Universidade Federal do Amapá
Programa de Mestrado
Profissional em Matemática- PROFMAT
Dissertação em mestrado

Ziro Diniz de Oliveira

Aprendizagem de geometria espacial por meio da manipulação de sólidos geométricos em uma escola no interior do Amapá

Macapá - AP

2020

Ziro Diniz de Oliveira

Aprendizagem de geometria espacial por meio da manipulação de sólidos geométricos em uma escola no interior do Amapá

Dissertação apresentada à Universidade Federal do Amapá- PROFMAT, como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática sob a orientação do Prof.: Dr.José Walter Cárdenas Sotil

Universidade Federal do Amapá

Pró retoria de pesquisa e pós graduação

Mestrado profissional em matemática

Orientador: Prof.: Dr.José Walter Cárdenas Sotil

Macapá - AP

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborada por Cristina Fernandes – CRB-2/1569

Oliveira, Ziro Diniz de.
Aprendizagem de geometria espacial por meio da manipulação de sólidos geométricos em uma escola no interior do Amapá. / Ziro Diniz de Oliveira; Orientador, José Walter Cárdenas Sotil. – Macapá, 2020.
74 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Geometria espacial. 2. Matemática. 3. Aprendizagem. 5. Ensino. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

516 O48a
CDD. 22 ed.

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá – UNIFAP foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de Ziro Diniz de Oliveira intitulada: “APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA ESPACIAL POR MEIO DA MANIPULAÇÃO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM UMA ESCOLA NO INTERIOR DO AMAPÁ”, após terem inquirido e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós Graduação.

Macapá, 16 de outubro de 2020.

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sótil

Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)

Prof. Dr. Carlos Alexandre Santana Oliveira

Avaliador externo (IFAP)

Prof. Dr. Guzman Eulalio Isla Chamilco

Avaliador interno (UNIFAP)

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por me conceder sabedoria, paciência , determinação e sobretudo saúde.

Aos meus familiares: Albanize Gerlane, Amanda Jéssica e Talles Felipe que tiveram paciência e perseverança com os meus momentos de estudo.

Aos professores: Simone de Almeida Delphim Leal, José Walter Cárdenas Sotil, Ítalo Bruno Mendes Duarte ,Gilberlândio de Jesus Dias e Márcio Aldo Lobato Bahia os quais contribuíram de maneira positiva nos ensinamentos que foram determinantes para a aprovação no Exame Nacional de Qualificação.

Aos meus colegas de turma, que compartilharam dos inúmeros desafios que enfrentamos e pela amizade que construímos nos momentos de aulas e pelos dias de estudos.

"Determinação, coragem e autoconfiança são fatores decisivos para o sucesso. Se estamos possuídos por uma inabalável determinação, devemos ser sempre humildes, recatados e despidos de orgulho."
(Dalai Lama)

Resumo

Este trabalho consiste em uma contribuição metodológica para o ensino e aprendizagem da geometria espacial a partir da manipulação de sólidos geométricos. Irei propor aqui planos de aula contendo atividades relacionados ao estudo dos sólidos geométricos com a utilização de materiais alternativos. Os sujeitos dessa pesquisa foram 7 alunos do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Nova Vida pertencente ao Município de Tartarugalzinho – AP. O contexto do trabalho inicia-se com uma abordagem histórica da geometria, em seguida vem a teoria de aprendizagem de Ausubel que dá um embasamento teórico desta pesquisa, que mostra que o conhecimento é significativo por definição, e é o produto significativo de um processo psicológico cognitivo que envolve a interação entre ideais significativa, ideias anteriores relevantes da estrutura cognitiva particular do aluno. Temos também uma abordagem sobre a importância da geometria no currículo escolar e o uso do material concreto na matemática. Para efeito dessa pesquisa foi realizado inicialmente uma pesquisa com professores do SOME (Sistema de Ensino Modular) sobre a utilização de material concreto e o uso dos livros didáticos em sala de aula, e feita uma análise dos dois principais livros didáticos utilizados pelos professores. Na pesquisa de campo foram realizadas 5 (cinco) atividades envolvendo materiais concretos trazidos pelos próprios alunos e também confeccionados com papel cartolina. A pesquisa, que é de cunho qualitativa, foi realizada no segundo semestre de 2019, e como resultado observou-se que os alunos compreenderam com mais facilidade os conteúdos estudados quando utilizados os materiais alternativos que foram construídos por eles próprios e que se mostraram bastante motivados e envolvidos no processo ensino aprendizagem.

Palavras-chave: Sólidos geométricos. Materiais concretos. Situações problema.

Abstract

This work consists of a methodological contribution to the teaching and learning of spatial geometry from the manipulation of geometric solids. I will propose here lesson plans containing activities related to the study of geometric solids using alternative materials. The subjects of this research were 7 students of the 3rd year of High School of the State School Nova Vida belonging to the Municipality of Tartarugalzinho - AP. The context of the work begins with a historical approach to geometry, followed by Ausubel's learning theory, which provides a theoretical basis for this research, which shows that knowledge is significant by definition, and is the significant product of a psychological process. cognitive which involves the interaction between meaningful ideals, previous relevant ideas of the student's particular cognitive structure. We also have an approach on the importance of geometry in the school curriculum and the use of concrete material in mathematics. For the purpose of this research, a survey was initially carried out with SOME (Modular Teaching System) teachers on the use of concrete material and the use of textbooks in the classroom, and an analysis was made of the two main textbooks used by teachers. In the field research, 5 (five) activities were carried out involving concrete materials brought by the students themselves and also made with cardboard paper. The research, which is of a qualitative nature, was carried out in the second semester of 2019, and as a result it was observed that students more easily understood the contents studied when using the alternative materials that were built by themselves and that were very motivated and involved in the teaching-learning process.

Keywords: Geometric solids. Concrete materials. Problem situations.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Durante quase 18 anos venho atuando como professor do SOME (Sistema de Ensino Modular) que foi criado pelo governo do Estado do Amapá com o intuito de levar à educação nas diversas localidades, superando as dificuldades, com escolas em até 650 km de distância da capital, deslocando contingentes de professores efetivos e devidamente graduados para atender as especificidades de distanciamento físico e geográfico e das dificuldades estruturais das zonas rurais. O SOME segundo o site[1] do governo possui na sua totalidade 461 professores dos quais 134 são do ensino médio e 327 do ensino fundamental II, sendo 21 professores de matemática do ensino médio e 45 professores de matemática do ensino fundamental e que juntos atendem, aproximadamente, 560 comunidades do Estado.

O ano letivo é dividido em 4 (quatro) módulos com duração de 50 (cinquenta) dias letivos, e cada intervalo de módulo alterna-se a atuação de cada docente entre localidades de fácil ou de difícil acesso, conforme sorteio realizado antes de cada módulo pela coordenação do ensino fundamental e médio do SOME.

Dificuldades diversas nos processos de aprendizagens em geral de matemática e, especificamente, de geometria foram encontradas no decorrer desses anos e através de uma pesquisa observou-se que muitos professores de matemática que atuam no Sistema de Ensino Modular não abordam o assunto de geometria como deveriam aplicar, se resume apenas a quadro, giz, livros didáticos, apresentando-se, muitas vezes, exemplos distantes da realidade do aluno.

Figura 1.1 – Pesquisa realizada pelo aplicativo Google Forms

Fonte: autor (2019)

1 <https://www.portal.ap.gov.br/noticia/0302/ensino-modular-professores-aprendem-alternativas-de-tratamento-de-agua>

Essa pesquisa foi realizada aplicando o seguinte questionamento: você sempre utiliza material concreto nas aulas de geometria espacial? Os seus alunos sempre utilizam o livro didático de matemática nas aulas de geometria espacial? Diante das respostas, observou-se que 69,4% não utilizam o material concreto nas suas aulas e apenas 54,1% dos alunos utilizam o livro didático nas aulas de geometria espacial.

De acordo com o resultado deste questionamento e diante das inúmeras dificuldades que os alunos apresentam nas aulas de geometria, este trabalho tem como principal objetivo propor atividades que envolva materiais manipuláveis (materiais concretos) nas aulas de geometria espacial, viabilizando sua aplicação em sala de aula, mais precisamente no 3º ano do ensino médio, buscando assim estratégias para amenizar as dificuldades que os alunos encontram ao se deparar com o estudo de geometria no espaço, mais especificamente, ao estudo de volumes e problemas relacionados.

Pois, segundo o ponto de vista de Duarte (2001), se pretendemos contribuir satisfatoriamente para que os alunos sejam sujeitos das transformações sociais e do uso da matemática nelas, é necessário que contribuamos para que eles desenvolvam um modo de pensar e agir que possibilite captar a realidade enquanto processo, conhecer as suas leis internas do desenvolvimento, para poder captar as possibilidades de transformação do real.

Quando se fala em aprendizagem temos várias variáveis envolvidas e uma delas diz respeito a forma de como o professor expõe o assunto para os seus alunos e quais objetivos pretendem ser alcançado.

Para os PCNEM as aulas de matemática não precisam ser somente expositivas não é necessariamente a única forma e meio que deve ser utilizada, ela é apenas um dos meios e deve ser o momento do diálogo, da criatividade onde poderão entrar outras atividades, pois há uma diversidade de recursos didáticos.

De acordo com PCNEM[2] (página 6):

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento mais amplos abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo.

Umas das competências que PCNs[3] apontam para os educadores matemáticos são: [...] incentivar atividades de enriquecimento cultural; [...] utilizar novas metodologias, estratégias e materiais de apoio.

Sendo assim ao trabalhar a geometria de forma contextualizada e utilizando material de apoio (materiais concretos) estaremos contribuindo de uma maneira toda especial de levar o aluno a vivenciar os conceitos espaciais através de experiências elementares. Como

[2] Parâmetro curriculares do ensino médio
[3] Parâmetros curriculares nacionais

exemplo, ao construir modelos de pirâmides com cartolina ou outro material, o aluno tem a oportunidade de observar e utilizar diversas relações espaciais, ao mesmo tempo em que, através da manipulação dos materiais concretos, é motivado à ação e tem estimulada a sua criatividade.

Para o PCNEM:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para a resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (página123)

De acordo com D´Ambrósio (1987,apud CREMA,1991) é importante que nos reportemos a outros modelos de conhecimento, da busca do saber e do fazer, busca essa que consideramos inerente à espécie. A partir do pressuposto de que o homem está sempre à procura de explicações e que sente um impulso para agir com a finalidade de manejar, se possível de transformar e mesmo de moldar a realidade, modelos alternativos de conhecimento se apresentam, obviamente em competição com aquele modelo que passou a ocupar uma posição dominante no mundo moderno.

1.1 Motivação

O interesse por essa temática está relacionado diretamente com a postura que venho adotando há vários anos no ensino de geometria, pelas dificuldades apresentadas pelos alunos na visualização de sólidos geométricos, até mesmo a dificuldade que os professores têm em tentar desenhá-lo na lousa, bem como a desmotivação que os alunos apresentam nas aulas de Geometria Espacial quando é apresentado de forma tradicional.

Segundo Bassanezi:

> Um dos grandes desafios deste século em que um panorama de alto desenvolvimento científico tecnológico está presente, é tornar o homem capaz de utilizar sua criatividade para gerar inovação e provocar mudanças no cenário em que está inserido. Isso implica uma postura sensível, dinâmica, responsável, independente e participativa. (2015, p. 14)

É importante refletir e procurar caminhos que nos possam auxiliar de maneira positiva quanto ao ensino da geometria e oportunizar os alunos a se sentirem parte ativa do próprio crescimento lógico. Na compreensão de D'Ambrósio:

> Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados. (D'Ambrósio,1998, pag. 79)

1.2 O problema de pesquisa e o objetivo

Diante de tudo isso vem à seguinte indagação: As contribuições de estudo utilizando a manipulação de sólidos geométricos no estudo da geometria espacial têm trazido resultados satisfatórios?

Temos então como objetivo geral verificar a ocorrência de aprendizagem significativa em cálculo de superfícies e volumes ao propor atividades envolvendo a manipulação de objetos alternativos como o material dourado e também a partir da construção de sólidos geométricos envolvendo cartolinas e embalagens diversas em forma de prismas. pirâmides e cilindros.

Em decorrências do objetivo geral mencionado estabeleceram-se os seguintes objetivos específicos:

- Associar objetos sólidos às suas diferentes formas de representação no plano bidimensional, como planificações e projeções.
- Construir sólidos geométricos a partir de materiais alternativos como cartolinas ou papel cartão.
- Identificar os poliedros, cilindros, cones e pirâmides.
- Resolver problemas envolvendo o volume de sólidos geométricos.

1.3 Hipótese

Temos por hipótese que no final deste trabalho haja um ganho expressivo no sentido de aprendizagem significativa.

1.4 Metodologia

Quanto à metodologia esta pesquisa tem finalidade básica estratégica, com objetivos descritivo, realizada pelo método hipotético dedutivo e com abordagem qualitativa e executado por meio de levantamento bibliográfico.

1.5 Organização

Este trabalho está organizado em sete capítulos. O primeiro corresponde a esta introdução, onde foi discutido o tema de pesquisa, a justificativa, a problemática e o objetivo geral e os objetivos específicos, como também a metodologia e a organização do trabalho pesquisado.

No segundo capítulo vem a fundamentação teórica, que está dividida em quatro subitens: o primeiro item uma abordagem histórica da geometria, onde faremos um resumo dos principais fatos históricos relacionados com a geometria; no segundo item a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel ; no terceiro item a importância do estudo da geometria no currículo escolar; no quarto item daremos ênfase ao uso do material concreto na matemática.

Para o terceiro capítulo faremos uma abordagem dada pelos livros didáticos ao estudo de sólidos geométricos, um do 2º ano e outro do 3º ano que estão disponíveis nas bibliotecas das escolas que fazem parte do SOME, correspondente ao assunto de poliedros, mais especificamente, prismas.

No quarto capítulo vem os procedimentos metodológicos, onde é apresentado o método utilizado na pesquisa, bem como os instrumentos que fizeram parte da pesquisa.

Para o quinto capítulo temos a descrição das atividades de campo, onde é descritas as atividades propostas. Para o sexto capítulo vem a análise de pesquisa de campo, onde faremos uma análise das atividades aplicadas na pequisa. E para o sétimo capitulo temos as considerações finais e as referências bibliográficas.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo tem por intuito apresentar o referencial teórico que sustenta a pesquisa, e traz temas como uma abordagem histórica da geometria, a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel, a importância do estudo da geometria no currículo escolar e o uso do material concreto na matemática.

2.1 Uma abordagem histórica da geometria

Para esse tópico não temos como objetivo maior fazer todo o percurso histórico da geometria até os dias de hoje, pois até a sua própria origem é imprecisa. Porém, apresentaremos de forma resumida alguns fatos que serão de suma importância ao conhecimento geométrico. Os principais autores que embasaram este tópico foram Eves (1992), Boyer (2012), Zuin (1999) e alguns sites: Brasil e Escola, ebiografia.com.

Indiscutivelmente a geometria surgiu da necessidade do ser humano, que estaria relacionada ao plantio, as construções e movimento dos astros, como também ao cálculo de áreas, superfícies e volumes. A sua origem é um pouco duvidosa, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte da escrita, pois até o homem pré-histórico, ao observar o mundo a sua volta e começar a comparar formas e relacioná-las, a geometria se fez presente.

Segundo Boyer (1974) foi somente nos últimos seis milênios, numa carreira que pode ter coberto milhares de milênios, que o homem se mostrou capaz de por seus registros e pensamentos em forma de escrita.

> A história da geometria, como a de muitas outras matérias em desenvolvimento e mudança, compõe-se de dois fios entrelaçados. Um deles narra o desenvolvimento de seu conteúdo e o outro sua natureza mutável. Ninguém ignora que a geometria deve ter se iniciado provavelmente em tempos muito remotos na antiguidade, a partir de origens muito modestas, depois cresceu gradualmente até alcançar a dimensão enorme de hoje. (EVES, 1992, p.1)

O historiador grego Heródoto que viveu no século 5 a.C. credita aos egípcios o desenvolvimento da geometria, mas há muita evidência de que os babilônios, a civilização hindu e os chineses sabiam muito do que foi repassado aos egípcios. (Boyer,1974).

Garbi (2006), faz uma colocação interessante em relação ao início da Matemática, que está interligada com a geometria, para ele o início está relacionado diretamente com a Revolução Agrícola, mais ou menos a 9000 a.C., pois a partir do avanço da agricultura houve um aumento considerável da população e o homem por sua vez teve que se organizarse socialmente. Era necessário a princípio conhecer como funcionavam as estações do ano através de calendários e com isso venho o interesse na observação dos astros e o aprimoramento da percepção que diz respeito ao número.

De acordo com Eves (1992) Os mais antigos registros da atividade do homem no campo da geometria são algumas tábulas de argila cozida desenterradas na Mesopotâmia e que se acredita datarem, pelo menos em parte, do tempo dos sumérios, por volta do ano 3000 a.C. Outros suprimentos de tábulas vindos de períodos posteriores também foram encontrados, períodos estes que viveu o rei Hammurabi, na primeira dinastia babilônica, a época do rei Nabucodonosor II, no império neobabilônico e as eras persa e selêucida, que se seguiram.

