geométricos, como sendo algo que se pode manipular e cujas propriedades se pode explorar.

Proposição 3.1 Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si (proposição 35 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Sejam os paralelogramos ABCD, ABEF, sobre a mesma base AB e nas mesmas paralelas DE, AB; digo que o ABCD é igual ao paralelogramo ABEF. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, a CD é igual à AB. Pelas mesmas coisas, então, também a EF é igual à AB; desse modo, também a CD é igual à EF; e a CF é comum; portanto, a DF toda é igual à CE toda. Mas também a AD é igual à BC; então, as duas DF, AD são iguais às duas CE, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob BCE é igual ao sob ADF, o exterior, ao interior; portanto, a base AF é igual à base BE, e o triângulo ADF será igual ao triângulo BCE; fique subtraído o CFG comum; portanto, o trapézio ADCG restante é igual ao trapézio BEFG restante; fique adicionado o triângulo ABG comum; portanto, o paralelogramo ABCD todo é igual ao paralelogramo ABEF todo.

Portanto, os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar. □

Essencialmente Euclides formaliza uma técnica de cortar pedaços de figuras e colá-los como os babilônios faziam para resolver certos problemas de

[9] Em Definições do livro I, no item 14, temos: figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras; e no item 13: E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 97).

matemática, então em particular qualquer paralelogramo é igual a um retângulo[10], tomando-se um retângulo[11] de mesma base. Eleva-se perpendiculares e o retângulo construído é igual a qualquer paralelogramo de mesma base, isso já nos permite transformar qualquer paralelogramo em um retângulo. Um dos objetivos que *Os Elementos* até o livro 2 resolve completamente é dado uma figura plana poligonal qualquer, construir, obviamente usando somente régua e compasso, um quadrado cuja área seja igual a área dessa figura, ou seja, observando a terminologia grega, um quadrado igual a essa figura, isso quer dizer a quadratura desse polígono, quadrar o polígono, daí vem a expressão famosa fazer a quadratura.

Uma vez resolvido o problema de fazer a quadratura de uma região plana poligonal o passo seguinte era fazer a quadratura de outras figuras que fossem limitadas não por segmento de reta, mas por curvas e a figura mais simples limitada por uma curva é a circunferência. Daí vem o famoso problema de fazer a quadratura do círculo, ou seja, usando somente régua e compasso, achar um quadrado igual àquele círculo. Esse problema da quadratura do círculo os gregos não conseguiram resolvê-lo usando somente régua e compasso, eles têm várias e várias soluções, algumas delas muito bonitas, muito engenhosas para resolver esse problema usando outras técnicas e outras ferramentas matemáticas, outras curvas, mas dentro do padrão imposto por Euclides, de usar somente a régua e o compasso, é impossível, como é sabido hodiernamente e possivelmente observado na disciplina de álgebra.

Como também é impossível usando somente régua e compasso fazer a trissecção do ângulo ou fazer a duplicação do cubo, todos esses problemas são chamados problemas clássicos dos gregos, problemas clássicos da geometria Grega, todos eles se resolvem usando outras ferramentas, outras curvas, algumas soluções são extremamente engenhosas, elegantes, mas com essa restrição de

[10] A esse respeito, Euclides identifica o retângulo denominando-o de oblongo ou o quadrado, por serem ambos retangular, conforme destacamos na íntegra da Definição 22 do livro I de *Os Elementos*: e das figuras quadriláteras, por um lado, **quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular**, e, por outro lado, **oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera**, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 98).

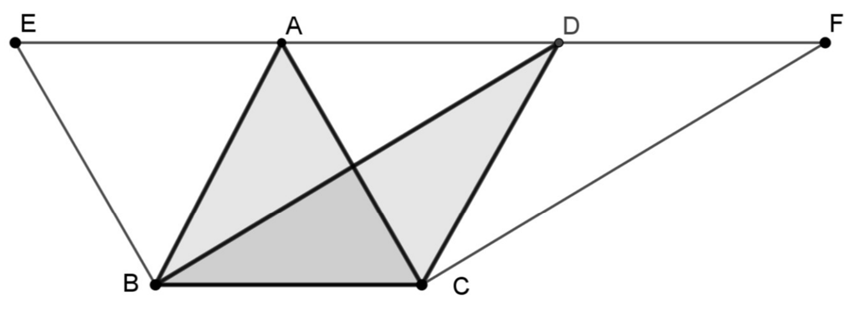
[11] Ainda nesta toada de fechar o entendimento a respeito dos retângulos, Euclides abre o livro II de *Os Elementos* com a seguinte definição: todo paralelogramo retangular é dito ser contido pelas duas retas que contêm o ângulo reto (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 135).

usar somente régua e compasso é impossível resolvê-los como nós sabemos desde o século 19. Então a primeira coisa que Euclides fez nessa linha de equivalência de áreas que nos levará ao Teorema de Pitágoras é mostrar que dois paralelogramos situados entre duas paralelas e que estão sobre a mesma base são, na terminologia dele, iguais. É preciso observar que na demonstração a dois casos a considerar, um deles é o caso em que os lados opostos à base desses paralelogramos são disjuntos e um outro caso a considerar é quando estes lados dos paralelogramos opostos à base não são segmentos de reta disjuntos.

Então é necessário modificar os cortes e colagens que se faz para levar em conta esses dois casos; isso são características de Euclides, algumas vezes, há teoremas que se faz necessário estudar vários casos. Euclides apresenta em geral somente um caso, deixando ao leitor o trabalho de investigar e verificar como é que a demonstração que ele faz pode ser adaptada para lidar com os outros casos.

Mais além, uma vez demonstrado o resultado anterior, então depois Euclides demonstra que se tivermos dois triângulos com bases iguais e compreendido entre duas paralelas, então eles são iguais, como já frisamos, conforme a terminologia grega. Como todo e bom matemático, Euclides faz esse problema recair no anterior, completa esses triângulos construindo paralelogramos, usa o resultado anterior e chega onde quer, o que era preciso provar, aliás, esta última frase extremamente comum ao término das proposições, podemos observar claramente conforme desenvolvimento da Proposição 37 do livro I de Os Elementos, a qual reporta que os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si, conforme indicado na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Triângulos de mesma base e entre paralelas.



Fonte: Autor.

Proposição 3.2 Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si (proposição 37 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Sejam os triângulos ABC, DBC sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AD, BC; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Fique prolongada a AD em cada um dos lados até os E, F, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BE paralela à CA, e, por outro lado, pelo C, fique traçada a CF paralela à BD. Portanto, cada um dos EBCA, DBCF é um paralelogramo; e são iguais; pois, estão tanto sobre a mesma base BC quanto nas mesmas paralelas BC, EF; e, por um lado, *o triângulo ABC é metade do paralelogramo EBCA; pois, a diagonal AB corta-o em dois*[12]; e, por outro lado, o triângulo DBC é metade do paralelogramo DBCF; pois, a diagonal DC corta-o em dois [e as metades das coisas iguais são iguais entre si[13]]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC.

