



UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI  
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS COM REALIDADE AUMENTADA COMO AUXÍLIO  
PARA DESENVOLVER A HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL**

**Jaime Batista de Souza**

Teófilo Otoni  
2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI  
INSTITUTO DE CIÊNCIA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA

**SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS COM REALIDADE AUMENTADA COMO  
AUXÍLIO PARA DESENVOLVER A HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO  
ESPACIAL**

**Jaime Batista de Souza**

Orientador(a):

**Deborah Faragó Jardim**

Co-orientador(a):

**Fábio Silva de Souza**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional, como parte dos requisitos  
exigidos para a conclusão do curso.

Teófilo Otoni

2020

Ficha Catalográfica  
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM  
Bibliotecário responsável: Baltazar José Filho – CRB-6/2775

S729s Souza, Jaime Batista de.  
Sequências didáticas com realidade aumentada (RA) como auxílio para desenvolver a habilidade de visualização espacial. / Jaime Batista de Souza. - - Teófilo Otoni, 2020.  
104 p. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2020.

Orientadora: Profª. Dra. Deborah Faragó Jardim.

1. Realidade aumentada. 2. Teoria de registros de representações semióticas. 3. Tecnologias na educação. I. Título. II. Souza, Jaime Batista de. III. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri.

**CDD 371.33**



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

JAIME BATISTA DE SOUZA

**SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS COM REALIDADE AUMENTADA COMO AUXÍLIO  
PARA DESENVOLVER A HABILIDADE DE VISUALIZAÇÃO ESPACIAL**

**Dissertação** apresentada ao programa de Pós-Graduação **Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat)** da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, **nível de Mestrado**, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. **Dra. Deborah Faragó Jardim**

Coorientador: Prof. **Dr. Fábio Silva de Souza**

Data de aprovação 09/10/2020.

**Prof. Dra. Deborah Faragó Jardim - (UFVJM)**

**Prof. Dr. Fábio Silva de Souza - (UFVJM)**

**Prof. Dr. Weversson Dalmaso Sellin - (UFVJM)**

**Prof. Dr. Ole Peter Smith - (UFG)**



Documento assinado eletronicamente por **Deborah Faragó Jardim, Servidor**, em 19/10/2020, às 11:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Weversson Dalmaso Sellin, Servidor**, em 19/10/2020, às 12:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fábio Silva de Souza, Servidor**, em 19/10/2020, às 18:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ole Peter Smith, Usuário Externo**, em 20/10/2020, às 09:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufvjm.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufvjm.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0195657** e o código CRC **2708B024**.

À minha esposa Karen, aos meus filhos Kaio e Sofia, e aos meus amigos que me apoiaram ao longo dessa trajetória.

## **AGRADECIMENTO**

Ao meu Deus, cujo nome é Jeová, por todas as provisões. (Salmo 83:18)

À minha família, pelo apoio e paciência.

Aos professores Deborah Faragó Jardim e Fábio Souza Silva, pela orientação, amizade e principalmente pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

À coordenação do programa, representada pelos professores Silvia Swain Canôas e Nolmar Melo, pelo incentivo e compreensão, por não me deixarem desistir quando tive vontade fazer.

Aos colegas da turma do PROFMAT 2018, por estarmos juntos até mesmo nos momentos mais tensos.

Aos meus colegas de trabalho e direção do ICET, por me apoiarem nessa trajetória árdua.

Ao meu amigo Rogério Starich, por todo o apoio incentivo dado à nossa turma.

À todos os meus amigos que direta ou indiretamente me ajudaram, em especial à Thamara Nepomucena e Thaís Pinheiro, pelo apoio no desenvolvimento deste trabalho.

“O coração calmo é vida para o corpo.”

Provérbios 14:30

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa bibliográfica e qualitativa sobre o uso do recurso de Realidade Aumentada (RA), aplicado no ensino de matemática, com o objetivo de estimular o aluno a desenvolver a habilidade de visualização espacial. A partir de um referencial teórico, constatou-se que grande parte dos estudantes de cursos de exatas apresentam dificuldades em visualizar objetos tridimensionais a partir de imagens 2D encontradas nos materiais didáticos impressos. Como o perfil atual dos estudantes destes cursos são de sujeitos alfabetizados tecnologicamente, fez-se necessário produzir neste trabalho propostas de sequências didáticas utilizando softwares e aplicativos com recurso de RA, que possibilite ao aluno construir os objetos 3D. Os problemas escolhidos são abordados nas unidades curriculares de Mecânica dos Sólidos, Funções de Várias Variáveis, Geometria Espacial e Desenho e Projeto para Computador, dos cursos de Ciência e Tecnologia (BC&T), Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil da UFVJM, Campus do Mucuri. Com base na Teoria de Registros de Representações Semióticas, as sequências foram elaboradas em etapas, de modo que, o aluno consiga fazer as conversões e tratamentos entre os registros para outro. Portanto, este trabalho mostra o recurso de RA como uma ferramenta pedagógica bastante atrativa, capaz de instigar o aluno a ser autônomo e protagonista do seu próprio aprendizado.

**Palavras-chave:** Realidade aumentada, Teoria de Registros de Representações Semióticas, Tecnologias na educação.



## ABSTRACT

This work presents a bibliographic and qualitative research on the use of Augmented Reality (AR) resources, applied in teaching of mathematics, with the objective of stimulate students' ability of spatial visualization. From a theoretical framework, it was found that the most part of students of exact courses have difficulties visualizing three-dimensional objects based on 2D images found in printed teaching materials. As the current profile of students in these courses technologically are literate subjects, it was necessary to produce the didactic sequence proposals in this work, using software and applications with AR resources, which allows the student to build 3D objects. The chosen problems were addressed in the curricular units of Solid Mechanics, Functions of Various Variables, Spatial Geometry and Computer Design and Projects from Science and Technology (BC&T), Mathematics and Civil Engineering courses at UFVJM (DEFINIR), Campus do Mucuri. Based on the Registers of Semiotics Representation Theory, the sequences were elaborated in stages, so that the student may make the conversions and treatments between different registers. Therefore, this work shows the resource of AR as a very attractive pedagogical tool, capable of instigating the student to be autonomous and protagonist of his own learning.

**Keywords:** Augmented Reality, Theory of Semiotic Representation Records, Technologies in education.



## LISTA DE FIGURAS

2.1	Conversões realizadas pelo E21 no pós-teste. . . . .	10
2.2	Exemplo de item do teste de visualização espacial - TVZ2002-C. . .	11
2.3	Usuário interagindo com o objeto virtual em realidade aumentada.	13
2.4	Representação gráfica de todas as superfícies disponíveis no <i>app</i> EducAR – Quadrics. . . . .	14
2.5	Modelo 3D virtualizado sobre uma mesa. . . . .	16
2.6	Projeto 3D impresso e finalizado . . . . .	17
2.7	Representação do mesmo objeto em vários registros semióticos . .	18
2.8	Classificação dos registros de representação semiótica. . . . .	18
2.9	Plataforma geogebra.org . . . . .	20
2.10	Ambiente Calculadora 3D da plataforma geogebra.org . . . . .	21
2.11	<i>App</i> Calculadora 3D do GeoGebra com aplicação em RA. . . . .	21
2.12	Maquete em perspectiva 3D construída a partir de uma planta baixa.	22
2.13	<i>App</i> Augin com aplicação em RA . . . . .	23
2.14	Telas do <i>app</i> Arloon Geometry. . . . .	24
2.15	Telas do <i>app</i> Arloon Geometry. . . . .	24
2.16	Telas do <i>app</i> Arloon Geometry. . . . .	24
2.17	Telas do <i>app</i> Arloon Geometry. . . . .	25
3.1	Vetores no espaço . . . . .	28
3.2	Hélice do exemplo 1 . . . . .	30
3.3	Tipos de poliedros regulares . . . . .	31
3.4	Desenho feito pelo aluno . . . . .	32
3.5	Desenho em perspectiva de uma peça e suas vistas ortográficas . .	33
4.1	Ilustração do problema F2.24 . . . . .	35
4.2	GeoGebra - Retângulos nos planos $xz$ e $xy$ . . . . .	37
4.3	GeoGebra - Criando pontos e segmentos . . . . .	38

4.4	GeoGebra - Criando os vetores . . . . .	39
4.5	GeoGebra - Criando o vetor resultante . . . . .	39
4.6	GeoGebra - Modelo 3D aplicado em RA . . . . .	40
4.7	GeoGebra - Modelo 3D descrito no problema . . . . .	42
4.8	GeoGebra - Botão <i>play</i> à direita do controle deslizante . . . . .	43
4.9	GeoGebra - Modelo 3D virtualizado num ambiente real . . . . .	43
4.10	Questão retirada do Concurso Vestibular da UFRGS . . . . .	44
4.11	GeoGebra - Cubo de aresta $a$ . . . . .	45
4.12	GeoGebra - Cubo com o triângulo equilátero (azul) em seu interior. . . . .	46
4.13	GeoGebra - Cubo com o octaedro em seu interior. . . . .	46
4.14	GeoGebra - Visão superior do modelo 3D. . . . .	47
4.15	GeoGebra - Modelo 3D virtualizado num ambiente real. . . . .	48
4.16	Triângulo retângulo cuja hipotenusa é a aresta do octaedro. . . . .	49
4.17	Vistas da peça. . . . .	50
4.18	Vistas VF, VL e Vs identificadas. . . . .	50
4.19	Desenho do paralelepípedo. . . . .	51
4.20	Finalizando o desenho em perspectiva. . . . .	51
4.21	Revit - Criando novo projeto . . . . .	52
4.22	Revit - Alterando a unidade de medida . . . . .	52
4.23	Revit - Criando o modelo no local . . . . .	53
4.24	Revit - Criando o primeiro bloco . . . . .	53
4.25	Revit - Criando o retângulo da base do primeiro bloco . . . . .	54
4.26	Revit - Criando o retângulo da base do primeiro bloco . . . . .	54
4.27	Revit - Visualizando o bloco em 3D . . . . .	55
4.28	Revit - Definindo as dimensões dos blocos superiores . . . . .	55
4.29	Revit - Alterando a escala . . . . .	56
4.30	Revit - Finalizando o modelo . . . . .	56
4.31	Revit - Enviando para o <i>Augin</i> . . . . .	56

4.32	Augin - Aplicação em RA. . . . .	57
4.33	Augin - Aplicação em RA . . . . .	57
4.34	Augin - Aplicação em RA . . . . .	58
4.35	Falha na escala do <i>app Augin</i> . . . . .	58
B.1	Plano de ensino da disciplina Mecânica dos Sólidos 2020/1 p1. . .	69
B.2	Plano de ensino da disciplina Mecânica dos Sólidos 2020/1 p2. . .	70
B.3	Plano de ensino da disciplina Funções de Várias Variáveis 2019/2 p1. . . . .	71
B.4	Plano de ensino da disciplina Funções de Várias Variáveis 2019/2 p2. . . . .	72
B.5	Plano de ensino da disciplina Funções de Várias Variáveis 2019/2 p3. . . . .	73
B.6	Plano de ensino da disciplina Geometria Espacial 2020/1 p1. . . .	74
B.7	Plano de ensino da disciplina Geometria Espacial 2020/1 p2. . . .	75
B.8	Plano de ensino da disciplina Geometria Espacial 2020/1 p3. . . .	76
B.9	Plano de ensino da disciplina Desenho Técnico para Computador 2019/2 p1. . . . .	77
B.10	Plano de ensino da disciplina Desenho Técnico para Computador 2019/2 p2. . . . .	78
B.11	Plano de ensino da disciplina Desenho Técnico para Computador 2019/2 p3. . . . .	79



## LISTA DE TABELAS

4.1	Comandos para realizar o procedimento 2 . . . . .	38
4.2	Comandos para realizar o procedimento 3 . . . . .	38
4.3	Comandos para criar o vetor resultante . . . . .	39
4.4	Comandos para criar a curva da função $r$ . . . . .	41
4.5	Comandos para criar o cilindro. . . . .	42
4.6	Comandos para criar o cubo . . . . .	45
4.7	Comandos para criar o triângulo equilátero . . . . .	45
4.8	Comando para criar o octaedro . . . . .	46



## **LISTA DE ABREVIATURAS**

CDI - Cálculo Diferencial e Integral

GD - Geometria Descritiva

RA - Realidade Aumentada

TICs - Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, ou simplesmente

TRRS - Teoria dos Registros de Representação Semiótica



## **LISTA DE SIGLAS**

BC&T - Ciência e Tecnologia

ICET - Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFVJM - Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri



## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	1
1.1 Contextualização do tema	1
1.2 Objetivos	5
1.3 Metodologia	5
1.4 Organização do trabalho	7
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b>	9
2.1 Dificuldades do aluno quanto a visualização espacial	9
2.2 Trabalhos relacionados ao uso de RA na educação	12
2.3 A Teoria dos Registros de Representação semiótica	17
2.4 <i>Softwares</i> e aplicativos estudados	20
2.4.1 GeoGebra	20
2.4.2 Revit	22
2.4.3 Augin	22
2.4.4 Arloon Geometry	23
<b>3 UNIDADES CURRICULARES QUE EXIGEM A APTIDÃO ESPACIAL</b>	27
3.1 Mecânica dos Sólidos	27
3.2 Funções de Várias Variáveis	28
3.3 Geometria Espacial	30
3.4 Desenho e projeto para Computador	32
<b>4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS</b>	35
4.1 Atividade para a disciplina Mecânica dos Sólidos	35
4.2 Atividade para a disciplina Funções de Várias Variáveis	40
4.3 Atividade para a disciplina Geometria Espacial	44
4.4 Atividade para a disciplina Desenho e Projeto para Computador	49
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	61
<b>REFERÊNCIAS</b>	63
<b>ANEXO A – INFORMAÇÕES TÉCNICAS SOBRE OS <i>SOFTWARES</i> E APLICATIVOS UTILIZADOS</b>	67
A.1 Plataforma GeoGebra	67
A.2 Revit	67
A.3 Augin	68

**ANEXO B – PLANOS E ENSINO DAS DISCIPLINAS . . . . . 69**

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentamos uma introdução sobre o tema desta pesquisa descrevendo a problematização, justificativa, objetivos e estrutura deste trabalho. Separamos em tópicos para melhor entendimento do leitor e abordamos a temática de modo a despertar o interesse dos docentes na aplicação das propostas de sequência didática.

## 1.1 Contextualização do tema

Nas últimas décadas as inovações tecnológicas vem se tornando parte da vida humana de forma muito rápida, facilitando a comunicação, prestação de serviços, transporte, e outras necessidades humanas. Muitos desses recursos tecnológicos, que há pouco tempo faziam parte apenas das cenas de filmes de ficção científica, hoje já estão disponíveis no mercado de forma bastante acessível. Exemplo disso é a tecnologia *touch screen*, onde praticamente qualquer pessoa no planeta pode ter acesso ao adquirir um *smartphone*. Tais avanços também vem trazendo novos métodos de ensino-aprendizado (COSTA et al., 2019). No Brasil o investimento em educação ainda não é o ideal, mas em muitas escolas e centros universitários já são utilizados recursos como lousa digital, tvs com *touch screen* e projetores multimídia com conexão sem fio e pareamento com *tablets* e *smartphone*.

Segundo Meireles e Schimiguel (2019), o desafio que surge diante dos educadores é como utilizar tais recursos de tal maneira que contribua significativamente com a melhoria no ensino. Em paralelo ao avanço tecnológico muitos autores tem publicado propostas de metodologias que empregam o uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, ou simplesmente TICs, em práticas educacionais. As pesquisas referentes a este assunto são discutidas no capítulo 2 deste trabalho. Tais propostas tem por objetivo tornar a aula interativa e mais atraente, despertando no sujeito o interesse em aprender.

Atualmente, no que diz respeito ao ensino de matemática, o uso de TICs está se tornando uma ferramenta pedagógica necessária e muito eficaz. Para Meireles e Schimiguel (2019), se referindo ao uso de *softwares* de geometria dinâmica, “situações de aprendizagem nesse ambiente permitem que os objetos não permaneçam estáticos, ao mesmo tempo, facilitam a interpretação de características e conceitos que a lousa e o giz não proporcionam.”

Sobre o uso de TICs no ensino de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), especificamente para conceitos que exigem do aluno a habilidade de visualização espacial, Pereira et al. (2017) afirmam que

[...] a escola como um espaço privilegiado de discussão, produção e estruturação do conhecimento, deve oferecer aos profissionais da educação e estudantes meios para se integrarem neste contexto de novos recursos computacionais, visando estimular e fortalecer o processo de ensino e aprendizagem. E assim, através do seu uso, permitir que o estudante crie uma relação entre as formas tridimensionais do mundo real e suas possíveis representações matemáticas, explorando sua capacidade de abstração e formalização das ideias. (PEREIRA et al., 2017)

Quando se trata de conceitos matemáticos que envolvem representações de objetos ou figuras tridimensionais, os livros didáticos dificilmente conseguem suprir a necessidade do aluno de visualizar tais objetos observando a profundidade ou deformações, pois as figuras são expostas em duas dimensões, exigindo que o aluno faça um esforço mental para interpretar a figura em três dimensões.

Um dos fatores que dificultam o entendimento do aluno é a falta de visão espacial devidamente desenvolvida. A carência dessa habilidade cognitiva, por parte do aluno egresso do Ensino Médio, fica evidente quando o mesmo ingressa nos cursos das áreas de exatas, particularmente em engenharia e matemática. Isso se apresenta como um desafio para os docentes que buscam superar tal obstáculo propondo aprimoramentos no processo de ensino.

Segundo Prieto e Velasco (2006) a “Aptidão de Visualização é, junto às de Relações Espaciais e Orientação Espacial, um dos fatores mais representativos e ela é definida como a aptidão para manipular mentalmente figuras tridimensionais complexas”.

Por exemplo, o estudo de vetores está presente em grande parte das estruturas curriculares dos cursos de exatas. No curso de Engenharia, há várias unidades curriculares que aplicam este conceito. Segundo Roncaglio e Nehring (2017), numa atividade prática, envolvendo vetores no espaço, os alunos apresentaram confusão na representação de vetor no sistema cartesiano, erros de visualização espacial, entre outros.

Uma situação problema enfrentada por estudantes de engenharia, por exemplo, é quanto à visualização de um projeto aplicado ao local onde será erguida uma edificação, seguindo uma escala que aproxima do tamanho real. De acordo com Valente e Pereira (2015),

O ensino das projeções por vistas ortográficas, fundamentadas nos conceitos de geometria descritiva (GD), tem como escopo capacitar os alunos a representar objetos espaciais no plano com formas e dimensões explicitamente definidas, porém, durante as aulas, nota-se que os aprendizes apresentam grande dificuldade em compreender estas representações gráficas. Um dos fatores que dificultam o entendimento do aluno é a falta de visão espacial devidamente desenvolvida. (VALENTE; PEREIRA, 2015)

Para isso, uma solução seria utilizar recursos computacionais que pudessem atender essa demanda. Dentre as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, destacam-

se os *softwares* e aplicativos<sup>1</sup> que oferecem recurso de realidade aumentada (RA) como ferramentas úteis em unidades curriculares de cursos como medicina, biologia, engenharia, matemática e outros. Este recurso proporciona ao estudante uma visão tridimensional dos elementos estudados bem próxima da realidade, trazendo um grande ganho para o aprendizado. Ver objetos tridimensionais de vários ângulos permite ao observador ter uma ideia do todo e de suas vistas, ou seja, de suas faces, e ainda, por meio da sobreposição de objetos virtuais, gerados por computador ou dispositivos móveis, em um ambiente real.

Diante da problemática apresentada, fez-se necessário tecer algumas reflexões sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica<sup>2</sup> (TRRS), proposta pelo pesquisador Raymond Duval (1995). Esta teoria, segundo Henriques e Almouloud (2016), é uma das abordagens teóricas que vem encontrando espaço expressivo nas pesquisas em Educação Matemática no Brasil devido a rica contribuição no campo educativo, tanto no ensino quanto na pesquisa.

No Campus do Mucuri da UFVJM, em Teófilo Otoni MG, estão em funcionamento três cursos que se enquadram na problematização abordada aqui. Estes cursos são: Ciência e Tecnologia (BC&T), Licenciatura em Matemática e Engenharia Civil. Grande parte dos estudantes destes cursos são oriundos das escolas públicas dos vales do Jequitinhonha e Mucuri. Segundo Santos et al. (2019), um dos fatores que contribuem para o alto índice de retenção e evasão, dos discentes vinculados aos cursos citado acima, é a formação insatisfatória nos ensinamentos fundamental e médio, o que indica que estes estudantes apresentam pouca habilidade em matemática.

É importante provocar o aluno a pensar diante de um problema, não apenas treiná-lo para executar tarefas específicas. Em conformidade com os Projetos Pedagógicos dos cursos citados acima, dentre as competências e habilidades que espera-se que o aluno adquira, destaca-se a capacidade de:

- aplicar conhecimentos matemáticos, científicos e tecnológicos para a solução de problemas na área de Ciência e Tecnologia, conforme o curso de BC&T (UFVJM, 2012).
- compreender, criticar e utilizar novas ideias e tecnologias para a resolução de problemas, conforme o curso de Licenciatura em Matemática (UFVJM, 2018).

---

<sup>1</sup>Software desenvolvido para dispositivos móveis, como *smartphones* e *tablets*, ou no computador e em *smart TVs*, podendo ser executados *offline* ou *online*, distribuídos em versões pagas ou gratuitas, através das lojas de aplicativos. Abreviatura: *app*.

<sup>2</sup>Semiótica tem origem na palavra grega *sēmeiōtikē* que significa "observador de sinais". Fonte: Henry George Liddell. Robert Scott. A Greek-English Lexicon. revised and augmented throughout by. Sir Henry Stuart Jones. with the assistance of. Roderick McKenzie. Oxford. Clarendon Press. 1940.

Para o sujeito que ingressa no ensino superior em um curso de exatas, é esperado que tenha ciência do quão importante é fortalecer seu conhecimento acerca dos conceitos matemáticos e suas aplicações no desenvolvimento de novas tecnologias pois, ao longo do curso, esses conceitos servirão como base para outras disciplinas. Nos cursos de BC&T e Matemática da UFVJM, são ofertadas aos alunos diversas oportunidades para se envolverem ativamente em projetos de iniciação científica, onde eles conseguem vivenciar a aplicação das teorias, resultando em modelos e protótipos.

Alguns autores, como Dantas e Matucheski (2019) e Jardim et al. (2018) vem mostrando como utilizar o *software* livre<sup>3</sup> GeoGebra como ferramenta computacional que auxilia o aluno na busca de soluções para um problema. Este *software* tem recebido destaque no que se refere à utilização de tecnologias digitais no ensino de matemática. Isto se deve ao seu dinamismo e compatibilidade com diversas plataformas, inclusive versões para *smartphones*. Assim, o Geogebra se torna um recurso acessível e, ao mesmo tempo, interessante para o novo perfil de aluno alfabetizado tecnologicamente.

Deste modo, justifica-se a realização deste trabalho, como uma forma de estimular o docente a utilizar ferramentas computacionais eficientes para o ensino de conceitos matemáticos que exigem a habilidade de visualização espacial. Além disso, pretende-se estimular o aluno à investigação científica, em busca de soluções para problemas abordados em níveis superiores de pesquisa aplicada no campo da matemática e engenharia, desenvolvendo tal habilidade e outras competências importantes para a sua formação.

Segundo Herpich et al. (2018), a neuroeducação se propõem a interligar as tecnologias educacionais com as habilidades cognitivas dos estudantes e suas especificidades. O uso de tais tecnologias no processo de ensino e aprendizagem é passivo de estimular as habilidades cognitivas dos estudantes, as quais são fatores determinantes para a construção do conhecimento. Neste processo de aprendizagem aliado ao uso de tecnologias, a adoção do método de ensino investigativo possibilita ao “aluno se tornar protagonista de sua aprendizagem, movida por um problema, um desafio, para assim construir hipóteses e desenvolver estratégias para solucionar o problema”(SANTOS; SILVA, 2018).

Sobre o ensino investigativo, Carvalho (2011) aponta quatro pontos importantes: o problema, para iniciar a construção do conhecimento científico; a passagem da ação manipulativa para a ação intelectual; a importância da tomada de consciência de seus atos e a percepção das diferentes etapas das explicações científicas.