Um exemplo de um problema que foi encontrado em uma dessas tabuinhas, que destacamos a seguir, encontram-se na coleção de British Museum no tablete BM 13901. O primeiro é o problema #1, traduzido usualmente da seguinte maneira[1]:

Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive 0,45. Qual é o lado?

Procedimento na resolução

1. Tome 1
2. Fracione 1 tomando a metade (que é igual a 0,30)
3. Multiplique 0,30 por 0,30 (que é igual a 0,15)
4. Some 0,15 a 0,45 (que é igual a 1)
5. 1 é raiz quadrada de 1
6. Subtraia os 0,30 de 1
7. 0,30 é o lado do quadrado

Os antigos babilônios utilizavam o sistema posicional sexagesimal, por isso 0,45 correspondia a

$$\frac{45}{60} = \frac{3}{4} \tag{2.1}$$

A leitura desse enunciado – com toda a limitação imposta pelo recorte que abstrai o restante da produção matemática e de outras produções culturais dessa época – suscita em nós uma questão: como se pode somar uma superfície e um lado (comprimento)? Que sentido teria isso?

[1] texto extraído da coleção PROFMAT - tópico da história da matemática pag.22.

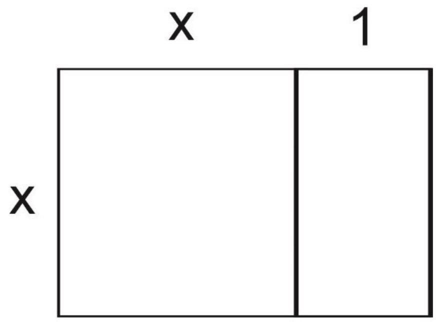
Reconstruímos o procedimento de resolução, adaptando-o inevitavelmente aos conhecimentos e abordagens atuais. O problema proposto poderia ser escrito como

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \tag{2.2}$$

Adaptando numa interpretação geométrica, que é o que realmente nos interessa, ficaria da seguinte forma:

Pensemos então num quadrado de lado x. Uma maneira de lhe adicionar (numericamente) um lado é compor com esse lado um retângulo cujo outro lado mede 1. Isso permite considerar uma superfície que mede x.1, a qual se acrescenta à área do quadrado. Tal soma produziria a seguinte figura:

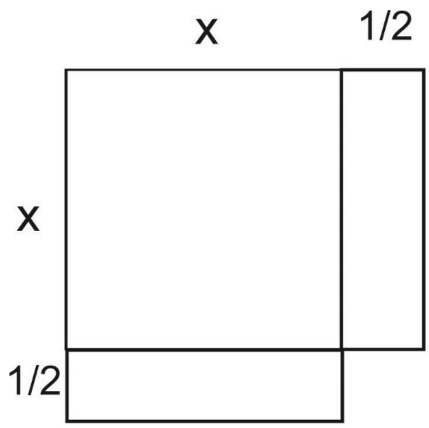
Figura 2.1 – Quadrado



Fonte: autor (2020)

Sabemos que $\frac{3}{4}$ é a superfície total da figura e devemos calcular o valor do lado x. Para isso, começa-se dividindo o retângulo em dois outros, de igual superfície, que serão rearranjados. A figura 2.1 se converte em outra, com área equivalente:

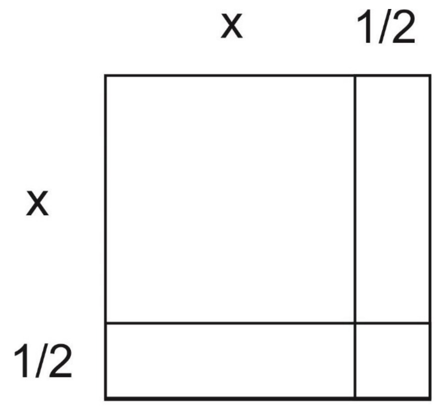
Figura 2.2 – Retângulo



Fonte: autor (2020)

Em seguida, a figura 2.2 é completada até se obter um quadrado (para isso se acrescenta um quadradinho de lado 1/2) .

Figura 2.3 – Imagem 3 da equação



Fonte: autor (2020)

A área da nova figura medirá

$$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \tag{2.3}$$

Portanto, seu lado medirá:

$\sqrt{1}$,

Mas o novo lado da figura é

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

Essa ideia de acrescentar, completar ou restaurar será encontrada séculos mais tarde, nos primeiros procedimentos explicitamente algébricos, na obra de Al-Kowarizmi. Portanto, deve ficar claro que essa linguagem simbólica não fazia parte do universo matemático dos babilônios.

Para muitos historiadores a Geometria, em seus primórdios, era uma ciência empírica, ou seja, experimental. As medições baseavam-se em algumas regras para se chegar a resultados aproximados.

Zuin (1999) comentou que nas civilizações egípcia e babilônica[2] são encontradas evidências de uma geometria desenvolvida através de um raciocínio indutivo, a partir de princípios empíricos. Ou seja, a observação, a experimentação, ensaios e erros propiciaram a essas civilizações a chegar a diversas conclusões e obter várias fórmulas de áreas e volumes. Eram conhecidas as áreas do retângulo, triângulo retângulo, trapézio retângulo, volumes de prismas retos de base trapezoidal. O perímetro da circunferência e a sua área, sendo calculada como três vezes o diâmetro, eram aproximadas, tomando-se $\alpha = 3$.

[2] Quando fazemos a referência à antiga Babilônia estamos incluindo os acadianos, assírios, caldeus, sumérios, bem como outros povos que viveram nessa região.

Para Eves (1992) as mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. fizeram com que o poder do Egito e da Babilônia diminuíssem. Novos povos passaram ao primeiro plano, e os desenvolvimentos posteriores da geometria foram passados aos gregos que por sua vez insistiram em que os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos.

Dentro de uma perspectiva histórica, os gregos foram os fundadores da geometria demonstrativa. A Grécia, no entanto, sempre nos foi colocado como berço da Geometria. Porém, não existe quase nenhuma fonte que nos permita fazer uma análise da geometria grega primitiva.

Para Eves (1992):

> Nossa principal fonte de informações referente à geometria grega primitiva é o chamado Sumário eudemiano de Proclus. Este sumário constitui várias páginas do Comentário sobre Euclides, Livro I, e é um breve esboço do desenvolvimento da geometria grega desde os tempos mais primitivos até Euclides. [...] a geometria grega parece ter começado essencialmente com o trabalho de Tales de Mileto.

Segundo o Sumário eudemiano, escrito por Proclus no século V d.C., Tales de Mileto – um dos "sete sábios da antiguidade" – teria sido o primeiro grego a desenvolver a Geometria em termos puramente abstratos, sendo considerado o fundador da geometria demonstrativa, ou seja, se utilizando de métodos dedutivos.

Para Garbi (2006) não se sabe em que circunstância Tales começou a interessar-se pela geometria, mas a tradição conta, que quando se encontrava no Egito, atendeu a um pedido do faraó que pediu-lhe para calcular a altura da pirâmide de Quéops. Tales, então colocou uma vara no solo e esperou até o momento em que sua sombra fosse igual ao seu comprimento real, neste momento pediu para que medissem a sombra da pirâmide obtendo assim a sua altura.

O que se escondia por detrás desta "mágica"? A sombra da vara está para a sombra da pirâmide, assim como o comprimento da vara está para o comprimento da pirâmide. Ele se baseia apenas na semelhança de dois triângulos, uma descoberta tão importante que continua sendo utilizada até os dias atuais.

Para Boyer (2012), Tales de Mileto (624-548 a.C. aproximadamente) foi o primeiro homem da história a quem foram atribuídas descobertas matemáticas específicas, apesar de que, um milênio antes, muitas teorias já eram conhecidas pelos babilônios, Tales teria dado as primeiras contribuições significativas para o desenvolvimento da geometria. Com ele nascia a abstração geométrica.

Segundo o Site Brasil escola[3] "Tales inaugurou na filosofia a corrente dos pensadores "físicos": filósofos que buscavam entender e explicar a origem da physis — palavra

[3] <https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/tales-mileto.htm>

grega traduzida como natureza, mas cujo significado engloba também a idéia de origem, movimento e transformação de todas as coisas".

Outra pessoa que também se destacou segundo Boyer (2012) foi Pitágoras que nasceu na Jônia mais precisamente na ilha de Samos (580-500 a.C., aproximadamente). Embora alguns relatos afirmem que Pitágoras foi discípulo de Tales, isto é improvável, devido a diferença de quase 50 anos entre suas idades.

Ainda segundo Boyer (2012), Pitágoras teve muitas informações adquiridas nas viagens que fez pelo Egito e Babilônia e possivelmente até a Índia. E quando voltou ao mundo grego, optou por ficar em Crotona, na costa sudeste do que agora é a Itália, que era chamada na época Magna Grécia. E lá fundou uma sociedade secreta que se assemelhava um pouco a um culto órfico, exceto por suas bases matemáticas e filosóficas e que depois ficou conhecida como escola pitagórica.

> Talvez a mais notável característica da ordem pitagórica fosse a confiança que mantinha no estudo da matemática e da filosofia como base moral para a conduta. [...] Dizia-se que o lema da escola pitagórica era "Tudo é número". Lembrando que os Babilônios tinham associado várias medidas numéricas às coisas que os cercavam. (BOYER,2012, p.56)

O próprio teorema de Pitágoras que está ligado ao seu nome veio, muito provavelmente, dos babilônios. E como justificativa para chamá-lo teorema de Pitágoras, se deu pela demonstração que foi realizada por ele. (BOYER,2012).

Muitos outros filósofos surgiram na Grécia antiga e que teve grande contribuição para o ensino da geometria. De acordo com Zuin (1999), depois de Tales e dos pitagóricos; Anaximandro, Arquitas, Leon, Teudius, Eudóxus, Teaetetus, Hipócrates, Hipias, Demócritus, Sócrates, Platão e Aristóteles, estão entre os mais representativos gregos que contribuíram, de alguma forma, para o desenvolvimento da Geometria. Com Hipócrates de Quios se estabelece que todo raciocínio deve ser provado. Platão desenvolveu um apurado raciocínio abstrato e impôs à Geometria um rigor matemático, sendo o primeiro a exigir demonstrações geométricas com a utilização de uma régua sem marcas e um compasso. Por volta de 300 a.C., Euclides[4] reuniu em alguns volumes todo o conhecimento de Geometria existente até aquela época. Estes faziam parte de uma coleção de 13 livros que se tornaram um dos maiores best Sellers de que se tem notícia: "Os Elementos". A obra se constituía uma sequência de proposições lógicas e simples, na qual encontra-se uma cadeia dedutiva única de 456 proposições, sendo abordadas a geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. O trabalho de Euclides influenciou as demais ciências e, com ele, o mundo passou a ser outro.

Arquimedes, nascido em Siracusa[5] , que viveu no século III a.C., também, foi um filósofo Grego que teve grande participação no desenvolvimento da geometria. Segundo Boyer:

[4] Euclides foi professor e diretor do Museum, escola de Alexandria
[5] Cidade de Siracusa, onde atualmente é a Itália.

> Arquimedes pode bem ser chamado de pai da física-matemática, não só por seu Sobre o equilíbrio de planos como também por outro tratado, em dois volumes, sobre corpos flutuantes. [...] Todo sólido mais leve que um fluido, se colocado nele, ficará imerso o suficiente para que o peso do sólido seja igual ao do fluido deslocado. (BOYER,2012, p.100)

Para Garbi (2006), Arquimedes foi considerado o maior gênio da Antiguidade pelas contribuições realizadas nos campos da Matemática e da Física e integra-se ao rol dos três maiores matemáticos de todos os tempos, juntamente com Isaac Newton (1642 – 1727) e Carl Friedrich Gass (1777 – 1855).

Em seu tratado sobre a Medida do Círculo, Boyer (2012) comenta que Arquimedes demonstrou de maneira iterativa o cálculo aproximado da razão da circunferência para o diâmetro de um círculo, começando com um hexágono regular inscrito e um hexágono circunscrito, ele calculou os perímetros de polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados, até chegar a noventa e seis lados. Como resultado de seus cálculos, obteve uma aproximação para π da forma:

$$3 \cdot \frac{10}{71} < 3 \cdot \frac{10}{70} \tag{2.5}$$

ou seja,

$$3,1408 < \pi < 3,1428 \tag{2.6}$$

(compare o valor atual $\pi = 3,1415...$)

Bem mais tarde no ano de 1596, segundo o site Escola Brasil[6] , nasceu em Hale, província francesa, René Descartes que fez uma enorme inovação na Geometria. Conforme o site, Descartes publica Discurso do método no ano de 1637, e em 1641 publica outra importante obra intitulada Meditações metafísicas.

> Seu Método em La géométrie consiste, então, em partir de um problema geométrico, traduzi-lo em linguagem de equação algébrica, e depois, tendo simplificado ao máximo a equação, resolvê-la geometricamente, de modo semelhante ao que usava para equações quadráticas. (BOYER,2012, p.240)

É relevante as atribuições que Descartes prestou a geometria, pois segundo o site: ebiografia[7] , René Descartes realizou muitos trabalhos importantes na área da filosofia, ciências e matemática. Relacionou a álgebra com a geometria, fato que fez surgir a geometria analítica e o sistema de coordenadas, conhecido hoje como “Plano Cartesiano”.

[6] <https://brasilescola.uol.com.br/biografia/rene_descartes.htm>
[7] <https://www.ebiografia.com/rene_descartes/>

Figura 2.4 – Retrato René Descartes – Pintura de 1649, de Frans Hals, Museu do Louvre.

Fonte: brasilescola[8]

Para Boyer (2012) Cavalieri que foi discípulo de Galileu escreveu sobre muitos aspectos da matemática pura e aplicada, geometria, trigonometria e óptica. Desenvolveu um método para operar com indivisíveis no cálculo de áreas e volumes, tendo sido lembrado por um dos livros mais influentes do início do período moderno, Geometria indivisibilibus continuorum, publicado em 1635. O estilo geral e a ilusória plausibilidade do método dos indivisíveis são bem ilustrados em muitos livros de geometria no espaço como “o princípio de Cavalieri”:

> Sejam dois sólidos geométricos P1 e P2 e um plano α. Se qualquer plano β , paralelo a α, que intercepta um dos sólidos também intercepta o outro e determina nesses sólidos secções de mesma área, então os sólidos P1 e P2 têm volumes iguais. (PAIVA,2013, p.239)

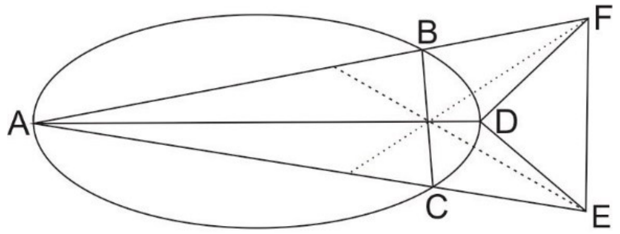
Em 1639 surge um notável matemático Gérard Desargues que publicou um trabalho sobre secções cônicas relacionado à ideia de projeção, que deu os primeiros passos da geometria projetiva, segundo Boyer (2012) o tratamento dado por Desargues às cônicas é muito belo, ele foi considerado o profeta da geometria projetiva, que por sua vez não teve o reconhecimento merecido na sua época.

[8] https://<www.brasilescola.uol.com.br/biografia/rene_descartes.htm>

O famoso teorema de Desargues:

> Se dois triângulos estão colocados de tal maneira que as retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os pontos de intersecção de pares de lados correspondentes são colineares, e reciprocamente. (BOYER,2012, p.252)

Figura 2.5 – Uma elipse interceptada com triângulos



Fonte: autor (2020)

Ainda segundo Boyer (2012), este teorema foi publicado inicialmente em 1648 pelo seu amigo Abraham Bosse (1611 -1678). Esse teorema tornou-se uma das proposições fundamentais da geometria projetiva. Que vale tanto em duas quanto em três dimensões.

O trabalho de Desargues sobre cônicas, foi retomado por Gaspard Monge (1746 – 1818) e posteriormente este assunto teve suas bases solidificadas com um notável trabalho de Poncelet (1788 – 1867), intitulado Traité dês Proprietés Projectives dês Figures, o qual foi publicado em 1822, segundo Garbi (2006).

Segundo o site só matemática[9] , neste trabalho Poncelet observou que certas propriedades das figuras se mantêm constantes, quando as figuras sofrem deformações por projeções. Ele também foi o criador da teoria da polaridade e do princípio da dualidade, base sobre a qual outros matemáticos como De Morgan, Whitehead e Russel desenvolveram posteriormente seus trabalhos.

No século XVII com o surgimento do cálculo, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Von Leibniz, surge uma aplicabilidade no campo da geometria e se chama geometria diferencial, segundo EVES (1992).

> Provavelmente é correto dizer que a geometria diferencial, pelo menos em sua roupagem moderna, começou no início do século XVIII, com as interaplicações do cálculo e da geometria analítica. [...] Mas o primeiro estímulo real à matéria, fora das situações planas, foi dado por Gaspard Monge. (EVES,1992, p.19)

O segundo momento da história da geometria diferencial se deu por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que aprimorou um método de estudo a geometria diferencial de curvas e superfícies por meio de representações paramétricas desses objetos, segundo EVES (1992).

