



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

JOSÉ NILSON DA SILVA

**UMA ANÁLISE DE CONCEITOS DE ASTRONOMIA E MATEMÁTICA PARA A
POPULARIZAÇÃO CIENTÍFICA DO FENÔMENO DO EQUINÓCIO A PARTIR DA
LATITUDE ZERO**

MACAPÁ-AP

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

JOSÉ NILSON DA SILVA

**UMA ANÁLISE DE CONCEITOS DE ASTRONOMIA E MATEMÁTICA PARA A
POPULARIZAÇÃO CIENTÍFICA DO FENÔMENO DO EQUINÓCIO A PARTIR DA
LATITUDE ZERO**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Amapá - UNIFAP, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil

MACAPÁ-AP

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Amapá
Elaborada por Cristina Fernandes – CRB-2/1569

Silva, José Nilson da.

Uma análise de conceitos de astronomia e matemática para a popularização científica do fenômeno do equinócio a partir da latitude zero. / José Nilson da Silva; Orientador, José Walter Cárdenas Sotil. – Macapá, 2020.

83 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Amapá, Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT).

1. Astronomia. 2. Equinócio. 3. Latitude Zero. 4. Matemática. 5. Ensino. I. Sotil, José Walter Cárdenas, orientador. II. Fundação Universidade Federal do Amapá. III. Título.

521 S586u
CDD. 22 ed.



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-
PROFMAT

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Amapá-UNIFAP, foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de JOSÉ NILSON DA SILVA, intitulada: *“Uma Análise de Conceitos de Astronomia e Matemática para a Popularização Científica do Fenômeno do Equinócio a partir da Latitude Zero”*, após terem inquerido o aluno e realizado avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito da defesa.

A outorga do título de Mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela Banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Macapá, 29 de setembro de 2020.

Dr. JOSÉ WALTER CÁRDENAS SÓTIL
Presidente da Banca Examinadora (UNIFAP)

Dr. ROBERT RONALD MAGUIÑA ZAMORA
Membro Externo (UNIFAP)

Dr. GUZMAN EULALIO ISLA CHAMILCO
Avaliador Interno (UNIFAP)

“Em memória de Otávio Ayres da Silva, sogro e amigo inestimável, que foi ao encontro de Deus durante a pandemia global iniciada no ano de 2020”

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha esposa Marcell dos Santos Silva, sempre me apoiando nos momentos de dificuldades, compreendendo as vezes em que precisei me dedicar um pouco mais ao curso, por também ter me acompanhado em sacrifícios de férias, viagens e demais momentos de lazer; sempre me tranquilizando nos momentos mais difíceis desta trajetória acadêmica.

Aos meus pais, Osmar Cirino da Silva e Francisca Alexandre da Silva que desde a minha infância sempre incentivaram meus estudos, por vezes sacrificando outros projetos para priorizar a vida estudantil de todos os filhos.

Agradeço também ao corpo docente que contribuiu com a minha formação, especialmente ao professor José Walter Cárdenas Sotil, que aceitou o desafio de me orientar neste tema tão importante para a comunidade amapaense, fornecendo dicas valiosas para a conclusão do trabalho.

Aos meus companheiros de curso que, além da grande amizade formada, me apoiaram em diversas ocasiões de dificuldades.

Importante fazer menção honrosa aos amigos do meu local de trabalho que me deram muito apoio nesta jornada – sem o qual talvez não fosse possível concluí-la –, em especial ao Wladimir Favacho Santiago, Sérgio Nascimento, Eloízio Farias e ao Mário Borges.

E por fim, à instituição Universidade Federal do Amapá-UNIFAP, que ao longo da minha formação forneceu os meios necessários para a conclusão do curso.

“Dedico-me à busca constante em tentar compreender os mistérios da natureza, mas sempre descubro algo novo e desafiador”

RESUMO

No extremo norte do Brasil, mais especificamente na cidade de Macapá-AP, verifica-se um curioso fator geográfico, representado por uma linha imaginária que teoricamente divide o globo em dois hemisférios distintos, o norte e o sul. Esta linha é conhecida como linha do equador e simboliza a latitude zero. Esta característica evidencia alguns fenômenos para um observador localizado neste referencial, dentre os quais destaca-se as peculiaridades do Equinócio equatorial. Foi aplicado um questionário para analisar o conhecimento dos visitantes do Monumento Marco Zero do Equador sobre o fenômeno do Equinócio, onde os resultados mostram que a maioria dos entrevistados possuem bom nível de conhecimento básico sobre este fenômeno, porém, possuem dificuldades na compreensão das particularidades do Equinócio para a latitude zero.

Estas questões, associadas às dificuldades encontradas entre os estudantes do ensino básico a respeito de determinados conceitos matemáticos, levaram a elaborar uma metodologia de ensino para viabilizar a interdisciplinaridade entre o ensino de Matemática e de conceitos básicos de Astronomia. Esta metodologia foi aplicada a alunos da Escola Grupo Perspectivas Construtivas (GPC), no município de Santana-AP (situado à 17 km da capital Macapá-AP), os quais tiveram um aproveitamento acima de 90%, manifestando parecer favorável a associação da matemática com a Astronomia. Foi observado nos alunos um melhor aproveitamento na compreensão de conceitos de trigonometria e de geometria, além de colaborar para a popularização de conceitos básicos de Astronomia, principalmente os sobre o Equinócio e a duração do dia e da noite.

Palavras-chave: Astronomia; Equinócio; Latitude Zero; Matemática; Proposta de ensino.

ABSTRACT

In the northernmost part of Brazil, more specifically in the city of Macapá (Amapá State), there is a curious geographical factor, represented by an imaginary line that theoretically divides the globe into two distinct hemispheres, the north and the south. This line is known as the equator line and symbolizes zero latitude. This characteristic highlights some phenomena for an observer located in this referential, among which the peculiarities of the equatorial Equinox stand out. It was applied a questionnaire to analyze the visitors knowledge about the Equinox phenomenon, in which the results show that most of the interviewed people have a good basic knowledge level about this phenomenon, however, they have difficulties to comprehend the Equinox for zero latitude peculiarities.

These issues, associated with the difficulties found among students of basic education regarding certain mathematical concepts, led to elaborate a teaching methodology to enable the association between the Mathematics teaching and of Astronomy basic concepts. This methodology was applied to Grupo Perspectivas Construtivas (GPC) high school students, at Santana City (10,5 miles away from the capital Macapá-AP) which had over 90% approval, expressing favorable opinion to mathematics-astronomy association. It was observed in the students a better school achievement on the comprehension of trigonometry and geometry concepts, in addition to contributing to the popularization of basic Astronomy concepts, mainly about the Equinox and the length of day and night.

Keywords: Astronomy; Equinox; Latitude Zero; Mathematics; Teaching proposal.

LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1 - $h + z = 90^\circ$	41
Equação 2 - $dp + \delta = 90^\circ$	43
Equação 3 - $D = 2H_\odot$	45
Equação 4 - $N = 24 - 2H_\odot$	45
Equação 5 - $\cos H_\odot = -\tan\varphi \cdot \tan H_\odot$	45
Equação 6 - $T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot)$	45
Equação 7 - $\delta = 23,45 \times \text{sen} \left[\frac{360}{365} \times (284 + n) \right]$	45
Equação 8 - $\cos H_\odot = -\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot = -\tan(-90^\circ) \cdot \tan\delta_\odot = \text{indefinido} \rightarrow H_\odot \text{ indefinido}$	46
Equação 9 - $T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(-15,8267^\circ) \cdot \tan(10^\circ))$...	47
Equação 10 - $T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0,2835 \times 0,1763) \cong \frac{2}{15} \times 87,1351^\circ \cong 11,618013 \text{ h}$	47
Equação 11 - $T_d \cong 11,618013 \text{ h} = 11\text{h} + 0,618013 \times 60 = 11\text{h} + 37,08078 \text{ min}$	47
Equação 12 - $T_d \cong 11\text{h} + 37 \text{ min} + 0,08078 \times 60 \cong 11\text{h} + 37 \text{ min} + 4,8468 \text{ seg}$	47
Equação 13 - $T_d \cong 11\text{h}37'5''$	47
Equação 14 - $18:03 \text{ h} - 06:20\text{h} = 11\text{h}43'$	48
Equação 15 - $\text{Margem de Erro} = \frac{T_d(\text{fornecida pelo site}) - T_d(\text{calculada com aplicação de (6)})}{T_d(\text{fornecida pelo site})}$	48
Equação 16 - $T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(-15,8267^\circ) \cdot \tan(-18^\circ))$	48
Equação 17 - $T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0,2835 \times (-0,3249)) \cong \frac{2}{15} \times 95,2849566^\circ \cong 12,70466 \text{ h}$	49
Equação 18 - $T_d \cong 12,70466 \text{ h} = 12\text{h} + 0,70466 \times 60 = 12\text{h} + 42,2796 \text{ min}$	49
Equação 19 - $T_d \cong 12\text{h} + 42 \text{ min} + 0,2796 \times 60 \cong 12\text{h} + 42 \text{ min} + 16,776 \text{ seg}$	49
Equação 20 - $T_d \cong 12\text{h}42'17''$	49
Equação 21 - $18:21 \text{ h} - 05:31\text{h} = 12\text{h}50'$	49
Equação 22 - $T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(-15,8267^\circ) \cdot \tan(0^\circ))$	50
Equação 23 - $T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0,2835 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^\circ \cong 12 \text{ h}$	50
Equação 24 - $18:08 \text{ h} - 06:01\text{h} = 12\text{h}07'$	50
Equação 25 - $T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(-30,0346^\circ) \cdot \tan(-21^\circ))$ 51	51
Equação 26 - $T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0,5782 \times (-0,3839)) \cong \frac{2}{15} \times 102,8248248^\circ \cong 13,709976 \text{ h}$. 51	51
Equação 27 - $T_d \cong 13,709976 \text{ h} = 13\text{h} + 0,709976 \times 60 = 13\text{h} + 42,59856 \text{ min}$	51
Equação 28 - $T_d \cong 13\text{h} + 42 \text{ min} + 0,59856 \times 60 \cong 13\text{h} + 42 \text{ min} + 35,9136 \text{ seg}$... 51	51
Equação 29 - $T_d \cong 13\text{h}42'36''$	51
Equação 30 - $19:30 \text{ h} - 05:39\text{h} = 13\text{h}51'$	52

Equação 31 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(-30,0346^{\circ}) \cdot \tan(15^{\circ}))$..	52
Equação 32 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0,5782 \times 0,2679) \cong \frac{2}{15} \times 81,08901613^{\circ} \cong 10,8118688 h$	52
Equação 33 - $T_d \cong 10,8118688 h = 10h + 0,8118688 \times 60 = 10h + 48,712128 \text{ min}$	52
Equação 34 - $T_d \cong 10h + 48 \text{ min} + 0,712128 \times 60 \cong 10h + 48 \text{ min} + 42,72768 \text{ seg}$	53
Equação 35 - $T_d \cong 10h48'43''$	53
Equação 36 - $17:59 h - 07:02h = 10h57'$	53
Equação 37 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(-30,0346^{\circ}) \cdot \tan(0^{\circ}))$...	53
Equação 38 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0,5782 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^{\circ} \cong 12 h$	54
Equação 39 - $18:21 h - 06:14h = 12h07'$	54
Equação 40 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(41,8781^{\circ}) \cdot \tan 10^{\circ})$	55
Equação 41 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-0,89656 \times 0,176327) \cong \frac{2}{15} \times 99,095918923^{\circ} \cong 13,21279 h$ 55	
Equação 42 - $T_d \cong 13,21279 h = 13h + 0,21279 \times 60 = 13h + 12,7674 \text{ min}$	55
Equação 43 - $T_d \cong 13h + 12 \text{ min} + 0,7674 \times 60 \cong 13h + 12 \text{ min} + 46,044 \text{ seg}$	55
Equação 44 - $T_d \cong 13h12'46''$	55
Equação 45 - $19:32 h - 06:09h = 13h23'$	56
Equação 46 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(41,8781^{\circ}) \cdot \tan(-20^{\circ}))$...	56
Equação 47 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-0,89656 \times (-0,36397)) \cong \frac{2}{15} \times 70,95437685^{\circ} \cong 9,460583 h$	56
Equação 48 - $T_d \cong 9,460583 h = 9h + 0,460583 \times 60 = 9h + 27,63498 \text{ min}$	56
Equação 49 - $T_d \cong 9h + 27 \text{ min} + 0,63498 \times 60 \cong 9h + 27 \text{ min} + 38,0988 \text{ seg}$	56
Equação 50 - $T_d \cong 9h27'38''$	57
Equação 51 - $16:25 h - 06:48h = 09h37'$	57
Equação 52 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(41,8781^{\circ}) \cdot \tan(0^{\circ}))$	57
Equação 53 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-0,89656 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^{\circ} \cong 12 h$	58
Equação 54 - $18:47 h - 06:39h = 12h08'$	58
Equação 55 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(64,1814^{\circ}) \cdot \tan(15^{\circ}))$	59
Equação 56 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-2,06689 \times 0,267949) \cong \frac{2}{15} \times 123,629554^{\circ} \cong 16,48394 h$.	59
Equação 57 - $T_d \cong 16,48394 h = 16h + 0,48394 \times 60 = 16h + 29,0364 \text{ min}$	59
Equação 58 - $T_d \cong 16h + 29 \text{ min} + 0,0364 \times 60 \cong 16h + 29 \text{ min} + 2,184 \text{ seg}$	59
Equação 59 - $T_d \cong 16h29'2''$	59
Equação 60 - $23:50 h - 07:01h = 16h49'$	60
Equação 61 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(64,1814^{\circ}) \cdot \tan(-7^{\circ}))$	60
Equação 62 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-2,06689 \times (-0,12278)) \cong \frac{2}{15} \times 75,2991228^{\circ} \cong 10,039883h$	60
Equação 63 - $T_d \cong 10,039883 h = 10h + 0,039883 \times 60 = 10h + 2,39298 \text{ min}$	60

Equação 64 - $T_d \cong 10h + 2 \text{ min} + 0,39298 \times 60 \cong 10h + 2 \text{ min} + 23,5788 \text{ seg}$	60
Equação 65 - $T_d \cong 10h2'23''$	60
Equação 66 - $19:50 h - 09:29h = 10h21'$	61
Equação 67 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(64,1814^{\circ}) \cdot \tan(0^{\circ}))$	61
Equação 68 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-2,06689 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^{\circ} \cong 12 h$	61
Equação 69 - $21:26 h - 09:11h = 12h15'$	62
Equação 70 - $T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(0^{\circ}) \cdot \tan(\delta_{\odot}))$	62
Equação 71 - $T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0 \times \tan \delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \times 90^{\circ} = 12 h$	63

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – a) Observação do Equinócio olhando do norte e do sul	27
b) Observação do Equinócio olhando do leste para o obelisco	27
c) Observação do Equinócio olhando do oeste para o obelisco	27
Figura 2 – a) Secção de uma esfera	34
b) Elementos de uma esfera	34
c) Distância de um ponto da superfície ao polo de uma esfera	34
Figura 3 – Efeito da inclinação do eixo de rotação da Terra	37
Figura 4 – Posições relativas do sistema Terra-Sol	38
Figura 5 – Representação do movimento aparente anual do Sol	39
Figura 6 – Observador sobre a linha do equador	40
Figura 7 – a) Representação do <i>1º Vertical</i> e do <i>2º Vertical</i>	40
b) Indica a <i>vertical</i> , <i>azimute</i> , <i>altura</i> e <i>distância zenital</i> de um astro	40
c) Evidencia o <i>almucântar</i>	40
Figura 8 – a) Representação de elementos de Astronomia esférica	42
b) Elementos e símbolos de alguns elementos	42
c) Elementos para identificação de um astro no sistema equatorial	42
Figura 9 – a) Esfera Armilar	67
b) 1. Eclíptica. 2. Paralelo Celeste. 3. Plano da órbita terrestre	67
Figura 10 – Exemplo de planetário de mesa	69
Figura 11 – a) <i>MAS</i> para Solstícios e Equinócio - linha do equador	71
b) <i>MAS</i> para Solstícios e Equinócio - latitude $\varphi = -30^\circ$	71
Figura 12 – Resposta do (a) aluno (a) 1 à pergunta 1	73
Figura 13 – Resposta do (a) aluno (a) 2 à pergunta 2	73
Figura 14 – Resposta do (a) aluno (a) 3 à pergunta 2	74
Figura 15 – Resposta do (a) aluno (a) 4 à pergunta 2	74
Figura 16 – Resposta do (a) aluno (a) 5 à pergunta 2	74

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Nível de escolaridade por faixa de idade dos entrevistados.....	19
Gráfico 2 – Como você conheceu o Equinócio?	20
Gráfico 3 – O Equinócio é um fenômeno... ..	21
Gráfico 4 – O que determina a ocorrência dos Equinócios?	23
Gráfico 5 – Sobre a duração do dia e da noite	24
Gráfico 6 – Na Latitude zero... ..	25
Gráfico 7 – Na cidade de Macapá-AP.....	26

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Duração do dia para latitudes e declinações diferentes	46
Tabela 2 – Dados do Sol: 13:31 h do dia 15/04/2020 em Brasília-DF	48
Tabela 3 – Dados do Sol: 01:48 h do dia 13/11/2020 em Brasília-DF	49
Tabela 4 – Dados do Sol: 17:23 h do dia 22/09/2020 em Brasília-DF	50
Tabela 5 – Dados do Sol: 13:06 h do dia 16/01/2020 em Porto Alegre-RS	52
Tabela 6 – Dados do Sol: 19:18 h do dia 11/08/2020 em Porto Alegre-RS	53
Tabela 7 – Dados do Sol: 17:23 h do dia 22/09/2020 em Porto Alegre-RS.....	54
Tabela 8 – Dados do Sol: 11:31 h do dia 15/04/2020 em Chicago-Illinois-EUA	56
Tabela 9 – Dados do Sol: 04:55 h do dia 21/11/2020 em Chicago-Illinois-EUA	57
Tabela 10 – Dados do Sol: 15:23 h do dia 22/09/2020 em Chicago-Illinois-EUA.....	58
Tabela 11 – Dados do Sol: 18:39 h do dia 30/04/2020 em Nuuk-Groenlândia.....	59
Tabela 12 – Dados do Sol: 12:24 h do dia 02/03/2020 em Nuuk-Groenlândia.....	61
Tabela 13 – Dados do Sol: 20:23 h do dia 22/09/2020 em Nuuk-Groenlândia.....	62

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	16
1 ANÁLISE GRÁFICA SOBRE O CONHECIMENTO DE VISITANTES NO MONUMENTO MARCO-ZERO DO EQUADOR SOBRE O EQUINÓCIO	18
1.1 METODOLOGIA	18
1.2 ANÁLISE DAS RESPOSTAS	19
1.3 CONCLUSÕES SOBRE O EMPREGO DO QUESTIONÁRIO	28
2 DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER TRABALHADOS ATRAVÉS DO ESTUDO DO EQUINÓCIO	30
2.1 DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	30
2.2 COMO A TRIGONOMETRIA É TRABALHADA TRADICIONALMENTE EM SALA DE AULA	32
2.3 CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA NECESSÁRIOS PARA A COMPREENSÃO DO FENÔMENO DO EQUINÓCIO	33
3 ASTRONOMIA E SEUS FENÔMENOS	36
3.1 AS ESTAÇÕES DO ANO	36
3.2 CONCEITOS BÁSICOS DE ASTRONOMIA	39
3.3 SOBRE A DURAÇÃO DIURNA E NOTURNA DO DIA	44
4 ABORDAGEM DO EQUINÓCIO EQUATORIAL PARA O ENSINO BÁSICO	64
4.1 COM FERRAMENTAS USUAIS DO PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA	64
4.2 COM USO DE EQUIPAMENTOS DE ASTRONOMIA	67
4.2.1 ESFERA ARMILAR	67
4.2.2 PLANETÁRIO DE MESA (<i>ORRERY</i>)	68
4.2.3 MODELO PARA VISUALIZAÇÃO DO MAS (MOV. APARENTE DO SOL)	70
4.3 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS	72
CONSIDERAÇÕES FINAIS	76
REFERÊNCIAS	78
ANEXO 1	81
ANEXO 2	82
ANEXO 3	83

INTRODUÇÃO

É comum encontrar-se em livros de divulgação científica que a Astronomia e a Matemática são duas das ciências mais antigas conhecidas e estudadas pelo homem, levando-o a questionar os fenômenos celestes e, por vezes, buscar uma forma de representação matemática para facilitar a compreensão de tais fenômenos. Assim sendo, será feita uma análise de um fenômeno bastante discutido em grupos de Astronomia amadora, na mídia e em salas de aula de geografia e física do ensino básico, trata-se do equinócio; entretanto, este estudo será feito com base em peculiaridades deste fenômeno a partir da latitude zero, e, principalmente, a proposta visa conciliar este conteúdo a conceitos de matemática do ensino básico, oferecendo desta forma suporte ao professor em exercício ou em formação.

Mesmo que a Astronomia seja uma ciência que aguça o imaginário popular, seja através dos filmes no cinema, seja através das notícias em jornais, são poucas as iniciativas para a popularização científica dos seus conteúdos, principalmente quando refere-se a nível nacional. Sobre este fato, Langhi e Nard (2007) comentam:

[...] a popularização midiática, aparece como a mais débil em conteúdos de astronomia, pois nota-se, nestes meios de divulgação - revistas populares (não da comunidade científica) de divulgação científica, jornais de notícias, programas de rádio e TV - uma escassez de documentários nacionais sobre astronomia ... (p. 4402-3).

Esta carência é acentuada quando se trata do extremo norte do Brasil, mais especificamente, referindo-se à cidade de Macapá, que mesmo estando sobre a linha do equador e contendo em seu calendário turístico as datas dos equinócios como sendo onde ocorrem comemorações, normalmente no monumento Marco-zero do equador; existem poucas iniciativas locais que visam a popularização da Astronomia.

Nota-se também que mais difícil ainda é verificar-se o aproveitamento da possibilidade de se trabalhar conceitos matemáticos em conjunto com outros de Astronomia para explicar fenômenos astronômicos e, desta forma, maximizar o aprendizado, auxiliar na desmistificação de alguns fenômenos e aumentar o gosto da população em geral, especialmente dos estudantes do ensino básico, por conteúdos científicos, e, conseqüentemente, reduzindo a aversão que muitas pessoas possuem com relação à matemática.