Com o novo perfil de sujeito presente em sala de aula, alfabetizado tecnologicamente

---

<sup>3</sup>Por “*software* livre” devemos entender aquele *software* que respeita a liberdade e senso de comunidade dos usuários. Grosso modo, isso significa que os usuários possuem a liberdade de executar, copiar, distribuir, estudar, mudar e melhorar o *software*. Fonte: <https://www.gnu.org/>

mente, não é difícil envolvê-lo num processo de ensino investigativo, utilizando recursos digitais através de dispositivos móveis como *smartphones* e *tablets* com alto poder de processamento e boas câmeras integradas, tornando-o protagonista de sua aprendizagem. Evidentemente, partindo do pressuposto de que o estudante tenha acesso a essas tecnologias, a utilização de aplicativos de RA para estes dispositivos acaba sendo bastante viável.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é explorar os recursos de *softwares* e aplicativos, com tecnologia RA, propondo ações que tem potencial para instigar os alunos dos cursos de BC&T, Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática da UFVJM a aplicarem conceitos das unidades curriculares de Funções de Várias Variáveis (FVV), Mecânica dos Sólidos, Geometria Espacial e Desenho e Projeto para Computador (DPC). Além disso, objetiva-se que o aluno realize as conversões e tratamentos entre os registros de representações semióticas, na busca de soluções para problemas que exigem uma visualização tridimensional mais próxima da realidade.

Como objetivos secundários pode-se citar:

- Propor atividades que desafiem estudantes a utilizar *softwares* e aplicativos com RA para visualizar objetos tridimensionais como sólidos geométricos, vetores no espaço, objetos de interesse das engenharias, dentre outros.
- Identificar conceitos matemáticos aplicados no desenvolvimento desta pesquisa, promovendo uma reflexão sobre a aplicação do conhecimento científico ao cotidiano.
- Identificar e construir objetos e figuras tridimensionais para melhor visualização utilizando tecnologia de RA, verificando a adequação dos *softwares* e aplicativos mais eficientes aos problemas investigados.

## 1.3 Metodologia

A metodologia utilizada neste trabalho possui um caráter bibliográfico e qualitativo com propostas de atividades práticas de ensino. Analisamos as dificuldades que os próprios autores deste trabalho detectam em sala de aula, e pensamos em propostas de atividades utilizando o recurso de RA, tendo a TRRS como suporte para a construção

da sequência didática, resultando em quatro propostas de atividades de ensino que podem ser aplicadas nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos, FVV, Geometria Espacial e DPC, dos cursos oferecidos pela UFVJM, Campus do Muruci: Bacharelado em Ciência & Tecnologia, Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática.

Como veremos adiante, no capítulo 2, há um crescimento no uso de TICs aplicadas no ensino. Mediante os trabalhos utilizados como referência, constatamos que o recurso de RA traz uma contribuição significativa no ensino de conceitos matemáticos que exigem do aluno a habilidade de visualização espacial desenvolvida. Após a definição do recurso de RA aplicado ao ensino como objeto de pesquisa, passamos a analisar os planos de ensino das disciplinas em questão, com o objetivo de identificar os conceitos matemáticos que poderiam ser abordados como exemplos nas atividades.

Inicialmente, para esta pesquisa, planejávamos aplicar as propostas de atividades em sala de aula e analisar os resultados obtidos. Porém, isso não foi possível devido ao cenário global de pandemia<sup>4</sup> que surgiu, provocando uma suspensão das atividades de ensino no Campus do Mucuri da UFVJM desde março deste ano. Houve a necessidade de reajustar o projeto para a conclusão desta dissertação dentro do prazo previsto, reprogramando as atividades práticas para um momento mais favorável.

Depois disso iniciamos a pesquisa bibliográfica na busca de um referencial teórico que servisse de base para compreensão do problema levantado neste trabalho, ou seja, a carência dos estudantes quanto à habilidade de visualização espacial. Também, buscamos reunir informações sobre os recursos computacionais ou TICs que servissem como ferramentas pedagógicas mais eficazes para suprir essa carência do estudante. Foram estudados diferentes *softwares* e aplicativos resultando na escolha dos que fossem de fácil acesso e que oferecessem os recursos de modelagem em 3D e aplicação em RA conforme as especificidades dos problemas.

Após analisarmos as ementas das unidades curriculares dos cursos e alguns dos livros didáticos indicados pelos docentes que ministram as unidades curriculares, identificamos alguns tópicos que se enquadram na problemática apresentada aqui. Abordamos os conceitos matemáticos envolvidos nestes tópicos e escolhemos alguns problemas como exemplo para as atividades práticas. As unidades curriculares em questão fazem parte de currículos de cursos superiores. Porém, a sequência didática adotada pode servir como modelo para a elaboração de atividades práticas aplicáveis ao ensino básico.

Ainda como parte da pesquisa bibliográfica, fizemos uma análise da TRRS para

---

<sup>4</sup>Neste ano de 2020, houve uma pandemia da Covid-19, doença altamente contagiosa provocada pelo Coronavírus, que alcançou o mundo inteiro levando a óbito milhares de pessoas. Para tentar frear o avanço da doença foram tomadas medidas de isolamento social. Por causa disso, as instituições de ensino tiveram que suspender as atividades presenciais por vários meses.

embasar a construção da sequência didática. As atividades foram divididas em etapas, com instruções para utilizarem os *softwares* e aplicativos, incluindo imagens que mostram os resultados de cada etapa. Com isso, espera-se que o aluno consiga fazer as conversões entre os registros de representações semióticas. Para cada etapa são apresentados o objetivo e os procedimentos. Em geral, os registros em que o aluno precisa transitar são: registro de língua materna, registro pictórico, registro algébrico, registro numérico e registro gráfico.

Inicialmente, os problemas são apresentados no registro de língua materna e/ou registro pictórico (trata-se de um enunciado acrescentado de uma ilustração). A partir daí, o aluno deverá fazer as conversões de um registro para outro, não necessariamente seguindo a ordem das etapas apresentadas nas propostas, possibilitando ao aluno se adequar à melhor sequência que o ajude a solucionar o problema.

#### **1.4 Organização do trabalho**

Para orientar o leitor neste trabalho e facilitar a compreensão da sequência teórica construída, no primeiro capítulo é apresentada a introdução para contextualizar o leitor a respeito da relevância do tema, a metodologia e objetivos da pesquisa.

No segundo capítulo apresenta-se um referencial teórico com base nas últimas publicações a respeito de:

- uso de TICs na educação;
- potencial que o recurso de RA demonstra ter ao ser bem empregado no ensino de conceitos matemáticos que exigem do aprendiz a habilidade em questão;
- uma breve abordagem sobre a Teoria dos Registros de Representações Semióticas;
- apresentação dos *softwares* e aplicativos sugeridos neste trabalho.

Em seguida, o terceiro capítulo trata de exemplos de unidades curriculares que exigem do aluno a habilidade de visualização espacial desenvolvida.

No quarto capítulo são apresentadas quatro propostas de sequência didática das atividades que podem ser aplicadas nas unidades curriculares de Funções de Várias Variáveis, Mecânica dos sólidos, Geometria Espacial e Desenho e Projeto para Computador.

No quinto capítulo, apresenta-se as considerações finais.

E por fim, apresenta-se as referências bibliográficas e, em anexos, uma tabela com indicações de onde o leitor poderá encontrar mais informações sobre os softwares e aplicativos utilizados e os planos de ensino das unidades curriculares.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 Dificuldades do aluno quanto a visualização espacial

Descrevendo o significado do termo “visualização” no processo de aprendizagem da matemática, especificamente no ensino de Cálculo, Couy (2008) afirma que

[...] ao citar a abstração como elemento necessário à ação de visualizar, já sinaliza que, mesmo nas tarefas mais simples de se representar de forma concreta aquilo que está somente na imaginação, processos mentais relacionados ao raciocínio matemático estão presentes (COUY, 2008).

Nesta perspectiva, a habilidade de visualização espacial é fundamental para a elucidação de conceitos como vetores no espaço, sólidos geométricos, cálculo do comprimento de curvas no espaço etc. Por exemplo, devido à carência de tal habilidade, estudantes dos cursos de engenharia apresentam grande dificuldade em relação ao conceito de vetor (RONCAGLIO; NEHRING, 2017).

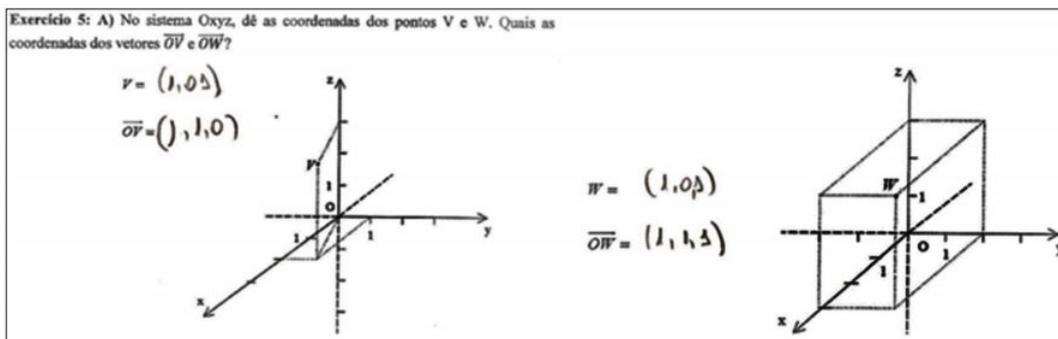
Com o objetivo de analisar a capacidade dos estudantes em realizar atividades de conversão entre as representações no registro figural e as representações no registro da língua natural e/ou simbólica, envolvendo o conceito de vetor, Roncaglio e Nehring (2017) aplicaram um pré e pós-teste, para um grupo de 34 estudantes de Engenharia. Nos resultados foram apresentados gráficos que apontaram um alto índice de erros nas respostas dos estudantes em problemas que exigiam do aluno uma maior habilidade de visualização espacial ao fazer a conversão entre os registros de língua natural e figural, ou seja, representar o vetor no sistema cartesiano  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

No exercício 3, os registros de partida eram – o registro da língua natural e simbólica, e o de chegada – o registro figural e da língua natural. Os estudantes precisavam marcar um ponto  $Q$  em um sistema de coordenadas em três dimensões  $(x, y, z)$  e, a partir deste, marcar um outro ponto – o ponto  $U$ . Nesse exercício, houve muitos erros relacionados à marcação do ponto  $Q$  no espaço e, conseqüentemente, à marcação do ponto  $U$ . Além disso, houve um número expressivo de estudantes que não resolveram esse exercício, tanto no pré quanto no pós-teste, o que marcou a falta de sentido e significado em relação à conversão do registro simbólico para o figural envolvendo atividades com coordenadas em três dimensões. Aqui, o percentual de erros dos estudantes chegou a 41%. (RONCAGLIO; NEHRING, 2017)

Para exemplificar, as autoras apresentaram um procedimento incorreto realizado por um estudante que participou da atividade, conforme observamos na figura 2.1.

Neste exercício, o estudante precisaria determinar as coordenadas de um ponto representado num sistema cartesiano. Já no primeiro momento notou-se a dificuldade na determinação das coordenadas, o que se observa nos valores apresentados para  $V$  e  $W$  nas imagens da figura 2.1. Na sequência, os estudantes precisariam determinar as coordenadas de um vetor com extremidade pertencente ao ponto representado. Esta imagem

Figura 2.1: Conversões realizadas pelo E21 no pós-teste.



Fonte: Adaptado de Roncaglio e Nehring (2017), p. 111.

apresenta a dificuldade do estudante em compreender o posicionamento dos pontos e vetores no espaço em relação aos eixos cartesianos, mesmo o gráfico da direita trazendo o paralelogramo para auxiliar a identificação das coordenadas. Segundo as autoras, neste exercício o número de erros foi significativo, atingindo um percentual de 38%.

Sobre as dificuldades de aprendizagem que os estudantes dos cursos de engenharia apresentam, especialmente com respeito à unidade curricular Desenho Técnico, segundo a visão de Prieto e Velasco (2006):

O papel mediador da Aptidão Espacial no rendimento em matérias técnicas e artísticas, tais como o Desenho Técnico, pode explicar porque os processos de transformação mental de imagens visuais devem ser empregados com precisão pelos aprendizes. Por exemplo, os estudantes destas disciplinas necessitam imaginar a aparência dos objetos em distintas orientações, trasladar a um espaço de três dimensões representações bi-dimensionais, imaginar como se veriam as partes ocultas de um objeto etc. (PRIETO; VELASCO, 2006)

Para analisar a eficácia de previsão do rendimento acadêmico em Desenho Técnico Prieto e Velasco (2006) aplicaram um teste de visualização<sup>1</sup> a um grupo de 484 alunos do curso de Engenharia de quatro centros brasileiros públicos e privados de ensino superior.

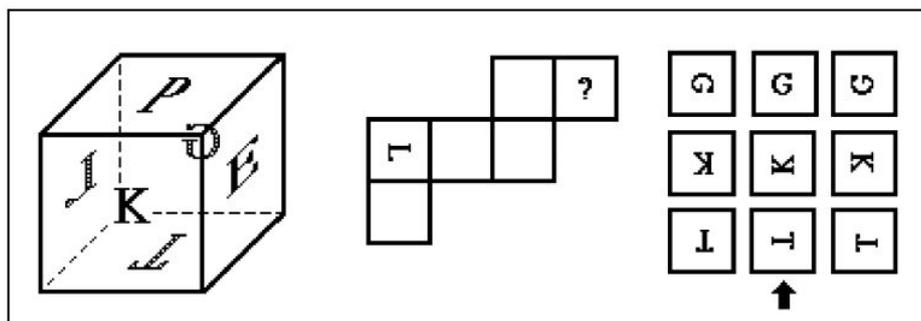
No teste o estudante precisava analisar um cubo desenhado com todas as suas faces identificadas por letras. À direita do cubo é apresentada a sua planificação com uma de suas faces identificada e outra marcada com um ponto de interrogação (?). A figura 2.2 apresenta um exemplo do item do teste, onde a resposta correta está indicada com a seta.

Mentalmente, o examinado precisa identificar qual letra, em sua posição relativa, corresponde à face onde se encontra o ponto de interrogação e marcar uma das opções de resposta.

Para os autores “o objetivo era confrontar um clássico previsor do rendimento acadêmico convencional (Raciocínio Indutivo) com um previsor específico da aprendiza-

<sup>1</sup>Teste de Visualização Espacial – TVZ2002-C

Figura 2.2: Exemplo de item do teste de visualização espacial - TVZ2002-C.



Fonte: Adaptado de Prieto e Velasco (2006), p. 13.

gem de tarefas “figurativas””. O resultado apontou que, em comparação com o teste de Raciocínio Indutivo, o teste de visualização é um previsor mais eficiente e específico do rendimento em Desenho Técnico, e que poderia ser empregado rotineiramente como uma ferramenta para um diagnóstico precoce dos alunos com dificuldades de aprendizagem a fim de planejar estratégias pedagógicas específicas.

Quanto ao ensino de geometria, Scalabrin e Mussato (2019) afirmam que,

[...] é notório percebermos as dificuldades dos alunos assimilarem os conteúdos geométricos nas salas de aulas. Nesse viés, Barros e Amaral (2015, p. 132) argumentam que “O estudo da Geometria é um desafio da Matemática, pois tanto o processo de ensino quanto o de aprendizagem são tarefas complexas”. Diante disso, cabe ao professor repensar a prática de ensinar geometria e buscar explorar novos caminhos que possam trazer contribuições para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. (SCALABRIN; MUSSATO, 2019)

Por outro lado, segundo as autoras, “é fundamental que o professor saiba explorar os recursos inovadores de uma tecnologia, bem como suas potencialidades para criar situações de ensino, nas quais os conceitos matemáticos possam ser explorados”. Apesar de, atualmente, estar disponível um universo de possibilidades de recursos tecnológicos potencialmente eficazes no ensino, o professor precisa ser bastante seletivo na escolha de tais recursos, ter domínio sobre os recursos básicos necessários e definir claramente qual objetivo se pretende atingir.

Além disso, antes de incluir recursos tecnológicos em atividades de ensino, é importante pensar na reformulação das propostas curriculares, com o objetivo de criar um ambiente favorável para explorar, investigar, descobrir e experimentar tais tecnologias (SCALABRIN; MUSSATO, 2019).

É necessário destacar também a importância do ensino de geometria na educação básica. A dificuldade do aluno fica mais evidente quando são introduzidos os conceitos de geometria espacial para os jovens estudantes. Segundo Xavier (2016),

Para que a geometria espacial seja compreendida, é necessário ter uma melhor visualização dos sólidos geométricos estudados. Quanto melhor for a visualização desse objeto de estudo em diferentes ângulos, melhor é a sua compreensão. Nem sempre é possível levar exemplos concretos dos sólidos para a sala de aula, o que dificulta o entendimento e a memorização do que está sendo estudado pelo aluno, podendo levá-lo ao desinteresse pela disciplina. (XAVIER, 2016)

Neste contexto, alguns dos conceitos estudados em Cálculo Diferencial e Integral também exigem do aluno a habilidade de visualização espacial bem desenvolvida. Um destes conceitos é o de sólidos de revolução. Com base na Engenharia Didática, Pereira et al. (2017) realizaram uma intervenção didática com o *software* GeoGebra para auxiliar o estudante desta unidade curricular a ter melhor compreensão matemática deste conceito.

Após aplicarem avaliações *a priori* e *a posteriori*, os autores concluíram que

[...] com base nos resultados objetivos da pesquisa é possível afirmar que o *software* de matemática dinâmica GeoGebra constitui ferramenta auxiliadora eficaz na compreensão das especificidades matemáticas relativas ao conceito de Cálculo Diferencial e Integral aplicada para o cálculo de área e volume dos sólidos de revolução, na turma trabalhada. (PEREIRA et al., 2017)

Assim, no que diz respeito à carência de aptidão espacial, apresentada no perfil do aluno que cursa Engenharia ou Matemática, a literatura aponta favoravelmente o uso de tecnologias que oferecem o recurso de RA em atividades de ensino.

## **2.2 Trabalhos relacionados ao uso de RA na educação**

Segundo Kirner e Kirner (2011), a primeira experiência com realidade aumentada ocorreu em 1968 com o engenheiro elétrico Ivan Sutherland que publicou o artigo *A Head-Mounted Three Dimensional Display*, descrevendo o desenvolvimento de um capacete interativo por computação gráfica rastreável que proporcionava ao usuário a visualização de objetos virtuais num ambiente real. Kirner ainda menciona algumas ocorrências na evolução da Realidade Virtual e Aumentada desde 1977 destacando a tendência de se facilitar o acesso a este recurso com maior oferta de *software* livre.

Este recurso vem sendo utilizado na indústria do entretenimento como games, filmes e animações (ALMEIDA; ALVES, 2011). Além disso, profissionais da área de engenharia e arquitetura também o utilizam ao apresentar projetos arquitetônicos e design de interiores oferecendo ao cliente uma visualização tridimensional do projeto antes de sua execução. Diferentemente da realidade virtual, que oferece ao usuário a experiência de imergir no ambiente virtual e interagir com os objetos virtuais programados, a realidade aumentada traz para o ambiente real os objetos virtuais para que a interação ocorra sem que o usuário perca a consciência de que ele está em seu ambiente real (FORTE; KIRNER, 2009).

Na área da educação, também foram publicados trabalhos que destacam o uso do recurso de RA no ensino de matemática e física. Forte e Kirner (2009) destacam que “A potencialidade da RA está na manipulação e análise virtual do próprio objeto alvo de estudo”. Na figura 2.3, os autores apresentam uma experiência do usuário interagindo com o objeto virtual criado na atividade prática.

Figura 2.3: Usuário interagindo com o objeto virtual em realidade aumentada.



Fonte: Adaptado de Forte e Kirner (2009), p. 6.

Ainda segundo os autores, algumas iniciativas de aplicação da RA na educação mostraram ser bem eficazes como: livros interativos que possibilitaram ao usuário transitar entre a realidade aumentada e realidade virtual, bem como a tecnologia RA aplicada à comunicação e aprendizado de LIBRAS.

Em concordância, Nakamoto et al. (2012) afirmam que

Os ambientes de Realidade Aumentada amplificam as capacidades das pessoas avaliarem informações tridimensionais, uma vez que flexibilizam a atuação do usuário no espaço tridimensional e permitem o uso de interações multimodais, possibilitando maior riqueza de detalhes, melhores técnicas de interação e mais desempenho. (NAKAMOTO et al., 2012)

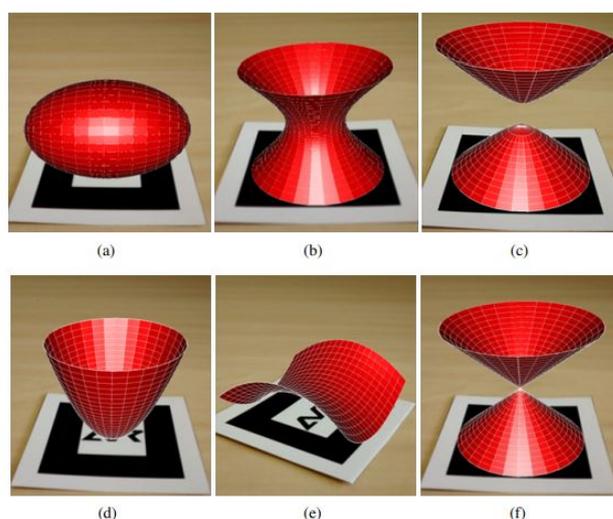
Ou seja, o recurso de RA proporciona ao usuário a experiência de, num ambiente real, observar e manipular objetos virtuais, estudando suas características e comportamentos, podendo tais objetos serem acrescentados numa escala real. Se esta ação ocorrer no momento de concepção do conhecimento, pode enriquecer a atividade de ensino de tal forma que venha a acelerar o processo de ensino-aprendizagem.

Para mostrar o grande potencial que o recurso de RA tem para ser aplicado na educação, Pereira et al. (2019) citam alguns trabalhos publicados relacionados ao uso de RA como ferramenta pedagógica utilizada em diversos campos da educação, como: ensino e aprendizagem de língua inglesa; auxiliando crianças nas séries iniciais, bem como crianças com dificuldades no aprendizado escolar e na alfabetização, especialmente

crianças autistas; na disciplina Resistência dos Materiais do curso de Engenharia; na realização de estudo experimental em laboratório de química e como ferramenta web para uso em museus.

Para apoiar o ensino e aprendizagem das Superfícies Quádricas, conteúdo estudado por discentes dos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, Pereira et al. (2019) apresentam o aplicativo de RA EducAR – Quadrics, gratuito para dispositivos móveis. Esse *app* proporciona um maior poder de investigação das superfícies estudadas, oferecendo ao usuário a autonomia de movimentar tanto o objeto real de referência para as projeções (marcador) quanto o dispositivo de visualização, podendo também alterar seus parâmetros e observando os resultados das alterações em tempo real.

Figura 2.4: Representação gráfica de todas as superfícies disponíveis no *app* EducAR – Quadrics.



Fonte: Adaptado de Pereira et al. (2019), p. 206.

Como observado na figura 2.4, o estudante pode manipular os marcadores para observar, de vários ângulos, as superfícies quádricas projetadas em RA pelo *app* EducAR – Quadrics: (a) Elipsoide, (b) Hiperboloide de uma folha, (c) Hiperboloide de Duas Folhas, (d) Paraboloides Elíptico, (e) Paraboloides Hiperbólico e (f) Cone.

Ainda segundo os autores, os alunos que participaram da experiência com o aplicativo responderam positivamente ao questionário de avaliação qualitativa sobre o potencial do EducAR – Quadrics para apoiar o ensino e aprendizagem de Cálculo, destacando a facilidade devido ao fato de que a aplicação foi utilizada em *smartphones*, tecnologia que os usuários já estão acostumados.

Quanto ao impacto da RA na concentração dos alunos, Herpich et al. (2018) apresentaram uma análise comparando o uso dessa tecnologia de ensino com a aprendizagem

tradicional. Os autores destacaram que “uso de tecnologias educacionais no processo de ensino e aprendizagem é passiva de estimular as habilidades cognitivas dos estudantes, as quais são fatores determinantes para a construção do conhecimento”. Utilizando uma interface cérebro-computador, também conhecida como *brain-computer interface* (BCI)<sup>2</sup>, foi possível constatar que os recursos educacionais em RA aumentaram o nível de atenção dos participantes durante a atividade de ensino em comparação com outro recurso, o Ambiente Virtual de Ensino e Aprendizagem Moodle.