9 <https://www.somatematica.com.br/biograf/poncelet.php>

O terceiro momento da história da geometria diferencial começou com Bernhard Riemann (1826 – 1866).

> Duas coisas eram necessárias para esse desenvolvimento: um aperfeiçoamento da notação e um procedimento que independesse do emprego de qualquer sistema de coordenadas em particular. [...] O cálculo tensorial foi concebido e desenvolvido nesse sentido. Geometria diferenciais generalizadas, conhecidas como geometrias riemannianas, foram intensamente exploradas. (EVES,1992, p.19)

Conforme o Site Brasil Escola[10], Felix Christian Klein foi um importante geômetra alemão que nasceu em Düsseldorf e foi formado na Universidade de Bonn, ensinou em Erlangen (1872-1875), Munique (1875-1880), Leipzig (1880-1886) e Göttingen (1886-1913). e trabalhou essencialmente em geometria não euclidiana, teoria das funções, desenvolvendo as ideias de Bernhard Riemane, módulos elípticos e funções.

No fim do século XIX, o matemático alemão David Hilbert escreveu um livro - "Fundamentos de Geometria" – em que colocou sobre bases rigorosas e modernas a Geometria. A partir do seu trabalho houve grandes progressos nesta área e, hoje em dia, usam-se diferentes métodos para resolver problemas também variados e interessantes.

Para além destes, outros autores nos séculos XVIII, XIX e XX, tiveram contribuições extremamente importantes na evolução da Geometria, tais como:

1. Gauss, lubachevskii e Boyai (Geometria hiperbólica)
2. Riemann (Geometria Diferencial)
3. A.Bernard Deacom e Paulus Gerdes (Geometria Antropológica)

Grande parte desse material teve um aproveitamento significativo na teoria da relatividade e em outras partes da física moderna , segundo EVES (1992).

Hoje a geometria é classificada na Escola com os nomes de Geometria Plana, Geometria Métrica Espacial, que faz parte do nosso estudo, e a Geometria Analítica.

Podemos observar que foram muitas contribuições de matemáticos e pessoas comprometidas ao desenvolvimento da matemática em geral, facilitando bastante a vida do homem. O conhecimento do caminho histórico da Geometria que acabamos de ver é fundamental na aprendizagem da geometria por parte dos alunos e instigá-los a ver a realidade onde tudo começou é importante, pois, conhecer a história da disciplina que está sendo estudada resolve inicialmente aquela pergunta que muitas vezes o aluno faz: " De onde veio isso?" . Como diz Neto (1998) " é preciso conhecer a gênese, o desenvolvimento, como ele se forma e como é instrumento de poder".

[10] <https://brasilescola.uol.com.br/biografia/felix-christian-klein.htm>

Pois, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. (PCN,2007, p.30)

2.2 Teoria da aprendizagem significativa

As dificuldades encontradas no ensino da geometria, especificamente, no Ensino Modular aqui no estado do Amapá, a maiores das vezes está relacionada com a ausência daqueles conteúdos anteriores, os pré-requisitos, que irão fazer parte do novo assunto. Portanto, é necessária uma reflexão do professor quanto a sua metodologia adotada para que o aluno possa aprender de forma significativa.

A compreensão da geometria, sua relação com o meio ambiente e a natureza e a criação de modelos geométricos aplicados constituem conhecimentos fundamentais para se aprofundar nesta disciplina a fim de alcançar conhecimentos significativos.

De acordo com esta perspectiva acredita-se que a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel venha possibilitar uma análise refletiva e analítica das dificuldades enfrentadas na aprendizagem da geometria.

David Ausubel (1918 – 2008), nascido em Nova York, nos Estados Unidos e filho de imigrantes judeus, foi o idealizador da Teoria da Aprendizagem Significativa. Para Ausubel (1963) a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, os novos conhecimentos que se adquirem relacionam-se com o conhecimento prévio que o aluno possui.

Quando David Ausubel formulou a sua teoria de aprendizagem, em 1963, as ideias behavioristas predominavam. Como foi o caso da teoria de aprendizagem de índole construtivista, mais conhecida como aprendizagem por descoberta, desenvolvida pelo psicólogo e pedagogo Jerome Brune, na década de 60. Enquanto que Ausubel defende que o principal processo de aprendizagem significativa é por recepção, não por descoberta. Segundo Teodoro[11]:

> Ausubel descreve pormenorizadamente as condições em que essa aprendizagem significativa por recepção pode ocorrer, dando especial importância ao papel da linguagem e da estrutura conceptual das matérias, bem como aos conhecimentos e competências que o estudante já possui. Este conhecimento prévio é, para Ausubel, o fator determinante do processo de aprendizagem. (Teodoro,2001)

[11] Vitor Duarte Teodoro – Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Campus da Caparica, dezembro de 2001.

Para Ausubel (1983), no processo de orientação para a aprendizagem, é de vital importância conhecer a estrutura cognitiva do aluno, não é apenas sobre conhecer a quantidade de informações que possui, mas quais são os conceitos e proposições que ele manipula, bem como seu grau de estabilidade. O aprendizado significativo ocorre quando novas informações "se conectam" a um conceito relevante ao qual Ausubel chama de conceito "subsunçor"[12] pré-existente na estrutura cognitiva, isso implica que o novo, ou seja, as novas ideias, conceitos ou as proposições relevantes são adequadamente claras e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e que funcionam com um ponto de "ancoragem" ao anterior.

Como exemplo, em geometria, se os conceitos básicos de geometria plana já existem na estrutura cognitiva do aluno, estes servirão como subsundidores (ex.: área de figura plana) de novos conhecimentos relacionados a geometria espacial. O processo de interação das novas informações com as informações existentes, produz uma nova modificação dos conceitos de subsunores. No exemplo dado, a ideia de área de figura plana servirá com uma "âncora" para novas informações sobre volume de um sólido geométrico.

Para Ausubel (1993), a característica mais importante da aprendizagem significativa é que ele produz uma interação entre o conhecimento mais relevante da estrutura cognitiva e as novas informações (não é uma associação simples), de forma que adquiram um significado e sejam integrados à estrutura cognitiva de maneira não arbitrária e substancial, favorecendo a diferenciação, evolução e estabilidade das subsunidores pré-existentes e, consequentemente, de todas as estruturas cognitivas.

> Quando a estrutura cognitiva do indivíduo não possui subsunçores diferenciados e estáveis para ancorar (subsumir) a nova informação, o indivíduo a armazenará de forma literal e não substantiva, ou seja, realizará aprendizagem mecânica. (LEMOS,2006, p.56)

Essa aprendizagem mecânica, às vezes, ocorre muito com nossos alunos, muitas vezes as informações são apreendidas sem a relação direta com o conceito relevante que deveria existir na estrutura cognitiva. Há apenas a preocupação de decorar as fórmulas, que por sua vez esquece logo após a avaliação. Pois, de acordo com Pelizzari:

> Quando o conteúdo escolar a ser aprendido não consegue ligar-se a algo já conhecido, ocorre o que Ausubel chama de aprendizagem mecânica, ou seja, quando as novas informações são aprendidas sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Assim, a pessoa decora fórmulas, leis, mas esquece após a avaliação. (2002, p.38)

No entanto, para Ausubel (1983), a aprendizagem mecânica pode ser necessária em alguns casos, por exemplo, na fase inicial de um novo assunto, quando não houver conceitos relevantes com o que pode interagir, em qualquer caso, a aprendizagem significativa deve

[12] A palavra "subsunçor" não existe em português; trata-se de uma tentativa de aportuguesar a palavra inglesa "subsumer". Seria mais ou menos equivalente a inseridor, racililador ou subordinador.

ser preferida, pois isso facilita a aquisição de significado, a retenção e a transferência do que foi apreendido. "Ele, portanto, sugere que o conhecimento inicial seja memorizado e, a partir desse conhecimento absorvido, seja paulatinamente estruturado o conhecimento sobre o tópico considerado" comenta Tavares (2004, p.57).

Segundo Ausubel (2003), aprender significativamente é ampliar e reconfigurar ideias existentes na estrutura mental e com isso ser capaz de relacionar e acessar conteúdo. Isto quer dizer que devemos sempre considerar a realidade trazida pelo aluno, porque ele não chega na escola de maneira totalmente vazia.

Portanto, considerar aquilo que o aluno tem e ampliar com as informações que o professor, que os livros ou que o contexto social pode fornecer, faz a junção e com isso chegaríamos a esses dois pressupostos importantes da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel que são: a ampliação e a reconfiguração da aprendizagem.

Então, pensando assim, o Ausubel vai para outro ponto importante do seu trabalho que é a importância de o aluno receber no início da aula ou da sua construção da aprendizagem uma questão a ser resolvida. A maioria das vezes vemos professores começando a aula ou textualizando ou começando elucidando, ou seja, esclarecendo. Nos dois pontos opostos, tanto quanto o professor textualiza ou no outro lado quando o professor de alguma maneira coloca explicações prévias, ele retira do aluno o direito de tentar ao seu modo aquilo que ele possui , ou seja, fazer descobertas e portanto ter dúvidas, palavra chave da teoria de Ausubel.

Quando o aluno tem dúvida a partir de um questionamento que foi dado a ele, e o mesmo tem motivação de ir atrás dessa dúvida, então há uma mobilidade na aprendizagem e é essa mobilidade que a partir de um contexto social que vai levar o aluno a outro ponto importante da Teoria do Ausubel.

Com isso, observa-se que o ideal seria que a aula não comece nem com uma explicação e nem com textualização, mais sim com uma pergunta, com um questionamento e a partir dele o aluno vai tentar chegar a uma tese, que pode ser verdadeira ou falsa.

Pois, para Ausubel (1983), a partir do momento que o aluno chega a sua tese, entraria neste momento a figura do professor trazendo informações para que o aluno com aquilo que ele conseguiu estruturar possa fazer o que chamamos de antítese ou de questionamento. Com isso o primeiro momento da ação pedagógica da aprendizagem significativa é o aluno ao seu modo de tentar elaborar o que para ele é pertinente e depois é que ele recebe as informações, conteúdos para fazer essa comparação e dessas duas pontes surgem o terceiro momento na aprendizagem significativa que é a primeira síntese onde o aluno chegaria com essas junções, então, mais um passo na teoria da aprendizagem significativa que é o estudo individualizado, também muito importante nessa teoria que difere de outra como o construtivismo, socio interacionismo e muitas outras teorias.

Há na Teoria da Aprendizagem Significativa um momento que o aluno tem que se debruçar sobre o próprio conteúdo, sobre a própria informação e ver para onde é que pode ir, fazendo novas ampliações ou novas reconfigurações.

Portanto, há um momento de estudo individualizado que a teoria da aprendizagem significativa condiciona na participação do aluno e a partir daí teríamos o quarto e último passo da teoria que seria justamente quando este aluno depois do que ele sabe e depois que ele recebe o estudo individualizado, ele possa finalmente ir de fato para a apresentação coletiva da sua estruturação intelectual.

A disposição do aluno em aprender e a qualidade do material a ser oferecido ao aluno são condições básicas exigidas para a aprendizagem significativa, segundo Ausubel (1963). Com isso, é preciso criar situações de ensino bastante significativa, que seja planejada pelo professor, que leve em consideração o contexto ao qual o aluno está inserido e o uso do objeto a ser estudado.

2.3 A importância do estudo da geometria no curriculo escolar

Para este tópico iremos enfatizar a importância do estudo da geometria no currículo escolar. Os principais autores que embasaram este tópico foram Pires (2000), Souza (2000), Smole (2008), Holfer (1981) e os PCNs .

Enfatizar a importância da geometria na vida de um cidadão comum é uma tarefa interessante, pois há várias informações e aplicações que aparecem ao nosso redor e que fazem parte de nosso cotidiano, são várias formas e ideias geométricas. A influência da Geometria no nosso dia-a-dia surge de inúmeras maneiras. Por exemplo, para saber exatamente a hora que devemos acordar para desligar a piscina que deixamos ligada à noite para enchê-la é extremamente fácil quando temos a noção básica de cálculo de volume e um pouco de conhecimento de regra de três, como também para saber quantos litros uma determinada piscina suporta tendo em mãos as suas dimensões.

Segundo Pires (2000), a geometria é considerada importante por pesquisadores e curriculistas porque, por meio dela, a criança desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações problema.

Para Souza (2000), o desenvolvimento da percepção espacial se faz necessário, levando o aluno orientar-se no espaço e ao mesmo tempo "juntar" mentalmente diferentes ângulos de observações. O aluno precisa desenvolver habilidades de observação, principalmente do espaço em três dimensões para conseguir representa-lo, interagir com ele e até mesmo transformá-lo, mesmo que apenas abstratamente.

Conforme os PCNEM[13] :

> [...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (1997, p.44)

Segundo Smole (2008), a geometria e o raciocínio espacial estão fortemente inter-relacionados. Nesse sentido, diferentes estudos sobre o ensino e a aprendizagem da matemática (Clements e Battista, 1997; Usiskin 1994; Hoffer 1981) têm afirmado sua importância no desenvolvimento do pensamento geométrico. Os mesmos estudos levam-nos a perceber que esse desenvolvimento não ocorre de forma rápida, e nem somente ao longo do ensino fundamental, cabendo ao ensino médio uma parte considerável dessa tarefa.

Em um estudo sobre o pensamento geométrico, Hoffer (1981) afirma que o pensamento geométrico está associado à aquisição de determinadas habilidades geométricas, entre as quais destaca cinco: visuais, verbais, de desenho, lógica e aplicadas. Para ele, as habilidades visuais estão relacionadas à capacidade de ler desenhos e esquemas, como também discriminar formas e visualizar as propriedades nelas contidas. As habilidades verbais envolvem a capacidade de expressar percepções, elaborar e discutir argumentos, justificativas e definições, descrever objetos geométricos e empregar o vocabulário geométrico. As habilidades de desenho contemplam a capacidade de expressar ideias por meio de desenhos e diagramas e para as habilidades lógicas relacionam-se à capacidade de analisar argumentos e definições, reconhecer argumentos válidos e não válidos. E finalmente, as habilidades aplicadas envolvem a capacidade de observar a geometria no mundo físico, apreciar e reconhecer a geometria em diferentes áreas.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (3º e 4º ciclos do ensino fundamental):

> O estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc. (1998, p.51)

Não se pode negar, portanto, a importância da geometria no ambiente escolar. Pois são vários atributos associados a geometria que está presente em diversas situações do nosso dia-a-dia. De um modo geral ela oportuniza o aluno na apreciação e valorização das formas existentes ao seu redor, relacionando as ideias geométricas com números e medições. Fainguelernt (1995) comenta de modo conveniente essa importância:

[13] Parâmetro Curriculares do Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

> A geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. (Fainguelernt,1995, p.46)

Para os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (2002), utilizar as formas geométricas no sentido de representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para a resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas.

Percebe-se, portanto, que a geometria sempre foi e continuará apresentando diversas utilidades, facilitando bastante a vida do homem, seja na arte, agricultura, construção civil, construção da cidadania, percepção visual do espaço onde vivemos, organização do pensamento lógico, ou até mesmo na resolução de problemas envolvendo cálculo de áreas e volumes. A quantidade de aplicação da geometria é imensa, por isso a sua inserção no currículo escolar é necessária e fundamental.

2.4 O uso do material concreto na matemática

Nesse tópico faremos uma abordagem acerca do uso do material concreto na matemática voltada para a geometria. Pois de acordo com a pesquisa realizada com os professores do SOME essa prática é pouco utilizada. Os principais autores que embasaram este tópico foram Lorenzato (2006), Passos (2006) ,Reys (1971) ,Sowell (1989) e outros.

Entende-se por material concreto nesse estudo todo tipo de instrumento que se presta ao uso e apoio do ensino/aprendizagem. Iremos utilizar em nosso trabalho sólidos geométricos em forma de embalagens de produtos usados no dia-a-dia, e também aqueles que serão construídos pelo próprio aluno com cartolinas e papeis cartões, que representem as formas geométricas que serão estudadas, como o prisma, cilindro e o cone.

Para Lorenzato (2006) o material concreto pode ser um excelente catalizador para o aluno construir o seu conhecimento matemático, enquanto Passos (2006) acredita que deve servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento da construção do conhecimento.

A utilização de material concreto na introdução dos conteúdos (geometria) ameniza o impacto inicial de um assunto que seria pouco acolhedor pelo aluno ao iniciá-lo de maneira tradicional[14] . Pois segundo Reys (1971), o uso de materiais concretos baseia-se na crença de que o aprendizado começa com a experiência, que o aprendizado sensorial constitui a base de outras formas de aprendizado e que o aprendizado é um processo que parte do concreto para o abstrato e requer participação ativa por parte do aluno.

[14] Tradicional : neste contexto considera-se maneira tradicional aquela em que o professor é tido como o detentor do conhecimento, e o aluno é visto com uma “tábula rasa” onde o conhecimento será depositado.