Portanto, os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar. □

Para esta Proposição 37 do livro I, Euclides fez uso da Proposição 34 naturalmente também do livro I, conforme destacamos e podemos observar a seguir (veja também Figura 3.3):

Proposição 3.3 Das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas (proposição 34 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Sejam a área paralelogrâmica ACDB, e a diagonal dela BC; digo que tanto os lados quanto os ângulos opostos do paralelogramo ACDB são iguais entre si, e a diagonal BC corta-o em dois. Pois, como a AB é paralela à CD, e a reta BC caiu sobre elas, os ângulos sob ABC, BCD, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AC é paralela à BD e a BC caiu sobre elas, os ângulos sob ACB, CBD, alternos, são iguais entre si. Então os ABC, BCD são dois triângulos, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob BCD, CBD, cada um a cada um, e um

[12] Aplicação da Proposição 34 do livro I de *Os elementos* de Euclides.
[13] Axioma 6 das Noções Comuns. EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 99.

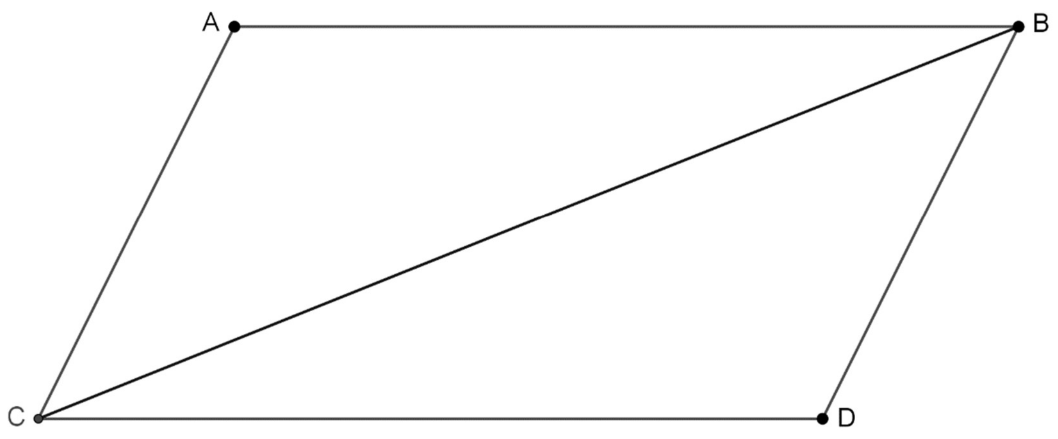
lado igual a um lado, o BC comum deles, junto aos ângulos iguais; portanto, também terão os lados restantes iguais aos restantes, cada um a cada um, e o ângulo restante igual ao ângulo restante; portanto, por um lado, o lado AB é igual ao CD, e, por outro lado, o AC ao BD, e ainda o ângulo sob BAC é igual ao sob CDB. E, como, por um lado, o ângulo sob ABC é igual ao sob BCD, e, por outro lado, o sob CBD ao sob ACB, portanto, o sob ABD todo é igual ao sob ACD todo. Mas foi provado também o sob BAC igual ao sob CDB.

Portanto, das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si.

Digo, então, que também a diagonal corta-a em duas. Pois, como a AB é igual à CD, e a BC é comum, então, as duas AB, BC são iguais às duas CD, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob BCD. Portanto, também a base AC é igual à DB. [Portanto,] também o triângulo ABC é igual ao triângulo BCD.

Portanto, a diagonal BC corta o paralelogramo ABCD em dois; o que era preciso provar. □

Figura 3.3 – Paralelogramos, lados e ângulos opostos iguais.



Fonte: Autor.

Um outro resultado que Euclides demonstra, nessa procura de estar a trabalhar com equivalência de áreas, que vai nos levar até a quadratura de uma figura de uma região plana poligonal, é que os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.

A demonstração é extremamente simples, também é muito mais interessante do que ir fazendo exercícios numéricos sobre a área X; todavia, antes de chegar a esse ponto, bem no início de *Os Elementos*, Euclides já tratou dos casos que chamamos de *congruência de triângulos*, ainda que implicitamente, utilizando a ideia de ajuste[14], sendo LAL – Lado-Ângulo-Lado (proposição 4 do livro I de Os Elementos), LLL – Lado-Lado-Lado (proposição 8 do livro I de Os Elementos) e ALA – Ângulo-Lado-Ângulo (proposição 26 do livro I de Os Elementos).

Reportando-se a casos clássicos de congruência de triângulos, observa-se como é que o matemático grego, Euclides em particular, pensava e resolvia esse problema. Vejamos, então, cada um desses casos a seguir (observe também Figuras 3.4, 3.5 e 3.6):

Proposição 3.4 Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais (proposição 4 do livro I de *Os Elementos*: caso LAL – Lado-Ângulo-Lado).

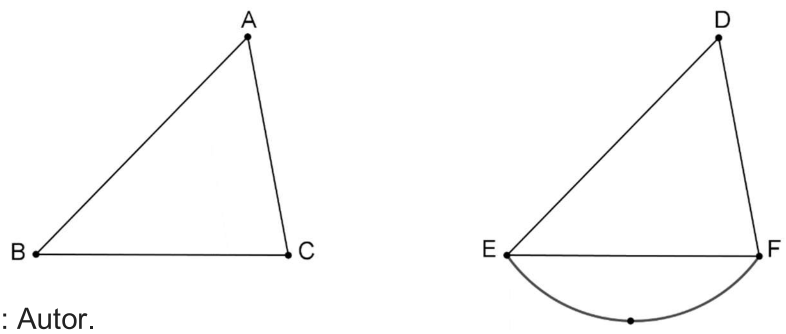
Demonstração: Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB ao DE, e, por outro lado, o AC ao DF, e o ângulo sob BAC igual ao ângulo sob EDF. Digo que também a base BC é igual à base EF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ABC ao sob o DEF e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE. Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser a AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por

[14] Em Noções comuns do livro I, no item 7, temos: E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 99).

certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão uma área[15]; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela; desse modo, também o triângulo ABC todo se ajustará sobre o triângulo DEF todo e será igual a ele, e os ângulos restantes ajustar-se-ão sobre os ângulos restantes e serão iguais a eles, por um lado, o sob ABC ao sob DEF, e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; o que era preciso provar. □

Figura 3.4 – Demonstração do caso LAL – Lado-Ângulo-Lado.



Fonte: Autor.

Proposição 3.5 Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais (proposição 8 do livro I de *Os Elementos*: caso LLL – Lado-Lado-Lado).