Segundo Martins e Guimarães (2012)

Tanto RV quanto RA possuem grande capacidade de auxílio na transmissão do conhecimento. Elas podem ser utilizadas nas mais diversas áreas do ensino, como, por exemplo, simulando processos químicos ou físicos. Além disso, podem ser aplicadas para os diversos graus de instrução e faixas etárias. Para que sejam utilizadas em larga escala, é necessário atender a diversos requisitos, como, por exemplo, deve ser fácil o suficiente para que os próprios professores desenvolvam os conteúdos educacionais. Além disso, para que a tecnologia agregue valores no processo de ensino, é necessária a criação e adoção de uma metodologia eficaz de inserção delas no contexto educacional. (MARTINS; GUIMARÃES, 2012)

Os autores ainda mencionam alguns desafios que surgem na implantação efetiva da RV e RA no ensino, pois mesmo nos dias de hoje estes recursos não contribuem para o ensino aprendizagem de alguns conteúdos. Por outro lado, algumas barreiras citadas por eles já foram transpostas, como por exemplo, a viabilidade financeira para a incorporação destes recursos no contexto educacional, uma vez que existem diversos aplicativos e *softwares* gratuitos que permitem a execução de atividades de ensino com recursos de RV e RA, conforme é abordado nesta pesquisa.

Em sua dissertação de mestrado pelo PROFMAT, Valentim (2017) apresenta sua experiência com a execução de uma atividade prática, com um grupo de 60 alunos do 2º ano do Ensino Médio, com o objetivo de ensinar conceitos de sólidos geométricos, em específico, prismas e pirâmides, utilizando o *software* de RA NIZ.

O princípio da abordagem é facilitar a visualização e identificação dos principais componentes de um sólido geométrico, a saber suas faces, arestas e vértices para que os alunos observem e entendam a localização de cada um desses em cada sólido. [...] e a partir daí, apliquem a relação “ $V + F - A$ ” percebendo que o resultado obtido é sempre 2. Podemos propor então uma breve discussão sobre este padrão e suas consequências, lembrando que o foco principal do trabalho não é a relação de Euler em si, mas a obtenção dos números de face, vértice e aresta de um sólido geométrico representado através da RA.” (VALENTIM, 2017)

Segundo o autor, os resultados deste experimento foram positivos quanto aos objetivos de despertar interesse do aluno a respeito do conceito matemático, de facilitar a

---

<sup>2</sup>Equipamento que possibilita obter informações oriundas das ondas cerebrais.

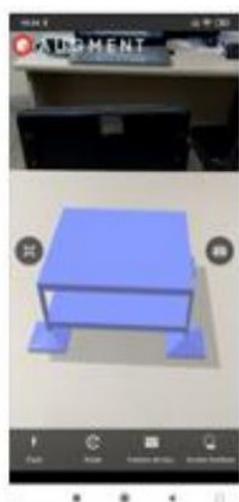
visualização de sólidos geométricos e de auxiliar o aluno a identificar e descobrir a relação entre seus componentes.

Dantas (2018) também aborda esse tema na sua dissertação de mestrado pelo PROFMAT, descrevendo uma atividade prática de ensino de Geometria Espacial, realizada no Instituto Federal do Rio Grande do Norte – Campus Caicó, com um turma do 3º ano do curso Integrado de Informática. O trabalho envolveu a apresentação de sólidos geométricos, já visto pelos alunos em aulas anteriores, utilizando o recurso de RA detalhando cada sólido geométrico, enfatizando seus elementos, classificações e demais características. Segundo a autora, houve uma aceitação positiva por parte dos alunos com o uso do recurso de RA na exposição do conteúdo. Por ser um recurso didático atrativo, este recurso demonstrou ser um bom auxílio na aprendizagem dos alunos.

Utilizando os recursos de RA e impressora 3D, Júnior et al. (2020) realizaram uma atividade prática envolvendo alunos da graduação do curso de Engenharia Civil e alunos do ensino médio, participantes do projeto Jovens Talentos da FAPERJ. A atividade teve um caráter interdisciplinar unindo conceitos abordados nas disciplinas de Introdução às Estruturas de Concreto Armado, Projeto em Concreto Armado, Estruturas Especiais e Desenho Técnico.

Os alunos utilizaram a RA para visualizar o desenho tridimensional, podendo a todo o momento visualizar as partes e subpartes do projeto estrutural, tais como: sapatas, baldrame, colunas, pisos, vigas e lajes. A etapa de impressão 3D apresenta a prototipagem rápida do projeto realizado pelo aluno nas medidas reais em escala reduzida. (JÚNIOR et al., 2020)

Figura 2.5: Modelo 3D virtualizado sobre uma mesa.



Fonte: Adaptado de Júnior et al. (2020), p. 10861.

Figura 2.6: Projeto 3D impresso e finalizado



Fonte: Adaptado de Júnior et al. (2020), p. 10863.

Ainda segundo os autores, os resultados da pesquisa realizada após a atividade apontaram uma grande aceitação por parte dos alunos: “a iniciativa de aplicação de tecnologias da indústria 4.0 no cotidiano em práticas dentro da sala de aula”.

Na figura 2.5, Júnior et al. (2020) apresenta o objeto 3D projetado sob uma mesa e, na figura 2.6, o protótipo da estrutura produzido pela impressora 3D.

### 2.3 A Teoria dos Registros de Representação semiótica

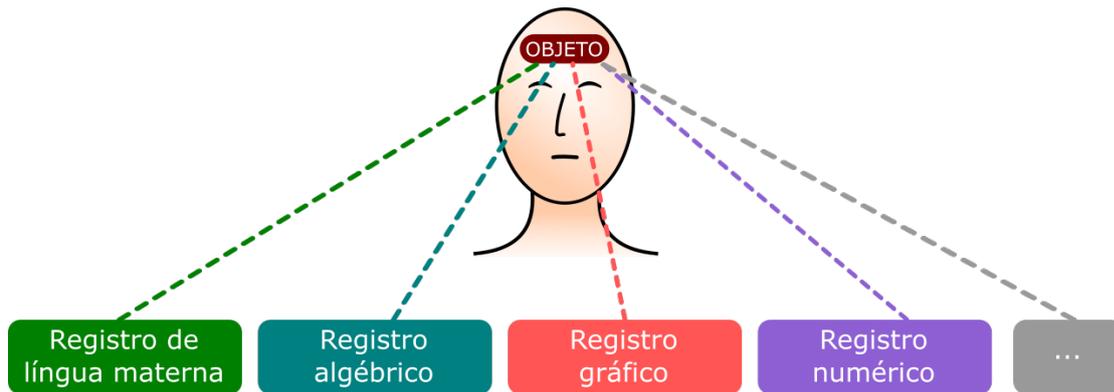
A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, ou simplesmente TRRS, de Duval (1995), é bastante abordada nos trabalhos publicados em Educação Matemática. Segundo Henriques e Almouloud (2016), “O autor trouxe contribuições significativas no campo educativo, tanto no ensino quanto na pesquisa, tornando explícitos os conhecimentos que até então eram ou ainda são tratados implicitamente, sem que sejam evocados.”

A TRRS se aplica bem a este trabalho, pois trata de aspectos do funcionamento cognitivo relacionados à aprendizagem e são apresentadas propostas de resoluções de problemas utilizando recursos de RA para auxiliar o aprendiz a desenvolver a capacidade cognitiva de visualização tridimensional. Para que isso ocorra, é necessário que o aprendiz perceba que, ao desenvolver as atividades, estará transitando entre alguns registros de representação semiótica.

Henriques e Almouloud (2016) apresenta algumas definições de conceitos importantes dentro da TRRS. Dentre elas temos,

Definição 1: Representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais. Sua significação é determinada, de um lado, pela sua *forma* no sistema *semiótico* e de outro lado, pela *referência* do objeto representado (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016).

Figura 2.7: Representação do mesmo objeto em vários registros semióticos



Fonte: Produção do autor.

Conforme mostrado na figura 2.7, um objeto matemático pode ser representado de diversas formas, por exemplo, uma fração pode ser representada por um número decimal (registro numérico) e, ao mesmo tempo, por um círculo dividido em partes iguais, sendo algumas pintadas de mesma cor (registro gráfico). Assim, quando o aluno reconhece essa igualdade na representação do objeto matemático, podemos dizer que ele conseguiu transitar entres esses registros e houve uma compreensão efetiva da matemática envolvida. (DUVAL; MORETTI, 2012)

Couy et al. (2011) analisaram alguns dos livros-textos mais adotados no ensino de Cálculo I quanto à utilização da TRRS. Nesta análise os autores apresentam uma tabela, como mostrada na figura 2.8, em que classificam os registros de representação semiótica de um objeto matemático.

Figura 2.8: Classificação dos registros de representação semiótica.

Tipo de registro	Representações	Exemplo														
Registro simbólico	Representação simbólico-algébrica	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$														
Registro gráfico	Representação gráfica															
Registro numérico	Representação tabular	<table border="1"> <tr> <td>X</td> <td>1,01</td> <td>1,001</td> <td>0,9</td> <td>0,99</td> <td>0,999</td> <td><math>x \rightarrow 1</math></td> </tr> <tr> <td>f(x)</td> <td>2,01</td> <td>2,001</td> <td>1,9</td> <td>1,99</td> <td>1,999</td> <td><math>f(x) \rightarrow 2</math></td> </tr> </table>	X	1,01	1,001	0,9	0,99	0,999	$x \rightarrow 1$	f(x)	2,01	2,001	1,9	1,99	1,999	$f(x) \rightarrow 2$
X	1,01	1,001	0,9	0,99	0,999	$x \rightarrow 1$										
f(x)	2,01	2,001	1,9	1,99	1,999	$f(x) \rightarrow 2$										
Registro da língua natural	Representação da língua natural de emprego comum (analisada em situações-problema)	À medida que $x$ se aproxima de $a$ , tanto por valores menores como maiores que $a$ , os valores da função se aproximam cada vez mais de $L$ .														

Fonte: Adaptado de Couy et al. (2011)

Dos três livros-textos analisados por Couy et al. (2011), dois deles supervalorizam as manipulações algébricas nos exercícios em relação aos outros tipos de registros, explorando pouco o processo de conversão, e uma das obras utiliza uma abordagem que

estimula a transição entre as várias linguagens matemáticas. Ainda segundo os autores, esta análise pode contribuir para uma reflexão por parte dos professores quanto à escolha dos livros didáticos, sugerindo avaliar as dificuldades apresentadas pelos discentes através de atividades que exploram a conversão entre os registros de representações semióticas.

Segundo Henriques e Almouloud (2016),

Quando um indivíduo pensa em um objeto (ideia, noção, conceito, etc.), apenas ele tem acesso a esse objeto naquele instante, pois pensar é faculdade do sistema mental. Tornar tal objeto acessível aos outros indivíduos implica evocá-lo, externá-lo por “gestos” ou por meio da sua representação em um registro. (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016)

Quando o aluno faz a interpretação de um problema matemático descrito na forma de um texto, traduzindo em uma ou mais expressões algébricas correspondentes, está de fato fazendo uma conversão da representação destas expressões da língua materna para o registro algébrico. Consequentemente, se o aluno consegue, a partir das expressões algébricas, construir um gráfico correspondente, então estará fazendo a conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

De acordo com GRANGER (1979), conforme citado por Duval e Moretti (2012), “o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais específicos e independentes da língua natural”. Nesta concepção, destacando a importância de estimular o desenvolvimento do pensamento visual na aprendizagem da matemática, segundo Couy (2008),

[...] se devidamente estimulados, os alunos podem, através de atividades que incentivem o pensamento visual e a transição entre os vários registros de representação, compreender os vários aspectos relativos a um mesmo conceito, não se limitando apenas à aplicação das regras e mecanismos algébricos no estudo do Cálculo (COUY, 2008).

Sendo assim, o docente que pretende fazer com que o aluno aprenda a matemática sob diferentes pontos de vista, deve planejar suas atividades de ensino com base na TRRS, pois o papel exercido pelos diferentes registros de representações semióticas é fundamental no processo de ensino aprendizagem da matemática. (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016)

Neste trabalho, a TRRS se tornou uma teoria importante para o planejamento das sequências didáticas, pois esperamos que os alunos consigam elucidar os conceitos matemáticos que exigem uma visão espacial dos objetos estudados. Para isso, ele precisa transitar entre alguns registros de representações semióticas como: registro de língua materna, registro numérico, registro simbólico, registro gráfico e registro pictórico.

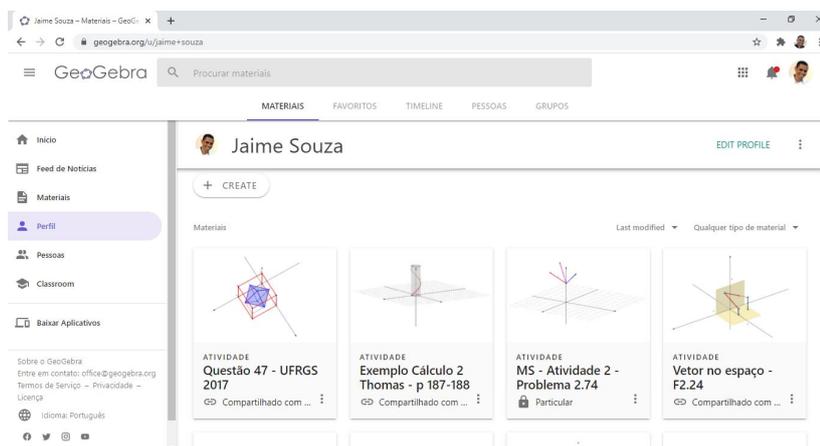
## 2.4 Softwares e aplicativos estudados

Nesta seção vamos apresentar alguns *softwares* e aplicativos<sup>3</sup> que oferecem o recurso de realidade aumentada e que podem ser utilizados em atividades de ensino.

### 2.4.1 GeoGebra

Inicialmente, o que era apenas um *software* de matemática dinâmica, o GeoGebra já evoluiu para a plataforma [geogebra.org](http://geogebra.org), devido à grande aceitação no meio educacional, contendo vários *apps* relacionados e um repositório repleto de material com diversos níveis de complexidade de construção, porém, muito úteis, desenvolvidos por colaboradores do mundo inteiro. A figura 2.9 apresenta a tela da plataforma, onde o usuário pode se cadastrar e criar seu próprio repositório.

Figura 2.9: Plataforma [geogebra.org](http://geogebra.org)



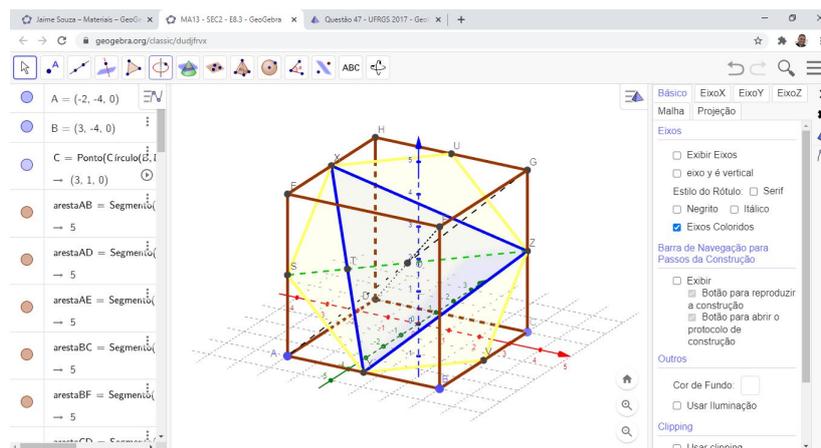
Fonte: Produção do autor.

Nesta plataforma há recursos de compartilhamento e gerenciamento de atividades online. O autor da atividade pode criar um ambiente onde o participante tem condições de executar as tarefas, manipular e construir os elementos gráficos, executar comandos no *app*, enviar as respostas e receber um *feedback* do autor. Isso faz com que a atividade se torne dinâmica e prática.

A plataforma oferece vários *apps*, dentre eles a Calculadora 3D apresentada na figura 2.10, utilizada nessa pesquisa. Este *app* foi desenvolvido pelo *International GeoGebra Institute*, distribuído gratuitamente, oferecendo recursos para a criação de objetos tridimensionais, aplicando os conceitos matemáticos envolvidos e a visualização em RA.

<sup>3</sup>Se o leitor necessita de informações mais detalhadas para utilizar os *softwares* e aplicativos, poderá consultar o Anexo A.

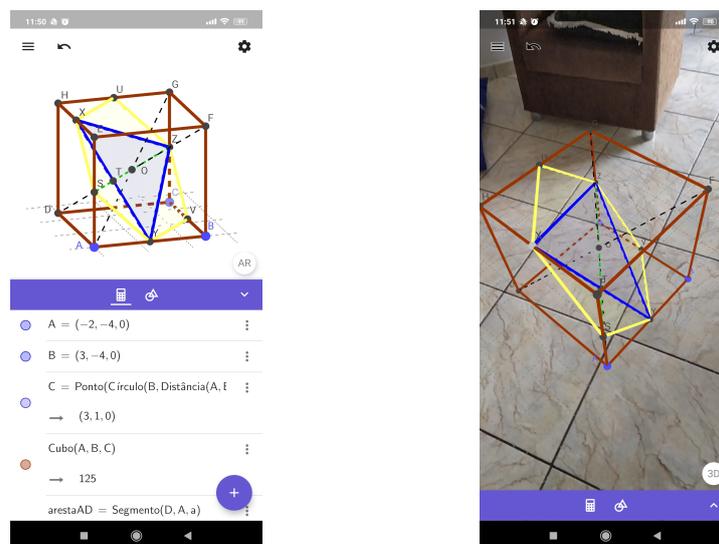
Figura 2.10: Ambiente Calculadora 3D da plataforma geogebra.org



Fonte: Produção do autor.

Nos dispositivos de *smartphones* com plataforma *Android*<sup>4</sup>, o usuário pode baixar o *app* Calculadora Gráfica GeoGebra 3D, entrar com os dados cadastrados na plataforma, abrir os materiais do repositório e aplicar em RA, como mostra a figura 2.11.

Figura 2.11: *App* Calculadora 3D do GeoGebra com aplicação em RA.



Fonte: Produção do autor.

No repositório de dissertações do PROFMAT há diversos trabalhos que apresentam propostas de atividades utilizando o GeoGebra como uma excelente ferramenta pedagógica no ensino de matemática. Dentre eles podemos destacar o trabalho de Xavier (2016) onde apresenta algumas atividades desenvolvidas no estudo de poliedros para alu-

<sup>4</sup>Também disponível para outras plataformas.

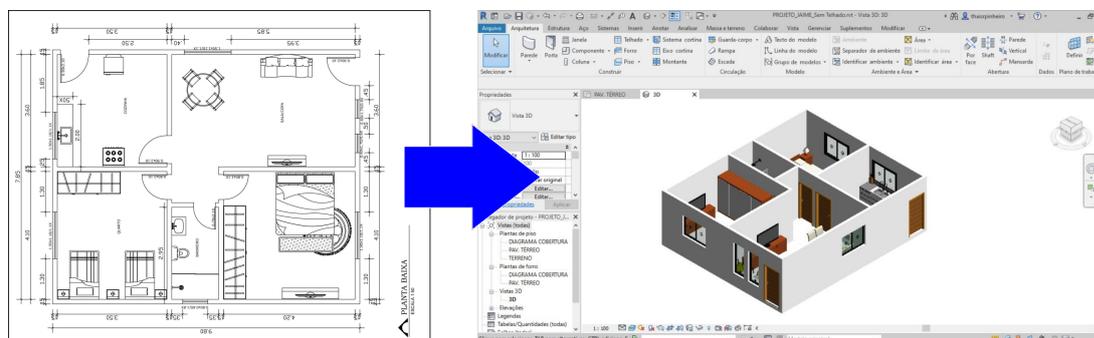
nos do ensino médio. Segundo o autor, o *software* mostrou ter a capacidade de despertar o interesse do aluno pelo estudo com sólidos geométricos, por oferecer recursos bastante intuitivos para construção dos modelos 3D.

### 2.4.2 Revit

Este *software*, desenvolvido pela Autodesk, é utilizado para desenvolver projetos de arquitetura, engenharia civil, engenharia de sistemas mecânicos, elétricos e hidráulicos. Além disso, oferece recursos de projeto multidisciplinar, permitindo trabalhos colaborativos. É utilizado para a tecnologia BIM (*Building Information Modeling* ou Modelagem de informação de Edificações), oferecendo ferramentas para desenhar e documentar, a partir de projetos arquitetônicos como apresentado na figura 2.12, maquetes virtuais em perspectiva 3D, podendo interagir com *apps* que oferecem recursos de RA.

Este *software* é bem conhecido por estudantes de engenharia quando estão cursando a disciplina de Desenho e Projeto para Computador. Nesta pesquisa, foi utilizada a versão gratuita oferecida aos estudantes.

Figura 2.12: Maquete em perspectiva 3D construída a partir de uma planta baixa.

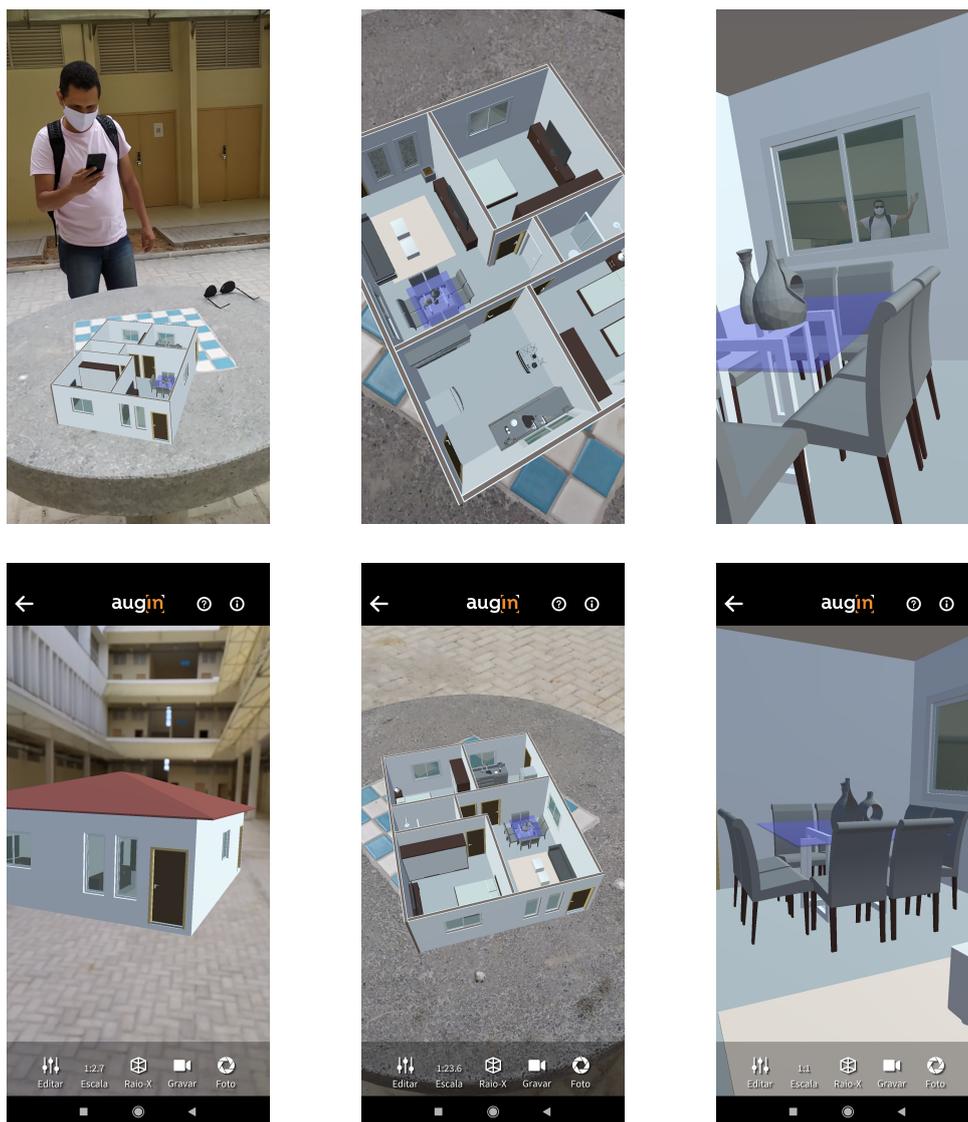


Fonte: Produção do autor.

### 2.4.3 Augin

É um aplicativo de realidade aumentada desenvolvido por *Augin Softwares Ltda.*, distribuído gratuitamente, onde profissionais e empresas podem publicar projetos criados em *softwares* como o Revit e vê-los em realidade aumentada na escala 1:1 no ambiente real. Os projetos podem ser enviados para o aplicativo através do site ou *plugins*. Na figura 2.13 é apresentada uma interação entre este aplicativo e o *software* Revit.