Ainda segundo Reys (1971) os materiais concretos utilizados em sala de aula aponta vários aspectos importantes como: eles ajudam a variar as atividades de aprendizado; fornece experiência em uma verdadeira situação de solução de problemas; fornece uma representação concreta de ideias concreta; fornecer dados sensoriais necessários para a formação de conceitos; dar aos alunos a oportunidade de descobrir conexões e formular generalizações; exigir participação ativa por parte do aluno; permitir diferentes maneiras de os alunos participarem; e aumentar a motivação, não apenas para a matemática, mas para o aprendizado em geral.

Sowell (1989) analisou sessenta estudos de pesquisa sobre a eficácia de manipulações de materiais concretos nas aulas e concluiu que o sucesso é maior e a atitude em relação à matemática é mais positiva quando são utilizados tais materiais concretos. No entanto, é quando eles são usados por um longo período que os resultados são significativos.

Os benefícios do uso do material concreto com os alunos são comprovados nas pesquisas do biólogo e psicólogo suíço Jean Piaget (1896-1980) quando ele desenvolveu a sua teoria de aprendizagem explicando como ocorre o processo da inteligência no ser humano. De acordo com sua teoria a criança tem um melhor desenvolvimento intelectual quando este for iniciado do concreto para o abstrato.

Segundo Passos (2006, apud PEREIRA, 2016), os professores, em sua maioria, costumam acreditar que o fato de utilizar os materiais didáticos em suas aulas ameniza as dificuldades de ensino pensando que o simples manuseio destes recursos acarretaria a compreensão dos conteúdos por parte dos estudantes.

Entretanto, para que as atividades envolvendo os materiais didáticos possam contribuir para a construção do conhecimento, é necessário que o professor execute de maneira orientada e dirigida e intervenha de forma compromissada e competente. Pois, segundo Kishimoto (2005) quando se lida com materiais concretos deve-se atentar a uma enorme quantidade de estruturas de alienação no saber que cercam estes objetos. É preciso que esses materiais sejam identificados com precisão, para que o processo de intervenção psicopedagógica se realize mais facilmente.

Os materiais concretos são usados adequadamente para dois propósitos. Primeiro eles permitem que professor e alunos tenham conversas fundamentadas acerca de determinado assunto. Seu uso fornece algo "concreto" sobre o qual o aluno e professor podem conversar. A natureza da conversa deve ser como pensar sobre os materiais, e os significados de várias ações com eles, como as propriedades e problemas que poderão se exemplificados através desses materiais. O segundo propósito que os materiais concretos fornecem é algo sobre o qual os alunos podem agir (Hiebert et al.,1991).

Essa conversa entre aluno e professor é para Ausubel (1983) um ponto fundamental que garante ao aluno a possibilidade de conhecer novas ideias, agregando em seus conhecimentos prévios novas informações.

Esta perspectiva de utilizar o material concreto no auxílio da aprendizagem, para os alunos ultrapassarem dificuldades e concretizarem alguns conceitos matemáticos, leva-nos a refletir sobre a pertinência e importância da realização de um estudo acerca da temática abordada neste trabalho que estamos desenvolvendo.

Segundo Canavarro (2003), vários pesquisadores defendem que os objetivos da educação matemática dependem decisivamente do trabalho, que o professor realiza na sala de aula, da interação que promove no grupo, das formas de trabalho que utiliza, dos papéis que atribui aos alunos e a si mesmo.

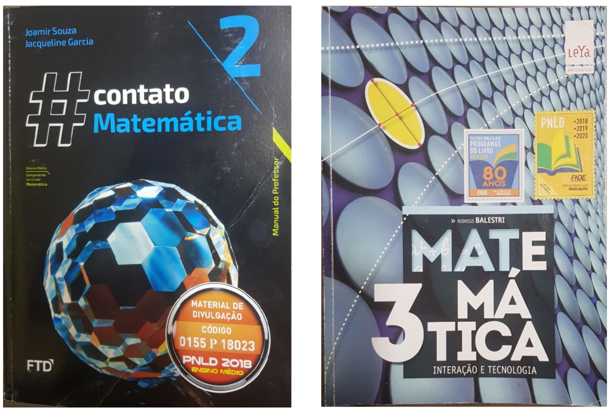
Diante desse contexto, deve-se trabalhar com o material concreto sempre que for possível, criando atividades e muitas possibilidades que o ambiente manipulativo oferece, fazendo com que os alunos, quando possível, construam os seus próprios materiais e cujas características ou propriedades dos mesmos sejam descobertas pelos próprios alunos, com isso teremos a oportunidade de proporcionar uma aprendizagem de qualidade e sobretudo significativa para o aluno.

3 ABORDAGEM DADA PELOS LIVROS DIDÁTICOS AO ESTUDO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

O Brasil tem adotado uma política de materiais didáticos que distribui livros para todos os estudantes da Educação Básica, de maneira a garantir que cada estudante tenha um livro de cada componente escolar. O Decreto nº 91.542 de 19/08/1985 tornou o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) uma política de Estado, no Brasil, Lima at el (2016).

Portanto, faremos para este capítulo uma análise de dois livros didáticos do Programa Nacional de Livros Didáticos que são utilizados, até o presente momento, pela maioria dos professores do ensino médio do SOME do Amapá em relação ao assunto de prismas na 3ª série do ensino médio. Serão analisados os livros: Contato Matemática 2 da editora FTD,2016 e Matemática Interação e Tecnologia 3 da editora Leya,2016.

Figura 3.1 – Livros didáticos



Fonte: autor (2020)

Partindo do pressuposto que o livro didático tem um papel importante no ensino e aprendizagem do conceito matemático para o aluno, o objetivo principal dessa análise é verificar a questão de ganho de aprendizado, agradabilidade, melhor entendimento e aproveitamento no estudo de área da superfície e volume de um prisma, como também mostrar como foram abordados os assuntos relacionados ao "PRISMA" da geometria espacial.

Quando se utiliza livros didáticos como recurso metodológico em sala de aula é preciso inicialmente conhecer a sua abordagem metodológica em relação aos conteúdos previstos para a respectiva aula, ou seja, o método utilizado para trabalhar determinados conceitos, a sua estrutura e possibilidade de trabalho.

Verificamos inicialmente que o livro Contato Matemática da editora FTD traz o conteúdo " PRISMAS" no oitavo capítulo, página 211, no livro destinado aos alunos do 2º ano do ensino médio, enquanto o livro Matemática Interação e Tecnologia 3, da editora Leya, vem no segundo capítulo, página 54, do livro destinado aos alunos do 3º ano do ensino médio. De acordo com o planejamento dos conteúdos relacionados para o ensino médio do SOME, o assunto de geometria espacial está inserido no 3º ano do ensino médio.

Então, temos aí a nossa primeira crítica em relação ao conteúdo de geometria espacial que deveria vir no livro do 3 ano do ensino médio, como aponta o livro Matemática Interação e Tecnologia 3 da editora Leya. Pois, a maioria das escolas públicas no Brasil traz o assunto de geometria espacial no último ano do ensino médio.

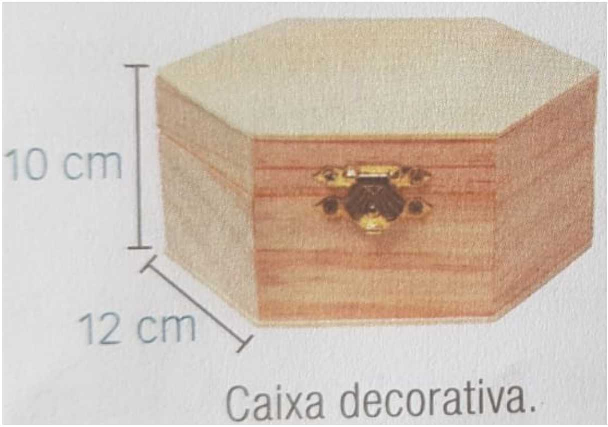
Nos dois livros analisados encontramos a presença de informações históricas, a respeito do volume do prisma, porém um pouco resumida que fala da contribuição do matemático Bonaventura Cavalieri (1598-1646), com o chamado Princípio de Cavalier.

Em sequência, foram analisados a introdução do conteúdo a ser estudado "PRISMAS". Na abordagem inicial para os dois livros consultados, verificamos que eles iniciam o assunto prisma dando exemplos de alguns objetos encontrados no nosso cotidiano como a caixa de sapato, caixa de madeira e o bloco de madeira. Depois vem a definição de prismas e suas características, que são trabalhados de maneira parecida uma com a outra, diferenciando apenas a maneira de redigir o contexto entre si.

Antes de iniciar o assunto de área de superfície de um prisma, o livro "Contato Matemática 2" propõe uma atividade com 10 questões envolvendo medidas e características do prisma, enquanto o segundo livro analisado já entra diretamente no assunto de área de superfície de um prisma.

Em relação ao conceito de área da superfície de um prisma, os dois livros faz uma abordagem bem parecida, com uma pequena diferença que muitas vezes devem-se levar em consideração no momento da exposição do assunto, que é exatamente o que Ausubel (1983) propõe que seria começar o assunto com uma pergunta, com um questionamento, e foi exatamente aí onde o segundo livro (Matemática Interação e Tecnologia 3) no início do conceito de área da superfície de um prisma fez, introduz o assunto com um questionamento de um problema com a seguinte situação: Um marceneiro produz e vende caixas decorativas na forma de prismas hexagonal regular, cujas dimensões estão indicadas na figura 3.2.

Figura 3.2 – Caixa decorativa



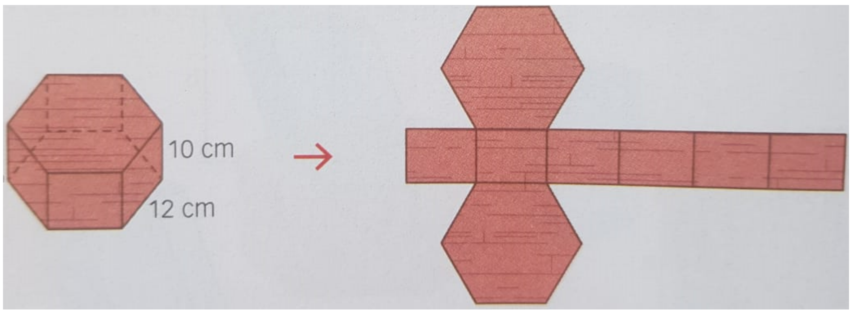
Fonte: Acervo da Editora Leya (2016)

Desprezando o desperdício e a espessura da madeira, quantos centímetros quadrados de madeira, no mínimo, são necessários para produzir esse tipo de caixa?

A resolução da questão venho logo em seguida:

Para responder a essa pergunta, devemos calcular a área da superfície total dessa caixa. É como se “desmontássemos “a caixa para calcular a área da reunião de todas as partes que a compõem. Observe a representação da planificação de um prisma de base hexagonal com essas dimensões na figura 3.3.

Figura 3.3 – Planificação da caixa decorativa



Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

Note que a superfície total desse prisma é composta pelas faces laterais e pelas bases. Desse modo, a área da superfície total (A_t) é igual à área da superfície lateral do prisma (A_l), formada pela reunião de todas as suas faces laterais, mais duas vezes a área da superfície da base (A_b).

Dizemos: área total (A_t), área lateral (A_l) e área da base (A_b) de um prisma.

$$A_t = A + 2.A_b. \tag{3.1}$$

No caso do prisma apresentado, a área total é dada pela área lateral, que corresponde a 6 vezes a área do retângulo que constitui sua face, mais duas vezes a área do hexágono regular que constitui sua base. Como a área do hexágono regular equivale à área de 6 triângulos equiláteros cujos lados possuem a mesma medida do lado do hexágono, temos:

$$A_t = A_l + 2.A_b = 6.(12.10) + 2.(6.\frac{12^2.\sqrt{3}}{4} = (720 + 435.\sqrt{3})cm^2$$

Portanto, para produzir esse tipo de caixa são necessários, no mínimo, $720 + 432.\sqrt{3}cm^2$
-ou, aproximadamente, 1468,25 cm$^2 de$ madeira.

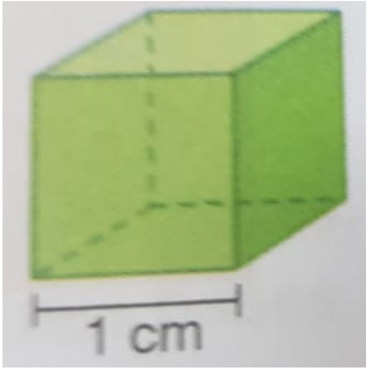
Os exercícios sobre área da superfície de um prisma são apresentados de maneira variadas tanto no primeiro livro quanto no segundo. No primeiro livro (Contato Matemática 2) foram propostas 8 questões, sendo que teve apenas um exemplo resolvido. Enquanto no segundo livro (Matemática Interação e Tecnologia 3) foram propostas 16 questões com dois exemplos resolvidos.

Dando continuidade à análise dos conteúdos dos dois livros didáticos, veremos agora a abordagem reservada para o assunto de volume de um prisma. Como falado anteriormente, o assunto de volume de um prisma teve uma pequena introdução na história de volume, sendo mencionado o matemático Bonaventura Cavalieri com o princípio de Cavalieri nos dois livros analisados.

O primeiro livro analisado (Contato Matemática 2), inicia da seguinte forma: assim como podemos medir a massa de um objeto, o comprimento de uma sala, a superfície de uma quadra esportiva etc., podemos também medir o espaço ocupado por um objeto ou uma forma geométrica espacial. Quando calculamos o espaço ocupado por um corpo, estamos determinando o seu volume.

Entre as unidades de medida de volume mais utilizadas estão o centímetro cúbico (cm^3), o decímetro cúbico (dm^3), e o metro cúbico (m^3). Um centímetro cúbico corresponde ao volume de um cubo com 1cm de aresta; e um metro cúbico, ao volume de um cubo com 1 cm de aresta.

Figura 3.4 – Um cubo

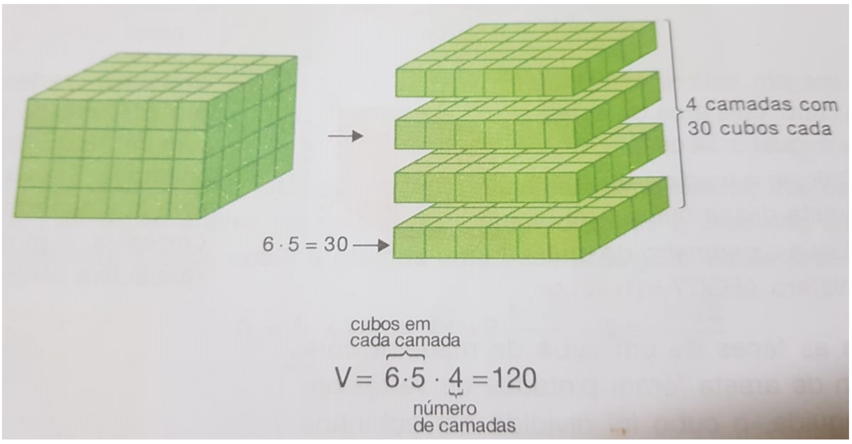


Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

Volume do paralelepípedo reto retângulo:

O paralelepípedo abaixo (figura 3.5) foi construído com cubos de 1cm de aresta, isto é, cubos com $1cm^3$ de volume. O volume V desse paralelepípedo é igual à soma dos volumes dos cubos com os quais ele é formado. Para calcularmos o número de cubos e, consequentemente, o volume do paralelepípedo, multiplicamos a quantidade de cubos em cada camada pelo número de camadas.

Figura 3.5 – Volume de um cubo



Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

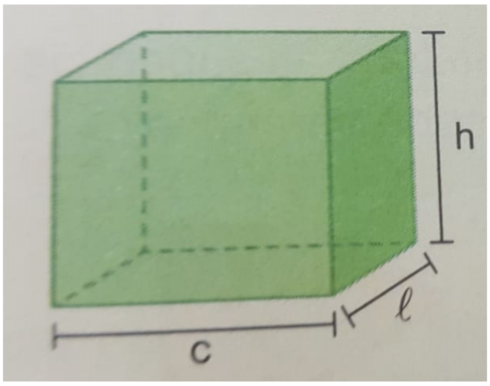
Assim, o volume do paralelepípedo é 120 cm^3.

O volume de um paralelepípedo reto retângulo é dado por

$$V = c \cdot l \cdot h \tag{3.2}$$

Com v representando o volume, c o comprimento, l a largura e h a altura.

Figura 3.6 – Cubo



Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

A área da base do paralelepípedo é dada por $A_b = c \cdot l$, com c representando o comprimento e l a largura. Dessa maneira, também podemos escrever a seguinte fórmula para o volume:

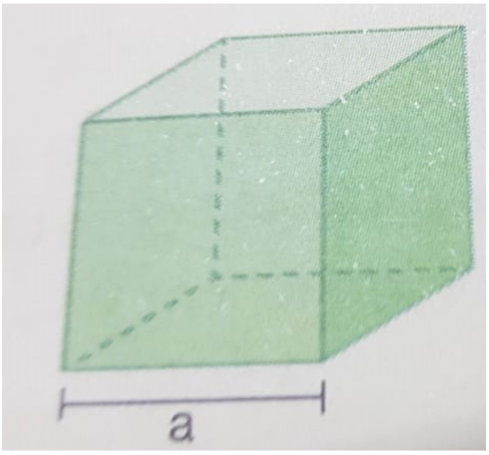
$$V = A_b \cdot h \tag{3.3}$$

Sendo A_b a área da base e h representando a altura. Para obter o volume de um cubo multiplicamos as medidas de suas dimensões. Porém, como elas são iguais, temos a fórmula:

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3. \tag{3.4}$$

Com (a) representando a aresta.