Serão abordadas algumas equações e outros conceitos matemáticos acerca deste fenômeno, visando uma melhor compreensão, além de que será efetuado o estudo de alguns conceitos básicos de Astronomia, fins que o entendimento das

equações apresentadas seja mais eficiente.

A cidade de Macapá, no Estado do Amapá, será tomada como referência para as análises do fenômeno do equinócio, pois, ela se situa sobre a linha imaginária do equador, ou seja, na latitude zero, fornecendo assim o aspecto geográfico necessário para esta análise. Assim sendo, será feita uma análise quantitativa e estatística referente ao conhecimento prévio que uma amostra dos visitantes ao monumento Marco-zero do equador, durante o equinócio de setembro, possuem sobre o fenômeno.

A ênfase da metodologia sugerida neste trabalho será de fornecer os subsídios necessários para que a popularização deste fenômeno seja mais eficiente, além de proporcionar uma melhor compreensão de conceitos de Astronomia e da utilização de matemática básica para a representação de tal fenômeno. Tal eficácia será confirmada ou não com uma aplicação prática da metodologia ao final do trabalho.

1 ANÁLISE GRÁFICA SOBRE O CONHECIMENTO DE VISITANTES NO MONUMENTO MARCO-ZERO DO EQUADOR SOBRE O EQUINÓCIO

Neste capítulo será apresentada uma análise quantitativa sobre o conhecimento prévio dos visitantes ao Monumento Marco Zero do Equador, a respeito de conceitos básicos relacionados com o fenômeno do Equinócio e suas particularidades para a latitude zero, durante o evento que marca o Equinócio de setembro.

Sobre a importância do Monumento Marco Zero do Equador para o turismo local, Morais e Morais (2017, p.117) enfatizam o seguinte:

[...] Marco Zero do Equador é um dos mais importantes ponto turístico da cidade de Macapá, capital do Estado do Amapá, única capital do Brasil a ser cortada pela Linha do Equador, foi inaugurado em julho de 1987 e dispõe de um moderno prédio arquitetônico, projetado para funcionar com serviços de restaurantes, salão de recepções, bar, galeria de arte e lojas de artesanato, onde se pode conhecer as criações locais. Os visitantes são atendidos por pessoas treinadas pela Secretaria de Turismo SETUR. Lá o turista recebe um certificado de que esteve no “meio do mundo”. (Grafia original).

É importante citar que a Secretaria de Turismo do Estado do Amapá já traz em seu calendário anual de eventos as datas dos Equinócios, e, pelo menos durante o Equinócio do mês de setembro normalmente, há uma vasta programação para os visitantes do Monumento Marco-Zero do equador apreciarem (SALAVIAN, 2019). O Equinócio de março é conhecido localmente como Equinócio das águas, pois, coincide com o período de intensas chuvas no Amapá, e devido ao clima natural da região a programação formal do Estado não possui o mesmo vulto que o dado durante o mês de setembro.

1.1 METODOLOGIA

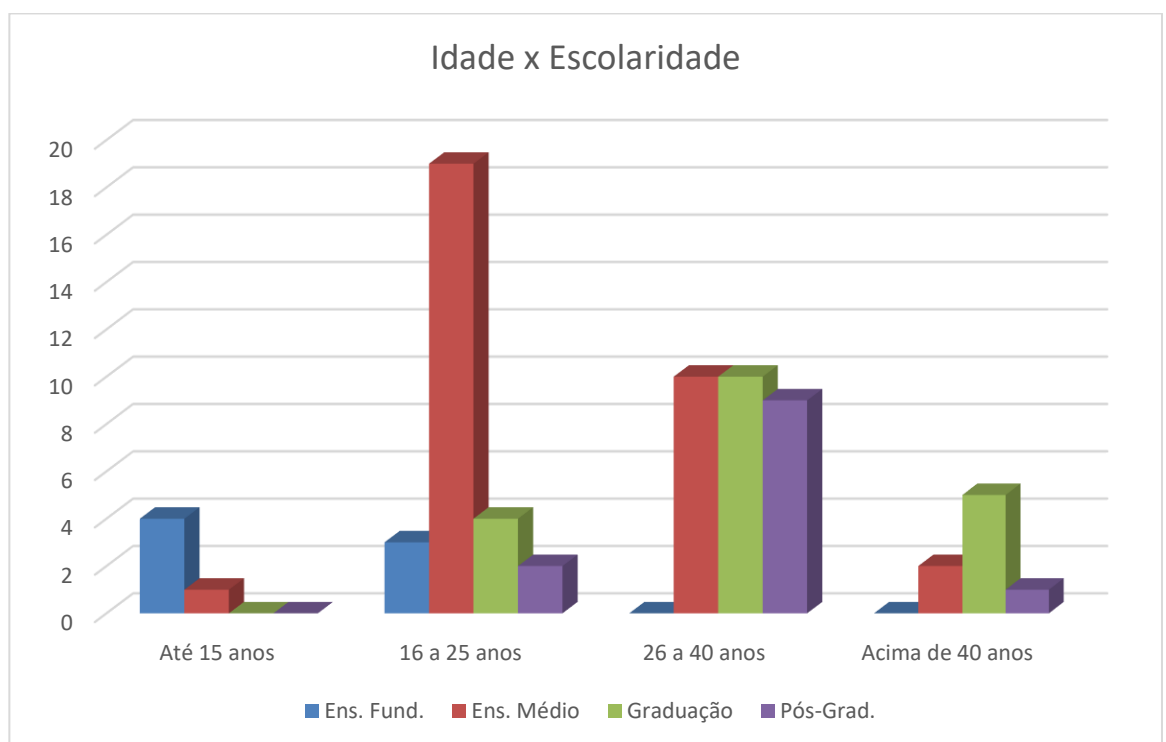
Para a coleta de dados foi elaborado um questionário (anexo 1) contendo oito perguntas, sendo uma sobre a faixa etária, uma sobre o nível de escolaridade, outra sobre como o entrevistado conheceu o fenômeno do Equinócio e mais cinco perguntas sobre alguns conhecimentos básicos que são importantes para a compreensão do fenômeno em pauta e suas peculiaridades para um observador situado sobre a linha do equador.

Os questionários foram aplicados no dia 22/09/2019 durante a programação cultural promovida pela Secretaria de Turismo do Estado do Amapá (SETUR-AP), nas imediações do monumento Marco Zero do Equador, com apoio do Clube de Astronomia do Amapá – *Mirzam* – durante duas sessões de observação do céu com telescópios: uma durante o dia, com a utilização de um telescópio solar PST (*Personal Solar Telescope*), o qual é um equipamento dedicado exclusivamente à observação solar; e, uma noturna com o apoio material de diversos telescópios para observação do céu noturno, cartas celestes e planisférios (carta celeste móvel).

1.2 ANÁLISE DAS RESPOSTAS

O Gráfico 1 evidencia o nível de escolaridade por faixa de idade da amostra dos visitantes ao Monumento Marco-Zero do equador que aceitaram responder ao questionário.

Gráfico 1: Nível de escolaridade por faixa de idade dos entrevistados.



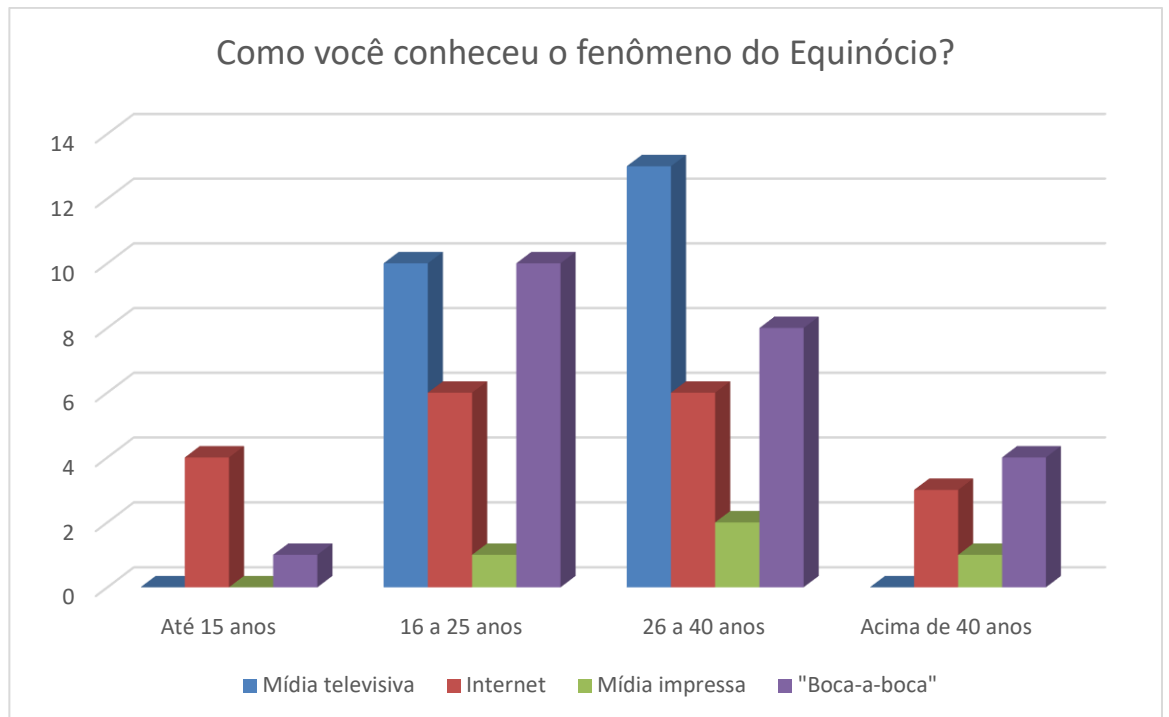
Fonte: O autor.

Fica evidenciado no Gráfico 1 que a maior parte do público entrevistado teve acesso à educação básica em nível médio, tendo-se também uma parcela considerável de pessoas com nível superior completo e também pós-graduados. Desta forma, percebe-se a heterogeneidade dos entrevistados, com pessoas de idades diversas e certa variedade em termos de nível de escolaridade, e isto pode impactar de forma positiva na análise das repostas às perguntas sobre o fenômeno,

pois, desta forma, há mais celeridade na análise do perfil do visitante ao monumento. Se o público entrevistado fosse composto apenas de estudantes universitários e pessoas graduadas e pós-graduadas haveria uma maior possibilidade de acerto nas perguntas sobre este fenômeno do que se o público fosse composto exclusivamente de estudantes que ainda estão cursando o ensino fundamental, devido ao maior contato com conteúdo científico a qual os primeiros foram submetidos.

O Gráfico 2 representa como cada parcela dos entrevistados conheceu o fenômeno do Equinócio, se foi através da mídia televisiva, da *internet*, da mídia impressa ou através de comunicações “boca-a-boca”.

Gráfico 2: Meios de comunicação pelos quais os entrevistados conheceram o fenômeno do Equinócio.



Fonte: O autor.

Observa-se no Gráfico 2 que para os jovens até 15 anos de idade, o principal meio de comunicação utilizado é a *internet*, como já era esperado devido à grande proliferação de redes sociais, mídias de muito sucesso pela população em geral e mais ainda entre os mais jovens; e, além disso, não se pode menosprezar o fato de que os jovens da atualidade fazem parte de uma geração que já nasceu convivendo com a relevância dessa tecnologia, sendo que desta forma foram precocemente estimulados a aprender como utilizar equipamentos tecnológicos, tais como computadores e telefones celulares, que podem ser úteis tanto para informação quanto para entretenimento (SPIZZIRRI, 2017, p. 334). Ressalta-se também a grande quantidade de entrevistados que conheceram este fenômeno através da mídia televisiva,

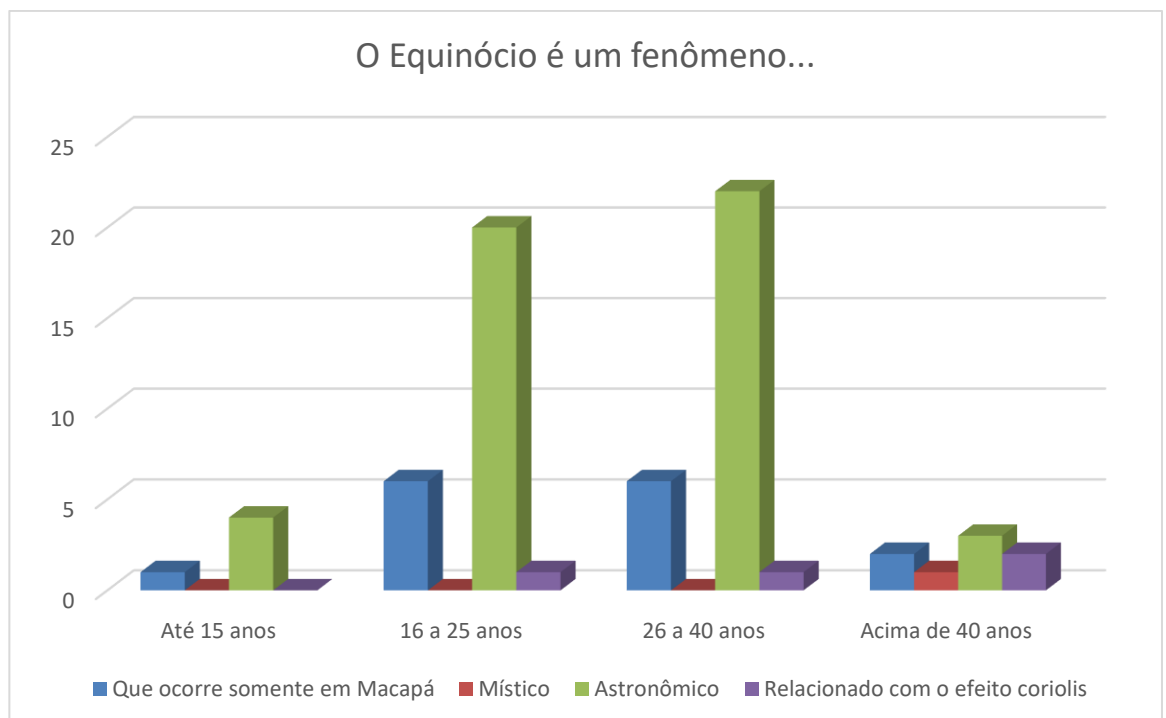
principalmente entre 16 e 40 anos de idade, o que demonstra que a televisão ainda possui um papel importante na disseminação de informações de caráter científico, além de que, deve-se destacar que o Equinócio é bastante discutido pelos jornais televisivos locais da cidade de Macapá, no Estado do Amapá, pois, as datas do Equinócio fazem parte da programação cultural local, e atrai muitos turistas a cidade.

Ainda no Gráfico 2, percebe-se o quanto a mídia impressa precisa mudar, pois, tem sido substituída por outros meios de comunicação – mas não extinguida -, e, com a consolidação do mundo digital isto não é surpresa, conforme já era esperado pela sociedade, conforme afirmação de Caldas (2002):

[...] o velho jornal impresso, o que será dele na era dominada pela mídia eletrônica? Abalado em sua estrutura, ainda sob o impacto da revolução tecnológica e das grandes transformações ocorridas no cenário internacional nos últimos dez anos, se não se pode dizer que ele vai bem, obrigado, tudo indica sobreviverá mais uma vez aos que apressadamente renunciaram o seu desaparecimento. Seu maior desafio agora é mudar, preservando seus valores e principais características (CALDAS, 2002, p. 17).

No Gráfico 3 está representada a primeira questão que trata sobre o conhecimento básico a respeito do fenômeno Equinócio.

Gráfico 3: A quarta questão indaga sobre a natureza do Equinócio.



Fonte: O autor.

A quarta questão foi “*O Equinócio é um fenômeno...*”, onde percebe-se que a maioria dos entrevistados, em todas as faixas de idade, responderam corretamente, ou seja, afirmaram que o Equinócio é um fenômeno de caráter astronômico; demonstrando assim que as divulgações existentes relacionando este fenômeno com movimento planetário e posição relativa de astros celestes estão surtindo efeitos positivos na comunidade.

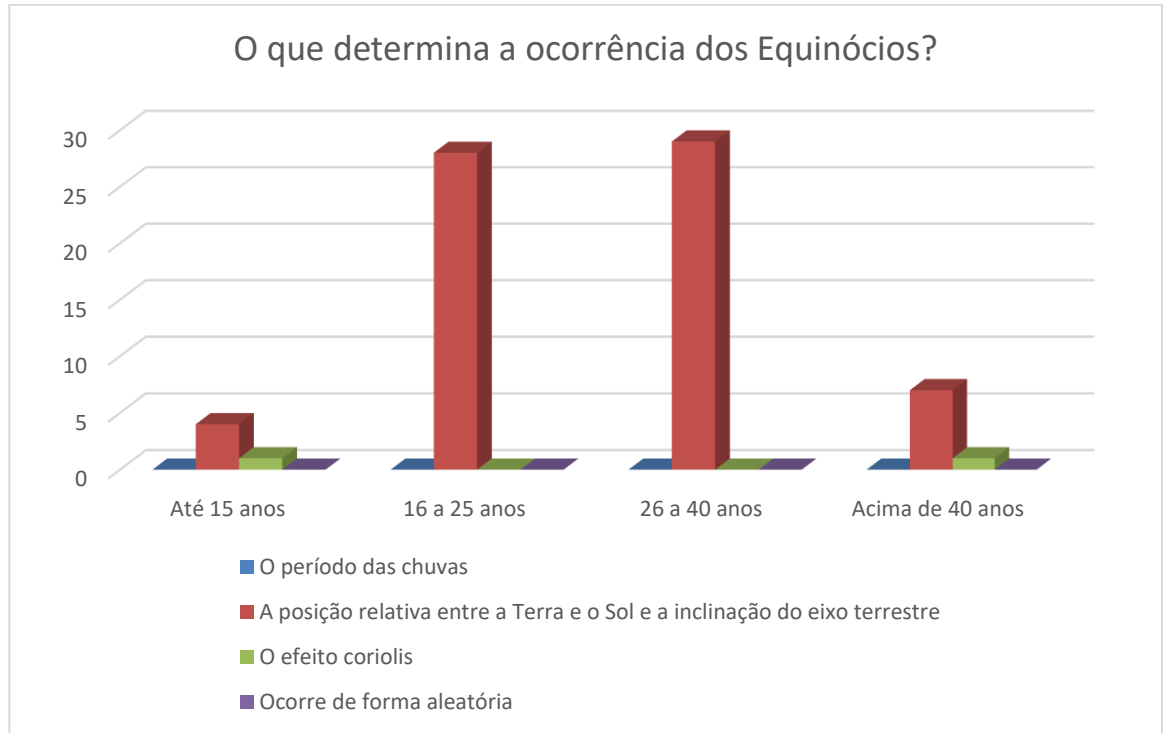
Por outro lado, mesmo a questão em pauta sendo uma indagação complementar muito básica, percebeu-se que algumas pessoas ainda se confundem sobre o elementar caráter astronômico deste fenômeno; sendo que também é pertinente analisar-se os possíveis motivos dos erros observados. As alternativas foram escolhidas de modo a provocar no interlocutor uma reflexão sobre tudo o que ele escutou e leu até então sobre o Equinócio, o que certamente fez com que algumas pessoas optassem por responder que este fenômeno ocorre exclusivamente em Macapá, um erro cometido de forma recorrente nos meios de comunicação locais; do mesmo modo também ocorre com aqueles que relacionam tal fenômeno com misticismo e conceitos nitidamente desconciliados com os científicos. Além disso, é muito comum que algumas pessoas – pelo menos do Estado do Amapá – relacionem o Equinócio com o efeito Coriolis, já que, comumente quando se trata dos fenômenos naturais que possuem relevância para um observador a latitude zero, estes dois fenômenos entram em pauta; porém, é importante que seja enfatizado que eles não possuem relação.

Sobre essa dificuldade dos moradores locais compreenderem o Equinócio, Silva, Voelzke e Araújo citam o seguinte:

[...] muitos não compreendem as características específicas para a Latitude zero e que tornam o fenômeno dos Equinócios tão importante para o povo amapaense, e não seria exagero mencionar que por vezes nem mesmo os próprios moradores do Amapá sabem o que significa o fenômeno que festejam a cada semestre. (SILVA, VOELZKE, ARAÚJO; 2018, pág. 179).

O Gráfico 4 fornece a representação para as respostas à questão 5 “*O que determina a ocorrência dos Equinócios?*”

Gráfico 4: A quinta questão verifica o conhecimento dos entrevistados sobre as causas que determinam o Equinócio.

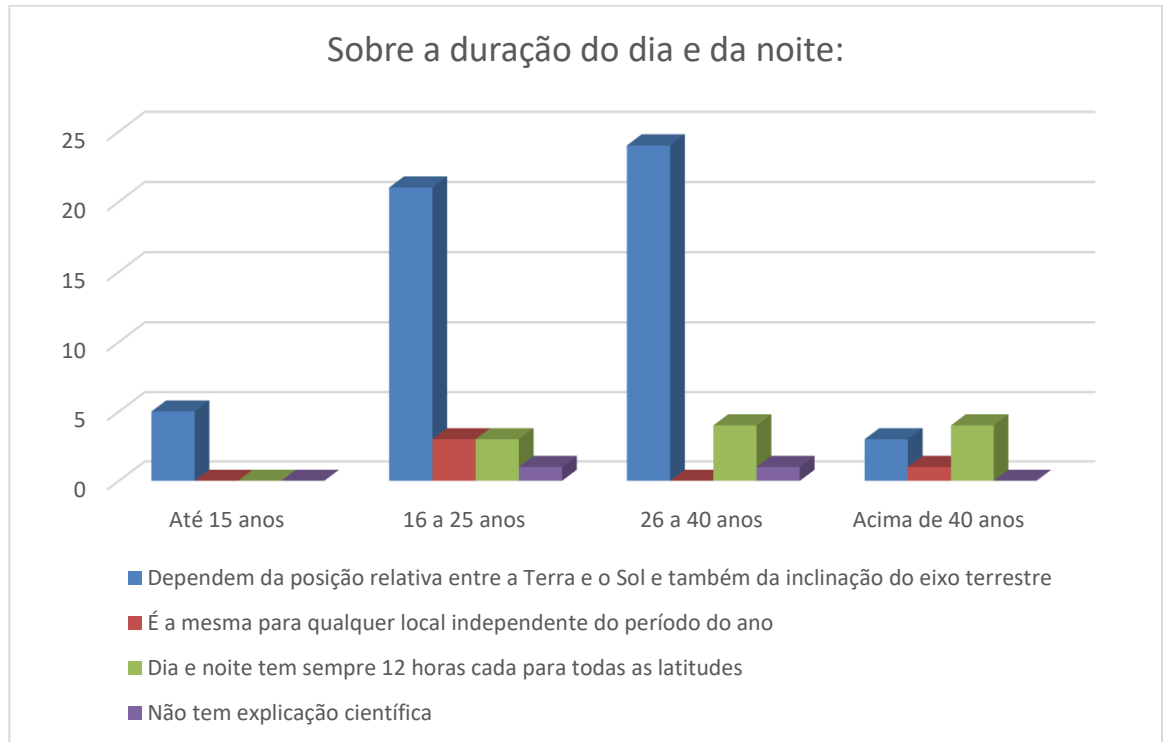


Fonte: O autor.