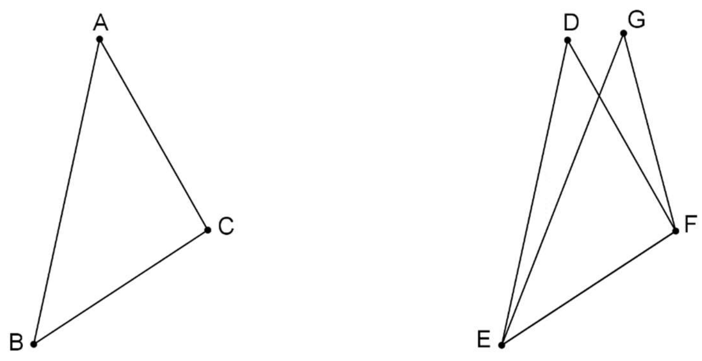
Demonstração: Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB, ao DE, e, por outro lado, o AC, ao DF; tenham, também a base BC igual à base EF; digo que o ângulo sob BAC é igual ao ângulo sob EDF. Sendo, pois, ajustado o triângulo ABC sobre o triângulo DEF e, sendo postos, por um lado, o ponto B sobre o ponto E, e,

[15] Em Noções comuns do livro I, no item 9, temos: E duas retas não contêm uma área (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 99).

por outro lado, a reta BC sobre a EF, também o ponto C se ajustará sobre o F, por ser a BC igual à EF; então, tendo se ajustado a BC sobre a EF, também se ajustarão as BA, CA sobre as ED, DF. Se, pois, por um lado, a base BC se ajustar sobre a base EF, e, por outro lado, os lados BA, AC não se ajustarem sobre os ED, DF, mas passarem além, como as EG, GF, serão construídas sobre a mesma reta duas retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, sobre o mesmo lado, tendo as mesmas extremidades. Mas não são construídas; não, portanto, sendo ajustada a base BC sobre a base EF, não se ajustarão também os lados BA, AC sobre os ED, DF. Portanto, ajustar-se-ão; desse modo, também o ângulo sob BAC ajustar-se-á sobre o ângulo sob EDF e será igual a ele.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais; o que era preciso provar. □

Figura 3.5 – Demonstração do caso LLL – Lado-Lado-Lado.



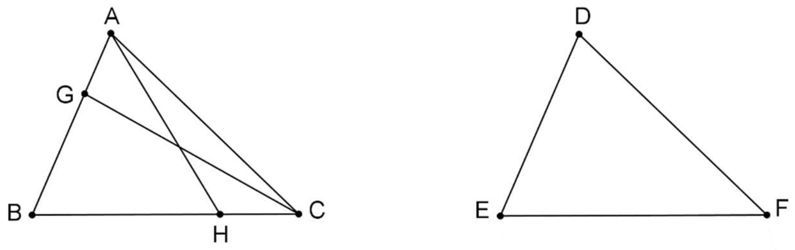
Fonte: Autor.

Proposição 3.6 Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, [cada um a cada um,] e o ângulo restante ao ângulo restante (proposição 26 do livro I de *Os Elementos*: caso ALA – Ângulo-Lado-Ângulo).

Demonstração: Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob DEF, EFD, cada um a cada um, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF, e, por outro lado, o sob BCA, ao sob EFD; e tenham também um lado igual a um lado, primeiramente o junto aos ângulos iguais, a BC, à EF; digo que também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, cada um a cada um, por um lado, a AB, à DE, e, por outro lado, a AC, à DF, e o ângulo restante, ao ângulo restante, o sob BAC, ao sob EDF. Pois, se a AB é desigual à DE, uma delas é maior. Seja maior a AB, e fique posta a BG igual à DE, e fique ligada a GC. Como, de fato, por um lado, a BG é igual à DE, e, por outro lado, a BC, à EF, então, as duas BG, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob GBC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base GC é igual à base DF, e o triângulo GBC é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob GCB é igual ao sob DFE. Mas o sob DFE foi suposto igual ao sob BCA; portanto, também o sob BCG é igual ao sob BCA, o menor, ao maior; o que é impossível. Portanto, a AB não é desigual à DE. Portanto, é igual. Mas também a BC é igual à EF; então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base AC é igual à base DF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Mas, então, de novo, sejam iguais os lados que se estendem sob os ângulos iguais, como a AB, à DE; digo, de novo, que também os lados restantes serão iguais aos lados restantes, a AC, à DF, enquanto a BC, à EF, e ainda o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Pois, se a BC é desigual à EF, uma delas é maior. Seja maior, se possível, a BC, e fique posta a BH igual à EF, e fique ligada AH. E, como, por um lado, a BH é igual à EF, e, por outro lado, a AB à DE, então, as duas AB, BH são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AH é igual à base DF, e o triângulo ABH é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob BHA é igual ao sob EFD. Mas o sob EFD é igual ao sob BCA; então, o ângulo exterior, o sob BHA, do triângulo AHC é igual ao sob BCA, interior e oposto; o que é impossível. Portanto, a BC não é desigual à EF; portanto, é igual. Mas também a AB é igual à DE. Então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AC é igual à base DF, e o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante.

Portanto, caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, terão também os lados restantes iguais aos lados restantes e o ângulo restante ao ângulo restante; o que era preciso provar. □

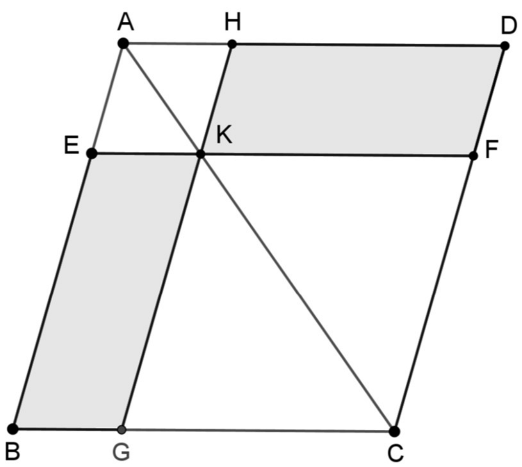
Figura 3.6 – Demonstração do caso ALA – Ângulo-Lado-Ângulo.



Fonte: Autor.

Isto posto (casos clássicos de congruência de triângulos), então retornemos ao estudo dos complementos dos paralelogramos (proposição 43 do livro I de *Os Elementos*), em que o triângulo ACD é igual ao triângulo ACB, dado que Euclides já demonstrou que os lados opostos de um paralelogramo são iguais, então AB é igual a DC, BC é igual a AD, AC é igual AC, sendo o caso que chamamos de LLL, assim, esses dois triângulos são congruentes na nossa linguagem e na linguagem deles são iguais, conforme podemos constatar na Figura 3.7 e na sequência a demonstração da proposição 43 do livro I, seguindo esse raciocínio de congruência de triângulos pelo caso LLL.

Figura 3.7 – Complementos dos paralelogramos.



Fonte: Autor.

Proposição 3.7 Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si (proposição 43 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Sejam o paralelogramo ABCD, e a diagonal AC dele, e, por um lado, sejam os paralelogramos EH, FG[16] à volta da AC, e, por outro lado, os ditos complementos BK, KD[17]; digo que o complemento BK é igual ao complemento KD. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, e a AC é uma diagonal dele, o triângulo ABC é igual ao triângulo ACD. De novo, como o EH é um paralelogramo, e a AK é uma diagonal dele, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK. Pelas mesmas coisas, então, também o triângulo KFC é igual ao KGC. Como, de fato, por um lado, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK, e, por outro lado, o KFC, ao KGC, o triângulo AEK, com o KGC, é igual ao triângulo AHK, com o KFC; mas também o triângulo ABC todo é igual ao ADC todo; portanto, o complemento BK restante é igual ao complemento KD restante.

Portanto, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda área paralelogrâmica, são iguais entre si; o que era preciso provar. □

Um dos axiomas de Euclides, o de número 3 das noções comuns do livro I, assim diz: se de coisas iguais, de grandezas iguais, retiram-se partes iguais, então o resultado são iguais[18]. Exatamente o que foi usado anteriormente, se de grandezas iguais, aqueles dois triângulos (ACD e ACB), sendo que a grandeza em questão não é a área, mas o triângulo, toda a figura; se de coisas iguais, retiram-se coisas iguais, então o resultado dá igual.