Figura 2.13: App Augin com aplicação em RA



Fonte: Produção do autor.

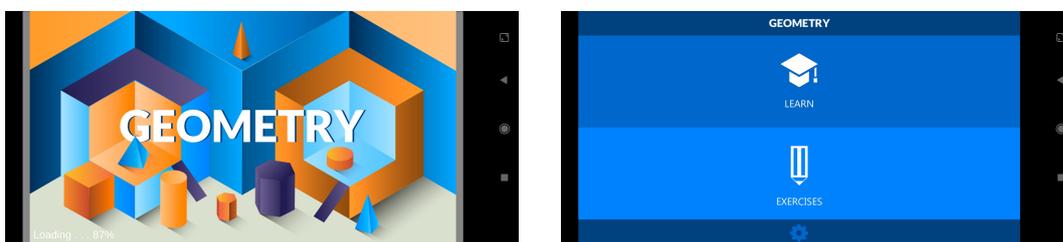
#### 2.4.4 Arloon Geometry

Este aplicativo, desenvolvido pela *Arloon*, possui modelos de sólidos geométricos em 3D proporcionando ao usuário uma interação direta com os sólidos, com aplicação em RA, além de outros recursos como informações sobre as características dos sólidos e exercícios. Até o momento desta pesquisa, o *app* estava disponível em três idiomas: inglês, espanhol e árabe.

Os demais *softwares* e aplicativos indicados nesta pesquisa são de acesso gratuito para docentes e estudantes, ao contrário deste que é necessário adquirir a licença. Porém, escolhemos este aplicativo para indicar nesta seção devido a sua facilidade de

manipulação do recurso de RA, custo bastante acessível e o conjunto de informações sobre os sólidos geométricos.

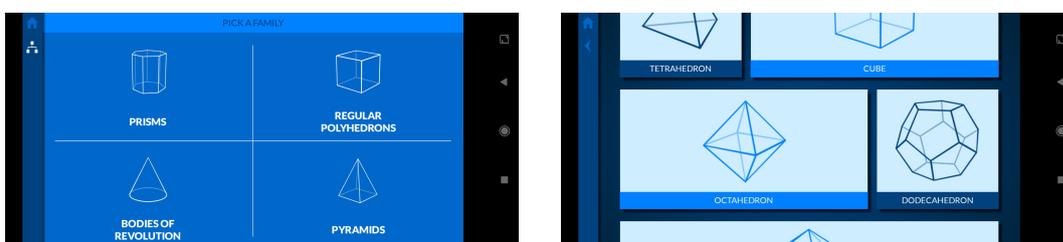
Figura 2.14: Telas do *app* Arloon Geometry.



Fonte: Produção do autor.

A figura 2.14 apresenta a tela inicial do *app* (à esquerda) e a segunda tela onde oferece ao usuário as opções de “aprender” e “exercícios”.

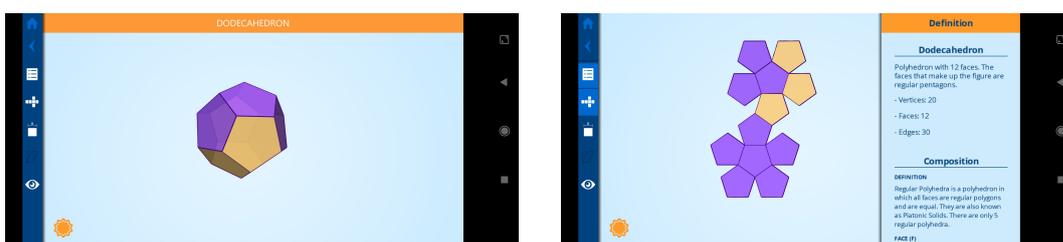
Figura 2.15: Telas do *app* Arloon Geometry.



Fonte: Produção do autor.

Escolhendo a opção de “aprender”, o usuário é direcionado para a tela, como mostrado na figura 2.15 onde poderá escolher entre as famílias de sólidos geométricos: prismas, poliedros regulares, corpos de revolução e pirâmides.

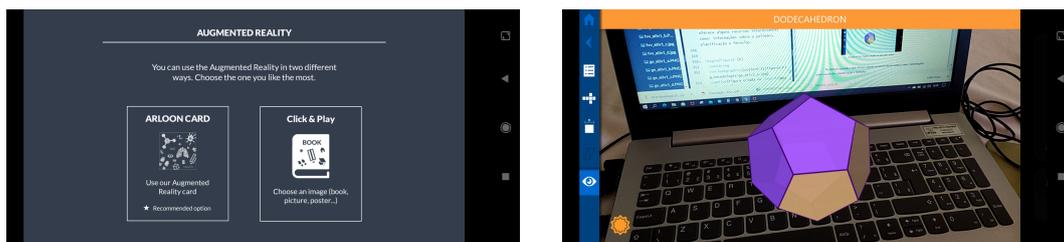
Figura 2.16: Telas do *app* Arloon Geometry.



Fonte: Produção do autor.

Na figura 2.16 observamos um dodecaedro. Para ajudar o usuário a contar as faces, ao clicar a cor é alterada. Do lado esquerdo da tela aparece um menu com alguns recursos muito interessantes para uma atividade prática, entre eles estão o de “planificação” e “definições” que traz informações como: fórmulas de área e volume; número de faces, arestas e vértices.

Figura 2.17: Telas do *app* Arloon Geometry.



Fonte: Produção do autor.

Como mostrado na figura 2.17, os objetos virtuais são projetadas em RA sob um marcador próprio do *app* que pode ser baixado através do site da *Arloom*, impresso em uma folha de papel, ou pode definir um marcador personalizado. Ao movimentar o marcador é possível visualizar a figura de vários ângulos.

Por não ser um aplicativo de distribuição gratuita, não foi utilizado para elaboração das propostas de atividades práticas neste trabalho. Mas devido aos recursos interessantes que ele oferece achamos importante trazer estas informações como uma opção de ferramenta pedagógica.



### 3 UNIDADES CURRICULARES QUE EXIGEM A APTIDÃO ESPACIAL

Neste capítulo faremos uma breve abordagem sobre as unidades curriculares escolhidas para desenvolver as propostas. Com base nos planos de ensino, disponibilizados no Anexo B deste trabalho, identificamos os tópicos que exigem do aluno a habilidade de visualização espacial.

#### 3.1 Mecânica dos Sólidos

Esta unidade curricular faz parte da estrutura curricular do curso BC&T e é ofertada como opção limitada<sup>1</sup>. O plano de ensino de Mecânica dos Sólidos apresenta como objetivo:

- “Fornecer aos discentes conhecimentos básicos relativos à estática dos corpos rígidos que permitam a esses estudantes entenderem o comportamento das estruturas e sistemas mecânicos utilizados na engenharia”.

Tomamos como exemplo o tópico que faz parte da ementa desta unidade curricular apresentada no plano de ensino (figura B.1), “Equilíbrio de ponto material e de corpo rígido, no plano e no espaço”. Este tópico é uma aplicação do conceito de operação com vetores no espaço, especificamente “vetor posição”.

Segundo a introdução deste conceito apresentada em Hibbeler (2017),

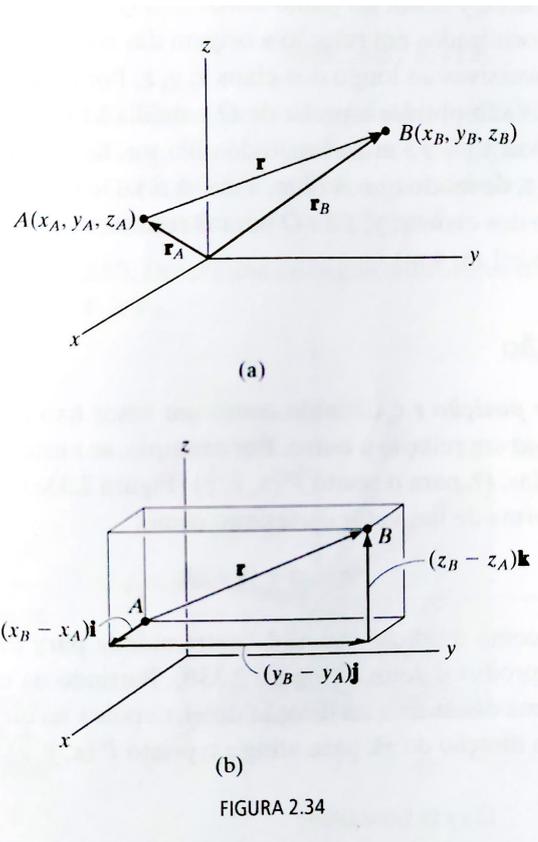
Um *vetor posição*  $r$  é definido como um vetor fixo que posiciona um ponto no espaço em relação a outro. [...] Portanto, as componentes  $i, j, k$  do vetor posição  $r$  são formadas tomando-se as coordenadas da origem do vetor  $A(x_A, y_A, z_A)$ , e subtraindo-as das correspondentes coordenadas da extremidade  $B(x_B, y_B, z_B)$ . Também podemos formar essas componentes diretamente (Figura 2.34b) começando em  $A$  e movendo por uma distância de  $(x_B - x_A)$  ao longo do eixo  $x$  positivo ( $+i$ ), depois  $(y_B - y_A)$  ao longo do eixo  $y$  positivo ( $+j$ ) e, finalmente,  $(z_B - z_A)$  ao longo do eixo  $z$  positivo ( $+k$ ) para chegar a  $B$ . (HIBBELER, 2017)

Observe na figura 3.1 que, para o aluno assimilar o conceito, é necessário ter uma percepção da posição no espaço dos pontos  $A$  e  $B$  e do sentido e direção dos vetores em relação aos eixos cartesianos. Para isso, o aluno precisa utilizar sua habilidade de visualização espacial.

Conforme já destacado no capítulo 2, Roncaglio e Nehring (2017) apontam as dificuldades que os estudantes de engenharia apresentam ao se deparar com situações como esta no estudo de vetores. Para entender o que a figura 3.1 (refere-se a figura 2.34b do livro) representa, o aluno precisa fazer um esforço mental para perceber que o vetor posição  $r$  é, na verdade, a diagonal do paralelogramo.

<sup>1</sup>UFVJM: Resolução nº 11 CONSEPE de 11/04/2019, art. 32, §1, inciso IV. Fonte: ufvjm.edu.br

Figura 3.1: Vetores no espaço



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2017), p. 48.

Desta forma, escolhamos este tópico da ementa para propor uma atividade prática onde é apresentado um problema do livro citado acima, que representa uma situação real encontrada na prática da engenharia. A atividade é dividida em três etapas: encontrar a solução numérica, construir a simulação em 3D e aplicar em RA num ambiente real.

### 3.2 Funções de Várias Variáveis

Na UFVJM, no curso de BC&T, esta unidade curricular é identificada com este nome. Já no curso de Licenciatura em Matemática, esta unidade curricular é identificada como Cálculo III. Segundo o plano de ensino (figura B.3) de Funções de Várias Variáveis (FVV), dois dos objetivos que exigem do aluno a habilidade de visualização espacial são:

- “Trabalhar as relações geométricas e algébricas de algumas curvas e superfícies no plano e no espaço
- “Aprender e manipular com outros sistemas de coordenadas além do Cartesiano, como coordenadas polares, cilíndricas e esféricas”.

Segundo Henriques e Almouloud (2016), estudantes de Cálculo Diferencial e Integral geralmente apresentam dificuldades em realizar as conversões entre representações nos registros semióticos (numérico e gráfico).

A modelagem ou a conversão da representação algébrica dessa função para sua representação no registro gráfico não é uma prática evidente para muitos estudantes de cursos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). Além disso, a maioria dos livros didáticos que analisamos e que contêm o *habitat* de tipo de tarefas (no sentido praxeológico) (CHEVALLARD, 1999) que envolvem a superfície de equação  $z = 1 + x^2 + y^2$ , entre outras, apresenta-a como “algo que cai do céu”, na medida em que os autores simplesmente escrevem “a figura ao lado mostra...”, sem que sejam explicadas as técnicas que permitem a modelagem e a visualização de tal superfície parabólica. (HENRIQUES; ALMOULOU, 2016)

Nesta concepção, conforme já apresentado no capítulo 2 deste trabalho, a carência de habilidade de visualização espacial também se vê em estudantes de Cálculo.

Em FVV, o aluno estuda vários conceitos matemáticos que combinam as ideias sobre vetores e geometria no espaço com o estudo de funções, utilizando esses cálculos para descrever trajetórias e movimentos de objetos que se deslocam em um plano ou espaço. Por exemplo, um dos tópicos que faz parte da ementa é o “Cálculo com curvas paramétricas”. Este tópico é uma aplicação das técnicas de calcular o comprimento de arco no espaço.

Em Thomas, Weir e Hass (2012) encontramos a seguinte definição:

O **comprimento** de uma curva suave  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ,  $a \leq t \leq b$ , que é traçada exatamente uma vez conforme  $t$  aumenta de  $t = a$  para  $t = b$ , é

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \quad (3.1)$$

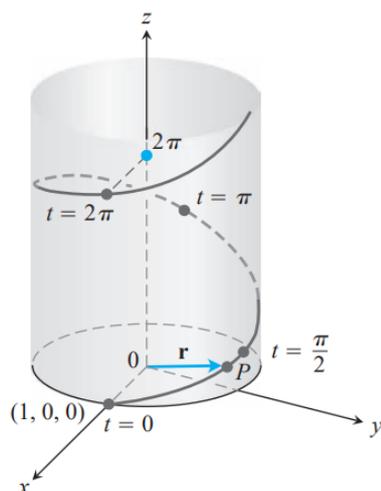
A raiz quadrada na Equação (3.1) é  $|v|$ , o comprimento de um vetor velocidade  $d\mathbf{r}/dt$ . Isso nos permite escrever a fórmula para comprimento de uma forma mais curta,

$$L = \int_a^b |v| dt. \quad (3.2)$$

Para contextualizar uma situação real em que se possa aplicar estes cálculos, pensamos numa proposta, com base no tópico 13.3, exemplo 1, página 187 do livro citado acima, em que se pede para calcular o comprimento da trajetória de uma asa-delta ao realizar um voo.

Para auxiliar o aluno a encontrar a solução do problema o livro traz uma imagem em 2D, como mostrado na figura 3.2. Mesmo a figura sendo rica em detalhes, não é suficiente para que o aluno que apresenta carência na sua habilidade de visualização espacial consiga entender claramente a trajetória da asa-delta e, a partir daí, buscar a solução do problema.

Figura 3.2: Hélice do exemplo 1



**FIGURA 13.13** Hélice no Exemplo 1,  $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ .

Fonte: Adaptado de Thomas, Weir e Hass (2012), p.188.

Se esta imagem for o único recurso didático oferecido o aluno precisará imaginar um ponto  $P$  partindo do ponto  $(1, 0, 0)$  no eixo  $x$ , quando  $t = 0$ , percorrendo a curva que circunda o cilindro até chegar em  $t = 2\pi$ .

Nesta concepção, se o aluno tiver a oportunidade de construir o objeto em 3D, manipular através de um *software* e ainda, visualizar num ambiente real onde possa explorar suas características, acredita-se que haverá um enriquecimento no processo de aprendizado e compreensão dos conceitos envolvidos. O uso de um recurso tecnológico, como RA, pode oferecer ao aluno a oportunidade de experimentar a observação deste objeto 3D, virtualizado num ambiente real, onde ele consiga se posicionar em diversos pontos de vista para perceber o comportamento da curva em relação ao cilindro.

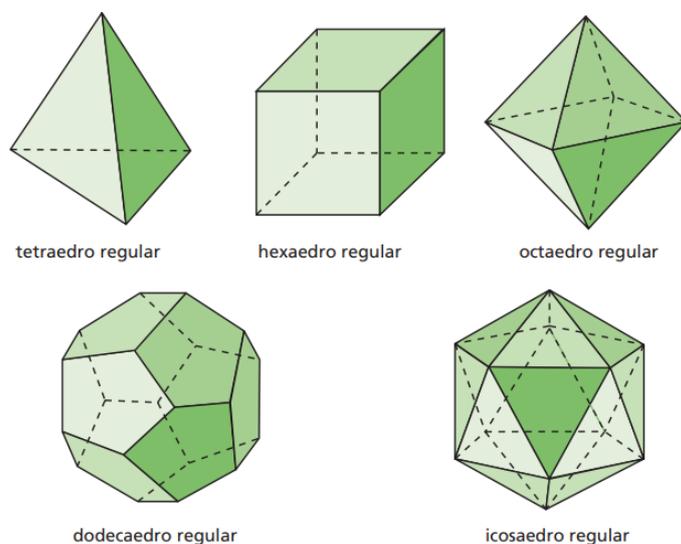
### 3.3 Geometria Espacial

O próprio nome desta unidade curricular já sugere que exige do aluno a habilidade de visualização espacial bem desenvolvida. Esta unidade curricular faz parte da estrutura curricular do curso de Licenciatura em Matemática da UFVJM. Segundo o plano de ensino (figura B.6) de Geometria Espacial, o objetivo é:

- “Estudar sólidos geométricos e os conceitos relacionados aperfeiçoando a visão tridimensional de objetos geométricos e preparando o futuro professor à prática docente de tal conteúdo”.

Tomando como exemplo o estudo de poliedros, o que se espera do aluno é a capacidade de analisar as características principais: faces, arestas e vértices. Os poliedros são classificados de acordo com o número de faces, por exemplo: tetraedro (4 faces), cubo (6 faces), icosaedro (20 faces), dentre outros. As dificuldades surgem quando o docente tenta representar estes sólidos geométricos na lousa ou utilizando imagens dos livros didáticos, pois o aluno, geralmente, demonstra dificuldade em visualizar as imagens e entendê-las como objetos tridimensionais. Segundo Silva e Vasconcelos (2019) “Experiências docentes e pesquisas acadêmicas revelam que os discentes apresentam dificuldades em visualizar e entender algumas ilustrações e representações geométricas”.

Figura 3.3: Tipos de poliedros regulares



Fonte: Adaptado de Dolce (2013), p. 130.

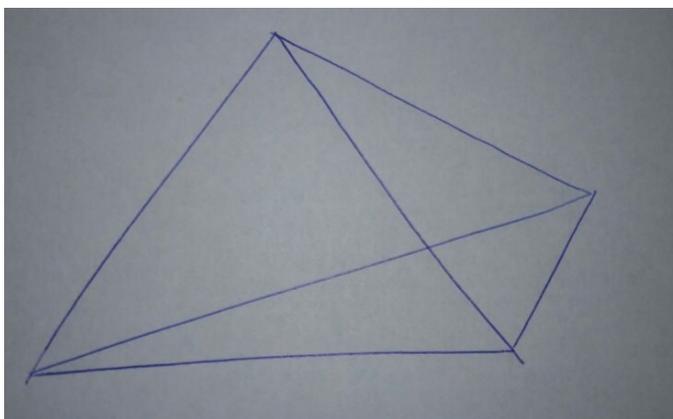
A figura 3.3, retirada do livro *Fundamentos de Matemática Elementar*, de Dolce (2013), apresenta os cinco tipos de poliedros regulares. Quanto maior é o número de faces mais difícil é para o aluno visualizar os poliedros tridimensionalmente. Para o aluno carente de habilidade de visualização espacial, este material didático não é suficiente para a elucidação dos conceitos (SCALABRIN; MUSSATO, 2019).

Normalmente os professores promovem atividades que envolvam a construção destes poliedros utilizando materiais como papel cartolina, palitos, bolinhas de isopor etc. Este método é muito importante para o ensino e aprendizagem, auxiliando o aluno a materializar o conhecimento sobre poliedros. Porém, para atividades como essas, é necessário dedicar um bom tempo da carga horária da unidade curricular, o que nem sempre é possível fazer.

Valentim (2017) relata uma experiência que corrobora com esta problemática. Segundo o autor, ao aplicar uma atividade prática, envolvendo estudo de poliedros, a res-

posta de um aluno lhe chamou a atenção. O aluno informou ao autor que durante as aulas de poliedros não conseguia relacionar as figuras desenhadas no quadro com o conceito de sólidos geométricos tridimensionais. Então, o autor solicitou ao aluno que desenhasse um exemplo numa folha de papel. O desenho feito pelo aluno está apresentado na figura 3.4.

Figura 3.4: Desenho feito pelo aluno



Fonte: Adaptado de Valentim (2017), p. 36.

Neste exemplo o professor tinha a intenção de representar um tetraedro, mas o aluno relatou que visualizava como um quadrilátero e suas diagonais.

Desta forma, para que haja um ganho na aprendizagem, é mais apropriado que este conceito seja apresentado ao aluno por meio de uma prática utilizando tecnologias digitais que permitam a manipulação dos objetos virtualmente, de modo que ele veja os sólidos geométricos por vários ângulos.

### 3.4 Desenho e projeto para Computador

Esta unidade curricular obrigatória faz parte do curso do BC&T. Segundo o plano de ensino (figura B.9) de Desenho e Projeto para Computador, um dos objetivos é:

- “Desenvolver as habilidades de visão espacial 3D”.

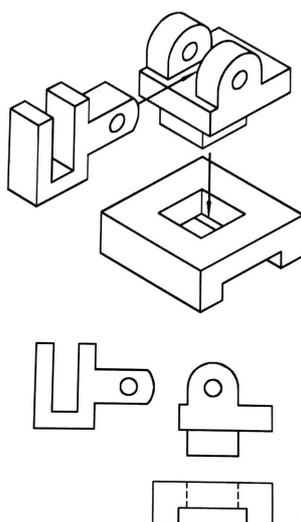
Sendo uma unidade necessária para a formação de um Engenheiro, a mesma contém a aplicação de vários conceitos matemáticos da geometria espacial, tais como: sólidos geométricos, ângulos, desenhos em perspectivas, objetos tridimensionais e outros.

Dentre os conteúdos abordados, estão o de projeções e vistas ortográficas e desenho arquitetônico. Em ambos os temas é trabalhada a percepção em planta e vistas de elementos, tais como peças mecânicas e edificações. Pode-se observar que uma das

principais dificuldades encontradas pelos discentes nesses conteúdos é de obter a visão espacial e vistas da planta de um objeto, ou ainda, obter a visão da planta baixa a partir das vistas (VALENTE; PEREIRA, 2015).

Neste sentido, Prieto e Velasco (2006) afirmam que, “de fato, os professores de Desenho Técnico manifestam frequentemente que alguns alunos não progridem adequadamente no processo de aprendizagem devido a seu baixo nível de Aptidão Espacial”. Isso acaba interferindo diretamente no processo de ensino aprendizagem, uma vez que no conteúdo da disciplina denominado Desenho Arquitetônico, se o estudante não tiver a aptidão espacial ele não conseguirá compreender como se dá a representação de uma planta baixa, cortes, fachadas e planta 3D.

Figura 3.5: Desenho em perspectiva de uma peça e suas vistas ortográficas



Fonte: Adaptado de Silva et al. (2006), p. 55.

A figura 3.5 de Silva et al. (2006), que faz parte da bibliografia básica da unidade curricular em questão, apresenta ao discente como deve ser a representação da vista principal de 3 peças distintas. Entretanto, se o estudante possuir dificuldades em visualizar as projeções ortogonais de um objeto que está em perspectiva, segundo Valente e Pereira (2015), de nada adianta mostrar-lhe quais vistas são necessárias para representar uma peça. Daí a importância de se utilizar ferramentas tecnológicas durante a resolução de atividades que estimulam a habilidade de visualização espacial, possibilitando que aluno se posicione em torno do objeto, observando todas as vistas do mesmo.

O recurso de RA pode proporcionar diversas aplicações contextualizadas na unidade curricular de Desenho e Projeto para Computador, dentre elas pode-se citar o uso do *software* Revit juntamente com o *app* Augin.



## 4 SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS

Neste capítulo apresentaremos propostas elaboradas de acordo com as ementas das disciplinas dos cursos de Ciência & Tecnologia, Engenharia Civil e Licenciatura em Matemática oferecidos pela UFVJM, Campus do Muruci.

Das atividades propostas, três foram retiradas dos livros didáticos que fazem parte das bibliografias sugeridas nos planos de ensino das disciplinas e uma foi retirada de exame de vestibular. Conforme apresentado nos livros, espera-se que o aluno encontre as respostas utilizando apenas os conceitos matemáticos envolvidos.