Analisando o Gráfico 4, observa-se que foi quase unânime a escolha dos entrevistados pela resposta “*A posição relativa entre a Terra e o Sol e a inclinação do eixo terrestre*” (uma explicação mais concisa para esta afirmação será vista com detalhes no Capítulo 3), que era a resposta esperada, ratificando de certa forma o resultado observado no gráfico anterior, já que, os entrevistados demonstraram que realmente compreendem que o Equinócio possui relação com o movimento de translação terrestre, ou seja, um fenômeno astronômico; e isto corrobora com a parcela de informações corretas sobre este fenômeno que são veiculadas recorrentemente nos meios de comunicação. De outra forma, verifica-se que as poucas respostas discordantes foram relacionando a ocorrência dos Equinócios com o efeito Coriolis, e este erro é devido à grande exposição dada ao efeito Coriolis na capital amapaense; entretanto, como já foi citado, os dois fenômenos não possuem relação.

Abaixo tem-se o Gráfico 5, o qual traz a indagação sobre a duração do dia e da noite (duração da parcela “escura” e “iluminada” do dia).

Gráfico 5: A sexta questão traz a discussão sobre a duração do dia e da noite.



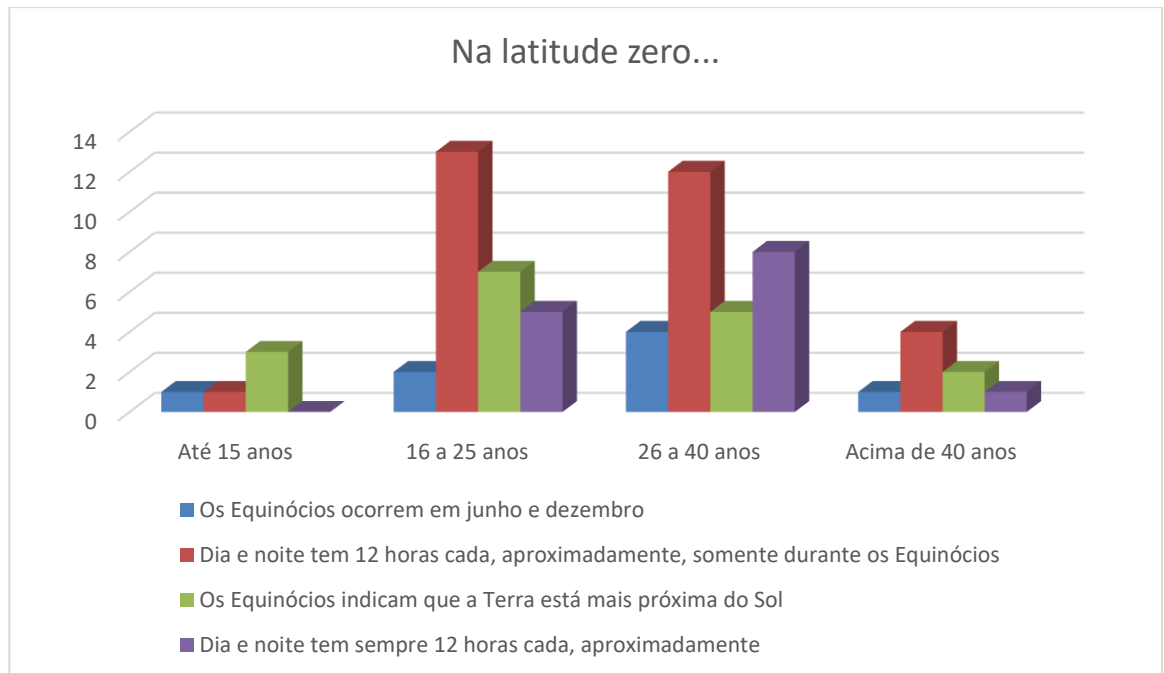
Fonte: O autor.

O Gráfico 5 permite que seja facilmente verificado que os entrevistados acreditam que a duração da parte noturna e diurna do dia é devida à posição relativa entre a Terra e o Sol combinada a inclinação do eixo de rotação terrestre, o que demonstra conhecimento factível do fenômeno. Aqui mais uma vez verifica-se que os entrevistados possuem um bom nível de conhecimento científico relacionado ao movimento terrestre em torno do Sol, sendo mais específico, sobre um dos efeitos decorrentes da combinação deste movimento com a inclinação do eixo terrestre.

O fato de algumas pessoas optarem pelo item “*Dia e noite tem sempre 12 horas cada para todas as latitudes*” é devido ao fato de que durante o período de ocorrência dos Equinócios, as partes diurna e noturna do dia possuem praticamente a mesma duração em todo o globo – informação bastante difundida pela mídia -, e isto causou certa confusão na análise efetuada por uma pequena parcela dos entrevistados.

Abaixo tem-se o Gráfico 6 ressaltando o entendimento dos entrevistados a respeito das peculiaridades relativas à latitude zero.

Gráfico 6: A sétima questão investiga a compreensão sobre a duração do dia e da noite para a latitude zero.



Fonte: O autor.

A questão 7 trouxe a seguinte indagação complementar “*Na latitude zero...*” objetivando provocar o entrevistado a pensar sobre as especificidades para um observador a partir do referencial da linha do equador.

O Gráfico acima deixa claro que o fato de que a duração do dia e da noite possui aproximadamente a mesma duração para todo o planeta, durante os dias de ocorrência de um Equinócio, é bastante conhecido por uma parcela considerável dos entrevistados; porém, a alternativa contendo a resposta “*Dia e noite tem 12 horas cada, aproximadamente, somente durante os Equinócios*” contém o equívoco devido a limitação que a palavra “*somente*” imprime ao texto, pois, para o referencial da latitude zero tem-se que “*Dia e noite tem sempre 12 horas cada, aproximadamente*” conforme a alternativa correta desta questão (a explicação deste fato é fornecida no subitem 3.3). Observa-se também que os entrevistados com idade até 15 anos deram mais crédito para a alternativa “*Os Equinócios indicam que a Terra está mais próxima do Sol*”, o que pode ter relação com o erro apresentado em diversos livros didáticos em que se faz explicação de fenômenos associados às estações do ano com a proximidade entre a Terra e o Sol, um erro bastante comum conforme relata Canalle (1997, p. 257):

...No Livro 2, p.42, podemos ler sobre este fenômeno:

“O dia 21 de dezembro é o dia em que o hemisfério sul recebe mais calor...” e “Do mesmo modo, o dia 21 de junho é o ponto máximo do inverno no hemisfério sul ...”

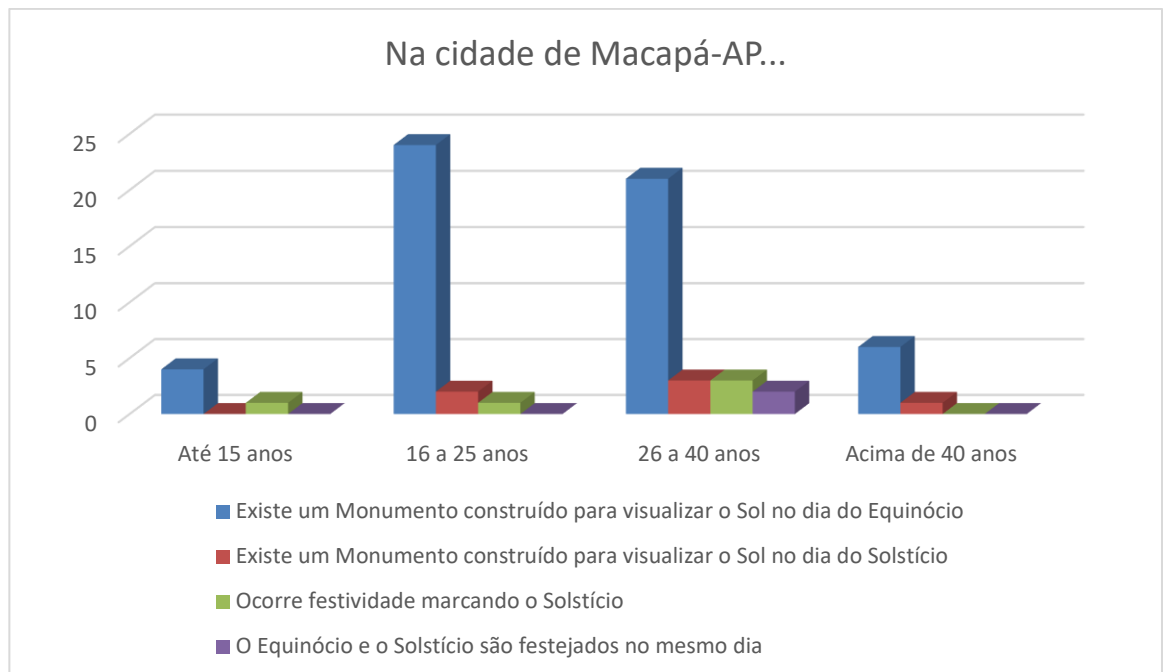
A seguir vem a frase:

“Fora esses dias que marcam o momento em que a Terra mais se aproxima e mais se distancia do Sol, na realidade, as estações do ano não são tão bem definidas como mostra o quadro acima”

O texto está claramente afirmando que o verão é devido à maior proximidade da Terra ao Sol e que o inverno é justamente devido ao maior afastamento entre eles, o que é um erro.

Logo abaixo, o Gráfico 7 traz a análise para a última pergunta do questionário, que dispõe a respeito da relação entre a cidade de Macapá-AP e o fenômeno do Equinócio.

Gráfico 7: A última questão traz uma pergunta direta sobre a cidade de Macapá-AP.



Fonte: O autor.

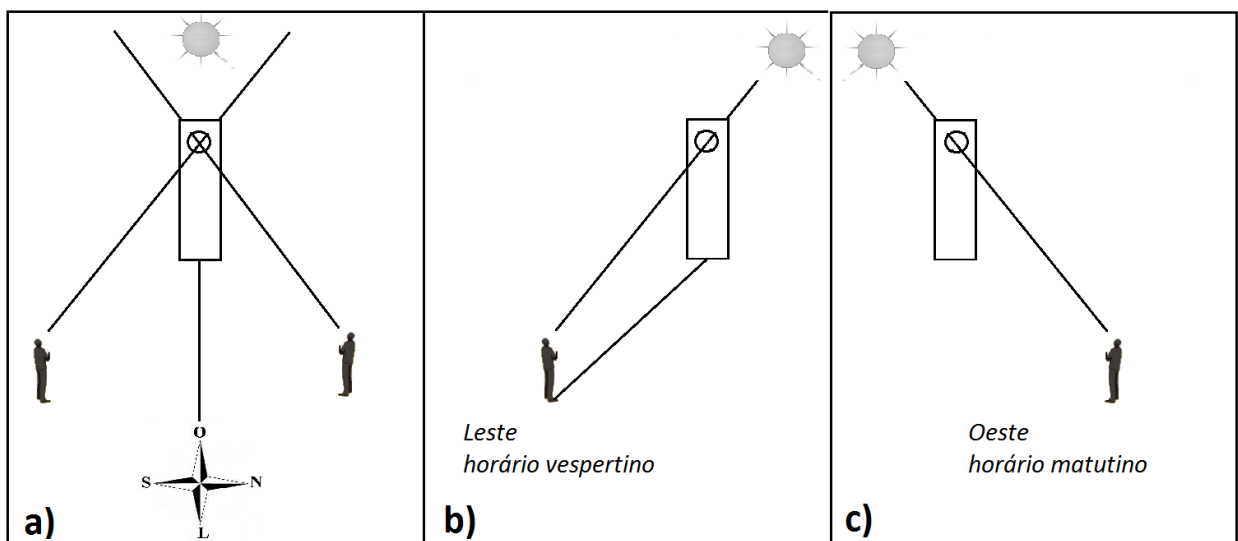
Finalizando a análise quantitativa tem-se a oitava questão “Na cidade de Macapá-AP...” e o Gráfico 7 demonstra visual e numericamente que foi quase unânime entre os entrevistados a resposta “Existe um Monumento construído para visualizar o Sol no dia do Equinócio”, e esta era a resposta esperada, sendo que ela corrobora a visão que Moraes e Moraes (2017, p.117) sustentam sobre tal monumento:

[...] Quem visita este local, pode dispor do privilégio de pisar, ao mesmo tempo nos dois hemisférios e ainda apreciar as belezas da cidade. Um cenário curioso pode ser visto no amplo terraço do monumento, através do obelisco, de onde se pode observar o Equinócio [...]

Mesmo sendo a resposta esperada, esta questão é um pouco mais sutil do que se apresenta à primeira vista; pois, é nítida a frustração de alguns visitantes do Monumento Marco zero do Equador que ficam olhando para o orifício no obelisco aguardando para observar o Equinócio, e, na maioria das vezes não conseguem ver o Sol desta forma.

Neste ponto é importante esclarecer que é propagado de forma equivocada que no momento exato da passagem do Sol de um hemisfério para o outro se pode observar o fenômeno do Equinócio através do orifício do obelisco, já que, neste momento o obelisco enquadra o Sol perfeitamente; dando a impressão de que toda vez que ocorrer este fenômeno o observador poderá, no exato horário previsto do Equinócio, olhar para o obelisco e visualizar o Sol através do orifício (MORAIS e MORAIS, 2017, p.117). Isto é errado e não fornece contribuição para a popularização correta de tal fenômeno. O que ocorre é que durante o dia inteiro da ocorrência do Equinócio pode-se observar o Sol através do obelisco - não precisa ser apenas no exato momento do fenômeno – dependendo da posição em que o observador se encontrar. Veja na Figura 1 uma representação didática de como observar o Sol durante o dia do Equinócio.

Figura 1: a) Um observador ao norte e um ao sul da linha do equador observando pelo orifício do obelisco no dia do Equinócio. b) Um observador no terraço do monumento, sobre a linha do equador, observando o Sol através do orifício do obelisco no dia do Equinócio. c) Um observador na área de estacionamento do estádio “zerão”, e do sambódromo, observando o Sol através do orifício do obelisco no dia do Equinócio.



Fonte: O autor.

Na Figura 1 evidencia-se que um observador que pretenda observar o Sol no dia do Equinócio, olhando para o obelisco existente no Monumento Marco Zero do

Equador, o mesmo poderá fazê-lo de duas posições distintas; sendo que uma pode ser posicionando-se no lado oeste do obelisco (Figura 1c), na área aberta reservada como estacionamento do estádio de futebol “zerão” e do sambódromo (possível somente se a SETUR não houver reservado esta área para outro tipo de atividade, como a do Jeep Clube que vem ocorrendo nos últimos anos); e, neste caso, a observação deverá ser efetuada pela parte da manhã – até o meio dia -, porém, esta escolha é desaconselhável porque neste estacionamento não há uma marcação no solo indicando a linha do equador e também pela insegurança devida à circulação de veículos automotores. A segunda posição possível, sendo mais aconselhada, é a leste do obelisco, posicionando-se sobre a linha do equador demarcada no terraço do monumento (Figura 1b), no período da tarde, após o meio dia solar, olhando para o Sol através do orifício no obelisco (sempre utilizando proteção adequada para observar o Sol diretamente, conforme Anexo 2). A Figura 1a evidencia que está incorreta a afirmação de que basta olhar para o Sol através do orifício do obelisco no dia do Equinócio para observar o fenômeno, já que, tal visualização depende da posição relativa entre o observador, obelisco e o Sol.

Outrossim, verifica-se também que uma minoria dos entrevistados respondeu que “Existe um Monumento construído para visualizar o Sol no dia do Solstício” e “Ocorre festividade marcando o Solstício”, e isto evidencia que há certa confusão de uma parcela dos entrevistados a respeito da diferença entre os fenômenos do Solstício e do Equinócio; o que corrobora a necessidade da elaboração de trabalhos que visam a popularização de conceitos de Astronomia.

1.3 CONCLUSÕES SOBRE O EMPREGO DO QUESTIONÁRIO

- O Gráfico 1 mostra que a maioria dos entrevistados possui idade entre 16 e 40 anos e possuem nível de escolaridade majoritariamente entre nível médio e Pós-graduação, demonstrando certo nível de maturidade entre os entrevistados.
- O Gráfico 2 evidencia a importância dos meios de comunicação para difundir conhecimentos sobre os fenômenos em pauta; principalmente os jornalísticos televisivos e suas respectivas plataformas digitais.
- Os Gráficos 3, 4 e 5 demonstram que a maioria dos entrevistados possuem bom nível de conhecimento básico no que refere ao fenômeno do Equinócio em termos gerais e a influência da relação entre inclinação do eixo terrestre e posição relativa entre planeta Terra e o Sol sobre a duração da parte clara do dia.

- A análise do Gráfico 6 evidencia a grande dificuldade apresentada pelos entrevistados em compreender as particularidades do fenômeno para o referencial sobre a linha do equador, no que se refere à duração do dia e da noite; e, assim sendo, tem-se uma problematização caracterizada.
- O Gráfico 7 evidencia que a população compreende que em Macapá existe um Monumento construído para observação do Sol durante os Equinócios, porém, esta questão foi levantada propositalmente devido a sutilezas que raramente são difundidas a esse respeito, como a disposição necessária para observar-se realmente o Sol através do orifício do obelisco.
- Uma visão geral da análise gráfica dos questionários aplicados sugere que a maioria dos entrevistados respondeu corretamente as perguntas, com a ressalva de quando se tratou da peculiaridade da duração do dia e da noite para o referencial na latitude zero, além de que a última pergunta possuía uma sutileza, fins proporcionar uma discussão mais detalhada do assunto.
- Sugere-se como hipótese que uma abordagem para a sala de aula da disciplina matemática, no ensino básico, onde pode-se desenvolver conceitos de trigonometria e geometria utilizando-se aplicações em Astronomia, mais especificamente nos conceitos básicos de Astronomia que são requisitos para a compreensão do fenômeno do Equinócio e suas características específicas para a latitude zero, com ênfase na discussão sobre a duração do dia e da noite; traz benefícios para reduzir a abrangência do problema identificado anteriormente (consequentemente colaborando para a popularização científica do fenômeno do equinócio a partir da latitude zero), além de que, ocasionará um aprendizado mais significativo dos conceitos matemáticos lecionados.

2 DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS QUE PODEM SER TRABALHADOS ATRAVÉS DO ESTUDO DO EQUINÓCIO

2.1 DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Há uma corrente crescente de publicações em livros de divulgação científica de conteúdos com a temática “ciência sem matemática”, “Astronomia sem calculo”, entre outros que dão a falsa impressão de que os conteúdos de Física, Astronomia e ciências no geral podem ser totalmente compreendidos sem o conhecimento matemático adequado. Isto provoca uma série de fatores negativos para a disseminação apropriada de conteúdos científicos, levando muitos jovens a procurarem cursos da área de exatas nas universidades e imediatamente após seu ingresso a desistência ocorre, pois, depara-se com a realidade científica da não desvinculação entre matemática e Astronomia ou entre matemática e Física; além disso, provoca numa parcela dos leitores destes livros a falsa impressão de que esgotaram o conhecimento de tais conteúdos. É importante ressaltar que estes livros de divulgação são importantes, entretanto, os mesmos devem enfatizar a importância da matemática para uma compreensão mais adequada do conteúdo científico propagado.

Muitas pessoas consideram que matemática é a disciplina onde se encontra a maior dificuldade de aprendizagem, fato este corroborado pelo elevado número de notas baixas e reprovações relacionado a essa área de conhecimento (AMANAJÁS, 2019, p. 70).

Sobre as dificuldades que os alunos possuem em aprender matemática e, conseqüentemente, isto tornar-se um problema maior com o passar do tempo, Pacheco e Andreis afirmam que:

As dificuldades de aprendizagem na Matemática podem acarretar baixos rendimentos e geram preocupações entre os envolvidos. O insucesso de muitos estudantes é um fator que os leva, cada vez mais, a terem certa aversão a essa disciplina, desenvolvendo dificuldades ainda maiores com o passar dos anos escolares (Pacheco & Andreis, 2018).

Diante deste cenário, onde evidencia-se cada vez mais que há necessidade de mudanças nos métodos tradicionais de ensino de matemática, principalmente no que concerne ao ensino básico, alguns pesquisadores na área de ensino de matemática buscam implementar metodologias de ensino visando amenizar o problema que se apresenta. Em consonância com este pensamento, Tomaz e David (2013; p. 14) citam

o seguinte:

[...] Percebendo essas limitações das escolas, muitas pesquisas em Educação, particularmente em Educação Matemática, vêm produzindo e ampliando consideravelmente o conhecimento sobre os processos de construção de significado, as formas de aprendizagem e sobre os procedimentos de ensino, o que se tem traduzido em reformulações curriculares e em novas diretrizes pedagógicas que se fazem presentes nos meios escolares. Essas propostas pretendem mudar o isolamento e a fragmentação dos conteúdos, ..., elegendo dois princípios básicos para o ensino de Matemática: o da contextualização e o da interdisciplinaridade.