Parece um resultado extremamente inofensivo, entretanto irá desempenhar um papel importante, com isso já é suficiente para demonstrarmos o Teorema de Pitágoras que é a Proposição 47 do livro I de Os Elementos, sendo um dos teoremas mais importantes de geometria e é conhecido praticamente no mundo

[16] É comum encontrarmos Euclides identificando paralelogramos apenas destacando uma de suas diagonais, por exemplo no lugar de paralelogramo AHKE (identificação moderna usual, pelos quatro vértices), diz-se paralelogramo EH (identificação à maneira euclidiana, apenas por uma de suas diagonais, no caso a diagonal EH). Aliás, frisa-se que a linguagem empregada em todas as demonstrações é integralmente da primeira tradução completa para o português feita a partir do texto grego.

[17] Dada a explicação da nota 16, complemento BK é o paralelogramo EBGK e o complemento KD é o paralelogramo HKFD.

[18] EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 99.

inteiro; todo mundo, que foi à escola e tem uma certa informação acerca da matemática, conhece o Teorema de Pitágoras.

Acontece que o Teorema de Pitágoras hoje em dia perdeu muito do seu poder, do seu significado, pois foi transformado num simples resultado algébrico, num simples resultado aritmético, se tivermos um triângulo retângulo de hipotenusa a, catetos b e c, então nós traduzimos isso da seguinte maneira: o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Assim, perde-se toda a geometria subjacente a este resultado, em verdade, o que Euclides ou um outro qualquer matemático grego da época faria é enunciá-lo da seguinte forma: se tivermos um triângulo retângulo, o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos; era essa a formulação original do teorema, geométrico, lida com as figuras, não está medindo áreas, está trabalhando diretamente com as figuras; para os gregos, na geometria grega a área era um atributo indispensável, intrínseco à figura, a sua configuração geométrica.

A partir do século 19, pensa-se assim hoje a área como sendo uma função *a* de uma coleção M de figuras planas de um tipo especial (denominadas conjuntos mensuráveis) no conjunto dos números reais satisfazendo algumas propriedades, isso é extremamente eficiente e permite generalizar a noção de área, mas se perde o significado intuitivo bem geométrico, intimamente ligado à figura que a área tem.

Então, como é que Euclides demonstra esse teorema; a demonstração é interessante, os matemáticos gregos, por exemplo Euclides, eles evitavam cuidadosamente o movimento, é uma geometria estática, não se tem transformações, é tudo estático. Porém, vamos mostrar que, sem perda de generalidade, e é muito plausível pensar que Euclides concebeu, viu a verdade do teorema, pensando dinamicamente, sentou e o transformou em um raciocínio rigoroso.

Na Figura 3.8, aponta-se o Teorema de Pitágoras em um manuscrito do vaticano, escrito em grego, está muito amarelado pelo tempo, no meio da coluna esquerda da página à direita, percebe-se a figura que aduz ao Teorema de Pitágoras e o texto todo escrito em grego, essa é uma das preciosidades do vaticano.

Figura 3.8 – O Teorema de Pitágoras em um manuscrito antigo.

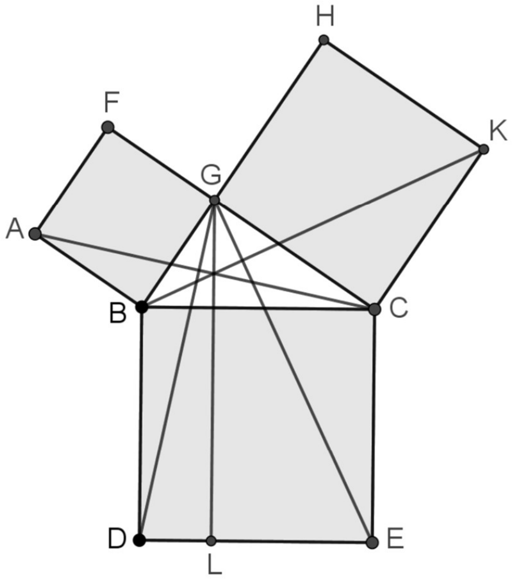
Fonte: *site* geocities.ws, ver em referências.

Então vamos mostrar como é que Euclides demonstrou este teorema, o resto são tecnicalidades para mostrar que há certos segmentos que são perpendiculares, são paralelos, certos ângulos são iguais, tudo é para tornar o raciocínio lógico, bem preciso, a ideia é simples, se apreendermos, percebermos essa ideia, fixaremos a demonstração do Teorema de Pitágoras.

De fato, o contrário também, é sabido, comumente acontece, ou seja, se nos utilizarmos de uma “educação bancária”, só depositando o conhecimento, ou pelo menos tentando, o nosso aluno, muito provavelmente, nesse particular, esquecerá do Teorema de Pitágoras, por não ser oportunizado a construção do conhecimento dessa geometria proposta por Euclides, que é uma geometria que faz o comparativo entre áreas, destacando as figuras e que é também essencialmente fundamental para se chegar, como veremos, ao Teorema de Pitágoras.

Portanto, conforme a Figura 3.9, tem-se um triângulo retângulo, têm-se os quadrados sobre os lados, o triângulo é BCG, logo o que queremos mostrar que o quadrado maior é igual à soma dos outros dois quadrados. Então o que Euclides fez foi mostrar que metade do quadrado ABGF mais a metade do quadrado GCKH é igual à metade do quadrado DECB, demostrando o teorema.

Figura 3.9 – O Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor.

Pois simplesmente duplica-se tudo, chegando ao Teorema de Pitágoras, portanto, demonstraremos primeiro que metade do quadrado ABGF é igual à metade do retângulo compreendido pelos seguintes três vértices denominados BDL.

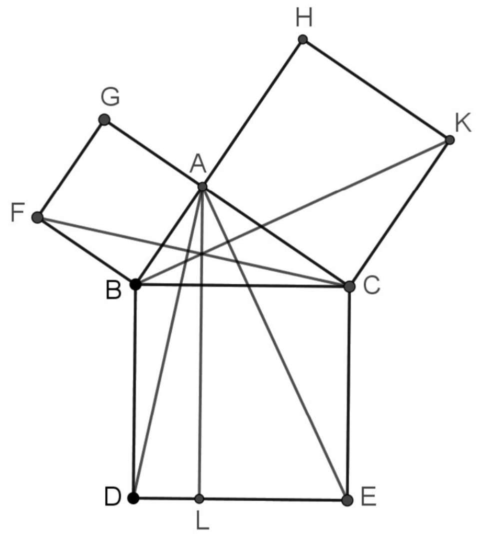
Depois, do mesmo modo, demonstraremos que metade do quadrado GCKH é igual à metade do retângulo também semelhantemente compreendido pelos seguintes três vértices denominados LEC, assim o teorema ficará demonstrado. Então, baixa-se a perpendicular GL, deslocando-se o ponto F ao longo da reta até chegar em C, obtendo o triângulo ABC.