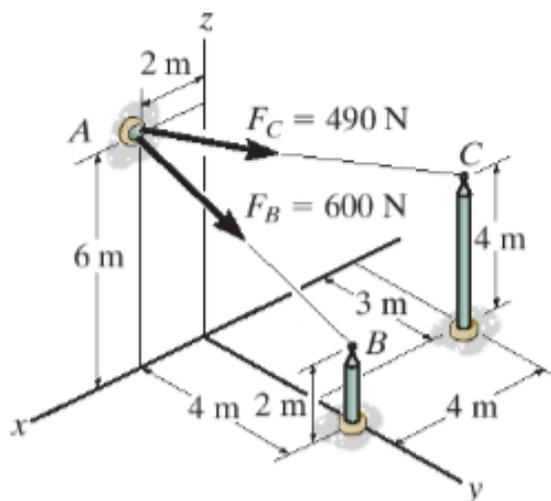
Com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, cada atividade foi proposta em três etapas, onde o aluno fará as conversões entre os registros numérico e gráfico com aplicação em RA. A utilização da RA não tem por objetivo auxiliar o aluno a encontrar a resposta das questões, e sim, desenvolver a habilidade de visualização tridimensional. Cada etapa apresenta o objetivo e procedimentos com instruções para utilizar os *softwares* e aplicativos sugeridos no capítulo 2 desta pesquisa.

Antes de aplicar as atividades é recomendado que os aprendizes sejam capacitados a utilizar as ferramentas computacionais sugeridas, seja por meio de minicursos ou por pesquisa autodidata. Para mais informações consulte o Anexo A.

### 4.1 Atividade para a disciplina Mecânica dos Sólidos

**Problema:** Determine a força resultante em A.

Figura 4.1: Ilustração do problema F2.24



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2017), p. 55.

### Etapa 1: Encontre a solução numérica

**Objetivo:** Fazer com que o aluno consiga realizar a conversão do registro de representação pictórica para o registro de representação numérica, e em seguida faça o tratamento aplicando as teorias já estudadas, realizando os cálculos para encontrar a solução.

**Procedimentos:** De acordo com a figura 4.1 podemos identificar os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Defina os seguintes pontos:

$$A = (2, 0, 6), B = (0, 4, 2), C = (-4, 3, 4)$$

Daí, encontre os vetores:

$$\vec{AB} = (-2, 4, -4), \vec{AC} = (-6, 3, -2)$$

Determine os vetores unitários  $u$  e  $v$ :

$$u = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \frac{(-2, 4, -4)}{\sqrt{4 + 16 + 16}} = (-0.33, 0.66, -0.66)$$

$$v = \frac{\vec{AC}}{\|\vec{AC}\|} = \frac{(-6, 3, -2)}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = (-0.86, 0.43, -0.29)$$

Assim, defina os vetores  $f_B$ ,  $f_C$  e  $f_R$ :

$$f_B = u \cdot 600 = (-200, 400, -400)$$

$$f_C = v \cdot 490 = (-420, 210, -140)$$

$$f_R = f_B + f_C = (-620, 610, -540)$$

Portanto, a solução é:

$$F_R = \|f_R\| = \sqrt{(-620)^2 + (610)^2 + (-540)^2} = 1024N$$

Até aqui é o esperado que o discente faça, mas não podemos concluir que ele entenda o que de fato representa estes cálculos.

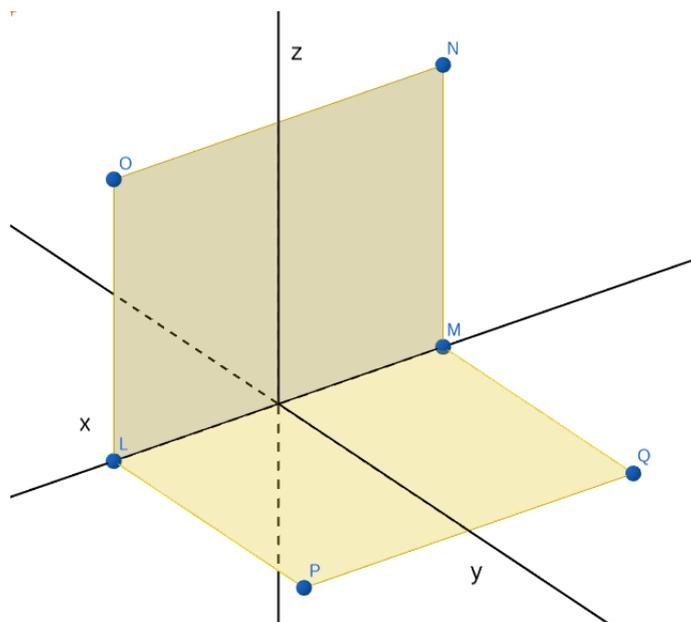
## Etapa 2: Construa a representação gráfica em 3D

**Objetivo:** Considerando somente o que foi apresentado na Etapa 1, tendo como objetivo fazer com que o aluno consiga compreender graficamente os resultados encontrados, construir uma simulação do problema utilizando o GeoGebra, de modo que o aluno consiga fazer a conversão do registro de representação numérica para o registro de representação gráfica.

**Procedimentos:** Com base na figura 4.1 apresentada no enunciado do problema, vamos construir um modelo 3D. Esta construção pode ser realizada diretamente pelo *app* Calculadora 3D GeoGebra no *smartphone*. Porém, é mais prático utilizar a plataforma *geogebra.org* para construir o modelo, gravar no repositório e depois abrir pelo *app* para explorar o recurso de RA.

1. Construa um retângulo no plano  $xz$  com os vértices  $L = (5,0,0)$ ,  $M = (-5,0,0)$ ,  $N = (-5,0,8)$  e  $O = (5,0,8)$ . Construa um retângulo no plano  $xy$  com os vértices  $L = (5,0,0)$ ,  $M = (-5,0,0)$ ,  $P = (5,8,0)$  e  $Q = (-5,8,0)$ . Veja a figura 4.2.

Figura 4.2: GeoGebra - Retângulos nos planos  $xz$  e  $xy$



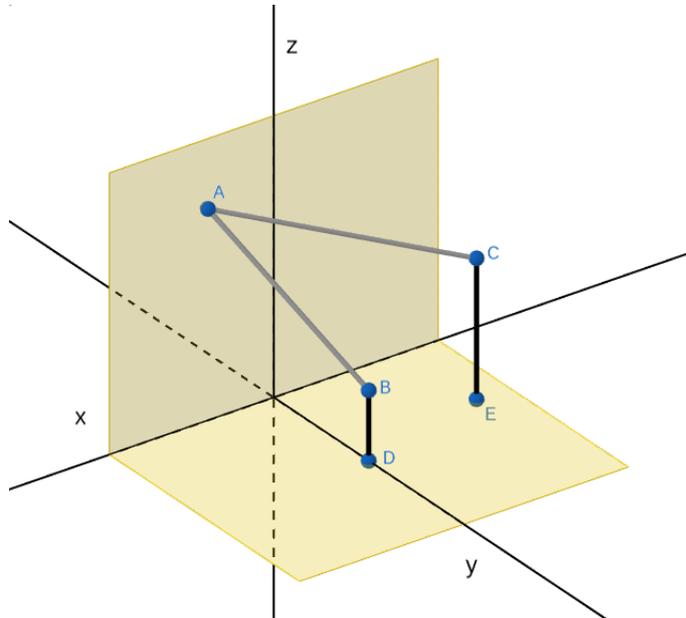
Fonte: Produção do autor.

2. Defina as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  conforme a solução numérica. Crie os pontos  $D$  e  $E$  como projeções ortogonais, sobre o plano  $xy$ , dos pontos  $B$  e  $C$  respectivamente. Crie os segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{CE}$ . Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.1. Após a execução compare com a figura 4.3.

Tabela 4.1: Comandos para realizar o procedimento 2

Operação	Comando
Crie os pontos $D$ e $E$	$D=(x(B), y(B), 0)$ $E=(x(C), y(C), 0)$
Criar segmentos	Segmento(<Ponto>, <Ponto>)

Figura 4.3: GeoGebra - Criando pontos e segmentos



Fonte: Produção do autor.

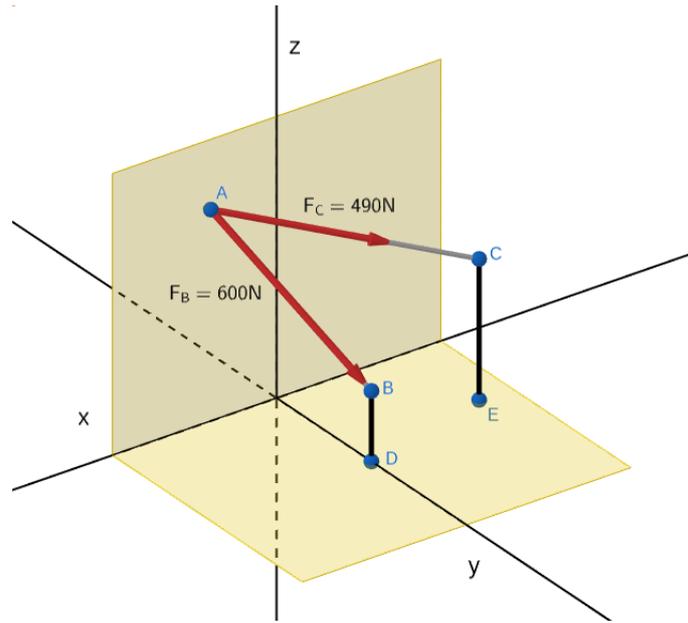
3. Encontre os vetores unitários  $u$  (em  $\overline{AB}$ ) e  $v$  (em  $\overline{AC}$ ) e represente as forças  $F_B$  e  $F_C$  com os vetores  $f_B$  e  $f_C$ , respectivamente. Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.2. Compare com a figura 4.4.

Tabela 4.2: Comandos para realizar o procedimento 3

Operação	Comando
Criar vetor unitário	Vetor Unitário(<Objeto>)
Criar os vetores $f_B$ e $f_C$	$f_B = \text{Transladar}(u*6, A)$ $f_C = \text{Transladar}(v*4.9, A)$

4. Explore a projeção 3D visualizando de vários ângulos. Encontre a força resultante  $F_R$  e compare com os resultados encontrados no cálculo. Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.3. Em seguida compare com a figura 4.5.
5. Após finalizar a construção do objeto 3D é necessário que o usuário salve o modelo no repositório da sua conta na plataforma geogebra.org.

Figura 4.4: GeoGebra - Criando os vetores

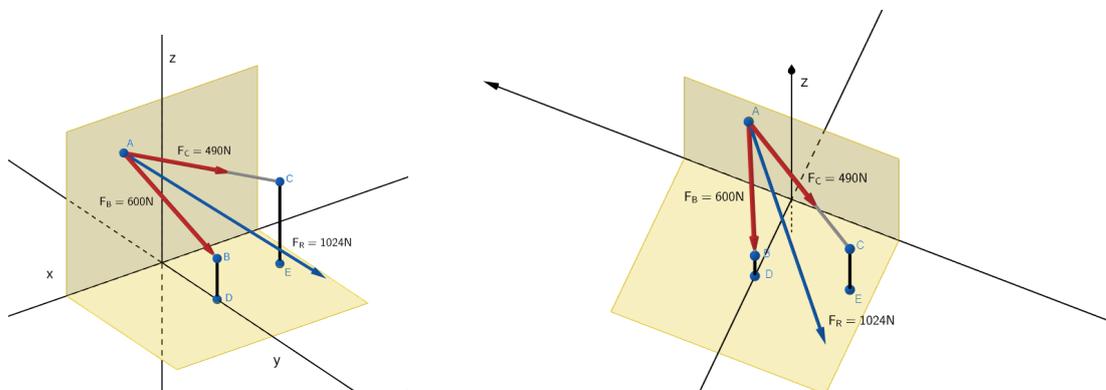


Fonte: Produção do autor.

Tabela 4.3: Comandos para criar o vetor resultante

Operação	Comando
Criar o vetor $f_R$	$f_R = \text{Transladar}(f_B + f_C, A)$

Figura 4.5: GeoGebra - Criando o vetor resultante



Fonte: Produção do autor.

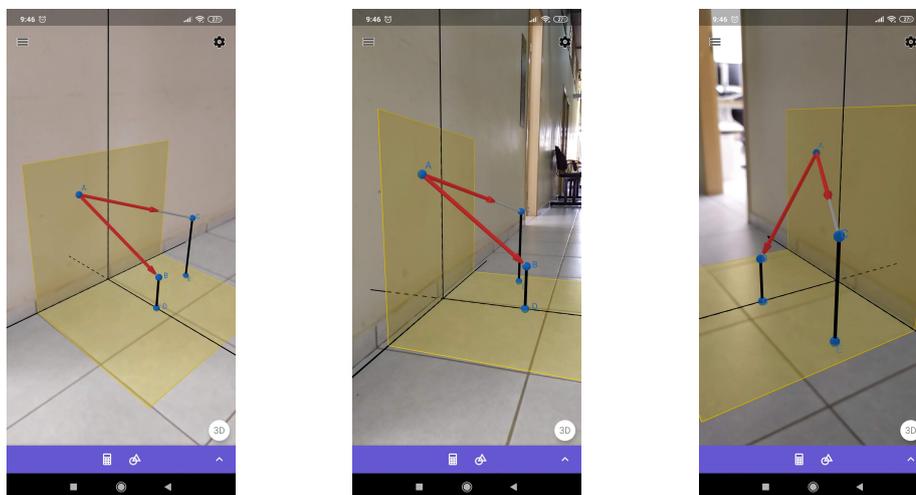
### Etapa 3: Explore o objeto 3D em RA

**Objetivo:** Estimular o aluno a desenvolver sua capacidade de visualização espacial por observar o objeto 3D criado na etapa anterior aplicado num ambiente real. Assim, o aluno poderá ver uma aplicação prática do problema em questão.

**Procedimentos:** Utilizando o *app* Calculadora 3D no dispositivo de *smartphone*, abra o modelo gravado no repositório. Acione o recurso de RA do Geogebra, posicione

a projeção num ambiente real que se assemelhe à situação encontrada no problema, por exemplo, um local onde tenha um piso e uma parede. Ande em volta para obter uma visão do objeto de vários ângulos.

Figura 4.6: GeoGebra - Modelo 3D aplicado em RA



Fonte: Produção do autor.

A figura 4.6 apresenta três pontos de vista diferentes do mesmo objeto virtual aplicado num ambiente real. Visto que o aluno já efetuou o tratamento do problema no registro numérico, chegando à solução do problema, agora ele pode se posicionar em volta da simulação projetada e entender o que de fato os cálculos representam. Nesta observação, o aluno poderá perceber o posicionamento dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  em relação aos planos  $xz$  e  $xy$ , bem como o sentido e direção dos vetores que representam as forças atuantes no ponto  $A$ .

## 4.2 Atividade para a disciplina Funções de Várias Variáveis

**Problema:** (THOMAS; WEIR; HASS, 2012) Uma asa-delta está levantando voo ao longo da hélice  $r(t) = (\cos(t))i + (\sin(t))j + tk$ . Qual o comprimento da trajetória do planador entre  $t = 0$  e  $t = 2\pi$ ?

### Etapa 1: Encontre a solução numérica

**Objetivo:** Estimular o aluno a fazer a conversão da representação no registro de língua materna para a representação no registro numérico e realizar o tratamento aplicando as teorias já estudadas efetuando os cálculos para encontrar a solução.

**Procedimento:** A trajetória durante esse tempo corresponde a uma volta completa de hélice. O comprimento dessa parte da curva é

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b |v| dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + (1)^2} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt \\
&= 2\pi\sqrt{2} \text{ unidades de comprimento}
\end{aligned}$$

Esse valor é  $\sqrt{2}$  vezes a circunferência do círculo no plano  $xy$  sobre o qual a hélice está. Até aqui é o esperado que o discente faça, mas não podemos concluir que ele entenda o que de fato representa estes cálculos.

### **Etapa 2: Construa a representação gráfica em 3D**

**Objetivo:** Construir uma simulação do problema utilizando o GeoGebra, de modo que o aluno consiga fazer a conversão da representação no registro numérico para a representação no registro gráfico.

**Procedimento:** Com base nas informações apresentadas no enunciado vamos construir o modelo 3D que represente a trajetória do planador. Esta construção pode ser realizada diretamente pelo *app* Calculadora 3D no *smartphone*. Porém, é mais prático utilizar a plataforma [geogebra.org](http://geogebra.org) para construir o modelo, gravar no repositório e depois abrir pelo *app* para explorar o recurso de RA.

1. Crie um controle deslizante  $t$  com valor mínimo 0 e máximo  $2\pi$ , que foi o intervalo determinado no problema. Crie os vetores unitários  $i$ ,  $j$ ,  $k$  relacionados, respectivamente, aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Em seguida, crie a função que representa a curva  $r(t) = (\cos(t))i + (\sin(t))j + tk$  relativa à trajetória da asa-delta. Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.4.

Tabela 4.4: Comandos para criar a curva da função  $r$ .

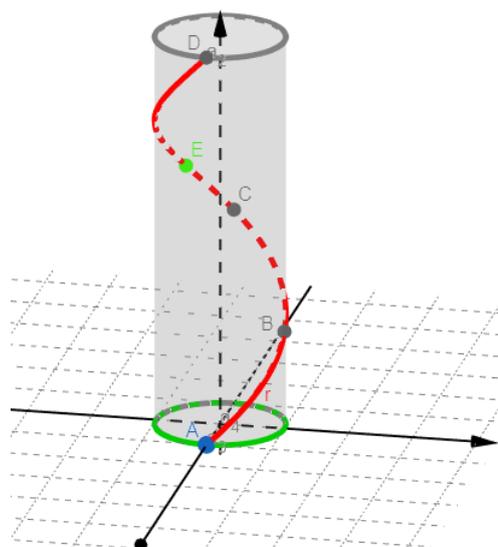
<b>Operação</b>	<b>Comando</b>
Criar controle deslizante	<code>t = ControleDeslizante(0, 2*pi)</code>
Criar vetores unitários $i$ , $j$ e $k$	<code>i = (1, 0, 0)</code> <code>j = (0, 1, 0)</code> <code>k = (0, 0, 1)</code>
Criar a função que representa a curva $r(t) = (\cos(t))i + (\sin(t))j + tk$	<code>r = (cos(t))*i + sen(t)*j + t*k)</code>

2. Crie os pontos  $A, B, C$  e  $D$  pertencentes a  $r$  quando  $t = \{0, \pi/2, \pi, 2\pi\}$ , respectivamente. Crie um círculo com centro na origem e raio 1 no plano  $XY$ . Em seguida, crie um cilindro tendo como base o círculo  $c$  e altura em  $D$ . E por fim, Crie o ponto  $E$  em função de  $t$ . Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.5 e o resultado final é apresentado na figura 4.7.

Tabela 4.5: Comandos para criar o cilindro.

Operação	Comando
Criar os pontos $A, B, C$ e $D$	$A = r(0)$ $B = r(\pi/2)$ $C = r(\pi)$ $D = r(2\pi)$
Criar um círculo com centro na origem e raio 1	$c: \text{Círculo}(0,1,\text{EixoZ})$
Criar um cilindro	$a: \text{Cilindro}(c,z(D))$
Criar o ponto $E$ em função de $t$	$E = r(t)$

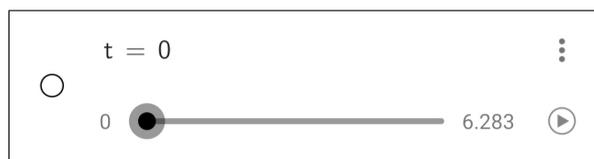
Figura 4.7: GeoGebra - Modelo 3D descrito no problema



Fonte: Produção do autor.

3. No *app* Calculadora 3D, utilize o controle deslizante variando o valor de  $t$  clicando no botão *play* do controle deslizante, como mostrado na figura 4.8, para ativar o movimento do ponto  $E$ . Em seguida, observe o comportamento do ponto  $E$  ao longo da curva  $r$ .
4. Após finalizar a construção do objeto 3D é necessário que o usuário salve o modelo no repositório da sua conta na plataforma [geogebra.org](https://www.geogebra.org).

Figura 4.8: GeoGebra - Botão *play* à direita do controle deslizante



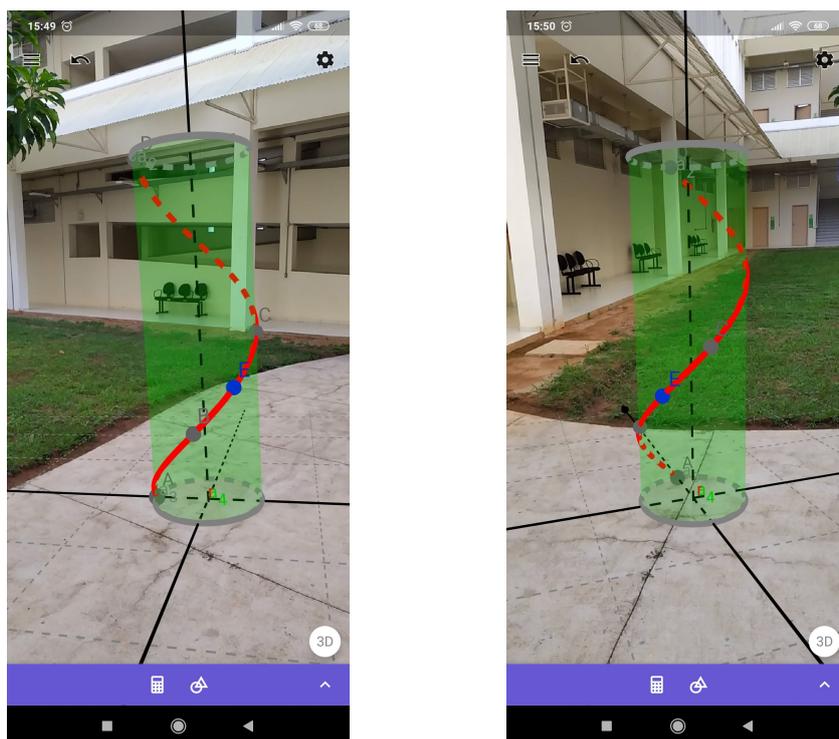
Fonte: Produção do autor.

### Etapa 3: Explore o objeto 3D em RA

**Objetivo:** Estimular o aluno a desenvolver sua capacidade de visualização espacial por observar o objeto 3D criado na etapa anterior, aplicado num ambiente real. Assim, o aluno poderá ver uma aplicação prática do problema em questão.

**Procedimentos:** Em um espaço aberto, utilizando o *app* Calculadora 3D no dispositivo de *smartphone*, abra o modelo gravado no repositório. Acione o recurso de RA do *app*, posicione o modelo utilizando o piso como base para o plano  $xy$  e aplique o modelo num tamanho maior que a altura do observador.

Figura 4.9: GeoGebra - Modelo 3D virtualizado num ambiente real



Fonte: Produção do autor.

Observe na figura 4.9 que o objeto 3D projetado num ambiente real permite ao observador analisar o comportamento da curva em torno do cilindro e acompanhar o movimento do ponto  $E$  ao longo da curva  $r$ , passando pelos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Poderá perceber também que o ponto  $D$  está alinhado com o ponto  $A$  em relação ao eixo  $z$ , con-

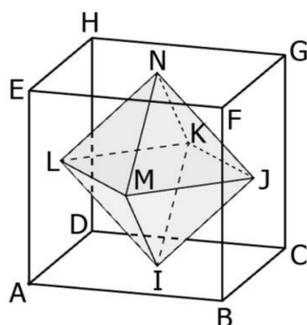
cluindo que o ponto  $E$  dá uma volta de  $360^\circ$  em torno do eixo  $z$ . Dificilmente, o aluno que possui a habilidade de visualização espacial pouco desenvolvida poderia imaginar esta projeção e compreender o problema dessa maneira.

### 4.3 Atividade para a disciplina Geometria Espacial

#### Problema:

Figura 4.10: Questão retirada do Concurso Vestibular da UFRGS

47. Considere um cubo de aresta  $a$ . Os pontos  $I, J, K, L, M$  e  $N$  são os centros das faces  $ABCD, BCGF, DCGH, ADHE, ABFE$  e  $EFGH$ , respectivamente, conforme representado na figura abaixo.



O octaedro regular, cujos vértices são os pontos  $I, J, K, L, M$  e  $N$ , tem aresta medindo

- (A)  $a\sqrt{3}$ .  
 (B)  $a\sqrt{2}$ .  
 (C)  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .  
 (D)  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ .  
 (E)  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Fonte: Concurso Vestibular da UFRGS 2017, p. 26.