Visando o enfrentamento deste problema, este trabalho apresenta um pensamento afim desta citação acima, onde a interdisciplinaridade é utilizada através do uso da Astronomia em conjunto com a Matemática; e, a contextualização é evidenciada através da ênfase da metodologia aplicada fins popularizar a ciência e as peculiaridades existentes sobre o fenômeno do Equinócio para o referencial da linha do equador, tomando-se a cidade de Macapá-AP como exemplo.

Como o problema na compreensão da matemática é um tema muito extenso, faz-se necessário que os pesquisadores da área de ensino desta disciplina trabalhem conceitos específicos em cada artigo, livro, ou outra produção científica em que estiver trabalhando. Neste trabalho optou-se por trabalhar conceitos de duas áreas da matemática: a trigonometria e a geometria.

A dificuldade apresentada pelos alunos de ensino médio para compreender os conceitos de trigonometria é corroborada pelo estudo feito por Dionizio e Brandt (2011, p. 4420):

[...] Constatarmos que a natureza das dificuldades dos alunos do Ensino Médio em trigonometria, está na falta de conceitualização dos objetos matemáticos, pois os alunos não fazem relação da forma de representação com o objeto matemático que está sendo representado. Essa pesquisa revela a necessidade de uma mudança na maneira como o conteúdo de Trigonometria é apresentado aos alunos em sala de aula, para que haja a superação dos fracassos encontrados.

Neste caso observou-se a necessidade de se trabalhar os conceitos básicos de trigonometria, tais como *seno* e *co-seno*, de forma menos abstrata, usando aplicações claras em situações que despertem o interesse e a curiosidade dos discentes. Sugere-

se que estes conceitos – e outros conceitos relacionados – possam ser explorados de forma significativa em conjunto com a análise do estudo sobre como determinar a duração do dia e da noite para qualquer local do planeta Terra e para qualquer época do ano.

Após analisar diversas pesquisas e exames que acenam um problema latente relacionado com a atual dificuldade apresentada pelos estudantes no que se refere aos conhecimentos básicos de Geometria, Pereira (2001; p. 7) enfatiza o seguinte:

[...] Todas essas questões e outras subsequentes, durante esses anos, geraram polêmicas e colaboraram para evidenciar a ausência da Geometria nas escolas, cujo reflexo, hoje, interferem nos saberes dos professores em atuação. Portanto, pode-se afirmar que os conteúdos que não foram aprendidos pelos professores também não serão sequer transmitidos, quanto mais interagidos – originando um círculo vicioso – que afeta, por conseguinte, gerações de alunos que não aprendem Geometria.

Desta forma, evidencia-se que existe um problema no processo de ensino-aprendizagem de Geometria.

Em termos gerais, os alunos de ensino médio apresentam dificuldades para compreenderem os conceitos matemáticos, entretanto, observa-se a potencialidade de se utilizar a Astronomia para auxílio recíproco na compreensão de seus conceitos em conjunto com conceitos matemáticos específicos, tais como trigonometria e geometria.

2.2 COMO A TRIGONOMETRIA É TRABALHADA TRADICIONALMENTE EM SALA DE AULA

Para que o estudante se familiarize e não tenha grandes dificuldades ao ter o seu provável primeiro contato com o estudo sistemático da Astronomia, faz-se necessário um certo domínio e destreza nas manipulações de equações trigonométricas e também de certas funções trigonométricas, principalmente quando estiverem sendo analisados os motivos de desigualdades ou não entre a parte noturna e diurna do dia.

Inicialmente é importante verificar o currículo médio de trigonometria utilizado nos livros didáticos – e que se reflete no conteúdo explorado em sala de aula -, verificando-se se tal conteúdo permite que o aluno tenha o conhecimento básico de tópicos de trigonometria, fins não comprometer o aprendizado de conceitos de Astronomia. Para tal propósito disponibiliza-se parte do conteúdo abordado por Dante

(2008), conforme se dispõe abaixo:

Livro consultado: DANTE, L. R. Matemática. São Paulo: Ática, 2008.

- Conteúdo: 14. Trigonometria no triângulo retângulo;
 15. Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer;
 16. Conceitos trigonométricos básicos;
 17. Seno, cosseno e tangente na circunferência trigonométrica;
 18. Relações e equações trigonométricas;
 19. Transformações trigonométricas;
 20. Senóides e fenômenos periódicos.

De forma semelhante, foi verificado também parte do conteúdo programático explorado por Barroso (2010):

Livro consultado: BARROSO, J. M. (Ed. Resp.). Conexões com a Matemática. V.1, Ed. 1. São Paulo: Moderna, 2010.

- Conteúdo: 10. Triângulo retângulo;
 1. Razões trigonométricas;
 2. Seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos.

Observa-se que os conteúdos programáticos nos livros indicados são compatíveis para se trabalhar conceitos básicos de Astronomia, ressaltando-se que a ideia aqui apresentada é que a aprendizagem deve se dar tanto em Matemática quanto em Astronomia. Concluindo-se que os conteúdos de trigonometria dispostos nos livros didáticos apresentam os conceitos básicos ao estudante, sendo que hipoteticamente a complementação deste conteúdo com a aplicação de alguns destes conceitos em Astronomia pode tornar o processo de ensino-aprendizagem mais significativo, além de proporcionar o contato dos estudantes com conceitos de Astronomia, colaborando assim com a divulgação de tais conteúdos (o que será testado no capítulo 4).

2.3 CONCEITOS BÁSICOS DE GEOMETRIA NECESSÁRIOS PARA A COMPREENSÃO DO FENÔMENO DO EQUINÓCIO

Para minimizar as dificuldades que o aluno possa enfrentar ao se deparar com os conceitos de Astronomia, tais como a ocorrência das estações climáticas serem decorrentes de movimentos planetários relacionados com inclinação de eixo de um

planeta com relação ao **plano** da órbita e, é importante citar também, as análises feitas com a utilização de uma **esfera** celeste para a compreensão de diversos fatores a serem analisados no próximo capítulo; é de fundamental importância que o professor se dedique a uma breve explanação destes dois conceitos básicos de geometria plana e espacial: plano e esfera.

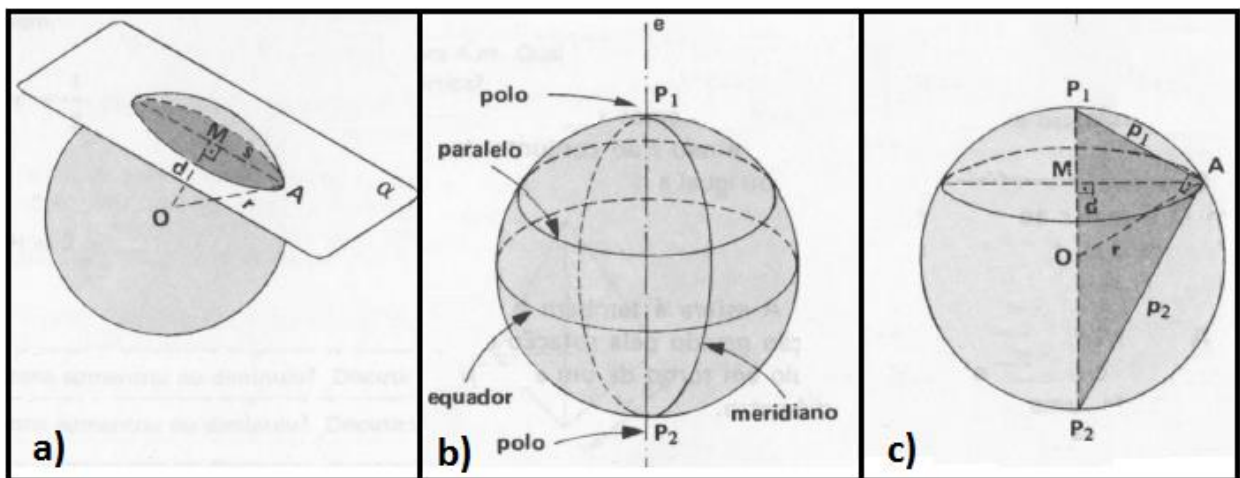
O conceito de plano é considerado por muitos como um conceito primitivo; porém, o professor pode utilizar a definição dada por Moreira (2020):

[...] **Planos** são figuras geométricas bidimensionais formadas pela reunião de infinitas retas, perpendiculares a uma reta dada, dispostas lado a lado... Os **planos** podem ser formados por retas, assim como as retas podem ser formadas por pontos. Uma reta é um conjunto de pontos que não faz curva. Um **plano**, por sua vez, é um conjunto de retas que não faz curva.

Com relação ao conceito de esfera o professor dispõe de diversos exemplos para que o aluno faça a associação entre seu conhecimento do cotidiano e o conceito matemático; dentre os quais pode-se citar a bola de futebol, globo terrestre, bola de bilhar, dentre outros.

Na Figura 2 pode-se compreender alguns elementos que podem ser obtidos através da análise de uma esfera.

Figura 2: a) Secção de uma esfera. b) Elementos de uma esfera. c) Distância de um ponto da superfície ao polo de uma esfera.



Fonte: Modificado de DOLCE e POMPEO; 1985; p. 242-J.

Em 2.a) tem-se uma secção de uma esfera, ou seja, um “corte” na esfera com um plano; evidenciando-se que a intersecção entre a esfera e o plano é um círculo (um círculo de raio r e centro O é o conjunto de pontos P do plano que estão à distância r de

O). Quando este plano secante à esfera (plano que “corta” a esfera) passa pelo centro da mesma, obtém-se o círculo máximo da esfera, isto é, a esfera foi dividida em duas partes iguais denominadas semicírculos (Dolce e Pompeo; 1985; p. 242-J).

O item 2.b) traz a superfície de uma esfera de eixo e . tendo-se que os polos relativos a uma secção esférica correspondem às extremidades do diâmetro perpendicular ao plano desta secção (Dolce e Pompeo; 1985; p. 242-J). Logo, evidencia-se alguns conceitos listados abaixo:

- Polos – As intersecções da superfície esférica com o eixo;
- Equador – Refere-se à secção perpendicular ao eixo e que passa pelo centro da esfera;
- Paralelo: – Diz-se da secção perpendicular ao eixo e paralela ao equador;
- Meridiano – é uma secção (circunferência) cujo plano passa pelo eixo.

Na Figura 2.c) é enfatizado que a distância polar se refere à distância de um determinado ponto, situado em qualquer paralelo, ao polo. Esta figura evidencia ainda que um ponto qualquer da superfície da esfera possui duas distâncias polares (uma para cada polo).

Desta forma, considera-se que os conceitos discriminados acima são de fundamental importância para a compreensão dos fenômenos que serão apresentados no próximo capítulo.

3 ASTRONOMIA E SEUS FENÔMENOS

Para que a análise deste fenômeno seja eficiente, será feita a explicitação detalhada de alguns conceitos de Astronomia, com a escolha da sequência do conteúdo feita de modo didático.

Assim sendo, para a compreensão do fenômeno do Equinócio e suas consequências para as diferentes latitudes do globo deve-se entender alguns conceitos básicos de Astronomia, tais como: as estações do ano, solstícios, duração da parte iluminada e escura do dia, dentre alguns conceitos importantes.

3.1 AS ESTAÇÕES DO ANO

Sendo um dos poucos conteúdos de Astronomia que é tratado em sala de aula do ensino básico, as estações do ano fazem parte do currículo das aulas de geografia e alguns professores de Física também abordam este conteúdo em sala de aula. Entretanto, muitos livros de ensino básico trazem equívocos nas explicações destes fenômenos, além disso, é usual que nestes cursos sejam omitidos alguns conceitos básicos que são necessários para um bom entendimento deste fenômeno. De acordo com Maran (2011; pág. 84):

“Ensinar alunos sobre a causa das estações deve ser uma das tarefas mais frustrantes para qualquer professor de Astronomia. Não importa os cuidados que o professor tome ao explicar que as estações não têm nada a ver com a distância que estamos do Sol, muitos alunos não aprendem. ”

Desta forma, faz-se necessário uma explicação deste fenômeno de forma que seja compreensível e adequado ao ensino básico, porém, deve-se evitar a omissão de termos e conceitos necessários tanto para a compreensão das estações do ano, quanto para o estudo de outros fenômenos de Astronomia.

Portanto, neste capítulo será tratado sobre as estações do ano com uma abordagem seguindo as características já citadas, de forma a encorajar o professor do ensino básico a se aprofundar neste conteúdo, aperfeiçoando-se, e elevando o grau de aprendizado dos alunos.

As diferentes estações do ano podem ser explicadas didaticamente a partir da análise da inclinação do eixo de rotação terrestre (em relação a perpendicular ao plano da órbita) e das posições relativas entre planeta Terra e Sol durante um ano terrestre. Uma definição concisa e didática das estações do ano é fornecida por Mourão (1987,

pág. 282):

“Um dos quatro períodos do ano que se distinguem entre si pelas características climáticas. As estações do ano são: verão, outono, inverno e primavera. As estações resultam da inclinação do eixo da Terra em relação à eclíptica. Faz mais calor no verão do que no inverno porque os dias, além de serem mais longos, têm o Sol mais elevado no céu. As estações astronômicas não têm a mesma duração em virtude do movimento aparente do Sol, ao longo da eclíptica, não ser absolutamente uniforme. “

É importante analisar na figura 3 como a inclinação do eixo de rotação terrestre em relação à normal N ao plano da órbita influencia na determinação das diferentes estações climáticas. Neste caso, o hemisfério norte está no inverno, devido ao ângulo de inclinação dos raios solares; e, além disso, deve-se ressaltar que as noites tem a duração maior do que o dia, o que pode ser verificado observando que a parte escura na figura 3 ocupa uma área maior do que a parte iluminada (isto também influencia em verificar-se baixas temperaturas durante o inverno). A análise do hemisfério sul desta figura é feita de mesmo modo, apresentando características opostas às do hemisfério norte.

Figura 3: Efeito da inclinação do eixo de rotação da Terra

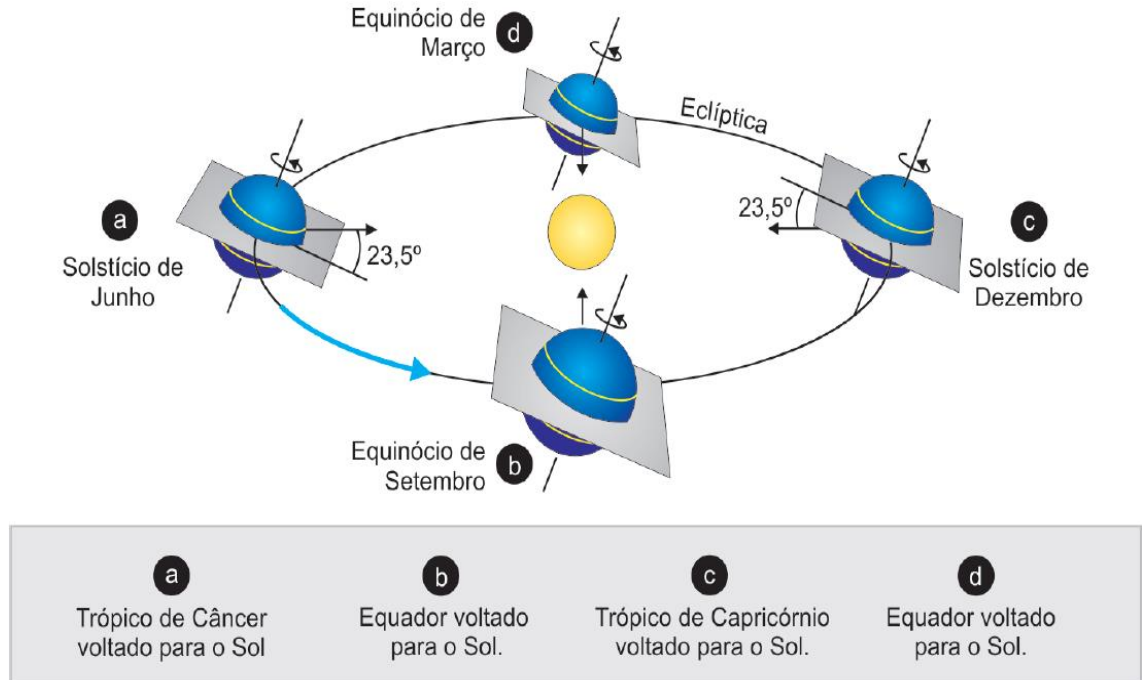


Fonte: Modificado de REES, 2008b, p. 63.

A figura 4 representa o movimento de translação da Terra em torno do Sol, evidenciando a inclinação do eixo terrestre em relação ao plano da órbita. As posições b e d não possuem inclinação do eixo de rotação em direção ao Sol, pois, elas representam os Equinócios de setembro e março, respectivamente; e, desta forma, em

tais posições o planeta possui os dois hemisférios iluminados pelo Sol de forma equivalente, com dias e noites tendo a mesma duração em todo o globo.

Figura 4: Posições relativas do sistema Terra-Sol durante uma revolução terrestre completa ao redor do Sol.



Fonte: OLIVEIRA FILHO, SARAIVA, 2014, p. 47.

Para facilitar o entendimento a respeito do movimento aparente dos astros celeste, isto é, tomando-se como referência um observador na superfície do planeta Terra (o qual está em movimento de rotação em torno de seu próprio eixo), olhando para os corpos celestes, tais como as estrelas, terá a impressão de que eles se movem; é importante que seja introduzido o conceito de *esfera celeste*, o qual, é expresso de forma didática por Mourão (2016, p. 26-29):

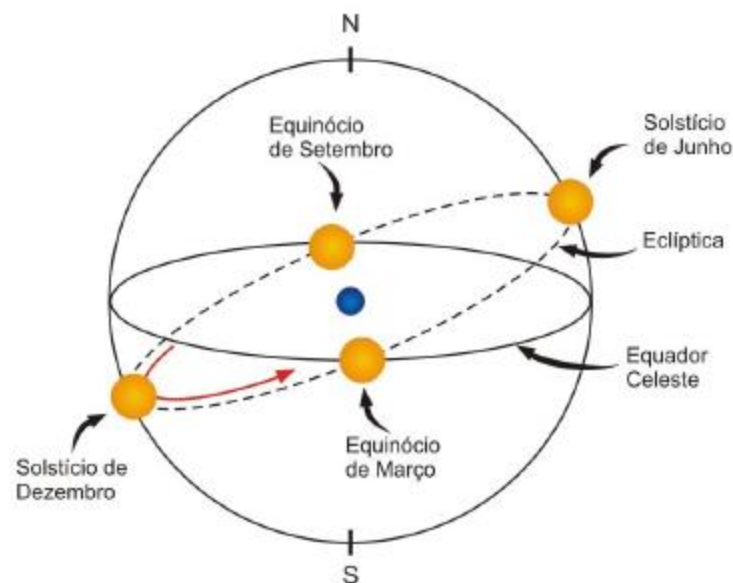
[...] parece que as estrelas estão todas numa mesma superfície redonda que nos envolve completamente. Aliás, os astrônomos representam esta superfície como um enorme globo.

... A impressão de que as estrelas estão situadas à mesma distância, numa superfície redonda, levou os antigos estudiosos do assunto a denominar de esfera celeste a imensa abóbada na qual elas se localizam. Esta ideia, apesar de falsa, é bastante cômoda. Afinal, o estudo da Astronomia fica mais fácil se posicionarmos as estrelas numa imensa esfera.

As peculiaridades do fenômeno do Equinócio para um observador à latitude zero

são discutidas por Silva, Voelzke e Araújo; os quais enfatizam o fato de que neste caso o Sol em seu movimento aparente diurno posiciona-se diretamente sobre a linha do equador e, ou seja, o movimento aparente do Sol praticamente coincide com o equador celeste – que é a projeção da linha do equador na esfera celeste -, desconsiderando-se uma pequena diferença angular, já que, o Equinócio é por definição o momento em que ocorre a coincidência da eclíptica com a esfera celeste, conforme discriminado na figura 5 (SILVA, VOELZKE, ARAÚJO; 2018, pág. 179).

Figura 5: Representação do movimento aparente anual do Sol, destacando-se os Equinócios como os pontos em que a eclíptica corta o equador celeste.



Fonte: OLIVEIRA FILHO, SARAIVA, 2014, p. 46.

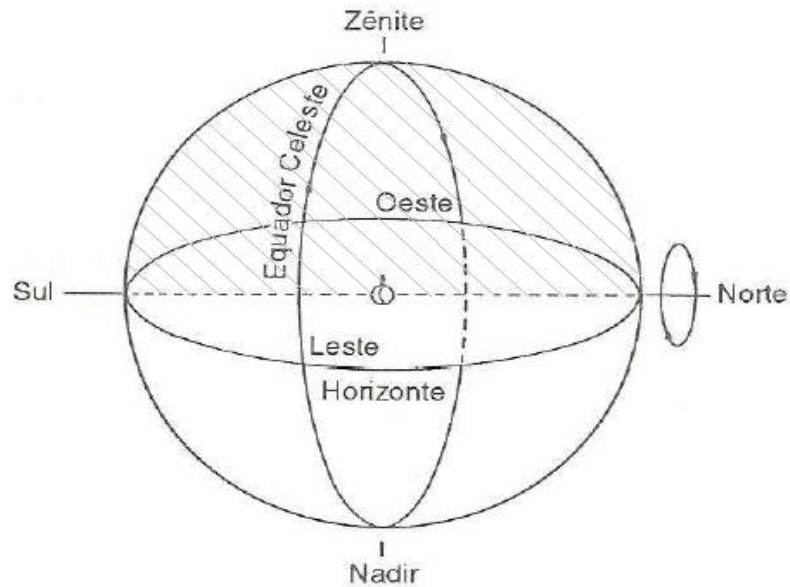
3.2 CONCEITOS BÁSICOS DE ASTRONOMIA

Uma explanação sobre alguns conceitos básicos de Astronomia é necessária para preceder os tópicos vindouros deste trabalho, proporcionando desta forma um aprendizado mais significativo, evitando a ocorrência de rebuscamento ao tratar-se de determinados eventos astronômicos.

Segue abaixo alguns conceitos básicos:

- **Zênite, Nadir, Meridiano local.**

Figura 6: Observador sobre a linha do equador.