Deste modo, o triângulo ABC é igual ao triângulo ABF, pois simplesmente são triângulos de mesma base compreendidos entre duas paralelas, na nossa linguagem atual, eles têm a mesma área. Nesta toada, faz-se a rotação do triângulo ABC no sentido horário até coincidi com BDG; como BD é paralelo a GL, de igual modo à igualdade entre o triângulo ABC e o triângulo ABF, tem-se a igualdade entre o triângulo BDG e o triângulo BDL.

Então, do mesmo modo, desloca-se o ponto G ao longo da paralela GL até coincidi com L, resultando exatamente que a área do triângulo ABF é igual, frisando como os gregos diriam, à área do triângulo BDL; como a área do triângulo ABF é metade da área do quadrado ABGF e a área do triângulo BDL é metade da área do retângulo compreendido pelos vértices BDL, então a área do quadrado ABGF é igual à área do retângulo compreendido pelos vértices BDL (axiomas de Euclides, o de número 6 das noções comuns do livro I, assim diz: e as metades da mesma coisa são iguais entre si[19].

Daí repete-se a mesma operação, trabalhando agora com o triângulo BCK. Essa estratégia é indicada a Euclides, porque ele tinha preparado todo o terreno para isso, mostrando que triângulos entre paralelas são iguais, todas as ferramentas estavam prontas. Observemos a Figura 3.10, a qual por sinal vem com o propósito de permanecer o mais possível ligado ao original, usado como texto grego a edição de Heiberg-Stamatis, da Editora Teubner, de Leipzig, 1969-1977[20], sendo parecida à figura anteriormente proposta. Destacamos tal similitude e a demonstração em definitivo, conforme segue.

Figura 3.10 – Demonstração do Teorema de Pitágoras.



Fonte: Autor.

[19] EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 99.
[20] Ibid. p. 21.

Proposição 3.8 Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto (Proposição 47 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC[21] sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, <u>o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD</u>; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.

Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar. □

---

[21] Observar a maneira como Euclides faz a notação para paralelogramos tal como explicado na nota de rodapé nº 16.

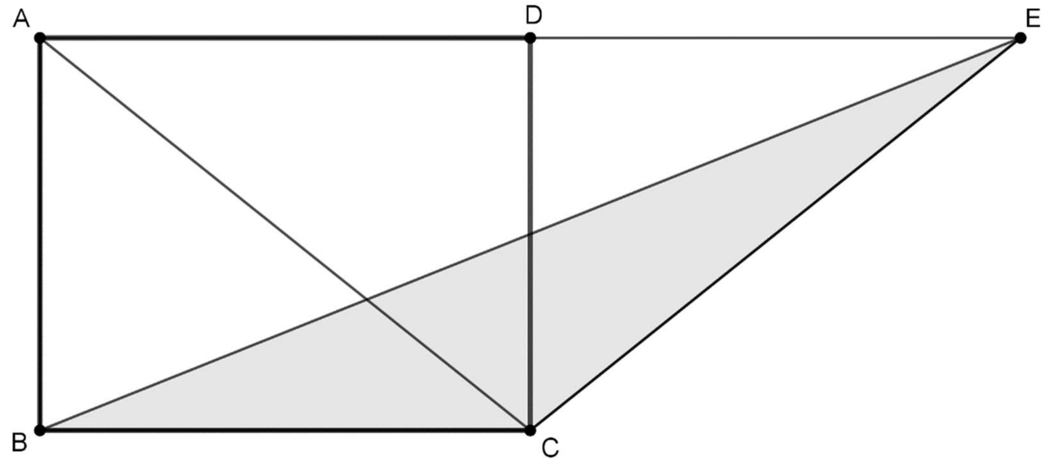
A que se notar algo de brilhante elegância presente no trecho que destacamos em sublinhado (<u>o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD</u>) e que fez com que Euclides desse máxima eficiência na demonstração da proposição que se refere ao que conhecemos hoje em dia como Teorema de Pitágoras. Sabiamente Euclides faz uso da Proposição 41 do livro I de Os Elementos, a qual na sequência vamos apreciá-la (veja também Figura 3.11).

Proposição 3.9 Caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo (Proposição 41 do livro I de *Os Elementos*).

Demonstração: Tenha, pois, o paralelogramo ABCD tanto a mesma base BC que o triângulo EBC quanto esteja nas mesmas paralelas BC, AE; digo que o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo BEC. Fique, pois, ligada a AC. Então, o triângulo ABC é igual ao triângulo EBC; pois, está tanto sobre a mesma base BC que ele quanto nas mesmas paralelas BC, AE. Mas o paralelogramo ABCD é o dobro do triângulo ABC; pois, a diagonal AC corta-o em dois; desse modo, o paralelogramo ABCD também é o dobro do triângulo EBC.

Portanto, caso um paralelogramo tenha tanto a mesma base que um triângulo quanto esteja nas mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo; o que era preciso provar. □

Figura 3.11 – Paralelogramo sendo o dobro de um triângulo.



Fonte: Autor.

3.2 A quadratura de figuras planas poligonais

Vamos ver como é que em *Os Elementos* Euclides resolve o problema de fazer a quadratura de qualquer região poligonal plana. Fazer a quadratura de uma figura é construir, e Euclides exige que isso seja feito usando somente régua e compasso, um quadrado igual (no significado grego) a essa figura. Em *Os Elementos* Euclides resolve completamente o problema para regiões poligonais planas, mas para regiões não poligonais, usando somente régua e compasso, é impossível fazer a quadratura do círculo, por exemplo.

Ao contrário, existem algumas Lúnulas[22], chamadas de Lúnulas de Hipócrates, algumas delas, é possível fazer a quadratura usando somente régua e compasso, mas não qualquer Lúnula e é interessante saber que somente na década de 70 é que se demonstrou, se conheceu exatamente, usando métodos sofisticados de Teoria de Galois, quais são as Lúnulas que se pode fazer a quadratura usando somente régua e compasso. Só recentemente, com resultados de álgebra muitos poderosos, é que se conseguiu classificar quais as Lúnulas que se pode quadrar, mas isso não vem ao caso neste trabalho, aqui vamos mostrar como é que Euclides faz a quadratura de figuras planas, regiões poligonais.

Dado um polígono, região poligonal, não necessariamente convexo, região poligonal plana qualquer, pede-se para construir um quadrado igual a esse polígono; como é que Euclides procede? Primeiro ele decompõe essa região em triângulos, que não se sobrepõem, nem falta algo, cobrindo totalmente, exatamente a figura; então se decompõe a figura em triângulos, por exemplo t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 e t_6, no nosso caso seis triângulos, mas poderia ter 7, 8, ..., n. Assim, o que Euclides faz é a quadratura de cada um desses triângulos.

Observe a seguinte pergunta: considerando transformado esses triângulos em quadrados, dado dois quadrados como é que se acha um quadrado igual a esses dois? Resposta: usando o Teorema de Pitágoras, pegando esses dois quadrados de que o lado deles sejam os catetos de um triângulo retângulo, então, pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado construído sobre a hipotenusa é igual (no entendimento grego, necessário frisar) à soma desses quadrados.

---

[22] Uma Lúnula também é conhecida como “lua” ou “meia-lua” e em geometria uma lúnula é uma figura geométrica limitada por dois arcos circulares de raios distintos.