Para esta atividade sugere-se uma sequência inversa às anteriores, iniciando com a construção dos sólidos geométricos no registro de representação gráfica em 3D, seguida da aplicação em RA. Por fim, o aluno fará a conversão para o registro de representação numérica. Mesmo que, pelos cálculos, pareça ser uma questão simples, o aluno que não tem a habilidade de visualização espacial bem desenvolvida terá dificuldade de enxergar que a aresta do octaedro é a hipotenusa de um triângulo cujos catetos são iguais à metade da aresta do cubo.

#### Etapa 1: Construção dos sólidos geométricos em 3D

**Objetivo:** Estimular o aluno a fazer a conversão do registro de representação pictórica para o registro de representação gráfica.

**Procedimento:** Esta construção pode ser realizada diretamente pelo *app* Calculadora 3D. Porém, é mais prático utilizar a plataforma *geogebra.org* para construir o modelo, gravar no repositório e depois abrir pelo *app* para explorar o recurso de RA.

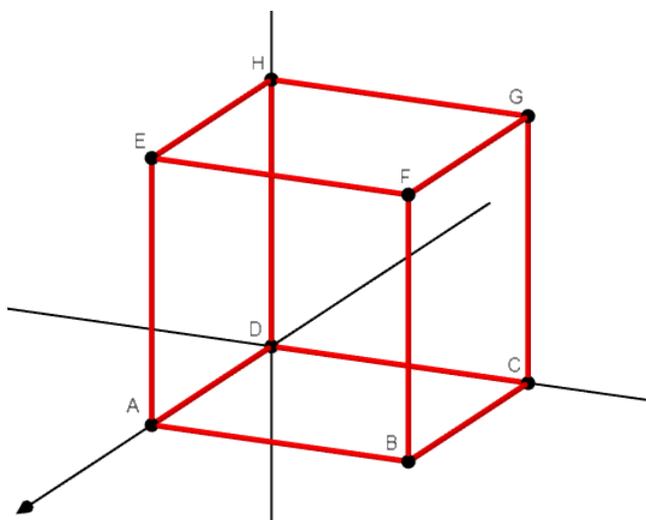
Para que a representação gráfica fique idêntica à figura apresentada no enunciado é necessário que siga à risca o roteiro abaixo.

1. Crie um controle deslizante  $a$  com intervalo de 1 a 5. Em seguida, crie os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , cujas coordenadas são função de  $a$  e que servirá de base para criar um cubo. Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.6 e o resultado final é apresentado na figura 4.11.

Tabela 4.6: Comandos para criar o cubo

Operação	Comando
Criar controle deslizante $a$	$a = \text{ControleDeslizante}(1,5)$
Criar os pontos $A$ , $B$ e $C$	$A = (a,0,0)$ $B = (a,a,0)$ $C = (0,a,0)$
Criar cubo	$\text{Cubo}(A,B,C)$

Figura 4.11: GeoGebra - Cubo de aresta  $a$ .



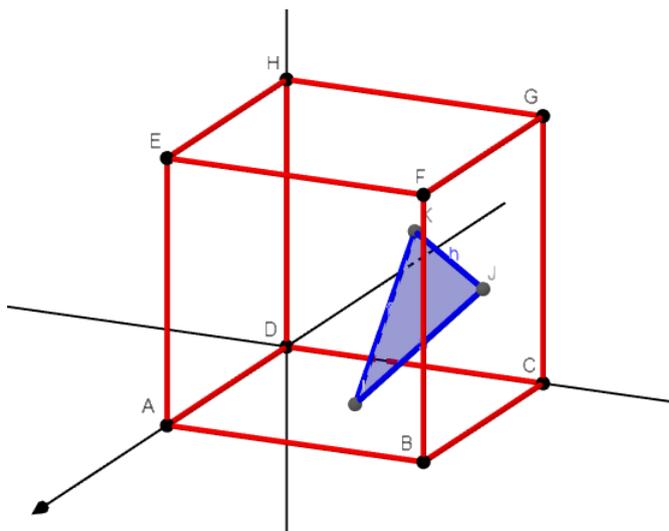
Fonte: Produção do autor.

2. Crie os pontos  $I$ ,  $J$ ,  $K$  conforme o enunciado da questão. Com estes pontos crie o triângulo equilátero  $p$  congruente a uma das faces do octaedro. Os comandos para a execução deste procedimento estão listados na tabela 4.7 e o resultado final é apresentado na figura 4.12.

Tabela 4.7: Comandos para criar o triângulo equilátero

Operação	Comando
Criar os pontos $I$ , $J$ e $K$	$I = \text{PontoMédio}(A,C)$ $J = \text{PontoMédio}(B,G)$ $K = \text{PontoMédio}(H,C)$
Criar o triângulo equilátero $p$	$p = \text{Polígono}(K,I,J)$

Figura 4.12: GeoGebra - Cubo com o triângulo equilátero (azul) em seu interior.



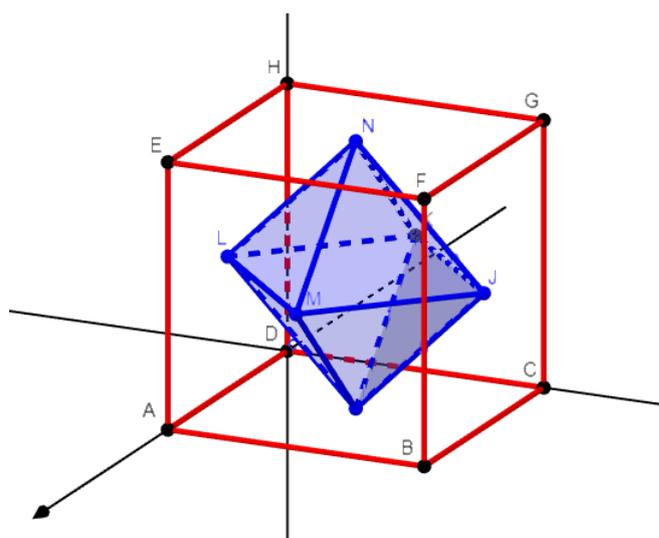
Fonte: Produção do autor.

3. A partir do triângulo equilátero  $p$ , construa o octaedro utilizando o comando indicado na tabela 4.8 e compare com a figura 4.13. Observe que os vértices do octaedro são exatamente os centros das faces do cubo.

Tabela 4.8: Comando para criar o octaedro

Operação	Comando
Criar octaedro	Octaedro( <Triângulo Equilátero> )

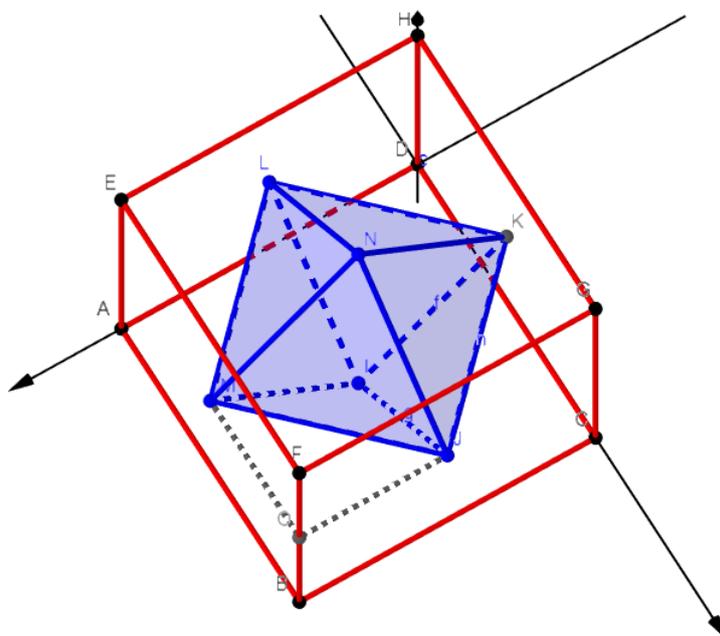
Figura 4.13: GeoGebra - Cubo com o octaedro em seu interior.



Fonte: Produção do autor.

4. Rotacione o objeto 3D para enxergar a posição da aresta do octaedro em relação à aresta do cubo. Para entender melhor, trace dois segmentos ligando os pontos  $J$  e  $M$  ao ponto médio de  $\overline{BF}$ , formando um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o segmento  $\overline{JM}$ , como mostrado na figura 4.14.

Figura 4.14: GeoGebra - Visão superior do modelo 3D.



Fonte: Produção do autor.

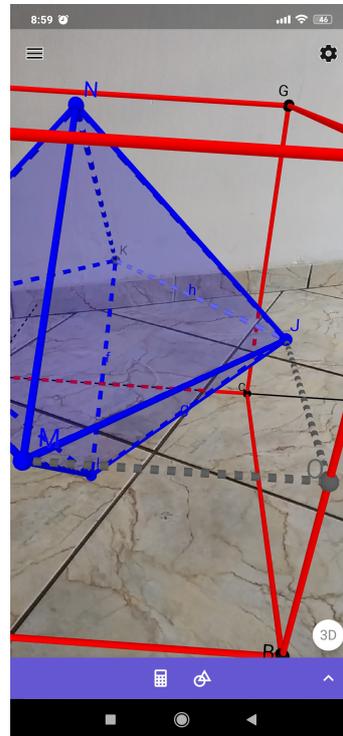
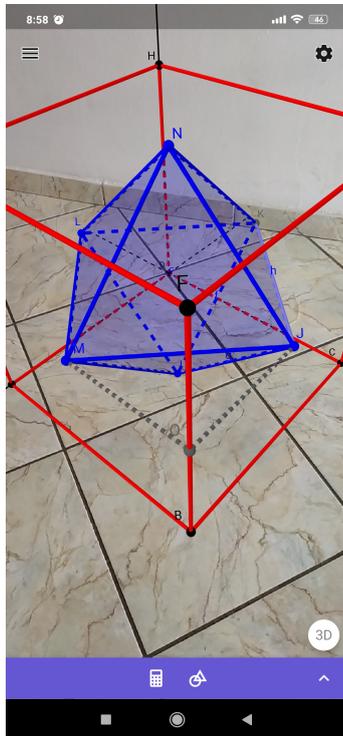
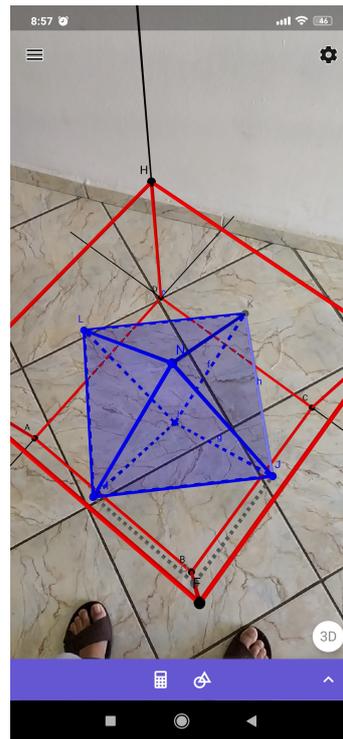
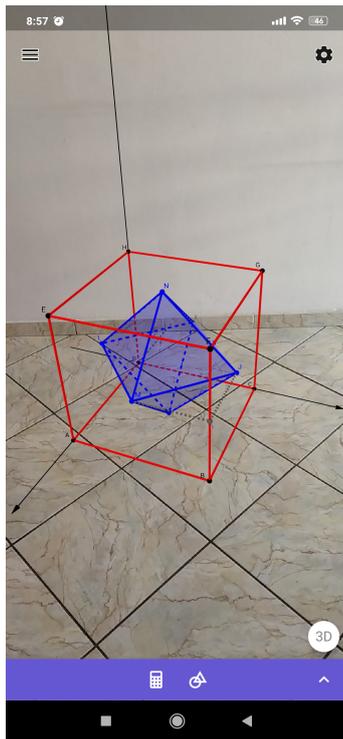
## Etapa 2: Explore o objeto 3D em RA

**Objetivo:** Estimular o aluno a explorar o objeto 3D fixo diante dele aplicado num ambiente real e observar a relação entre as arestas dos sólidos geométricos em questão.

**Procedimento:** Em um espaço aberto, utilize o recurso de RA do *app* Calculadora 3D para visualizar o objeto 3D de vários ângulos, como mostrado na figura 4.15. Ande em volta da projeção para observar a posição da aresta do octaedro em relação à aresta do cubo.

É importante que o aluno experimente a manipulação do objeto 3D tanto no ambiente onde foi construído, neste caso no *software* GeoGebra, bem como no ambiente real com RA, pois são tipos de visualizações diferentes. Na primeira situação o objeto se move diante do aluno e na segunda, o aluno que se move diante do objeto.

Figura 4.15: GeoGebra - Modelo 3D virtualizado num ambiente real.



Fonte: Produção do autor.

### Etapa 3: Encontre a solução numérica

Esta etapa é o esperado que o discente faça, mas não podemos concluir que ele entenda o que de fato representa estes cálculos.

**Objetivo:** A partir do modelo 3D, utilizando os conceitos matemáticos envolvidos, estimular o aluno a fazer a conversão do registro de representação gráfica para o registro de representação numérica.

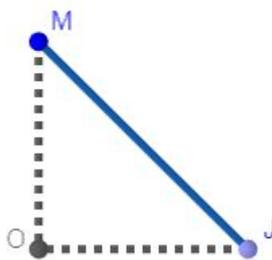
**Procedimento:** Observe os sólidos geométricos de cima, conforme apresentado na figura 4.15. Perceba que a aresta do octaedro representa a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são iguais à metade da aresta do cubo.

De acordo com o enunciado, temos

$$\overline{BF} = a \Rightarrow \overline{OM} = \overline{OJ} = \frac{\overline{BF}}{2} = \frac{a}{2}. \quad (4.1)$$

Tomando  $O$  como ponto médio de  $\overline{BF}$  extraia o triângulo retângulo  $JOM$ , como mostrado na figura 4.16.

Figura 4.16: Triângulo retângulo cuja hipotenusa é a aresta do octaedro.



Utilizando o teorema de Pitágoras temos,

$$\overline{JM} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad (4.2)$$

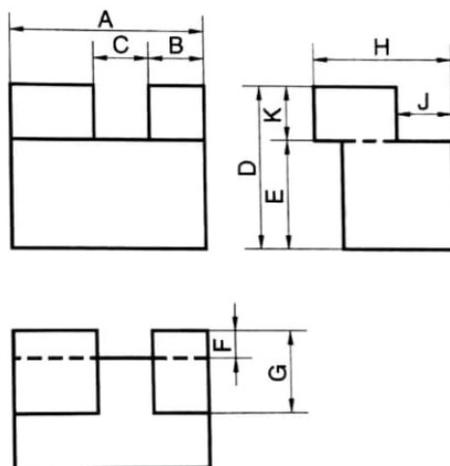
Portanto, a resposta correta é a letra E.

#### 4.4 Atividade para a disciplina Desenho e Projeto para Computador

**Problema:** A partir das vistas abaixo (figura 4.17), desenhe em escala 1:1 a perspectiva da peça, onde:  $A = 18\text{cm}$ ;  $B = 5\text{cm}$ ;  $C = 5\text{cm}$ ;  $D = 15\text{cm}$ ;  $E = 10\text{cm}$ ;  $F = 3\text{cm}$ ;

$G = 8\text{cm}$ ;  $H = 13\text{cm}$ ;  $J = 5\text{cm}$ ;  $K = 5\text{cm}$ . Em seguida, modele a peça em 3D no Revit e explore em RA utilizando o *app Augin*.

Figura 4.17: Vistas da peça.



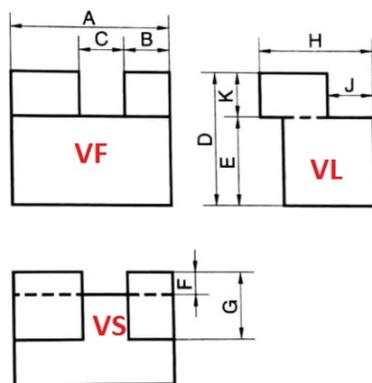
Fonte: Adaptado de Silva et al. (2006), p. 102.

**Etapa 1: Desenhar em escala a perspectiva das projeções ortográficas indicadas na figura**

**Objetivo:** Fazer com que o aluno, utilizando as técnicas apresentadas durante as aulas, desenhe no papel a partir das vistas múltiplas a perspectiva do modelo apresentado.

**Procedimento:** Para desenhar a perspectiva à mão será necessário fazer uso de esquadros, régua, lápis e borracha. Inicialmente o discente precisa identificar quais são as vistas frontal (VF), superior (VS) e lateral (VL) que estão mostradas na figura 4.18.

Figura 4.18: Vistas VF, VL e Vs identificadas.

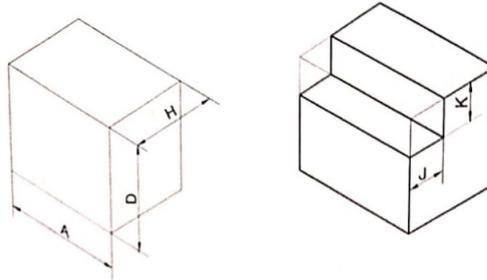


Fonte: Adaptado de Silva et al. (2006), p. 102.

Em seguida, com o auxílio de esquadros e régua ele poderá fazer o desenho, em

escala, de um paralelepípedo envolvente e depois as distâncias relativas ao longo das direções isométricas, como indicado na figura 4.19.

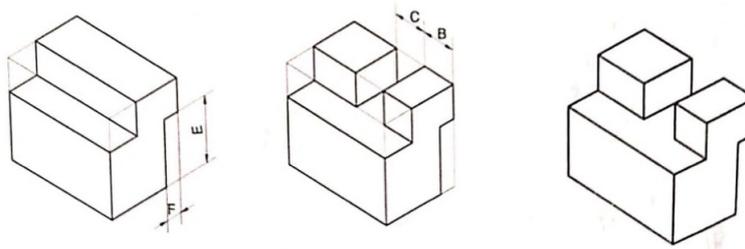
Figura 4.19: Desenho do paralelepípedo.



Fonte: Adaptado de Silva et al. (2006), p. 102.

Finalizado o desenho, deve-se apagar as linhas auxiliares do paralelepípedo que não fazem parte da perspectiva tendo como resultado o ilustrado na figura 4.20.

Figura 4.20: Finalizando o desenho em perspectiva.



Fonte: Adaptado de Silva et al. (2006), p. 102.

Até aqui é o esperado que o discente faça, mas não podemos concluir que ele entenda o que de fato representa o desenho.

## **Etapa 2: Modelar a peça em 3D**

**Objetivo:** Estimular o aluno a fazer a conversão da peça no registro de representação pictórica para o registro de representação gráfica utilizando o *software* Revit para modelar o objeto 3D.

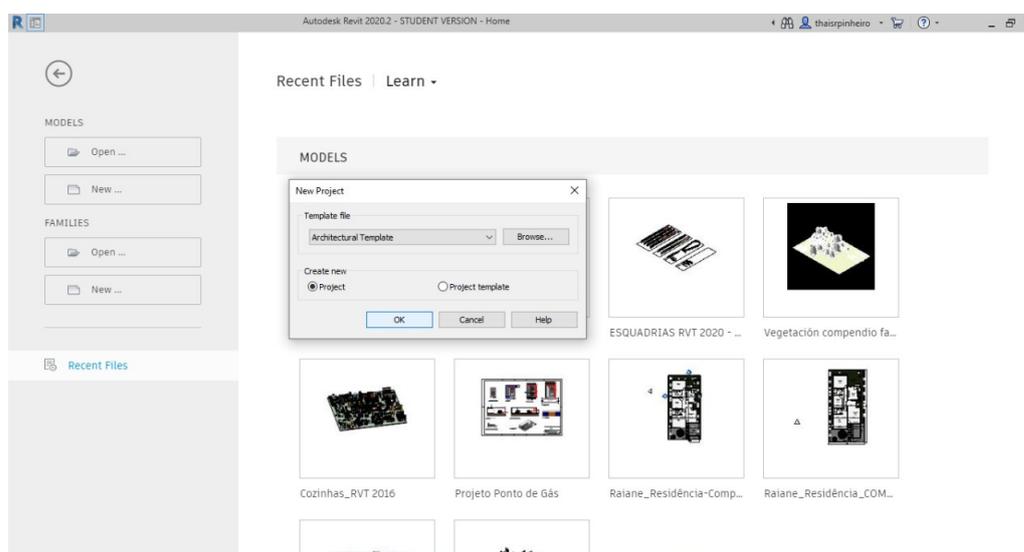
**Procedimento:** Primeiramente, o docente deve identificar qual o percentual de alunos que possui algum conhecimento básico do *software* Revit. A partir daí, poderá planejar esta etapa prevendo um tempo para que os alunos adquiram conhecimento básico sobre o uso do *software* ou, caso seja possível, dividir a turma em grupos, de modo que, em cada grupo tenha pelo menos um aluno que saiba manipular o *software*.

A partir do resultado final da etapa 1 (figura 4.20), com base nas medidas da peça, o aluno deve modelar em 3D utilizando o *software* Revit. Este procedimento poderia ser feito seguindo a mesma ideia apresentada na etapa 1, porém, apresentamos aqui uma

sequência que julgamos ser mais fácil para os alunos que possuem pouco conhecimento das ferramentas do *software*. Antes de iniciar a atividade instale a versão estudantil do Revit e o *plugin* do Augin<sup>1</sup>.

1. Abra um projeto novo.

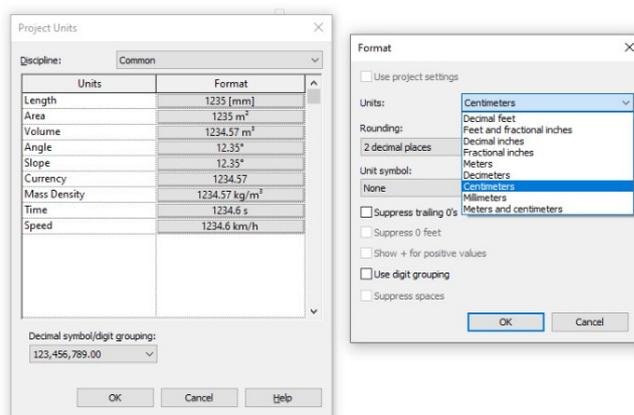
Figura 4.21: Revit - Criando novo projeto



Fonte: Produção do autor.

2. Altere para a unidade de medida indicada no enunciado da questão (utilize o atalho apertando as teclas “u” e depois “n”).

Figura 4.22: Revit - Alterando a unidade de medida

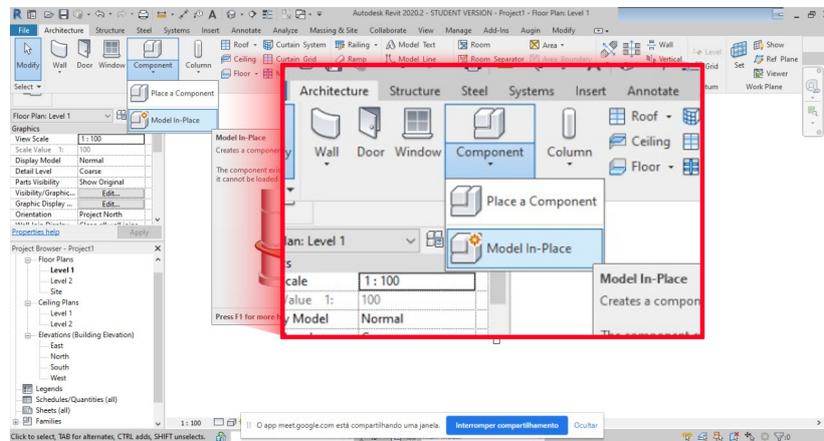


Fonte: Produção do autor.

<sup>1</sup>Para a instalação do *software* Revit e do Augin veja o Anexo A.

3. Na aba “Architecture” escolha “Component” e “Model In-Place”.

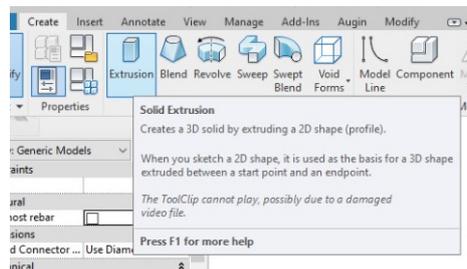
Figura 4.23: Revit - Criando o modelo no local



Fonte: Produção do autor.