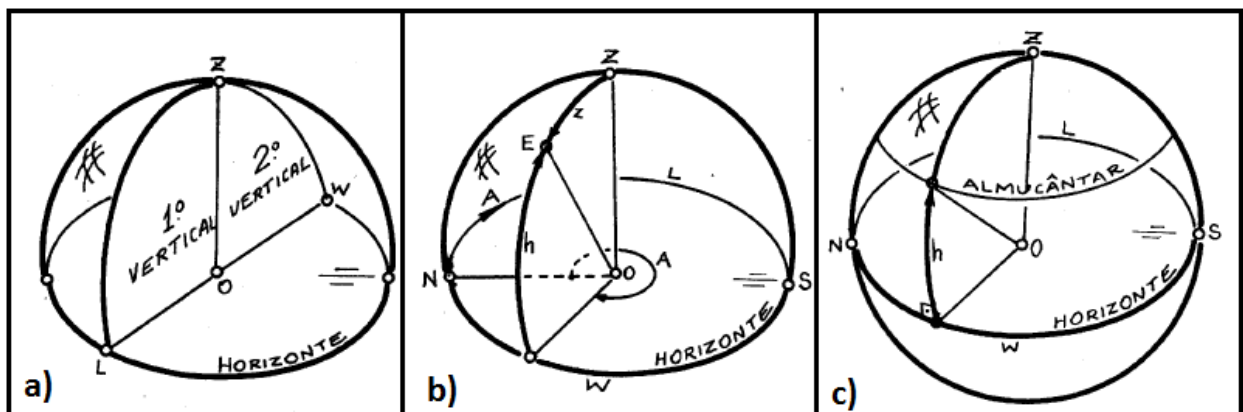
Fonte: Modificado de MOURÃO, 2004, p. 14.

A Figura 6 representa um observador situado sobre a linha do equador e discrimina alguns elementos importantes para o estudo da Astronomia, tais como o *Zênite*, que é o ponto mais alto do céu para o observador local, o *Nadir* que é diametralmente oposto ao *Zênite*; o plano que contém a linha norte-sul e passa pelo *Zênite* que é denominado *Plano Meridiano* (representado em parte pelo semicírculo hachurado da figura) e a intersecção deste plano com a esfera celeste determina o chamado *Meridiano Local*, sendo que a semicircunferência do *Meridiano Local* que está visível para o observador é denominada de *Meridiano Local Visível*.

- Sistema horizontal local de referências.

Na Figura 7 estão caracterizados os componentes necessários para conceituar o sistema horizontal local de referências.

Figura 7: a) Representação do 1º Vertical e do 2º Vertical. b) Indica a vertical, azimute, altura e distância zenital de um astro. c) Evidencia o almucântar.



Fonte: BOCZKO, 1984, p. 41-42.

Na Figura 7a se evidencia que:

- O ponto O é a posição do observador;
- O ponto z é o *zênite* local;
- O ponto L representa o ponto leste e o ponto W o ponto oeste;
- A região delimitada pela linha OL, OZ e o menor arco LZ é denominada *1ª vertical* e a região delimitada pela linha OW, OZ e o menor arco WZ é denominada *2ª vertical*.

A Figura 7b caracteriza:

- O ponto E representa a posição de um astro na *esfera celeste*;
- O conceito de *vertical* usado em 6a pode ser estendido para ajudar a caracterizar a posição de um astro no céu, logo, a *vertical* contendo a linha de visada OE é denominada *vertical de um astro*;
- O ângulo contado no plano horizontal, desde a direção norte (linha ON), no sentido leste, até atingir a vertical do astro é denominado *Azimute (A)*;

- Para o *Azimute* convencionou-se o seguinte

$$0 \leq A \leq 360^\circ;$$

- Considerando-se a *vertical de um astro*, então o ângulo contado a partir do horizonte até o astro denomina-se de *Altura (h)* de um astro;
- Convencionou-se que a *altura* é positiva acima do horizonte e negativa abaixo do horizonte, e assim, tem-se que

$$-90^\circ \leq h \leq +90^\circ;$$

- Ao ângulo ZOE denomina-se *distância zenital* do astro, para o qual convencionou-se que

$$0^\circ \leq z \leq 180^\circ ;$$

- É válida a relação

$$h + z = 90^\circ; \tag{1}$$

- Para o *sistema horizontal local de referências*, as coordenadas necessárias para determinar a posição de um astro são o *azimute (A)* e a *altura (h)*.

A Figura 7c caracteriza o seguinte:

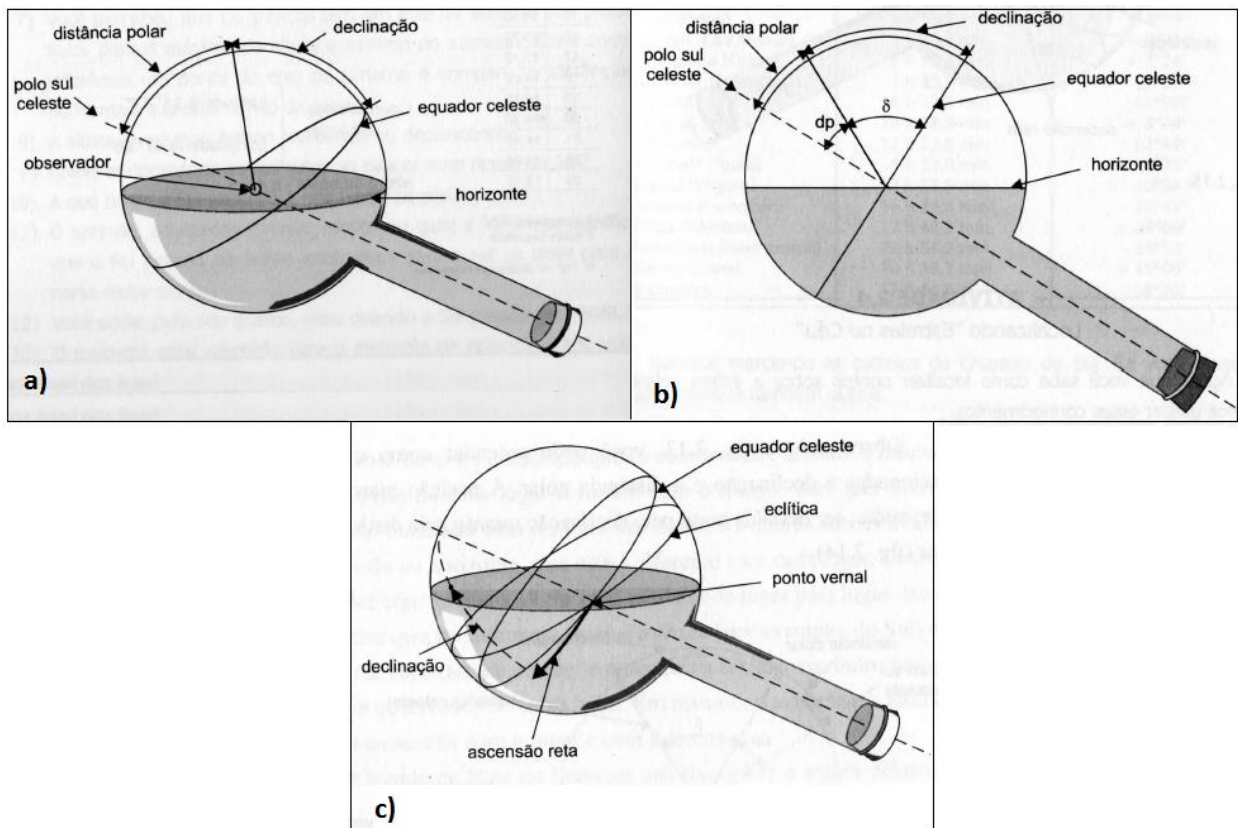
- Para uma circunferência paralela ao plano do horizonte que contenha o astro (lugar geométrico dos astros com mesma altura), denomina-se *almucântar*.

Desta forma fica esclarecido que o *sistema horizontal de referências* é fixo à Terra e as coordenadas utilizadas para localizar um astro se alteram a todo momento.

- Sistema equatorial horário de referências.

Diferente do horizontal, o *sistema equatorial de referências* é fixo na *esfera celeste* (não varia nem com o tempo e nem com o lugar), o que traz bastante benefício para astrônomos profissionais e amadores, conforme será entendido ao se analisar a Figura 8.

Figura 8: a) Representação de elementos de Astronomia esférica. b) Elementos e símbolos de alguns elementos. c) Elementos para identificação de um astro no sistema equatorial horário de referências



Fonte: CANIATO, 2011, pág. 30-31.

Na Figura 8 tem-se a representação de alguns conceitos necessários para a caracterização do *sistema equatorial horário de referências* com apoio de um balão de

vidro de fundo esférico (comumente encontrado em laboratórios de Química).

É importante observar que na Figura 8a evidencia-se o seguinte:

- A posição central do observador;
- O *equador celeste*;
- O *horizonte*;
- O *polo sul celeste*;
- A *distância polar*, que é o menor ângulo entre o polo e o astro;
- A *declinação* é definida por Caniato (2011) como:

[...] A declinação é o ângulo ou arco do meridiano, contado a partir do equador celeste. A contagem é feita para o sul ou para o norte, dependendo do hemisfério celeste em que está a estrela. A declinação varia de 0° a 90°. (CANIATO, 2011, pág. 30)

- É importante se destacar que é normalmente convencionado que para um astro que esteja no hemisfério celeste sul os ângulos de declinação recebem sinal negativo e para astros que estejam no hemisfério celeste norte sejam positivos;
- Uma comparação muito útil para quem está tendo seu primeiro contato com o conceito de declinação é relacioná-lo com a latitude terrestre, já que a latitude é contada a partir do equador terrestre e a declinação é contada a partir do equador celeste.

Na Figura 8b enfatiza-se o que segue:

- Aqui inclui-se a representação dos símbolos para *distância polar* (dp) e para a *declinação* (δ);
- Com os símbolos para *declinação* e *distância polar* pode-se escrever

$$dp + \delta = 90^\circ \quad (2)$$

Tem-se na Figura 8c a discriminação dos elementos necessários para identificar a posição de um astro na esfera celeste utilizando o *sistema equatorial horário de referências*, conforme listados abaixo:

- Observa-se em 8c a representação do ponto vernal (γ - *gamma*), que representa um dos momentos de ocorrência do equinócio, o chamado equinócio vernal, que ocorre em março e marca a passagem aparente do Sol do hemisfério celeste sul para o hemisfério celeste norte (marcando assim o início da estação da primavera para o hemisfério norte e o início do outono para o hemisfério sul). Em termos de conhecimento – não está representado na figura -, o ponto de ocorrência do equinócio de setembro é representado pelo ponto Ω (*ômega*) e indica a passagem aparente do Sol do hemisfério celeste norte para o hemisfério celeste sul (início do outono no hemisfério norte e da primavera no hemisfério sul);

- Aqui destaca-se o ângulo de ascensão reta (α ou R.A), que é o ângulo medido para medir a posição de um astro na esfera celeste contando-se a partir do ponto do equinócio vernal (γ), na direção leste, sobre o equador celeste até atingir a circunferência que define a declinação desse astro;

- Fins facilitar a compreensão, pode-se comparar a ascensão reta com a longitude terrestre, medindo-se sempre de leste para oeste;

- É importante considerar que esse ângulo – ascensão reta – frequentemente é fornecido em horas, ou seja, $0h \leq \alpha < 24h$, assim sendo, Médici (1989, p.9) ressalta que:

[...] Recorde-se que para passar de horas a graus sexagesimais, tem-se a relação $x^0/y^h = 360/24 = 15$. Assim, se $\alpha = 125^{\circ}25'45''$, esse mesmo ângulo em horas será $\alpha = 125,429167^{\circ} = 1/15 \times 125,429167 = 8h,361944 = 8h21m43s$.

- Conclui-se que para a localização de um astro, uma estrela por exemplo, utilizando-se o sistema equatorial horário de referências, basta conhecer os valores das seguintes coordenadas: declinação e ascensão reta.

3.3 SOBRE A DURAÇÃO DIURNA E NOTURNA DO DIA

Os conceitos apresentados anteriormente são fundamentais para a compreensão das equações que caracterizam as durações da parte diurna e noturna do dia, discriminadas a seguir:

Para a duração do dia, têm-se que

$$D = 2H_{\odot} \quad (3)$$

onde o símbolo \odot representa o Sol, H_{\odot} o arco semi-diurno do Sol, D a duração do dia e os valores de D e H são dados em horas solares.

Desta forma, fica fácil compreender a equação que determina a duração da noite, discriminada por

$$N = 24 - 2H_{\odot} \quad (4)$$

com N representando a duração da noite e sendo determinada simplesmente pela subtração do valor da duração do dia do valor de 24 horas. Nota-se que aqui também N é fornecido em horas solares.

Para descobrir o valor do arco semi-diurno do Sol é comumente utilizada a seguinte equação

$$\cos H_{\odot} = -\tan \varphi \cdot \tan \delta_{\odot} \quad (5)$$

onde φ indica a latitude terrestre (representando o local do globo de onde se pretende descobrir a duração do dia) e δ_{\odot} a declinação do Sol (representando o período do ano em que se deseja saber o valor da duração do dia).

Entretanto, fins facilitar o entendimento, será utilizada uma variação da equação acima, de forma que já seja calculado diretamente o valor da quantidade de “horas de Sol do dia”; conforme equação a seguir

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan \varphi \cdot \tan \delta_{\odot}) \quad (6)$$

Onde T_d simboliza o tempo de duração da parte clara do dia.

Nota-se também que o valor da declinação pode ser obtido através da equação abaixo

$$\delta_{\odot} = 23,45 \times \text{sen} \left[\frac{360}{365} \times (284 + n) \right] \quad (7)$$

Onde n representa o dia sequencial do ano, ou seja, 1º de janeiro é 1, 1º de fevereiro vale 32,..., 31 de dezembro é 365 ou 366 se o ano for bissexto.

É interessante citar que de posse da equação (6) é possível calcular o horário

do nascer e do pôr do Sol, efetuando-se uma correção para o fuso horário da cidade em questão; porém, como neste trabalho optou-se por enfatizar a determinação da parte clara do dia ao invés de trabalhar a compreensão de como encontrar os horários de nascer e pôr do Sol, então tal análise não será efetuada (para aprofundamento neste conteúdo ver referência bibliográfica - BORGES).

Na Tabela 1 observa-se o valor da duração da parte clara do dia para latitudes específicas e determinados intervalos entre latitudes, levando em consideração declinações menores, iguais e superiores a zero.

Tabela 1: Duração do dia para latitudes e declinações diferentes

LATITUDE DO OBSERVADOR	DECLINAÇÃO DO SOL		
	$\delta > 0$	$\delta = 0$	$\delta < 0$
$\phi = +90^\circ$	H = indefinido D = 24	H = indefinido	H = indefinido D = 0
$+90 > \phi > 0$	$12 < D \leq 24$	D = 12	$0 \leq D < 12$
$\phi = 0$	D = 12	D = 12	D = 12
$0 > \phi > -90$	$0 \leq D < 12$	D = 12	$12 < D \leq 24$
$\phi = -90$	H = indefinido D = 0	H = indefinido	H = indefinido D = 24

Fonte: BOCZKO, 1984, p. 123.

Primeiramente é importante descrever o que ocorre em duas latitudes específicas descritas na Tabela acima, já que são onde ocorrem indefinições para os valores do arco semi-diurno, ou seja, os dois casos especiais: pólo sul e pólo norte.

Para o pólo sul segue que a latitude é $\phi = -90^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot > 0^\circ$ tem-se que

$$\cos H_\odot = -\tan \phi \cdot \tan \delta_\odot = -\tan(-90^\circ) \cdot \tan \delta_\odot = \text{indefinido} \rightarrow H_\odot \text{ indefinido} \quad (8)$$

A indefinição decorre do fato que a tangente de -90° também é indefinida.

Aqui cabe a análise de que no pólo sul a declinação maior que zero marca o período em que o Sol se dispõe abaixo do horizonte durante 6 meses – período conhecido como *noite polar* -, e a declinação vai dia-a-dia se se aproximando do valor zero (quando Sol passa pelo equador celeste), momento no qual $\delta_\odot = 0^\circ$ onde ocorre

o equinócio de primavera, tendo-se o único nascer do Sol do ano para esta latitude, seguindo-se assim seis meses com o Sol acima do horizonte, pois, a declinação ficará negativa a partir de então – período conhecido como *dia polar*-, até que ocorra o próximo equinócio (outono) marcando o único ocaso do ano, iniciando-se assim os próximos seis meses de noite reiniciando-se assim este ciclo.

Como a análise dos casos envolvendo o pólo norte ($\varphi = +90^\circ$) são análogos ao do pólo sul ($\varphi = -90^\circ$), a mesma será suprimida.

Explorando um pouco mais o conteúdo da Tabela 1, tem-se abaixo algumas aplicações da equação (6) com a finalidade de confirmar matematicamente os valores dispostos na Tabela.

Para as latitudes abaixo da linha do equador segue-se quatro exemplos sendo feita a análise de duas latitudes para dois momentos diferentes do ano cada uma, isto é, declinações diferentes. Perceba que em cada exemplo é fornecida uma tabela com dados do Sol - para determinada data e local – retirada da plataforma digital <https://www.heavens-above.com/> (quando se referir apenas como “*dados fornecidos pelo site*”, estar-se-á se referindo à este site), fins comparar dados com os cálculos efetuados. Sendo assim, seguem os exemplos:

Exemplo 1) Cidade: Brasília-DF; $\varphi = -15,8267^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot = 10^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(-15,8267^\circ) \cdot \tan(10^\circ)) \quad (9)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0,2835 \times 0,1763) \cong \frac{2}{15} \times 87,1351^\circ \cong 11,618013 \text{ h} \quad (10)$$

Passando-se este valor para horas, minutos e segundos, tem-se como segue

$$T_d \cong 11,618013 \text{ h} = 11\text{h} + 0,618013 \times 60 = 11\text{h} + 37,08078 \text{ min} \quad (11)$$

$$T_d \cong 11\text{h} + 37 \text{ min} + 0,08078 \times 60 \cong 11\text{h} + 37 \text{ min} + 4,8468 \text{ seg} \quad (12)$$

$$\therefore T_d \cong 11\text{h}37'5'' \quad (13)$$

Na Tabela 2 pode-se conferir que a aplicação das equações acima fornece uma aproximação satisfatória sobre a duração da parte clara do dia.

Tabela 2: Dados astronômicos do Sol para as 13:31 h do dia 15/04/2020 em Brasília-DF (SOL-Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="abril"/> Dia <input type="text" value="15"/> Hora <input type="text" value="13:31:00"/>			
Eventos diários para 15 de abril		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:12	-84,1°	179°
Início do crepúsculo astronômico:	05:08	-18,0°	84°
Início do crepúsculo náutico:	05:33	-12,0°	83°
Início do crepúsculo civil:	05:58	-6,0°	81°
Nascer do Sol:	06:20	-0,8°	80°
Atinge altitude máxima:	12:12	64,1°	360°
Por do Sol:	18:03	-0,8°	280°
Fim do crepúsculo civil:	18:25	-6,0°	279°
Fim do crepúsculo náutico:	18:50	-12,0°	277°
Fim do crepúsculo astronômico:	19:15	-18,0°	276°
Evento	Hora		
Equinócio de outono	mar 20, 00:49		
Solstício de inverno	jun 20, 18:43		
Equinócio de primavera	set 22, 10:30		
Solstício de verão	dez 21, 07:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	57,5°		
Azimute	321,6°		
Ascensão reta	1 ^h 36 ^m 0 ^s		
Declinação	10° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0034770		
Constelação	Peixes		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Utilizando-se os valores da Tabela 2, fazendo-se a diferença entre o horário do pôr do Sol e do nascer do Sol, obtém-se o seguinte

$$18:03 h - 06:20h = 11h43' \quad (14)$$

Conclusões do Exemplo 1:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 11h37'5''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 11h43'$
Margem de erro:	0,8%

A margem de erro calculada no Exemplo 1 - e nos demais exemplos - é alcançada fazendo-se o quociente entre a diferença dos valores da parte clara do dia fornecida pelo site e a conseguida com o uso da equação (6) pelo valor fornecido pelo site (tudo isto multiplicado por cem); conforme equação abaixo:

$$\text{Margem de Erro}(\%) = \frac{T_d(\text{fornecida pelo site}) - T_d(\text{calculada com aplicação de (6)})}{T_d(\text{fornecida pelo site})} \times 100 \quad (15)$$

Exemplo 2) Cidade: Brasília-DF; $\varphi = -15,8267^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot = -18^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(-15,8267^\circ) \cdot \tan(-18^\circ)) \quad (16)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0,2835 \times (-0,3249)) \cong \frac{2}{15} \times 95,2849566^\circ \cong 12,70466 \text{ h} \quad (17)$$

Novamente converte-se este valor para horas, minutos e segundos, como segue

$$T_d \cong 12,70466 \text{ h} = 12\text{h} + 0,70466 \times 60 = 12\text{h} + 42,2796 \text{ min} \quad (18)$$

$$T_d \cong 12\text{h} + 42 \text{ min} + 0,2796 \times 60 \cong 12\text{h} + 42 \text{ min} + 16,776 \text{ seg} \quad (19)$$

$$\therefore T_d \cong 12\text{h}42'17'' \quad (20)$$

Abaixo tem-se dados para conferir se a aplicação das equações acima fornece realmente um valor factível para a duração da parte clara do dia.