Figura 3.7 – Cubo de aresta a



Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

O segundo livro analisado (Matemática Interação e Tecnologia 3) apresenta o conceito de volume com uma questão problema relacionada com o cotidiano, introduzida da seguinte forma: Por mais limpa e cristalina que a água de uma piscina seja, com o tempo a tendência é que ocorra o surgimento e acúmulo de bactérias perigosas para os seres humanos. Para manter a água limpa, cristalina e livre desses seres microscópicos indesejáveis, é necessário realizar periodicamente a limpeza e o tratamento da água, aplicando produtos químicos como cloro e elevador de pH. Em todo caso, para saber a dosagem correta desses produtos, é necessário inicialmente conhecer o volume de água na piscina.

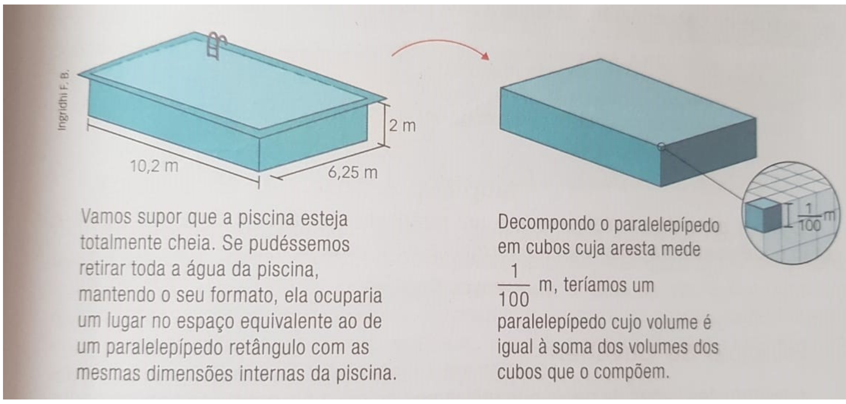
Há, também, uma informação importante no livro que estão relacionadas as doenças associadas ao uso da piscina sem o devido tratamento que são: infecções da pele como pé de atleta, impetigo e dermatite e infecções dos olhos como conjuntivite. Essas doenças têm na água o seu próprio veículo de disseminação, que pode ocorrer quando a água não passou por tratamento adequado e quando é contaminada por um banhista doente.

Podemos observar que o autor desse livro teve a preocupação de iniciar o assunto de volume de um prisma dando a importância necessária desse conteúdo com a iniciação de um problema encontrado no nosso cotidiano e apenas depois começou com o conceito de volume de um prisma que foi abordado da seguinte forma:

Vamos considerar uma piscina cujo interior lembre um paralelepípedo retângulo, e suas dimensões internas sejam 10,2m de comprimento, 6,25 m de largura e 2 m de profundidade. Logo, podemos dizer que a água na piscina, quando completamente cheia, ocupa o espaço equivalente ao de um paralelepípedo retângulo de dimensões 10,2m x 6,25m x 2m. Ao medir o espaço ocupado por um corpo, seja um objeto, uma forma geométrica espacial, entre outros, estamos determinando seu volume.

Nessa situação, para medir o volume de água na piscina, utilizamos o metro cúbico (m^3) como unidade, que corresponde ao volume de um cubo cuja aresta mede 1m. vamos decompor o paralelepípedo em cubos com aresta medindo $\frac{1}{100}m$ e volume igual a $\frac{1}{100^3}m^3$. Como mostra a figura 3.8 .

Figura 3.8 – Desenho de uma piscina



Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

O paralelepípedo foi decomposto em 1020 cubos no comprimento, 625 cubos na largura, e 200 cubos na altura, cada cubo com volume igual a $\frac{1}{100^3}m^3$. Calculando o volume desse paralelepípedo, temos:

$$V_{paralelepípedo} = 1020.625.200.\frac{1}{100^3} = \frac{1020}{100} \cdot \frac{625}{100} \cdot \frac{200}{100} = 10,2.6,25.2 = 127,5$$

Portanto, o volume do paralelepípedo é $127,5m^3$, que corresponde ao volume de água na piscina. Também podemos dizer que a capacidade interna dessa piscina é de $127,5m^3$; porém, como a unidade de medida de capacidade mais utilizada é o mililitro(ml) e o litro (l), utilizamos a seguinte relação de equivalência:

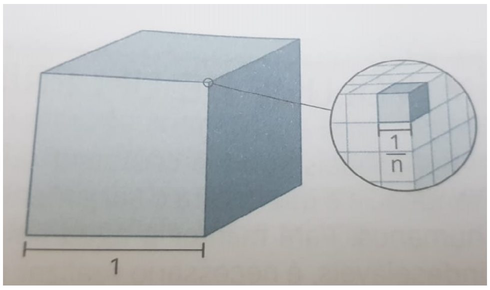
- $1cm^3 = 1mL$
- $1dm^3 = 1L$
- $1m^3 = 1000L$

Portanto, a capacidade interna dessa piscina é de 127 500 L de água.

Foi realizado em seguida uma generalização do conceito de volume, parecida como a feita pelo primeiro livro, a partir da decomposição do cujo, veja:

Podemos decompor um cubo (figura 15) cuja aresta mede 1u e o volume seja igual a 1 u.v., em n^3 cubinhos, cada um com aresta medindo $\frac{1}{n}$ u e volume igual a $\frac{1}{n^3}$ u.v. (unidade de volume), com n natural e diferente de zero.

Figura 3.9 – Cubo



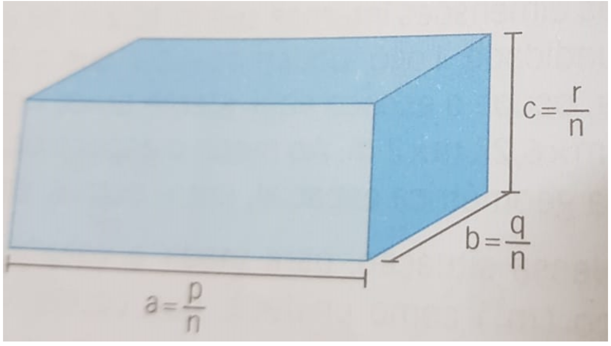
Fonte:Acervo da Editora Leya(2016)

Vamos considerar o paralelepípedo a seguir, em que a,b,e $\in Q$. Podemos escrever a, b e c como frações de mesmo denominador, isto é, $a = \frac{p}{n}$,$b = \frac{q}{n}$ e $c = \frac{r}{n}$.

Assim o paralelepípedo pode ser decomposto em p cubinhos no comprimento, q cubinhos na largura, e r cubinhos na altura, ou seja, pode ser decomposto em p.q.r cubinhos, cada um com aresta medindo $\frac{1}{n}$ u e volume igual a $\frac{1}{n^3}$ u.v. Portanto, o volume desse paralelepípedo (figura 3.10) é dado por:

$A = p \cdot q \cdot r \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{r}{n} = a \cdot b \cdot c.$

Figura 3.10 – Paralelepípedo



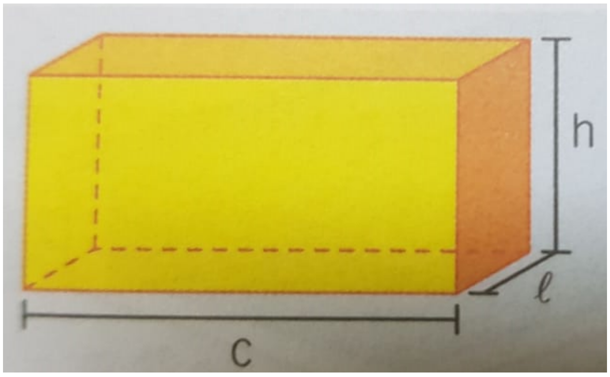
Fonte:Acervo da Editora Leya(2016)

Também é possível mostrar que para determinar o volume de um paralelepípedo cujas arestas são medidas por números reais positivos, calculamos o produto entre as medidas do comprimento, da largura e da altura do paralelepípedo.

O volume de um paralelepípedo retângulo é dado pelo produto entre as medidas do comprimento, da largura e da altura do paralelepípedo.

$V = c \cdot l \cdot h.$

Figura 3.11 – Paralelepípedo



Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

Como a base do paralelepípedo é um retângulo cuja área é dada por $A_b = c \cdot l$, então podemos escrever a seguinte fórmula para o volume:

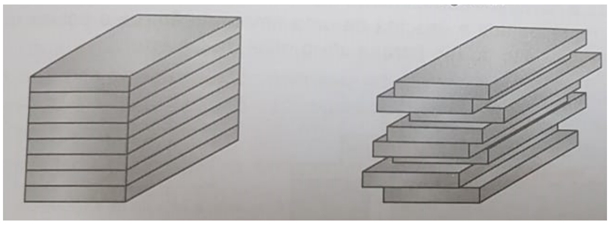
$V = c \cdot l \cdot h \rightarrow V = A_b \cdot h.$

Para finalizar o assunto de volume de um prisma, os dois livros fazem uma abordagem sobre o Princípio de Cavalieri e com isso vem a definição de volume de um prisma qualquer.

O primeiro livro (Contato Matemática 2) faz a seguinte abordagem sobre volume:

Considere algumas chapas metálicas em forma de paralelepípedo reto, empilhadas de duas maneiras diferentes, como mostram as figuras.

Figura 3.12 – Chapas metálicas empilhadas



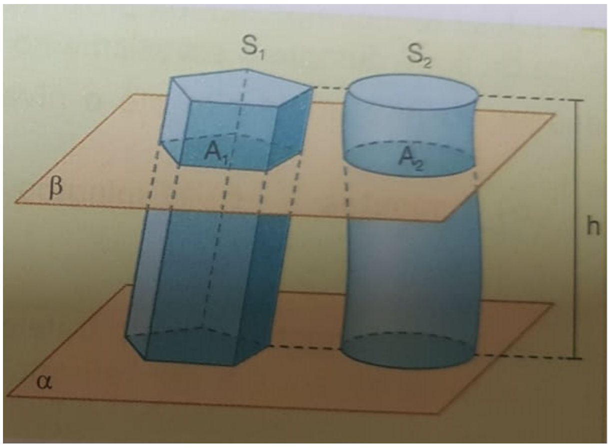
Fonte: Acervo da Editora FTD (2016)

Percebe-se que o volume de cada uma dessas pilhas é o mesmo, independentemente da maneira como as chapas são empilhadas.

A formalização dessa situação, que veremos a seguir, é conhecida como Princípio de Cavalieri.

Considere os sólidos S_1 e S_2, cuja altura h é a mesma, apoiados em um mesmo plano horizontal α , e um plano β , paralelo a α , que determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas A_1 e A_2. Nesse caso, se $A_1 = A_2$ para qualquer plano β, temos que o volume de S_1 é igual ao de S_2, ou seja, $V_{s_1} = V_{s_2}$.

Figura 3.13 – Dois sólidos com mesmo volume

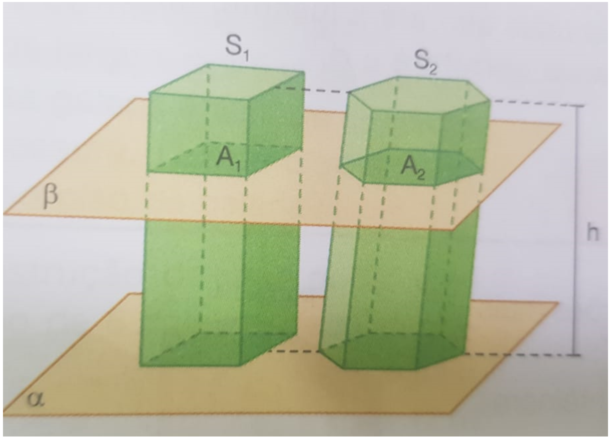


Fonte: Acervo da Editora FTD (2016)

Volume de um prisma qualquer

Agora, utilizando o Princípio de Cavalieri, vamos obter o volume de um prisma qualquer. Para isso, consideraremos um paralelepípedo reto retângulo (S_1) e um prisma qualquer (S_2), apoiados em um plano horizontal α, ambos de altura h e de bases com áreas iguais. Todo plano β, paralelo a α, determina em S_1 e S_2 duas regiões planas de áreas iguais.

Figura 3.14 – Dois sólidos com mesmo volume



Fonte: Acervo da Editora FTD (2016)

Pelo Princípio de Cavalieri, temos que os dois sólidos têm o mesmo volume: $V_{S_1} = V_{S_2}$.

Como estudamos anteriormente, o volume do paralelepípedo reto retângulo é dado por $V_{s_1} = A_b.h$. Assim, o volume do prisma também é dado por $V_{s_2} = A_b.h$

Portanto, podemos determinar o volume de um prisma qualquer multiplicando a área da base pela medida de sua altura.

Para o segundo livro analisado (Matemática Interação e Tecnologia 3), temos a seguinte abordagem sobre volume:

A maioria das folhas de papel que utilizamos no dia a dia possui tamanhos padronizados. O padrão mais comum é o A4, cujas dimensões são 21 cm por 29,7 cm e 0,1 mm de espessura.

Figura 3.15 – Pilha de papel

Fonte: Acervo da Editora FTD (2016)

Podemos dizer que o volume dessas pilhas é o mesmo, independentemente de como as folhas estão empilhadas. Nesse caso, temos:

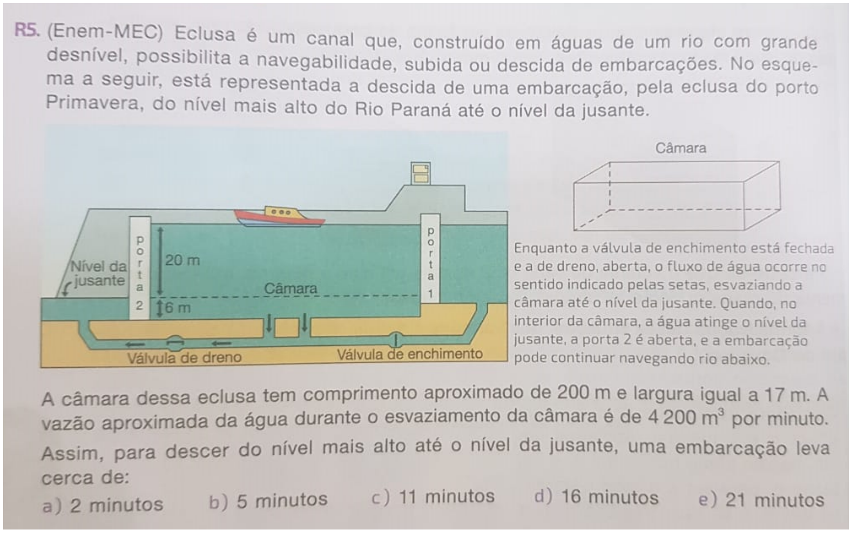
$$V = a \cdot b \cdot c = 21 \cdot 29,7 \cdot 15 = 9.355,5 \rightarrow V = 9.355,5cm^3$$

Note que a altura dessa pilha é 1500 . 0,1 = 150 → 150mm, que corresponde a 15 cm (1500 representa a quantidade de folhas e 0,1 a espessura).

Quanto a forma de mostrar o Princípio de Cavalieri e o Volume de um prisma qualquer, é praticamente a mesma que foi mostrado anteriormente.

Em relação as atividades, os dois livros trabalham muito bem no quesito de problemas do cotidiano como, por exemplo, a questão de atividade resolvida R5 do primeiro livro (Contato Matemática 2) como mostra a figura 3.16.

Figura 3.16 – Problema envolvendo a questão do ENEM.



R5. (Enem-MEC) Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do Rio Paraná até o nível da jusante.

A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4 200 m^3 por minuto. Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de:

a) 2 minutos b) 5 minutos c) 11 minutos d) 16 minutos e) 21 minutos

Fonte: Acervo da Editora FTD (2016)

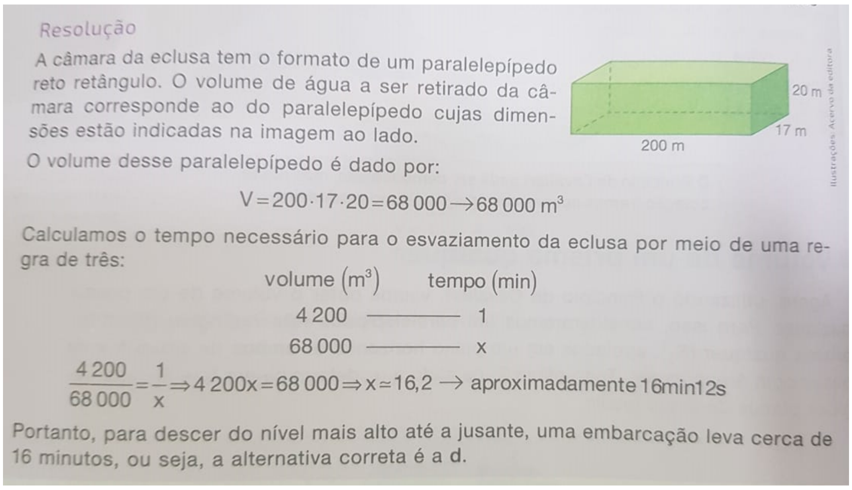
Nesta questão, inicialmente, deve-se obter o volume contido na câmara, que corresponde a de um paralelepípedo reto retângulo. E observa-se que a vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4.200m^3 por minuto, ou seja, em 1 minuto será retirado cerca de 4.200 m^3 de água.