4. No ambiente “Create” crie uma “Extrusion”.

Figura 4.24: Revit - Criando o primeiro bloco

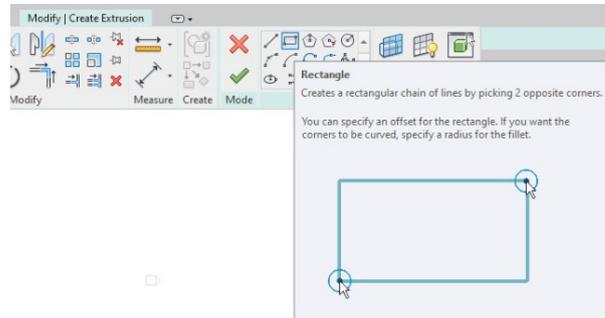


Fonte: Produção do autor.

Observe na figura 4.20 que a peça é formada pela união de três blocos, onde o maior tem medidas  $18 \times 10 \times 10$  cm, o médio  $8 \times 8 \times 5$  cm e menor  $8 \times 5 \times 5$  cm, sendo os dois menores posicionados acima do bloco maior.

5. Crie um retângulo que servirá de base para o bloco maior. Na aba “Modify” escolha a ferramenta para criar retângulos.

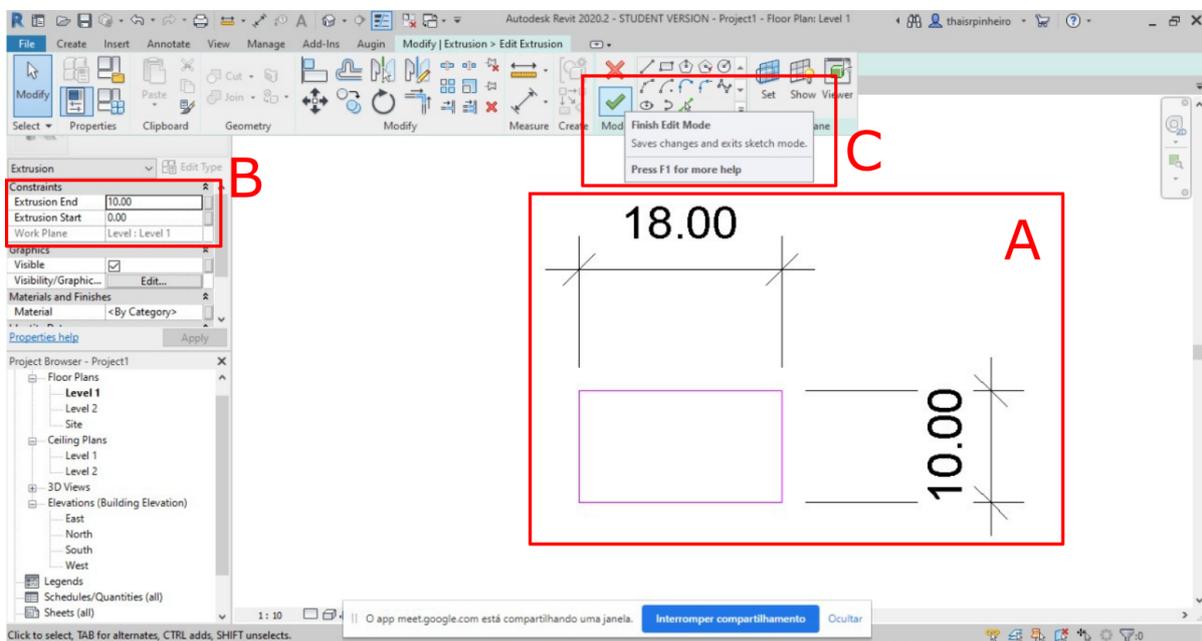
Figura 4.25: Revit - Criando o retângulo da base do primeiro bloco



Fonte: Produção do autor.

6. Crie o retângulo da base do bloco de acordo com as medidas informadas no enunciado (A). Defina a altura da extrusão marcando o nível inicial (start) e final (end) (B). Finalize previamente para ver o resultado (C).

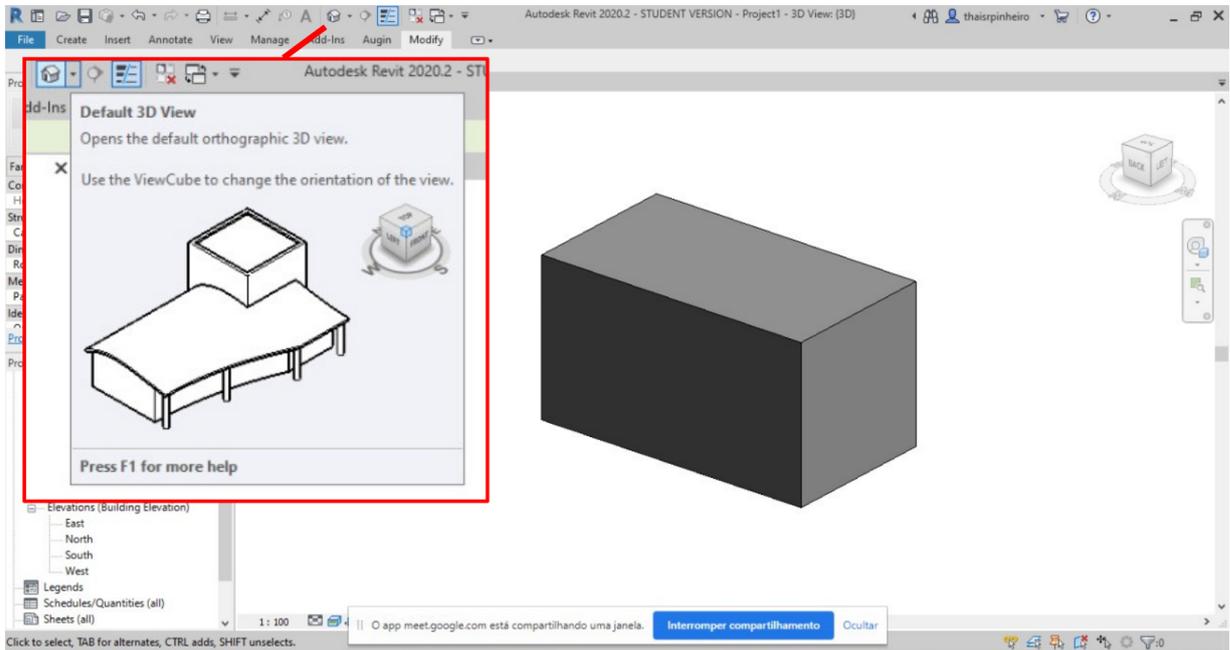
Figura 4.26: Revit - Criando o retângulo da base do primeiro bloco



Fonte: Produção do autor.

7. Para visualizar o bloco em 3D clique em “Default 3D View”.

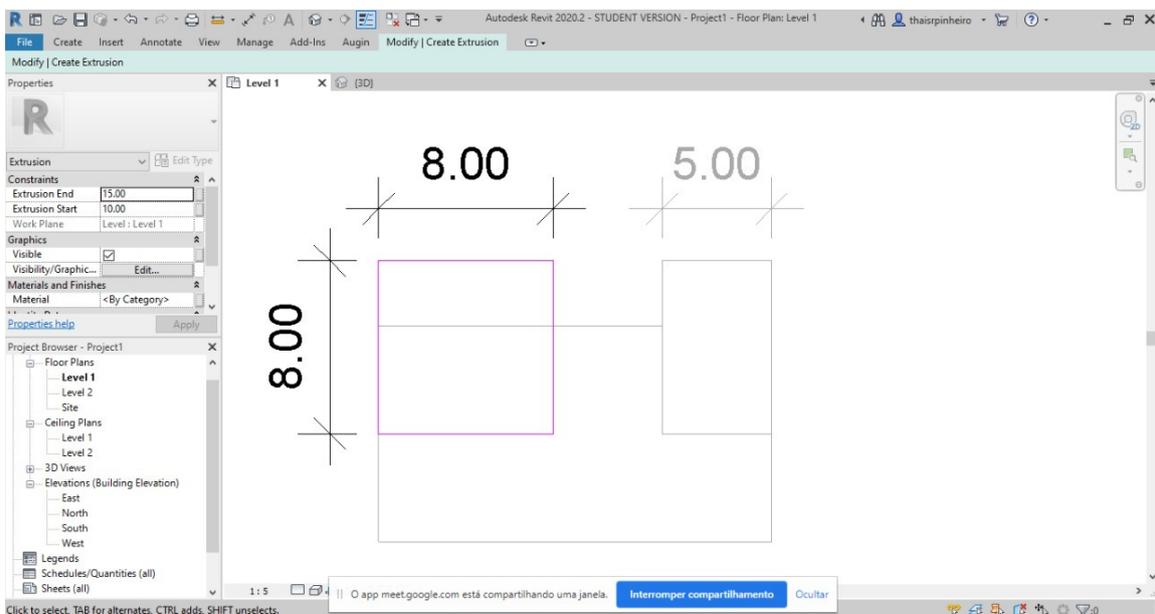
Figura 4.27: Revit - Visualizando o bloco em 3D



Fonte: Produção do autor.

8. Repita o mesmo processo para criar os outros blocos. Considere o nível inicial da extrusão destes blocos acima do bloco maior, ou seja, o valor de “Extrusion End” do bloco anterior.

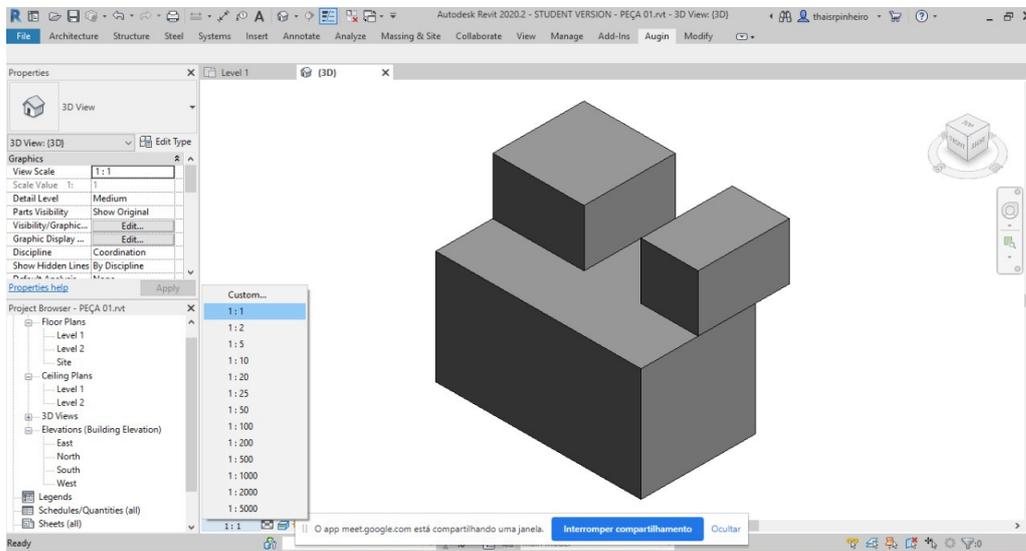
Figura 4.28: Revit - Definindo as dimensões dos blocos superiores



Fonte: Produção do autor.

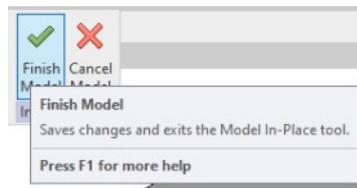
9. Altere para a escala 1:1 e finalize o modelo.

Figura 4.29: Revit - Alterando a escala



Fonte: Produção do autor.

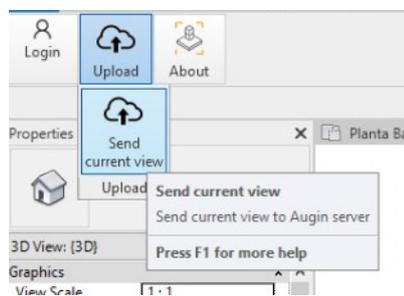
Figura 4.30: Revit - Finalizando o modelo



Fonte: Produção do autor.

10. Salve o projeto e exporte pelo *plugin* do *Augin*.

Figura 4.31: Revit - Enviando para o *Augin*



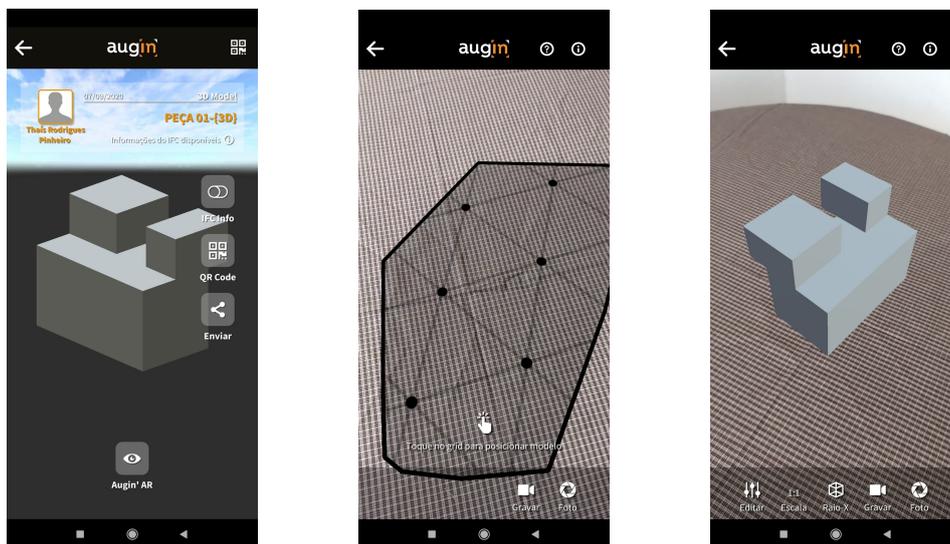
Fonte: Produção do autor.

### Etapa 3: Aplicar o modelo 3D em RA

**Objetivo:** Confrontar o desenho desenvolvido na etapa1 com o modelo 3D desenvolvido na etapa 2, utilizando o recurso de RA do *Augin*.

**Procedimento:** Abra o modelo no *Augin* e aplique em RA.

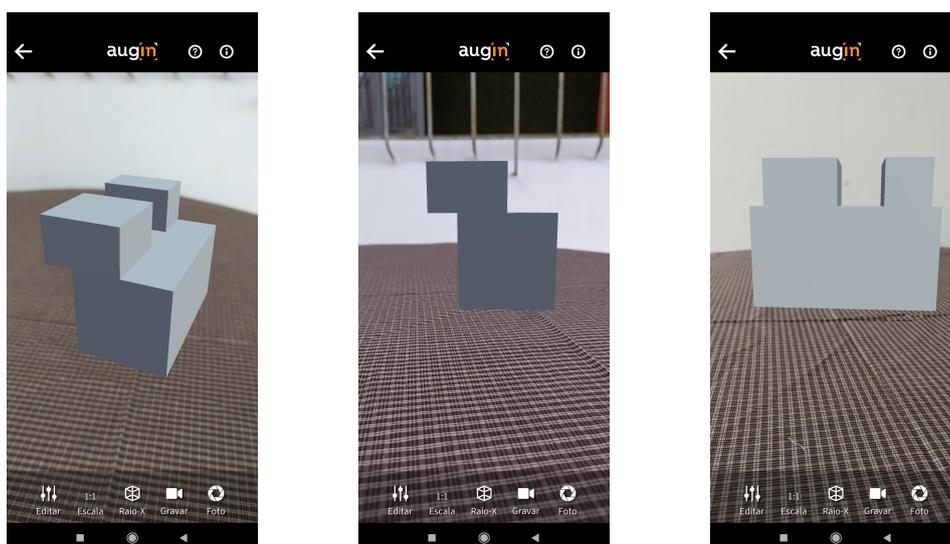
Figura 4.32: Augin - Aplicação em RA.



Fonte: Produção do autor.

Na figura 4.32 observamos à esquerda o modelo 3D aberto no *app Augin*, no centro o *app* fazendo o reconhecimento do plano e à direita o modelo 3D aplicado sobre a mesa, onde o aluno poderá observar a peça por diferentes pontos de vista.

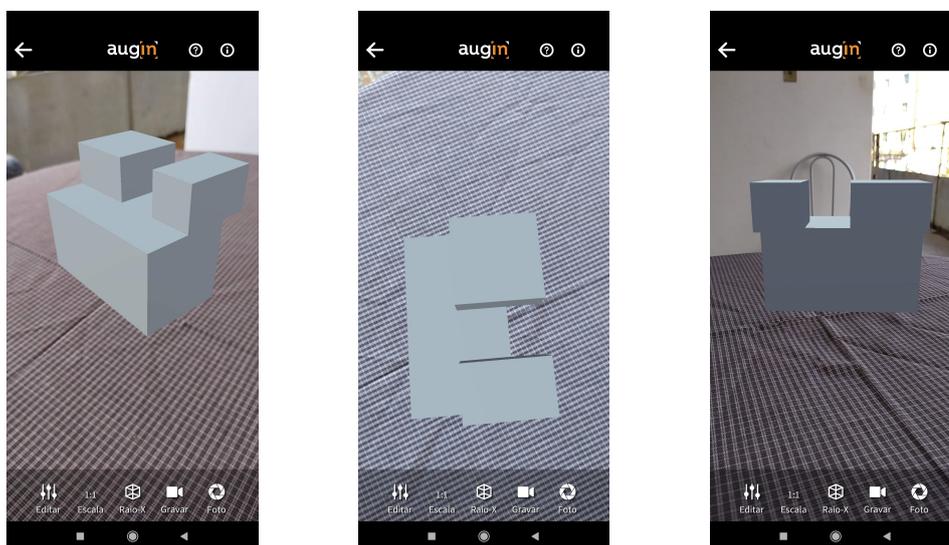
Figura 4.33: Augin - Aplicação em RA



Fonte: Produção do autor.

O estudante deve se posicionar em volta do objeto para melhor visualização, como mostram as figuras 4.33 e 4.34. Em seguida, deve confrontar a peça virtualizada com as vistas apresentadas no enunciado da atividade (figura 4.17) e o desenho em perspectiva feito na etapa 1 (figura 4.20).

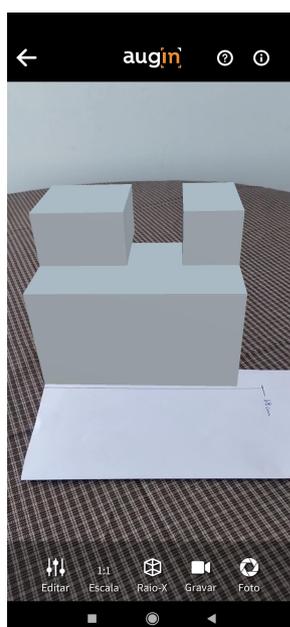
Figura 4.34: Augin - Aplicação em RA



Fonte: Produção do autor.

Com o objetivo de verificar a precisão do *app* quanto à escala, posicionamos uma folha de papel com a medida de 18 cm, informada no enunciado.

Figura 4.35: Falha na escala do *app* Augin



Fonte: Produção do autor.

Mesmo na escala 1:1, como mostrado na figura 4.35, o *app* apresenta uma falha na projeção do modelo 3D em tamanho real. Utilizando uma marcação numa folha de papel com medida de 18 cm, verificamos que a peça segue as proporções corretas, porém não está projetada no tamanho desejado. Apesar disso, o *app* mostrou ser uma excelente ferramenta para esta atividade prática.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Discutir sobre o uso de TICs na educação é sempre interessante, pois a cada dia são lançados novos recursos tecnológicos com grande potencial para uso em atividades de ensino. Cabe então aos profissionais da educação se manterem atualizados e buscarem, cada vez mais, introduzir estes recursos no planejamento das ações educativas.

Neste trabalho, apresentamos e discutimos algumas ideias que podem servir como base para elaboração de diversas propostas de atividades de ensino, utilizando a tecnologia de RA para estimular o aluno a desenvolver a habilidade de visualização espacial, explorando vários conceitos da matemática pura e aplicada. Ler informações sobre um sólido geométrico é bem diferente de visualizar o objeto e manipulá-lo. Poder observar de perto a trajetória de uma partícula numa curva definida por uma função de várias variáveis, de modo geral, possibilita ao aluno passar por uma experiência de aprendizagem com potencial de ampliar sua visão quanto ao conceito matemático envolvido. Com a aplicação da TRRS, as propostas tornaram-se mais significativas e eficientes, pois segundo Duval (1995) o aprendizado sobre um objeto matemático é concebido quando o estudante consegue transitar em diferentes registros de representações semióticas.

As sequências didáticas foram elaboradas com base nas unidades curriculares de cursos superiores. Porém, segundo os autores citados no referencial teórico, podemos perceber que este é um problema que também remete à educação básica. Com isso, há um campo muito fértil para se desenvolver propostas educacionais utilizando os recursos aqui apresentados.

Antes deste trabalho ser finalizado, dois docentes do Instituto de Ciência, Engenharia e Tecnologia (ICET), do Campus do Mucuri da UFVJM, assim que tiveram conhecimento sobre esta pesquisa, mostraram interesse em aplicar e já incluíram estas atividades nos planos de ensino<sup>1</sup> das unidades curriculares de Mecânica dos Sólidos e Desenho e Projeto para Computador. Isso demonstra que há necessidade de atividades que estimulem os alunos a desenvolverem a habilidade de visualização espacial.

Há uma tendência de aumento da utilização de RA, seja para fins educacionais, comerciais ou de entretenimento. Por exemplo, a plataforma Google já oferece, desde o ano passado, o recurso de realidade aumentada combinado com navegação através do aplicativo *Maps*. Agora está oferecendo também este recurso no serviço de pesquisa de alguns animais em realidade aumentada. Como a empresa já oferece alguns serviços na área educacional, esperamos que em breve este serviço seja oferecido com conteúdos de matemática, biologia, química e outras áreas do ensino.

---

<sup>1</sup>Plano de ensino emergencial para o ensino remoto no período de pandemia da COVID-19.

Por outro lado, neste período de pandemia, surgiu uma grande necessidade de utilizar recursos computacionais aplicados ao ensino. Por causa das medidas de isolamento social para impedir o avanço da doença, muitas instituições de ensino, tanto públicas como privadas, passaram a adotar o ensino remoto. Com isso, os profissionais da educação foram obrigados a se capacitarem para utilizar tais recursos. As propostas apresentadas neste trabalho são práticas e os *apps* são facilmente acessíveis aos professores e alunos, sendo uma boa sugestão aos que estão envolvidos no processo de ensino remoto.

Quanto à aplicação das sequências didáticas, vale ressaltar a possibilidade de surgir alguns problemas como, por exemplo, incompatibilidade dos *softwares* e *apps* com as plataformas dos dispositivos utilizados. Antes de aplicar as sequências é recomendado que o docente se certifique quais requisitos os recursos computacionais exigem para o bom funcionamento, bem como, se os estudantes possuem dispositivos compatíveis. Por isso, a estratégia de realizar as atividades em grupo pode minimizar estes problemas.

Além disso, é fundamental que o docente se aproprie de ferramentas pedagógicas e provoque o aluno a ser protagonista do seu próprio aprendizado. As propostas de sequência didática apresentadas neste trabalho servirão de base para elaboração de outras atividades de ensino, utilizando os recursos computacionais apresentados aqui, e coletando dados para avaliar a eficiência destes recursos no processo de ensino e aprendizagem.

Esperamos que este trabalho possa trazer contribuições para a melhoria do ensino de conceitos matemáticos que exijam do estudante uma visão espacial mais aguçada. Que os docentes se apropriem das ideias apresentadas e utilizem como base para outros trabalhos com esta mesma problemática.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, W. X. de; ALVES, R. J. F. Colossus arena: protótipo de game usando realidade aumentada. **Unoesc & Ciência-ACET**, v. 2, n. 1, p. 47–56, 2011.
- CARVALHO, A. M. P. d. Ensino e aprendizagem de ciências: referenciais teóricos e dados empíricos das sequências de ensino investigativas-(sei). **O uno e o diverso na educação**, 2011.
- COSTA, J. D. da et al. Tecnologias e educação: o uso das tic como ferramentas essenciais para o processo de ensino e aprendizagem/technologies and education: the use of tic as essential tools for the teaching and learning process. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 11, p. 25034–25042, 2019.
- COUY, L. **Pensamento visual no estudo da variação de funções**. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática., Belo Horizonte - MG, 2008.
- COUY, L. et al. Análise de livros-textos de cálculo quanto à utilização dos registros de representação semiótica (co). In: **XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. [S.l.: s.n.], 2011.
- DANTAS, E. H. **Uso da realidade aumentada no ensino da geometria espacial**. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.
- DANTAS, S. C.; MATUCHESKI, S. Resolução de um problema com o uso de diferentes ferramentas do geogebra. **Revista Pesquisa e Debate em Educação**, v. 9, n. 1, 2019.
- DOLCE, J. N. P. O. **Fundamentos de matemática elementar: geometria espacial, posição e métrica**. 7<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. [S.l.]: Peter Lang Berne, 1995.
- DUVAL, R.; MORETTI, T. M. T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012.
- FORTE, C. E.; KIRNER, C. Usando realidade aumentada no desenvolvimento de ferramenta para aprendizagem de física e matemática. In: SN. **6º Workshop de Realidade Virtual e Aumentada-WRVA**. [S.l.], 2009. v. 2009, p. 1–6.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na educação matemática no ensino superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, SciELO Brasil, v. 22, n. 2, p. 465–487, 2016.

HERPICH, F. et al. Atividade cerebral no uso de recursos educacionais em realidade aumentada: uma análise da atenção do aprendiz. In: **Brazilian Symposium on Computers in Education (Simpósio Brasileiro de Informática na Educação-SBIE)**. [S.l.: s.n.], 2018. v. 29, n. 1, p. 1858.

HIBBELER, R. C. **Estática: mecânica para engenharia**. 14. ed. [S.l.]: Pearson Education do Brasil, 2017. Tradução Daniel Vieira.

JARDIM, D. F. et al. Hélade, uma plataforma web que interage com o geogebra para uso no ensino de matemática e física. **Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas**, v. 1, n. 14, p. 1–21, oct 2018.

JÚNIOR, A. S. R. et al. Um material potencialmente significativo para o ensino da engenharia civil utilizando impressora 3d e realidade aumentada: uma experiência com alunos do ensino médio e do ensino superior/a potentially significant material for the teaching of civil engineering using 3d printer and augmented reality: an experience with students of high school and higher education. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 3, p. 10855–10868, 2020.

KIRNER, C.; KIRNER, T. G. Evolução e tendências da realidade virtual e da realidade aumentada. **Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências. Cap**, v. 1, p. 10–25, 2011.

MARTINS, V. F.; GUIMARÃES, M. de P. Desafios para o uso de realidade virtual e aumentada de maneira efetiva no ensino. In: **Anais do Workshop de Desafios da Computação Aplicada à Educação**. [S.l.: s.n.], 2012. p. 100–109.

MEIRELES, S. M.; SCHIMIGUEL, J. Tendências de tecnologia para o ensino de matemática. **UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, v. 15, n. 57, p. 95–106, 2019.

NAKAMOTO, P. T. et al. Estratégia de engenharia de requisitos para ambientes de realidade aumentada. **JISTEM-Journal of Information Systems and Technology Management**, SciELO Brasil, v. 9, n. 3, p. 607–626, 2012.

PEREIRA, L. R. et al. Usando o geogebra para o ensino de sólidos de revolução. **Ciência e Natura**, Universidade Federal de Santa Maria, v. 39, n. 3, p. 666–686, 2017.

PEREIRA, L. T. et al. Educar–quadrics: Uma ferramenta de apoio ao ensino de cálculo com realidade aumentada. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 27, n. 02, p. 198, 2019.

PRIETO, G.; VELASCO, A. D. Visualização espacial, raciocínio indutivo e rendimento acadêmico em desenho técnico. **Psicologia escolar e educacional**, SciELO Brasil, v. 10, n. 1, p. 11–20, 2006.

RONCAGLIO, V.; NEHRING, C. M. Atividades de tratamento e conversão em operações com vetores por estudantes de engenharia: dificuldades identificadas. **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 1, n. 18, p. 99–112, 2017.

SANTOS, J. V. Q. et al. Fatores interferentes na evasão e retenção nos cursos de matemática e bacharelado em ciência e tecnologia da ufvjm. **Revista Vozes dos Vales: Publicações Acadêmicas**, n. 16, 10 2019.

SANTOS, W. J. dos; SILVA, I. P. da. Revisão acerca dos temas alfabetização científica e ensino por investigação. **EDUCA-Revista Multidisciplinar em Educação**, v. 5, n. 12, p. 138–150, 2018.

SCALABRIN, A. M. M. O.; MUSSATO, S. Produto educacional: geometria espacial com o software geogebra 3d. **Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico (EDUCITEC)**, v. 5, n. 10, 2019.

SILVA, A. et al. **Desenho técnico moderno**. fourth. Rio de Janeiro: LTC, 2006.  
Tradução: Antônio Eustáquio de Melo Pertence e Ricardo Nicolau Nassar Koury.

SILVA, R. C. D. da; VASCONCELOS, C. A. Realidade aumentada como apoio à aprendizagem de poliedros. **Ensino da Matemática em Debate (ISSN 2358-4122)**, v. 6, n. 2, p. 29–48, 2019.

THOMAS, G. B.; WEIR, M. D.; HASS, J. **Cálculo**. 12<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. Tradução Carlos Scalici; revisão técnica Claudio Hirofume Asano.

UFVJM. **Projeto Pedagógico de Curso - Bacharelado em Ciência e Tecnologia**. 2012.  
Disponível em: [http://www.ufvjm.edu.br/site/icet/files/2013/08/PPC\\_BCT.pdf](http://www.ufvjm.edu.br/site/icet/files/2013/08/PPC_BCT.pdf).

UFVJM. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. 2018.  
Disponível em: [http://www.ufvjm.edu.br/prograd/index.php?option=com\\_docman&task=doc\\_download&gid=3939&Itemid=15](http://www.ufvjm.edu.br/prograd/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=3939&Itemid=15).

VALENTE, V. C. P. N.; PEREIRA, T. T. Aprimoramento da capacidade de visualização espacial com a utilização de hologramas. **Technology Education for the Future: from simple Growth to Sustainable Quality of Living**, p. 142–146, 2015.

VALENTIM, T. A. **O uso da realidade aumentada no ensino da geometria espacial**. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Matemática-PROFMAT). Universidade Federal do Rio de . . . , 2017.

XAVIER, R. G. **Geometria espacial—um curso com Geogebra**. Dissertação (Mestrado) — Mestrado em Matemática-PROFMAT. Universidade Federal de Goiás, 2016.

## **ANEXO A – INFORMAÇÕES TÉCNICAS SOBRE OS *SOFTWARES* E APLICATIVOS UTILIZADOS**

### **A.1 Plataforma GeoGebra**

Site oficial: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)

Informações: [www.geogebra.org/about](http://www.geogebra.org/about)

Licença: Software de Código Aberto disponível gratuitamente para usuários não comerciais. O usuário pode utilizar o ambiente Calculadora Gráfica na plataforma online ou baixar os aplicativos para utilizar offline ([www.geogebra.org/download](http://www.geogebra.org/download)).

Plataformas: Windows, MAC OS e Android

Links para cursos e vídeos sobre o GeoGebra:

- [ogeogebra.com.br](http://ogeogebra.com.br)
- Utilizando a ferramenta grupo do GeoGebra em situações de ensino híbrido ([youtu.be/iXzdKaaS6zg](https://youtu.be/iXzdKaaS6zg)).
- Recursos e potencialidades do GeoGebra ([youtu.be/qod5wqAR\\_iM](https://youtu.be/qod5wqAR_iM))
- Tutorial em GeoGebra - construção de gráficos com várias funções ([youtu.be/HPhsJ\\_BXVgQ](https://youtu.be/HPhsJ_BXVgQ))
- Aprendendo e ensinando Matemática com o GeoGebra ([youtu.be/BEjKo\\_SCusg](https://youtu.be/BEjKo_SCusg))
- Learn GeoGebra Classroom ([youtu.be/Yoo2qhQ1FAw](https://youtu.be/Yoo2qhQ1FAw))
- O Geogebra como ferramenta de apoio as aulas remotas ([youtu.be/UFyymnGbMkn8](https://youtu.be/UFyymnGbMkn8))

### **A.2 Revit**

Site oficial: [www.autodesk.com.br](http://www.autodesk.com.br)

Suporte e aprendizado: [knowledge.autodesk.com/pt-br/support/revit-products?sort=score](https://knowledge.autodesk.com/pt-br/support/revit-products?sort=score)

Instalação: Como baixar e instalar Revit 2021 versão gratuita para estudante/educação ([youtu.be/NhYzleFeRP8](https://youtu.be/NhYzleFeRP8))

### **A.3 Augin**

Site oficial: [augin.app](http://augin.app)

Informações: No site oficial do *Augin*, no menu *My Augin*, é necessário que o usuário crie uma conta para armazenar os projetos. Para enviar os projetos o usuário pode enviar através do próprio *software* Revit ou fazer o *upload* pelo ambiente *My Augin*. Os formatos de arquivos aceitáveis são IFC e FBX.

Plataformas: Android e IOS.

Instalação do *plugin* no Revit: [augin.app/plugin](http://augin.app/plugin)



Figura B.2: Plano de ensino da disciplina Mecânica dos Sólidos 2020/1 p2.

<p>Tensões normais e Círculo de Mohr (2h - teórico) Análise dos efeitos individuais das cargas internas em vigas: cargas axiais, torques, momentos fletores e esforços cortantes (2 horas - teórico)</p> <p>Total horas teóricas: 45 horas Total horas práticas: 15 horas</p> <p>P1(Prova escrita) - 40 pontos - Data Prevista - 22/04/2020 * Vetores de força; * Equilíbrio de uma partícula; * Resultante de um sistema de forças; * Equilíbrio de um corpo rígido;</p> <p>P2 (Prova escrita) - 40 pontos - teórica - Data Prevista - 15/06/2020 * Treliças; * Forças Internas; * Propriedades geométricas de uma seção transversal; * Círculo de Mohr, tensão e deformação.</p> <p>TP1 (Exercícios em sala e para casa) - 10 pontos - teórica * Serão abordados todos os conteúdos previstos na ementa.</p> <p>TP2 - 10 pontos - teórica/Prática * Análise estrutural simplificada de projetos relacionados à disciplina.</p>
<p><b>Bibliografia Básica:</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. MELCONIAN, S. Mecânica técnica e resistência dos materiais. 11. ed. São Paulo: Érica, 2000.</li><li>2. NASH, W. A. Resistência dos Materiais, 2 ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982..</li><li>3. TIMOSHENKO, S.; GERE, J. M. Mecânica dos sólidos. Tradução e coordenação de José Rodrigues de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC, 1998. v. 1.</li></ol>
<p><b>Bibliografia Complementar:</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. BEER, F. P.; JOHNSON, E. R. Resistência dos materiais. 4.ed. São Paulo: McGraw Hill, 2007.</li><li>2. BLASSI, DI. Resistência dos materiais. 2. ed. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1990.</li><li>3. HIBBELER, R. C. Resistência dos materiais. 5. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2004.</li><li>4. HIGDON, O. S.; WEESE, R. Mecânica dos materiais. 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981.</li><li>5. POPOV, E. P. Introdução à mecânica dos sólidos. São Paulo: Edgard Blücher, 1978.</li></ol>

Data de Emissão: 12/08/2020

Docente responsável

Coordenador do curso

Campus JK e Reitoria:	Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6024
Campus I:	Rodovia MGT 367 – km 583, nº 5000 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800
Campus do Mucuri:	Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil	Telefone: +55 (33) 3529-2700
Campus Janaúba:	Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808
Campus Unai:	Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821



Figura B.4: Plano de ensino da disciplina Funções de Várias Variáveis 2019/2 p2.

4. Funções Vetoriais (10 horas)
  - 4.1 Funções Vetoriais e Curvas Espaciais
  - 4.2 Limites, Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais.
  - 4.3 Comprimento de Arco e Curvatura.
  - 4.4 Movimento no Espaço: Velocidade e Aceleração.
  
5. Derivadas Parciais (17 horas)
  - 5.1 Funções de Várias Variáveis.
  - 5.2 Limites e Continuidades.
  - 5.3 Derivadas Parciais.
  - 5.4 Planos Tangentes e Aproximações Lineares.
  - 5.5 Regra da Cadeia.
  - 5.6 Derivadas Direcionais e Vetores Gradiente.
  - 5.7 Valores Máximo e Mínimo de Funções de Várias Variáveis.
  - 5.8 Multiplicadores de Lagrange.
  
6. Integrais Múltiplas (17 horas)
  - 6.1 Integrais Duplas sobre Retângulos
  - 6.2 Integrais Iteradas.
  - 6.3 Integrais Duplas sobre Regiões Genéricas.
  - 6.4 Integrais Duplas em Coordenadas Polares.
  - 6.5 Aplicações das Integrais Duplas.
  - 6.6 Integrais Triplas.
  - 6.7 Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas e esféricas.
  - 6.8 Mudança de Variáveis em Integrais Múltiplas.
  
7. Sequências e séries infinitas (8 horas)
  - 7.1 Sequências
  - 7.2 Séries Infinitas
  - 7.3 Testes de convergências
  - 7.5 Séries de potências
  - 7.6 Séries de Taylor e Maclaurin

Atividades de tutoria: 30 horas durante o semestre.

Total de 75 horas teóricas .

- Avaliação escrita I: peso 35;  
Conteúdo: Equações Paramétricas e Coordenadas Polares; Vetores e a Geometria do Espaço;

- Avaliação escrita II: peso 35  
Conteúdo: Funções Vetoriais, Derivadas Parciais;

- Avaliação escrita III: peso 30  
Conteúdo: Integrais Múltiplas, Sequências e Séries.

#### **Bibliografia Básica:**

- GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. Cálculo B: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, e integrais curvilíneas e de suporte. 2. ed. São Paulo: Pearson: Prentice Hall, 2007.
- STEWART, James. Cálculo. 5.ed. São Paulo: Pioneira: Thomson Learning, 2008. v.2.
- STEWART, James. Cálculo. 6.ed. São Paulo: Pioneira: Thomson Learning, 2011. v.2.
- THOMAS, George B et al. Cálculo. 11. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009. v.2

Campus JK e Reitoria:	Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6024
Campus I:	Rodovia MG-367 – km 583, nº 5000 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800
Campus do Mucuri:	Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil	Telefone: +55 (33) 3529-2700
Campus Janaúba:	Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808
Campus Unai:	Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821

Figura B.5: Plano de ensino da disciplina Funções de Várias Variáveis 2019/2 p3.

**Bibliografia Complementar:**

- ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. Cálculo. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v.2.
- GUIDORIZZI, H. Luiz. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 2.
- GUIDORIZZI, H. Luiz. Um curso de cálculo. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 3.
- LEITHOLD, L. Cálculo com geometria analítica, 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- MEDEIROS, V. Z. et al. Pré-cálculo. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009.
- MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva, 2003.

**Data de Emissão:**13/08/2020

---

**Docente responsável**

---

**Coordenador do curso**

Campus JK e Reitoria:

Campus I:

Campus do Mucuri:

Campus Janaúba:

Campus Unai:

Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil

Rodovia MGT 367 – km 583, nº 5090 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil

Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil

Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil

Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil

Telefone: +55 (38) 3532-6024

Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800

Telefone: +55 (33) 3529-2700

Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808

Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821

Figura B.6: Plano de ensino da disciplina Geometria Espacial 2020/1 p1.



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**  
**UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI**  
 UFVJM  
[www.ufvjm.edu.br](http://www.ufvjm.edu.br)



**PLANO DE ENSINO**

<b>Disciplina:</b> CEX121 - GEOMETRIA ESPACIAL
<b>Curso (s):</b> MMT - MATEMÁTICA
<b>Docente (s) responsável (eis):</b> [REDACTED]
<b>Carga horária:</b> 30 horas
<b>Créditos:</b> 2
<b>Ano/Semestre:</b> 2020/1

<p><b>Objetivos:</b></p> <p>Estudar sólidos geométricos e os conceitos relacionados aperfeiçoando a visão tridimensional de objetos geométricos e preparando o futuro professor à prática docente de tal conteúdo.</p>
<p><b>Ementa:</b></p> <p>Poliedros, Prismas e Pirâmides; Cilindros e Cones de Revolução; Esferas.</p>
<p><b>Conteúdo Programático (com respectiva carga horária) e Avaliações:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Diedros (4 aulas)             <ol style="list-style-type: none"> <li>1.1. Definições;</li> <li>1.2. Seções;</li> <li>1.3. Diedros Congruentes. Bissetor. Medidas;</li> <li>1.4. Seções Iguamente Inclínadas. Congruência de Diedros.</li> </ol> </li> <li>2. Triedros (4 aulas)             <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1. Conceitos e Elementos;</li> <li>2.2. Relações entre as Faces;</li> <li>2.3. Congruência de Triedros;</li> <li>2.4. Triedros Polares ou Suplementares;</li> <li>2.5. Critérios ou Casos de Congruência entre Triedros;</li> <li>2.6. Ângulos Poliédricos Convexos.</li> </ol> </li> <li>3. Poliedros (4 aulas)             <ol style="list-style-type: none"> <li>3.1. Poliedros Convexos;</li> <li>3.2. Poliedros de Platão;</li> <li>3.3. Poliedros Regulares.</li> </ol> </li> <li>4. Prismas (8 aulas)</li> </ol>

Campus JK e Reitoria:	Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6024
Campus I:	Rodovia MGT 367 – km 583, nº 5000 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800
Campus do Mucuri:	Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil	Telefone: +55 (33) 3529-2700
Campus Janaúba:	Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808
Campus Unai:	Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821

Figura B.7: Plano de ensino da disciplina Geometria Espacial 2020/1 p2.

- 4.1. Prisma Ilimitado;
- 4.2. Prisma;
- 4.3. Paralelepípedos e Romboedros;
- 4.4. Diagonal e Área de Cubo;
- 4.5. Diagonal e Área do Paralelepípedo Retângulo;
- 4.6. Razão entre Paralelepípedos Retângulos;
- 4.7. Volume de um Sólido;
- 4.8. Volume do Paralelepípedo Retângulo e do Cubo;
- 4.9. Área Lateral e Área Total do Prisma;
- 4.10. Princípio de Cavalieri;
- 4.11. Volume do Prisma;
- 4.12. Seções Planas do Cubo;
- 4.13. Problemas Gerais sobre Prismas.

5. Pirâmides (4 aulas)

- 5.1. Pirâmide Ilimitada;
- 5.2. Pirâmide;
- 5.3. Volume da Pirâmide;
- 5.4. Área Lateral e Área Total da Pirâmide.

6. Cilindros (4 aulas)

- 6.1. Noções Intuitivas de Geração de Superfícies Cilíndricas;
- 6.2. Cilindro;
- 6.3. Áreas Lateral e Total;
- 6.4. Volume do Cilindro.

7. Esferas (4 aulas)

- 7.1. Definições;
- 7.2. Área e Volume;
- 7.3. Fuso e Cunha;
- 7.4. Dedução das Fórmulas das Áreas do Cilindro, do Cone e da Esfera.

8. Superfícies e Sólidos de Revolução (4 aulas)

- 8.1. Superfícies de Revolução;
- 8.2. Sólidos de Revolução.

Poderá, ser utilizada até 20% (vinte por cento) da carga horária para a realização de atividades não presenciais. Além disso, a distribuição de carga horária para os conteúdos está expressa em horas-aula de 50 minutos, totalizando 36 h/a, que equivale a 30 h.

Serão 3 avaliações no valor de 30 pontos, sendo que cada exame poderá ser dividido em partes oral e/ou escrita. Ainda, haverá uma avaliação no valor de 10 pontos em forma de listas de exercícios e/ou trabalhos.

**Bibliografia Básica:**

- [1] CARVALHO, P. C. P. Introdução à Geometria Espacial. 4ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [2] DOLCE, O & POMPEO, J. N. Fundamentos de Matemática Elementar. (10 vols). Vol 10: Geometria Espacial, posição e métrica. 7ª ed. São Paulo: Atual Editora. 2013.
- [3] LIMA, E. L., CARVALHO, P. C. P., WAGNER, E. & MORGADO, A. C. A Matemática do

Campus JK e Reitoria:

Campus I:

Campus do Mucuri:

Campus Janaúba:

Campus Unai:

Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil

Rodovia MGT 367 – km 583, nº 5090 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil

Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil

Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil

Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil

Telefone: +55 (38) 3532-6024

Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800

Telefone: +55 (38) 3529-2700

Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808

Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821

Figura B.8: Plano de ensino da disciplina Geometria Espacial 2020/1 p3.

Ensino Médio. (3 vols). Vol 2. 4ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM. (Coleção do Professor de Matemática). 2002

**Bibliografia Complementar:**

- [1] BARBOSA, J. L. M. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática). 1995.
- [2] MACHADO, Antônio dos S. Áreas e volumes. São Paulo: Atual, 2008.
- [3] JACOBS, H. Geometry. W. H. Freeman. 1974.
- [4] LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática (Coleção do Professor de Matemática). 1991.
- [5] REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Publicação quadrimestral da SBM - Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro. (mais de 50 números publicados).

**Data de Emissão:**14/08/2020

---

**Docente responsável**

---

**Coordenador do curso**

Campus JK e Reitoria: Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil      Telefone: +55 (38) 3532-6024  
Campus I: Rodovia MGT 367 – km 583, nº 5000 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil      Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800  
Campus do Mucuri: Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil      Telefone: +55 (33) 3529-2700  
Campus Janaúba: Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil      Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808  
Campus Unai: Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil      Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821



Figura B.10: Plano de ensino da disciplina Desenho Técnico para Computador 2019/2 p2.

<p>2.4. Projeções ortogonais 2.5. Vistas ortográficas 2.6. Posicionamento das vistas 2.7. Rebatimento do plano 2.8. Representação de arestas ocultas 2.9. Representação de superfícies inclinadas 2.10. Tipos de Linhas</p> <p>3. Desenho de Peças 8 horas (6 teóricas e 2 práticas) 3.1. Modelagem básica de Peças 3.2. Edição e alteração de projetos de peças 3.3. Cortes e Seções</p> <p>4. Desenho Arquitetônico 6 horas (2 teóricas e 4 práticas) 4.1. Planta Baixa</p> <p>5. Auto CAD 26 horas (18 teóricas e 8 práticas) 5.1. Menu principal, editor gráfico e conceitos de área gráfica 5.2. Primitivas geométricas, comandos de edição, auxílio e precisão 5.3. Planejamento e organização de desenho: níveis e layers 5.4. Criação de desenhos no ambiente bidimensional 5.5. Metodologia de desenvolvimento de projetos nos ambientes bidimensionais 5.6. Criação e recuperação de bibliotecas e símbolos 5.7. Impressão, saída dos desenhos 5.8. Projeto final: Planta, cortes, fachadas, situação/locação</p> <p>Carga horária: 60h (45 teórica e 15 prática)</p> <p>Prova 1 30%: Prova teórica- Questões objetivas e dissertativas (Conteúdos 1 ao 3) Trabalhos 50%: Trabalhos (Conteúdos 1 ao 5) Prova 2 - 20%: Prova prática - Conteúdo 1 ao 5</p>
<p><b>Bibliografia Básica:</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. FRENCH, Thomas E; VIERCK, Charles J. Desenho técnico e tecnologia gráfica. 7. ed. São Paulo: Globo, 2002.</li><li>2. NEIZEL, Ernst. Desenho técnico para a construção civil. São Paulo: EPU/EDUSP, 1974.</li><li>3. SILVA, A.; TAVARES, C.; LUIS, J. S. Desenho técnico moderno. Tradução: Antônio Eustáquio de Melo Pertence e Ricardo Nicolau Nassar Koury. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.</li></ol>
<p><b>Bibliografia Complementar:</b></p> <ol style="list-style-type: none"><li>1. ESTEPHANIO, Carlos. Desenho técnico: uma linguagem básica. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.</li><li>2. FREDO, Bruno. Noções de geometria e desenho técnico. São Paulo: Ícone, 1994.</li><li>3. FRENCH, Thomas E. Desenho técnico. Porto Alegre: Globo, 1973.</li><li>4. RANGEL, A. Pinheiro. Desenho projetivo: projeções cotadas. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1971.</li><li>5. VENDITTI, M. Vinicius dos Reis. Desenho técnico sem prancheta, com AutoCAD. 2. ed. Florianópolis: Visual Books, 2007.</li></ol>

Campus JK e Reitoria:	Rua da Glória, nº 187 – Centro – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6024
Campus I:	Rodovia MGT 367 – km 583, nº 5000 – Alto da Jacuba – CEP 39100-000 – Diamantina/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-1200 / 6800
Campus do Mucuri:	Rua do Cruzeiro, nº 01 – Jardim São Paulo – CEP 39.803-371 – Teófilo Otoni/MG – Brasil	Telefone: +55 (33) 3529-2700
Campus Janaúba:	Avenida Um, nº 4.050 – Cidade Universitária – CEP 39447-814 – Janaúba/MG – Brasil	Telefones: +55 (38) 3532-6812 / 6808
Campus Unai:	Avenida Universitária, nº 1.000 – Universitários – CEP 38610-000 – Unai/MG – Brasil	Telefone: +55 (38) 3532-6822 / 6821









**UFVJM**