Tabela 3: Dados astronômicos do Sol para as 01:48 h do dia 13/11/2020 em Brasília-DF (SOL-Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="novembro"/> Dia <input type="text" value="13"/> Hora <input type="text" value="01:48:00"/>			
Eventos diários para 13 de novembro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:00	-56,1°	178°
Início do crepúsculo astronômico:	04:14	-18,0°	116°
Início do crepúsculo náutico:	04:41	-12,0°	113°
Início do crepúsculo civil:	05:08	-6,0°	111°
Nascer do Sol:	05:31	-0,8°	109°
Atinge altitude máxima:	11:56	87,6°	180°
Por do Sol:	18:21	-0,8°	251°
Fim do crepúsculo civil:	18:44	-6,0°	249°
Fim do crepúsculo náutico:	19:11	-12,0°	247°
Fim do crepúsculo astronômico:	19:38	-18,0°	244°
Evento	Hora		
Equinócio de outono	mar 20, 00:49		
Solstício de inverno	jun 20, 18:43		
Equinócio de primavera	set 22, 10:30		
Solstício de verão	dez 21, 07:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	-46,3°		
Azimute	139,8°		
Ascensão reta	15 ^h 14 ^m 12 ^s		
Declinação	-18° 0' 0"		
Distância (UA)	0,9895698		
Constelação	Libra		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Repetindo-se o processo já feito anteriormente, porém, desta vez utilizando-se os valores da Tabela 3, verifica-se a seguinte diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, para a data e o local selecionados

$$18:21 \text{ h} - 05:31\text{h} = 12\text{h}50' \quad (21)$$

Conclusões do Exemplo 2:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):

$$T_d \cong 12\text{h}42'17''$$

Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):

$$T_d = 12\text{h}50'$$

Calculando para Brasília-DF em um dia de equinócio

Exemplo 3) Cidade: Brasília-DF; $\varphi = -15,8267^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot = 0^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(-15,8267^\circ) \cdot \tan(0^\circ)) \quad (22)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0,2835 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^\circ \cong 12 \text{ h} \quad (23)$$

Abaixo tem-se dados para conferir se a aplicação das equações acima fornece realmente um valor factível para a duração da parte clara do dia.

Tabela 4: Dados astronômicos do Sol para as 17:23 h do dia 22/09/2020 em Brasília-DF (SOL-Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="setembro"/> Dia <input type="text" value="22"/> Hora <input type="text" value="17:23:00"/>			
Eventos diários para 22 de setembro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:04	-74,3°	180°
Início do crepúsculo astronômico:	04:50	-18,0°	95°
Início do crepúsculo náutico:	05:15	-12,0°	93°
Início do crepúsculo civil:	05:40	-6,0°	92°
Nascer do Sol:	06:01	-0,8°	90°
Atinge altitude máxima:	12:04	74,2°	0°
Por do Sol:	18:08	-0,8°	270°
Fim do crepúsculo civil:	18:29	-6,0°	268°
Fim do crepúsculo náutico:	18:54	-12,0°	266°
Fim do crepúsculo astronômico:	19:19	-18,0°	265°
Evento	Hora		
Equinócio de outono	mar 20, 00:49		
Solstício de inverno	jun 20, 18:43		
Equinócio de primavera	set 22, 10:30		
Solstício de verão	dez 21, 07:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	9,9°		
Azimute	272,7°		
Ascensão reta	12 ^h 0 ^m 0 ^s		
Declinação	0° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0035086		
Constelação	Virgem		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Repetindo-se o processo já feito anteriormente, porém, desta vez utilizando-se os valores da Tabela 4, verifica-se a seguinte diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, para a data e o local selecionados

$$18:08 \text{ h} - 06:01 \text{ h} = 12\text{h}07' \quad (24)$$

Conclusões do Exemplo 3:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 12h$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 12h07'$
Margem de erro:	$\cong 0,96\%$

Na própria Tabela 4 (gerada no site*) há uma discrepância entre o horário previsto para o Equinócio de 22/09/2020 e o horário em que a declinação do Sol atinge o valor zero (momento teórico de ocorrência do Equinócio). Atribui-se tal discrepância a erros da própria plataforma.

O valor calculado para a duração do dia claro está de acordo com o previsto na teoria sobre os Equinócios, ou seja, 12 horas.

Exemplo 4) Cidade: Porto Alegre-RS; $\varphi = -30,0346^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot = -21^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(-30,0346^\circ) \cdot \tan(-21^\circ)) \quad (25)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0,5782 \times (-0,3839)) \cong \frac{2}{15} \times 102,8248248^\circ \cong 13,709976 h \quad (26)$$

Novamente converte-se este valor para horas, minutos e segundos, como segue

$$T_d \cong 13,709976 h = 13h + 0,709976 \times 60 = 13h + 42,59856 min \quad (27)$$

$$T_d \cong 13h + 42 min + 0,59856 \times 60 \cong 13h + 42 min + 35,9136 seg \quad (28)$$

$$\therefore T_d \cong 13h42'36'' \quad (29)$$

Na Tabela 5 abaixo tem-se dados para conferir se a aplicação acima fornece aproximação satisfatória sobre a duração da parte clara do dia.

Tabela 5: Dados astronômicos do Sol para as 13:06 h do dia 16/01/2020 de Porto Alegre-RS (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="janeiro"/> Dia <input type="text" value="16"/> Hora <input type="text" value="13:06:00"/>			
Eventos diários para 16 de janeiro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:34	-38,9°	180°
Início do crepúsculo astronômico:	04:06	-18,0°	129°
Início do crepúsculo náutico:	04:40	-12,0°	123°
Início do crepúsculo civil:	05:12	-6,0°	119°
Nascer do Sol:	05:39	-0,8°	115°
Atinge altitude máxima:	12:35	80,9°	359°
Por do Sol:	19:30	-0,8°	245°
Fim do crepúsculo civil:	19:57	-6,0°	242°
Fim do crepúsculo náutico:	20:29	-12,0°	237°
Fim do crepúsculo astronômico:	21:03	-18,0°	232°
Evento	Hora		
Equinócio de outono	mar 20, 00:49		
Solstício de inverno	jun 20, 18:43		
Equinócio de primavera	set 22, 10:30		
Solstício de verão	dez 21, 07:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	78,5°		
Azimute	320,2°		
Ascensão reta	19 ^h 50 ^m 45 ^s		
Declinação	-21° 0' 0"		
Distância (UA)	0,9836435		
Constelação	Sagitário		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Com os valores da Tabela 5 calcula-se a diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, para a data e o local selecionados

$$19:30\text{ h} - 05:39\text{ h} = 13\text{h}51' \quad (30)$$

Conclusões do Exemplo 4:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 13\text{h}42'36''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 13\text{h}51'$
Margem de erro:	1,0%

Exemplo 5) Cidade: Porto Alegre-RS; $\varphi = -30,0346^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot = 15^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(-30,0346^\circ) \cdot \tan(15^\circ)) \quad (31)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0,5782 \times 0,2679) \cong \frac{2}{15} \times 81,08901613^\circ \cong 10,8118688\text{ h} \quad (32)$$

Outra vez efetua-se a conversão deste valor para horas, minutos e segundos, como segue

$$T_d \cong 10,8118688\text{ h} = 10\text{h} + 0,8118688 \times 60 = 10\text{h} + 48,712128\text{ min} \quad (33)$$

$$T_d \cong 10h + 48 \text{ min} + 0,712128 \times 60 \cong 10h + 48 \text{ min} + 42,72768 \text{ seg} \quad (34)$$

$$\therefore T_d \cong 10h48'43'' \quad (35)$$

Na Tabela 6 seguem os dados para o Sol a partir da cidade de Porto Alegre-RS e data de 11/08/2020.

Tabela 6: Dados astronômicos do Sol para as 19:18 h do dia 11/08/2020, a partir de Porto Alegre-RS (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano 2020 Mês agosto Dia 11 Hora 19:18:00			
Eventos diários para 11 de agosto		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:30	-75,1°	180°
Início do crepúsculo astronômico:	05:41	-18,0°	83°
Início do crepúsculo náutico:	06:09	-12,0°	79°
Início do crepúsculo civil:	06:37	-6,0°	76°
Nascer do Sol:	07:02	-0,8°	73°
Atinge altitude máxima:	12:30	45,0°	0°
Por do Sol:	17:59	-0,8°	287°
Fim do crepúsculo civil:	18:23	-6,0°	284°
Fim do crepúsculo náutico:	18:52	-12,0°	280°
Fim do crepúsculo astronômico:	19:20	-18,0°	277°
Evento	Hora		
Equinócio de outono	mar 20, 00:49		
Solstício de inverno	jun 20, 18:43		
Equinócio de primavera	set 22, 10:30		
Solstício de verão	dez 21, 07:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	-17,6°		
Azimute	277,4°		
Ascensão reta	9h 27m 17s		
Declinação	15° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0133581		
Constelação	Leão		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Utilizando-se os valores da Tabela 6, fazendo-se a diferença entre o horário do pôr do Sol e do nascer do Sol, obtém-se o seguinte resultado

$$17:59 \text{ h} - 07:02 \text{ h} = 10h57' \quad (36)$$

Conclusões do Exemplo 5:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 10h48'43''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 10h57'$
Margem de erro:	1,3%

Calculando para Porto Alegre-RS em um dia de equinócio

Exemplo 6) Cidade: Porto Alegre-RS; $\varphi = -30,0346^\circ$ e para a declinação $\delta_\odot = 0^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(-30,0346^\circ) \cdot \tan(0^\circ)) \quad (37)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(0,5782 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^\circ \cong 12 \text{ h} \quad (38)$$

Abaixo tem-se dados para conferir se a aplicação das equações acima fornece realmente um valor factível para a duração da parte clara do dia.

Tabela 7: Dados astronômicos do Sol para as 17:23 h do dia 22/09/2020 em Porto Alegre-RS (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="setembro"/> Dia <input type="text" value="22"/> Hora <input type="text" value="17:23:00"/>			
Eventos diários para 22 de setembro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:17	-60,1°	180°
Início do crepúsculo astronômico:	04:54	-18,0°	101°
Início do crepúsculo náutico:	05:22	-12,0°	97°
Início do crepúsculo civil:	05:50	-6,0°	93°
Nascer do Sol:	06:14	-0,8°	90°
Atinge altitude máxima:	12:18	60,0°	360°
Por do Sol:	18:21	-0,8°	269°
Fim do crepúsculo civil:	18:45	-6,0°	266°
Fim do crepúsculo náutico:	19:13	-12,0°	263°
Fim do crepúsculo astronômico:	19:41	-18,0°	259°
Evento	Hora		
Equinócio de outono	mar 20, 00:49		
Solstício de inverno	jun 20, 18:43		
Equinócio de primavera	set 22, 10:30		
Solstício de verão	dez 21, 07:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	11,8°		
Azimute	276,8°		
Ascensão reta	12 ^h 0 ^m 0 ^s		
Declinação	0° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0035086		
Constelação	Virgem		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Repetindo-se o processo já feito anteriormente, porém, desta vez utilizando-se os valores da Tabela 7, verifica-se a seguinte diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, para a data e o local selecionados

$$18:21 \text{ h} - 06:14 \text{ h} = 12\text{h}07' \quad (39)$$

Conclusões do Exemplo 6:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6): $T_d \cong 12\text{h}$

Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site): $T_d = 12\text{h}07'$

Margem de erro: $\cong 0,96\%$

Na própria Tabela 7 (gerada no site*) há uma discrepância entre o horário previsto para o Equinócio de 22/09/2020 e o horário em que a declinação do Sol atinge o valor zero (momento teórico de ocorrência do Equinócio). Atribui-se tal discrepância a erros da própria plataforma.

O valor calculado para a duração do dia claro está de acordo com o previsto na teoria sobre

os Equinócios, ou seja, 12 horas.

Para as latitudes abaixo da linha do equador foi verificada a veracidade da aplicação das equações; entretanto, agora serão utilizados mais quatro exemplos, só que para latitudes do hemisfério norte, sendo feita a análise de duas latitudes para dois momentos diferentes do ano, isto é, declinações diferentes. Sendo assim, seguem os exemplos:

Exemplo 7) Cidade: Chicago-Illinois-EUA; $\varphi = 41,8781^\circ$ e para a declinação $\delta_{\odot} = 10^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(41,8781^\circ) \cdot \tan 10^\circ) \quad (40)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-0,89656 \times 0,176327) \cong \frac{2}{15} \times 99,095918923^\circ \cong 13,21279 \text{ h} \quad (41)$$

Transformando este valor para horas, minutos e segundos, como segue

$$T_d \cong 13,21279 \text{ h} = 13\text{h} + 0,21279 \times 60 = 13\text{h} + 12,7674 \text{ min} \quad (42)$$

$$T_d \cong 13\text{h} + 12 \text{ min} + 0,7674 \times 60 \cong 13\text{h} + 12 \text{ min} + 46,044 \text{ seg} \quad (43)$$

$$\therefore T_d \cong 13\text{h}12'46'' \quad (44)$$

Na Tabela 8 seguem os dados para o Sol a partir da cidade de Chicago-Illinois-EUA e data de 15/04/2020.

Tabela 8: Dados astronômicos do Sol para as 11:31 h do dia 15/04/2020 de Chicago-Illinois-EUA (SOL- Evento e Posição).

Sol								
Ano		2020	Mês	abril	Dia	15	Hora	11:31:00
Eventos diários para 15 de abril				Eventos anuais para 2020				
Evento	Hora	Altitude	Azimute	Evento	Hora			
Altitude mínima:	00:50	-38,2°	360°	Equinócio de primavera	mar 19, 22:49			
Início do crepúsculo astronômico:	04:29	-18,0°	58°	Solstício de verão	jun 20, 16:43			
Início do crepúsculo náutico:	05:06	-12,0°	65°	Equinócio de outono	set 22, 08:30			
Início do crepúsculo civil:	05:40	-6,0°	71°	Solstício de inverno	dez 21, 04:02			
Nascer do Sol:	06:09	-0,8°	76°	Posição na hora selecionada				
Atinge altitude máxima:	12:51	58,2°	180°	Altitude	53,8°			
Por do Sol:	19:32	-0,8°	285°	Azimute	145,5°			
Fim do crepúsculo civil:	20:01	-6,0°	290°	Ascensão reta	1 ^h 36 ^m 0 ^s			
Fim do crepúsculo náutico:	20:36	-12,0°	296°	Declinação	10° 0' 0"			
Fim do crepúsculo astronômico:	21:13	-18,0°	303°	Distância (UA)	1,0034770			
				Constelação	Peixes			

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Com os valores dispostos na Tabela 8 e fazendo-se a diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, obtém-se o seguinte resultado

$$19:32 h - 06:09 h = 13h23' \quad (45)$$

Conclusões do Exemplo 7:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 13h12'46''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 13h23'$
Margem de erro:	1,3%

Exemplo 8) Cidade: Chicago-Illinois-EUA; $\varphi = 41,8781^\circ$ e a declinação $\delta_\odot = -20^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(41,8781^\circ) \cdot \tan(-20^\circ)) \quad (46)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(-0,89656 \times (-0,36397)) \cong \frac{2}{15} \times 70,95437685^\circ \cong 9,460583 h \quad (47)$$

Este valor dado em horas, minutos e segundos, fica disposto no formato que segue

$$T_d \cong 9,460583 h = 9h + 0,460583 \times 60 = 9h + 27,63498 \text{ min} \quad (48)$$

$$T_d \cong 9h + 27 \text{ min} + 0,63498 \times 60 \cong 9h + 27 \text{ min} + 38,0988 \text{ seg} \quad (49)$$

$$\therefore T_d \cong 9h27'38'' \quad (50)$$

Na Tabela 9 seguem os dados para o Sol a partir da cidade de Chicago-Illinois-EUA e data de 21/11/2020.

Tabela 9: Dados astronômicos do Sol para as 04:55 h do dia 21/11/2020, a partir de Chicago-Illinois-EUA (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="novembro"/> Dia <input type="text" value="21"/> Hora <input type="text" value="04:55:00"/>			
Eventos diários para 21 de novembro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Início do crepúsculo astronômico:	05:10	-18,0°	101°
Início do crepúsculo náutico:	05:43	-12,0°	106°
Início do crepúsculo civil:	06:18	-6,0°	112°
Nascer do Sol:	06:48	-0,8°	117°
Atinge altitude máxima:	11:36	28,0°	180°
Por do Sol:	16:25	-0,8°	243°
Fim do crepúsculo civil:	16:55	-6,0°	248°
Fim do crepúsculo náutico:	17:29	-12,0°	254°
Fim do crepúsculo astronômico:	18:03	-18,0°	259°
Altitude mínima:	23:37	-68,4°	0°

Evento	Hora
Equinócio de primavera	mar 19, 22:49
Solstício de verão	jun 20, 16:43
Equinócio de outono	set 22, 08:30
Solstício de inverno	dez 21, 04:02

Posição na hora selecionada	
Altitude	-20,8°
Azimute	98,8°
Ascensão reta	15 ^h 48 ^m 24 ^s
Declinação	-20° 0' 0"
Distância (UA)	0,9877887
Constelação	Libra

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Com os dados da Tabela 9 pode-se fazer a diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, obtendo-se o seguinte resultado

$$16:25 h - 06:48h = 09h37' \quad (51)$$

Conclusões do Exemplo 8:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 9h27'38''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 09h37'$
Margem de erro:	1,6%

Calculando para Chicago-Illinois-EUA em um dia de equinócio

Exemplo 9) Cidade: Chicago-Illinois-EUA; $\varphi = 41,8781^\circ$ e a declinação $\delta_\odot = 0^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(41,8781^\circ) \cdot \tan(0^\circ)) \quad (52)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-0,89656 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^\circ \cong 12 \text{ h} \quad (53)$$

Abaixo tem-se dados para conferir se a aplicação das equações acima fornece realmente um valor factível para a duração da parte clara do dia.

Tabela 10: Dados astronômicos do Sol para as 15:23 h do dia 22/09/2020 em Chicago-Illinois-EUA (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="setembro"/> Dia <input type="text" value="22"/> Hora <input type="text" value="15:23:00"/>			
Eventos diários para 22 de setembro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Altitude mínima:	00:43	-48,0°	360°
Início do crepúsculo astronômico:	05:05	-18,0°	73°
Início do crepúsculo náutico:	05:38	-12,0°	79°
Início do crepúsculo civil:	06:11	-6,0°	85°
Nascer do Sol:	06:39	-0,8°	89°
Atinge altitude máxima:	12:43	48,0°	180°
Por do Sol:	18:47	-0,8°	271°
Fim do crepúsculo civil:	19:15	-6,0°	275°
Fim do crepúsculo náutico:	19:47	-12,0°	281°
Fim do crepúsculo astronômico:	20:20	-18,0°	287°
Evento	Hora		
Equinócio de primavera	mar 19, 22:49		
Solstício de verão	jun 20, 16:43		
Equinócio de outono	set 22, 08:30		
Solstício de inverno	dez 21, 04:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	34,7°		
Azimute	231,4°		
Ascensão reta	12 ^h 0 ^m 0 ^s		
Declinação	0° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0035086		
Constelação	Virgem		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Repetindo-se o processo já feito anteriormente, porém, desta vez utilizando-se os valores da Tabela 10, verifica-se a seguinte diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, para a data e o local selecionados

$$18:47 \text{ h} - 06:39 \text{ h} = 12\text{h}08' \quad (54)$$

Conclusões do Exemplo 9:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6): $T_d \cong 12\text{h}$

Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site): $T_d = 12\text{h}08'$

Margem de erro: $\cong 1,09\%$

Na própria Tabela 10 (gerada no site*) há uma discrepância entre o horário previsto para o Equinócio de 22/09/2020 e o horário em que a declinação do Sol atinge o valor zero (momento teórico de ocorrência do Equinócio). Atribui-se tal discrepância a erros da própria plataforma.

O valor calculado para a duração do dia claro está de acordo com o previsto na teoria sobre os Equinócios, ou seja, 12 horas.

Exemplo 10) Cidade: Nuuk-Groenlândia; $\varphi = 64,1814^\circ$ e a declinação $\delta_{\odot} = 15^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(64,1814^\circ) \cdot \tan(15^\circ)) \quad (55)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-2,06689 \times 0,267949) \cong \frac{2}{15} \times 123,629554^\circ \cong 16,48394 \text{ h} \quad (56)$$

Novamente verifica-se este valor dado em horas, minutos e segundos, conforme disposto como segue

$$T_d \cong 16,48394 \text{ h} = 16\text{h} + 0,48394 \times 60 = 16\text{h} + 29,0364 \text{ min} \quad (57)$$

$$T_d \cong 16\text{h} + 29 \text{ min} + 0,0364 \times 60 \cong 16\text{h} + 29 \text{ min} + 2,184 \text{ seg} \quad (58)$$

$$\therefore T_d \cong 16\text{h}29'2'' \quad (59)$$

Na Tabela 11 tem-se os dados para o Sol a partir da cidade de Nuuk-Groenlândia e data de 30/04/2020.

Tabela 11: Dados astronômicos do Sol para as 18:39 h do dia 30/04/2020 de Nuuk-Groenlândia (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano	2020	Mês	abril
Dia	30	Hora	18:39:00
Eventos diários para 30 de abril			
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Fim do crepúsculo civil:	00:55	-6,0°	324°
Altitude mínima:	03:24	-10,9°	360°
Início do crepúsculo civil:	05:52	-6,0°	36°
Nascer do Sol:	07:01	-0,8°	52°
Atinge altitude máxima:	15:24	40,9°	180°
Por do Sol:	23:50	-0,8°	309°
Eventos anuais para 2020			
Evento	Hora		
Equinócio de primavera	mar 20, 02:49		
Solstício de verão	jun 20, 21:43		
Equinócio de outono	set 22, 13:30		
Solstício de inverno	dez 21, 09:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	30,8°		
Azimute	237,7°		
Ascensão reta	2 ^h 32 ^m 43 ^s		
Declinação	15° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0075380		
Constelação	Aries		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Na Tabela 11 dispõe-se os dados necessários com os quais se pode fazer a diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, obtendo-se o seguinte resultado

$$23:50 h - 07:01h = 16h49'$$

60
(60)

Conclusões do Exemplo 10:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 16h29'2''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 16h49'$
Margem de erro:	1,9%

Exemplo 11) Cidade: Nuuk-Groenlândia; $\varphi = 64,1814^\circ$ e a declinação $\delta_\odot = -7^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \text{arc cos}(-\tan(64,1814^\circ) \cdot \tan(-7^\circ)) \quad (61)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \text{arc cos}(-2,06689 \times (-0,12278)) \cong \frac{2}{15} \times 75,2991228^\circ \cong 10,039883h \quad (62)$$

Verificando-se este valor em horas, minutos e segundos, tem-se o disposto como segue

$$T_d \cong 10,039883 h = 10h + 0,039883 \times 60 = 10h + 2,39298 \text{ min} \quad (63)$$

$$T_d \cong 10h + 2 \text{ min} + 0,39298 \times 60 \cong 10h + 2 \text{ min} + 23,5788 \text{ seg} \quad (64)$$

$$\therefore T_d \cong 10h2'23'' \quad (65)$$

Na Tabela abaixo tem-se os dados para o Sol a partir da cidade de Nuuk-Groenlândia e data de 02/03/2020.