Temos, então, uma questão que além de envolver o volume de um prisma vem também o assunto regra de três. Nesse tipo de questão se o aluno não estiver familiarizado com o assunto de regra de três, com certeza não irá conseguir resolver.

Então, mesmo que esteja dando um assunto de geometria é fundamental que haja um bom senso do professor para fazer uma revisão de regra de três, pois as dificuldades que encontramos com alunos do SOME aqui no estado do amapá está relacionado justamente com a falta de prerequesitos por parte do aluno.

A resolução da questão dada pelo livro está na figura 3.17.

Figura 3.17 – Resolução da questão 5R.


Resolução

A câmara da eclusa tem o formato de um paralelepípedo reto retângulo. O volume de água a ser retirado da câmara corresponde ao do paralelepípedo cujas dimensões estão indicadas na imagem ao lado.

O volume desse paralelepípedo é dado por:

$$V = 200 \cdot 17 \cdot 20 = 68\,000 \rightarrow 68\,000 \text{ m}^3$$

Calculamos o tempo necessário para o esvaziamento da eclusa por meio de uma regra de três:

volume (m³)	tempo (min)
4 200	1
68 000	x

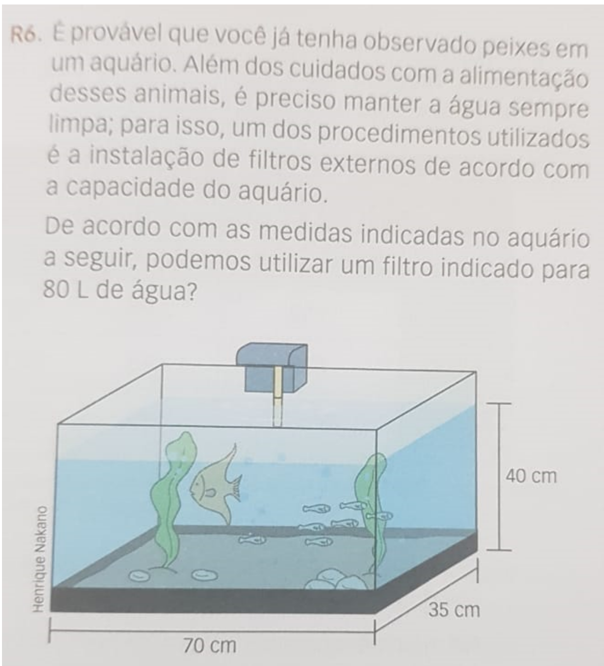
$$\frac{4\,200}{68\,000} = \frac{1}{x} \Rightarrow 4\,200x = 68\,000 \Rightarrow x \simeq 16{,}2 \rightarrow \text{aproximadamente } 16\text{min}12\text{s}$$

Portanto, para descer do nível mais alto até a jusante, uma embarcação leva cerca de 16 minutos, ou seja, a alternativa correta é a d.

Fonte:Acervo da Editora FTD (2016)

No segundo livro (Matemática Interação e Tecnologia 3), destacamos uma questão resolvida R6 bem interessante, como mostra a figura 23.

Figura 3.18 – Aquário


R6. É provável que você já tenha observado peixes em um aquário. Além dos cuidados com a alimentação desses animais, é preciso manter a água sempre limpa; para isso, um dos procedimentos utilizados é a instalação de filtros externos de acordo com a capacidade do aquário.

De acordo com as medidas indicadas no aquário a seguir, podemos utilizar um filtro indicado para 80 L de água?

Fonte:Acervo da Editora Leya (2016)

Observe que nesta atividade o que se propõe, inicialmente, é determinar o volume de água contida neste aquário, para depois chegar a resposta se era possível utilizar um filtro para 80 litros de água. Como as dimensões do aquário estão em cm e se pede o resultado em litros, então temos aí uma situação que envolve a transformação de unidades de medidas.

Portanto, é necessário que o aluno esteja apto a fazer a devida transformação de cm para m, com isso seria recomendável fazer sempre, que possível, uma revisão desse assunto. Pois, segundo Figueiredo (2013), os alunos do ensino médio apresentam certas dificuldades diante de transformação de unidade.

Temos, abaixo, a resolução feita pelo livro:

Inicialmente, determinamos o volume aproximado de água de acordo com as medidas indicadas.

$V = c \cdot l \cdot h \rightarrow V = 70 \cdot 35 \cdot 40 = 98000 \rightarrow V = 98000cm^3$

Como 1 litro corresponde a 1000 cm^3, segue que :

cm^3	L
1000	1
98000	x

$\frac{1000}{98000} = \frac{1}{x} \rightarrow 1000 \cdot x = 98000 \rightarrow x = \frac{98000}{1000} = 98 \rightarrow 98l$

Como há cerca de 98l de água e o filtro é indicado para 80l, não podemos utilizá-lo para essa quantidade de água.

Os dois livros didáticos analisados nos permitiram observar que a compreensão e apreensão do assunto "PRISMAS" são satisfatórias, pois com uma linguagem clara e objetiva, com exemplos voltados ao cotidiano do aluno permitem assim um maior aproveitamento na sua aprendizagem.

A escolha do livro didático pelo professor é extremamente importante para o desenvolvimento da aprendizagem do aluno, pois é através desse livro que teremos um apoio didático e pedagógico durante todo o decorrer do ano letivo. Tendo em mãos um livro que possua uma proposta pedagógica que privilegia a construção do conhecimento por parte do aluno é necessária e fundamental para se ter um retorno daquilo que queremos realmente alcançar.

No entanto, não deve ser, em hipótese alguma, a única fonte de pesquisa, é preciso ter outros meios que auxiliem e que venham contribuir de forma positiva para uma aprendizagem duradoura e significativa. E é exatamente esse auxilio que iremos propor no próximo capítulo deste trabalho ao utilizar a manipulação de materiais concretos na construção do conhecimento por parte do aluno.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo iremos apresentar qual foi o método utilizado para a realização da nossa pesquisa, bem como os instrumentos utilizados na investigação.

4.1 Opções metodológicas

Pelo fato desta pesquisa estar fundamentada numa proposta de atividade de manipulação de materiais concretos e voltada para a melhoria do ensino de geometria espacial, mais precisamente, o estudo dos prismas, é que consideramos a sua abordagem como sendo qualitativa. Pois de acordo com Minayo (2001 apud GERHARDT,SILVEIRA 2009), a pesquisa qualitativa trabalha com o universo mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Como também para D'Ambrosio :

> [...] a pesquisa qualitativa é focalizada no indivíduo, com toda a sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural. O referencial teórico, que resulta de uma filosofia do pesquisador, é intrínseco ao processo. Naturalmente a interação pesquisador-pesquisado é fundamental e por isso essa modalidade é muitas vezes chamada pesquisa-ação. (1998, p.103)

E para George[1] (1959), na abordagem qualitativa o que se leva em consideração é a presença ou a ausência de uma dada característica de conteúdo ou de um conjunto de característica num determinado fragmento de mensagem.

Segundo D'Ambrósio (1998), a pesquisa qualitativa organiza-se em algumas etapas:

1. Formulação das questões a serem investigadas com base no referencial teórico do pesquisador;

2. Seleção de locais, sujeitos e objetos que constituirão o foco da investigação;

3. Identificação das relações entre esses elementos;

4. Definição de estratégias de coleção e análise de dados;

5. Coleção de dados sobre os elementos selecionados no item 2 e sobre as relações identificadas no item 3;

[1] A. L. George, «Quantitative and qualitative approaches to content analysis», em I. de Sola Pool, op. cit., 1959, pp. 7-32.

6. Análise desses dados e refinamento das questões formuladas no item 1 e da seleção proposta no item 2;

7. Redefinição de estratégias definidas no item 4;

8. Coleta e análise dos dados.

Como a problemática de pesquisa surgiu no contexto de sala de aula, onde verificou-se que os alunos apresentavam grandes dificuldades na aprendizagem da Geometria, como referido na introdução deste trabalho, então os procedimentos utilizados, com base no meu objeto de estudo, enquadram-se no método investigação-ação.

4.2 Situando o sujeito da pesquisa

Os experimentos desta pesquisa foram realizados numa turma de terceiro ano do ensino médio da Escola Estadual Nova Vida localizada na comunidade Nova Vida pertencente ao município de Tartarugalzinho – AP, estando localizada na Br 156 no km 136 margem esquerda, sentido Macapá à Tartarugalzinho. A turma é composta por 7 alunos, sendo os mesmos vindo de várias comunidades adjacentes, como Entre Rios, Água Viva, Linha A e Linha B. O período de realização desta pesquisa se deu no 3º modulo de 2019 que se prolongou do dia 26 ao dia 30 de agosto de 2019.

Quanto ao espaço físico, a escola tem apenas 5 salas de aulas, onde o espaço da sala comporta no máximo 20 alunos, a biblioteca fica no mesmo local onde é destinada a secretaria e diretoria. Há um espaço reservado para o refeitório e dois banheiros, além de uma dependência onde funciona a cozinha da escola. Não possui um espaço reservado para o atendimento educacional e nem espaço físico para a prática de Educação Física, sendo esta improvisada em um campo da comunidade local.

Nesta escola , como mostra a figura 4.1, funciona o ensino fundamental do 6º ano ao 9º ano e o ensino médio intercalados nos dois períodos, manhã e tarde. As turmas do 2º e 3º ano do ensino médio funcionam na parte da manhã, enquanto a do 1º ano na parte da tarde. Quanto aos alunos no geral são bastante participativos e assíduos, porém há muita dificuldade de aprendizagem em matemática, principalmente em geometria.

Figura 4.1 – Escola Estadual Nova Vida

Fonte:Autor (2019)

4.3 Proposta de ensino e atividades aplicadas

Os conteúdos trabalhados nesta pesquisa foram: planificação e montagem de poliedros, cálculos de superfície e volume de sólidos geométricos, mais especificamente, os prismas regulares e resoluções de problemas. Foram utilizados os seguintes materiais concretos: Embalagens em forma de poliedros trazidos pelos alunos; sólidos construídos a partir de sua planificação como o papel cartão e cartolina; material dourado.

4.3.1 Os sólidos geométricos

Sólidos geométricos são os objetos tridimensionais definidos no espaço. Que são divididos em poliedros e corpos redondos.

4.3.1.1 Poliedros

Poliedros são os sólidos geométricos que são limitados por superfícies planas poligonais, formados por três elementos básicos que são: vértices, arestas e faces.

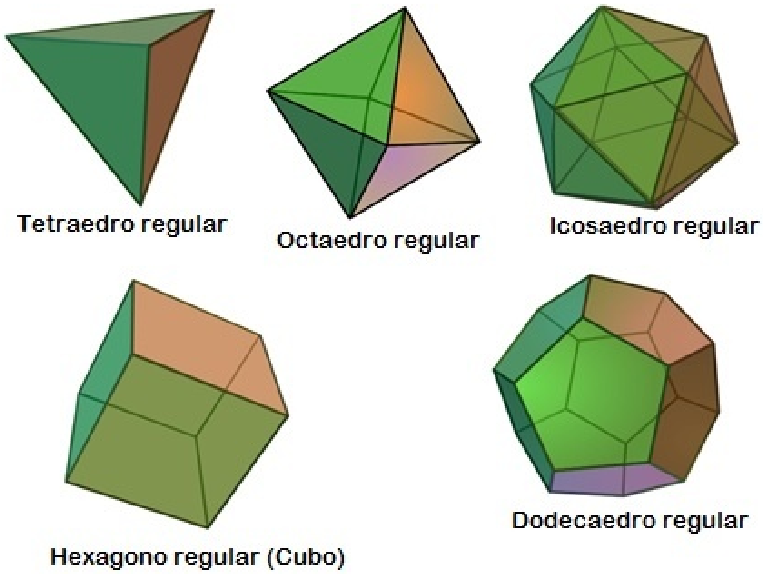
- Faces: são os polígonos que limitam os poliedros. Todo poliedro tem uma quantidade finita de faces.

- Vértices: é cada um dos pontos de interseção de 3 ou mais arestas. O vértice de cada face também é o vértice do poliedro.

- Aresta: é o nome que se dá a cada lado de uma face do poliedro. Cada aresta de um poliedro é comum a somente duas faces.

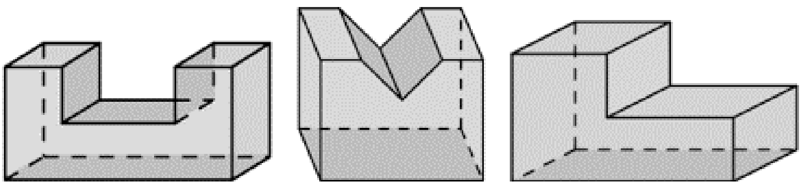
Quanto a sua classificação temos os poliedros convexos e não convexos, ao considerar qualquer uma das faces de um poliedro, se ele estiver no mesmo semiespaço da face, será chamado poliedro convexo, e caso essa condição não for satisfeita então será não convexo. Na figura 4.2, temos exemplos dos cinco poliedros regulares convexos[2] que existem (chamados poliedros de Platão) e de alguns não convexos (ver figura 4.3).

Figura 4.2 – Poliedros convexos regulares



Fonte: infoescola[3]

Figura 4.3 – Poliedros não convexos



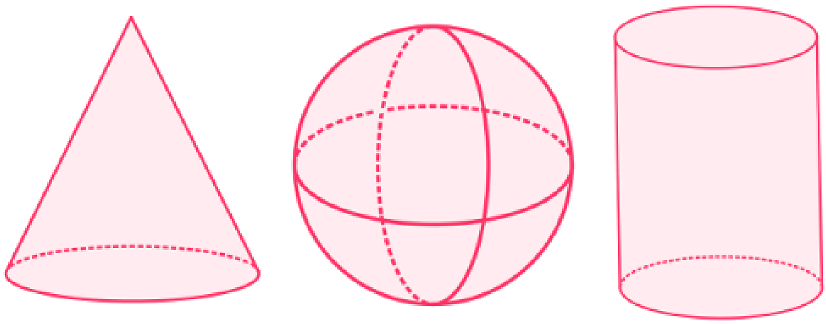
Fonte: reforcando matematica[4]

[2] Poliedros regulares convexo: quando suas faces são formadas por polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, têm o mesmo número de arestas convergindo para os seus vértices.
[3] https://<www.infoescola.com>
[4] https://<reforcandomatematica.blogspost.com>

4.3.1.2 Corpos redondos

Quanto aos corpos redondos são aqueles sólidos que possuem curvas em vez de alguma face e que, se colocados sobre uma superfície plana levemente inclinada, rolam. Na figura 4.4 temos exemplos de corpos redondos:

Figura 4.4 – Corpos redondos



Fonte: mundo educacao[5]

Como estamos dando prioridade aos estudos dos poliedros, então não estraremos em detalhes acerca dos corpos redondos.

4.3.2 Planificação dos poliedros

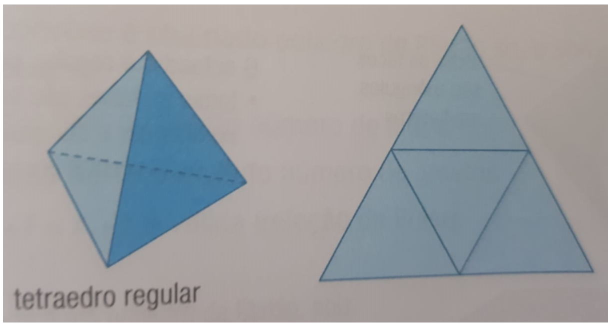
Todos os poliedros podem ser representados por uma planificação. Informalmente, planificar um poliedro consiste em estender a sua superfície em um plano, ou seja, fazer um "molde" para o sólido de modo que cada face fique ligada a pelo menos uma outra aresta.

Geralmente, podemos fazer uma ou mais planificações para a mesma figura, desde que os cortes sejam feitos pelas arestas e os polígonos das faces, no molde, estejam ligados pelos seus lados.

A planificação do tetraedro regular é apresentada na figura 4.5, do cubo na figura 4.6 e do octaedro regular na figura 4.7, do dodecaedro e icosaedro regular na figura 4.8.

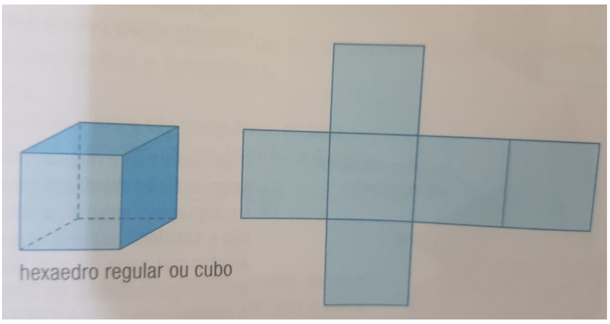
[5] https://<mundoeducacao.bol.uol.com.br/>

Figura 4.5 – Planificação do tetraedro regular



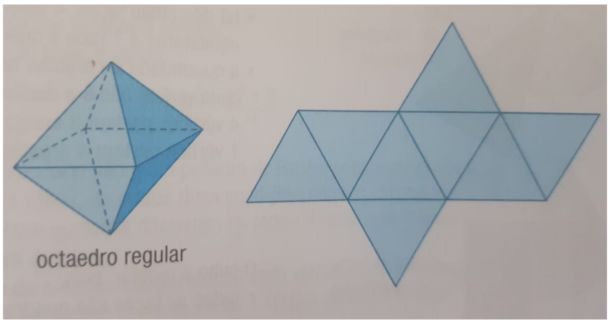
Fonte: Acervo da Editora Leya (2016)

Figura 4.6 – Planificação do cubo



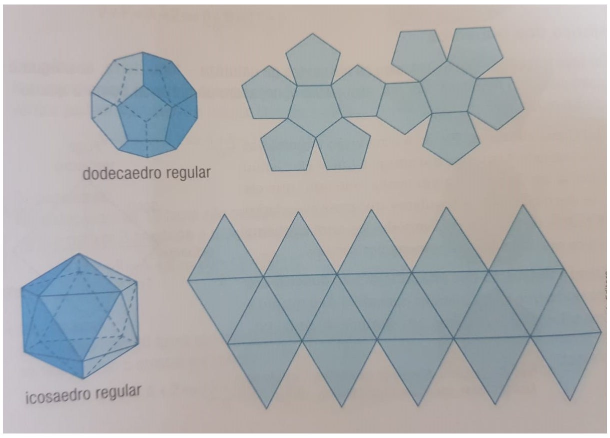
Fonte: Acervo da Editora Leya (2016)

Figura 4.7 – Octoedro regular



Fonte: Acervo da Editora Leya (2016)

Figura 4.8 – Planificação do dodecaedro e icosaedro regular



Fonte: Acervo da Editora Leya (2016)

4.3.3 As atividade de campo

Durante todo o período estabelecido para a execução da pesquisa foram desenvolvidas atividades que envolvessem a exploração de materiais concretos, de forma a dar sentido a investigação proposta. O período da execução da pesquisa se deu nos dias 26 a 30 de agosto de 2019.

Inicialmente foram explicados aos alunos os respectivos objetivos da pesquisa que seriam desenvolvidos com eles durante o período estabelecido. Foi proposto aos alunos que trouxessem de casa embalagens de produtos que tivesse alguma semelhança com os sólidos geométricos.

Foram realizadas 5 atividades, a primeira correspondente a exploração e identificação dos elementos de cada sólido geométrico representado pela embalagem trazida pelos alunos. A segunda atividade envolve a construção de sólidos geométricos, utilizando a planificação de algumas embalagens. Na terceira atividade cada aluno construiu um poliedro e uma pirâmide com cartolinas. Para a quarta atividade foi apresentado o material dourado como um recurso didático no auxilio da aprendizagem de áreas e volumes. Na quinta atividade foi verificado na prática a medição de volumes dos sólidos utilizando areia e um medidor de volume em mililitros (ml).

Para cada atividade proposta foi estabelecido um exercício de fixação de aprendizagem.

5 DESCRIÇÃO DAS ATIVIDADES DE CAMPO

Neste capítulo serão descritas cada uma das 5 atividades propostas neste trabalho. Apresentamos um plano de aula para cada atividade e o desenvolvimento junto com os alunos.

5.1 Primeira atividade

Para a primeira atividade apresentamos o plano de aula na tabela 5.3.

Antes de propor aos alunos que trouxessem embalagens que se assemelhasse aos sólidos geométricos que eles conhecem, foi realizado uma conversa informal sobre os tipos de sólidos geométricos que, no momento, eles tinham conhecimentos.

Pois, segundo Selbach at al (2017, p.5), “a curiosidade, a vontade de saber, o desejo de buscar respostas são, provavelmente, as mais importantes qualidades da espécie humana”. Portanto, resgatar inicialmente o que o aluno tem é fundamental no processo ensino aprendizagem, vimos essa importância no capitulo 2 na teoria da aprendizagem de Ausubel.

Figura 5.1 – Embalagens que os alunos trouxeram

Fonte: autor (2020)

Nessa 1ª atividade os alunos formaram grupos separados com a seguinte distribuição: 2 grupos de 2 alunos e 1 grupo de 3 alunos. Logo em seguida, foram distribuídos alguns materiais numerados de 01 a 04 a cada grupo para que eles analisassem, sendo que nenhuma informação, ainda, tenha sido repassada aos alunos sobre a classificação e os elementos dos sólidos geométricos.

Foi entregue a cada grupo um questionário pedindo a classificação dos sólidos geométricos representados pelas embalagens dadas e a identificação da quantidade de vértices, arestas e faces de cada objeto como mostra as tabelas 5.1 e 5.2.

Após a realização da tarefa foi debatido a solução que cada grupo sugeriu, no qual um representante de cada grupo expõe as soluções prevista da atividade. Feito essa análise e discussão pelos alunos, então chegou a minha vez de entrar em ação com a explanação a respeito dos sólidos geométricos e resolução do questionário.

Tabela 5.1 – Questionário 1

	Nome do objeto	Classificação quanto à sua forma
01		
02		
03		
04		

Fonte: Autor (2020)

Tabela 5.2 – Questinário 2

	Nome do objeto	Número de vértices	Número de arestas	Número de faces
01				
02				
03				
04				

Fonte: Autor (2019)

Tabela 5.3 – Plano de aula 1

PLANO DE AULA - 1
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor (A):Ziro Diniz de Oliveira Eixo Temático: Geometria Espacial
OBJETO DO CONHECIMENTO: Exploração dos sólidos Carga Horária: 2 horas aulas (120 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: Reconhecer, nomear e comparar os sólidos geométricos espaciais (bloco retangular, cubo, cone, pirâmides, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: - Identificar os poliedros, cilindros, cones e pirâmides. - Identificar vértices, arestas e faces de cada objeto sólido
METODOLOGIA: Aula expositiva-dialogada com apresentação dos sólidos geométricos.
RECURSOS NECESSÁRIOS: - Embalagens de produtos industriais em forma de prismas, pirâmides, cilindros e cones.
AVALIAÇÃO: Através de atividades impressas, participação do aluno e de tarefas executadas.
BIBLIOGRAFIA: - BALESTRI, Rodrigo. Matemática: interação e tecnologia, volume 3. São Paulo. Editora Leya, 2016. - <htpps://novaescola.org.br/plano-de-aula>

Fonte: autor (2019)

5.2 Segunda atividade

Para a segunda atividade apresentamos o plano de aula na tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Plano de aula 2

PLANO DE AULA - 2
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor (A): Ziro Diniz de Oliveira Eixo Temático: Geometria Espacial
OBJETO DE CONHECIMENTO: Planificando as figuras não planas e construções de sólidos geométricos com papel cartão CARGA HORÁRIA: 3 horas aulas (180 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: - Reconhecer e planificar os sólidos geométricos espaciais (bloco retangular, cubo, cone, pirâmides, cilindro). - Construir sólidos geométricos a partir de suas planificações. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: - Tornar o aluno capaz de planificar e construir um poliedro.
METODOLOGIA: Aula expositiva-dialogada com planificações de sólidos geométricos
RECURSOS NECESSÁRIOS: - Embalagens de produtos industriais em forma de prismas, pirâmides, cilindros e cones, papel cartão, régua , tesoura, cola e lápis.
AVALIAÇÃO: - Através de atividade oral e participação do aluno.
BIBLIOGRAFIA: - SMOLE, Kátia Stocco. Matemática: Para compreender o mundo, volume 2. São Paulo. Editora Saraiva, 2016. - <httpps://novaescola.org.br/plano-de-aula>

Fonte: autor (2019)

Cada aluno recebeu um sólido geométrico no formato de um prisma, representado por embalagem mostrada na figura 5.2, no qual cada um teria que planificar este prisma numa cartolina com o seguinte encaminhamento:

1. Desmonte a caixa em forma de prisma, com cuidado para não rasgar.

2. Estique-as sobre uma cartolina e passe o lápis em volta dela.

3. Recorte sua figura.

4. Na figura que você desenhou, marque linhas tracejadas com uma cor forte.

5. Marque a dobra nas linhas tracejadas. Agora, recorte e monte a sua caixa.

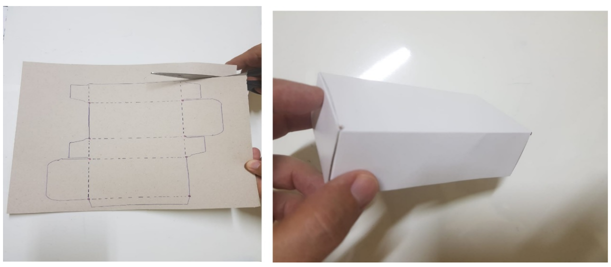
Figura 5.2 – Embalagem em forma de prisma

Fonte: autor (2019)

Figura 5.3 – Sólido planificado

Fonte: autor (2019)

Figura 5.4 – Prisma e sua planificação



Fonte: autor (2019)

Figura 5.5 – Fotos de alguns alunos realizando a segunda atividade

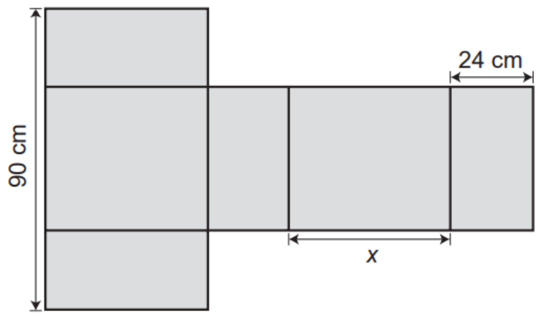
Fonte: autor (2019)

Após a montagem da caixa, eu fiz a intermediação com a explanação do processo de planificação, e em seguida pedir a cada aluno para mostrar quais são os vértices, as arestas e as faces de cada sólido construído. E para finalizar a tarefa, foi sugerido o seguinte problema:

1) (ENEM-2014) Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura+comprimento+largura) não pode ser superior a 115 cm.

A figura 4.13 mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.

Figura 5.6 – Paralelepípedo



Fonte: site descomplica[1]

O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela ANAC é:

a) 25

b) 33

c) 42

d) 45

e) 49

Após a resolução feita pelos os alunos o professor mostra a sua resolução e comenta.

Analisando a planificação da figura, temos que o contorno não pode ser maior do que 115, assim:

Um dos lados será: 90 – 24 – 24

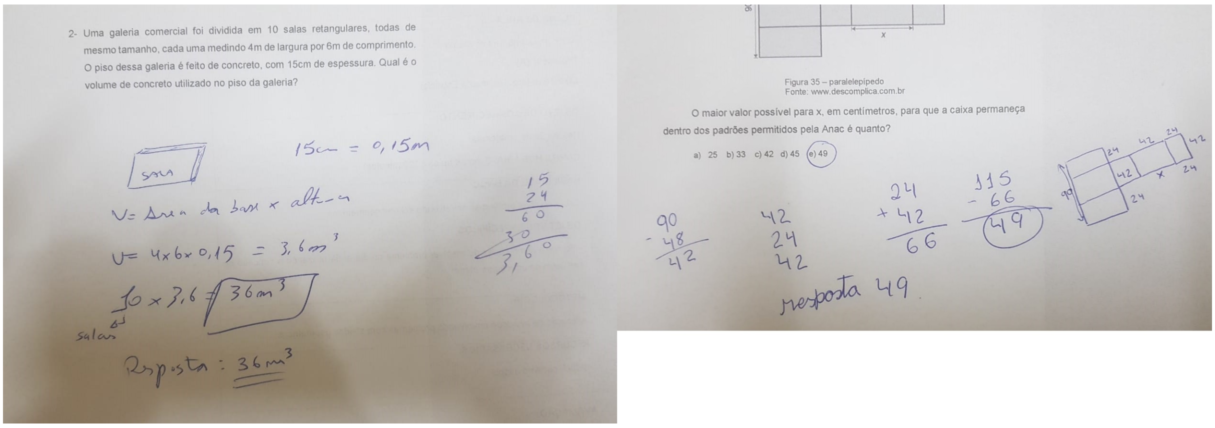
Portanto, os comprimentos da caixa são: x, 42, 24, logo:

$x + 42 + 24 \leq 115 \rightarrow x \leq 49$.

Dessa maneira, o valor máximo de x é 49 cm.

2)Uma galeria comercial foi dividida em 10 salas retangulares, todas de mesmo tamanho, cada uma medindo 4m de largura por 6m de comprimento. O piso dessa galeria é feito de concreto, com 15cm de espessura. Qual é o volume de concreto utilizado no piso da galeria?.

Figura 5.7 – Resolução feita por um dos alunos



Fonte: autor (2019)

1 https://<www.descomplica.com.br>

5.3 Terceira atividade

Para a terceira atividade apresentamos o plano de aula na tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Plano de aula 3

PLANO DE AULA - 3
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor (A): Ziro Diniz de Oliveira Eixo Temático: Geometria Espacial
OBJETO DE CONHECIMENTO: Poliedros e pirâmides CARGA HORÁRIA: 3 horas aulas (180 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: - Reconhecer os poliedros e pirâmides e identificar os seus elementos e propriedades característica. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: - Permitir que o aluno manuseie o objeto de estudo para analisar suas propriedades e características de forma lúdica e agradável.
METODOLOGIA: Construções de sólidos geométrico e aplicação de atividade escrita.
RECURSOS NECESSÁRIOS: - tesoura, papel cartolina , régua, cola, lápis, borracha.
AVALIAÇÃO: - Através de atividade oral e escrita e participação do aluno.
BIBLIOGRAFIA: - BALESTRI, Rodrigo. Matemática: Interação e tecnologia, volume 3. São Paulo. Editora Leya, 2016. - <htpps://novaescola.org.br/plano-de-aula>

Fonte: autor (2019)

Nesta atividade cada aluno construiu um poliedro e uma pirâmide com papel cartão a partir de planificações prontas. Posteriormente, para concluir a atividade perguntei a cada um dos alunos envolvidos que identificasse os elementos dos sólidos construídos indicando no objeto construído. E logo em seguida que preenchesse a tabela 5.6.

Figura 5.8 – Fotos de alguns alunos realizando a terceira atividade

Fonte: autor (2019)

Tabela 5.6 – Exercício de fixação

	Nome do objeto	Número de vértices	Número de arestas	Número de faces
01				
02				
03				
04				

Fonte: Autor (2019)

5.4 Quarta atividade

Para a quarta atividade apresentamos o plano de aula na tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Plano de aula 4

PLANO DE AULA - 4
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor (A):Ziro Diniz de Oliveira Eixo Temático: Geometria Espacial
OBJETO DE CONHECIMENTO: Material dourado CARGA HORÁRIA: 2 horas aulas (120 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: - Saber resolver problemas envolvendo áreas e volumes de sólidos geométricos. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: - Identificar metro quadrado e metro cúbico. - Entender o conceito de área e volume .
METODOLOGIA: Manuseio do material dourado e aplicações de problemas relacionados a área e volume.
RECURSOS NECESSÁRIOS: Material dourado, caderno , lápis.
AVALIAÇÃO: - Através de atividade e participação do aluno.
BIBLIOGRAFIA: - PAIVA, Manoel. Matemática: Paiva - volume 2. São Paulo. Editora Moderna, 2013. - <htpps://novaescola.org.br/plano-de-aula>

Fonte: autor (2019)

Nesta atividade foi apresentado o material dourado para os alunos, onde poucos alunos conheciam. O objetivo principal dessa atividade foi identificar metro quadrado e metro cúbico para resolver problemas de área e volume com o manuseio do material dourado ,cujo a idealizadora foi a educadora e médica Maria Montessori (1870 - 1952).

Inicialmente foi feita uma pergunta aos alunos sobre o que eles entendiam de áreas e volumes, após a discussão sobre a questão de áreas e volumes eu fiz a explanação a respeito desse assunto. Logo após, foi entregue a cada aluno o material dourado como mostra a figura 5.9, e foi solicitado ao aluno que montasse um prisma com esse material, de qualquer tamanho.

Figura 5.9 – Material dourado

Fonte: autor (2019)

Realizada a tarefa, foram sugeridas as questões para cada aluno resolver.

1) Ao considerar a unidade de volume como um cubinho (figura 5.9) e a unidade de área a face do cubinho, qual é o volume e a área total do prisma que você acabou de construir?

Figura 5.10 – Cubinho

Fonte: autor (2019)

2) Mariana quer ser empreendedora no negócio de cocadas de coco, e comprou no comercio local de Macapá algumas caixas com as seguintes medidas: 22 cm de comprimento, 16 cm de largura e 10 cm de altura. Essas caixas irão armazenar as cocadas que ela produz, cujas dimensões são: 8 cm de comprimento, 7 cm de largura e 1 cm de espessura. Ela pretende fabricar inicialmente 200 cocadas de coco. Quantas caixas serão necessárias, no mínimo, para colocar essas 200 cocadas? Após a realização das tarefas por parte do aluno, o professor entrou com a sua resolução para a 2ª questão.

Resolução

Podemos observar que tanto a caixa como a cocada são prismas retangulares, então devemos, inicialmente, obter os seus respectivos volumes.

Como as dimensões da cocada são: 8 cm de comprimento, 7 cm de largura e 1 cm de espessura, então aplicando a fórmula do volume dada por V= área da base x altura. Com isso, teremos $V = 8.7.1 = 56$ cm^3, logo o volume da cocada é 56 cm^3.

Faremos, agora, o cálculo do volume da caixa que tem as seguintes dimensões: 22 cm de comprimento, 16 cm de largura e 10 cm de altura. E de forma análoga no cálculo do volume da cocada, teremos então: $V = 22.16.10 = 3520$ cm^3, logo o volume da caixa é de 3520 cm^3.

Como queremos saber quantas caixas serão necessárias, no mínimo, para o total de 200 cocadas, então devemos calcular o volume total das cocadas, que será dada pela a multiplicação do número de cocadas pelo seu respectivo volume, ou seja, 200x56 = 11200 cm^3. Com isso, será necessário um espaço de 11200 cm^3 para armazenar todas as cocadas. Como uma caixa tem apenas um espaço de 3520 cm^3, então para sabermos o total de caixas necessárias devemos dividir 11200 por 3520 que dá mais ou menos 3,18 caixas. Portanto, o número mínimo de caixas para armazenar todas as cocadas será de 4 caixas. Pois, 3 caixas ficariam sobrando cocadas.

5.5 Quinta atividade

Para a quinta atividade apresentamos o plano de aula na tabela 5.8.

Nesta atividade cada aluno verificou na prática o cálculo de volume de sólidos usando um pouco de areia e um medidor de volume em mililitro (ml) e também foi utilizado um caderno para fazer as devidas anotações. Esta prática foi realizada ao lado da escola e após essa tarefa os alunos foram para sala de aula para calcular o volume dos sólidos verificados usando régua para medir as dimensões dos sólidos e aplicando a fórmula do volume do respectivo sólido geométrico.

Figura 5.11 – Alguns alunos realizando a atividade de medição de volume

Fonte: autor (2019)

Tabela 5.8 – Plano de aula 5

PLANO DE AULA - 5
ANO: 3º Ano do Ensino Médio Professor (A):Ziro Diniz de Oliveira Eixo Temático: Geometria Espacial
OBJETO DE CONHECIMENTO: Volume de sólidos geométricos CARGA HORÁRIA: 2 horas aulas (120 minutos)
HABILIDADES DA BNCC: - Saber resolver na prática problemas envolvendo volumes. OBJETIVOS ESPECÍFICOS: - Tornar o aluno capaz de resolver problemas do dia a dia utilizando conceito de área e volume.
METODOLOGIA: - Aula prática envolvendo medidas de áreas e volumes
RECURSOS NECESSÁRIOS: - lista de exercícios , caderno , lápis,régua, medidor em ml, areia.
AVALIAÇÃO: - Através de atividade e participação do aluno.
BIBLIOGRAFIA: - BALESTRI, Rodrigo. Matemática: Interação e tecnologia, volume 3. São Paulo. Editora Leya, 2016. - <htpps://novaescola.org.br/plano-de-aula>

Fonte: autor (2019)

6 ANÁLISE DE PESQUISA DE CAMPO

Um dia antes da primeira atividade foi realizado uma sondagem a respeito do assunto que iríamos ter, pois certamente os alunos do 3 ano já tiveram algum ensinamento de geometria em séries anteriores e considero importante esse resgaste inicial de dados sobre o que eles realmente lembram, com isso possibilitou-se uma análise de como seriam as atividades previstas no decorrer da semana.

Para minha surpresa foram poucos os alunos que realmente sabiam como se chamavam os sólidos geométricos, eles tinham apenas uma vaga lembrança, embora no 6º ano do Ensino Fundamental esse assunto faz parte da grade curricular. Quando eu solicitei que eles citassem algum sólido geométrico que eles conheciam, quatro alunos imediatamente responderam, respectivamente: - quadrado, bola , tijolo e dado. Na verdade eles lembravam da forma, porém não recordava dos seus respectivos nomes. E logo após, um aluno que estava calado no primeiro instante respondeu: - cubo, a esfera e o cilindro. Ainda faltavam dois sólidos geométricos que eles não mencionaram, e para ajudá-los eu perguntei para aqueles que ainda não tinham participado da discussão: - Como se chama o sólido geométrico que tem o formato de chapéu de aniversário? – E como se chama aquelas construções do antigo Egito? Com essa ajuda foi que os outros dois alunos que inicialmente estavam calados responderam: cone e pirâmide.

Na primeira atividade os alunos observaram bastante os objetos, apalparam e tiraram algumas conclusões, sugeri que anotasse as principais diferenças entre cada objeto. Então, eles anotaram que alguns dos objetos tinham as faces planas, enquanto outro não, uns rolavam e outro não. Ao preencher a tabela 5.1 eles acertaram o nome dos objetos, mais quanto a sua classificação eles não obtiveram uma resposta precisa, pois no momento não lembravam. Quanto ao questionário da tabela 5.2 eles acertaram o nome do objeto , e alguns ficaram na dúvida o que eram vértices e arestas. Depois da minha explanação acerca da questão e do assunto em si, três alunos comentaram que não iriam mais errar esse tipo de questão, eles afirmaram que fica mais fácil lembrar o que é aresta, vértice e face ao manusear os sólidos geométricos.

Na segunda atividade analisada, observei que os alunos se mostraram muito animados e participativo na construção dos sólidos geométricos, e quanto aos problemas que foram colocados como exercícios de fixação, foram formados dois grupos com 2 alunos e 1 grupo com 3 alunos, para a questão de número 1 os dois grupos iniciais conseguiram chegar à resposta pela construção do sólido, eles chegaram à conclusão que a largura da mala seria $90 - 24 - 24$ que dava 42, então somaram $42 + 24 = 66$ e para chegar a 115 fez a subtração de $115 - 66 = 49$, dando, portanto, a resposta para a letra E. Para o exercício número 2 , houve apenas um grupo que acertou a questão, os dois grupos restantes não lembravam como transformar centímetros em metros. Após a resolução eu fiz uma explanação da questão resolvida, como também uma pequena revisão em transformação de centímetros para metros. Na terceira atividade que se refere as construções dos poliedros e pirâmides, o tempo destinado foi mais longo devido alguns alunos não terem habilidades necessárias para a efetivação da atividade de modo rápido. Porém, o entusiasmo e a participação dos alunos foram decisivos para o bom andamento das atividades. Após a construção dos sólidos geométricos eles preencheram a tabela 5.3 corretamente. Eles identificaram facilmente o que é aresta , vértice, faces e o nome do objeto construído nos objetos analisados através da manipulação, estabelecendo assim uma aproximação mais elevada ao conhecimento adquirido.

Na quarta atividade que foi apresentado o material dourado, apenas 3 alunos conheciam o material apresentado. No decorrer da atividade um dos alunos interagiu com o material de forma construtiva e mostrou-se muito empenhado, e chegou a comentar que gostou muito dessa atividade, outro aluno comentou que deveria ter mais atividades práticas nas aulas de matemática. Na primeira questão do exercício de fixação eles conseguiram fazer corretamente e quanto a segunda questão que envolvia um problema voltado para a vida cotidiana do aluno, apenas dois alunos não conseguiram uma resposta satisfatória. Com isso podemos concluir nessa atividade que houve um ganho expressivo em questão de rendimento de aprendizagem,pois eles foram capazes de aplicar o conhecimento recém-aprendido ao mundo real.

Na quinta atividade onde os alunos verificaram na prática o cálculo de volume de sólidos usando areia e um medidor de volume em mililitro (ml) foi bastante proveitoso, pois eles perceberam na prática que quando medimos alguma coisa, estamos simplesmente comparando,é preciso antes de tudo ter uma unidade de medida que foi o caso do marcador em mililitro (ml). todos os alunos envolvidos conseguiram resolver o exercício corretamente, de forma aproximada. Com essa atividade eles conseguiram desenvolver habilidades de raciocínio geométrico e estimativa espacial. Além disso, os comportamentos dos alunos em relação à medição dos objetos foram decisivos na retenção de aprendizagem do assunto ministrado.

Assim, pela análise desses dados podemos concluir que houve um ganho considerável na questão ensino e aprendizagem com o uso desses materiais concretos, minimizando as dificuldades e aproximando o aluno do conhecimento. Pois, foram várias variáveis envolvidas, participação, motivação, entretenimento, interação entre alunos e principalmente o conhecimento adquirido ao manusear os materiais de forma planejada e educativa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para responder à questão de pesquisa, "As contribuições de estudo utilizando a manipulação de sólidos geométricos no estudo da geometria espacial têm trazido resultados satisfatórios?", foram aplicadas várias atividades com o uso de materiais concretos que por sua vez contribuíram de maneira positiva na construção do conhecimento do aluno.

No trabalho de campo realizado, observei que os alunos não conseguiam se expressar sobre as características dos sólidos geométricos e haviam poucos conhecimentos de geometria das séries anteriores. A partir da segunda atividade foi então que eles conseguiram um melhor aproveitamento, pois com as explanações iniciais dadas por mim e com os materiais em mãos ficou de fácil entendimento.

Particularmente eu percebi, deste do início, quando falei para a turma que teríamos aulas diferenciadas nos próximos dias, dá importância que iriamos ter com esse trabalho no qual o interesse dos alunos naquele momento se evidenciou de motivação, pois eles se mostraram muito satisfeito com a proposta.

Essas atividades que foram realizadas vêm de encontro com o que Piaget sempre defendeu, que na medida do possível, partir sempre do concreto para o abstrato. Como também foi aplicado as ideias de Ausubel, através da aprendizagem significativa, segundo a qual os conhecimentos prévios dos alunos são imprescindíveis para a aprendizagem de novos conhecimentos. Pois os alunos ficaram à vontade para refletirem sobre os objetos sem a minha intervenção, apenas após a realização das atividades por parte dos alunos é que houve a minha participação, dando assim a oportunidade para eles construírem os seus próprios conhecimentos.

A premissa de uma proposta alternativa na melhoria de um ensino de geometria utilizando materiais concretos é possível, pois venho aplicando essa prática a muitos anos e observei nesta pesquisa que esta modalidade de trabalho no estudo de geometria ofereceu benefícios eficazes e eficientes para a aprendizagem do aluno. Sendo assim, cabe ao professor rever e refletir sobre sua prática pedagógica e procurar meios acessíveis que possa influenciar uma maior participação efetiva dos alunos no ensino e aprendizagem de maneira prática e objetiva.

Dessa forma observa-se que a utilização de materiais concreto no ensino da geometria espacial vem a ser uma forma viável e significativa que proporciona uma melhor visualização e aprendizagem no ensino de geometria espacial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AUSUBEL, D.P.;NOVAK, J.D. e HANESIAN,H (1983); Psicologia educativa: um punto de vista cognoscitivo. México, Editorial Thillas. Traducción al español, de Mario Sandoval P., de la segunda edición de Educational pschology: a cognitive view.

AUSUBEL, Paul David. Aquisição e retenção de conhecimento: uma perpectiva cognitiva. Lisboa: Paralelo,2003.

BASSAZEZI, Rodne Carlos. Modelagem matemática: teoria e prática. São Paulo: Contexto,2015.

BRANDÃO, Dênis M.S ; Crema, Roberto. O novo paradigma holístico: ciência, filosofia, arte e mística. São Paulo: 4 edição, Summus editorial, 1991.

BOYER, Carl Benjamin, 1906 – História da matemática; tradução: Elza F.Gomide. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1974

BOYER, Carl Benjamin . História da matemática;tradução:Helena Castro. São Paulo: Blucher,2012.

CANAVARRO, A.P. Práticas de ensino da Matemática: Duas professoras, dois currículos. Tese de doutoramento. Universidade de Lisboa. Lisboa: APM. 2003.

DUARTE, Newton. O ensino de matemática na educação de adultos. 8ª edição. São Paulo: Cortez,2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação Matemática da Teoria à Prática. 4ª edição. São Paulo: Papirus ,1998.

EBIOGRAFIA, Resumo da obra de René Descartes. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/rene_descartes>. Acesso em 3 de março de 2020.

ESCOLA, Equipe Brasil. "Felix Christian Klein"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/biografia/felix-christian-klein.htm>. Acesso em 24 de março de 2020.

EVES,Howard. História da geometria; tradução: Hygino H.Domingues, São Paulo, Ed. Atual, 1992.

FAINGUELERNT,E.K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus: A Educação Matemática em Revista. São Paulo, SBEM, n.4, p. 45-53, 1995.

FURTH, G. Piaget and knowleadge: thcoretical foundations. London: Prentice-Hall, 1969.

FRANCISCO, Luciano Vieira. "Tales de Mileto: Tudo Começa na Água"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/filosofia/tales-mileto.htm> . Acesso em

19 de março de 2020.

FRAZÃO, Dilva. “ René Descartes”; e Biografia. Disponível em: <https://www.ebiografia.com/rene_descartes/> . Acesso em 22/03/2020.

GARBI, Gilberto G. A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

GEORGE, A.L.(1959). Quantitative and qualitative approaches to content analysis. In I.S. Pool (Ed.), Trends in content analysis (pp.7-32). Urbana: Universit of Illinois Press.

GERHARDT, Tatiana Engel, SILVEIRA, Denise Tolfo. Métodos de pesquisa; coordenado pela Universidade Aberta do Brasil - UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológico. Porto Alegre: Editora da URFGS,2009.

HIEBERT, J., Wearne, D., Taber,S. (1991). Fourth graders’ gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. The Elementary School Journal, 91: 321-341.

HOFFER, A.(1981). Geometry is more than proof. Mathematics, 74, 11-18.

KISHIMOTO,Tizuko Morchida. Jogo, brinquedo,brincadeira e a educação, 8ª edição. São Paulo: Cortez,2005.

LEMOS,E.S. A Aprendizagem Significativa: estratégias facilitadora e avaliação; Série-estudos - Periódico do Mestrado em Educação da UCBC.Campo Grande-MS, n.21.p.53-66. 2006.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 1997. 10v.

NETO, Ernesto Rosa. Didática da Matemática. 11ª edição. São Paulo: Ática,1998.

PAIVA, Manoel. Matemática Paiva 2. 2ª edição. São Paulo: Moderna, 2013.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (1ª a 4ª série): Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF,1997.

PASSOS, Carmem Lúcia Brancaglion. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio (org). O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores. campinas: Autores Associados, 2006.

PEREIRA, Jamerson Santos. Materiais manipuláveis e repertório compartilhado em aulas de matemática envolvendo tópicos de geometria; disponível em: <https://dx.doi.org/10.4322/gepem.2017.007. Acesso em 15/04/2020.

PELIZZARI, Adriana. Teoria da aprendizagem significativa segundo Ausubel, textos complementares - Revista PEC, Curitiba, v.2, n.1,p.41-42,2002.

PIAGET, J. A formação do símbolo na criança. Rio de Janeiro: Zahar,1978.

PIRES, Célia M. Carolino,CURI,Edda,CAMPOS, Tânia Maria M. Espaço e Forma: a construção de noções geométricas (...)São Paulo:PROEM,2000.

PORFIRIO, Francisco. "René Descartes"; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/biografia/rene-descartes.htm>. Acesso em 19 de março de 2020.

REYS, R.E,1971. Considerations for teachers using manipulative materials Vol.18, N, pp. 551-558.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira. Tópicos de História da Matemática. Rio de Janeiro: SBM,2012.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª série): Matemática . Brasília: MEC/SEF,1997.

SMOLE, Kátia Stocoo et al. Jogos de matemática: 1º e 3º ano. Porto Alegre: Grupo A, 2008.

SÓ MATEMÁTICA. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2020. Disponível em: <https: //www.somatematica.com.br/biograf/poncelet.php>.

SOWELL, E.J,1989. Effects of manipulative materiais in mathematics instruction. Journal of Researc in Mathematics Education, 20 (5): 498-505.

SOUZA, Joamir Roberto. Contato matemática, 2º ano - 1 ed. São Paulo: FTD, 2016.

SOUZA, Maria Helena Soares. O ensino de 1ª a 4ª séries: as habilidades; Anamélia Bueno Buoro... et al. - São Paulo: IEE-PUC; SEED-AP; CEFORH-AP,2000.

TAVARES, Romero, Teoria da Aprendizagem Significativa segundo Ausubel. Revista PEC, Curitiba, v.2, n.1, p.57,2002.

ZUIN, Elenice Lodron - Mini-Curso ministrado no III Seminário Nacional de História da Matemática.UFES, mar.1999