Logo, se tivermos uma série de quadrados, pegam-se esses quadrados dois a dois e chega-se a um resultado, assim sucessivamente até o fim, que ter-se-á obtido o quadrado procurado, então se conseguirmos transformar cada triângulo daquele em um quadrado, teremos resolvido o problema via Teorema de Pitágoras.

Portanto, a única dificuldade, a única tarefa que teremos que fazer é transformar, quadrar um triângulo, não é à toa que Euclides dá tanta importância aos triângulos em *Os Elementos*, porque os triângulos são a base para muita coisa em geometria, uma das figuras essenciais para se trabalhar em geometria, juntamente com os quadriláteros, os triângulos têm destacada definição já no livro I de *Os Elementos*, vejamos a demonstração da quadratura de uma figura plana poligonal no tópico seguinte.

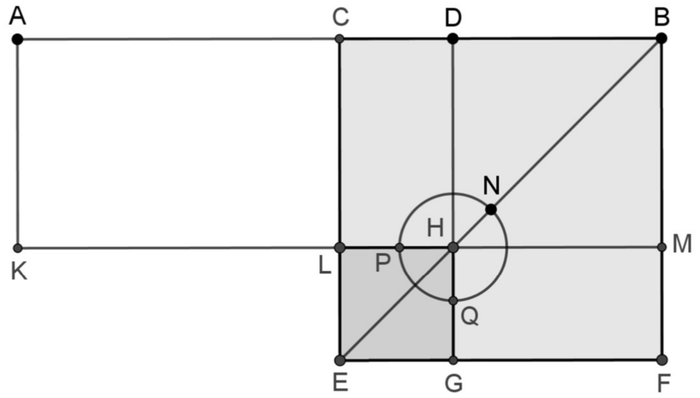
3.3 A álgebra geométrica grega

Então agora nosso objetivo é quadrar um triângulo, triângulo arbitrário, para isso vamos precisar de um resultado extremamente poderoso de *Os Elementos* que, durante algum tempo, no final do século 19 e primeira metade do século 20, foi considerado, pouco apreciado, como uma simples tradução geométrica de um resultado algébrico trivial, é a chamada leitura algébrica da geometria grega (álgebra geométrica dos gregos), a esse respeito BOYER nos ensina:

> [...] Ao passo que em nosso tempo as grandezas são representadas por letras que se entende representarem números, conhecidos ou não, sobre os quais operamos com as regras algorítmicas da álgebra, nos dias de Euclides as grandezas eram representadas como segmentos de reta, satisfazendo aos axiomas e teoremas da geometria. Diz-se às vezes que os gregos não possuíam uma álgebra, mas isto é evidentemente falso. Tinham o livro II de Os Elementos, que é uma álgebra geométrica servindo aos mesmos fins que nossa álgebra simbólica. Não há dúvida que a álgebra moderna facilita grandemente a manipulação de relações entre grandezas. Mas também é verdade que um geômetra grego conhecendo os quatorze teoremas de “álgebra” de Euclides era muito mais capaz de aplicar esses teoremas a questões práticas de mensuração do que um geômetra experimentado de hoje. A álgebra geométrica antiga não era um instrumento ideal, mas era eficaz. (BOYER, 1974, p. 79-80)

Diziam que os gregos pegaram a “álgebra” dos babilônios e a vestiram com roupagem geométrica e esse resultado extremamente poderoso a que nos referimos no parágrafo anterior trata-se da Proposição 5 do livro II de *Os Elementos* e é extremamente relevante, pois resolve problemas importantes, centrais, em geometria, quando se estuda cônicas, ela aparece, então tem uma importância que não deve ser subestimada, vejamos (conferir também Figura 3.12):

Figura 3.12 – Demonstração da proposição 5 do livro II de *Os Elementos*.



Fonte: Autor.

Proposição 3.10 Caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade (proposição 5 do livro II de *Os Elementos*).

Demonstração: Fique, pois, cortada alguma reta, a AB, por um lado, em iguais no C, e, por outro lado, em desiguais no D; digo que o retângulo contido pelas AD, DB, com o quadrado sobre a CD, é igual ao quadrado sobre a CB. Fique, pois, descrito, sobre a CB, o quadrado CEFB, e fique ligada a BE, e, por um lado, pelo D, fique traçada a DG paralela a qualquer uma das CE, BF, e, por outro lado, de novo, pelo H, fique traçada a KM paralela a qualquer uma das AB, EF, e, de novo, pelo A, fique traçada a AK paralela a qualquer uma das CL, BM. E, como o complemento CH é igual ao complemento HF, fique adicionado o DM comum; portanto, o CM todo é igual ao DF todo. Mas o CM é igual ao AL, porque também a AC é igual à CB; portanto, também o AL é igual ao DF. Fique adicionado o CH comum; portanto, o AH todo é igual ao gnômon[23] PNQ. Mas o AH é o pelas AD, DB; pois, a DH é igual à DB; portanto, o gnômon PNQ é igual ao pelas AD, DB. Fique adicionado o LG comum, que é igual ao sobre a CD; portanto, o gnômon PNQ, e o LG são iguais ao retângulo

[23] Definição 2 do livro II: E, de toda área paralelogrâmica, um dos paralelogramos, qualquer que seja, à volta da diagonal dela, com os dois complementos, seja chamado um gnômon. (EUCLIDES. Os elementos. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009, p. 135).

contido pelas AD, DB e o quadrado sobre a CD. Mas o gnômon PNQ e o LG, como um todo, são o quadrado CEFB, que é o sobre a CB; portanto, o retângulo contido pelas AD, DB, com o quadrado sobre a CD, é igual ao quadrado sobre a CB.

Portanto, caso uma linha reta seja cortada em iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade; o que era preciso provar. □

Linha, para Euclides, quer dizer ou reta ou segmento de reta, quando se ler um matemático de uma determinada época, temos que tentar compreender qual é a terminologia, quais eram os termos empregados, então quando Euclides diz uma linha ou era um segmento de reta ou uma reta, fica claro pelo contexto o que ele quer dizer. Interpretando-se algebricamente como foi feito durante muito tempo, chamando-se AB de a e DB de x, então CB é a/2, CD é a/2 – x, de modo que se traduz o seguinte: $[a/2 + (a/2 – x)].x + (a/2 - x)^2$; fazendo-se a conta, tem-se que é uma trivialidade, sendo exatamente $(a/2)^2$, o que retira todo o significado, toda a importância da proposição e ao espanto que não se percebeu durante muito tempo, na hora que assim fazem, a cegueira induzida por essa maneira de pensar, portanto, não se percebeu os usos que Euclides faz posteriormente dessa proposição que não tem nada a ver com esse fato algébrico trivial.

A demonstração é muito fácil; mais uma vez o importante é pegar a ideia da demonstração, porque tem toda tecnicalidade para mostrar que os segmentos são paralelos, são perpendiculares, mas isso é a camisa de força imposta pelo método dedutivo, que é a maneira que o matemático tem para ter certeza de que não cometeu erro; pensa-se, depois se concebe e transforma cuidadosamente para se policiar e verificar que não se cometeu nenhum erro; a essa maneira, Beppo Levi denomina como sendo a conduta lógica formal da exposição e nos traz elegantemente o passo a passo dessa conduta, vejamos:

> Uma das características de Os Elementos a que não tivemos que nos referir até agora é a conduta lógica formal da exposição, que lembra a teoria aristotélica do silogismo: divisão sistemática por proposições. Em cada proposição, primeiro a enunciação de uma tese em termos gerais, logo nova enunciação aplicada a uma figura particular. Finalmente, uma demonstração sobre a figura. A demonstração dividida em uma série de conclusões particulares em cadeia e terminando regularmente com a afirmação 'como queríamos demonstrar'. É bem possível que tal formalismo imitasse de perto algo da dialética sofística e não é nem um pouco absurdo pensar que essa forma fosse adotada por um discípulo de Sócrates, o fustigador de seus contemporâneos sofistas, pois o que Sócrates combate não é a forma, que

> até certo ponto ele também conserva em suas análises dialogadas, e sim o erro que se esconde em deduzir, por raciocínios formalmente exatos, a partir de premissas variáveis e enganosas (LEVI, 2008, p. 84-85).

Obtém-se uma figura formada pelos retângulos CLMB e HGFM que os gregos chamavam de Gnômon – um termo que aparece muito na geometria deles, então aquele retângulo original ADHK é igual a essa figura formada pelos retângulos CLMB e HGFM, ou seja, o retângulo original ADHK mais o quadrado LEGH é igual ao quadrado grande CEFB. Neste sentido, vamos fazer uma aplicação da Proposição 5 do livro II de *Os Elementos* e o que nos interessa agora é que esta proposição nos permite, em particular, transformar um triângulo em um quadrado. Bom, pegando um triângulo qualquer t, obviamente podemos pegar esse triângulo, duplicá-lo construindo um paralelogramo, transformando-o em um retângulo, sendo metade do retângulo de área, na terminologia grega, igual ao triângulo original.

Antes de continuarmos com esse raciocínio, apresentamos a seguir (na Figura 3.13) um resto de manuscrito[24], que está sobre pergaminho, do século 100 da era comum, 100 anos depois de cristo, o primeiro pedacinho, sendo o vestígio mais antigo que se tem de algo de *Os Elementos* de Euclides; é exatamente a Proposição 5 do livro II, extraordinário, tem por volta de 1900 anos de idade.

Figura 3.13 – Proposição 5 do livro II de *Os Elementos*, em torno de 100 E.C.

Fonte: *site* www.ndig.com.br, ver em referências.

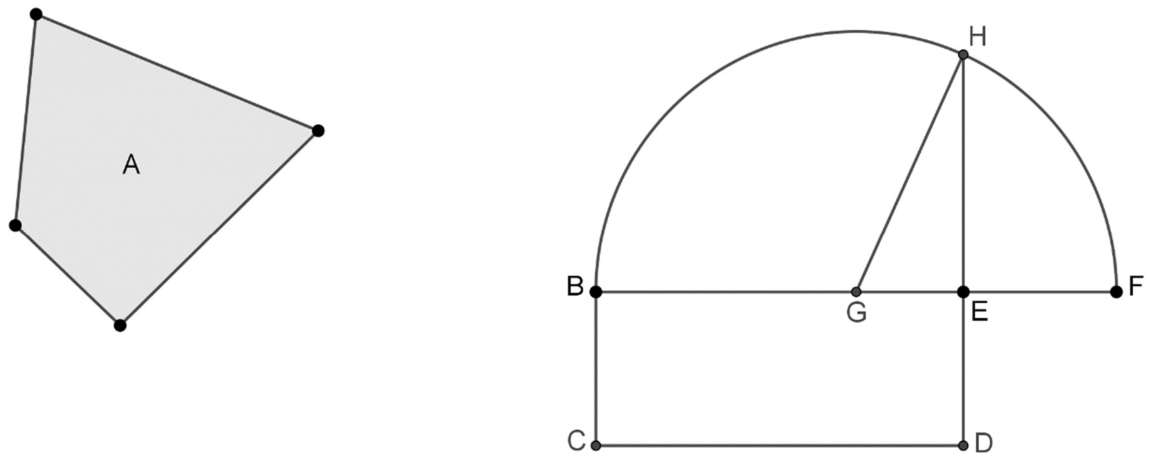
---

[24] Um fragmento de *Os Elementos* encontrado no final do século XIX entre os Papiros de Oxirrinco, datado de cerca de 100 d.C. O diagrama acompanha a Proposição 5 do Livro II de *Os Elementos*. Pela falta de espaços entre as palavras, e por estas serem partidas ao final das linhas, acredita-se que tenha sido escrito por alguém que não era um escriba profissional, possivelmente para uso pessoal. Atualmente se encontra no Museu de Arqueologia e Antropologia da Universidade da Pensilvânia.

Voltando ao assunto da quadratura de uma figura plana retilínea qualquer, partindo do desafio de quadrar um triângulo arbitrário, vamos trabalhar com a Proposição 14 do livro II de *Os Elementos*, a qual propõe, por fim, descrever um quadrado igual a uma figura poligonal plana (veja Figura 3.14).

Lembrando que queremos transformar um triângulo em um quadrado, sendo assim, chegamos a um retângulo, observando que, em particular, se esse retângulo for um quadrado, o problema estará terminado.

Figura 3.14 – Quadratura de uma figura plana poligonal.



Fonte: Autor.

Proposição 3.11 Construir um quadrado igual à retilínea dada (Proposição 14 do livro II de *Os Elementos*).

Demonstração: Seja a retilínea dada A; é preciso, então, construir um quadrado igual à retilínea A. Fique, pois, construído o paralelogramo retangular BD[25] igual à retilínea A; se, por um lado, de fato, a BE é igual à ED, seria produzido o que estava prescrito. Pois, foi construído o quadrado BD igual à retilínea A. Mas, se não, uma das BE, ED é maior. Seja maior a BE, e fique prolongada até o F, e fique posta a EF igual à ED, e fique cortada a BF em duas no G, e, com o centro G e com distância uma das GB, GF, fique descrito o semicírculo BHF, e fique prolongada a DE até o H, e fique ligada a GH. Como, de fato, a reta BF foi cortada, por um lado, em iguais no

[25] Observar a maneira como Euclides faz a notação para paralelogramos tal como explicado na nota de rodapé nº 16.

G, e, por outro lado, em desiguais no E, portanto, o retângulo contido pelas BE, EF, com o quadrado sobre a EG, é igual ao quadrado sobre a GF. Mas a GF é igual à GH; portanto, o pelas BE, EF, com o sobre a GE, é igual ao sobre a GH. Mas os quadrados sobre as HE, EG são iguais ao sobre a GH; portanto, o pelas BE, EF, com o sobre a GE, é igual aos sobre as HE, EG. Fique subtraído o quadrado sobre a GE comum; portanto, o retângulo contido pelas BE, EF restante é igual ao quadrado sobre a EH. Mas o pelas BE, EF é o BD; pois a EF é igual à ED; portanto, o paralelogramo BD é igual ao quadrado sobre a HE. Mas o BD é igual à retilínea A. Portanto, também a retilínea A é igual ao quadrado que será descrito sobre a EH.

Portanto, foi construído o quadrado, que será descrito sobre a EH, igual à retilínea dada A; o que era preciso fazer. □

Mais uma vez, hoje em dia, essa demonstração pode ser realizada usando propriedades métricas de um triângulo retângulo, porque o triângulo BFH é um triângulo retângulo inscrito, portanto, na semicircunferência em questão, logo EH é altura relativa à hipotenusa BF, então $(EH)^2$ é igual ao produto de BE e EF, lembrando que EF é igual a DE, tem-se, portanto, um resultado numérico e perde-se totalmente a visão da geometria que está por trás.

Percebemos que na demonstração deste resultado, foram usados dois fatos: um foi o Teorema de Pitágoras, que foi aplicado ao triângulo retângulo HEG; e outro foi a Proposição 5 do livro II de *Os Elementos*, que foi aplicada ao segmento BF, que foi dividido pelo seu ponto médio G e pelo ponto E, conforme a figura anterior, assim, finalizamos a transformação de uma figura poligonal plana qualquer em um quadrado, não com as interpretações mais modernas, algebrizando o tratamento dado por Euclides.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que este trabalho sobre uma análise histórica acerca de *Os Elementos* de Euclides poderá ser associado a ferramentas de resolução de exercícios usados na Educação Básica em diversos conceitos estudados. Nos Capítulos 1, 2 e 3 apresentamos definições, axiomas, noções comuns e demonstrações que fundamentaram nosso estudo para que pudéssemos usá-las nas aplicações propostas. Comparamos, em alguns casos, métodos de resolução de problemas usando teoremas e construções.

Nesse trabalho tivemos a oportunidade de entender que o desenvolvimento da geometria vem desde os nômades e principalmente egípcios (1650 a.C.) até a época atual passando por grandes atuantes nomes que contribuíram para o avanço da mesma, o que inclui com muito respeito um dos grandes personagens da nossa história da matemática, Euclides (330 a.C. a 275 a.C.).

Percebemos que anotações descritas pelos egípcios da época (Papiro de Rhind) contribuíram para o ensino de uma grande parte da geometria de hoje. Temas importantes ensinados nas escolas de ensino básico foram explicitados nesse trabalho, o que nos deu a oportunidade de entender a ideia primitiva de tais temas, como por exemplo "congruência", que fazendo sua expansão, nos possibilitou a chegar no tema principal, a equivalência de áreas.

É relevante ressaltar que este trabalho, principalmente para a nossa realidade brasileira, é de grande importância, pois fornece um material pouco explorado, tanto nas bibliografias usadas quanto no currículo trabalhado em sala de aula, muito embora seja exigência constante no arcabouço normativo educacional brasileiro.

Podemos concluir que *Os Elementos* de Euclides que apresentamos é uma obra que promove o processo de ensino e aprendizagem, quando focamos sob a perspectiva do desenvolvimento da estrutura cognitiva do aluno, observando sua realidade e da comunidade escolar, bem como os recursos disponíveis.

Devemos entender que o trabalho do professor atualmente deve ser complementado com técnicas mais atrativas que as usadas na época de Euclides. Era uma prática em *Os Elementos*, o uso de régua não-graduada e compasso nas demonstrações de seus teoremas e construções geométricas. Muito embora seja de amplo conhecimento na atualidade, como uma forma de facilitar o bom entendimento, tem-se a disponibilidade do *software* GeoGebra como ferramenta tecnológica educacional, o qual substitui os instrumentos propriamente ditos, deixando as construções mais dinâmicas, visíveis e atrativas para que juntos com os nossos alunos possamos construir o conhecimento e difundir o grau de importância da matemática na vida de cada um de nós.

O trabalho mostrou que os apontamentos presentes em *Os Elementos* são bastante diversos e abstratos e por muitas vezes mais trabalhosos e menos intuitivos que os recursos apropriados, além da dificuldade de trabalharmos com o tema, na Educação Básica, porém, usando de estratégias propostas, a exemplos, como vimos, a manipulação de figuras, a técnica de corte e cole, enfim, conseguiremos facilitar a construção do conhecimento.

Sugerimos como trabalhos futuros a exploração de outras abordagens matemáticas em *Os Elementos*, ainda que seja com o foco nos mesmos quesitos aqui trabalhados, pois entendemos que se trata de estudo de uma obra enriquecedora para o ensino da matemática, oportunizando o acesso a este conhecimento para os estudantes da educação básica, não mais para um seleto grupo, destacadamente da Educação consubstanciada pelos normativos como Superior, tornando-se uma importante ferramenta para auxiliar, por exemplo, na resolução de problemas e no desenvolvimento do raciocínio.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos:** Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

BARKER, S. F. **Filosofia da matemática**. 2^a. ed. Ohio: [s.n.], 1964.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC; SEB, 2018.

BULMER-THOMAS, I. **Euclid: life and works**. New York: Dictionary of scientific biography, 1956.

CASTRUCCI, B. **Estudo axiomático do plano euclidiano**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

Cronologia da história da matemática. Wikipédia, 2001. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Cronologia_da_hist%C3%B3ria_da_matem%C3%A1tica>. Acesso em: 24/07/2020.

EFÍMOV, N. V. **Geometria superior**. União Soviética: Antiga URSS: MIR, 1998. (Em espanhol).

Euclides. GeoCities, 2014. Disponível em: <www.geocities.ws/betociencia/euclides1.htm>. Acesso em: 20/06/2020.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

FILHO, D. C. D. M. **Convite à matemática**. 1a. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

GARBI, G. G. **A rainha das Ciências**: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. – 3 ed. rev. e ampl. – São Paulo: editora Livraria da Física, 2009.

Hégira. Wikipédia, 2001. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/H%C3%A9gira>. Acesso em: 22/10/2020.

História da matemática: cronologia das principais descobertas. Uol, 1996. Disponível em: <https://educacao.uol.com.br/disciplinas/matematica/historia-da-matematica-1-cronologia-das-principais-descobertas.htm>. Acesso em: 25/08/2020.

LEVI, B. **Lendo Euclides:** a matemática e a geometria Sob um Olhar Renovador. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.

MARANHÃO. Secretaria de Educação. **DOCUMENTO CURRICULAR DO TERRITÓRIO MARANHENSE**: para a educação infantil e o ensino fundamental. FGV Editora, 1ª edição – 2019.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

PARICIO, L. J. H. ***Sobre los principios fundamentales de la Geometría***. *Espanha: Universidad de la Rioja*, 2001.

REVISTA ELETRÔNICA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA NEGÓCIO DIGITAL. **Qual é o livro de ciência mais divulgado da história?** Ndig, 2009. Disponível em: <www.ndig.com.br/item/2011/07/qual--o-livro-de-cincia-mais-divulgado-da-histria>. Acesso em 20/06/2020.

ROBSON, E. ***Words and Pictures***: *New Light on Plimpton* 322. *American Mathematical Monthly*, 109, 2002, p. 105-120.

ROQUE, T; PITOMBEIRA J. B. **Tópicos de História da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

TOMEI, C. **Euclides – A Conquista do Espaço**; 1ª Edição – São Paulo: Odysseus Editora, 2003. (Imortais da Ciência/ Coordenação Marcelo Gleiser).

VAZ, B. R. L. **O Papel dos diagramas na geometria euclideana**. Rio de Janeiro: [s.n.], 2010.