Tabela 12: Dados astronômicos do Sol para as 12:24 h do dia 02/03/2020 de Nuuk-Groenlândia (SOL- Evento e Posição).

Sol

Ano Mês Dia Hora

Eventos diários para 02 de março				Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute	Evento	Hora
Altitude mínima:	02:38	-32,9°	360°	Equinócio de primavera	mar 20, 02:49
Início do crepúsculo astronômico:	06:49	-18,0°	68°	Solstício de verão	jun 20, 21:43
Início do crepúsculo náutico:	07:46	-12,0°	81°	Equinócio de outono	set 22, 13:30
Início do crepúsculo civil:	08:41	-6,0°	94°	Solstício de inverno	dez 21, 09:02
Nascer do Sol:	09:29	-0,8°	104°	Posição na hora selecionada	
Atinge altitude máxima:	14:39	19,0°	180°	Altitude	14,6°
Por do Sol:	19:50	-0,8°	256°	Azimute	145,3°
Fim do crepúsculo civil:	20:38	-6,0°	267°	Ascensão reta	22 ^h 54 ^m 11 ^s
Fim do crepúsculo náutico:	21:33	-12,0°	279°	Declinação	-7° 0' 0"
Fim do crepúsculo astronômico:	22:31	-18,0°	293°	Distância (UA)	0,9912135
				Constelação	Aquário

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Na Tabela 12 dispõe-se os dados necessários com os quais se pode fazer a diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, obtendo-se o seguinte resultado

$$19:50 h - 09:29h = 10h21' \quad (66)$$

Conclusões do Exemplo 11:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6):	$T_d \cong 10h2'23''$
Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site):	$T_d = 10h21'$
Margem de erro:	3,0%

Calculando para Nuuk-Groenlândia em um dia de equinócio

Exemplo 12) Cidade: Nuuk-Groenlândia; $\varphi = 64,1814^\circ$ e a declinação $\delta_\odot = 0^\circ$, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(64,1814^\circ) \cdot \tan(0^\circ)) \quad (67)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(-2,06689 \times (0)) \cong \frac{2}{15} \times 90^\circ \cong 12 h \quad (68)$$

Abaixo tem-se dados para conferir se a aplicação das equações acima fornece realmente um valor factível para a duração da parte clara do dia.

Tabela 13: Dados astronômicos do Sol para as 20:23 h do dia 22/09/2020 em Nuuk-Groenlândia (SOL- Evento e Posição).

Sol			
Ano <input type="text" value="2020"/> Mês <input type="text" value="setembro"/> Dia <input type="text" value="22"/> Hora <input type="text" value="20:23:00"/>			
Eventos diários para 22 de setembro		Eventos anuais para 2020	
Evento	Hora	Altitude	Azimute
Fim do crepúsculo astronômico:	00:23	-18,0°	313°
Altitude mínima:	03:20	-25,7°	0°
Início do crepúsculo astronômico:	06:18	-18,0°	47°
Início do crepúsculo náutico:	07:25	-12,0°	64°
Início do crepúsculo civil:	08:23	-6,0°	77°
Nascer do Sol:	09:11	-0,8°	88°
Atinge altitude máxima:	15:19	25,8°	180°
Por do Sol:	21:26	-0,8°	271°
Fim do crepúsculo civil:	22:14	-6,0°	282°
Fim do crepúsculo náutico:	23:12	-12,0°	296°
Evento	Hora		
Equinócio de primavera	mar 20, 02:49		
Solstício de verão	jun 20, 21:43		
Equinócio de outono	set 22, 13:30		
Solstício de inverno	dez 21, 09:02		
Posição na hora selecionada			
Altitude	6,0°		
Azimute	257,2°		
Ascensão reta	12 ^h 0 ^m 0 ^s		
Declinação	0° 0' 0"		
Distância (UA)	1,0035086		
Constelação	Virgem		

Fonte: <https://www.heavens-above.com/>

Repetindo-se o processo já feito anteriormente, porém, desta vez utilizando-se os valores da Tabela 13, verifica-se a seguinte diferença entre o horário do *pôr do Sol* e do *nascer do Sol*, para a data e o local selecionados

$$21:26\text{ h} - 09:11\text{ h} = 12\text{h}15' \quad (69)$$

Conclusões do Exemplo 12:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6): $T_d \cong 12\text{h}$

Valor previsto para a parte clara do dia (fornecido pelo site): $T_d = 12\text{h}15'$

Margem de erro: $\cong 2,04\%$

Na própria Tabela 13 (gerada no site*) há uma discrepância entre o horário previsto para o Equinócio de 22/09/2020 e o horário em que a declinação do Sol atinge o valor zero (momento teórico de ocorrência do Equinócio). Atribui-se tal discrepância a erros da própria plataforma.

O valor calculado para a duração do dia claro está de acordo com o previsto na teoria sobre os Equinócios, ou seja, 12 horas.

Exemplo 13) Cidade: Macapá-AP; $\varphi \cong 0^\circ$ e para uma declinação δ_\odot qualquer, então, usando (6) tem-se

$$T_d = \frac{2}{15} \arccos(-\tan\varphi \cdot \tan\delta_\odot) = \frac{2}{15} \arccos(-\tan(0^\circ) \cdot \tan(\delta_\odot)) \quad (70)$$

$$T_d \cong \frac{2}{15} \arccos(0 \times \tan \delta_{\odot}) = \frac{2}{15} \times 90^\circ = 12 \text{ h}$$

Conclusões do Exemplo 13:

Valor estimado para a parte clara do dia (aplicação da equação 6): $T_d \cong 12h$

O valor da duração do dia claro é de 12 horas independente da época do ano.

A diferença observada através dos valores da margem de erro em cada um dos exemplos propostos pode estar associada a diversos fatores, tais como a forma em que o site consultado obteve os valores de nascer e pôr do Sol e, principalmente, devido a algumas aproximações efetuadas no cálculo das *tangentes* e do *cosseno*; entretanto, esta diferença enfatizada com a margem de erro pode ser considerada pequena – devido seu reduzido valor percentual –, confirmando, desta maneira o resultado obtido com a aplicação da equação (6).

Com o exposto evidencia-se que para trabalhar a equação (6) no ensino médio é mais didático que o professor demonstre aplicações para latitudes no intervalo $-90^\circ < \varphi < +90^\circ$, porém, é importante que sejam explanadas as peculiaridades que ocorrem nos pólos.

É importante evidenciar também que as conclusões obtidas no exemplo 13 estão de acordo com os valores dispostos na Tabela 1, isto é, para um observador que esteja sobre a linha do equador – caso da cidade de Macapá-AP – a duração do dia e da noite valem 12 horas cada, independente da época do ano considerada.

Para confirmar os valores das latitudes e declinações também foi utilizada a plataforma digital <https://www.heavens-above.com/>, que disponibiliza diversos serviços relacionados com Astronomia.

4 ABORDAGEM DO EQUINÓCIO EQUATORIAL PARA O ENSINO BÁSICO

A inserção no currículo de matemática de conceitos de Astronomia que não eram explorados anteriormente em sala de aula do ensino básico e uma maior ênfase aos conceitos que já faziam parte do cronograma do professor de Física, de Geografia ou de Ciências, pode além de facilitar e tornar mais interessante o estudo de conceitos matemáticos, também elevar o nível de conhecimento do estudante a respeito da Astronomia, incentivando-o a buscar mais conhecimento dentro desta ciência tão transversal, enriquecendo desta forma seu instinto de curiosidade científica, levando-o a gostar mais de estudar as disciplinas da área de exatas.

4.1 COM FERRAMENTAS USUAIS DO PROFESSOR DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Para que o professor de matemática possa aplicar com propriedade os conhecimentos aqui disponíveis será necessário bastante dedicação para que os conceitos já explicados possam estar bem fixados, assim como as relações entre conceitos de Astronomia e de matemática.

O professor pode aplicar o método possuindo os requisitos materiais básicos, que a maioria das escolas públicas e privadas possuem, ou pelo menos deveriam possuir, dentre os quais pode-se citar um quadro branco, pincel e apagador. Para esta realidade o professor precisará ter certo cuidado ao tentar reproduzir algumas figuras no quadro, como a representação da esfera celeste com a marcação de certos pontos notáveis, pois, uma figura que não fique bem desenhada pode comprometer o entendimento do aluno.

Assim sendo, segue um exemplo de Plano de aula onde se aborda como o professor pode realizar este tipo de aplicação:

Escola: Escola Estadual Alexandre Vaz Tavares

Curso: Ensino Médio

Disciplina: Matemática

Data de execução: 15/02/2020

Professor: José Nilson da Silva

Série: 1º ano do Ensino Médio.

Previsão de tempo: 4 aulas / módulo 50 min.

Turma: 221

Período: Tarde

Ano: 2020

PLANO DE AULA

I – Tema:

Senos, cossenos, tangente, plano e esfera;

Conceitos básicos de Astronomia; e

duração do dia e da noite.

II – Objetivos:

Objetivo Geral:

Desenvolver nos alunos através de uma explanação concisa sobre seno, cosseno, tangente, plano e esfera, seguida de uma apresentação de conceitos básicos de Astronomia e concluindo-se com a aplicação dos conceitos de trigonometria para a compreensão da duração do dia e da noite; capacidades de interpretação e compreensão de trigonometria e Astronomia básica.

Objetivos Específicos:

- Compreender como aplicar seno, cosseno e tangente;
- Ter noções dos conceitos de plano e de esfera;
- Adquirir – ou expandir – noções básicas de Astronomia;
- Desenvolver a habilidade de conciliar o conhecimento de trigonometria e geometria com conceitos de Astronomia, como o Equinócio e o cálculo da duração do dia e da noite.

III – Conteúdos:

- Seno, cosseno e tangente;
- Conceitos de plano e esfera;
- As Estações do ano;
- Conceitos básicos de Astronomia: zênite, nadir, meridiano local, sistema horizontal local de referências, sistema equatorial horário de referências;
- Sobre a duração diurna e noturna do dia.

IV – Procedimentos Didáticos Metodológicos:

A aula será dividida em 4 etapas, sendo que na primeira ocorre a explicação de conceitos matemáticos (50 minutos), a segunda etapa corresponde a um bloco de

apresentação e estudo de conceitos de Astronomia (50 minutos), a terceira compõe-se da conciliação entre conceitos de Matemática e Astronomia para o estudo da duração do dia e da noite (50 minutos) e, por fim, a quarta etapa é reservada para dirimir eventuais dúvidas remanescentes dos alunos, assim como a aplicação de um método avaliativo fins averiguar a eficiência do método (50 minutos). Totalizando, portanto 3h20' de aula.

V - Recursos Didáticos:

- Quadro branco, apagador e pinceis;
- Exercícios de fixação;
- Questionário.

VI – Avaliação:

A avaliação será realizada apenas na última etapa utilizando-se a aplicação de um questionário.

VII - Referencias Bibliográficas:

BARROSO, J. M. (Ed. Resp.). *Conexões com a Matemática*. V.1, Ed. 1. São Paulo: Moderna, 2010.

BOCZKO, R. **Conceitos de Astronomia**. São Paulo: Edgar Blucher, 1984. 429 p.

BORGES, R.C.M. Cálculo do Nascer e do Pôr do Sol. Disponível em: <https://www.inf.ufrgs.br/~cabral/Nascer_Por_Sol.html>. Acesso em: 18 jan. 2020.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Geometria Espacial*. V. 10. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 1985. 413 p.

OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Porto Alegre: UFRGS, 2014. 784 p.

SILVA, J. N.; VOELZKE, M.; ARAÚJO, M. Astronomia no Meio do Mundo: uma análise Física da visualização de constelações e dos equinócios a partir da Latitude Zero. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 35, n. 1, p. 159-184, 2018.

O Plano de aula proposto fornece um exemplo que evidencia como se pode trabalhar os conceitos matemáticos e astronômicos apesar de dispor de pouco suporte material para isso.

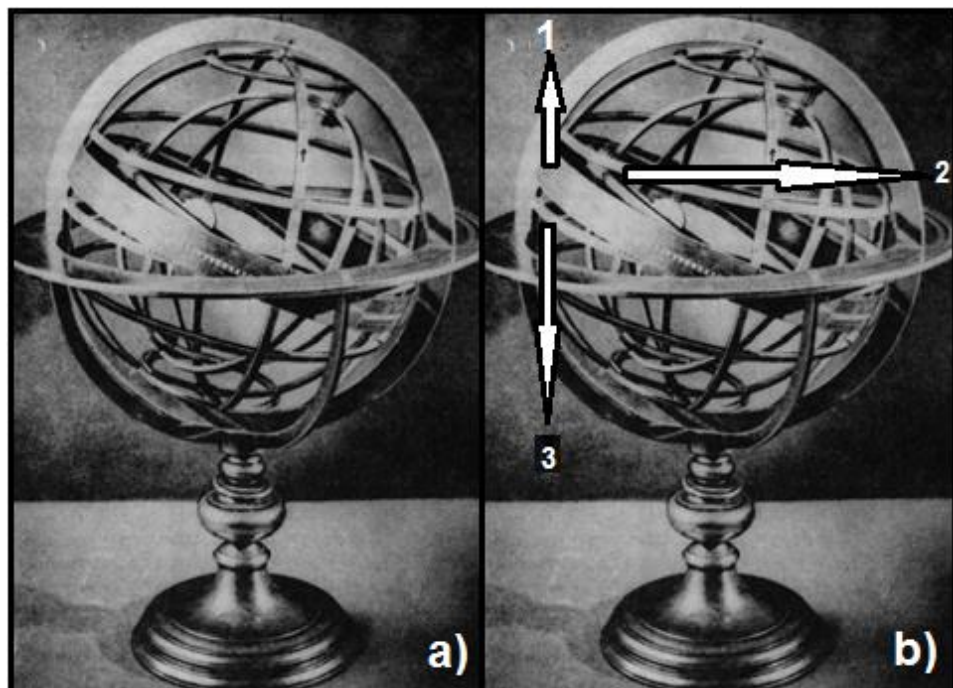
4.2 COM USO DE EQUIPAMENTOS DE ASTRONOMIA

Sabe-se que a realidade das escolas públicas brasileiras é no mínimo preocupante; tanto em termos de estrutura física quanto de recursos materiais disponíveis. Assim sendo, é trivial que o corpo docente enfrente inúmeras dificuldades para cumprir o conteúdo previsto de forma satisfatória e muito mais difícil se torna repassar algo a mais para os alunos. Porém, para os casos em que a escola ou até mesmo o próprio professor possuam equipamentos que possam agregar para um curso mais completo, é importante citar os equipamentos que podem ser úteis para a aplicação do método proposto neste trabalho e fornecer esclarecimentos da forma como utilizá-los para este propósito.

4.2.1 ESFERA ARMILAR

Uma forma de tornar o curso mais interessante para o aluno seria com a utilização de uma esfera armilar (ver Figura 9), que é um equipamento físico que representa a Esfera Celeste.

Figura 9: a) Esfera Armilar. b) 1. Eclíptica. 2. Paralelo Celeste. 3. Equador Celeste



Fonte: Modificado de NEVES e ARGUELLO, 1986, pág. 16.

A Figura 9b apresenta o equipamento esfera armilar, enquanto que em 9b têm-se a indicação de alguns elementos que são representados neste equipamento:

- 1 – A Eclíptica;
- 2 – Um Paralelo Celeste; e
- 3 – Equador Celeste.

É importante chamar a atenção para o fato de que existem diversos modelos de deste equipamento, portanto, além dos elementos ressaltados em 9b algumas esferas armilares também apresentam a Terra em seu centro, a indicação das constelações do zodíaco (as doze constelações por onde o Sol percorre em movimento aparente durante um ano terrestre), representação do Sol e também marcações indicando os Solstícios e os Equinócios.

Entende-se que o uso deste equipamento pode tornar muito mais eficiente a compreensão dos conteúdos (de acordo com o modelo de Plano de aula sugerido) sobre Estações do ano, assim como o trabalho com os conceitos básicos de Astronomia. A forma como isto pode ser desenvolvido em sala de aula está disposto abaixo:

- Primeiro apresenta-se o equipamento para os alunos;
- Em seguida identifica-se os principais elementos constituintes da esfera armilar disponível;
- Para a explanação das Estações do ano sugere-se mostrar aos alunos quais pontos do arco representativo da eclíptica são onde ocorrem os Equinócios e os Solstícios, e o professor deve fazer a relação entre estes pontos e as estações climáticas para cada hemisfério;
- Sugere-se também que seja mostrado no equipamento exemplos de zênite, nadir, almucântar, distância polar, equador celeste, polo sul celeste e polo norte celeste;
- O professor pode também explicar a identificação de uma estrela através do sistema equatorial horário de referências, trabalhando-se conceitos de declinação e ascensão reta.

4.2.2 PLANETÁRIO DE MESA (*ORRERY*)

Outro equipamento bastante útil para facilitar o ensino de Astronomia, colaborando concomitantemente com o ensino de Matemática no caso aqui estudado, é o *Orrery*, também conhecido como planetário de mesa; o qual é mais facilmente identificado como uma maquete do sistema Sol-Terra-Lua, o qual não necessita ser construído em escala, pois isso dificultaria a análise do equipamento. Ressalta-se que este dispositivo possui diversos modelos e tamanhos, atendendo objetivos tanto

educativos quanto de estética, ornamentando principalmente bibliotecas e escritórios.

Um planetário de mesa pode atender demandas educacionais diversificadas, tais como, explicações sobre as estações do ano, fases da Lua e Eclipses lunares e solares. No presente trabalho o foco será dado ao estudo das estações do ano, enfatizando os momentos de solstícios e equinócios.

Fins melhor compreensão, tem-se um exemplo de *Orrery* disposto na Figura 10, abaixo.

Figura 10: Exemplo de planetário de mesa



Fonte: Silva; 2020; arquivo pessoal.

Cada planetário de mesa possui um mecanismo específico de funcionamento, alguns funcionam automaticamente, através do uso de energia elétrica; outros funcionam através de acionamento mecânico com a utilização de manivelas ou outro dispositivo. No exemplo da Figura 10, o mecanismo que permite o movimento de translação terrestre em torno do Sol é mecânico, através do acionamento manual do operador, o qual move a extremidade da haste que liga o Sol à Terra, e, através de um sistema de engrenagens, os movimentos de rotação terrestre e da Lua em torno da Terra são reproduzidos consequentemente.

Para a análise feita neste trabalho, não é necessária a utilização de um *Orrery* que possua a representação do satélite natural terrestre – a Lua -, já que o estudo deve estar direcionado para a exposição de como ocorrem as estações do ano, solstícios e equinócios; entretanto, caso se tenha disponível um equipamento com a Lua, isto não

irá interferir nesta análise.

Em complementação ao método proposto no Plano de aula já supracitado, um planetário de mesa pode ser utilizado especificamente em contribuição ao conteúdo referente às estações do ano, sugerindo-se como um modelo a ser seguido – respeitando-se as variações do equipamento – a seguinte sequência:

- Primeiro apresenta-se o equipamento para os alunos;
- Depois identifica-se os principais elementos do planetário de mesa, tais como o Sol, a Terra, o plano da órbita terrestre em torno do Sol e o de inclinação da Terra;
- Sugere-se que o professor efetue inicialmente o movimento do equipamento, visando unicamente a observação dos discentes; após a observação inicial do funcionamento do dispositivo, o professor pode fixar a Terra numa posição característica, por exemplo o solstício de inverno no hemisfério norte e verão no hemisfério sul (posição aproximada da representada na Figura 10), onde o professor deve ressaltar a relação entre a inclinação do eixo terrestre com relação ao plano da órbita e as estações que estão ocorrendo nos dois hemisférios. Sequencialmente, move-se o equipamento até se atingir uma posição que remeta ao equinócio, momento oportuno para a explicação deste fenômeno; e, assim, dar-se-á sequência no experimento até se atingir o momento oposto do inicial, ou seja, o outro solstício, marcando o início do verão para o hemisfério norte e inverno para o sul; e, após isso, move-se novamente o *Orrery*, atingindo-se o momento do outro equinócio, onde o professor pode finalizar sua explicação sobre a relação entre o movimento terrestre em torno do Sol, inclinação do eixo terrestre com relação ao plano da órbita e a ocorrência das estações do ano na Terra (também dos solstícios e equinócios).

4.2.3 MODELO PARA VISUALIZAÇÃO DO MAS (MOVIMENTO APARENTE DO SOL)

Por fim, tendo a disponibilidade de um globo terrestre – preferencialmente um modelo que apresente no mínimo 30 cm de diâmetro – pode-se elaborar um dispositivo que pode ser utilizado para simular o MAS. Este equipamento será mencionado no restante do texto como *MVMAS* (Modelo para Visualização do Movimento Aparente do Sol).

Na Figura 11 tem-se com um globo terrestre, um arco de material transparente

com a representação do *MVMAS* (assim como das horas de dia claro) e um disco (CD) – representando o *horizonte do observador*¹.

Figura 11: a) *MAS* para Solstícios e Equinócio para um observador situado na linha do equador.

b) *MAS* para Solstícios e Equinócio para um observador situado na latitude $\varphi = -30^\circ$



Fonte: Modificado de SILVA, CATELLI, GIOVANNINI; 2010; p. 14.

A Figura 11a traz a representação de como um observador à latitude zero visualiza o *MAS* em três momentos distintos (representados pelas três linhas vermelhas e paralelas entre si e também com a linha do equador), em 1 é representado o *MAS* durante o Solstício de inverno (para o hemisfério norte), em 2 durante os Equinócios e o 3 durante o Solstício de verão (para o hemisfério norte).

Em 11b estão também representados os mesmos 3 *MAS* de 11a, porém, para um referencial na latitude $\varphi = -30^\circ$.

O passo a passo para construção de um *MVMAS* é descrito por SILVA, CATELLI e GIOVANNINI (2010), o qual pode ser usado como referência para o professor poder elaborar seu próprio equipamento fins uso em sala de aula.

A aplicação do *MVMAS* como suporte material para a aplicação da metodologia aqui desenvolvida, é mais interessante para auxiliar o professor no momento em que for expor o conteúdo referente ao tempo de duração da parte clara do dia; podendo-se utilizá-lo da seguinte forma:

¹ Horizonte: é o plano tangente à Terra e perpendicular à vertical do lugar em que se encontra o observador. A vertical do lugar é definida por um fio a prumo. Considera-se que o plano do horizonte intercepta a esfera celeste em um círculo máximo. (OLIVEIRA FILHO; SARAIVA, 2000. p.10)

- Primeiro apresenta-se o equipamento para os alunos;
- Em seguida identifica-se os principais elementos do *MVMAS*, isto é, o globo terrestre propriamente dito, o disco representando o horizonte do observador, o arco com as marcações de 3 exemplos diferentes do *MAS* e as linhas paralelas representantes das horas de dia claro;
- É importante realizar a análise das horas de “dia claro” (Sol acima do horizonte) para cada um dos três casos marcados no arco, efetuando-se também a mesma análise para pelo menos mais uma latitude.

4.3 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS

Para uma avaliação criteriosa sobre a funcionalidade do método exposto, faz-se necessária uma aplicação prática em sala de aula, com a concomitante análise de como o corpo discente recebe tal conhecimento, para tal, propõe-se uma aplicação prática desta metodologia com os alunos no afã de identificar o nível de interesse dos mesmo por matemática, Astronomia e também para aguçar o nível de curiosidade dos alunos a respeito do fenômeno do Equinócio, sua relação com a cidade de Macapá-AP e a duração da parte clara do dia.

Assim sendo, efetuou-se uma aplicação prática na “Escola Grupo Perspectivas Construtivas (GPC)”, no município de Santana-AP (situado à 17 km da capital Macapá-AP), onde foi feita a utilização do equipamento esfera armilar – de acordo com os procedimentos já expostos. Foi escolhida uma turma do terceiro ano do ensino médio, onde os alunos participaram ativamente do curso, fazendo questionamentos, mostrando seus pontos de vista a respeito dos fenômenos astronômicos que possuem determinadas peculiaridades para um observador à latitude zero e também demonstraram interesse sobre outros aspectos relacionados à Astronomia, tal como observação do céu noturno e reconhecimento de constelações.

Durante o curso foram retiradas as dúvidas dos alunos, os quais informaram que seria interessante mais atividades de mesma natureza; logo, foram feitas sugestões ao corpo docente da escola sobre algumas formas de explorar conteúdos de Astronomia em paralelo com as disciplinas Física, Química, Biologia e, mais detalhadamente, Matemática; onde ocupa papel determinante a aquisição dos materiais discriminados no item 4.2 – além de outros equipamentos e materiais que não fazem parte do escopo deste trabalho. Foi destacada a importância de que sejam ofertados cursos de qualificação na área de Astronomia aos professores do ensino médio (sendo um tema transversal, diversas disciplinas podem ser favorecidas com

este tipo de estudo), os quais podem analisar a melhor metodologia para aplicar esse conhecimento em sua disciplina.

Ao término do curso foi aplicado um questionário com duas perguntas (Anexo 3) aos alunos, como forma de registrar alguns dados sobre como eles receberam o trabalho executado.

A primeira pergunta do questionário era “Qual a duração da parte clara do dia para a cidade de Macapá-AP?” e tinha o intuito de verificar se os (as) alunos (as) assimilaram o conteúdo sobre a duração do dia e da noite para o referencial sobre a latitude zero.

Observou-se que 91,67% dos alunos deram respostas corretas à primeira pergunta do questionário, sendo que as respostas incorretas podem-se atribuir àqueles que ou não prestaram a devida atenção ao conteúdo ministrado ou não quiseram fazer perguntas para sanar as dúvidas pendentes; mesmo assim este resultado é considerado satisfatório.

Dentre as respostas dos alunos à primeira pergunta, é importante destacar a do (a) aluno (a) 1, na Figura 12.

Figura 12: Resposta do (a) aluno (a) 1 à pergunta 1

$$\begin{aligned} \text{R: } T_d &= \frac{2}{15} \text{ arc cos } (-\text{tag } 0^\circ \cdot \text{tag } 0^\circ) \\ &= \frac{2}{15} \times 90^\circ = 12 \text{ h} \end{aligned}$$

Fonte: Comunicação pessoal; SILVA; 2020.

A segunda pergunta do questionário visava averiguar como eles interpretaram a utilização da metodologia envolvendo conteúdos de Matemática e Astronomia, com o registro na forma escrita das suas opiniões pessoais. Abaixo tem-se o registro e análise de algumas das respostas dos alunos à seguinte pergunta “Com suas palavras, escreva o que você acha de usar Astronomia na aula de Matemática?”

Figura 13: Resposta do (a) aluno (a) 2 à pergunta 2

R: Acho excelente, pois, podemos colocar em prática o que estamos aprendendo em matemática e também a título de mais conhecimento em relação aos astros e à matemática.

Fonte: Comunicação pessoal; SILVA; 2020.

O (A) aluno (a) 2 trouxe em sua resposta a importância da metodologia como uma forma de se colocar em prática os conteúdos de Matemática que são vistos em sala de aula e, além disso, o (a) mesmo (a) ressaltou que a interação promovida entre os dois conteúdos favorece o enriquecimento de conhecimentos em relação aos astros e também à Matemática.

Abaixo é fornecida a resposta do (a) aluno (a) 3 à mesma pergunta anterior:

Figura 14: Resposta do (a) aluno (a) 3 à pergunta 2

R: Interessante, pois podemos aplicar na prática o que aprendemos nos olhos de matemática.

Fonte: Comunicação pessoal; SILVA; 2020.

O (A) aluno (a) 3 trouxe uma resposta em plena concordância com a resposta do (a) aluno (a) 2.

Figura 15: Resposta do (a) aluno (a) 4 à pergunta 2

R: Muito interessante, pois só vemos esse assunto em geografia, e na maioria das vezes é sem base matemática.

Fonte: Comunicação pessoal; SILVA; 2020.

A resposta dada pelo (a) aluno (a) 4 enfatiza que o assunto em pauta despertou seu interesse por Astronomia e também evidencia outro problema existente no ensino de Astronomia, que é a escassez de seu uso por professores de Física e a falta de utilização de Matemática para trabalhar este conteúdo.

Figura 16: Resposta do (a) aluno (a) 5 à pergunta 2

R: Acho sensacional pois a Astronomia é algo fascinante, que quanto mais se estuda mais se encanta.

Fonte: Comunicação pessoal; SILVA; 2020.

Ao analisar a resposta do (a) aluno (a) 5 observa-se o quanto é importante a proposição de metodologias de ensino que contemplem o uso de Astronomia como suporte para determinadas disciplinas curriculares. Aqui tem-se a confirmação de que este conteúdo “fascina” o estudante e funciona como grande incentivo para que o

discente dê prosseguimento nos estudos dessa área, já que, como foi citado pelo (a) aluno (a) 5 “quanto mais se estuda mais se encanta”, onde esta afirmativa serve de incentivo também ao professor, fim maior aprofundamento nesta área com a concomitante aplicação em sala de aula.

As Figuras 13 a 16 trazem uma pequena amostra das respostas fornecidas pelos alunos à segunda pergunta subjetiva constante do anexo 3, entretanto, ao analisar o total das respostas coletadas, obteve-se 95,83% da aprovação dos alunos sobre a metodologia utilizada. Este resultado pode ser considerado como positivo para a aplicação desta metodologia em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho contou com diversas fases, iniciando-se com o levantamento de dados sobre o perfil dos visitantes do Monumento Marco Zero do Equador durante o equinócio de setembro de 2019, através da aplicação de um questionário, onde foi constatado que a maioria dos entrevistados respondeu de forma coerente a maioria das perguntas – como foi verificado na análise dos Gráficos 1 a 7, com exceção da questão 7 (cujas respostas foram analisadas no Gráfico 6), onde ficou constatada a dificuldade dos entrevistados em compreender o fato de que para um observador, situado sobre a linha do equador, a duração dos dias e das noites é de 12 horas para qualquer época do ano e, desta forma, entende-se ser necessário dar ênfase nesta equidade da duração da parte clara dia em trabalhos que visem a popularização da Astronomia.

Na sequência, o Capítulo 2 traz a discussão sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes, em particular os do ensino médio, na disciplina curricular Matemática; evidenciando os casos específicos de conteúdos de trigonometria e alguns conceitos de geometria – necessários para compreensão de alguns conceitos de Astronomia.

No Capítulo 3 foram explorados diversos conceitos de Astronomia, visando fornecer ao corpo docente material didático mínimo suficiente para a correta aplicação em sala de aula. Aqui destacam-se as explicações fornecidas sobre as causas que motivam a ocorrência das estações do ano e suas peculiaridades para um observador situado sobre a linha do equador. Entretanto, também foi necessário fornecer explicações a respeito de conceitos básicos de Astronomia de posição, com a finalidade de se compreender como funcionam os sistemas de referências mais comuns utilizados para localização de astros celestes, trabalhando conceitos como declinação e ascensão reta. Este Capítulo é concluído com a apresentação de uma equação que pode ser usada para calcular a quantidade de horas de Sol para qualquer posição no globo (com ressalvas para os casos em que ocorrem indefinições – polos terrestres) e qualquer data do ano; sendo também apresentados diversos exemplos de aplicação desta equação, para referências em latitudes diferentes e épocas do ano também diferentes, comparando-se os resultados obtidos com os fornecidos por um site especializado, constatando-se que os valores da margem de erro são mínimos, a aplicação da equação é recomendada para uso em sala de aula.

Por fim, o Capítulo 4 traz a proposta de uma metodologia ensino de Matemática, para o ensino médio, onde trabalha-se conceitos de Astronomia em conjunto com alguns conceitos matemáticos. A proposta apresenta ao aluno, de forma mais específica, conceitos básicos de trigonometria e geometria, motivos de ocorrência das estações do ano – juntamente com outros conceitos como equinócios e solstícios -, apresenta-se

também diversos conceitos básicos de Astronomia de posição, além de enfatizar o cálculo da duração do dia claro para qualquer local e citar o caso peculiar da cidade de Macapá-AP (sobre a linha do equador). Concluiu-se a proposta com um momento para os alunos apresentarem suas dúvidas e atividade avaliativa (a critério do professor). Foram fornecidos um modelo de plano de aula para aplicação da metodologia e sugeridos alguns equipamentos não-ópticos de Astronomia para auxiliar na exposição dos conceitos astronômicos. Concluiu-se este Capítulo com uma aplicação prática da metodologia sugerida em uma turma de terceiro ano do ensino médio, onde foram observadas reações positivas dos discentes com a exposição apresentada.

Portanto, a metodologia sugerida apresenta-se como uma excelente forma de se trabalhar alguns conteúdos matemáticos e, concomitantemente, apresentar ao aluno conceitos de Astronomia, sendo que tal metodologia não possui restrição para sua aplicação, mas apresenta grande relevância para ser aplicada em cidades próximas da latitude zero – como o caso de Macapá-AP e cidades próximas.

REFERÊNCIAS

AMANAJÁS, D. Divisibilidade por congruência. Orientador: José Walter Cárdenas Sotil. Dissertação (Mestrado) – Fundação Universidade Federal do Amapá, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT). – Macapá, 2019. 87 f.

AROCA, Sílvia Calbo; SILVA, Cibelle Celestino. Ensino de astronomia em um espaço não formal: observação do Sol e de manchas solares. **Rev. Bras. Ensino Fís.**, São Paulo, v. 33, n. 1, p. 01-11, Mar. 2011. Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000100013&lng=en&nrm=iso>. access on 25 Dec. 2019. <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000100013>.

BARROSO, J. M. (Ed. Resp.). *Conexões com a Matemática*. V.1, Ed. 1. São Paulo: Moderna, 2010.

BOCZKO, R. **Conceitos de Astronomia**. São Paulo: Edgar Blucher, 1984. 429 p.

BORGES, R.C.M. Cálculo do Nascer e do Pôr do Sol. Disponível em: <https://www.inf.ufrgs.br/~cabral/Nascer_Por_Sol.html>. Acesso em: 18 jan. 2020.

CALDAS, A (Org.). *Deu no jornal: o jornalismo impresso na era da Internet*. Coleção Ciências sociais. Rio de Janeiro: Ed. PUC-Rio; São Paulo: Loyola, 2002. 208 p.

CANALLE, João Batista Garcia; TREVISAN, Rute Helena; LATTARI, Cleiton Joni Benetti. Análise do conteúdo de astronomis de livros de geografia de 1º grau. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 14, n. 3, p. 254-263, jan. 1997. ISSN 2175-7941. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6983/6465>>. Acesso em: 18 dez. 2019. doi:<https://doi.org/10.5007/%x>.

CANIATO, R. *O céu*. (Coleção Ciência & entretenimento). – Campinas: Editora Átomo, 2011. 170 p.

COMO OBSERVAR O SOL EM SEGURANÇA. Disposto em:<<http://www.astro.up.pt/caup/eventos/dawn2009/ComoObservarOSol.pdf>>. Acesso em 25/12/2019.

SILVA, J. N. Comunicação pessoal. Macapá; 2020.

DANTE, L. R. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2008.

DIONÍZIO, F. Q.; BRANDT, C. F. Análise das dificuldades apresentadas pelos alunos do ensino médio em trigonometria. **X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE**. PUCPR, 2011. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/CD2011/pdf/4728_2885.pdf>. Acesso em: 25/01/2020.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. Geometria Espacial. V. 10. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 1985. 413 p.

LANGHI, R.; NARDI, R. Ensino de Astronomia: Erros conceituais mais comuns presentes em livros didáticos de ciências. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 24, n. 1, p. 87-111, 2007.

MARAN, Stephen. **Astronomia para leigos**. – Rio de Janeiro: Alta Books, 2011. 328 p.

MÉDICI, R. N. **Astronomia de posição**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1989. 187 p.

MORAIS, P. D.; MORAIS, J. D. **Geografia do Amapá**. Macapá: JM Editora Gráfica, 2017. 121 p.

MOREIRA, L. P. O que é plano? Disponível em <<https://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/o-que-e-plano.htm>>. Acesso em 29/01/2020.

MOURÃO, R. R. F. **Dicionário Enciclopédico de Astronomia e Astronáutica**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1987. 913 p.

MOURÃO, R. R. F. **Manual do astrônomo**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2004. 151 p.

MOURÃO, R. R. F. **O livro de ouro do Universo**: revisto e atualizado. Rio de Janeiro: HarperCollins Brasil, 2016. 522 p.

NEVES, M.; ARGUELLO, C. Astronomia de régua e compasso: de Kepler a Ptolomeu. – Campinas: Papirus, 1986. 161 p.

OLIVEIRA FILHO, K. S.; SARAIVA, M. F. O. **Astronomia e Astrofísica**. Porto Alegre: UFRGS, 2014. 784 p.

PACHECO, Marina Buzin; ANDREIS, Greice da Silva Lorenzetti. Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio. **Revista Principia - Divulgação Científica e**

Tecnológica do IFPB, [S.l.], n. 38, p. 105-119, fev. 2018. ISSN 2447-9187.

Disponível em: <<http://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/1612>>.

Acesso em: 13 Dez. 2019. doi:<http://dx.doi.org/10.18265/1517-03062015v1n38p105-119>.

PEREIRA, M. R. “**A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino**”. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Universidade Católica de São Paulo; 2001.

REES, M. Um mergulho no cosmos. **Enciclopédia Ilustrada do Universo**, v.1. São Paulo: Duetto Editorial, 2008b. 114p.

SALAVIAN, L. Equinócio da Primavera terá programação especial nos dias 22 e 23 de setembro. Disponível em: <<https://www.portal.ap.gov.br/noticia/1809/equinocio-da-primavera-tera-programacao-especial-nos-dias-22-e-23-de-setembro>>. Acesso em 12/12/2019.

SILVA, F. S.; CATELLI, F.; GIOVANNINI, O. Um modelo para o movimento anual aparente do sol a partir de uma perspectiva geocêntrica. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 7-25, 2010.

SILVA, J. N.; VOELZKE, M.; ARAÚJO, M. Astronomia no Meio do Mundo: uma análise Física da visualização de constelações e dos equinócios a partir da Latitude Zero. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 35, n. 1, p. 159-184, 2018.

SOL-Evento e Posição. Disponível em:< <https://www.heavens-above.com> >. Acesso em 04 jan. 2020.

SPIZZIRRI, Rosane Cristina Pereira et al. Adolescência conectada: Mapeando o uso da internet em jovens internautas. **Psicologia Argumento**, [S.l.], v. 30, n. 69, nov. 2017. ISSN 1980-5942. Disponível em: <<https://periodicos.pucpr.br/index.php/psicologiaargumento/article/view/23288/22361>> . Acesso em: 20 dez. 2019.

TOMAZ, V. S.; DAVID, M. M. **Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula**. – 3. Ed. (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2013. 143 p.

ANEXO 1



UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

Questionário sobre o Equinócio Equatorial

1) Qual sua faixa de idade? <input type="checkbox"/> Até 15 anos <input type="checkbox"/> De 16 a 25 anos <input type="checkbox"/> De 26 a 40 anos <input type="checkbox"/> Acima de 40 anos	5) O que determina a ocorrência dos Equinócios? <input type="checkbox"/> O período das chuvas <input type="checkbox"/> A posição relativa entre a terra e o sol e a inclinação do eixo terrestre <input type="checkbox"/> O efeito coriolis <input type="checkbox"/> Ocorre de forma aleatória
2) Qual sua escolaridade? Ens. Fund.: <input type="checkbox"/> Completo / <input type="checkbox"/> Incompleto Ensino Médio: <input type="checkbox"/> Completo / <input type="checkbox"/> Incompleto Graduação: <input type="checkbox"/> Completo / <input type="checkbox"/> Incompleto Pós Graduação: <input type="checkbox"/> Completo / <input type="checkbox"/> Incompleto	6) Sobre a duração do dia e da noite: <input type="checkbox"/> Dependem da posição relativa entre a terra e o sol e também da inclinação do eixo terrestre <input type="checkbox"/> É a mesma para qualquer local independente do período do ano <input type="checkbox"/> Dia e noite tem sempre 12 horas cada para todas as latitudes <input type="checkbox"/> Não tem explicação científica
3) Como você conheceu o fenômeno do Equinócio? <input type="checkbox"/> Através da mídia televisiva <input type="checkbox"/> Através da internet <input type="checkbox"/> Através da mídia impressa <input type="checkbox"/> Através de comunicações "boca-a-boca"	7) Na latitude zero... <input type="checkbox"/> Os Equinócios ocorrem em Junho e dezembro <input type="checkbox"/> Dia e noite tem 12 horas cada, aproximadamente, somente durante os Equinócios <input type="checkbox"/> Os Equinócios indicam que a terra está mais próxima do sol <input type="checkbox"/> Dia e noite tem sempre 12 horas cada, aproximadamente
4) O Equinócio é um fenômeno... <input type="checkbox"/> que ocorre somente em Macapá <input type="checkbox"/> místico <input type="checkbox"/> astronômico <input type="checkbox"/> relacionado com o efeito coriolis	8) Na cidade de Macapá-AP... <input type="checkbox"/> Existe um Monumento construído para visualizar o sol no dia do Equinócio <input type="checkbox"/> Existe um Monumento construído para visualizar o sol no dia do Solstício <input type="checkbox"/> Ocorre festividade marcando o Solstício <input type="checkbox"/> O Equinócio e o Solstício são festejados no mesmo dia

ANEXO 2

Como NÃO olhar para o Sol

Alguns materiais são comumente indicados como seguros para a visualização do Sol, tais como disquete, vidro fumado, radiografias e filme fotográfico exposto; porém, esta segurança é ilusória, já que, ou eles não protegem contra os raios ultravioleta ou não protegem contra raios infravermelhos.



(<http://www.astro.up.pt/caup/eventos/dawn2009/ComoObservarOSol.pdf>)

Métodos dedicados da observação solar

Alguns equipamentos são exclusivos para observação do Sol, bloqueando a luz solar por frequência; como é o caso dos filtros utilizados nos telescópios em *H-Alpha* (a faixa de frequência que este filtro permite passar), tais como o *Personal Solar Telescope (PST)* e os telescópios da marca *Lunt*.

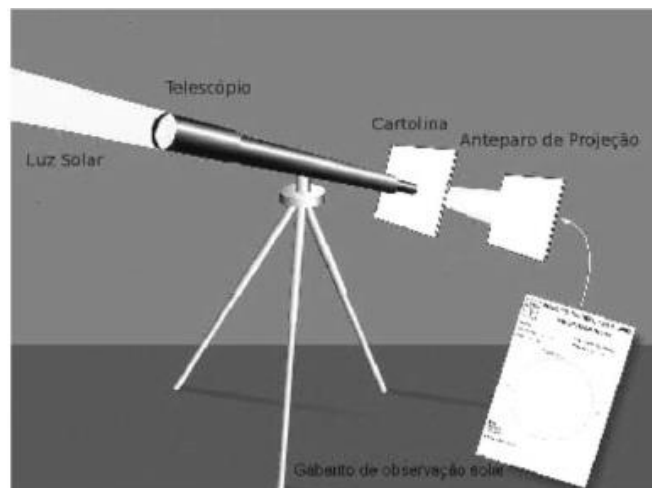


(<http://www.astro.up.pt/caup/eventos/dawn2009/ComoObservarOSol.pdf>)

Método seguro e barato para a observação solar

O método mais seguro para a observação do Sol é o da observação indireta. Como observação indireta pode-se citar o método de projeção, sobre o qual Mourão (2004, p. 46-47) explica:

[...] é feita dirigindo-se o telescópio para o Sol e colocando uma tela ou cartão branco a algumas dezenas de centímetros da ocular. Para localizar a imagem projetada sobre a tela procuramos deslocar a ocular para a frente ou para trás. Se a ocular escolhida não tiver um grande campo visual (ocular de curto comprimento focal), veremos sobre a tela um disco claro, ou seja, a imagem do Sol, com alguns pontos escuros mais ou menos grossos: as manchas solares.



(AROCA e SILVA, 2011, p. 1402-7)

ANEXO 3**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAPÁ
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT****Aula de Aplicação da Metodologia**

Qual a duração da parte clara do dia para a cidade de Macapá-AP?

R:

Com suas palavras, escreva o que você acha de usar Astronomia na aula de Matemática?

R: