UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação

Frações contínuas: fundamentação teórica e possíveis abordagens na Educação Básica

Raimundo Aguinaldo Freire Paulino

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

ICMC USP
SÃO CARLOS

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: ______________________

Raimundo Aguinaldo Freire Paulino

Frações contínuas: fundamentação teórica e possíveis abordagens na Educação Básica

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert

USP – São Carlos
Setembro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados inseridos pelo(a) autor(a)

P328f

Paulino, Raimundo Aguinaldo Freire
Frações contínuas: fundamentação teórica e possíveis abordagens na Educação Básica / Raimundo Aguinaldo Freire Paulino; orientador Marcelo Rempel Ebert. -- São Carlos, 2020.
131 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2020.

1. Frações contínuas. 2. Boas aproximações racionais para números irracionais. 3. Frações contínuas de números racionais e Eq. diofantinas lineares com duas incógnitas. 4. Frações contínuas de números irracionais quadráticos e Equações de Pell. 5. Método para extração de raízes através de frações contínuas. I. Ebert, Marcelo Rempel , orient. II. Título.

Bibliotecários responsáveis pela estrutura de catalogação da publicação de acordo com a AACR2:
Gláucia Maria Saia Cristianini - CRB - 8/4938
Juliana de Souza Moraes - CRB - 8/6176

Raimundo Aguinaldo Freire Paulino

Continued fractions: Theoretical foundation and possible approaches in Basic Education

Master dissertation submitted to the Institute of Mathematics and Computer Sciences – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert

USP – São Carlos
September 2020

Dedico este trabalho à minha família, que é a grande responsável pela minha educação e, em muito, contribuiu para esta conquista.

Graças a ela este mérito conquistado é a certeza de outras vitórias.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de toda sabedoria e de toda bênção, cuja luz revela o caminho que conduz à perfeição, dissipa as trevas do erro e da ignorância, manifestando o conhecimento pleno da verdade. Obrigado, ó Pai, por tornar possível a realização deste trabalho, por todo bem que me concedeu, pela perseverança na busca dos bens que os olhos não podem ver e por tudo que contribui para o meu crescimento pessoal e profissional, pois "*todo dom precioso e toda dádiva perfeita vêm do alto, descem do Pai das luzes*" (Tg 1, 17). Que o mérito desta conquista seja para a maior honra e glória do seu santo nome.

À minha família que tanto me apoiou e incentivou. Seus esforços asseguraram-me o aprimoramento humano através de uma formação ética, da promoção da autonomia intelectual, do desenvolvimento do pensamento crítico e do respeito às diferenças e aos direitos fundamentais da pessoa humana, garantindo-me a aquisição dos valores necessários para o exercício, responsável e pleno, da liberdade e da cidadania.

À Coordenação do PROFMAT e à USP que, através deste notável programa, oferecem uma excelente oportunidade de aprimoramento da formação profissional para professores de Matemática em exercício na Educação Básica.

Um agradecimento especial aos professores, cujas ações determinam a qualidade e garantem o sucesso do Programa; seja ofertando os estímulos necessários à uma aprendizagem significativa, seja promovendo uma compreensão mais profunda e abrangente dos conceitos e temas abordados, para que se alcance uma visão mais ampla e atual da Matemática e de suas aplicações. Eles transformam, de modo irreversível, a maneira de conceber o Ensino da Matemática e de ver o mundo.

À CAPES: "**O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.**"

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Rempel Ebert, pela indicação do tema, pelo incentivo, apoio e orientações valiosas em todas as etapas deste trabalho.

Aos colegas do PROFMAT, pela afetuosa convivência, pelos momentos de descontração, pela troca de experiências e, sobretudo, pela indispensável ajuda na realização de muitas tarefas.

Enfim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste curso e desta dissertação, para o meu aperfeiçoamento acadêmico e profissional.

“Na maior parte das ciências,
uma geração põe abaixo o que a outra construiu,
e o que a outra estabeleceu a outra desfaz.
Somente na Matemática é que cada geração
constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”.
(Hermann Hankel 1839 - 1873)

RESUMO

PAULINO, R. A. F. **Frações contínuas: fundamentação teórica e possíveis abordagens na Educação Básica**. 2020. 128 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

Esta dissertação foi elaborada a partir de revisão literária e o seu tema central é a teoria elementar das frações contínuas simples e os seus aspectos de aproximação, na perspectiva de possíveis abordagens na Educação Básica. As frações contínuas são mais que uma forma diferente de representação numérica, permitem explorar novas ideias e propriedades matemáticas e, obter sequências de aproximações racionais para números irracionais, possibilitando, no ciclo básico, uma significação mais efetiva dos números reais. Das relações entre os convergentes das frações contínuas simples obtemos os resultados mais significativos à compreensão do tema e necessários ao estabelecimento de métodos de aproximações racionais para números irracionais e, à comprovação de que as melhores aproximações racionais para números irracionais vêm das frações contínuas simples. Decorre desses aspectos de convergência que as frações contínuas simples constituem uma ferramenta alternativa para solucionar equações diofantinas lineares com duas incógnitas e desempenham um papel essencial na resolução da equação de Pell. Dedicaremos um capítulo à apresentação de um método alternativo que permite obter expansões, por frações contínuas, de números irracionais algébricos da forma $\sqrt[n]{y^m}$. Ao final deste capítulo, exibiremos algumas expansões clássicas para outros números irracionais, inclusive π e e. Finalizaremos o trabalho propondo uma sequência de atividades a serem desenvolvidas, em sala de aula, com alunos da Educação Básica.

Palavras-chave: Frações contínuas, Convergentes, Números racionais, Irracionais quadráticos, Equações diofantinas lineares com duas incógnitas e equação de Pell.

ABSTRACT

PAULINO, R. A. F. **Continued fractions: Theoretical foundation and possible approaches in Basic Education**. 2020. 128 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2020.

This dissertation was elaborated from a literary review and its central theme is the elementary theory of simple continued fractions and its approximation aspects, in the perspective of possible approaches in Basic Education. Continued fractions are more than a different form of numerical representation, they allow exploring new ideas and mathematical properties and obtaining sequences of rational approximations for irrational numbers, allowing, in the basic cycle, a more effective meaning of real numbers. From the relations between the convergent of simple continued fractions we obtain the most significant results for the understanding of the theme and necessary for the establishment of methods of rational approximations for irrational numbers and, the proof that the best rational approximations for irrational numbers come from simple continued fractions. It follows from these aspects of convergence that simple continued fractions are an alternative tool to solve linear diophantine equations with two unknowns and play an essential role in solving Pell's equation. We will dedicate a chapter to the presentation of an alternative method that allows to obtain expansions, by continued fractions, of irrational algebraic numbers of the form $\sqrt[n]{y^m}$. At the end of this chapter, we will display some classic expansions for other irrational numbers, including π and e. We will end the work by proposing a sequence of activities to be developed, in the classroom, with students of Basic Education.

Keywords: Continued Fractions, Convergents, Rational Numbers, Quadratic Irrationals, Two-Unknown Linear Diophantine Equations and Pell Equation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
SBM	Sociedade Brasileira de Matemática

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{Q}$ — Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ — Conjunto dos números reais

$\varnothing$ — Conjunto vazio

$\mathbb{Z}$ — Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Z}^*$ — Conjunto dos números inteiros não nulos

$\mathbb{N}$ — Conjunto dos números naturais

$\lfloor x \rfloor$ — Maior inteiro menor do que ou igual a x

$\{x\}$ — Parte fracionária de x

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — Conjunto dos números irracionais

$\mathbb{C}$ — Conjunto dos números complexos

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ — Conjunto dos números complexos não reais

SUMÁRIO

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO

As frações contínuas são consideradas um dos mais belos temas da Matemática Elementar e um dos melhores instrumentos de investigação da natureza aritmética dos números irracionais. Tem aplicações na própria Matemática e em diferentes áreas do conhecimento. Suas bases teóricas foram construídas ao longo de quase três séculos, a partir das primeiras décadas do século $XVII$ e contou com a contribuição de diversos matemáticos, dentre eles *John Wallis (1616 - 1703)* que foi o primeiro a utilizar o termo **frações contínuas**, em seu livro "*Opera Mathematica*", de 1695.

"*Todo número real pode ser bem aproximado por números racionais*". Essa propriedade dos números reais forneceu a motivação necessária para estudarmos e elaborarmos essa dissertação, cujos objetivos principais são mostrar, através de revisão literária, a teoria elementar das frações contínuas simples e seus aspectos de aproximação e discutir possíveis abordagens do tema na Educação Básica.

Na fundamentação teórica, apresentaremos os principais resultados relacionados ao tema, procurando enunciá-los e comprová-los, de forma objetiva e acessível. Sempre que possível e/ou necessário utilizaremos interpretações geométricas e exemplos numéricos para tornar a compreensão mais efetiva.

No Capítulo 2, definiremos frações contínuas simples, apresentaremos sua representação geométrica e caracterizaremos as relações de recorrências que possibilitam construir uma sequência de convergentes, a partir de uma expansão, por fração contínuas simples. Ainda neste capítulo, apresentaremos as propriedades fundamentais dos convergentes e alguns resultados que permitem quantificar o erro e comprovar que as melhores aproximações racionais para números irracionais vêm das frações contínuas simples.

Mostraremos, no terceiro capítulo, que a teoria das frações contínuas simples, quando aplicada a números racionais, fornece expansões finitas em decorrência da sua íntima relação com o algoritmo de Euclides. Vêm, desse tipo de expansão, as informações necessárias para definirmos frações contínuas simétricas e deduzirmos um método para solucionar equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

No quarto capítulo, definiremos irracionalidades quadráticas e apresentaremos os resultados que comprovam que esse tipo de número tem a periodicidade, na representação por frações contínuas simples, como característica. Discutiremos dois casos particulares importantes: as expansões, por frações contínuas simples, estritamente periódicas que representam os números irracionais quadráticos reduzidos e expansões de irracionais quadráticos da forma $\sqrt{D}$, cujas propriedades permitirão o estabelecimento um método para solucionarmos equações de Pell.

Não existe nenhum método elementar que permita obter expansões, por frações contínuas simples, de números que não sejam racionais ou irracionais quadráticos. Descreveremos, no quinto capítulo, um método alternativo que permitirá obter expansões, por frações contínuas gerais, de números algébricos da forma $\sqrt[n]{y^m}$. O método permitirá obter boas aproximações, cujas comprovações se darão através de exemplos numéricos. Ainda neste capítulo, reuniremos algumas expansões clássicas, inclusive para os números π e e. No entanto, não apresentaremos os métodos para obtê-las, pois exigem recursos matemáticos que estão além do escopo deste trabalho.

Finalmente, no sexto e último capítulo, proporemos uma sequência de atividades, mediadas pela teoria das frações contínuas, cujas resoluções implicarão na aplicação de conceitos e procedimentos próprios da área temática números, possibilitando o aprofundamento das propriedades operatórias e do sentido numérico. A teoria elementar das frações contínuas permitirá introduzir e aprofundar a noção de erro e de boas aproximações. Essa abordagem com enfoque diferente viabilizará, ao aluno, alcançar o nível de significação necessária, do conjunto dos números reais, já na Educação Básica e, evidenciará o potencial pedagógico do tema.

Documentos oficiais recomendam que, ao longo da Educação Básica, seja ofertado um amplo espectro de conteúdos, de modo que o aluno possa compreender as relações entre diferentes conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática. Embora seja um tema que está fora do currículo da Educação Básica, as frações contínuas têm conexões com diversos tópicos tratados neste nível escolar, tais como: divisibilidade e algoritmo de Euclides, recorrências e sequências, padrões e regularidades, razão e proporção, aproximações e equações, raízes não-exatas e logaritmos, etc. Desse modo, as frações contínuas são um convite e um campo amplo e fértil para o desenvolvimento de novas ideias matemáticas e práticas de ensino.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para uma compreensão mais clara, abrangente e significativa do tema, motivar e encorajar professores da Educação Básica a utilizarem as frações contínuas para dar um enfoque mais significativo à abordagem dos números irracionais.

CAPÍTULO

2

FRAÇÕES CONTÍNUAS: DEFINIÇÕES BÁSICAS, NOTAÇÕES E PROPRIEDADES

Uma propriedade essencial de todo número real é que pode ser bem aproximado por números racionais, pois o conjunto $\mathbb{Q}$ é denso no conjunto $\mathbb{R}$. Para maiores detalhes, consultar a referência (NETO; GUIMARÃES, 2011, p. 22).

Definição 1. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é **denso** em $\mathbb{R}$ se todo intervalo aberto (a,b), $a<b$, temos $(a,b)\cap \mathsf{A} \neq \varnothing$. Aqui denotamos o conjunto vazio por $\varnothing$.

Definição 2. Um número racional é todo e qualquer número que pode ser escrito na forma $\dfrac{m}{n}$, em que $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. O conjunto dos números racionais é usualmente representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$.

Teorema 1. O conjunto $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, ou seja, dados quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $b > a$, existe um racional denotado por $\dfrac{m}{n}$, tal que: $a < \dfrac{m}{n} < b$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração. Provaremos que existe um número racional $\dfrac{m}{n}$ no intervalo real aberto $I = (a,b)$.

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, como $b > a$, a diferença $b - a > 0$. Como o conjunto dos números naturais é ilimitado superiormente, a propriedade arquimediana[1] dos números reais para $b-a$ e 1 nos garante que existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$n > \frac{1}{b-a} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{n} < b - a \Leftrightarrow n(b-a) > 1 \Leftrightarrow nb - na > 1.$$

Isso nos diz que o intervalo (na, nb), cujos extremos são na e nb, possui comprimento maior que 1. Assim, existe pelo menos um número inteiro m no intervalo real (na, nb), então

$$na < m < nb \Leftrightarrow \frac{na}{n} < \frac{m}{n} < \frac{nb}{n} \Leftrightarrow a < \frac{m}{n} < b.$$

[1] **Propriedade arquimediana**: Dados os números reais a e b com $0 < a < b$, existe algum inteiro positivo n tal que $na > b$.

Logo, entre dois números reais distintos existe pelo menos um número racional. □

Esse resultado nos mostra que qualquer intervalo aberto (a, b), por menor que seja, contém elemento de $\mathbb{Q}$. Logo é possível obter aproximações de números reais por racionais. Mas, como obter e quantificar o grau de precisão dessas aproximações?

As **frações contínuas** podem ser uma resposta a tais indagações. Além de constituírem uma forma interessante de representação numérica, as frações contínuas simples são importantes em diversos ramos da Matemática, dentre eles, a teoria das aproximações diofantinas, pois constituem uma forma eficiente de obtermos boas aproximações para números reais.

> Quase desconhecido dos estudantes ocidentais de matemática moderna, o tema das frações contínuas desempenha um papel extenso, se não vital, na teoria analítica, bem como na teoria aritmética. Aplicações poderosas envolvendo o uso de frações contínuas existem com relação à teoria de equações, polinômios ortogonais, séries de potências, matrizes infinitas e formas quadráticas em infinitas variáveis, integrais definidas, problema de momento, funções analíticas e soma de séries divergentes (COMPTON, 1973, p. 1).

Neste capítulo apresentaremos a definição, a interpretação geométrica e os resultados fundamentais concernentes às frações contínuas simples. Alguns desses resultados comprovam que as melhores aproximações racionais para números irracionais vêm desse tipo de representação. As definições e demonstrações, que mostraremos, têm como principal referência (MOREIRA; MARTÍNEZ; SALDANHA, 2012, p. 151 - 176).

2.1 Frações contínuas simples

As **frações contínuas simples** também são denominadas **frações contínuas regulares**, ou ainda, **forma canônica** de uma fração contínua. Nelas, os numeradores parciais são todos iguais a 1 e os termos a_n, com $n \in \mathbb{N}$, denominados quocientes parciais, são todos números inteiros positivos, com exceção de a_0. Em (2.1) e (2.2) temos, respectivamente, a forma expandida e a forma abreviada desse tipo de expansão.

2.1.1 O algoritmo das frações contínuas simples e definição

Segundo Waldschmidt (2015, p. 61 - 62), dado um número real x, existe um único número inteiro $\lfloor x \rfloor$, denominado o maior inteiro menor do que ou igual a x e um único real $\{x\} \in [0, 1)$, denominado parte fracionária de x, tal que

$$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}, \text{ com } \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \text{ e } 0 \leq \{x\} < 1.$$

Se x não for um número inteiro, então $\{x\} \neq 0$ e definindo $x_1 = \dfrac{1}{\{x\}}$, temos

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x_1} = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\{x\}}}.$$

Novamente, se x_1 não for um número inteiro, então $\{x_1\} \neq 0$ e definindo $x_2 = \dfrac{1}{\{x_1\}}$, teremos

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor x_1 \rfloor + \cfrac{1}{x_2}}.$$

Esse processo termina, se para algum natural $n \geq 1$ ocorrer $\{x_n\} = 0$, caso contrário, o processo continua.

Exemplo 1. Aplicando o algoritmo das frações contínuas, obteremos a expansão do número racional $\dfrac{25}{11}$ e constataremos que sua representação é um processo finito.

$$x = \alpha_0 = \frac{25}{11} = \left\lfloor \frac{25}{11} \right\rfloor + \left\{ \frac{25}{11} \right\} = 2 + \frac{3}{11} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{11}{3}} \Rightarrow \left\{ \ a_0 = 2 \ \text{ e } \ \alpha_1 = \frac{11}{3} \neq 0; \right.$$

$$\alpha_1 = \frac{11}{3} = \left\lfloor \frac{11}{3} \right\rfloor + \left\{ \frac{11}{3} \right\} = 3 + \frac{2}{3} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{3}{2}} \Rightarrow \left\{ \ a_1 = 3 \ \text{ e } \ \alpha_2 = \frac{3}{2} \neq 0; \right.$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{2} = \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\{ \frac{3}{2} \right\} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{1}} \Rightarrow \left\{ \ a_2 = 1 \ \text{ e } \ \alpha_3 = \frac{2}{1} \neq 0; \right.$$

$$\alpha_3 = \frac{2}{1} = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor + \left\{ \frac{2}{1} \right\} = 2 + 0 \Rightarrow \left\{ \ a_3 = 2 \ \text{ e } \ \alpha_4 = 0. \right.$$

Como $\alpha_4 = 0$, o processo termina e a expansão por frações contínuas é finita, como segue

$$\frac{25}{11} = \left\lfloor \frac{25}{11} \right\rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \cfrac{11}{3} \right\rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \cfrac{3}{2} \right\rfloor + \cfrac{1}{\left\lfloor \cfrac{2}{1} \right\rfloor}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}} = [2; 3, 1, 2].$$

O algoritmo descrito acima revela-nos que frações contínuas são conceitualmente simples, não dependem de nenhuma escolha arbitrária de base. Permite-nos defini-las recursivamente, bem como, obter a expansão de um número real x.

Definição 3. Dado $x \in \mathbb{R}$. Definimos a fração contínua simples de x como a sequência de inteiros (a_n), definidos por $a_n \stackrel{def}{=} \lfloor \alpha_n \rfloor$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$, em que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é obtido recursivamente por

$$\begin{cases} \alpha_0 = x \\ \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\{\alpha_n\}} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}, \ \text{ onde } \ \alpha_n \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Se, para algum n, $\alpha_n = a_n$, ou seja, $\{\alpha_n\} = 0$, a representação é finita, como segue

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}} \overset{def}{=} [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n]. \tag{2.1}$$

2. Caso contrário,

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \; a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n + \cdots}}} \overset{def}{=} [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, \cdots]. \tag{2.2}$$

Questões sobre a convergência de (2.2) serão discutidas na Subseção 2.1.3. Em particular, veja Observação 3.

Vimos, no Exemplo 1, uma representação finita. No entanto, há infinitos casos cuja expansão, por frações contínuas simples, é um processo infinito, um deles é o número de ouro, sobre o qual faremos um breve comentário e, em seguida, apresentaremos sua representação por frações contínuas simples.

Das infinitas formas diferentes de dividir um segmento AB qualquer, em duas partes desiguais, apenas uma é a mais "agradável ao espírito humano" e por isso é considerada a proporção da beleza, também chamada de proporção áurea. Na natureza, a proporção áurea está associada à padrões de crescimento, à ideia de harmonia e de perfeição, ao que visualmente é organizado e atraente. Essa proporção despertou o interesse de muitos estudiosos e pensadores ao longo da História, influenciando fortemente a arquitetura, a arte o design gráfico. Na Matemática, a proporção áurea está presente em inúmeras formas geométricas e, de modo especial, na extraordinária relação com sequência de Fibonacci.

Segundo Francisco (2017, p. 20), o uso da letra ϕ foi adotado somente no século XX, por sugestão do matemático americano Mark Barr, em 1899, para homenagear o escultor, pintor e arquiteto grego Phidias (V a.C.) que construiu a Paternon.

Os gregos já a conheciam antes do tempo de Euclides. Este, no Livro VI dos Elementos, conforme Saraiva (2004, p. 118), dá a seguinte definição para esta razão: *um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o maior e o menor dos segmentos é igual à razão entre o todo e o maior segmento*.

Figura 1 – Razão Áurea

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Definição de Euclides pode ser traduzida pela seguinte equação

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}},$$

ou seja,

$$\frac{x}{y} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Fazendo $\dfrac{x}{y} = \phi$, obtemos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \tag{2.3}$$

e, fazendo sucessivas substituições de ϕ por $1 + \dfrac{1}{\phi}$, nesta mesma expressão, obteremos a expansão de ϕ, por frações contínuas simples, como segue.

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}} = [1; 1, 1, 1, \cdots] = [\overline{1}].$$

De (2.3) obtemos a equação quadrática $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, cuja raiz positiva é o número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803398875\cdots$ que é uma constante irracional algébrica conhecida como número de ouro, geralmente é denotada pela letra grega ϕ. Aplicando a Definição 3, podemos obter sua expansão, por frações contínuas simples, como vemos no exemplo a seguir.

Exemplo 2. Representaremos o número de ouro, ou seja, o irracional $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, por frações contínuas simples, e veremos que sua expansão é infinita.

$$\phi = \alpha_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor + \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \text{ e} \\ \alpha_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \dfrac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha_0. \end{cases}$$

Como $\alpha_1 = \alpha_0$, o processo se repete, o que implica que $\alpha_n = \alpha_0 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $a_n = a_0 = 1$ para todo n natural. Logo a representação de ϕ, por frações contínuas simples, é um processo infinito, no qual

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}} = [1; 1, 1, 1, 1, \cdots] = [\overline{1}].$$

Exemplo 3. Aplicando o algoritmo das frações contínuas simples, obteremos os três primeiros quocientes parciais da expansão do número irracional $\sqrt[3]{3}$.

$$\alpha_0 = \sqrt[3]{3} = \left\lfloor \sqrt[3]{3} \right\rfloor + \left\{ \sqrt[3]{3} \right\} = 1 + \sqrt[3]{3} - 1 \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1)\right)}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)} = \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{2} \\
&= \left\lfloor \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{2} \right\rfloor + \left\{ \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{2} \right\} = 2 + \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1}{2} - 2 \\
&= 2 + \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ \alpha_2 = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}-3}, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{2}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}-3} = \frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{\left[\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}+1\right)-4\right]\left(\sqrt[3]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{2-4\left(\sqrt[3]{3}-1\right)} \\
&= \frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{2-4\sqrt[3]{3}+4} = \frac{2\left(\sqrt[3]{3}-1\right)}{6-4\sqrt[3]{3}} = \frac{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left(9+6\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(3-2\sqrt[3]{3}\right)\left(9+6\sqrt[3]{3}+4\sqrt[3]{3^2}\right)} \\
&= \frac{9\sqrt[3]{3}+6\sqrt[3]{3^2}+12-9-6\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3^2}}{27+12\sqrt[3]{3}+12\sqrt[3]{3^2}-18\sqrt[3]{3}-12\sqrt[3]{3^2}-24} = \frac{2\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3}{3} \\
&= \left\lfloor \frac{2\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3}{3} \right\rfloor + \left\{ \frac{2\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3}{3} \right\} \\
&= 3 + \frac{2\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3}{3} - 3 = 3 + \frac{2\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}-6}{3} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 3 \\ \alpha_3 = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}-6}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Para os três primeiros quocientes, temos a seguinte expansão para $\sqrt[3]{3}$.

$$\sqrt[3]{3} = [1; 2, 3, \cdots].$$

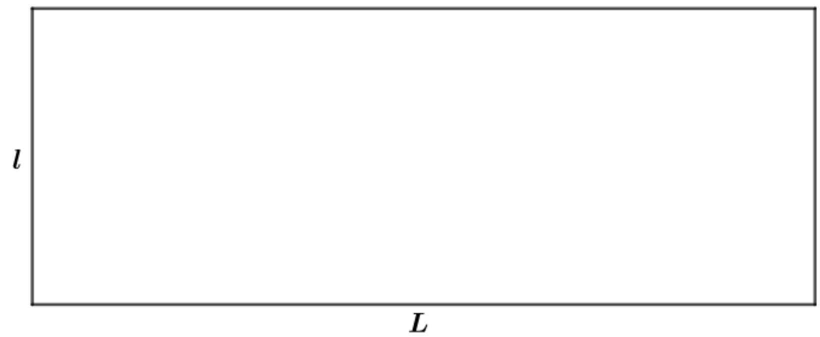
Observação 1. O algoritmo descrito na Subseção 2.1.1 mostrou-se bastante eficiente quando aplicado a números racionais e números irracionais quadráticos. Mas, o mesmo não ocorre para a expansão de irracionais algébricos não quadráticos, como evidencia o Exemplo 3. No Capítulo 5, apresentaremos um método alternativo que permitirá calcular boas aproximações para as raízes de irracionais algébricos da forma $\sqrt[n]{y^m}$, em que, $m < n$ são números naturais não nulos. Ainda neste capítulo, reuniremos algumas expansões, por frações contínuas, inclusive para os números irracionais transcendentes [2] π e e, mas não comprovaremos os métodos de obtenção dessas expansões, pois estão além do escopo deste trabalho.

[2] **Número transcendente**: é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial de coeficientes inteiros.

2.1.2 Representação geométrica de frações contínuas simples

Para maiores detalhes sobre representações geométricas de frações contínuas simples, consultar a referência (SILVA, 2016, p. 55 - 60). Seja um retângulo dimensões $L \times l$, veja Figura 2, com $L,\ l \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, $L > l$.

Figura 2 – Retângulo de dimensões $L \times l$



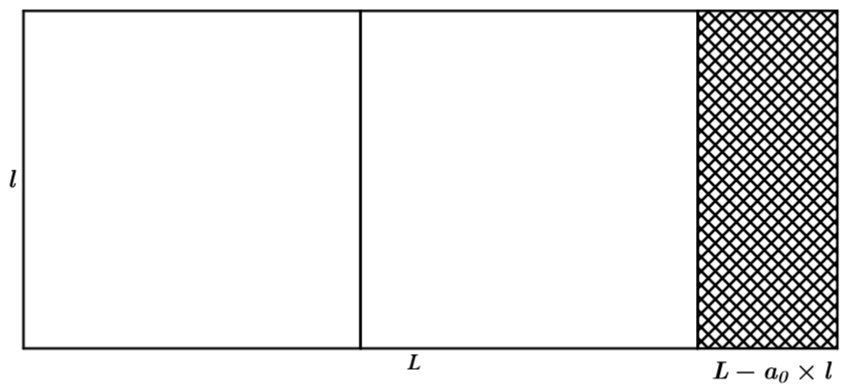
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para representar a razão $\dfrac{L}{l}$ preenchemos a área retangular de dimensões $L \times l$ com o maior número possível de quadrados de lado l e obtemos a_0 que é a quantidade desses quadrados que couberem a área retangular, ou seja, obtemos a_0 quadrados de áreas iguais a l^2. Se os a_0 quadrados preencherem completamente a região retangular $L \times l$, então $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{Q}$, caso contrário, o processo continua e teremos

$$\frac{L}{l} = \left\lfloor \frac{L}{l} \right\rfloor + \left\{ \frac{L}{l} \right\} = a_0 + \frac{L}{l} - a_0 = a_0 + \frac{L - a_0 \cdot l}{l}.$$

Segue que l e $L - a_0 \cdot l_0$ são as dimensões da região retangular não preenchida, sendo $l > L - a_0 \cdot l \geq 0$. Região retangular destacada na Figura 3.

Figura 3 – Representação geométrica de $a_0 + \left\{ \frac{L}{l} \right\}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

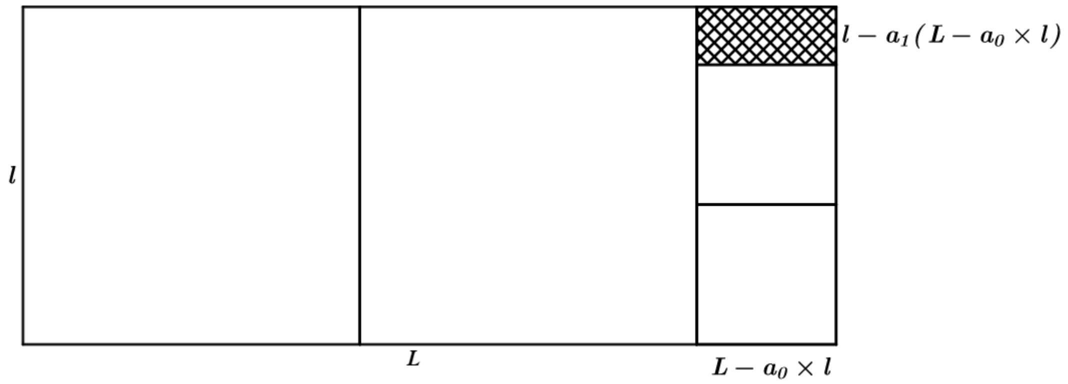
Se $L - a_0 \cdot l = 0$, então o processo de representação termina e $\dfrac{L}{l} = [a_0] \in \mathbb{Q}$.

Se $L - a_0 \cdot l \neq 0$, o processo de representação continua e, como antes, preenchemos com o número máximo de quadrados de lado $(L - a_0 \cdot l)$ que couberem no retângulo de dimensões $l \cdot (L - a_0 \cdot l)$, obtendo a_1 quadrados de áreas iguais a $(L - a_0 \cdot l)^2$. Se os a_1 quadrados preencherem completamente a região retangular, então $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{Q}$, caso contrário, teremos

$$\frac{L}{l} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{l}{L - a_0 \cdot l}} = a_0 + \cfrac{1}{\left\lfloor \cfrac{l}{L - a_0 \cdot l} \right\rfloor + \left\{ \cfrac{l}{L - a_0 \cdot l} \right\}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{l}{L - a_0 \cdot l} - a_1}$$
$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{l - a_1\,(L - a_0 \cdot l)}{L - a_0 \cdot l}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{l - a_1\,(L - a_0 \cdot l)}{L - a_0 \cdot l}}.$$

Segue, novamente, que $L - a_0 \cdot l$ e $l - a_1\,(L - a_0 \cdot l)$ são as dimensões da região retangular não preenchida, onde $L - a_0 \cdot l > l_0 - a_1\,(L - a_0 \cdot l_0) \geq 0$. Região retangular destacada na Figura 4.

Figura 4 – Representação geométrica de $a_0;\ a_1 + \left\{\frac{l}{L - a_0 \cdot l}\right\}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Se $l_0 - a_1\,(L - a_0 \cdot l_0) = 0$, então o processo de representação está concluído e temos $\dfrac{L}{l} = [a_0;\ a_1] \in \mathbb{Q}$.

Se $l_0 - a_1\,(L - a_0 \cdot l_0) \neq 0$, o processo de representação continua e na terceira iteração obteremos o valor de a_2 e

$$\frac{L}{l} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

Continuando o processo de representação geométrica obteremos uma sequência de números inteiros $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$ que será finita se $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{Q}$, ou infinita se $\dfrac{L}{l} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, em decorrência de (2.1) e (2.2). Assim,

$$\frac{L}{l} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n], \text{ se } \frac{L}{l} \in \mathbb{Q}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{L}{l} = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ \cdots\ a_n\ \cdots], \text{ se } \frac{L}{l} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exemplo 4. Por meio de interpretação geométrica obteremos a expansão do número irracional $\sqrt{6}$, por frações contínuas simples.

Primeiramente, construímos um retângulo $1 \times \sqrt{6}$. A razão entre os lados desse retângulo é dada por

$$\frac{\sqrt{6}}{1} = \sqrt{6}, \text{ sendo } \left\lfloor \sqrt{6} \right\rfloor = 2 = a_0.$$

Isto significa que cabem 2 quadrados de lados iguais a 1 no retângulo $1 \times \sqrt{6}$. Calculando $\left(\sqrt{6} - 2 \cdot 1\right) = \left(\sqrt{6} - 2\right)$, temos que a área retangular não preenchida tem dimensões $1 \times \left(\sqrt{6} - 2\right)$, sendo $1 > \sqrt{6} - 2 > 0$.

A razão entre os lados da região retangular $1 \times \left(\sqrt{6} - 2\right)$ é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{6} - 2} = \frac{1\left(\sqrt{6}+2\right)}{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(\sqrt{6}+2\right)} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}, \text{ sendo } \left\lfloor \frac{\sqrt{6}+2}{2} \right\rfloor = 2 = a_1.$$

Assim, cabem 2 quadrados de lados iguais a $\sqrt{6} - 2$ no retângulo $1 \times \left(\sqrt{6} - 2\right)$. Calculando $1 - 2\left(\sqrt{6} - 2\right) = 5 - 2\sqrt{6}$, temos que o retângulo não preenchido tem dimensões $\left(\sqrt{6} - 2\right) \times \left(5 - 2\sqrt{6}\right)$, sendo $\sqrt{6} - 2 > 5 - 2\sqrt{6} > 0$.

Novamente, a razão entre os lados da região retangular $\left(\sqrt{6} - 2\right) \times \left(5 - 2\sqrt{6}\right)$ é dada por

$$\frac{\sqrt{6} - 2}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{\left(\sqrt{6}-2\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)}{\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(5+2\sqrt{6}\right)} = \sqrt{6}+2, \text{ sendo } \left\lfloor \sqrt{6}+2 \right\rfloor = 4 = a_2.$$

Logo, cabem 4 quadrados de lados iguais a $\left(5 - 2\sqrt{6}\right)$ no retângulo $\left(\sqrt{6} - 2\right) \times \left(5 - 2\sqrt{6}\right)$ e calculando $\left(\sqrt{6} - 2\right) - 4\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 9\sqrt{6} - 22$, temos que resta um retângulo de dimensões $\left(5 - 2\sqrt{6}\right) \times \left(9\sqrt{6} - 22\right)$ a ser preenchido, sendo $5 - 2\sqrt{6} > 9\sqrt{6} - 22 > 0$.

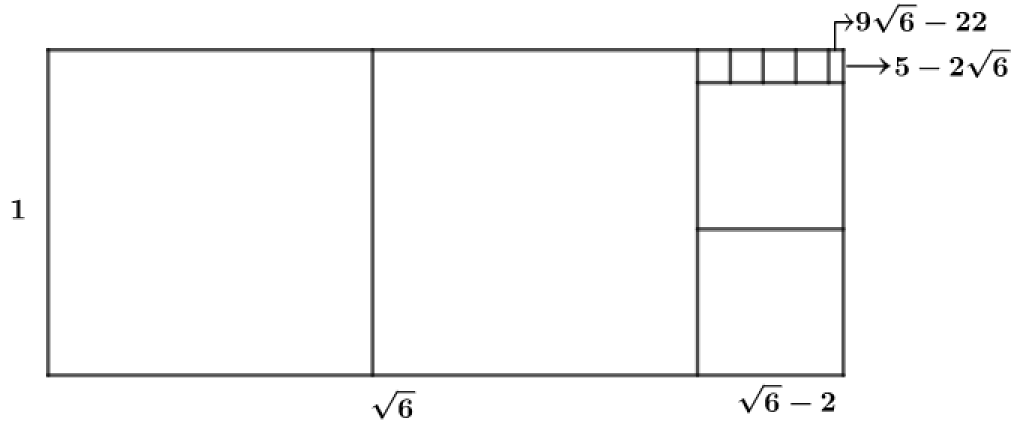
Calculando mais uma vez a razão entre os lados da área retangular não preenchida, temos

$$\frac{5 - 2\sqrt{6}}{9\sqrt{6} - 22} = \frac{\left(5-2\sqrt{6}\right)\left(9\sqrt{6}+22\right)}{\left(9\sqrt{6}-22\right)\left(9\sqrt{6}+22\right)} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}, \text{ sendo } \left\lfloor \frac{\sqrt{6}+2}{2} \right\rfloor = 2 = a_3 = a_1.$$

Este resultado mostra que as medidas dos retângulos $\left(5 - 2\sqrt{6}\right) \times \left(9\sqrt{6} - 22\right)$ e $1 \times \left(\sqrt{6} - 2\right)$ são proporcionais, o que implica $a_n = a_{n+2}, \forall n > 0$, caracterizando a periodicidade e a infinitude do processo de representação de $\sqrt{6}$, por frações contínuas simples.

Na Figura 5 visualizamos as primeiras etapas do processo de representação geométrica do número irracional $\sqrt{6}$.

Figura 5 – Representação geométrica do número irracional $\sqrt{6}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\text{Logo, } \sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}} = [2; 2, 4, 2, 4, \cdots] = [2; \overline{2, 4}].$$

2.1.3 Convergentes e suas propriedades fundamentais

Dada uma representação, por frações contínuas simples, do truncamento após um determinado quociente parcial resultam os convergentes. Das relações entre eles derivam resultados fundamentais à teoria elementar das frações contínuas simples. Alguns desses resultados apresentaremos nesta subseção.

Definição 4. Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$. Sejam $p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^*$, primos entre si, tais que

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n], \text{ para todo } n \geq 0.$$

A fração $\frac{p_n}{q_n} = C_n$ é denominada **n-ésima reduzida ou convergente** da fração contínua do número real x.

Proposição 1. Seja a sequência (finita ou infinita) $a_0, a_1, a_2, \cdots \in \mathbb{R}$ tal que $a_n > 0$, para todo $n \geq 1$, definimos as sequências (p_n) e (q_n) pelas recorrências

$$\begin{cases} p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \end{cases}, \text{ onde } \begin{cases} p_0 = a_0, & p_1 = a_1a_0 + 1, \\ q_0 = 1, & q_1 = a_1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Então

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n], \text{ para todo } n \geq 0.$$

Essas recorrências são conhecidas por **fórmulas de Wallis**, em homenagem ao matemático *John Wallis (1616 - 1703)*, pelo seu pioneirismo no estudo formal das frações contínuas, segundo Beltrão (2016, p. 23).

Demonstração. Faremos a prova por indução em n.

- Para $n = 0$, temos: $[a_0] = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$.
- Para $n = 1$, temos: $[a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_1a_0 + 1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$.
- Para $n = 2$, temos: $[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2a_1+1}{a_2}}$

$$= a_0 + \frac{a_2}{a_2a_1+1} = \frac{a_2a_1a_0 + a_0 + a_2}{a_2a_1+1} = \frac{a_2\left(a_1a_0+1\right)+a_0}{a_2a_1+1} = \frac{p_2}{q_2}.$$

A proposição é válida para $n = 0,\ 1,\ 2$. Suponhamos sua validez para n, ou seja,

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = \frac{a_np_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Por definição e usando a hipótese de indução

$$[a_0; a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}] = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\left(a_n + \cfrac{1}{a_{n+1}}\right)}}}} = \frac{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}}$$

$$= \frac{a_{n+1}a_np_{n-1} + a_{n+1}p_{n-2} + p_{n-1}}{a_{n+1}a_nq_{n-1} + a_{n+1}q_{n-2} + q_{n-1}} = \frac{a_{n+1}\overbrace{\left(a_np_{n-1} + p_{n-2}\right)}^{p_n} + p_{n-1}}{a_{n+1}\underbrace{\left(a_nq_{n-1} + q_{n-2}\right)}_{q_n} + q_{n-1}}$$

$$= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = C_{n+1}.$$

$\square$

Exemplo 5. Escreveremos a sequência de convergentes do número racional $\dfrac{23}{9} = [2; 1, 1, 4]$.

Dada uma expansão, por frações contínuas simples, aplicando (2.4), podemos determinar os valores dos p_n's e q_n's, como mostra a Tabela 1.

Tabela 1 – Quocientes parciais e convergentes do racional $\frac{23}{9}$

n	-2	-1	0	1	2	3
a_n	/	/	2	1	1	4
p_n	0	1	$2\cdot 1+0=2$	$1\cdot 2+1=3$	$1\cdot 3+2=5$	$4\cdot 5+3=23$
q_n	1	0	$2\cdot 0+1=1$	$1\cdot 1+0=1$	$1\cdot 1+1=2$	$4\cdot 2+1=9$
$C_n=\dfrac{p_n}{q_n}$	/	/	$\dfrac{2}{1}$	$\dfrac{3}{1}$	$\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{23}{9}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue que $C_0=\dfrac{2}{1}$, $\quad C_1=\dfrac{3}{1}$, $\quad C_2=\dfrac{5}{2}$ e $C_3=\dfrac{23}{5}$ é a sequência dos convergentes.

Proposição 2. As sequências (p_n) e (q_n) definidas por (2.4) satisfazem a igualdade a seguir, que é conhecida como *identidade fundamental*

$$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^n,\ n\geq 0. \tag{2.5}$$

Demonstração. Faremos a prova por indução em n. Consideremos as condições iniciais:

$$\begin{cases} p_0=a_0, & p_1=a_1a_0+1 \\ q_0=1, & q_1=a_1. \end{cases}$$

Para $n=0$, temos

$$p_1q_0-p_0q_1=(a_1\cdot a_0+1)\cdot 1-a_0\cdot a_1=1=(-1)^0,$$

o que mostra que a igualdade é verdadeira para $n=0$.

Suponhamos que a igualdade seja válida para algum $n\in\mathbb{N}$, provemos para $n+1$. De fato,

$$\begin{aligned} & p_{n+2}q_{n+1}-p_{n+1}q_{n+2} \\ & =(a_{n+1}p_{n+1}+p_n)q_{n+1}-p_{n+1}(a_{n+1}q_{n+1}+q_n) \\ & =p_nq_{n+1}-p_{n+1}q_n \\ & =-(-1)^n=(-1)\cdot(-1)^n=(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Logo, a igualdade é válida para todo $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 6. Consideremos as informações contidas na Tabela 1 e mostremos que os numeradores e denominadores de dois convergentes consecutivos satisfazem a identidade fundamental (2.5).

- Para $n = 0$: $p_1q_0 - p_0q_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 = (-1)^0$;
- Para $n = 1$: $p_2q_1 - p_1q_2 = 5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -1 = (-1)^1$;
- Para $n = 2$: $p_3q_2 - p_2q_3 = 23 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = 1 = (-1)^2$;
- Para $n = 3$: $p_4q_3 - p_3q_4 = 5 \cdot 9 - 23 \cdot 2 = -1 = (-1)^3$.

Os valores numéricos comprovam a validez da identidade fundamental.

Proposição 3. Se $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, para $n \geq 0$, em que p_n, q_n são inteiros não nulos, então $mdc(p_n, q_n) = 1$.

Demonstração. Suponhamos que $p_n = k\widetilde{p}_n$ e $q_n = k\widetilde{q}_n$, $0 < k \in \mathbb{Z}$. Então

$$p_{n+1}k\widetilde{q}_n - k\widetilde{p}_nq_{n+1} = (-1)^n$$

e, dividindo ambos os membros por k

$$p_{n+1}\widetilde{q}_n - \widetilde{p}_nq_{n+1} = \frac{(-1)^n}{k}.$$

A igualdade é verdadeira para $k = \pm 1$ e, portanto, p_n e q_n são coprimos. □

Observação 2. Como consequência, os p_n's e q_n's, obtidos por (2.4) são coprimos, ou seja, os racionais $\frac{p_n}{q_n}$ são frações irredutíveis, em termos de frações contínuas, são **reduzidas ou convergentes**.

Corolário 1. Seja $x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n, \alpha_{n+1}]$, em que $\alpha_{n+1} = [a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \cdots]$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$x = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} \qquad \text{e} \qquad \alpha_{n+1} = \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_nx - p_n}.$$

Demonstração. Pela Proposição 1, temos que

$$x = \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Isolando α_{n+1} na expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} x\alpha_{n+1}q_n + xq_{n-1} &= \alpha_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ \Leftrightarrow \alpha_{n+1}(xq_n - p_n) &= p_{n-1} - xq_{n-1} \\ \Leftrightarrow \alpha_{n+1} &= \frac{p_{n-1} - q_{n-1}x}{q_nx - p_n}. \end{aligned}$$

□

Proposição 4. Se x for um número irracional qualquer e (C_n) a sequência dos convergentes associados à fração contínua de x, então

$$C_{n+1} - C_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}, \ \forall n \geq 0. \tag{2.6}$$

Demonstração. Este resultado decorre de (2.5).

$$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n,$$

dividindo todos os termos por $q_n q_{n+1}$

$$\frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}.$$

□

Este resultado é **positivo** se n for um número par e **negativo** se n for um número ímpar, o que implica que, para dois convergentes consecutivos, o de ordem ímpar é sempre maior que o de ordem par.

Exemplo 7. Comparemos três convergentes consecutivos de ϕ.

Tabela 2 – Primeiros quocientes e convergentes de ϕ

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	/	/	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
p_n	0	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$
q_n	1	0	1	1	2	3	5	8	$\cdots$
$C_n = \frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando os convergentes C_3, C_4 e C_5 respectivamente, temos

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{5}{3} > \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{8}{5} = \frac{p_4}{q_4} \qquad \text{e} \qquad \frac{p_4}{q_4} = \frac{8}{5} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{13}{8} = \frac{p_5}{q_5}.$$

Proposição 5. A expansão, por frações contínuas simples, de um número irracional é única.

Demonstração. A demonstração tem como referências das informações contidas em (BADAWI, 2016, p. 64 - 65).

Seja x um número irracional. Suponhamos que ele tenha duas expansões, por frações contínuas simples, ou seja

$$x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] = [b_0; b_1, b_2, \cdots, b_n].$$

Se $a_0 = \lfloor x \rfloor$ e $b_0 = \lfloor x \rfloor$, então $a_0 = b_0$, pois $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro que satisfaz $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Aplicando a Proposição 1, para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{a_1} \\ x - a_0 &= \frac{1}{a_1} \\ a_1 &= \frac{1}{x - a_0} \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} x &= b_0 + \frac{1}{b_1} \\ x - b_0 &= \frac{1}{b_1} \\ b_1 &= \frac{1}{x - b_0}. \end{aligned}$$

Isso implica $a_1 = b_1$

Suponhamos que $a_k = b_k$ para todo $k < n$. Devemos provar que $a_n = b_n$.

Usando os quocientes completos podemos escrever

$$x = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n] = [b_0; b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}, \beta_n].$$

Segue do Corolário 1, que

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{\beta_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\beta_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Assim,

$$(\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2})(\beta_n q_{n-1} + q_{n-2}) = (\beta_n p_{n-1} + p_{n-2})(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}).$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \alpha_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) &= \beta_n (p_{n-1} q_{n-2} - p_{n-2} q_{n-1}) \\ \alpha_n (-1)^{n-2} &= \beta_n (-1)^{n-2} \\ \alpha_n &= \beta_n \end{aligned}$$

Como $\alpha_n = \beta_n$ e $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor = \lfloor \beta_n \rfloor = b_n$, concluímos que $a_n = b_n$

Portanto, provamos por indução que a fração contínua simples de um número irracional é única. □

Corolário 2. *(Tamanho do erro)* A diferença entre um número irracional x e seu n-ésimo convergente é dado por

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}) q_n}.$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
x-\frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha_{n+1}p_nq_n+p_{n-1}q_n-\alpha_{n+1}p_nq_n-p_nq_{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})\,q_n} \\
&= \frac{-(p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n)}{(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})\,q_n} = \frac{-(-1)^{n-1}}{(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})\,q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1})\,q_n}.
\end{aligned}
$$

□

Proposição 6. *(Monotonicidade dos Convergentes)*. Consideremos as sequências (p_n) e (q_n), definidas na Proposição 1. Para todo $n \geq 0$, temos:

(i) os convergentes de ordem par crescem e os de ordem ímpar decrescem, à medida que suas ordens aumentam.

(ii) os convergentes de ordem ímpar são sempre maiores que os de ordem par.

Isto é,

$$
\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} \leq x \leq \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} \leq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.
$$

Demonstração. Para todo $n \geq 0$, tomando dois convergentes consecutivos de mesma ordem e aplicando (2.4), temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}-\frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1}+p_n}{a_{n+2}q_{n+1}+q_n}-\frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{a_{n+2}p_{n+1}q_n+p_nq_n-a_{n+2}q_{n+1}p_n-p_nq_n}{q_n\,(a_{n+2}q_{n+1}+q_n)} \\
&= \frac{a_{n+2}\,(p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1})}{q_n\,(a_{n+2}q_{n+1}+q_n)} \\
&= \frac{(-1)^n a_{n+2}}{q_{n+2}q_n}.
\end{aligned}
$$

Este resultado é **positivo** se n for um número par e **negativo** se n for um número ímpar, o que implica que a sequência de convergentes de ordem par (C_{2n}) é crescente e a sequência de convergentes de ordem ímpar (C_{2n+1}) é decrescente. Isto prova o item (i) da Proposição.

A prova do item (ii) segue do Corolário 2. De fato, temos que:

(a) Se n for par

$$
x-\frac{p_n}{q_n} > 0 \Rightarrow x > \frac{p_n}{q_n};
$$

(b) Se n for ímpar

$$
x-\frac{p_n}{q_n} < 0 \Rightarrow x < \frac{p_n}{q_n}.
$$

Dos itens (a) e (b) concluímos que x é maior que qualquer convergente de ordem par e menor que qualquer convergente de ordem ímpar. Isto prova o item (ii) e concluímos a demonstração da Proposição 6. $\square$

Este resultado mostra que a sequência dos convergentes de índices pares (C_{2n}) é crescente e limitada superiormente por x, ao passo que a sequência dos convergentes de índices ímpares (C_{2n+1}) é decrescente e limitada inferiormente por x (veja Figura 6), isto é,

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2n} < \cdots x \cdots < C_{2n+1} < \cdots < C_5 < C_3 < C_1.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, pois a sequência $(q_n)_{n>1}$ é estritamente crescente, segue de (2.5) que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n q_{n+1}} = 0.$$

Além disso, em virtude da Proposição 6 e do Corolário 2

$$\lim_{n\to\infty}\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})\,q_n} = 0.$$

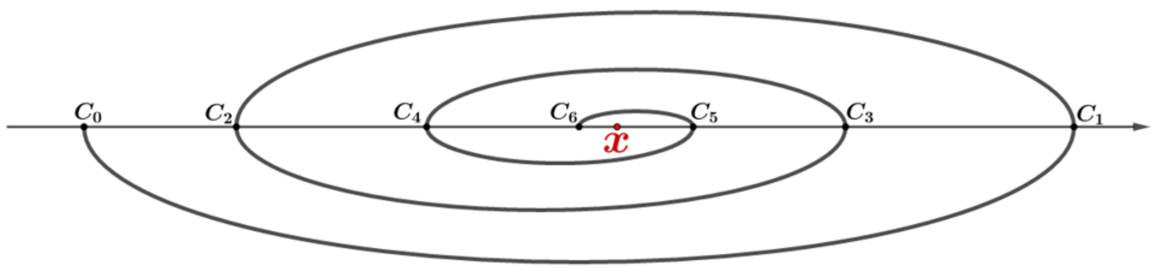
Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n} = x = [a_0, a_1, a_2, \cdots]. \tag{2.7}$$

Este limite significa que os termos da sequência[3] (C_n) se aproximam de x à medida que n se torna grande.

Observação 3. O limite (2.7) garante a convergência no caso de frações contínuas simples com infinitos termos $x = [a_0, a_1, a_2, \cdots]$.

Figura 6 – Distribuição dos convergentes em torno do número real x



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os convergentes são aproximações para x, ora por falta, ora por excesso e quanto maior for a ordem de um convergente, mais próximo estará o seu valor do valor de x. Podemos

[3] **Definição**: Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n\geq 1}$ converge para um número real L, ou tem limite o número real L, se dado $\varepsilon > 0$, pode-se encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > n_0$ implica que $|x_n - L| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou $a_n \to L$ (NETO; GUIMARÃES, 2011, p. 54).

visualizar essa convergência quando posicionamos os convergentes na reta numérica, como vemos na Figura 6.

Vimos até agora que as frações contínuas simples são um meio eficiente para obtermos aproximações racionais para números irracionais. Mas, quão boas são essas aproximações? Na próxima subseção comprovaremos que as melhores dessas aproximações racionais para números irracionais vêm das frações contínuas simples.

2.1.4 Resultados de aproximações

Nesta subseção mostraremos alguns resultados e teoremas importantes ao estudo dos métodos de aproximação de números reais por números racionais, tendo como base as informações contidas nas referências (SOUZA, 2018, p. 16 - 17) e (MOREIRA; MARTÍNEZ; SALDANHA, 2012, p. 151 - 176).

A condição necessária para que uma aproximação, por números racionais, seja considerada boa é que o erro absoluto $\left|x-\dfrac{p}{q}\right|$ seja o menor possível. Além disso, é apropriado que os inteiros p e q não sejam grandes. Desse modo, devemos concentrar nossos esforços para minimizar o erro $\left|x-\dfrac{p}{q}\right|$ e o valor do denominador q.

Definição 5. Um número racional $\dfrac{p}{q}$, $q>0$, é a melhor aproximação para um número real x, se a distância de $\dfrac{p}{q}$ até x, na reta real, é menor que a distância de x a qualquer outro racional que tenha denominador menor ou igual a q.

Mas, é possível obter boas aproximações de modo que o denominador q não seja tão grande? Os resultados que apresentaremos a seguir responderão a este questionamento e confirmarão que as melhores aproximações para um número irracional vêm justamente das frações contínuas.

Seja $x\in\mathbb{R}$, $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$, com $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ e $0\leq\{x\}<1$, ou seja, $\{x\}=0,a_1a_2\cdots a_n\cdots$, com $a_i\in\{1,2,\cdots,9\}$. Isso significa que se $r_n=a_n+10a_{n-1}+10^2a_{n-2}+\cdots+10^{n-1}a_1$, então $\dfrac{r_n}{10^n}\leq\{x\}<\dfrac{r_n+1}{10^n}$ e, portanto, $\lfloor x\rfloor+\dfrac{r_n}{10^n}$ é uma boa aproximação de x no sentido de que o erro absoluto $\left|x-\left(\lfloor x\rfloor+\dfrac{r_n}{10^n}\right)\right|<\dfrac{1}{10^n}$ e $\dfrac{1}{10^n}$ será um número pequeno se n for grande.

Exemplo 8. Vamos obter as duas primeiras aproximações decimais para $\sqrt{6}$.

$$\left(\frac{2}{10^0}\right)^2<6<\left(\frac{3}{10^0}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{10^0}<\sqrt{6}<\frac{3}{10^0}$$
$$\left(\frac{24}{10^1}\right)^2<6<\left(\frac{25}{10^1}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{24}{10^1}<\sqrt{6}<\frac{25}{10^1}$$

A representação decimal de um número real fornece um sequência de aproximações por racionais cujos denominadores q são potências de 10. Pela facilidade na realização de cálculos, tornou-se a forma mais popular de representação de números reais, embora não forneça as melhores aproximações.

Proposição 7. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{N}^*$, existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $\dfrac{p}{q} \leq x < \dfrac{p+1}{q}$.

Demonstração. Para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $p = \lfloor qx \rfloor$, tal que

$$p \leq qx < p+1.$$

Dividindo todos os termos por q, obtemos

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

□

O número x pertence ao intervalo de extremos $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{p+1}{q}$, cujo comprimento é $\left|\dfrac{p+1}{q} - \dfrac{p}{q}\right| = \dfrac{1}{q}$. Logo, as aproximações de x por racionais têm erro inferior a $\dfrac{1}{q}$, ou seja,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q} \qquad \text{e} \qquad \left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{q}. \tag{2.8}$$

Adicionando os erros, temos

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|x - \frac{p+1}{q}\right| = \left|x - \frac{p}{q}\right| + \left|\frac{p+1}{q} - x\right| = \left|x - \frac{p}{q} + \frac{p+1}{q} - x\right| = \frac{1}{q}.$$

Esse resultado nos mostra que a soma dos erros absolutos por falta e por excesso é de, no máximo, $\dfrac{1}{q}$ e nos leva a inferir que pelo menos uma entre duas aproximações decimais consecutivas tem erro absoluto menor que a metade do inverso do denominador q, ou seja,

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q} \qquad \text{ou} \qquad \left|x - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}. \tag{2.9}$$

Exemplo 9. Sejam $\dfrac{24}{10}$ e $\dfrac{25}{10}$ duas aproximações decimais para $\sqrt{6}$. Verifiquemos, numericamente, a validade da Proposição 7.

$$\left|\sqrt{6} - \frac{24}{10}\right| < \frac{1}{20} < \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad \frac{1}{20} < \left|\sqrt{6} - \frac{25}{10}\right| < \frac{1}{10}.$$

Ambas as aproximações satisfazem (2.8) e uma delas, $\dfrac{24}{10}$, satisfaz (2.9). Logo, o racional $\dfrac{24}{10}$ é uma aproximação melhor para o irracional $\sqrt{6}$, se comparado com o racional $\dfrac{25}{10}$.

Para os próximos resultados consideraremos a Definição 4 e as condições apresentadas na Proposição 1.

Proposição 8. Se x é um número real qualquer, a sequência de convergentes da fração contínua de x é tal que

$$x - C_n = x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}, \text{ onde } \beta_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n}.$$

Em particular,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

Demonstração. Segue do Corolário 2, que

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})\,q_n} = \frac{(-1)^n}{\left(\alpha_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}\right) q_n^2}.$$

Substituindo $\dfrac{q_{n-1}}{q_n}$ por β_{n+1}, teremos

$$x - C_n = x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})\,q_n^2}.$$

Em particular,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2}. \tag{2.10}$$

Temos que $\begin{cases} \alpha_{n+1} > \lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1} \\ 0 < \dfrac{q_{n-1}}{q_n} < 1, \text{ ou seja, } 0 < \beta_{n+1} < 1. \end{cases}$

Assim,

$$a_{n+1} < \alpha_{n+1} + \beta_{n+1} < a_{n+1} + 2.$$

Logo,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \frac{1}{(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})q_n^2} = \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{\alpha_{n+1}q_n^2} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

□

A seguir demonstraremos a expansão, por frações contínuas simples, de β_{n+1}.

Corolário 3. Se o número real $x = [a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n]$, com $\begin{cases} p_0 = a_0, & p_1 = a_1 a_0 + 1, \\ q_0 = 1, & q_1 = a_1, \end{cases}$

com $n > 0$, então $\beta_{n+1} = \dfrac{q_{n-1}}{q_n} = [0; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1]$.

Demonstração. Faremos a prova por indução em n.

Como $q_{n-1} < q_n$, $\left\lfloor \dfrac{q_{n-1}}{q_n} \right\rfloor = 0$

- Para $n = 1$: $\beta_2 = \dfrac{q_0}{q_1} = \dfrac{1}{a_1} = 0 + \dfrac{1}{a_1} = [0; a_1]$,

- Para $n = 2$: $\beta_3 = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{a_1}{a_2a_1+1} = 0 + \dfrac{1}{\dfrac{a_2a_1+1}{a_1}} = 0 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_1}} = [0; a_2, a_1]$,

  O corolário é válido para $n = 1$ e $n = 2$, suponhamos sua validade para algum $n \in \mathbb{N}$.

$$\beta_{n+2} = \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{q_n}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{1}{a_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}} = \frac{1}{a_{n+1} + \beta_{n+1}},$$

  substituindo β_{n+1} por $[0; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1]$, temos

$$\beta_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1} + [0; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]} = \frac{1}{[a_{n+1}; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]} = [0; a_{n+1}, a_n, \cdots, a_1].$$

  Logo, o corolário é válido para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Corolário 4. Se o número real $x = [a_0, a_1, a_2, \cdots a_{n-1}, a_n]$, com $\begin{cases} p_0 = a_0, & p_1 = a_1a_0 + 1 \\ q_0 = 1, & q_1 = a_1, \end{cases}$ com $n > 0$, então $\dfrac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1]$.

Demonstração. Decorre do Corolário 3 que

$$\beta_{n+2} = \frac{q_n}{q_{n+1}} = \frac{1}{[a_{n+1}; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1]}.$$

Invertendo a fração, temos para $n+1$

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = [a_{n+1}; a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1].$$

E, para n

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2} \cdots, a_1].$$

□

Exemplo 10. Seja $x = \sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$, cujos quocientes e convergentes estão expressos na Tabela 3. Apliquemos a Proposição 8 ao convergente C_3.

Tabela 3 – Quocientes parciais e convergentes de $\sqrt{6}$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
a_n	/	/	2	2	4	2	4	2	$\cdots$
p_n	0	1	2	5	22	49	218	485	$\cdots$
q_n	1	0	1	2	9	20	89	198	$\cdots$
$C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{218}{89}$	$\frac{485}{198}$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue que

$$\frac{1}{(4+2)\cdot 20^2} < \left|\sqrt{6} - \frac{49}{20}\right| < \frac{1}{4\cdot 20^2}$$
$$\frac{1}{2400} < \left|\sqrt{6} - \frac{49}{20}\right| < \frac{1}{1600}.$$

O resultado a seguir mostra que o erro absoluto decorrente da substituição de x pelo convergente $\frac{p_n}{q_n}$ é menor que $\frac{1}{q_n^2}$ e, pelo menos uma de duas aproximações racionais consecutivas, tem erro absoluto menor que $\frac{1}{2q_n^2}$ ou menor que $\frac{1}{2q_{n+1}^2}$. Este resultado é muito melhor que o mostrado em (2.9).

Teorema 2. *(Teorema de Dirichlet)* Todo convergente $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ de x satisfaz a desigualdade

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Além disso,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \qquad \text{ou} \qquad \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| < \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Demonstração. ***(Demonstração via frações contínuas)*** Para esta primeira parte da demonstração, temos que x pertence ao intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, cujo comprimento é

$$\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Isso implica que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \le \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Nesta segunda parte da demonstração suporemos, por absurdo, que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \ge \frac{1}{2q_n^2} \qquad \text{e} \qquad \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \ge \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

Segue que

(i) Se n for par, $x \in \left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$, então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x\right| \ge \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2}.$$

(ii) Se n for ímpar, $x \in \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \frac{p_n}{q_n}\right)$, então

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - x\right| \ge \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q_n q_{n+1}} &\geq \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n+1}^2} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{q_n q_{n+1}} &\geq \frac{q_{n+1}^2 + q_n^2}{2q_n^2 q_{n+1}^2} \\
\Leftrightarrow 2q_n q_{n+1} &\geq q_{n+1}^2 + q_n^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \geq q_{n+1}^2 - 2q_n q_{n+1} + q_n^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \geq (q_{n+1} - q_n)^2 \\
&\Leftrightarrow 0 \geq q_{n+1} - q_n.
\end{aligned}$$

Isso implica que $q_n = q_{n+1}$, o que é um absurdo, pois $q_n < q_{n+1}$. □

Logo, todas as aproximações racionais que vêm das frações contínuas simples têm erro absoluto menor que o inverso do denominador do convergente ao quadrado. Além disso, uma entre duas aproximações consecutivas tem erro absoluto menor que a metade do inverso do denominador do convergente ao quadrado.

Exemplo 11. Consideremos as informações da Tabela 3, tomemos dois de seus convergentes consecutivos e comprovemos a validade do Teorema de Dirichlet, Teorema 2.

- Para $C_2 = \dfrac{22}{9}$, temos $\left|\sqrt{6} - \dfrac{22}{9}\right| < \dfrac{1}{2 \cdot 9^2} < \dfrac{1}{9^2}$;
- Para $C_3 = \dfrac{49}{20}$, temos $\left|\sqrt{6} - \dfrac{49}{20}\right| < \dfrac{1}{2 \cdot 20^2} < \dfrac{1}{20^2}$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9 \cdot 20} &\leq \frac{1}{2 \cdot 9^2} + \frac{1}{2 \cdot 20^2} \\
\frac{1}{180} &\leq \frac{1}{162} + \frac{1}{800} \\
\frac{1}{180} &\leq \frac{962}{129600} \cong \frac{1}{135}.
\end{aligned}$$

Os valores comprovam que as aproximações racionais que vêm das frações contínuas satisfazem as condições do Teorema de Dirichlet.

Observação 4. O Teorema de Dirichlet marca o início do ramo da Matemática denominado **aproximações diofantinas**. Aproximações diofantinas é uma área da Matemática que conecta questões ligadas à Teoria dos Números com questões de aproximações racionais de números irracionais.

2.1.5 Boas aproximações são convergentes

Nesta subseção apresentaremos dois teoremas que evidenciam que boas aproximações racionais para um irracional x pertencem à sequência de convergentes associada à fração contínua de x.

Por definição, o erro reduzido da aproximação de x por $\frac{p}{q}$, denotado por $|qx-p|$ é a razão entre $\left|x-\frac{p}{q}\right|$ e o erro máximo da aproximação por falta com denominador q, que é igual a $\frac{1}{q}$.

Teorema 3. Para todo $p,\ q \in \mathbb{Z}$, com $0<q<q_{n+1}$, temos $|q_nx-p_n| \leq |qx-p|$.

Além disso, se $0<q\leq q_n$ a desigualdade é estrita.

Demonstração. Segue da Proposição 3 que o $mdc\,(p_n,q_n)=1$. Se tivermos $\frac{p}{q}=\frac{p_n}{q_n}$, então $p=kp_n$ e $q=kq_n$ para algum inteiro $k\neq 0$ e, neste caso, temos que

$$|q_nx-p_n| = \left|\frac{qx}{k}-\frac{p}{k}\right| = \frac{1}{k}|qx-p| \leq |qx-p|.$$

Isto que implica diretamente a desigualdade para $k\geq 1$.

Suponhamos que $\frac{p}{q}\neq\frac{p_n}{q_n}$, de modo que

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_nq_{n+1}}, \text{ visto que } q<q_{n+1}.$$

Assim sendo, $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ e, portanto,

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|,\left|\frac{p}{q}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}},$$

o que implica

$$|qx-p| \geq \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_nx-p_n|.$$

e, por hipótese, $q\leqslant q_{n+1}$, a igualdade só pode ocorrer se $q=q_{n+1}$. Logo, $\frac{p}{q}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1}\geq 2$, e $q_{n+1}>2q_n$, pois numa fração contínua finita, como no algoritmo de Euclides, o último quociente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se $q<q_n$, a desigualdade é estrita, pois $q_n<q_{n+1}$ e teremos

$$\left|x-\frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n}-\frac{1}{q_nq_{n+1}} = \frac{q_{n+1}-q}{qq_nq_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}},$$

o que implica

$$|qx-p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_nx-p_n|.$$

$\square$

Corolário 5. Para todo $q < q_n$, $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$.

Demonstração. Seja $\frac{p_n}{q_n}$ um convergente da expansão de x, por frações contínuas simples e, seja $\frac{p}{q}$ um número racional, tal que $q < q_n$.

Segue do Teorema 3 que $|qx - p| > |q_n x - p_n|$. Assim,

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{|xq_n - p_n|}{q_n} < \frac{|xq - p|}{q_n} < \frac{|xq - p|}{q} = \left|x - \frac{p}{q}\right|.$$

Logo, $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p}{q}\right|$. □

Corolário 6. Se $|qx - p| < |q'x - p'|$, para todo p' e $q' \leq q$, tais que $\frac{p}{q} \neq \frac{p'}{q'}$, então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de x.

Demonstração. Tomaremos n de modo que $q_n \leq q < q_{n+1}$.

O Teorema 3 nos diz que $|q_n x - p_n| \leq |qx - p|$. Assim, a igualdade $|q_n x - p_n| = |qx - p|$ implica que $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. □

Teorema 4. Se $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}$, então $\frac{p}{q}$ é um convergente da fração contínua de x.

Demonstração. Seja n tal que $q_n \leq q < q_{n+1}$. Suponhamos que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$.

Seque do Teorema 3 que $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$ e desse modo $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$.

São duas as possibilidades:

(i) Se $q \geq \frac{q_{n+1}}{2}$, então $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{qq_{n+1}} \geq \frac{1}{2q^2}$. Isso é um absurdo, pois contraria a hipótese inicial de que $q < q_{n+1}$;

(ii) Se $q < \frac{q_{n+1}}{2}$, então

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p}{q}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_n q_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_n q_{n+1}} > \frac{1}{2qq_n} \geq \frac{1}{2q^2},$$

o que também é um absurdo.

□

Logo, se uma aproximação do irracional x por um racional $\frac{p}{q}$ tem erro absoluto menor que o inverso dobro do quadrado do denominador q, essa aproximação de x pertence, necessariamente, à sequência de convergentes da fração contínua de x.

Exemplo 12. Novamente, consideremos $\frac{p_3}{q_3} = \frac{49}{20}$ e $\frac{p_4}{q_4} = \frac{218}{89}$ da sequência de convergentes de $\sqrt{6}$ e a aproximação $\frac{p}{q} = [2; 2, 4, 2, 3] = \frac{169}{69}$ não pertencente à sequência de convergentes e verifiquemos que as aproximações pertencentes à sequência de convergentes satisfazem as condições do Teorema 4.

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{2q^2}$$

- Para $\frac{p}{q} = \frac{169}{69}$: $\left| \sqrt{6} - \frac{169}{69} \right| > \frac{1}{2 \cdot 69^2}$ (Não satisfaz o teorema).
- Para $\frac{p_3}{q_3} = \frac{49}{20}$: $\left| \sqrt{6} - \frac{49}{20} \right| < \frac{1}{2 \cdot 20^2}$ (Satisfaz o teorema).
- Para $\frac{p_4}{q_4} = \frac{218}{89}$: $\left| \sqrt{6} - \frac{218}{89} \right| < \frac{1}{2 \cdot 89^2}$ (Satisfaz o teorema).

O resultados numéricos comprovam que as aproximações de um número irracional x vindas da sequência de seus convergentes satisfazem o teorema.

Concluímos através dos resultados, teoremas e proposições apresentados, nessa subseção, que se o racional $\frac{p}{q}$ é uma excelente aproximação do irracional x, então $\frac{p}{q}$ pertence à sequência dos convergentes da fração contínua de x.

CAPÍTULO

3

FRAÇÕES CONTÍNUAS DE NÚMEROS RACIONAIS

Neste capítulo estudaremos a expansão, por frações contínuas simples, de números racionais, mostrando a íntima ligação destas com o algoritmo de Euclides e representando-as geometricamente. Definiremos frações contínuas simples simétricas e mostraremos como a sequência de aproximações associada à fração contínua simples, de um número racional, se relaciona com uma solução particular de equações diofantinas lineares com duas incógnitas. Tais resultados baseiam-se em informações contidas nas referências (OLDS, 1963, p. 31 - 45) e (BONFIM, 2014, p. 18 - 32).

3.1 Definições e propriedades básicas

Teorema 5. Se a representação, por frações contínuas simples, de um número real x for finita, então $x \in \mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x \in \mathbb{Q}$, então sua representação por frações contínuas é finita.

Demonstração. Seja $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$ a representação, por frações contínuas simples, do número real $x = \dfrac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$.

Aplicando o algoritmo de Euclides aos números inteiros p e q, temos

Tabela 4 – Algoritmo de Euclides

Quocientes	a_0	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
p	q	r_1	r_2	r_3	$\cdots$	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
Restos	r_1	r_2	r_3	r_4	$\cdots$	r_{n-1}	r_n	0

Segue que

$$\begin{array}{ll}
p = a_0 q + r_1 & 0 \le r_1 < q \\
q = a_1 r_1 + r_2 & 0 \le r_2 < r_1 \\
r_1 = a_2 r_2 + r_3 & 0 \le r_3 < r_2 \\
\vdots & \vdots \\
r_{n-2} = a_{n-1} r_{n-1} + r_n & 0 \le r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = a_n r_n + 0. &
\end{array}$$

Fazendo $q = r_0$ e $a_0 = \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor$, definimos a_k e r_k para $k = 1, 2, \cdots, n$ por $a_k = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor$, onde $r_1 > r_2 > r_3 > \cdots r_n > 0$. O número r_n é o $mdc(p, q)$. Se o número racional $\frac{p}{q}$ estiver na sua forma irredutível, então $r_n = 1$.

Agora, expandindo como frações contínuas simples, temos

$$x = \frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{r_4}{r_3}}}}$$

$$= \cdots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \overset{def}{=} [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n].$$

O processo para encontrar a expansão, por frações contínuas simples, de um número racional $\frac{p}{q}$ é essencialmente idêntico ao processo de aplicação do algoritmo de Euclides ao par de inteiros p e q, no qual a sequência de restos obtidos é decrescente e formada por números inteiros não negativos, ou seja, $r_0 > r_1 > r_2 > \cdots > r_{n+1} = 0$. Como existem apenas $q - 1$ números naturais não nulos que são menores do que q, o processo de divisões sucessivas é finito. Equivalentemente, a representação de um racional, por frações contínuas simples, também é um processo finito que termina quando obtemos $\{\alpha_n\} = 0$. A recíproca do teorema segue da Proposição 1, na qual, $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, para todo $n \geq 0$. □

Exemplo 13. Aplicando o algoritmo de Euclides obteremos a expansões, por frações contínuas simples, de cada racional a seguir.

a) $\frac{217}{67}$ b) $\frac{67}{217}$ c) $-\frac{21}{17}$

Tabela 5 – Algoritmo de Euclides aplicado ao racional $\frac{217}{67}$

Quocientes	3	4	5	3
217	67	16	3	1
Restos	16	3	1	0

$$\Rightarrow \quad \frac{217}{67} = [3; 4, 5, 3];$$

Tabela 6 – Algoritmo de Euclides aplicado ao racional $\frac{67}{217}$

Quocientes	0	3	4	5	3
67	217	67	16	3	1
Restos	67	16	3	1	0

$$\Rightarrow \quad \frac{67}{217} = [0; 3, 4, 5, 3];$$

Tabela 7 – Algoritmo de Euclides aplicado ao racional $-\frac{21}{17}$

Quocientes	-2	1	3	4
-21	17	13	4	1
Restos	13	4	1	0

$$\Rightarrow \quad -\frac{21}{17} = [-2; 1, 3, 4].$$

Vimos no Exemplo 13 que o algoritmo de Euclides é bastante útil no processo de representação de racionais, por frações contínuas simples, pois além de assegurar a finitude do processo, fornece os quocientes. E, como na expansão, por frações contínuas simples, $b_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos obter facilmente a expansão de qualquer número racional, sem a realização de cálculos intermediários, usando apenas os quocientes fornecidos pelo algoritmo.

Exemplo 14. Também podemos obter a expansão, por frações contínuas, aplicando a Definição 3, como segue.

a) $\frac{67}{217}$ b) $\frac{217}{67}$ c) $-\frac{21}{17}$

$$\text{a)}\frac{67}{217} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{217}{67}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{16}{67}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{67}{16}}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3}{16}}} = 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\cfrac{16}{3}}}}$$

$$= 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3}}}} = [0; 3, 4, 5, 3];$$

b) $\dfrac{217}{67} = 3 + \dfrac{16}{67} = 3 + \dfrac{1}{\dfrac{67}{16}} = 3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{3}{16}} = 3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{\dfrac{16}{3}}} = 3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{5 + \dfrac{1}{3}}} = [3; 4, 5, 3];$

c) $-\dfrac{21}{17} = -\dfrac{17}{17} - \dfrac{4}{17} = -1 - \dfrac{4}{17} + \dfrac{17}{17} - 1 = -2 + \dfrac{13}{17} = -2 + \dfrac{1}{\dfrac{17}{13}} = -2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{4}{13}}$

$$= -2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{13}{4}}} = -2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}} = [-2; 1, 3, 4].$$

Exemplo 15. Através de operações elementares podemos obter um racional a partir de sua expansão, por frações contínuas simples, vejamos.

a) $\dfrac{p}{q} = [3; 4, 5, 3]$ b) $\dfrac{m}{n} = [-2; 1, 3, 4]$

a) $\dfrac{p}{q} = [3; 4, 5, 3] = 3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{5 + \dfrac{1}{3}}} = 3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{1}{\dfrac{16}{3}}} = 3 + \dfrac{1}{4 + \dfrac{3}{16}} = 3 + \dfrac{1}{\dfrac{67}{16}} = 3 + \dfrac{16}{67} = \dfrac{217}{67};$

b) $\dfrac{m}{n} = [-2; 1, 3, 4] = -2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{3 + \dfrac{1}{4}}} = -2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{13}{4}}} = -2 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{4}{13}} = -2 + \dfrac{1}{\dfrac{17}{13}}$

$$= -2 + \dfrac{13}{17} = -\dfrac{21}{17}.$$

Sejam $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, respectivamente, o numerador e o denominador de um número racional. Como mostra o Exemplo 14, na representação, por frações contínuas simples finita, o primeiro quociente parcial a_0 pode ser positivo, nulo ou negativo, ou seja, há três casos distintos:

1. Se $p > q$, então $a_0 > 0$.
2. Se $0 < p < q$, então $a_0 = 0$.
3. Se $\dfrac{p}{q} < 0$, então $a_0 < 0$.

Teorema 6. Todo número racional pode ser representado de até duas maneiras distintas sob a forma de frações contínuas simples finitas.

Demonstração. De fato, podemos modificar o último quociente parcial a_n da representação, por frações contínuas simples finitas, como segue.

(i) Se $a_n > 1$, então

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{(a_n-1)+1}}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{(a_n-1)+\cfrac{1}{1}}}}$$

e $\dfrac{p}{q}=[a_0;a_1,\cdots,a_{n-1},a_n]=[a_0;a_1,\cdots,a_{n-1},(a_n-1),1]$.

(ii) Se $a_n = 1$, então

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{1}}}=a_0+\cfrac{1}{a_1+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cfrac{1}{(a_{n-1}+1)}}}$$

e $\dfrac{p}{q}=[a_0;a_1,\cdots,a_{n-1},a_n]=[a_0;a_1,\cdots,a_{n-2},(a_{n-1}+1)]$.

Isto comprova a duplicidade na representação. □

Observação 5. A representação de um número racional é única desde que $a_n > 1$.

Exemplo 16. Consideremos as expansões $[3;4,5,3]$ e $[3;4,5,2,1]$, mostraremos que elas representam o mesmo número racional, conforme Teorema 6.

$$[3;4,5,3]=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{16}{3}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{16}}=3+\cfrac{1}{\frac{67}{16}}=3+\frac{16}{67}=\frac{217}{67}.$$

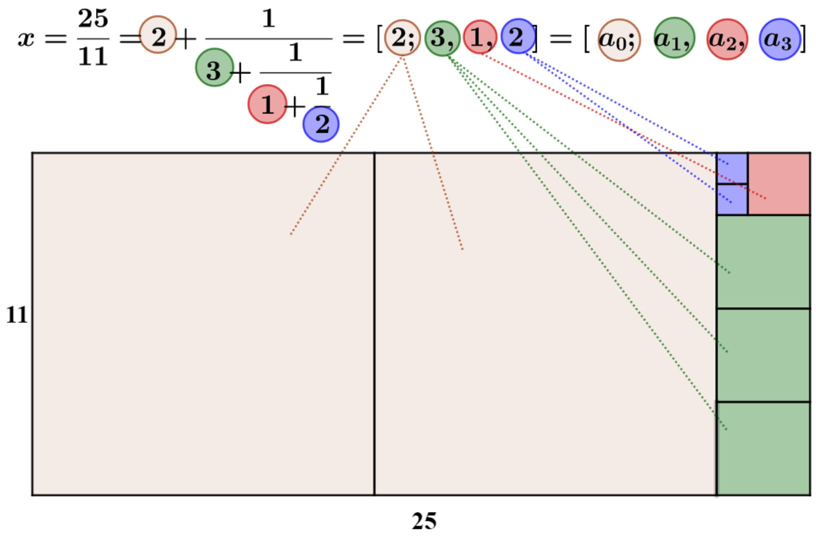
$$[3;4,5,2,1]=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{16}{3}}}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{3}{16}}=3+\cfrac{1}{\frac{67}{16}}$$
$$=3+\frac{16}{67}=\frac{217}{67}.$$

No Exemplo 16 mostramos que existem duas representações distintas, por frações contínuas simples, para o número racional $\dfrac{217}{67}$.

3.1.1 Representação geométrica de um racional

Consideremos o racional $\dfrac{25}{11}$. Para representá-lo geometricamente construímos, inicialmente, um retângulo de dimensões 25×11. Em cada etapa, devemos preencher, o retângulo livre com o maior número possível de quadrados de áreas máximas.

Figura 7 – Representação geométrica do racional $\dfrac{25}{11}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Quocientes	2	3	1	2	$\rightarrow$ Número de quadrados
25	11	3	2	1	$\rightarrow$ Medidas dos lados
Restos	3	2	1	0	

Relacionando o algoritmo de Euclides com a representação geométrica de um racional, constatamos que os **quocientes das divisões sucessivas efetuadas** *(primeira linha do algoritmo)* nos informam quantos quadrados, de mesma área, aparecem na representação. Já os **divisores e dividendos das divisões efetuadas** *(a partir do segundo elemento da segunda linha do algoritmo)* fornecem as medidas dos lados dos quadrados correspondentes aos quocientes. Assim, na representação geométrica do racional $\dfrac{25}{11}$, temos 2 quadrados de lado 11, 3 quadrados de lado 3, 1 quadrado de lado 2 e 2 quadrados de lado 1, conforme Figura 7.

Proposição 9. Seja o racional $\dfrac{p}{q}$, com $p > q$ e $p, q \in \mathbb{Z}^*$. Se $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$, então $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$. Reciprocamente, se $\dfrac{q}{p} = [0, a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$, então $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$.

Demonstração. Se $p > q$, então $\left\lfloor \dfrac{q}{p} \right\rfloor = 0$. Por hipótese, $\dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

Segue que, $\dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]} = [0; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

Reciprocamente, por hipótese, $\dfrac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

Assim, $\dfrac{1}{[0; a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n]} = \dfrac{1}{\frac{q}{p}} = \dfrac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$. $\square$

Exemplo 17. Obtenhamos a expansão, por frações contínuas simples, de $\frac{67}{217}$, sabendo que $\frac{217}{67} = [3; 4, 5, 3]$.

$$\frac{67}{217} = \frac{1}{\frac{217}{67}} = \frac{1}{[3; 4, 5, 3]} = [0; 3, 4, 5, 3].$$

Proposição 10. Frações equivalentes têm a mesma expansão por frações contínuas simples.

Demonstração. Seja $\frac{m}{n}$, com $mdc(m, n) = k,\ k \neq 0$.
Se $m = kp$, $n = kq$ e $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$, então $\frac{m}{n} = \frac{kp}{kq} = \frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$. □

Exemplo 18. Mostraremos que as frações $\frac{100}{44}$ e $\frac{25}{11}$ têm a mesma expansão por frações contínuas simples.
Temos que $mdc(100, 44) = 4$ e $\frac{25}{11} = [2; 3, 1, 2]$

$$\frac{100}{44} = \frac{4 \cdot 25}{4 \cdot 11} = \frac{25}{11} = [2; 3, 1, 2].$$

3.2 Convergentes de números racionais

As frações contínuas são úteis na resolução de muitos problemas, para tanto devemos conhecer melhor suas propriedades.

Consideremos o racional $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$, cuja expansão, por frações contínuas simples, finita é dada por

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \, \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} \stackrel{def}{=} [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}. \tag{3.1}$$

Definição 6. Os números p_n e q_n, tais que $C_n = \frac{p_n}{q_n}$ são denominados, respectivamente, numerador e denominador do n-ésimo convergente e $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$ é a sequência de reduzidas ou convergentes da fração contínua de $\frac{p}{q}$.

Segue da Proposição 1 que as sequências de inteiros (p_n) e (q_n) satisfazem as recorrências (2.4) e a identidade fundamental (2.5).

Definição 7. Uma fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n]$ é denominada simétrica se $a_k = a_{n-k}$, para $0 \leq k \leq n$.

Proposição 11. Se $a_0 > 0$ e $\dfrac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n]$, então $\dfrac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]$, para $n > 0$. Neste caso, as frações $\dfrac{p_n}{q_n}$ e $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ são denominadas frações simétricas.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em k.

- Para $k = 0$: $[a_0] = \dfrac{a_0}{1} = p_0$,
- Para $k = 1$: $[a_1, a_0] = \dfrac{a_1 a_0 + 1}{a_0} = \dfrac{p_1}{p_0}$.

A proposição é válida para $k = 0$ e $k = 1$. Suponhamos sua validez para algum k, tal que $1 \leq k < n$, ou seja, $\dfrac{p_k}{p_{k-1}} = [a_k; a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0]$. Para $k+1$, segue que

$$[a_{k+1}; a_k, a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0] = a_{k+1} + \frac{1}{[a_k; a_{k-1}, \cdots, a_1, a_0]}$$
$$= a_{k+1} + \frac{1}{\dfrac{p_k}{p_{k-1}}} = a_{k+1} + \frac{p_{k-1}}{p_k} = \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{p_k} = \frac{p_{k+1}}{p_k}.$$

Logo, a proposição é válida para todo $k \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k < n$. □

Exemplo 19. Vamos obter a fração simétrica do racional $\dfrac{64}{19}$.

Segue que $\dfrac{64}{19} = [3; 2, 1, 2, 2]$. Aplicando (2.4), temos

Tabela 8 – Quocientes e convergentes do racional $\dfrac{64}{19}$

n	-2	-1	0	1	2	3	4
a_n	/	/	3	2	1	2	2
p_n	0	1	3	7	10	27	64
q_n	1	0	1	2	3	8	19
$C_n = \dfrac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{3}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{64}{19}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A fração simétrica é dada por $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$, logo a fração simétrica de $\dfrac{64}{19}$ é $\dfrac{p_4}{p_3} = \dfrac{64}{27}$.

Segue da Proposição 11, que a fração simétrica é obtida tomando os termos na ordem inversa, ou seja, se $\dfrac{64}{19} = [3; 2, 1, 2, 2]$, então, sua simétrica é $[2; 2, 1, 2, 3]$. Novamente, aplicando (2.4), obtemos

Tabela 9 – Quocientes e convergentes da fração simétrica de $\frac{64}{19}$

n	-2	-1	0	1	2	3	4
a_n	/	/	2	2	1	2	3
p_n	0	1	2	5	7	19	64
q_n	1	0	1	2	3	8	27
$C_n = \frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{19}{8}$	$\frac{64}{27}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, a fração simétrica de $\frac{64}{19}$ é $\frac{64}{27}$.

Proposição 12. Se o racional $\frac{r}{s}$, com $mdc(r,s) = 1$, possui representação, por fração contínua, simétrica $[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n]$, então, $r \mid \left[s^2 + (-1)^n\right]$.

Demonstração. Por hipótese $mdc(r, s) = 1$. Assim, se $\frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n}$, então $\begin{cases} r = p_n \\ s = q_n. \end{cases}$

Temos que $\frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n]$ e sua simétrica $\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]$.

Se $[a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n] = [a_n; a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0]$, então $\frac{r}{s} = \frac{p_n}{p_{n-1}}$ e temos $\begin{cases} r = p_n \\ s = p_{n-1}. \end{cases}$

Substituindo, p_n por r, p_{n-1} por s e q_n também por s em (2.5), temos

$$\begin{aligned} P_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^n \\ q_{n-1} - s^2 &= (-1)^n \\ r q_{n-1} &= s^2 + (-1)^n \end{aligned}$$

Logo, $r \mid \left[s^2 + (-1)^n\right]$. □

Exemplo 20. Seja o número racional $\frac{149}{44}$. Verifiquemos que 149 divide 1937.

Pelo algoritmo de Euclides temos que $mdc(149, 44) = 1$ e a expansão, por frações contínuas simples finita, é dada por $\frac{149}{44} = [3; 2, 1, 1, 2, 3]$. Daí resulta $n = 6$, pois possui seis quocientes parciais. Segue da Proposição 12 que $r = 149$ e

$$s^2 + (-1)^n = 44^2 + (-1)^6 = 1936 + 1 = 1937 = 13 \cdot 149.$$

3.3 Frações contínuas e equações diofantinas lineares com duas incógnitas

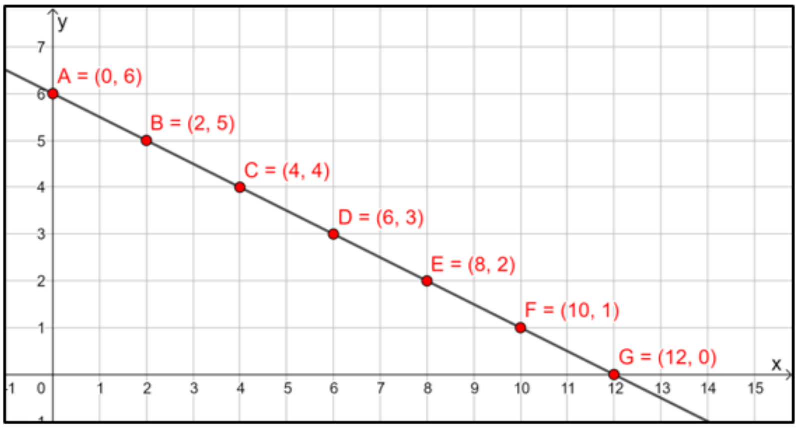
Nesta seção, definiremos equações diofantinas lineares com duas incógnitas, apresentaremos a condição que as tornam solucionáveis e aplicaremos a teoria das frações contínuas simples como um método alternativo para solucioná-las. Tendo como referências (NETO, 2016, p. 86 - 88) e (BADAWI, 2016, p. 43 - 48).

Definição 8. São denominadas **equações diofantinas** as equações polinomiais com duas ou mais incógnitas cujos coeficientes são números inteiros.

Definição 9. Uma equação diofantina com duas incógnitas é dita **linear** se for da forma $ax+by=c$, em que a, b e $c \in \mathbb{Z}$, com a e b não nulos.

Geometricamente, a equação $ax+by=c$ representa uma reta, no plano cartesiano, que é não paralela a nenhum dos eixos. As soluções da equação $ax+by=c$ correspondem aos pontos da reta cujas coordenadas são números inteiros. Na Figura 8 podemos visualizar a representação da equação $x+2y=12$, na qual os pontos $(0,6)$, $(2,5)$, $(4,4)$, $(6,3)$, $(8,2)$ $(10,1)$ e $(12,0)$, têm coordenadas inteiras e estão sobre a reta, ou seja, são soluções da equação. Por exemplo, o par ordenado $(6,3)$ é uma solução particular da equação, pois $6+2\cdot 3=12$.

Figura 8 – Representação geométrica equação $x+2y=12$



Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo geral, resolver equações diofantinas consiste em determinar soluções inteiras, caso existam. Entretanto, dependendo do contexto, pode ser resolvida em outro conjunto, por exemplo, no conjunto dos racionais. Mas, quais as condições necessárias e suficientes para que existam soluções? Se existem, quantas são? E, como determiná-las?

Uma solução inteira particular desse tipo de equação é um par ordenado de inteiros (x_0, y_0) que satisfaz as igualdade $ax_0+by_0=c$.

Teorema 7. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com a e b não simultaneamente nulos. A equação linear $ax+by=c$ admite solução inteira em x e y se, e somente se, $mdc(a,b)|c$. Nesse caso, se $d=mdc(a,b)$ e $x=x_0$, $y=y_0$ é uma solução inteira particular da equação, então as fórmulas $x=x_0+\dfrac{b}{d}t$ e $y=y_0-\dfrac{a}{d}t$, para todo $t\in\mathbb{Z}$, fornecem todas as soluções inteiras possíveis.

Demonstração. Se a equação $ax+by=c$ admite solução inteira, o $mdc(a,b)|ax+by$, então $mdc(a,b)|c$. Reciprocamente, suponhamos que $mdc(a,b)|c$, ou seja, $c=kmdc(a,b)$, com $k\in\mathbb{Z}$. Pelo Teorema de Bézout[1], existem x_0 e y_0, tais que

$$ax_0+by_0=mdc(a,b).$$

Multiplicando a igualdade por k

$$\begin{aligned} k(ax_0+by_0)&=kmdc(a,b)\\ akx_0+bky_0&=kmdc(a,b)\end{aligned}$$

temos que $x=kx_0$ e $y=ky_0$ é uma solução da equação.

Suponhamos, agora, que $mdc(a,b)|c$ e que $x=x_0$ e $y=y_0$ é uma solução inteira. Se $x=x_1$ e $y=y_1$ for outra solução inteira, então

$$\begin{cases} ax_0+by_0=c\\ ax_1+by_1=c.\end{cases}$$

Segue que

$$\begin{aligned} ax_0+by_0&=ax_1+by_1\\ a(x_1-x_0)&=b(y_0-y_1).\end{aligned}$$

Dividindo essa igualdade por $d=mdc(a,b)$, temos

$$\frac{a}{d}(x_1-x_0)=\frac{b}{d}(y_0-y_1). \tag{3.2}$$

Segue que $\frac{b}{d}\mid\frac{a}{d}(x_1-x_0)$ e, como $mdc\left(\frac{a}{b},\frac{b}{d}\right)=1$, temos que $\frac{b}{d}\mid(x_1-x_0)$. Logo, $\exists t\in\mathbb{Z}$ tal que $x_1-x_0=\frac{b}{d}t\Leftrightarrow x_1=x_0+\frac{b}{d}t$.

Agora, substituindo (x_1-x_0) por $\frac{b}{d}t$ na equação (3.2), obtemos, de modo análogo, $y_1=y_0-\frac{a}{d}t$, com $t\in\mathbb{Z}$. Reciprocamente, é imediato verificar que tais expressões fornecem, de fato, as soluções inteiras da equação, para todo $t\in\mathbb{Z}$.

Se o $mdc(a,b)=1$, então a equação $ax+by=c$ é solucionável para todo inteiro c e, se (x_0,y_0) for uma solução particular, então a solução geral é dada por $x=x_0+bt$ e $y=y_0-at$, $t\in\mathbb{Z}$. □

[1] **Teorema de Bézout**: Dados os inteiros $a,\ b\in\mathbb{Z}$, tal que $mdc(a,b)=d$, então existem $x,\ y\in\mathbb{Z}$, tais que $ax+by=d$.

3.3.1 Resolvendo equações diofantinas pelo método das frações contínuas

Nesta subseção apresentaremos o método das frações contínuas simples para resolver equações diofantinas lineares com duas incógnitas.

Seja a equação $ax+by=1$, na qual a, b e c são números inteiros e o $mdc(a,\ b)=1$. (Condição de existência de soluções inteiras).

Segundo Badawi (2016, p. 43 - 48), para determinar uma solução particular da equação diofantina linear $ax+by=c$ pelo método das frações contínuas, devemos expressar o racional $\frac{a}{b}$ como uma fração contínua simples finita, ou seja,

$$\frac{a}{b}=[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_n]=\frac{p_n}{q_n}.$$

Dentre os convergentes C_i de $\frac{a}{b}=\frac{p_n}{q_n}$, com $i=0,1,2,\cdots,n$, os dois últimos, ou seja, $C_{n-1}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $C_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{a}{b}$ são a chave da solução da equação, pois satisfazem (2.5).

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^n. \tag{3.3}$$

Substituindo p_n por a e q_n por b, em (3.3), temos

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=(-1)^n$$

e, multiplicando todos os termos da equação por $(-1)^n$, obtemos

$$a(-1)^n q_{n-1}+b(-1)^{n-1}p_{n-1}=1. \tag{3.4}$$

Comparando (3.4) com a equação $ax+by=1$, concluímos que o par ordenado $(x_0,\ y_0)=\left((-1)^n q_{n-1},(-1)^{n-1}p_{n-1}\right)$ é uma solução particular para esta equação. E, teremos

$$(x_0,\ y_0)=\begin{cases}(q_{n-1},\ -p_{n-1}), & \text{se n for par}\\(-q_{n-1},\ p_{n-1}), & \text{se n for ímpar.}\end{cases}$$

Temos quatro casos a considerar de acordo com os sinais de a e de b: $\pm ax\pm by=1$ e, comparando cada um deles com (3.4), obtemos suas respectivas soluções particulares, como vemos no Quadro 1.

Quadro 1 – Soluções particulares para os casos $\pm ax\pm by=1$

Equação	Solução particular
$ax+by=1$	$(x_0,y_0)=\left((-1)^n q_{n-1},(-1)^{n-1}p_{n-1}\right)$
$ax+b(-y)=1$	$(x_0,y_0)=\left((-1)^n q_{n-1},(-1)^n p_{n-1}\right)$
$a(-x)+by=1$	$(x_0,y_0)=\left((-1)^{n-1}q_{n-1},(-1)^{n-1}p_{n-1}\right)$
$a(-x)+b(-y)=1$	$(x_0,y_0)=\left((-1)^{n-1}q_{n-1},(-1)^n p_{n-1}\right)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 21. Determinemos o menor inteiro positivo que dividido por 13 e 17 deixa restos 11 e 12, respectivamente.

$$\begin{cases} N = 13x + 11 \\ N = 17y + 12. \end{cases}$$

Segue que

$$\begin{aligned} 13x + 11 &= 17y + 12 \\ 13x - 17y &= 12 - 11 \\ 13x - 17y &= 1. \end{aligned}$$

Tabela 10 – Algoritmo de Euclides aplicado ao racional $\frac{13}{17}$

Quocientes	0	1	3	4
13	17	13	4	1
Restos	13	4	1	0

$\Rightarrow \quad mdc\,(13,\ 17) = 1.$

Como o $mdc(13,\ 17) = 1$, a equação $13x - 17y = 1$ tem soluções inteiras.

Segue que

$$\frac{a}{b} = \frac{13}{17} = [0,\,1,\,3,\,4] = \frac{p_n}{q_n}.$$

E, aplicando as recorrências (2.4), temos

Tabela 11 – Quocientes parciais e convergentes de $\frac{13}{17}$

n	-2	-1	0	1	2	3
a_n	/	/	0	1	3	4
p_n	0	1	0	1	3	13
q_n	1	0	1	1	4	17
$C_n = \frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{13}{17}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A expansão, por frações contínuas simples, do racional $\frac{13}{17}$ possui quatro quocientes parciais, isto é, $n = 4$. Usando as informações contidas no Quadro 1, obtemos a solução particular, como segue

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) &= ((-1)^n q_{n-1}, (-1)^n p_{n-1}) \\ &= \left((-1)^4 \cdot 4, (-1)^4 \cdot 3\right) = (4, 3). \end{aligned}$$

Logo, o par ordenado $(4, 3)$ é uma solução particular da equação $13x - 17y = 1$, pois $13 \cdot 4 - 17 \cdot 3 = 1$.

Portanto, $N = 13x + 11 = 17y + 12 = 63$ é a solução do problema.

A solução geral para equação é dada por

$$S = \begin{cases} x = (-1)^n q_{n-1} + bt \\ y = (-1)^{n-1} p_{n-1} - at,\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow S = \begin{cases} x = 4 - 17t \\ y = 3 - 13t,\ t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Substituindo o número 1 por outro número inteiro qualquer c, em cada um dos casos $\pm ax \pm by = 1$, Quadro 1, obtemos $\pm ax \pm by = c$, que resolveremos considerando duas situações:

(i) $\pm ax \pm by = c$**, onde** a**,** b **e** c **são números inteiros, com** $mdc(a, b) = 1$.

Para resolver equações da forma $\pm ax \pm by = c$ o primeiro passo é encontrar uma solução particular (x_0, y_0) de $\pm ax \pm by = 1$, em seguida usar a fórmula correspondente apresentada no Quadro 1, de acordo com cada caso, como segue.

Assim, de $\pm ax_0 \pm by_0 = 1$, temos $\pm a(cx_0) \pm b(cy_0) = c$.

Desse modo, $(cx_0,\ cy_0)$ é uma solução da equação $\pm ax \pm by = c$.

(ii) $\pm Ax \pm By = C$**, onde** A**,** B **e** C **são números inteiros, com** $mdc(A, B) \neq 1$.

Segue do Teorema 7, que as equações $\pm Ax \pm By = C$ serão solucionáveis se, e somente se, o $mdc(A, B)$ for divisor de C. Se $mdc(A, B)$ dividir C, então dividindo os termos de $\pm Ax \pm By = C$ pelo $mdc(A, B)$ obtemos $\pm ax \pm y = c$, cujo $mdc(a, b) = 1$ e cujas soluções são, certamente, soluções da equação $\pm Ax \pm By = C$.

As respectivas soluções particulares para cada um dos casos decorrentes da substituição do número 1 por um número inteiro c e de acordo com os sinais de a e de b são dadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Soluções particulares para os casos $\pm ax \pm by = c$

Equação	Solução particular
$ax + by = c$	$(x_0, y_0) = \left((-1)^n cq_{n-1}, (-1)^{n-1} cp_{n-1}\right)$
$ax + b(-y) = c$	$(x_0, y_0) = \left((-1)^n cq_{n-1}, (-1)^n cp_{n-1}\right)$
$a(-x) + by = c$	$(x_0, y_0) = \left((-1)^{n-1} cq_{n-1}, (-1)^{n-1} cp_{n-1}\right)$
$a(-x) + b(-y) = c$	$(x_0, y_0) \left((-1)^{n-1} cq_{n-1}, (-1)^n cp_{n-1}\right)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Finalmente, conhecida uma solução particular, Quatros 1 e 2, podemos aplicar o Teorema 7 e obter a solução geral, dada por $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, onde t é um inteiro arbitrário.

Observação 6. O método das frações contínuas simples para resolver equações diofantinas lineares com duas incógnitas é equivalente ao método do algoritmo de Euclides. Contudo, gerar os convergentes do racional $\frac{a}{b}$ usando (2.4) é mais eficiente do que encontrar todas as equações do algoritmo euclidiano e depois usá-las em ordem inversa.

Exemplo 22. Determinemos soluções inteiras da equação indeterminada $4x - 51y = -9$.

Tabela 12 – Algoritmo de Euclides aplicado ao racional $\frac{4}{51}$

Quocientes	0	12	1	3
4	51	4	3	1
Restos	4	3	1	0

$\Rightarrow \quad mdc(4,\ 51) = 1.$

Como o $mdc(4,\ 51) = 1$, a equação tem soluções inteiras.

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{51} = [0,\ 12,\ 1,\ 3] = \frac{p_n}{q_n}.$$

E, aplicando as recorrências (2.4), temos

Tabela 13 – Quocientes parciais e convergentes de $\frac{4}{51}$

n	-2	-1	0	1	2	3
a_n	/	/	0	12	1	3
p_n	0	1	0	1	1	4
q_n	1	0	1	12	13	51
$C_n = \frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{4}{51}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A expansão, por frações contínuas simples, do racional $\frac{4}{51}$ possui quatro quocientes parciais, isto é, $n = 4$. Segue do Quadro 2 que a solução particular é dada por

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= ((-1)^n c q_{n-1},\ (-1)^n c p_{n-1}) \\ &= \left((-1)^4 \cdot (-9) \cdot 13,\ (-1)^4 \cdot (-9) \cdot 1\right) = (-117,\ -9)\end{aligned}$$

Assim, o par ordenado $(-117,\ -9)$ é uma solução particular da equação $4x - 51y = -9$, pois $4 \cdot (-117) - 51 \cdot (-9) = -9$.

A solução geral para a equação é dada por

$$S = \begin{cases} x = (-1)^n c q_{n-1} + bt \\ y = (-1)^{n-1} c p_{n-1} - at,\ t \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow S = \begin{cases} x = -117 - 51t \\ y = -9 - 4t,\ t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

CAPÍTULO

4

FRAÇÕES CONTÍNUAS DE NÚMEROS IRRACIONAIS QUADRÁTICOS

Neste Capítulo, apresentaremos alguns teoremas importantes relacionados a representação, por frações contínuas simples, de **números irracionais quadráticos**, cujas representações são sempre periódicas. Concluiremos mostrando que as frações contínuas simples desempenham um papel essencial na resolução da equação de Pell.

4.1 Irracionalidades quadráticas

Nesta seção definiremos números irracionais quadráticos e conheceremos diferentes aspectos de suas de representações, por frações contínuas simples. Para maiores detalhes consultar as referências (SOUZA, 2018, p. 43) e (IKENAGA, 2019).

Definição 10. Um número irracional α é um número **irracional quadrático** se ele for uma raiz da equação quadrática da forma

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \text{ onde } a,\, b,\, c \in \mathbb{Z} \text{ e } a \neq 0.$$

Denotamos por $\overline{\alpha}$ a segunda raiz da equação quadrática satisfeita por α, dita raiz conjugada de α.

Primeiramente vejamos que todo número da forma $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$ é irracional.

Lema 1. Se $D \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, então $\sqrt{D}$ é irracional.

Demonstração. Se $\sqrt{D} = \dfrac{p}{q}$, onde $p,\ q \in \mathbb{N}^*$, $mdc(p,\, q) = 1$ e $q > 1$, teríamos $D = \dfrac{p^2}{q^2}$ o que é um absurdo, pois $mdc(p,\, q) = 1$ implica $mdc\left(p^2,\ q^2\right) = 1$, donde $\dfrac{p^2}{q^2}$ não pode ser inteiro. Logo

$\sqrt{D}$ é irracional. $\square$

Proposição 13. Um número irracional α é um **irracional quadrático** se, e somente se, puder ser escrito na forma $\alpha = \dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$ e tem forma conjugada $\overline{\alpha} = \dfrac{r-\sqrt{D}}{q}$, onde $r,\ D,\ q \in \mathbb{Z}$, com $q \neq 0$ e D é um número positivo que não é um quadrado perfeito.

Demonstração. Suponhamos que α seja um irracional quadrático, isto é, α é uma raiz da equação quadrática $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$.
Segue que $\alpha = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, onde $-b$, b^2-4ac, $2a$ são números inteiros e $2a \neq 0$.

- Se $b^2-4ac = 0$, então $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ é racional, contrariando o pressuposto inicial.
- Se $b^2-4ac < 0$, então $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, também contraria a suposição inicial.

  Logo, $b^2-4ac > 0$.
- Se b^2-4ac for um número quadrado perfeito, então $\alpha = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ é um racional. Novamente contraria o pressuposto inicial.

  Portanto, $D = b^2-4ac$ não é um quadrado perfeito.

Reciprocamente, se $\alpha = \dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$ e $\overline{\alpha} = \dfrac{r-\sqrt{D}}{q}$, onde $r,\ D,\ q \in \mathbb{Z}$, e $q \neq 0$, com q positivo e D um número positivo que não é um quadrado perfeito. Logo, pelo Lema 1 temos que α é irracional e

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{r+\sqrt{D}}{q} \\
\Leftrightarrow\ q\alpha &= r+\sqrt{D} \\
\Leftrightarrow\ q\alpha - r &= \sqrt{D} \\
\Leftrightarrow\ (q\alpha - r)^2 &= \sqrt{D}^2 \\
\Leftrightarrow\ q^2\alpha^2 - 2qr\alpha + r^2 &= D \\
\Leftrightarrow\ q^2\alpha^2 - 2qr\alpha + \left(r^2 - D\right) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

A raiz conjugada $\overline{\alpha}$ também satisfaz (4.1) que é uma equação quadrática com coeficientes inteiros da forma $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$, onde $a = q^2$, $b = -2qr$ e $c = r^2 - D$. $\square$

Exemplo 23. Os números irracionais $\sqrt{6}$, $\sqrt{6}+2$ e $\dfrac{5-\sqrt{6}}{2}$ são raízes das equações quadráticas $x^2-6=0$, $x^2-4x-2=0$ e $4x^2-20x+19=0$, respectivamente, cujos coeficientes a, b, e c são números inteiros. Além disso, em cada caso, $D = b^2-4ac$ é um número inteiro que não é um quadrado perfeito e $2a$ é número inteiro não nulo. Logo, $x = \sqrt{6}$, $\sqrt{6}+2$ e $\dfrac{5-\sqrt{6}}{2}$ são irracionais quadráticos.

Aplicando a Definição 3 a irracionais quadráticos, como vemos nos exemplos a seguir, constatamos diferentes tipos de periodicidade em suas representações, por frações contínuas simples:

Exemplo 24.

$$\sqrt{6}+2 = [4; 2, 4, 2, 4, \cdots] = [\overline{4, 2}].$$

Exemplo 25.

$$\sqrt{6} = [2; 2, 4, 2, 4, \cdots] = [2; \overline{2, 4}]$$

ou

$$\frac{5-\sqrt{6}}{2} = [1; 3, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 2, \cdots] = [1; 3, \overline{1, 1, 1, 2}].$$

A periodicidade na expansão, por frações contínuas simples, caracteriza os números irracionais quadráticos e garante a infinitude de suas representações.

Na próxima seção veremos que a expansão, por frações contínuas simples, de números irracionais quadráticos, em geral, tem uma das seguintes formas:

(i) frações contínuas simples estritamente periódicas

$$\alpha = [\overline{a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}}];$$

(ii) frações contínuas simples parcialmente periódicas

$$\alpha = [a_0, \overline{a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}]$$

ou

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+k-1}}].$$

4.2 Frações contínuas de números irracionais quadráticos

Nesta seção, definiremos as frações contínuas periódicas e apresentaremos o Teorema de Euler-Lagrange que generaliza a relação entre as expansões por frações contínuas simples e os números irracionais quadráticos. Em seguida, trataremos de dois casos importantes: as expansões, por frações contínuas simples, de números irracionais quadráticos reduzidos e de irracionais da forma $\sqrt{D}$. Consultar (MOREIRA; MARTÍNEZ; SALDANHA, 2012, p. 171 - 173) e (PAIXÃO, 2011, p. 10 - 14), para maiores detalhes.

Definição 11. Uma fração contínua simples é denominada **periódica** se a sequência de quocientes a_n apresenta repetição (período) a partir de um certo ponto, que denotaremos por

$$[a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \overline{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots, a_{n+k-1}}],$$

em que os valores $a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{n+k-1}$ formam o período, com k termos, $k > 0$, que se repete indefinidamente, sendo que $a_{n+k} = a_n$. No caso particular $[\overline{a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}}]$ em que o período inicia em a_0, denominamos *fração contínua estritamente periódica*.

Leonhard Euler (1707 - 1783), em 1737, provou que toda irracionalidade quadrática tem representação periódica por fração contínua simples. No mesmo século, em 1770, o matemático italiano *Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813)*, demonstrou a recíproca desse teorema, ou seja, ele mostrou que a fração contínua infinita simples que representa um número irracional é periódica se, e somente se, esse número irracional for raiz de um polinômio, da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$, b e c são números inteiros.

Teorema 8. *(Euler - Lagrange)* Seja $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sua representação por frações contínuas $[a_0; a_1, a_2, \cdots]$ é periódica se, e somente se, existem, A, B e $C \in \mathbb{Z}, A \neq 0$, tais que $Ax^2 + Bx + C = 0$, ou seja, x é um irracional do tipo $x = r \pm \sqrt{D}$, com $r, D \in \mathbb{Q}$ e $D > 0$.

Demonstração. Lembremos a Definição 3, na qual a representação de x por frações contínuas simples, a_n, α_n são definidos recursivamente por

$$\alpha_0 = x, \qquad a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$$

e pelo Corolário 1, temos

$$\alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se a fração contínua de x for periódica, então existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\alpha_{n+k} = \frac{p_{n+k-2} - q_{n+k-2}x}{q_{n+k-1}x - p_{n+k-1}} = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{q_{n-1}x - p_{n-1}} = \alpha_n, \tag{4.2}$$

então, $Ax^2 + Bx + C = 0$, onde

$$\begin{aligned}
A &= q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \\
B &= p_{n-2}q_{n+k-1} + p_{n+k-1}q_{n-2} - p_{n+k-2}q_{n-1} - p_{n-1}q_{n+k-2} \\
C &= p_{n-1}p_{n+k-2} - p_{n-2}p_{n+k-1}.
\end{aligned}$$

Notemos que o coeficiente de x^2 é não-nulo, pois $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}$ é uma fração irredutível de denominador q_{n-2}, pois $p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^n$ e $\frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$ também é uma fração irredutível de denominador $q_{n+k-2} > q_{n-2}$, donde $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} \neq \frac{q_{n+k-1}}{q_{n+k-2}}$. Isso implica que $q_{n-1}q_{n+k-2} - q_{n-2}q_{n+k-1} \neq 0$. Logo, se x tem expansão periódica, por frações contínuas simples, então é raiz algébrica de um polinômio do segundo grau.

Reciprocamente, seja x uma irracionalidade quadrática, ou seja, x é um número do tipo $r + \sqrt{D}$, com $r, D \in \mathbb{Q}$ e $D > 0$. Neste caso, existem a, b, c inteiros tais que $ax^2 + bx + c = 0$, com $b^2 - 4ac > 0$ e $\sqrt{b^2 - 4ac}$ irracional.

Pelo Corolário 1, temos

$$x = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}},$$

substituindo em

$$\begin{aligned} 0 = ax^2 + bx + c &= a\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right)^2 + b\left(\frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}\right) + c \\ &= \frac{a\left(\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}\right)^2 + b\left(\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}\right)\left(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}\right) + c\left(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}\right)^2}{\left(\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}\right)^2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 = a&\left(\alpha_n^2 p_{n-1}^2 + 2\alpha_n p_{n-1}p_{n-2} + p_{n-2}^2\right) \\ &+ b\left(\alpha_n^2 p_{n-1}q_{n-1} + \alpha_n p_{n-1}q_{n-2} + \alpha_n p_{n-2}q_{n-1} + p_{n-2}q_{n-2}\right) \\ &+ c\left(\alpha_n^2 q_{n-1}^2 + 2\alpha_n q_{n-1}q_{n-2} + q_{n-2}^2\right) = A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0, \end{aligned}$$

onde

$$A_n = ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \tag{4.3}$$

$$B_n = 2ap_{n-1}p_{n-2} + b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 2cq_{n-1}q_{n-2} \tag{4.4}$$

$$C_n = ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2. \tag{4.5}$$

Logo, para concluir que α_n é uma sequência periódica de números irracionais, basta mostrar que os coeficientes A_n, B_n e C_n assumem um número finito de valores distintos. Como $C_n = A_{n-1}$, basta mostrar tal propriedade para A_n, B_n.

Primeiramente, mostraremos que $A_n \neq 0$ para todo n. De fato, se $A_n = 0$ para algum n, teríamos

$$ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2 = 0,$$

cuja solução é dada por

$$p_{n-1} = \frac{-bq_{n-1} \pm \sqrt{\left(b^2 - 4ac\right)q_{n-1}^2}}{2a},$$

ou ainda,

$$p_{n-1} = \frac{q_{n-1}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{2a}.$$

Portanto,

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Isso implica que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, o que é um absurdo. Logo $A_n \neq 0$.

Segue do Teorema 2 que $\left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_nq_{n-1}} < \frac{1}{q_{n-1}^2}$.

Agora, suponhamos que $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - x = \dfrac{\delta}{q_{n-1}^2}$, com $|\delta| < 1$, então

$$p_{n-1} = xq_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}}.$$

Substituindo o valor de p_{n-1} em (4.3), temos

$$\begin{aligned}
A_n &= a\left(xq_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}}\right)^2 + b\left(xq_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}}\right)q_{n-1} + cq_{n-1}^2 \\
&= a\left(x^2q_{n-1}^2 + 2\delta x + \frac{\delta^2}{q_{n-1}^2}\right) + bxq_{n-1}^2 + b\delta + cq_{n-1}^2 \\
&= ax^2q_{n-1}^2 + 2a\delta x + \frac{a\delta^2}{q_{n-1}^2} + bxq_{n-1}^2 + b\delta + cq_{n-1}^2 \\
&= q_{n-1}^2\left(ax^2 + bx + c\right) + 2a\delta x + \frac{a\delta^2}{q_{n-1}^2} + b\delta \\
&= q_{n-1}^2\left(ax^2 + bx + c\right) + 2a\delta x + b\delta + \frac{a\delta^2}{q_{n-1}^2}.
\end{aligned}$$

Como $ax^2 + bx + c = 0$,

$$A_n = 2a\delta x + b\delta + \frac{a\delta^2}{q_{n-1}^2}.$$

E, desde que $|\delta| < 1$ e $q_{n-1} > 1$, temos

$$|A_n| < |2ax| + |b| + |a|.$$

Logo, (A_n) é limitada e por ser números inteiros, há apenas um número finito de valores distintos possíveis para A_n.

Agora analisaremos B_n. Do discriminante, temos

$$\begin{aligned}
B_n^2 - 4A_nC_n &= \left[2ap_{n-1}p_{n-2} + b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right) + 2cq_{n-1}q_{n-2}\right]^2 \\
&\quad - 4\left(ap_{n-1}^2 + bp_{n-1}q_{n-1} + cq_{n-1}^2\right)\left(ap_{n-2}^2 + bp_{n-2}q_{n-2} + cq_{n-2}^2\right). \\
B_n^2 - 4A_nC_n &= \left(2ap_{n-1}p_{n-2}\right)^2 + \left[b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right)\right]^2 + \left(2cq_{n-1}q_{n-2}\right)^2 \\
&\quad + \left(2ap_{n-1}p_{n-2}\right)\left[b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right)\right] \\
&\quad + \left(2ap_{n-1}p_{n-2}\right)\left(2cq_{n-1}q_{n-2}\right) + \left[b\left(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}\right)\right]\left(2cq_{n-1}q_{n-2}\right) \\
&\quad - \left(4a^2p_{n-1}^2p_{n-2}^2 + 4abp_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} + 4acp_{n-1}^2q_{n-2}^2\right) \\
&\quad - \left(4abp_{n-1}p_{n-2}^2q_{n-1} + 4b^2p_{n-1}q_{n-1}p_{n-2}q_{n-2} + 4bcp_{n-1}q_{n-1}q_{n-2}^2\right) \\
&\quad - \left(4acp_{n-2}^2q_{n-1}^2 + 4bcq_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} + 4c^2q_{n-1}^2q_{n-2}^2\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n^2 - 4A_nC_n = {} & 4a^2p_{n-1}^2p_{n-2}^2 + b^2p_{n-1}^2q_{n-2}^2 + 2b^2p_{n-1}q_{n-2}p_{n-2}q_{n-1} + b^2p_{n-2}^2q_{n-1}^2 \\
& + 4c^2q_{n-1}^2q_{n-2}^2 + 4abp_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} + 4abp_{n-1}p_{n-2}^2q_{n-1} \\
& + 8acp_{n-1}p_{n-2}q_{n-1}q_{n-2} + 4bcp_{n-1}q_{n-2}^2q_{n-1} + 4bcp_{n-2}q_{n-1}^2q_{n-2} \\
& - \left(4a^2p_{n-1}^2p_{n-2}^2 + 4abp_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} + 4acp_{n-1}^2q_{n-2}^2\right) \\
& - \left(4abp_{n-1}p_{n-2}^2q_{n-1} + 4b^2p_{n-1}q_{n-1}p_{n-2}q_{n-2} + 4bcp_{n-1}q_{n-1}q_{n-2}^2\right) \\
& - \left(4acp_{n-2}^2q_{n-1}^2 + 4bcq_{n-1}^2p_{n-2}q_{n-2} + 4c^2q_{n-1}^2q_{n-2}^2\right),
\end{aligned}$$

simplificando, temos

$$\begin{aligned}
B_n^2 - 4A_nC_n &= b^2\left(p_{n-1}^2q_{n-2}^2 - 2p_{n-1}q_{n-2}p_{n-2}q_{n-1} + p_{n-2}^2q_{n-1}^2\right) \\
&\quad - 4ac\left(p_{n-1}^2q_{n-2}^2 - 2p_{n-1}q_{n-2}p_{n-2}q_{n-1} + p_{n-2}^2q_{n-1}^2\right) \\
B_n^2 - 4A_nC_n &= b^2 - 4ac\left(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\left(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}\right)^2 = [(-1)^{n-2}]^2 = 1,$$

então

$$B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac.$$

Segue que

$$B_n^2 = b^2 - 4ac + 4A_nC_n = b^2 - 4(ac - A_nC_n) \quad \Rightarrow \quad B_n \leq \sqrt{b^2 - 4(ac - A_nC_n)}.$$

Logo, B_n também é limitado.

Concluímos que há somente um número finito de possíveis equações quadráticas $A_n\alpha_n^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0$ e, portanto, de possíveis valores distintos para α_n. Desse modo, para um período $k \in \mathbb{N}^*$, teremos, necessariamente, $\alpha_{n+k} = \alpha_n$, para todo $n_0 \leq n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemplo 26. Mostraremos que o número $\alpha = [2;\, 3,\, \overline{1,\, 2,\, 1}]$ é um irracional quadrático.

Tabela 14 – Primeiros quocientes parciais e convergentes de α

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a_n	/	/	2	3	1	2	1	1
p_n	0	1	2	7	9	25	34	59
q_n	1	0	1	3	4	11	15	26

Fonte: Elaborada pelo autor.

α tem expansão periódica com período $k = 3$, iniciando em a_2.

$$\lfloor \alpha_n \rfloor = a_n = a_{n+3} = \lfloor \alpha_{n+3} \rfloor, \text{ para } \forall n \geq 2.$$

Como a parte periódica tem início em a_2, decorre de (4.2) que $\alpha_2 = \alpha_5$, então

$$\frac{p_0 - q_0x}{q_1x - p_1} = \frac{p_3 - q_3x}{q_4x - p_4}.$$

Agora, considerando os valores da Tabela 14, temos

$$\frac{2-x}{3x-7}=\frac{25-11x}{15x-34},$$

cuja forma quadrática é

$$18x^2-88x+107=0.$$

Logo,

$$x=\frac{44\pm\sqrt{10}}{18}.$$

Temos que $\alpha=\dfrac{44-\sqrt{10}}{18}=[2;\,3,\,\overline{1,\,2,\,1}]$ e $\overline{\alpha}=\dfrac{44+\sqrt{10}}{18}=[2;\,1,\,1,\,1,\,\overline{1,\,1,\,2}]$.

Portanto, α é um irracional quadrático e, considerando somente a parte periódica da sua expansão, temos: $\alpha_2=[\overline{1;\,2,\,1}]$, $\alpha_3=[\overline{2;\,1,\,1}]$ e $\alpha_4=[\overline{1;\,1,\,2}]$ que são, respectivamente, as raízes positivas das equações quadráticas com coeficientes inteiros $3\alpha_2^2-2\alpha_2-3=0$, $2\alpha_3^2-4\alpha_3-3=0$ e $3\alpha_4^2-4\alpha_4-2=0$. Estas equações são da forma $A_n\alpha_n^2+B_n\alpha_n+C_n=0$, mencionadas na recíproca do Teorema de Euler-Lagrange. Os irracionais quadráticos α_2, α_3 e α_4 têm expansões, por frações contínuas simples, estritamente periódicas e são exatamente esses casos que abordaremos na próxima subseção.

4.2.1 Frações contínuas de irracionais quadráticos reduzidos

Nesta subseção definiremos irracionais quadráticos reduzidos e apresentaremos suas representações, sob a forma de frações contínuas simples. Tais representações são expansões estritamente periódicas, ou seja, são da forma $\alpha=[\overline{a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_{n-1}}]$. Mais detalhes podemos encontrar nas seguintes referências (OLDS, 1963, p. 112 - 113), (YIU, 2008, p. 410 - 412), (GLIGA, 2003, p. 2 - 3) e (MARTÍNEZ *et al.*, 2013, p. 173 - 175).

Teorema 9. Se $a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_{n-1}$ são todos inteiros positivos, então a fração contínua $\alpha=[\overline{a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_{n-1}}]$ é maior que 1 e é a raiz positiva de uma equação quadrática com coeficientes inteiros. Além disso, se $\beta=[\overline{a_{n-1};\,a_{n-2},\,\cdots,\,a_1,\,a_0}]$ for a fração contínua de α com o período invertido, então $-\dfrac{1}{\beta}=\overline{\alpha}$, em que $\overline{\alpha}\in(-1,0)$ é o conjugado de α.

Demonstração. Seja α um número irracional cuja representação por frações contínuas simples é estritamente periódica, ou seja,

$$\alpha=[\overline{a_0;\,a_1,\,a_2,\,\cdots,\,a_{n-1}}].$$

Nesta representação $a_0=a_n$, o que implica $\alpha_0=\alpha_n$. Aplicando a igualdade (4.2), temos

$$\frac{p_{-2}-q_{-2}x}{q_{-1}x-p_{-1}}=\frac{p_{n-2}-q_{n-2}x}{q_{n-1}x-p_{n-1}}.$$

Decorre das recorrências (2.4) que $\begin{cases} p_{-2} = 0 \\ p_{-1} = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} q_{-2} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases}$ e substituindo na equação acima, obtemos

$$\frac{0-x}{0x-1} = \frac{p_{n-2}-q_{n-2}x}{q_{n-1}x-p_{n-1}}$$

$$x = \frac{p_{n-2}-q_{n-2}x}{q_{n-1}x-p_{n-1}}, \tag{4.6}$$

onde $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ e $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ são definidos como os convergentes de ordens $(n-1)$ e $(n-2)$ da expansão de α. A equação (4.6) se escreve na forma quadrática

$$q_{n-1}x^2 + (q_{n-2}-p_{n-1})x - p_{n-2} = 0, \tag{4.7}$$

que tem duas raízes reais e distintas

$$\alpha = \frac{\left(p_{n-1}-q_{n-2}+\sqrt{(p_{n-1}-q_{n-2})^2+4p_{n-2}q_{n-1}}\right)}{2q_{n-1}} > 1$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\left(p_{n-1}-q_{n-2}-\sqrt{(p_{n-1}-q_{n-2})^2+4p_{n-2}q_{n-1}}\right)}{2q_{n-1}} < 0.$$

Além disso, temos que o primeiro membro de (4.7) vale $-p_{n-2} < 0$, para $x = 0$ e $(q_{n-1}-q_{n-2})+(p_{n-1}-p_{n-2}) > 0$, para $x = -1$, o que implica $-1 < \overline{\alpha} < 0$. Sendo α da forma $\frac{r+\sqrt{D}}{q}$, onde D é um inteiro que não pode ser quadrado perfeito, caso contrário, α seria um número racional.

Invertendo o período da expansão de α obtemos a expansão de $\beta = [\overline{a_{n-1}; \cdots, a_1, a_0}]$, cuja expansão, por frações contínuas simples, também é estritamente periódica e os termos $a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0$ são todos inteiros positivos. β é a raiz positiva da equação

$$\beta = [a_{n-1}; \cdots, a_1, a_0, \beta] = [a'_0; a'_1, a'_2, \cdots, a'_{n-1}, \beta].$$

Pelo Corolário 1, temos

$$\beta = \frac{\beta p'_{n-1}+p'_{n-2}}{\beta q'_{n-1}+q'_{n-2}},$$

onde $\frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ e $\frac{p'_{n-2}}{q'_{n-2}}$ são definidos como os convergentes de ordens $(n-1)$ e $(n-2)$ da expansão de β.

Segue, das Proposições 1 e 11 e do Corolário 4 que, se

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}],$$

então $\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = [a_{n-1}; \cdots, a_1, a_0] = \frac{p'_{n-1}}{q'_{n-1}}$ e $\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = [a_{n-1}; \cdots, a_2, a_1] = \frac{p'_{n-2}}{q'_{n-2}}$.

Agora, substituindo $\begin{cases} p'_{n-1} \text{ por } p_{n-1} \\ p'_{n-2} \text{ por } q_{n-1} \end{cases}$ e $\begin{cases} q'_{n-1} \text{ por } p_{n-2} \\ q'_{n-2} \text{ por } q_{n-2} \end{cases}$, obtemos

$$\beta = \frac{\beta p_{n-1} + q_{n-1}}{\beta p_{n-2} + q_{n-2}}.$$

Logo β é a raiz positiva da equação quadrática

$$p_{n-2}\beta^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\beta - q_{n-1} = 0.$$

Dividindo ambos lados da equação por $-\beta^2$, $\beta > 1$, obtemos

$$q_{n-1}\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2 + (q_{n-2} - p_{n-1})\left(-\frac{1}{\beta}\right) - p_{n-2} = 0.$$

Portanto, $-\dfrac{1}{\beta}$ é a segunda raiz, ou raiz conjugada, de (4.7), ou seja,

$$-\frac{1}{[\overline{a_{n-1}; a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0}]} = -\frac{1}{\beta} = \overline{\alpha}.$$

$\square$

Definição 12. *(Galois)* Um irracional quadrático, $\alpha > 1$, é dito reduzido se for uma raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, cuja raiz conjugada $\overline{\alpha}$ situa-se entre -1 e 0. Uma redução irracional quadrática é dita associada a D se for escrita na forma $\alpha = \dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$, onde r, D, q são inteiros, com r, $q > 0$, e $D > 1$.

Exemplo 27. Mostraremos que $\alpha = [\overline{1; 3, 2}]$ é um racional quadrático reduzido.

Como a expansão de α é estritamente periódica, com período $k = 3$, então $a_0 = a_3$ implica $\alpha_0 = \alpha_3$. E, aplicando as recorrências (2.4), temos

Tabela 15 – Quocientes parciais e convergentes do 1º período de α

n	-2	-1	0	1	2
a_n	/	/	1	3	2
p_n	0	1	1	4	9
q_n	1	0	1	3	7

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue de (4.2) que $\dfrac{p_{-2} - q_{-2}x}{q_{-1}x - p_{-1}} = \dfrac{p_1 - q_1 x}{q_2 x - p_2}$ e, usando as informações da Tabela 15, temos

$$\frac{0-x}{0x-1} = \frac{4-3x}{7x-9},$$

cuja forma quadrática é

$$7x^2 - 6x - 4 = 0,$$

da qual

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{7}.$$

Logo, $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{37}}{7}$ e $\overline{\alpha} = \dfrac{3-\sqrt{37}}{7}$.

O irracional β é obtido invertendo a ordem dos quocientes da expansão de α. Assim, $\beta = [\overline{2; 3, 1}]$ também tem expansão estritamente periódica e é a raiz positiva da equação

$$\beta = [2; 3, 1, \beta].$$

E, aplicando as recorrências (2.4), temos

Tabela 16 – Quocientes parciais e convergentes de β

n	-2	-1	0	1	2	3
a_n	/	/	2	3	1	β
p_n	0	1	2	7	9	$9\beta+7$
q_n	1	0	1	3	4	$4\beta+3$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Segue do Corolário 1 que

$$\beta = \frac{9\beta+7}{4\beta+3}$$

cuja forma quadrática é

$$4\beta^2 - 6\beta - 7 = 0,$$

donde

$$\beta = \frac{3+\sqrt{37}}{4} \quad \text{e} \quad \overline{\beta} = \frac{3-\sqrt{37}}{4}.$$

De fato, $-\dfrac{1}{\beta} = -\dfrac{4}{3+\sqrt{37}} = \dfrac{3-\sqrt{37}}{7} = \overline{\alpha}$.

Teorema 10. *(Recíproca do Teorema 9)* Se α for um irracional quadrático reduzido, então sua representação, por fração contínua simples, será estritamente periódica.

Para provar este teorema utilizaremos os seguintes lemas.

Lema 2. Seja D é um inteiro que não é quadrado perfeito. Para qualquer D, existe apenas um número finito de irracionais quadráticos reduzidos associados a ele.

Demonstração. (Lema 2): Seja $\alpha = \dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$, r, $q > 0$, $D > 1$ uma redução irracional quadrática e, $\overline{\alpha}$ é o seu conjugado, então por definição

$$\alpha = \frac{r+\sqrt{D}}{q} > 1 \quad \text{e} \quad -1 < \overline{\alpha} = \frac{r-\sqrt{D}}{q} < 0.$$

Como D é fixo, segue das desigualdades

$$\frac{r-\sqrt{D}}{q} < 0 \Leftrightarrow r-\sqrt{D} < 0 \Leftrightarrow r < \sqrt{D},$$

e

$$\frac{r+\sqrt{D}}{q} > 1 \Leftrightarrow q < r+\sqrt{D} \Leftrightarrow q < r+\sqrt{D} < 2\sqrt{D},$$

que os inteiros r e q assumem apenas um número finito de valores distintos, pois $0 < r < \sqrt{D}$ e $0 < q < 2\sqrt{D}$. Isso conclui a prova do lema. □

Lema 3. Todo irracional quadrático pode ser escrito na forma $\dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$ em que $q \mid D-r^2$.

Demonstração. (Lema 3): Seja $\dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$ um irracional quadrático em que $r,\ q \neq 0,$ e $D \in \mathbb{Z}$ e D não é um quadrado perfeito.

Para todo $m > 0$ temos

$$\frac{r+\sqrt{D}}{q} = \frac{rm+\sqrt{Dm^2}}{qm} = \frac{\widetilde{r}+\sqrt{\widetilde{D}}}{\widetilde{q}}.$$

Tomando $m = kq$, com $k \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\frac{\widetilde{D}-\widetilde{r}^2}{\widetilde{q}} = \frac{Dm^2-(rm)^2}{qm} = m\left(\frac{D-r^2}{q}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, $\widetilde{q} \mid \widetilde{D}-\widetilde{r}^2$. □

Exemplo 28. Escreveremos o irracional quadrático $\dfrac{4+\sqrt{5}}{3}$ na forma especificada pelo Lema 3.

$$\frac{4+\sqrt{5}}{3} = \frac{4m+\sqrt{5m^2}}{3m}.$$

Isto implica que $3m \mid 5m^2-4^2m^2 \ \Leftrightarrow\ 3 \mid -11m$. Assim, $m = 3$ é uma solução e podemos escrever

$$\frac{4+\sqrt{5}}{3} = \frac{4\cdot 3+\sqrt{5\cdot 3^2}}{3\cdot 3} = \frac{12+\sqrt{45}}{9}.$$

Segue que $\dfrac{45-12^2}{9} \in \mathbb{Z}$, logo o irracional quadrático $\dfrac{12+\sqrt{45}}{9}$ está da forma especificada no Lema 3.

Demonstração. (Teorema 10): Como α é um irracional quadrático reduzido, pode ser expresso de forma única, como $\alpha = \dfrac{r+\sqrt{D}}{q}$, onde $r,\ D,\ q$ são inteiros positivos. Além disso,

$$0 < \frac{\sqrt{D}-r}{q} < 1.$$

Fazendo $\alpha = \alpha_0$, $q = q_0$ e $r = r_0$, podemos escrever como segue

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{r_0 + \sqrt{D}}{q_0} = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} > 1,$$

onde a_0 é o maior inteiro menor que α_0 e pela Definição 3

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{\alpha_0 - a_0} = \frac{1}{\dfrac{r_0+\sqrt{D}}{q_0} - a_0} = \frac{q_0}{\sqrt{D} + r - a_0 q_0} = \frac{q_0\left[\sqrt{D} + (a_0q_0 - r_0)\right]}{\left[\sqrt{D} - (a_0q_0 - r_0)\right]\left[\sqrt{D} + (a_0q_0 - r_0)\right]} \\ &= \frac{\sqrt{D} + (a_0q_0 - r_0)}{\dfrac{D - (a_0q_0 - r_0)^2}{q_0}} = \frac{r_1 + \sqrt{D}}{q_1} = a_1 + \frac{1}{\alpha_2} > 1,\end{aligned} \tag{4.8}$$

em que

$$a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor, \qquad r_1 = a_0q_0 - r_0 \quad \text{e} \quad q_1 = \frac{D - (a_0q_0 - r_0)^2}{q_0} = \frac{D - r_1^2}{q_0}.$$

r_1 é, claramente, um número inteiro e $q_1 \in \mathbb{Z}$, desde que α_1 seja um irracional quadrático da forma especificada no Lema 3.

Continuando o processo de conversão de α em frações contínuas simples e supondo que α_n seja um irracional quadrático reduzido, para cada etapa n, teremos

$$\alpha_n = \frac{r_n + \sqrt{D}}{q_n} = a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}} > 1,$$

em que

$$a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor, \qquad r_n = a_{n-1}q_{n-1} - r_{n-1}, \quad \text{e} \quad q_n = \frac{D - r_n^2}{q_{n-1}}$$

são números inteiros positivos, desde que q_{n-1} divida $D - r_n^2$ e

$$0 < \frac{\sqrt{D} - r_n}{q_n} < 1.$$

De fato,

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{\sqrt{D} + r_n}{q_n} = a_n + \frac{\sqrt{D} + r_n}{q_n} - a_n = a_n + \frac{\sqrt{D} + r_n - a_nq_n}{q_n} = a_n + \frac{\sqrt{D} - r_{n+1}}{q_n} \\ &= a_n + \frac{1}{\dfrac{q_n\left(\sqrt{D} + r_{n+1}\right)}{\left(\sqrt{D} - r_{n+1}\right)\left(\sqrt{D} + r_{n+1}\right)}} = a_n + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} + r_{n+1}}{\dfrac{D - r_{n+1}^2}{q_n}}} = a_n + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} + r_{n+1}}{q_{n+1}}},\end{aligned}$$

de modo que $\alpha_{n+1} = \dfrac{\sqrt{D} + r_{n+1}}{q_{n+1}} > 1$ e, portanto, será válido para todo n.

Inicialmente, provaremos, por indução, que $q_n's$ são inteiros positivos. De fato,

$$D - r_{n+1}^2 = D - (a_nq_n - r_n)^2 = D - \left(a_n^2q_n^2 - 2a_nq_nr_n + r_n^2\right) = D - r_n^2 - q_n\left(a_n^2q_n + 2a_nr_n\right)$$

é múltiplo de q_n já que, por hipótese, q_n divide $D - r_n^2$. Assim, $q_{n+1} = \dfrac{D - r_{n+1}^2}{q_n}$ será um inteiro não nulo tal que $q_{n+1} \mid D - r_{n+1}^2$ e, portanto, os q_n's são inteiros.

Agora, provaremos, por indução, que os q_n's e os r_n's são positivos, ou seja, $q_n > 0$ e $0 < r_n < \sqrt{D}$, o que é verdadeiro para $n = 0$, pois $r_0 = r > 0$, $q_0 = q > 0$ e D não é um quadrado perfeito. Além disso pela definição dos a_n's, temos

$$a_n < \frac{\sqrt{D} + r_n}{q_n} = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots] < a_n + 1,$$

donde, obtemos

$$a_n q_n < \sqrt{D} + r_n < a_n q_n + q_n,$$

e, portanto, já que $q_n > 0$, por hipótese de indução,

$$r_{n+1} = a_n q_n - r_n < \sqrt{D} < a_n q_n - r_n + q_n = r_{n+1} + q_n$$

e assim, $r_{n+1} < \sqrt{D}$, o que implica $q_{n+1} = \dfrac{D - r_{n+1}^2}{q_n} > 0$ também. Agora, suponhamos por absurdo, que $r_{n+1} \leq 0$. Neste caso teríamos $q_n > \sqrt{D} - r_{n+1} \geq \sqrt{D}$. Mas como $r_n < \sqrt{D}$, por hipótese de indução, teríamos $r_n < q_n$, donde $r_{n+1} = a_n q_n - r_n \geq q_n - r_n > 0$ o que é uma contradição. Logo, $r_{n+1} > 0$, completando a indução.

Por fim, verificaremos que

$$0 < \frac{\sqrt{D} - r_{n+1}}{q_{n+1}} < 1.$$

De fato,

$$\frac{\sqrt{D} - r_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{\sqrt{D} - r_{n+1}}{\dfrac{D - r_{n+1}^2}{q_n}} = \frac{\sqrt{D} - r_{n+1}}{\dfrac{\left(\sqrt{D} - r_{n+1}\right)\left(\sqrt{D} + r_{n+1}\right)}{q_n}} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} + r_{n+1}}{q_n}} = \frac{q_n}{\sqrt{D} + a_n q_n - r_n}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{D} + a_n q_n - r_n}{q_n}} = \frac{1}{a_n + \dfrac{\sqrt{D} - r_n}{q_n}} \in (0,1), \text{ pois } a_n \geq 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{\sqrt{D} - r_n}{q_n} < 1.$$

Assim, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ são todos irracionais quadráticos reduzidos associados a D e $a_0, a_1, a_2, \cdots$ são os quocientes parciais da expansão de α, por frações contínuas simples.

Como α é um número irracional, sua representação, por frações contínuas simples, é infinita. Mas, o Lema 2 estabelece que $0 < r_n < \sqrt{D}$ e $0 < q_n < 2\sqrt{D}$, o que implica na existência de apenas um número finito de irracionais quadráticos reduzidos associados à D. E, portanto, um irracional quadrático reduzido que já ocorrera, aparecerá novamente. Suponhamos que na sequência

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \cdots \alpha_{l-1}, \alpha_l, \cdots$$

os quocientes completos $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{l-1}$ sejam todos distintos, e que α_l seja o primeiro cujo valor já ocorrera, de modo que $\alpha_l = \alpha_k$, para $0 \leq k < l$. Assim,

$$\alpha_l = a_l + \frac{1}{\alpha_{l+1}} = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = \alpha_k, \tag{4.9}$$

e como a_l e a_k são os maiores inteiros menores que α_l e α_k, respectivamente, podemos concluir que $a_l = a_k$, o que implica $\alpha_{l+1} = \alpha_{k+1}$. Repetindo esse argumento, teremos $\alpha_{l+2} = \alpha_{k+2}$, $\alpha_{l+3} = \alpha_{k+3}, \cdots$. Isso mostra que se um irracional quadrático reduzido associado repete, todos os quocientes completos subsequentes também se repetirão, determinando a periodicidade da fração contínua de α.

Para $0 < k < l$, a igualdade $\alpha_l = \alpha_k$ implica $\alpha_{l-1} = \alpha_{k-1}$, $\alpha_{l-2} = \alpha_{k-2}$, $\cdots$, $\alpha_0 = \alpha_{l-k}$ e, consequentemente, a sequência $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots$ é estritamente periódica. Para comprovar isto, usaremos os respectivos conjugados dos quocientes completos α_k e α_l. Sejam $\overline{\alpha}_k = \overline{\alpha}_l$ os conjugados dos quocientes completos iguais a α_k e α_l, segue que

$$\beta_k = -\frac{1}{\overline{\alpha}_k} = -\frac{1}{\overline{\alpha}_l} = \beta_l. \tag{4.10}$$

Tomando os conjugados em (4.9), obtemos

$$\overline{\alpha}_k = a_k + \frac{1}{\overline{\alpha}_{k+1}} \quad \text{e} \quad \overline{\alpha}_l = a_l + \frac{1}{\overline{\alpha}_{l+1}}, \tag{4.11}$$

e substituindo $\overline{\alpha}_k$ por $-\frac{1}{\beta_k}$, $\overline{\alpha}_l$ por $-\frac{1}{\beta_l}$, $\overline{\alpha}_{k+1}$ por $-\frac{1}{\beta_{k+1}}$ e $\overline{\alpha}_{l+1}$ por $-\frac{1}{\beta_{l+1}}$ em (4.11), temos

$$-\frac{1}{\beta_k} = a_k + \frac{1}{-\frac{1}{\beta_{k+1}}} = a_k - \beta_{k+1} \Leftrightarrow \beta_{k+1} = a_k + \frac{1}{\beta_k} \tag{4.12}$$

e

$$-\frac{1}{\beta_l} = a_l + \frac{1}{-\frac{1}{\beta_{l+1}}} = a_l - \beta_{l+1} \Leftrightarrow \beta_{l+1} = a_l + \frac{1}{\beta_l} \tag{4.13}$$

como α_k, α_l são irracionais quadráticos reduzidos, temos que

$$0 < -\overline{\alpha}_k = \frac{1}{\beta_k} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < -\overline{\alpha}_l = \frac{1}{\beta_l} < 1.$$

Em (4.12) e (4.13) a_k e a_l são os maiores inteiros menores que β_{k+1} e β_{l+1}, respectivamente, e $a_k = a_l$ implica $\beta_{k+1} = \beta_{l+1}$ já que $\beta_k = \beta_l$, em (4.10). Continuando o processo e usando que $\frac{1}{\beta_k}, \frac{1}{\beta_l} \in (0,1)$, concluímos que $\beta_{k-1} = \beta_{l-1}$, $\cdots$, $\beta_0 = \beta_{l-k}$ e $a_{k-1} = a_{l-1}$, $\cdots$, $a_0 = a_{l-k}$. Logo a fração contínua de α é estritamente periódica e podemos escrever $\alpha = [\overline{a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{l-k-1}}]$. Isso completa a demonstração do teorema. □

Exemplo 29. Mostraremos que $\alpha = \dfrac{3+\sqrt{37}}{7}$ é um irracional quadrático reduzido e que sua representação, por frações contínuas simples, é estritamente periódica.

Temos que $\dfrac{3+\sqrt{37}}{7} > 1$ é a raiz positiva da equação quadrática de coeficientes inteiros $7x^2 - 6x - 4 = 0$ e $0 < \dfrac{\sqrt{37}-3}{7} < 1$ implica $-1 < \dfrac{3-\sqrt{37}}{7} < 0$. Logo, a raiz conjugada $\dfrac{3-\sqrt{37}}{7} \in (-1, 0)$.

Agora, fazendo $\alpha_0 = \dfrac{3+\sqrt{37}}{7} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ q_0 = 7 \\ r_0 = 3 \end{cases}$

e, aplicando as recorrências $\begin{cases} r_{n+1} = a_n q_n - r_n \\ q_{n+1} = \dfrac{D - r_{n+1}^2}{q_n}, \end{cases}$ completamos a Tabela 17.

Tabela 17 – Reduzidos associados à fração contínua simples de α

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
a_n	1	3	2	1	3	2	1	$\cdots$
q_n	7	3	4	7	3	4	7	$\cdots$
r_n	3	4	5	3	4	5	3	$\cdots$
α_n	$\frac{3+\sqrt{37}}{7}$	$\frac{4+\sqrt{37}}{3}$	$\frac{5+\sqrt{37}}{4}$	$\frac{3+\sqrt{37}}{7}$	$\frac{4+\sqrt{37}}{3}$	$\frac{5+\sqrt{37}}{4}$	$\frac{3+\sqrt{37}}{7}$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Notemos que $\alpha_3 = \alpha_0$ e o período é $k = 3$. Assim, os valores irão se repetir de modo que $\alpha_n = \alpha_{n+3}$, $q_n = q_{n+3}$, $r_n = r_{n+3}$ e $a_n = a_{n+3}$. Logo, o número $\dfrac{3+\sqrt{37}}{7} = [\overline{1; 3, 2}]$ tem expansão, por frações contínuas simples, estritamente periódica.

Além disso, $[\overline{2; 3, 1}] = \dfrac{3+\sqrt{37}}{4} = \beta_0$ e como $\beta_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{\beta_n}$, temos

$$\beta_1 = 1 + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{37}}{4}} = 1 + \frac{4}{3+\sqrt{37}} = \frac{4+\sqrt{37}}{7} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\beta_1} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{37}+4}{7}} = \frac{4-\sqrt{37}}{3} = \overline{\alpha_1};$$

$$\beta_2 = 3 + \frac{1}{\frac{4+\sqrt{37}}{7}} = 3 + \frac{7}{4+\sqrt{37}} = \frac{5+\sqrt{37}}{3} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\beta_2} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{37}+5}{3}} = \frac{5-\sqrt{37}}{4} = \overline{\alpha_2};$$

$$\beta_3 = 2 + \frac{1}{\frac{5+\sqrt{37}}{3}} = 2 + \frac{3}{5+\sqrt{37}} = \frac{3+\sqrt{37}}{4} \quad \text{e} \quad -\frac{1}{\beta_3} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{37}+3}{4}} = \frac{3-\sqrt{37}}{7} = \overline{\alpha_3} = \overline{\alpha_0}.$$

4.2.2 Frações contínuas de $\sqrt{D}$

Apresentaremos a expansão por frações contínuas simples de números irracionais quadráticos da forma $\sqrt{D}$, em que D é um número inteiro positivo, que não é um quadrado perfeito. As expansões desse tipo de número têm características interessantes que serão úteis na determinação da solução da equação de Pell. Os resultados a seguir apoiam-se em informações contidas em (OLDS, 1963, p. 112 - 113).

Teorema 11. Todo número inteiro positivo D, que não é um quadrado perfeito tem expansão, por frações contínuas simples, periódica, mais precisamente

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}], \text{ para algum } n.$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que $\sqrt{D}$ é maior que 1 e seu conjugado é $-\sqrt{D}$ e não está entre -1 e 0. Logo, $\sqrt{D}$ não é um irracional quadrático reduzido. Por outro lado, $\lfloor \sqrt{D} \rfloor = a_0$ é o maior inteiro menor que $\sqrt{D}$. O número $\sqrt{D} + a_0$ é maior que 1 e seu conjugado $a_0 - \sqrt{D}$ situa-se entre -1 e 0, assim, $\sqrt{D} + a_0$ é um irracional quadrático reduzido e pelo Teorema 10, tem expansão estritamente periódica, ou seja,

$$\sqrt{D} + a_0 = 2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{2a_0 + \cdots}}} = [2a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, \cdots],$$

que é equivalente a

$$\sqrt{D} + a_0 = 2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \, a_{n-1} + \cfrac{1}{2a_0 + \cdots}}} = [\overline{2a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}].$$

Subtraindo a_0 de ambos os membros, concluímos que

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}],$$

sendo que o período, denotaremos por k, inicia em a_1 e termina com o termo $2a_0$. □

4.2.2.1 Alguns padrões simples da expansão de $\sqrt{D}$

Aplicando a Definição 3 à irracionais quadráticos da forma $\sqrt{D}$ obtemos diversos padrões simples que podem facilitar o processo de representação desse tipo de número, por frações contínuas simples. A seguir temos alguns desses padrões

a) $\sqrt{k^2+1} = [k; \overline{2k}]$, $k > 0$

b) $\sqrt{k^2-1} = [k-1; \overline{1, 2(k-1)}]$, $k > 1$

c) $\sqrt{k^2+2} = [k; \overline{k, 2k}]$, $k > 0$

d) $\sqrt{(k+1)^2-1} = [k; \overline{1, 2k}]$, $k > 0$

e) $\sqrt{k^2+k} = [k; \overline{2, 2k}]$, $k > 0$

f) $\sqrt{k^2-k} = [k-1; \overline{2, 2(k-1)}]$, $k > 1$

No exemplo a seguir, verificaremos apenas o item e). Os demais itens podem ser verificados adotando-se método semelhante.

Exemplo 30. Mostraremos que, para todo inteiro positivo k, temos a seguinte expansão por frações contínuas simples $\sqrt{k^2+k} = [k; \overline{2, 2k}]$.

Consideremos $\alpha_0 = D = k^2+k$. Segue que

$$k^2 < D < (k+1)^2 \Rightarrow k < \sqrt{D} < k+1 \Rightarrow a_0 = k. \tag{4.14}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{D}-k} = \frac{\sqrt{D}+k}{\left(\sqrt{D}-k\right)\left(\sqrt{D}+k\right)} = \frac{\sqrt{D}+k}{D-k^2} = \frac{\sqrt{D}+k}{k^2+k-k^2} = \frac{\sqrt{D}+k}{k}.$$

De (4.14), temos

$$k < \sqrt{D} < k+1 \Rightarrow 2k < \sqrt{D}+k < 2k+1 \Rightarrow 2 < \frac{\sqrt{D}+k}{k} < \frac{2k+1}{k} \Rightarrow a_1 = 2.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{D}+k}{k}-2} = \frac{k\left(\sqrt{D}+k\right)}{\left(\sqrt{D}-k\right)\left(\sqrt{D}+k\right)} = \frac{k\left(\sqrt{D}+k\right)}{D-k^2} = \frac{k\left(\sqrt{D}+k\right)}{k^2+k-k^2} = \sqrt{D}+k.$$

Novamente, de (4.14), temos

$$k < \sqrt{D} < k+1 \Rightarrow 2k < \sqrt{D}+k < 2k+1 \Rightarrow a_2 = 2k = 2a_0.$$

Logo, $\sqrt{k^2+k} = [k; \overline{2, 2k}]$.

Exemplo 31. Aplicando os padrões descritos acima, obteremos a expansão correspondente a cada um deles, considerando $k=3$.

a) $\sqrt{3^2+1} = \sqrt{10} = [3; \overline{6}]$

b) $\sqrt{3^2-1} = \sqrt{8} = [2; \overline{1, 4}]$

c) $\sqrt{3^2+2} = \sqrt{11} = [3; \overline{3, 6}]$

d) $\sqrt{(3+1)^2-1} = \sqrt{15} = [3; \overline{1, 6}]$

e) $\sqrt{3^2+3} = \sqrt{12} = [3; \overline{2, 6}]$

f) $\sqrt{3^2-3} = \sqrt{6} = [2; \overline{2, 4}]$

4.2.2.2 Simetrias nas expansões de $\sqrt{D}$

Consideremos as expansões

$$\sqrt{29} = [5; \overline{2, 1, 1, 2, 10}] \qquad \text{e} \qquad \sqrt{31} = [5; \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}],$$

cujos períodos são, respectivamente, $k=5$ e $k=8$.

Notemos que a parte periódica tem início após o primeiro quociente e termina com o termo $2a_0$. Com exceção do termo $2a_0$, a parte periódica é simétrica em relação ao centro do período, mas essa parte simétrica pode não ter um termo central.

Para investigarmos essa simetria, lembremos que $\overline{\alpha} = a_0 - \sqrt{D}$ é o conjugado de $\alpha = a_0 + \sqrt{D}$. Assim, a expansão de $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ é idêntica à expansão de α, mas com o período invertido.

Invertendo o período da expansão de α, obtemos

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = [a_{n-1}; \cdots, a_1, 2a_0, a_{n-1}, \cdots].$$

Temos que

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, a_1, a_2, \cdots].$$

Para obtermos a expansão de $\sqrt{D} - a_0$, devemos subtrair a_0 em ambos os lados da equação.

$$\sqrt{D} - a_0 = [0; a_1, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, a_1, a_2, \cdots].$$

E o inverso desta expressão é

$$\frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = [a_1; a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, a_1, \cdots].$$

Como as expansões de números irracionais, por frações contínuas simples, são únicas, comparando as expansões

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = [a_{n-1}; a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1, 2a_0, a_{n-1}, a_{n-2} \cdots]$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{D} - a_0} = [a_1; a_2, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1}, 2a_0, a_1, a_2, \cdots]$$

temos que $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, $\cdots$, $a_2 = a_{n-2}$, $a_1 = a_{n-1} = a_1$. Isso nos leva a concluir que a fração contínua de $\sqrt{D}$ tem, necessariamente, a forma

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_3, a_2, a_1, 2a_0}].$$

4.3 Frações contínuas e a equação de Pell

Nesta seção aplicaremos a teoria das frações contínuas simples à irracionais quadráticos da forma $\sqrt{D}$ para determinarmos as soluções da equação de Pell. Temos como referência as informações contidas em (BADAWI, 2016, p. 81 - 88) e (YIU, 2008, p. 413 - 417).

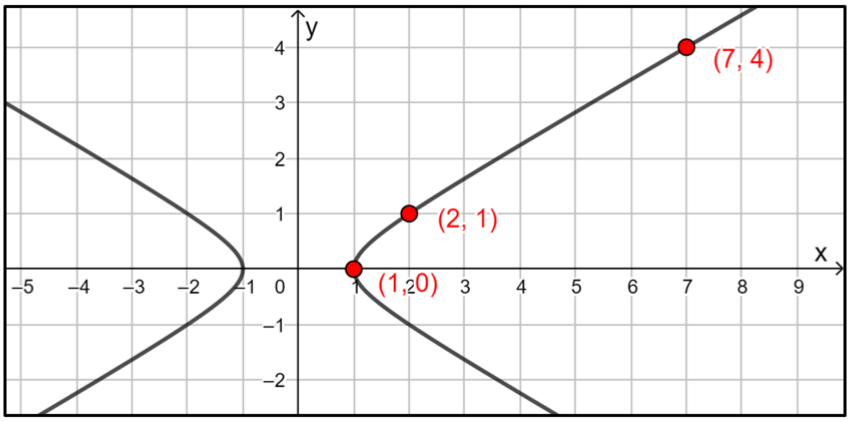
Definição 13. Denominamos **equação de Pell** a equação da forma

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1, \text{ na qual } D \in \mathbb{N},\ \sqrt{D} \notin \mathbb{N} \text{ e } x, y \in \mathbb{Z}.$$

A representação, em coordenadas cartesianas, da equação de Pell $x^2 - Dy^2 = 1$ corresponde a uma hipérbole. Na Figura 9 podemos visualizar a representação da equação $x^2 - 3y^2 = 1$, na qual os pontos $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(7, 4)$ têm coordenadas inteiras e estão sobre a hipérbole, ou seja, são soluções da equação. Substituindo, por exemplo, as coordenados do ponto $(7, 4)$ verificamos que $7^2 - 3 \cdot 4^2 = 49 - 48 = 1$ é uma solução particular da equação $x^2 - 3y^2 = 1$.

Exemplo 32. Vejamos a representação geométrica da equação $x^2 - 3y^2 = 1$.

Figura 9 – Representação cartesiana da equação $x^2 - 3y^2 = 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nosso interesse é determinar soluções inteiras para a equação de Pell, caso existam. Há um meio eficiente para decidirmos sobre a existência de soluções? Se uma equação de Pell for solucionável, quantas soluções existem? E, como determiná-las?

4.3.1 Determinando a solução fundamental para a equação de Pell

Nesta subseção, mostraremos que a resolução da equação $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ não se dá de forma óbvia. Obteremos a solução estabelecendo de um método que associa o par ordenado (x, y), que satisfaz a equação, à sequência dos convergentes da fração contínua simples de $\sqrt{D}$.

- Se D for um quadrado perfeito, digamos, $D = d^2$ temos

$$x^2 - d^2y^2 = 1 \;\Rightarrow\; (x - dy) \cdot (x + dy) = 1$$

que admite apenas as soluções triviais $(-1, 0)$, $(1, 0)$, e

$$x^2 - d^2y^2 = -1 \;\Rightarrow\; (x - dy) \cdot (x + dy) = -1$$

que não admite soluções triviais.

- Se D não for um quadrado perfeito, então $\sqrt{D}$ é um número irracional, Teorema 1. É este o caso que nos interessa e sobre o qual discutiremos.

Proposição 14. Se o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ é uma solução para equação $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, então $x = p_n$ e $y = q_n$ para algum convergente $\dfrac{p_n}{q_n}$ da expansão da $\sqrt{D}$, por frações contínuas.

Demonstração. (i) Se (x, y) for uma solução positiva da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, então

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

implica

$$x > y\sqrt{D}.$$

Agora, escrevendo $x^2 - Dy^2 = 1$ na forma fatorada e substituindo x por $y\sqrt{D}$, temos

$$\begin{aligned}(x - y\sqrt{D})(x + y\sqrt{D}) &= 1\\ \left|x - y\sqrt{D}\right| &= \frac{1}{x + y\sqrt{D}} < \frac{1}{y\sqrt{D} + y\sqrt{D}} < \frac{1}{2y\sqrt{D}} < \frac{1}{2y}\end{aligned}$$

e, dividindo ambos os lados por y, obtemos

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{D}\right| < \frac{1}{2y^2}$$

e, pelo Teorema 4, $\frac{x}{y}$ é um convergente da expansão de $\sqrt{D}$ por frações contínuas simples.

(ii) Se (x, y) for uma solução positiva de $x^2 - Dy^2 = -1$, temos que

$$y^2 - \frac{x^2}{D} = \frac{1}{D} > 0$$

e

$$y^2 - \frac{x^2}{D} > 0$$

implica

$$y > \frac{x}{\sqrt{D}}.$$

Escrevendo $y^2 - \frac{x^2}{D}$ na forma fatorada, temos que

$$\begin{aligned}\left(y - \frac{x}{\sqrt{D}}\right)\left(y + \frac{x}{\sqrt{D}}\right) &= \frac{1}{D}\\ y - \frac{x}{\sqrt{D}} &= \frac{1}{D\left(y + \frac{x}{\sqrt{D}}\right)},\end{aligned}$$

dividindo ambos os lados por x e substituindo y por $\frac{x}{\sqrt{D}}$, obtemos

$$\frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{D}} = \frac{1}{Dx\left(y + \frac{x}{\sqrt{D}}\right)} < \frac{1}{Dx\left(\frac{x}{\sqrt{D}} + \frac{x}{\sqrt{D}}\right)} = \frac{1}{2x^2\sqrt{D}} < \frac{1}{2x^2}.$$

Isto implica que

$$\left|\frac{1}{\sqrt{D}} - \frac{y}{x}\right| < \frac{1}{2x^2}$$

e, pelo Teorema 4, $\frac{y}{x}$ é um convergente da expansão de $\frac{1}{\sqrt{D}}$ por fração contínua simples.

Como $\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, \cdots]$, segue que $\frac{1}{\sqrt{D}} = [0; a_0, a_1, a_2, \cdots]$, sendo o racional $\frac{y}{x} = [0; a_0, a_1, \cdots, a_n]$, para algum n. À vista disto, $\frac{x}{y} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$. Portanto, $\frac{x}{y}$ é um convergente de $\sqrt{D}$. $\square$

Exemplo 33. Os pares ordenados $(2,1), (7,4)$ são soluções da equação $x^2 - 3y^2 = 1$. Segue da Tabela 18

Tabela 18 – Primeiros convergentes de $\sqrt{3}$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
$\frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

que $\frac{2}{1} = \frac{p_1}{q_1}, \frac{7}{4} = \frac{p_3}{q_3}$ são convergentes da expansão de $\sqrt{3}$, por fração contínuas simples.

As soluções da equação de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, se existirem, pertencem, inevitavelmente, à sequência de convergentes da fração contínua de $\sqrt{D}$. Equações da forma $x^2 - Dy^2 = -1$ nem sempre tem solução. Por exemplo, a equação $x^2 - 3y^2 = -1$, não possui soluções inteiras. Por outro lado, equações da forma $x^2 - Dy^2 = 1$ sempre possui solução.

Teorema 12. Seja $D \in \mathbb{N}$ e $\sqrt{D} \notin \mathbb{N}$, com $\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0}]$. Sejam também os números p_{n-1} e q_{n-1} definidos pela Proposição 1.

(i) Se o tamanho n do período for par então $(x, y) = (p_{n-1}, q_{n-1})$ é solução inteira da equação $x^2 - Dy^2 = 1$.

(ii) Se o tamanho n do período for ímpar então $(x, y) = (p_{n-1}, q_{n-1})$ é solução inteira da equação $x^2 - Dy^2 = -1$ e $(x, y) = (p_{2n-1}, q_{2n-1}) = \left(p_{n-1}^2 + Dq_{n-1}^2,\ 2p_{n-1}q_{n-1}\right)$ é solução inteira da equação $x^2 - Dy^2 = 1$.

Demonstração. Da Subseção 4.2.2, temos que

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, a_1, a_2, \cdots, 2a_0, \cdots].$$
$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \alpha_n].$$
$$\alpha_n = [2a_0; a_1, a_2, \cdots, 2a_0,\ a_1, a_2, \cdots] = \sqrt{D} + a_0.$$
$$\sqrt{D} = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{\left(\sqrt{D} + a_0\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(\sqrt{D} + a_0\right) q_{n-1} + q_{n-2}}$$
$$Dq_{n-1} + a_0 q_{n-1}\sqrt{D} + q_{n-2}\sqrt{D} = p_{n-1}\sqrt{D} + a_0 p_{n-1} + p_{n-2}.$$

Separando a parte racional da irracional obtemos as equações

$$p_{n-2} = Dq_{n-1} - a_0 p_{n-1} \qquad \text{e} \qquad q_{n-2} = p_{n-1} - a_0 q_{n-1}. \tag{4.15}$$

Segue de (2.5) que

$$p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^{n-2}$$

e substituindo (4.15), obtemos

$$\begin{aligned}
p_{n-1}\left(p_{n-1} - a_0 q_{n-1}\right) - q_{n-1}\left(Dq_{n-1} - a_0 p_{n-1}\right) &= (-1)^{n-2} \\
p_{n-1}^2 - a_1 p_{n-1} q_{n-1} - Dq_{n-1}^2 + a_0 p_{n-1} q_{n-1} &= (-1)^{n-2} \\
p_{n-1}^2 - Dq_{n-1}^2 &= (-1)^{n-2} = (-1)^n,
\end{aligned}$$

onde n, comprimento do período, é o número de quocientes que precedem o termo $2a_0$.

(i) Se n for par
$p_{n-1}^2 - Dq_{n-1}^2 = (-1)^n = 1$ e $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{x_0}{y_0}$. Então o par ordenado $(x_0, y_0) = (p_{n-1}, q_{n-1})$ é a menor solução da equação $x^2 - Dy^2 = 1$.

(ii) Se n for ímpar
$p_{n-1}^2 - Dq_{n-1}^2 = (-1)^n = -1$ e $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{x_0}{y_0}$. Então o par ordenado $(x_0, y_0) = (p_{n-1}, q_{n-1})$ é a menor solução da equação $x^2 - Dy^2 = -1$. Enquanto a menor solução da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ é dada pelo par ordenado $(x_0, y_0) = \left(p_{n-1}^2 + Dq_{n-1}^2,\ 2p_{n-1}q_{n-1}\right)$.

Determinar o par ordenado $(x_0, y_0) = \left(p_{n-1}^2 + Dq_{n-1}^2,\ 2p_{n-1}q_{n-1}\right)$ consiste em avançar para o segundo período da expansão de $\sqrt{D}$, ou seja, obter o termo a_n pela segunda vez, como segue

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 2a_0, \cdots, a_1, a_2, \cdots].$$

$$\sqrt{D} = [a_0; a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}, \cdots, a_{3n-1}, a_{3n}, a_{3n+1}, \cdots].$$

Desse modo, $p_{2n-1}^2 - Dq_{2n-1}^2 = (-1)^{2n} = 1$ e $\dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \dfrac{x_0}{y_0}$. Logo, o par ordenado $(x_0, y_0) = (p_{2n-1}, q_{2n-1})$ é a solução fundamental da equação $x^2 - Dy^2 = 1$.

Portanto, (p_{n-1}, q_{n-1}) é a solução fundamental de

$$\begin{cases} x^2 - Dy^2 = 1, & \text{se } n \text{ for par} \\ x^2 - Dy^2 = -1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

e $(x_0, y_0) = (p_{2n-1}, q_{2n-1}) = \left(p_{n-1}^2 + Dq_{n-1}^2,\ 2p_{n-1}q_{n-1}\right)$ é a solução fundamental da equação $x^2 - Dy^2 = 1$, se n for ímpar. □

4.3.2 Determinando outras soluções para a equação de Pell

As demais soluções positivas da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ e da equação $x^2 - Dy^2 = -1$, quando esta for solucionável, também pertencem à sequência de convergentes da expansão de $\sqrt{D}$, por frações contínuas simples. Para obtermos tais soluções consideremos, para $n > 0$, a seguinte equação geral, para o k-ésimo período da expansão de $\sqrt{D}$.

$$p_{kn-1}^2 - Dq_{kn-1}^2 = (-1)^{kn},$$

onde, conforme Badawi (2016, p. 86):

(a) Todas as soluções positivas da equação $x^2 - Dy^2 = 1$ são dadas por

$$(x, y) = \begin{cases} (p_{kn-1}, q_{kn-1}), k \in \mathbb{N}^* & \text{se } n \text{ for par} \\ (p_{2kn-1}, q_{2kn-1}), k \in \mathbb{N}^* & \text{se } n \text{ for ímpar.} \end{cases}$$

(b) Todas as soluções positivas da equação $x^2 - Dy^2 = -1$ são dadas por

$$(x, y) = \begin{cases} (p_{(2k-1)n-1}, q_{(2k-1)n-1}), k \in \mathbb{N}^* & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \text{não há soluções, se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Exemplo 34. Obteremos as cinco primeiras soluções particulares da equação $x^2 - 3y^2 = 1$.

Temos que $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$, o período $n = 2$. Segue que a solução fundamental é $(x_0, y_0) = (p_1, q_1)$. Na Tabela 18, temos os primeiros convergentes da expansão de $\sqrt{3}$.

Tabela 19 – Quocientes parciais e convergentes de $\sqrt{3}$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n	/	/	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	$\cdots$
p_n	0	1	1	2	5	7	19	26	71	97	265	362	$\cdots$
q_n	1	0	1	1	3	4	11	15	41	56	153	209	$\cdots$
$\frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{11}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{71}{41}$	$\frac{97}{56}$	$\frac{265}{153}$	$\frac{362}{209}$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, $(2, 1)$ é a solução fundamental da equação $x^2 - 3y^2 = 1$, pois $2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$.

Além disso, o conjunto de todas as soluções positivas de $x^2 - 3y^2 = 1$ é

$$(x, y) = \{(p_{2k-1}, q_{2k-1}), k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Na tabela a seguir, Tabela 20, mostramos as soluções para $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Tabela 20 – Primeiras soluções positivas de $x^2 - 3y^2 = 1$

k	(p_{2k-1}, q_{2k-1})	$x^2 - Dy^2$
1	$(p_1, q_1) = (2, 1)$	$2^2 - 3 \cdot 1^2 = 1$
2	$(p_3, q_3) = (7, 4)$	$7^2 - 3 \cdot 4^2 = 1$
3	$(p_5, q_5) = (26, 15)$	$26^2 - 3 \cdot 15^2 = 1$
4	$(p_7, q_7) = (97, 56)$	$97^2 - 3 \cdot 56^2 = 1$
5	$(p_9, q_9) = (362, 209)$	$362^2 - 3 \cdot 209^2 = 1$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 35. A equação $x^2 - 3y^2 = -1$ não possui soluções inteiras, pois $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$ tem período $n = 2$ e equações da forma $x^2 - Dy^2 = -1$ não é solucionável se o n for par.

Exemplo 36. Vamos obter a solução fundamental da equação $x^2 - 13y^2 = 1$.

Temos que $\sqrt{13} = [3; \overline{1, 1, 1, 1, 6}]$, o período $n = 5$. Segue que a solução fundamental é $(x_0, y_0) = (p_9, q_9)$. Na Tabela 21, temos os primeiros convergentes da expansão de $\sqrt{13}$.

Tabela 21 – Quocientes parciais e convergentes de $\sqrt{13}$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
a_n	/	/	3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	6	$\cdots$
p_n	0	1	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649	4287	$\cdots$
q_n	1	0	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180	1189	$\cdots$
$\frac{p_n}{q_n}$	/	/	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{18}{5}$	$\frac{119}{33}$	$\frac{137}{38}$	$\frac{256}{71}$	$\frac{393}{109}$	$\frac{649}{180}$	$\frac{4287}{1189}$	$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim, o par ordenado $(649, 180)$ é a solução fundamental da equação $x^2 - 13y^2 = 1$, pois $649^2 - 13 \cdot 180^2 = 1$.

Além disso, o conjunto de todas as soluções positivas de $x^2 - 13y^2 = 1$ é

$$(x, y) = \{(p_{10k-1}, q_{10k-1}),\, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Desse modo, o método de resolução da equação de Pell através de frações contínuas simples possibilita obter, além da solução fundamental, as demais soluções.

CAPÍTULO

5

MÉTODOS GERAIS PARA EXTRAÇÃO DE RAÍZES ATRAVÉS DE FRAÇÕES CONTÍNUAS

Nos capítulos anteriores, conhecemos algumas propriedades relativas às representações, por frações contínuas simples, de números racionais e números irracionais quadráticos. Mostramos, através do Teorema 8, que as representações de números irracionais quadráticos, por frações contínuas simples, são sempre periódicas. No entanto,

> nenhuma prova análoga é conhecida para frações contínuas representando números irracionais algébricos de graus mais altos. Em geral, tudo o que se sabe sobre a aproximação de números algébricos de graus mais altos por frações racionais equivale a alguns corolários elementares do teorema de Liouville, e algumas proposições mais recentes o fortalecem. É interessante notar que, atualmente, não sabemos a expansão da fração contínua de um único número algébrico de grau maior que 2. Não sabemos, por exemplo, se os conjuntos de elementos nessas expansões são limitados ou ilimitado. Em geral, questões relacionadas à expansão da fração contínua de números algébricos de maior grau que o segundo são extremamente difíceis e tem sido pouco estudadas (KHINCHIN, 1964, p. 50).

Em suma, não existe nenhum método elementar eficiente que permita obter a expansão, por frações contínuas simples, de números que não sejam racionais ou irracionais quadráticos.

Nas próximas seções, descreveremos um método alternativo que permitirá representar, por frações contínuas, números irracionais algébricos da forma $\sqrt[n]{y^m}$, tendo como referência as informações contidas em Sardina (2007) e, devido a falta de comprovações formais, utilizaremos exemplos numéricos para justificar a eficácia do método. Na última seção, apresentaremos outras expansões, por frações contínuas, inclusive para e e π. Tais representações foram obtidas por matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do tema ao longo de várias décadas.

Algumas dessas representações estão na forma geral que são expressões cujas formas expandida e abreviada são, respectivamente,

$$x = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots \cfrac{}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n + \cdots}}}} \overset{def}{=} a_0 + \frac{b_1}{a_1 +} \frac{b_2}{a_2 +} \cdots \frac{b_n}{a_n +} \cdots.$$

nas quais, os a_n's e b_n's são, respectivamente, os denominadores e numeradores parciais.

No que segue, seja $b = y - a^n$, em que a é uma primeira aproximação, tomado como o maior inteiro tal que $a^n \leq y$ e x é a aproximação que queremos determinar:

$$r = \sqrt[n]{y^m} = (y)^{\frac{m}{n}} = (a^n + b)^{\frac{m}{n}} = a^m + x. \tag{5.1}$$

5.1 Fórmula geral para raízes quadradas

Seja a um número inteiro tal que $a^2 \leq y$, com $m = 1$ e $n = 2$, em (5.1), podemos escrever.

$$r = \sqrt{y} = (y)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2 + b\right)^{\frac{1}{2}} = a + x,$$

em que a é a primeira estimativa para a raiz, ou seja, $r_1 = a$. Segue que

$$\left[\left(a^2 + b\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = (a + x)^2 \Leftrightarrow a^2 + b = a^2 + 2ax + x^2,$$

donde

$$x = \frac{b}{2a + x}.$$

Esta fórmula será usada, recursivamente, para calcularmos estimativas mais precisas de x e a reescreveremos como

$$x_{k+1} = \frac{b}{2a + x_k}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \cdots, \text{ em que } x_0 = 0. \tag{5.2}$$

Segue que

$$x_1 = \frac{b}{2a}$$

é a primeira estimativa de aproximação para x e a segunda aproximação para r é

$$r_2 = a + \frac{b}{2a}.$$

Agora, temos que

$$x_2 = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}$$

é a segunda estimativa de aproximação para x e a terceira aproximação para r é dada por

$$r_3 = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}$$

Para a k-ésima substituição de x_k por $\dfrac{b}{2a+x_k}$, em (5.2), obtemos

$$x_k = \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots \cfrac{}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}}}} = \underbrace{\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots\frac{b}{2a}}_{k \text{ termos}}$$

e

$$r_{k+1} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots \cfrac{}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a}}}}} = a + \underbrace{\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots\frac{b}{2a}}_{k+1 \text{ termos}}.$$

Continuando o processo, podemos obter a seguinte expansão para r.

$$r = \sqrt{y} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}} = a + \frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\frac{b}{2a+}\cdots. \tag{5.3}$$

Exemplo 37. Representaremos, por frações contínuas, o irracional $\sqrt{6}$.

Como $y = 6$, tomando $a = 2$, $b = 2$ e aplicando (5.3), temos

$$r = \sqrt{6} = 2 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{2}{4 + \ddots}}} = 2 + \frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\frac{2}{4+}\cdots.$$

Tomando $y = 6$, $a = 1$ e $b = 5$, temos

$$r = \sqrt{6} = 1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{5}{2 + \ddots}}} = 1 + \frac{5}{2+}\frac{5}{2+}\frac{5}{2+}\cdots.$$

Tomando $y = 6$, $a = \dfrac{5}{2}$ e $b = -\dfrac{1}{4}$, temos

$$r = \sqrt{6} = \frac{5}{2} - \cfrac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5 - \cfrac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5 - \cfrac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5 - \ddots}}} = \frac{5}{2} - \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5\,-}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5\,-}\,\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{5\,-}\,\cdots.$$

Tomando $y = 6$, $a = 3$ e $b = -3$, temos

$$r = \sqrt{6} = 3 - \cfrac{3}{6 - \cfrac{3}{6 - \cfrac{3}{6 - \ddots}}} = 3 - \frac{3}{6\,-}\,\frac{3}{6\,-}\,\frac{3}{6\,-}\,\cdots.$$

Observação 7. Como vimos no Exemplo 37, a expressão (5.3) permite-nos encontrar mais de uma representação, por frações contínuas gerais, para raiz quadrada de um número irracional. Se y puder ser expresso como $a^2 + 1$, então $b = 1$ e a fórmula nos dá a representação por fração contínua simples.

5.2 Fórmula geral para raízes da forma $\sqrt[3]{y}$

Seja a um número inteiro tal que $a^3 \leq y$, com $m = 1$ e $n = 3$, em (5.1), podemos escrever

$$r = \sqrt[3]{y} = (y)^{\frac{1}{3}} = \left(a^3 + b\right)^{\frac{1}{3}} = a + x,$$

em que a é a primeira aproximação para a raiz, ou seja, $r_1 = a$. E, escrevendo

$$\left[\left(a^3 + b\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = (a + x)^3 \Leftrightarrow a^3 + b = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

temos

$$x = \frac{b}{3a^2 + 3ax + x^2}.$$

Esta fórmula será usada, recursivamente, para calcularmos estimativas mais precisas de x e a reescreveremos como

$$x_{k+1} = \frac{b}{3a^2 + 3ax_k + x_k^2}, \text{ para } k = 0, 1, 2, \cdots, \text{ em que } x_0 = 0. \tag{5.4}$$

Segue que

$$x_1 = \frac{b}{3a^2}$$

é a primeira estimativa de aproximação para x e a segunda aproximação da raiz é dada por

$$r_2 = a + \frac{b}{3a^2}.$$

Agora, substituindo x_1, em (5.4), temos que

$$x_2 = \frac{b}{3a^2 + 3a\left(\frac{b}{3a^2}\right) + \left(\frac{b}{3a^2}\right)^2} = \frac{b}{3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{9a^4}}$$

e obtemos a terceira aproximação da raiz, tomando a primeira nova fração de x_2.

$$r_3 = a + \frac{b}{3a^2 + \frac{b}{a}} = a + \frac{b}{3a^2 + \frac{2b}{2a}}.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
x_3 &= \frac{b}{3a^2 + 3a\left[\frac{b}{3a^2 + 3a\left(\frac{b}{3a^2}\right) + \left(\frac{b}{3a^2}\right)^2}\right] + \left[\frac{b}{3a^2 + 3a\left(\frac{b}{3a^2}\right) + \left(\frac{b}{3a^2}\right)^2}\right]^2} \\
&= \frac{b}{3a^2 + 3a\left[\frac{b}{3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{9a^4}}\right] + \left[\frac{b}{3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{9a^4}}\right]^2} \\
&= \frac{b}{3a^2 + \frac{3ab}{3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{9a^4}} + \frac{b^2}{9a^4 + 6ab + \frac{5b^2}{3a^2} + \frac{2b^3}{9a^5} + \frac{b^4}{81a^8}}} \\
&= \frac{b}{3a^2 + \frac{3ab\left(3a^2 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{9a^4}\right) + b^2}{9a^4 + 6ab + \frac{5b^2}{3a^2} + \frac{2b^3}{9a^5} + \frac{b^4}{81a^8}}} = \frac{b}{3a^2 + \frac{9a^3b + 4b^2 + \frac{b^3}{3a^3}}{9a^4 + 6ab + \frac{5b^2}{3a^2} + \frac{2b^3}{9a^5} + \frac{b^4}{81a^8}}} \\
&= \frac{b}{3a^2 + \frac{b\left(9a^3 + 4b + \frac{b^2}{3a^3}\right)}{9a^4 + 6ab + \frac{5b^2}{3a^2} + \frac{2b^3}{9a^5} + \frac{b^4}{81a^8}}} = \frac{b}{3a^2 + \frac{b}{\frac{9a^4 + 6ab + \frac{5b^2}{3a^2} + \frac{2b^3}{9a^5} + \frac{b^4}{81a^8}}{9a^3 + 4b + \frac{b^2}{3a^3}}}} \\
&= \frac{b}{3a^2 + \frac{b}{a + \frac{2b}{9a^2} + \frac{4b^2}{81a^5} - \frac{4b^3}{729a^8}\cdots}}
\end{aligned}$$

é a terceira estimativa de aproximação para x, e tomando a primeira nova fração em x_3, obtemos a quarta aproximação da raiz.

$$r_4 = a + \cfrac{b}{3a^2 + \cfrac{b}{a + \cfrac{2b}{9a^2}}} = a + \cfrac{b}{3a^2 + \cfrac{2b}{2a + \cfrac{4b}{9a^2}}}.$$

A próxima iteração, em (5.4), permitirá obtermos a quarta estimativa de aproximação para x

$$x_4 = \frac{b}{3a^2 + 3a\left[\dfrac{b}{3a^2+3a\left[\dfrac{b}{3a^2+3a\left(\frac{b}{3a^2}\right)+\left(\frac{b}{3a^2}\right)^2}\right]+\left[\dfrac{b}{3a^2+3a\left(\frac{b}{3a^2}\right)+\left(\frac{b}{3a^2}\right)^2}\right]^2}\right] + \left[\dfrac{b}{3a^2+3a\left[\dfrac{b}{3a^2+3a\left(\frac{b}{3a^2}\right)+\left(\frac{b}{3a^2}\right)^2}\right]+\left[\dfrac{b}{3a^2+3a\left(\frac{b}{3a^2}\right)+\left(\frac{b}{3a^2}\right)^2}\right]^2}\right]^2}.$$

Após as manipulações algébricas necessárias e tomando a primeira nova fração em x_4, teremos a quinta aproximação para a raiz, ou seja,

$$r_5 = a + \cfrac{b}{3a^2 + \cfrac{2b}{2a + \cfrac{4b}{9a^2 + \cfrac{5b}{2a}}}}$$

e, continuando com este procedimento, podemos obter a seguinte aproximação para r.

$$r = \sqrt[3]{y} = a + x_k = a + \cfrac{b}{3a^2 + \cfrac{2b}{2a + \cfrac{4b}{9a^2 + \cfrac{5b}{2a + \cfrac{7b}{15a^2 + \cfrac{8b}{2a + \ddots}}}}}}. \tag{5.5}$$

Exemplo 38. Determinaremos as cinco primeiras aproximações para o irracional $\sqrt[3]{28}$.

Temos $y = 28$, $a = 3$, $b = 1$ $n = 3$ e $m = 1$. Segue de (5.5) que

$$\begin{aligned} r = \sqrt[3]{28} &= (28)^{\frac{1}{3}} = (3+x)^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{3\cdot 3^2 + \cfrac{2\cdot 1}{6 + \cfrac{4\cdot 1}{9\cdot 3^2 + \cfrac{5\cdot 1}{2\cdot 3 + \cfrac{7\cdot 1}{15\cdot 3^2 + \ddots}}}}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{2}{6 + \cfrac{4}{81 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{7}{135 + \ddots}}}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 3; \\ r_2 &= 3 + \frac{1}{27} = \frac{82}{27}; \\ r_3 &= 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{2}{6}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{3}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{82}{3}} = 3 + \frac{3}{82} = \frac{249}{82}; \\ r_4 &= 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{81}}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{\cfrac{245}{81}}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{81}{245}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{6696}{245}} = 3 + \frac{245}{6696} = \frac{20333}{6696}; \\ r_5 &= 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{81 + \cfrac{5}{6}}}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{\cfrac{491}{6}}}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{12}{491}}} = 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{1}{\cfrac{1485}{491}}} \\ &= 3 + \cfrac{1}{27 + \cfrac{491}{1485}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{40586}{1485}} = 3 + \frac{1485}{40586} = \frac{123243}{40586}. \end{aligned}$$

Por exemplo, as aproximações racionais, para $\sqrt[3]{28}$, $r_3 = \frac{249}{82}$ e $r_5 = \frac{123243}{40586}$ apresentam erros absolutos inferiores a $\frac{1}{277313}$ e $\frac{1}{3225806451}$, respectivamente.

5.3 Fórmula geral para raízes da forma $\sqrt[n]{y}$

Seja a um número inteiro tal que $a^n \leq y$, com $m = 1$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, em (5.1), podemos escrever

$$r = \sqrt[n]{y} = (y)^{\frac{1}{n}} = (a^n + b)^{\frac{1}{n}} = a + x,$$

na qual primeira aproximação para a raiz é a, ou seja, $r_1 = a$.

Segue que

$$\begin{aligned}
&\left[(a^n+b)^{\frac{1}{n}}\right]^n = (a+x)^n \\
&\Leftrightarrow a^n+b = a^n + \frac{na^{n-1}x}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}x^3}{3!} + \cdots \\
&\Leftrightarrow b = x\left[\frac{na^{n-1}}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}x}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}x^2}{3!} + \cdots\right],
\end{aligned}$$

donde

$$x = \cfrac{b}{na^{n-1} + \frac{n(n-1)a^{n-2}x}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}x^2}{3!} + \cdots}.$$

No que segue, usaremos a fórmula recursiva para obtermos estimativas mais precisas para x

$$x_{k+1} = \cfrac{b}{na^{n-1} + \frac{n(n-1)a^{n-2}x_k}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}x_k^2}{3!} + \cdots}, \tag{5.6}$$

para $k = 0, 1, 2, \cdots$, em que $x_0 = 0$.

Temos que $x_1 = \dfrac{b}{na^{n-1}}$ é a primeira aproximação para x e a segunda aproximação para a raiz é dada por $r_2 = a + \dfrac{b}{na^{n-1}}$.

Segue que

$$x_2 = \cfrac{b}{na^{n-1} + \cfrac{n(n-1)a^{n-2}\left(\frac{b}{na^{n-1}}\right)}{2!} + \cfrac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}\left(\frac{b}{na^{n-1}}\right)}{3!} + \cdots}$$

e, tomando a primeira fração adicional em x_2, obtemos a terceira aproximação para a raiz

$$r_3 = a + \cfrac{b}{na^{n-1} + \cfrac{b(n-1)}{2a}}.$$

Continuando com este procedimento podemos obter a seguinte aproximação para r.

$$r = \sqrt[n]{y} = a + \cfrac{b}{na^{n-1} + \cfrac{b(n-1)}{2a + \cfrac{b(n+1)}{3na^{n-1} + \cfrac{b(2n-1)}{2a + \cfrac{b(2n+1)}{5na^{n-1} + \cfrac{b(3n-1)}{2a + \cfrac{b(3n+1)}{7na^{n-1} + \ddots}}}}}}}. \tag{5.7}$$

Observação 8. Existe um padrão subjacente que pode ser constatado a partir da segunda fração. Os numeradores são da forma $b(n-1)$ ou $b(n+1)$ e aumentam, constantemente, pela adição de n. Já os denominadores são, alternadamente, $2a$, se k for par e kna^{n-1}, se k for ímpar. Essa regularidade permite-nos utilizar esta fórmula para representar, por frações contínuas, qualquer raiz da forma $\sqrt[n]{y}$.

Exemplo 39. Determinaremos as cinco primeiras aproximações para $\sqrt[5]{33}$.

Temos $y = 33$, $a = 2$, $b = 1$, $n = 5$ e $m = 1$. Segue de (5.7) que

$$\begin{aligned} r = \sqrt[5]{33} = (33)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5+1\right)^{\frac{1}{5}} \\ = 2 + \cfrac{1}{5\cdot 2^{5-1} + \cfrac{1\,(5-1)}{2\cdot 2 + \cfrac{1\,(5+1)}{3\cdot 5\cdot 2^{5-1} + \cfrac{1\,(2\cdot 5-1)}{2\cdot 2 + \cfrac{1\,(2\cdot 5+1)}{5\cdot 5\cdot 2^{5-1} + \cfrac{1\,(3\cdot 5-1)}{2\cdot 2 + \ddots}}}}}} \\ = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{6}{240 + \cfrac{9}{4 + \cfrac{11}{400 + \cfrac{14}{4 + \ddots}}}}}}. \end{aligned}$$

$$r_1 = 2;$$

$$r_2 = 2 + \frac{1}{80} = \frac{161}{80};$$

$$r_3 = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{4}} = 2 + \frac{1}{81} = \frac{163}{81};$$

$$\begin{aligned} r_4 &= 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{6}{240}}} = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{\cfrac{966}{240}}} = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{960}{966}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{78240}{966}} = 2 + \frac{966}{78240} \\ &= \frac{157446}{78240} = \frac{26241}{13040}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_5 &= 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{6}{240 + \cfrac{9}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{6}{\cfrac{969}{4}}}} = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{24}{969}}} = 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{4}{\cfrac{3900}{969}}} \\ &= 2 + \cfrac{1}{80 + \cfrac{3876}{3900}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{315876}{3900}} = 2 + \frac{3900}{315876} = \frac{635652}{315876} = \frac{52971}{26323}. \end{aligned}$$

Das aproximações racionais acima, para $\sqrt[5]{33}$, $r_2 = \dfrac{161}{80}$ e $r_5 = \dfrac{52971}{26323}$ apresentam erros absolutos inferiores a $\dfrac{1}{6519}$ e $\dfrac{1}{16666666666}$, respectivamente.

5.4 Fórmula geral para raízes da forma $\sqrt[n]{y^m}$

Seja a um número inteiro tal que $a^n \leq y^m$, com $m \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > m$, de (5.1), temos

$$r = \sqrt[n]{y^m} = (y)^{\frac{m}{n}} = (a^n + b)^{\frac{m}{n}} = a^m + x.$$

A primeira aproximação para a raiz é a^m, ou seja, $r_1 = a^m$.

Segue que

$$\begin{aligned}
\left[(a^n+b)^{\frac{m}{n}}\right]^n &= (a^m+x)^n \\
\Leftrightarrow (a^n+b)^m &= (a^m+x)^n \\
\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m} a^{m(n-k)}b^k &= \sum_{k=0}^{n} a^{n(m-k)}x^k
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^{mn} + \binom{m}{1}a^{n(m-1)}b + \binom{m}{2}a^{n(m-2)}b^2 + \cdots = a^{mn} + \binom{n}{1}a^{m(n-1)}b + \binom{n}{2}a^{m(n-2)}b^2 + \cdots$$

$$\Leftrightarrow \binom{m}{1}a^{n(m-1)}b + \binom{m}{2}a^{n(m-2)}b^2 + \cdots = \binom{n}{1}a^{m(n-1)}b + \binom{n}{2}a^{m(n-2)}b^2 + \cdots$$

$$\Leftrightarrow \frac{ma^{n(m-1)}b}{1!} + \frac{m(m-1)a^{n(m-2)}b^2}{2!} + \cdots = \frac{na^{m(n-1)}x}{1!} + \frac{n(n-1)a^{m(n-2)}x^2}{2!} + \cdots$$

$$\frac{ma^{n(m-1)}b}{1!} + \frac{m(m-1)a^{n(m-2)}b^2}{2!} + \cdots = x\left[\frac{na^{m(n-1)}}{1!} + \frac{n(n-1)a^{m(n-2)}x}{2!} + \cdots\right].$$

E, portanto,

$$x = \frac{\dfrac{ma^{n(m-1)}b}{1!} + \dfrac{m(m-1)a^{n(m-2)}b^2}{2!} + \dfrac{m(m-1)(m-2)a^{n(m-3)}b^3}{3!} + \cdots}{\dfrac{na^{m(n-1)}}{1!} + \dfrac{n(n-1)a^{m(n-2)}x}{2!} + \dfrac{n(n-1)(n-2)a^{m(n-3)}x^2}{3!} + \cdots}.$$

Usaremos a fórmula recursiva, a seguir, para obtermos estimativas mais precisas para x.

$$x_{k+1} = \frac{\dfrac{ma^{n(m-1)}b}{1!} + \dfrac{m(m-1)a^{n(m-2)}b^2}{2!} + \dfrac{m(m-1)(m-2)a^{n(m-3)}b^3}{3!} + \cdots}{\dfrac{na^{m(n-1)}}{1!} + \dfrac{n(n-1)a^{m(n-2)}x_k}{2!} + \dfrac{n(n-1)(n-2)a^{m(n-3)}x_k^2}{3!} + \cdots}, \tag{5.8}$$

para $k = 0, 1, 2, \cdots$, em que $x_0 = 0$.

Segue que

$$x_1 = \frac{ma^{n(m-1)}b}{na^{m(n-1)}} = \frac{mb}{na^{n-m}}$$

e a segunda aproximação para a raiz é dada por

$$r_2 = a^m + \frac{mb}{na^{n-m}}.$$

Utilizando os procedimentos adotados nas Seções 5.1 e 5.2 e fazendo sucessivas substituições, de x_k por $\frac{mb}{na^{n-m}}$, em (5.8), obteremos a seguinte fórmula geral.

$$r = \sqrt[n]{y^m} = a^m + \cfrac{bm}{na^{n-m} + \cfrac{b(n-m)}{2a^m + \cfrac{b(n+m)}{3na^{n-m} + \cfrac{b(2n-m)}{2a^m + \cfrac{b(2n+m)}{5na^{n-m} + \cfrac{b(3n-m)}{2a^m + \cfrac{b(3n+m)}{7na^{n-m} + \ddots}}}}}}}. \tag{5.9}$$

Observação 9. Novamente, existe um padrão subjacente que pode ser constatado em (5.9), a partir da segunda fração. Os numeradores são da forma $b(n-m)$ ou $b(n+m)$ e aumentam constantemente pela adição de n. Já os denominadores são, alternadamente, $2a^m$, se k for par e kna^{n-m}, se k for ímpar. Essa regularidade permite-nos utilizar esta fórmula para representar, por frações contínuas, qualquer raiz da forma $\sqrt[n]{y^m}$.

Exemplo 40. Representaremos, por frações contínuas, o irracional $\sqrt{5}$.

Temos $y = 5$, $a = 2$, $b = 1$, $m = 1$ e $n = 2$. Segue de (5.9) que

$$\sqrt{5} = 2^1 + \cfrac{1 \cdot 1}{2 \cdot 2^{(2-1)} + \cfrac{1(2-1)}{2 \cdot 2^2 + \cfrac{1(2+1)}{3 \cdot 2 \cdot 2^{(2-1)} + \cfrac{1(2 \cdot 2 - 1)}{2 \cdot 2^2 + \cfrac{1(2 \cdot 2 + 1)}{5 \cdot 2 \cdot 2^{(2-1)} + \cfrac{1(3 \cdot 2 - 1)}{2 \cdot 2^2 + \ddots}}}}}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{3 \div 3}{12 \div 3 + \cfrac{3 \div 3}{4 + \cfrac{5 \div 5}{20 \div 5 + \cfrac{5 \div 5}{4 + \ddots}}}}}} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \ddots}}}}}} = [2; \overline{4}].$$

Como mostra o Exemplo 40, a fórmula (5.9) aplicada a irracionais da forma $\sqrt{D}$ permite representá-los, sob a forma de frações contínuas simples. Vimos na Subseção 2.1.5 que estas fornecem as melhores aproximações racionais para números irracionais.

Exemplo 41. Representaremos, por frações contínuas, o irracional $\sqrt[3]{28^2}$ e determinaremos as quatro primeiras aproximações.

Temos $y = 28$, $a = 3$, $b = 1$, $m = 2$ e $n = 3$. Segue de (5.9) que

$$\sqrt[3]{28^2} = 3^2 + \cfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 3^{(3-2)} + \cfrac{1(3-2)}{2 \cdot 3^2 + \cfrac{1(3+2)}{3 \cdot 3 \cdot 3^{(3-2)} + \cfrac{1(2 \cdot 3 - 2)}{2 \cdot 3^2 + \cfrac{1(2 \cdot 3 + 2)}{5 \cdot 3 \cdot 3^{(3-2)} + \cfrac{1(3 \cdot 3 - 2)}{2 \cdot 3^2 + \ddots}}}}}}$$

$$= 9 + \cfrac{2}{9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{5}{27 + \cfrac{4}{18 + \cfrac{8}{45 + \cfrac{7}{18} + \ddots}}}}}.$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= 9;\\
r_2 &= 9 + \frac{2}{9} = \frac{83}{9};\\
r_3 &= 9 + \cfrac{2}{9 + \cfrac{1}{18}} = 9 + \cfrac{2}{\cfrac{163}{18}} = 9 + \frac{36}{163} = \frac{1503}{163};\\
r_4 &= 9 + \cfrac{2}{9 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{5}{27}}} = 9 + \cfrac{2}{9 + \cfrac{1}{\cfrac{491}{27}}} = 9 + \cfrac{2}{9 + \cfrac{27}{491}} = 9 + \cfrac{2}{\cfrac{4446}{491}} = 9 + \frac{982}{4446}\\
&= \frac{40996}{4446} = \frac{20498}{2223}.
\end{aligned}$$

Das aproximações racionais acima, para $\sqrt[3]{28^2}$, $r_2 = \dfrac{83}{9}$ e $r_4 = \dfrac{20498}{2223}$ apresentam erros absolutos inferiores a $\dfrac{1}{740}$ e $\dfrac{1}{9054690}$, respectivamente.

Enquanto a finitude caracteriza a representação, por fracões contínuas, de números racionais, a periodicidade é a principal característica das expansões de irracionais quadráticos. Os números irracionais algébricos não quadráticos, quando representados por frações contínuas, também apresentam padrões e regularidades que permitem prolongar suas expansões o quanto desejarmos, veja a expressão (5.9). Curiosamente, também podemos constatar padrões e regularidades nas representações, por frações contínuas, de outros números irracionais, dentre eles e e π. Isso veremos na próxima seção.

5.5 Outras expansões, por frações contínuas

Nesta seção, reuniremos algumas representações clássicas, por frações contínuas. Tais expansões resultam do empenho de eminentes matemáticos que contribuíram para a sistematização das bases teóricas das frações contínuas ao longo de várias décadas, temos como referências (OLDS, 1963), (BONFIM, 2014) e (WEISSTEIN, 1999). As expansões aparecerão na forma simples ou na forma geral.

1. Esta é primeira expansão, por frações contínuas, de π.

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ddots}}}}}$$

Esse resultado foi demonstrado Leonhard Euler, em 1775 e fora apresentado por Lord Brouncker em 1658, que o obteve partir da seguinte identidade $\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdots}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdots}$ devida a John Wallis, que a havia publicado em seu livro Arithmetica Infinitorum, três anos antes.

2. Em 1737, Euler encontrou a seguinte expansão, por frações contínuas simples, envolvendo o número e, a base dos logaritmos naturais.

$$e = 2.7182818284590 \cdots = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ddots}}}}}}}} = [1; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots],$$

donde $e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \cdots]$.

Neste mesmo ano, Euler obteve as seguintes expansões envolvendo o número e:

$$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \ddots}}}} = [0; 2, 6, 10, 14, \cdots]$$

e
$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}=[0;1,6,10,14,\cdots].$$

3. Surpreendentemente, as expansões, por frações contínuas simples, de potências de e, apresentam padrões regulares.
   - $e^{\frac{1}{2}}=[1;1,1,1,5,1,1,9,1,1,13,\cdots]$;
   - $e^{\frac{1}{3}}=[1;2,1,1,8,1,1,14,1,1,20,\cdots]$;
   - $e^{\frac{1}{4}}=[1;3,1,1,11,1,1,19,1,1,27,\cdots]$;
   - $e^{\frac{1}{5}}=[1;2,1,1,14,1,1,24,1,1,34,\cdots]$.

4. A representação a seguir se destaca pela simplicidade e beleza.
$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\ddots}}}}}.$$

5. Em 1766, Johann Heinrich Lambert comprovou que
$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\ddots}}}} \quad \text{e} \quad tg(x)=\cfrac{1}{\frac{1}{x}-\cfrac{1}{\frac{3}{x}-\cfrac{1}{\frac{5}{x}-\cfrac{1}{\frac{7}{x}+\ddots}}}},$$
donde concluiu que
   (i) Se x for um número racional, não nulo, então e^x não pode ser um racional.
   (ii) Se x for um número racional, não nulo, então $tg(x)$ não pode ser um racional.

   Como $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, os números $\frac{\pi}{4}$ e π não podem ser racionais. Falhas nesta prova foram corrigidas por Legendre, em 1794.

6. Em 1770, Lambert forneceu o primeira argumentação da irracionalidade de π e apresentou as seguintes expansões para $tg(x)$ e π.
$$tg(x)=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ddots}}}}$$

e

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2 \cdots].$$

7. Lambert e Lagrange, em 1770 e 1776, respectivamente, obtiveram a seguintes expansões

$$arctg(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{4x^2}{5 + \cfrac{9x^2}{7 + \cfrac{16x^2}{9 + \ddots}}}}}, \qquad |x| < 1.$$

e

$$log(1+x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1^2x}{2 + \cfrac{1^2x}{3 + \cfrac{2^2x}{4 + \cfrac{2^2x}{5 + \cfrac{3^2x}{6 + \cfrac{3^2x}{7 + \ddots}}}}}}}, \qquad |x| < 1.$$

8. Em 1812, Carl Friedrich Gauss, apresentou a seguinte expansão

$$tgh(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{5 + \cfrac{x^2}{7 + \cfrac{x^2}{9 + \ddots}}}}}.$$

9. Em 1813, Lagrange obteve a representação para $log\dfrac{1+x}{1-x}$.

$$log\frac{1+x}{1-x} = \cfrac{2x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{4x^2}{5 - \cfrac{9x^2}{7 - \cfrac{16x^2}{9 - \ddots}}}}}.$$

10. Em 1833, Stern forneceu as expansões para $\dfrac{\pi}{2}$ e $sen(x)$.

$$\frac{\pi}{2} = 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{2\cdot 3}{1 - \cfrac{1\cdot 2}{3 - \cfrac{4\cdot 5}{1 - \cfrac{3\cdot 4}{3 - \cfrac{6\cdot 7}{1 - \cfrac{5\cdot 6}{3 - \ddots}}}}}}}.$$

e

$$sen(x) = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{(2\cdot 3 - x^2)\cfrac{2\cdot 3x^2}{(4\cdot 5 - x^2) + \cfrac{4\cdot 5x^2}{(6\cdot 7 - x^2) + \cfrac{6\cdot 7x^2}{(8\cdot 9 - x^2) + \ddots}}}}}.$$

CAPÍTULO

6

POSSÍVEIS ABORDAGENS DAS FRAÇÕES CONTÍNUAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Ao longo da Educação Básica, os conteúdos da unidade temática **números** devem ser abordados de modo que o aluno compreenda seus diferentes usos e significados. Os números racionais, por exemplo, podem receber diferentes interpretações em função do contexto: número, relação parte-todo, quociente, razão, operador multiplicativo. Já os números irracionais são tradicionalmente definidos como números cujos valores exatos não podem ser expressos como o quociente entre dois inteiros, ou seja, na forma $\frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, ou ainda, como números reais cujas representações decimais são infinitas e não periódicas. Estas definições pouco revelam da natureza dos números irracionais.

A construção mais abrangente do conceito de número, como recomenda a Base Nacional Comum Curricular, constitui uma das tarefas mais desafiadoras da Educação Básica e pressupõe a oferta de um amplo espectro de conteúdos e abordagens que estabeleçam relações entre o que os alunos já sabem e o objeto de conhecimento. Segundo Brasil (2017, p. 265), os alunos devem compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade), utilizar diferentes formas de registros, procedimentos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas. No Ensino Médio, tais competências devem ser consolidadas e ampliadas, conforme Brasil (2018, p. 523).

Nesse sentido, as frações contínuas simples, mesmo não sendo um componente curricular, poderão ser abordadas, na Educação Básica, como um tema que propicia a discussão de novas ideias e possibilita o desenvolvimento de competências matemáticas. Seu estudo demanda a aplicação de conceitos e procedimentos próprios da área temática números, o que leva à compreensão mais efetiva do significado das operações e ao aprofundamento do sentido numérico. Além disso, têm conexões com diversos tópicos da Matemática da Educação Básica, tais como: divisibilidade e algoritmo de Euclides, recorrências e sequências, padrões e regularidades, razão e proporção, aproximações e equações, etc. Elas fornecem um critério suficientemente claro que permite afirmar se um número é racional ou irracional, já que expansões finitas, por frações contínuas, representam números racionais e expansões infinitas números irracionais.

Seus aspectos de convergência possibilitam obter boas aproximações para as raízes não-exatas, solucionar equações diofantinas lineares com duas incógnitas, equações de Pell e diversos problemas que são modelados por estes tipos de equações. Além de permitir, segundo Pommer (2012), discussões que envolvem aspectos ligados aos pares finito/infinito, discreto/contínuo, exato/aproximado, possibilitando uma melhor entendimento do significado de valor aproximado, tornando o estudo dos números reais mais significativo e interessante e tornando sua compreensão mais efetiva já na Educação Básica.

Propomos, a seguir, várias atividades, mediadas pela teoria das frações contínuas. Algumas dessas atividades podem ser trabalhadas a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, pois os conhecimentos conceituais e procedimentais requeridos são compatíveis com as expectativas de aprendizagens para esse nível escolar. No entanto, é importante considerar o nível de conhecimento dos alunos, os recursos didáticos disponíveis e as adequações necessárias para tornar as atividades, ao mesmo tempo, acessíveis, interessantes e úteis. Além de tudo, é recomendável resolver, previamente, cada atividade afim de avaliar a viabilidade de sua aplicação.

Objetivos a serem alcançados:

- Expressar, sob a forma de frações contínuas simples, números racionais ou irracionais quadráticos, através da aplicação da Definição 3 ou de processo geométrico.
- Obter a forma fracionária ou decimal de números representados por frações contínuas.
- Explorar aspectos de convergência para obter aproximações racionais para números irracionais e solucionar equações diofantinas lineares com duas incógnitas e equações de Pell.
- Evidenciar o potencial pedagógico das frações contínuas simples, no sentido de ampliar a compreensão do significado das operações e aprofundar o sentido numérico, contribuindo para uma significação mais efetiva dos números reais e a construção de novos saberes.

A ideia fundamental é que durante a resolução das atividades o aluno possa aplicar conceitos e procedimentos, explorar propriedades e comprovar resultados, num processo construtivo que permitirá uma significação mais ampla e efetiva dos números reais. Para que haja maior agilidade e precisão, as construções geométricas poderão ser feitas com auxílio de um software de geometria dinâmica, por exemplo, o GeoGebra[1], cujos recursos permitirão explorar propriedades geométricas.

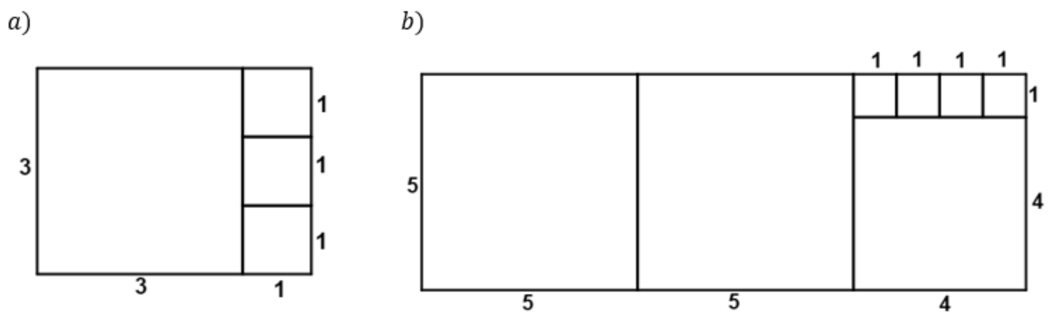
[1] Disponível em <https://www.geogebra.org/.>

6.1 Sequência de atividades

As frações contínuas é um tema amplo com conexões com diversos tópicos matemáticos da Educação Básica, o que possibilita a elaboração de inúmeras atividades. A seguir, proporemos uma sequência com diversas atividades, cuja resolução exigirá a aplicação de conceitos e propriedades das frações contínuas, visando ampliar e fortalecer habilidades matemáticas, das quais destacamos: (EF09MA02)[2] Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica. (EF09MA03) e (EF09MA04) Efetuar cálculos, resolver e elaborar problemas com números reais, conforme Brasil (2017, p. 315). Algumas atividades estarão acompanhadas de sugestão para resolução ou a solução.

Atividade 1. Para cada representação geométrica, escrever a fração contínua simples e a fração racional correspondente.

Figura 10 – Representações geométricas da frações contínuas simples finitas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade 2. Qual é o número mínimo de quadrados de áreas máximas, em cada etapa, necessários para preencher completamente um retângulo, de dimensões.

a) $8\,cm \times 5\,cm$?

b) $51\,dm \times 23\,dm$?

Atividade 3. Expressar, sob a forma de fração contínua simples finita, cada um dos seguintes números racionais. *Sugestão*: Veja Exemplo 14.

a) $\dfrac{87}{32}$

b) $\dfrac{20}{51}$

c) $\dfrac{355}{113}$

d) $-\dfrac{87}{59}$

[2] (**EF09MA02**): Código alfanumérico para identificação das habilidades propostas na BNCC (Base Nacional Comum Curricular), em que: o primeiro par de letras indica a etapa de ensino; o primeiro par de algarismos indica o(s) ano(s) a que se refere a habilidade; o segundo par de letras indica o componente curricular e; o segundo par de algarismos a posição dentro do quadro de habilidades. Neste caso, (EF09MA02) significa habilidade 02 para Matemática do 9º ano do Ensino Fundamental.

Atividade 4. Obter o número racional correspondente a cada uma das representações por frações contínuas simples finitas. *Sugestão*: Veja Exemplo 15.

a) $\frac{a}{b} = [3; 6, 2]$ b) $\frac{p}{q} = [-2; 1, 1, 3]$ c) $\frac{m}{n} = [2; 2, 2, 2]$

Atividade 5. Determine o valor de x se $\frac{61}{29} = [2; 9, x, 2]$. *Sugestão*: Aplicar a Definição 3.

Atividade 6. Se $\frac{79}{37} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$. Determine o valor de $a+b+c+d$.

Atividade 7. Uma propriedade importante do conjunto dos números racionais é que ele é denso no campo dos números reais. $\frac{11}{3}$ é um convergente da expansão de $\frac{37}{10}$, por frações contínuas simples.

a) Escreva cinco aproximações para $\frac{37}{10}$, compreendidas entre $\frac{11}{3}$ e $\frac{37}{10}$.

b) Mostre que existem infinitos racionais $\frac{p_k}{q_k}$, de modo que $\frac{11}{3} < \frac{p_k}{q_k} < \frac{37}{10}$.

Sugestão: Faça $\frac{37}{10} = [3; 1, 2, 3, k]$, aplique (2.4) e obtenha $\frac{p_k}{q_k} = \frac{37k+11}{10k+3}$.
O que ocorre com a fração $\frac{37k+11}{10k+3}$, se k se aproxima de zero? E, se k aumenta indefinidamente?

Atividade 8. Expressar 40 como a soma de dois inteiros positivos, de modo que um seja múltiplo de 7 e o outro seja múltiplo de 13.

Resolução

Temos que $7x + 13y = 40$

Tabela 22 – Algoritmo de Euclides aplicado ao racional $\frac{7}{13}$

Quocientes	0	1	1	6
7	13	7	6	1
Restos	7	6	1	0

$\Rightarrow$ $mdc(7,\ 13) = 1.$

Como o $mdc(7,\ 13) = 1$, a equação é solucionável e $\frac{a}{b} = \frac{7}{13} = [0,\ 1,\ 1,\ 6] = \frac{p_n}{q_n}$.

Os convergentes da expansão de $\frac{7}{13}$ são:

$$C_0 = \frac{0}{1}, \qquad C_1 = \frac{1}{1}, \qquad C_2 = \frac{1}{2}, \qquad C_3 = \frac{7}{13}.$$

Temos que a expansão, por frações contínuas simples, do racional $\dfrac{7}{13}$ possui quatro quocientes parciais, isto é, $n = 4$. Segue do Quadro 2 que a solução particular é dada por

$$(x_0, y_0) = \left((-1)^4 \cdot 2 \cdot 40,\ (-1)^3 \cdot 1 \cdot 40\right) = (80,\ -40)$$

Assim, o par ordenado $(80,\ -40)$ é uma solução particular da equação $7x + 13y = 40$, pois $7 \cdot 80 + 13 \cdot (-40) = 40$.

A solução geral para a equação é dada por $S = \begin{cases} x = 80 + 13t \\ y = -40 - 7t,\ t \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Como x e y são inteiros positivos, devemos ter $x = 80 + 13t > 0$ e $y = -40 - 7t > 0$, o que implica em $t = -6$ e $x = y = 2$. Logo os números procurados são 14 e 26.

Atividade 9. Expandir, por frações contínuas simples, os seguintes irracionais quadráticos. *Sugestão*: veja os padrões de $\sqrt{D}$ apresentados na Subsubseção 4.2.2.1.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{7}$ c) $\sqrt{18}$ d) $8 - \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

Atividade 10. Mostrar que $[2; \overline{2}] = \sqrt{2} + 1$.

Atividade 11. Escrever a equação quadrática sabendo que que $x = [1; \overline{3, 2}]$ é uma de suas raízes. *Sugestão*: Aplique a fórmula 4.2.

Atividade 12. Expressar, como fração contínua simples, o valor da raiz positiva de cada equação. *Sugestão*: Veja a expressão 2.3.

a) $x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $x^2 - nx - 1 = 0$

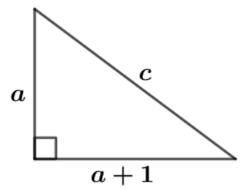
Atividade 13. Determinar, se houver, as duas primeiras soluções particulares das seguintes equações: *Sugestão*: Veja Exemplo 34.

a) $x^2 - 15y^2 = 1$ b) $x^2 - 10y^2 = 1$ c) $x^2 - 17y^2 = -1$

Atividade 14. Encontrar todos os triângulos retângulos, com lados inteiros, tais que a diferença entre os catetos é 1 (MOREIRA; MARTÍNEZ; SALDANHA, 2012, p. 209).

Resolução

Figura 11 – Triângulo retângulo de catetos consecutivos



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\begin{aligned} a^2+(a+1)^2 &= c^2 \\ 2a^2+2a+1 &= c^2 \\ 4a^2+4a+2 &= 2c^2 \\ (2a+1)^2+1 &= 2c^2 \\ (2a+1)^2-2c^2 &= -1 \end{aligned}$$

subistituido $2a+1$ por x e c por y, temos

$$x^2-2y^2=-1.$$

Segue que $\sqrt{2}=[1;\overline{2}]$ tem período $n=1$ e os primeiros convergentes da expansão de $\sqrt{2}$, por frações contínuas simples são:

$$C_0=\frac{1}{1},\quad C_1=\frac{3}{2},\quad C_2=\frac{7}{5},\quad C_3=\frac{17}{12},\quad C_4=\frac{41}{29},\quad C_5=\frac{99}{70},\quad C_6=\frac{239}{169},\quad C_7=\frac{577}{408}.$$

O par ordenado $(1,1)$ é a solução fundamental, pois $1^2-2\cdot 1=-1$. Temos que a solução geral é dada por $(x,y)=\left(p_{(2k-1)n-1},q_{(2k-1)n-1}\right)$, $k\in\mathbb{N}^*$ se n for ímpar. Como $k=n+1$, segue que $(x,y)=\{(p_{2n},q_{2n})\}$ e os pares ordenados $(1,1)$, $(7,5)$, $(41,29)$ são as primeiras soluções.

Os lados dos triângulos são dados pelas sequências (a_n), (b_n) e (c_n), onde para $n>0$. As primeiras soluções são mostradas na tabelas a seguir

Tabela 23 – Triângulo retângulo de catetos consecutivos

n	$a_n=\frac{p_{2n}-1}{2}$	$b_n=a_n+1$	c_n
1	3	4	5
2	20	21	29
3	119	120	169
4	696	697	985

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade 15. Expandir em frações contínuas e obter as três aproximações racionais para os seguintes números irracionais. *Sugestão*: Aplique a fórmula 5.8.

a) $\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[4]{17}$ c) $\sqrt[3]{5^2}$

Observação 10. As atividades de 16 à 28 têm como motivação a presença do número de ouro, denotado pela letra grega ϕ, em diferentes contextos: na natureza, em coisas criadas pelo homem e na própria Matemática. Muitos afirmam que ϕ está presente em tudo. Será que esta afirmação é verdadeira? Para responder a esta questão realizaremos algumas atividades de natureza investigativa e exploratória.

Atividade 16. Nesta atividade nos familiarizaremos com o número de ouro, assistindo aos vídeos, do Canal Isto é Matemática, nos quais o matemático português Rogério Martins fala sobre número de ouro e da proporção áurea. A primeira parte do episódio está disponível em <https://youtu.be/mfL6-g5mQw4>, acessado em 05/09/2019 e a segunda em <https://youtu.be/xtsTXAwWF20>, acessado em 05/09/2019. Para entender melhor o vídeo, seguiremos o seguinte roteiro.

a) Qual o tema dos vídeos? O que os realizadores dos vídeos tentaram nos contar? Eles conseguiram passar sua mensagem? Justifique sua resposta.

b) Você assimilou/aprendeu alguma coisa com estes vídeos? O que?

c) Algum elemento dos vídeos não foi compreendido?

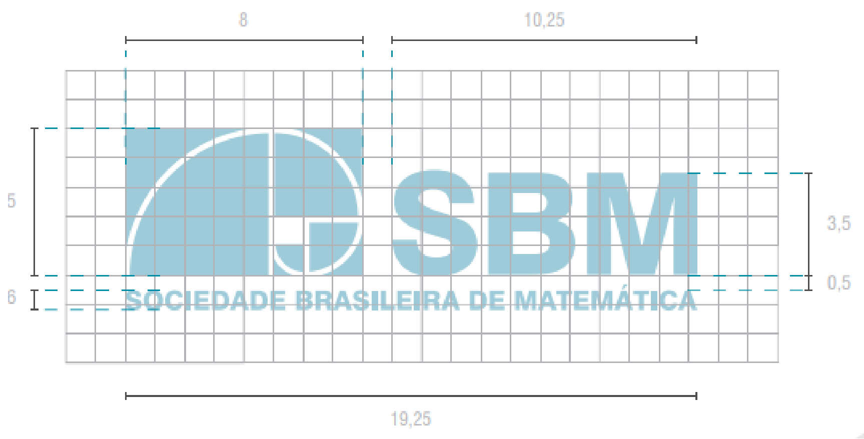
d) Em quais situações aparece o número de ouro?

e) Quanto mede o ângulo de ouro?

f) Qual o significado da expressão “esticar a corda”?

Atividade 17. O símbolo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Figura 12, é um exemplo de aplicação da proporção áurea à criações humanas.

Figura 12 – Símbolo + Logotipo SBM

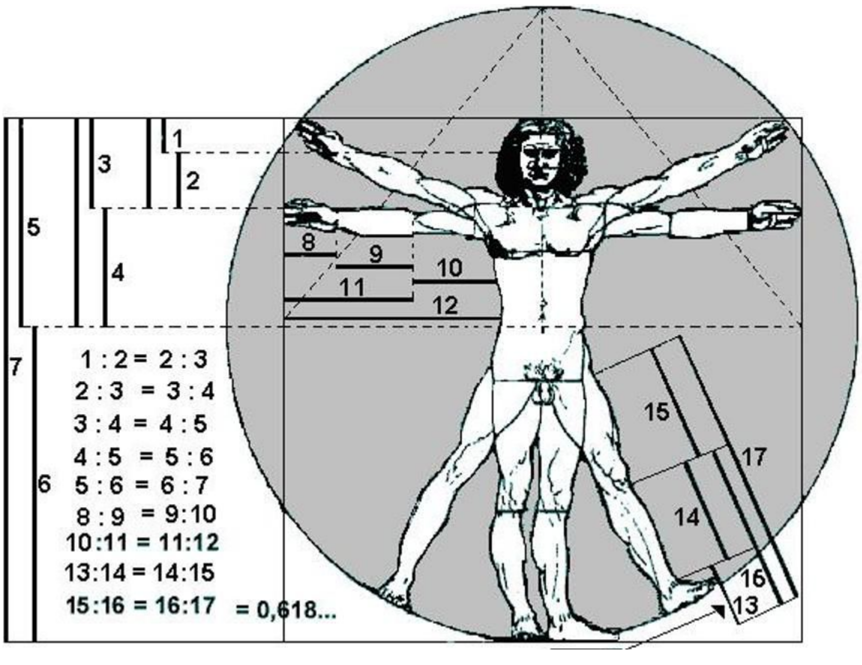


Fonte: SBM (2017, p. 5).

Nesta atividade investigaremos diversas formas retangulares, presentes no nosso dia a dia e, calcularemos a razão entre as suas dimensões. Tais como: Cartão de crédito, RG, Carteira Nacional de Habilitação, Bandeira nacional, esponja de cozinha, livros, cadernos, folhas $A4$, etc. Se compararmos os resultados obtidos com o número de ouro, que geralmente é denotado pela letra grega ϕ, será que os valores encontrados correspondem ao valor exato desse número? São aproximações desse número? Podemos dizer que são boas aproximações?

Atividade 18. Numa pesquisa rápida na Internet encontramos inúmeros exemplos da presença da proporção áurea na natureza, inclusive no corpo humano, como podemos visualizar na Figura 13. Nesta atividade investigaremos a ocorrência da razão áurea no corpo humano. Por exemplo, na relação entre os comprimentos do antebraço e do braço, indicados por **9** e **10**, respectivamente, na Figura 13. Novamente, os valores encontrados correspondem ao valor exato do número de ouro? São aproximações desse número? Podemos dizer que são boas aproximações?

Figura 13 – Razão áurea no corpo humano



Fonte: Santos (2009).

Atividade 19. Vimos nas atividades 17 e 18 que os valores obtidos são aproximações e não o valor exato do número de ϕ. Mas como obter o seu valor exato? Para obter o seu valor exato utilizaremos a definição dada por Euclides, apresentada no Capítulo 2, página 32: *um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o maior e o menor dos segmentos é igual à razão entre o todo e o maior segmento*. Faremos isso em duas etapas:

a) Com auxílio de régua e compasso ou de um software de geometria dinâmica, mostrar como dividir geometricamente um segmento em média e extrema razão, veja Figura 1.

b) Obter a equação quadrática que modela a definição de Euclides para segmento em média e extrema razão e determinar sua raiz positiva.

Atividade 20. Nesta atividades mostraremos que ϕ é irracional. `Sugestão`: *considerar* $\phi = \dfrac{p}{q}$, *com* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ *e* $mdc(p,q) = 1$, substituir ϕ por $\dfrac{p}{q}$ na equação obtida no item b) da atividade 4.

Atividade 21. Na atividade 20, item b), obtivemos o valor exato do número de ouro, mais precisamente, $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Nesta atividade iremos comparar a expansão, por frações contínuas simples, do número $\dfrac{8}{5}$, que é uma aproximação racional de ϕ, com a expansão do próprio ϕ. Qual a diferença entre elas?

Atividade 22. A partir da atividade 22 e aplicando as recorrências (2.4) preencheremos a tabela a seguir.

Tabela 24 – Primeiros quocientes e convergentes de ϕ

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$
a_n			1	1	1								$\cdots$
p_n	0	1	1	2	3								$\cdots$
q_n	1	0	1	1									$\cdots$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade 23. Uma aproximação será considerada boa se respeitar o Teorema de Dirichlet, Teorema 2, em que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$. Considerando $x = \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339887499\cdots$, pede-se:

a) Escrever três aproximações decimais para ϕ e verificar a validez do teorema para cada uma delas.

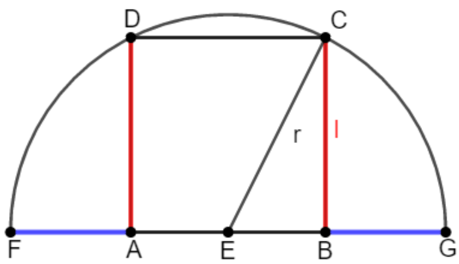
b) O racional $\dfrac{8}{5}$ pode ser considerado uma boa aproximação para ϕ? Verificar a validez do teorema para outros convergentes obtidos na Tabela 24.

c) As aproximações decimais são melhores que aproximações obtidas via frações contínuas? Justifique sua resposta.

d) Quais devem ser os valores de p e q para que a aproximação tenha um erro menor que $0,001$?

Atividade 24. Dada a Figura 14, mostre que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BG}} = \phi$.

Figura 14 – Quadrado inscrito no semicírculo

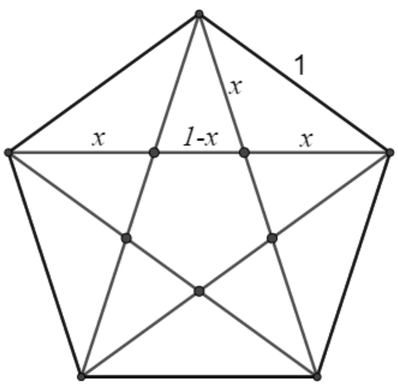


Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade 25. Os retângulos estão por toda parte, das telas dos smartphones às fachadas de edifícios. Mas, qual deles é o mais bonito? O longo e estreito ou aquele que é quase um quadrado? Há séculos, o retângulo áureo é considerado o mais belo, pois expressa equilíbrio, harmonia e perfeição, isso o torna mais agradável e atraente aos olhos humanos. Suas proporções lhe conferem grande valor estético e exercem forte influência na Arte, na Arquitetura, no design e em diversas criações humanas. *Uma propriedade interessante e importante do retângulo áureo é que ao retirarmos o quadrado de maior área do retângulo original, o retângulo restante preserva a mesma razão entre seus lados, ou seja, esse retângulo é semelhante ao original*. Com auxílio de régua e compasso ou de um software de geometria dinâmica, mostrar como construir geometricamente um retângulo áureo.

Atividade 26. Ao traçarmos as diagonais de um pentágono regular, obtemos o pentagrama, ou estrela de cinco pontas. Os cruzamentos dessas diagonais determinam segmentos que satisfazem a proporção áurea. O pentagrama foi o símbolo dos pitagóricos e está associado à aspectos místicos e religiosos. Qual o comprimento da diagonal de um pentágono regular cujos lados medem 1?

Figura 15 – Pentágono regular



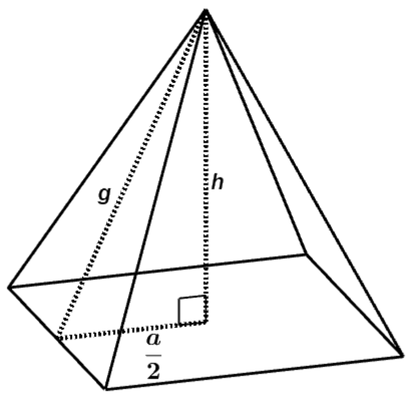
Fonte: Elaborada pelo autor.

Atividade 27. A divisão de um segmento em média e extrema razão aparece no Livro VI de Euclides e retângulos áureos são encontrados em esculturas e obras arquitetônicas da Grécia antiga, o que leva atribuir a razão áurea aos gregos. Mas, a razão áurea já estava presente nas pirâmides, do Egito antigo.

Definição 14. Todo triângulo semelhante ao triângulo de hipotenusa ϕ e catetos iguais a $\sqrt{\phi}$ e 1 é um triângulo áureo, pois a razão entre a hipotenusa e o cateto maior e a razão entre o cateto maior e o cateto menor igual a $\sqrt{\phi}$.

Definição 15. Uma pirâmide regular de base quadrada é uma *pirâmide áurea* se o triângulo de lados h, g e $\frac{a}{2}$, Figura 16, for um triângulo áureo.

Figura 16 – Pirâmide regular de base quadrada



Fonte: Elaborada pelo autor.

As dimensões (em metros) das pirâmides de **Quéops** (base quadrada), **Quéfren** (base quadrada) e **Miquerinos** (base retangular) estão expressas no Quadro 3.

Quadro 3 – Dimensões das pirâmides, em metros

	Quéops	Quéfren	Miquerinos
Altura da pirâmide	$146,59$	$143,50$	$65,00$
Dimensões da base	$230,33 \times 230,33$	$215,20 \times 215,20$	$102,20 \times 104,60$

Fonte: Saraiva (2004, p. 120).

Considere as Definições 14 e 15 e informações contidas no Quadro 3, para verificar se alguma dessas pirâmides é uma pirâmide áurea.

Atividade 28. Determine a solução positiva da equação $x = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}}$.

CAPÍTULO

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o estudo dos números tem por objetivo desenvolver o pensamento numérico que vai além da mera aplicação de técnicas operatórias. Tal estudo deve fortalecer, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, num processo de sucessivas ampliações dos campos numéricos. No entanto, o desenvolvimento do pensamento numérico não estará concluído ao final dos estudos da unidade Números. Sua ampliação e aprofundamento ocorrerá através de situações e discussões que envolvam conteúdos das demais unidades temáticas, conforme Brasil (2018, p. 266 - 267).

Nesta perspectiva, as frações contínuas podem contribuir significativamente para a ampliação e o fortalecimento do pensamento numérico na Educação Básica, pois além de ser uma das representações mais interessantes e reveladoras de números reais, é uma maneira eficaz de construirmos as melhores aproximações racionais para números irracionais, o que evidencia uma forte relação entre ambos, contrapondo-se às abordagens que sugerem a inexistência de tal relação, ao definir número irracional como todo número real que não é racional.

As frações contínuas constituem um processo finito para representar números racionais e infinito para representar números irracionais, revelando uma propriedade que permite dizer, de forma clara e objetiva, se um número é irracional ou não. Também constituem um ferramenta alternativa para solucionar equações diofantinas lineares com duas incógnitas e desempenham um papel essencial na resolução da equações de Pell. Além disso, possibilita a discussão de aspectos relativos aos pares discreto/contínuo, exato/aproximado e finito/infinito.

Ao longo do texto apresentamos os principais resultados da teoria elementar das frações contínuas simples, comprovando que elas fornecem as melhores aproximações racionais para números irracionais. Seu estudo vai além dos seus aspectos operatórios, pois permite estabelecer conexões com diferentes tópicos da Matemática elementar e pode ser aplicada à resolução diversos problemas.

A introdução deste tema na Educação Básica permitirá construir uma significação mais efetiva dos números irracionais, mas exigirá abordagens e atividades bem planejadas, que levem em conta a complexidade do tema e os conhecimentos prévios dos alunos. Segundo Walle (2009, p. 21), as ações dos professores devem encorajar os alunos a pensar, questionar, resolver problemas, discutir suas ideias, estratégias e resoluções e atribuir significado ao que faz.

REFERÊNCIAS

BADAWI, R. B. **On continued fractions and its applications**. Tese (Doutorado) — An-Najah National University, Nablus, 2016. Citado nas páginas 43, 64, 66, 89 e 94.

BELTRÃO, E. de M. **Acelerando a convergência da série de Taylor de funções elementares: um método baseado em frações contínuas**. 60 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016. Citado na página 39.

BONFIM, D. D. **Frações Contínuas com Aplicações**. 75 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2014. Citado nas páginas 55 e 109.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Brasilia: MEC, 2017. Citado nas páginas 113 e 115.

____. **Base Nacional Comum Curricular - BNCC**. Brasilia: MEC, 2018. Citado nas páginas 113 e 125.

COMPTON, S. M. **Continued fractions and their application in the computation of definite Riemann integrals**. Tese (Doutorado) — Texas Tech University, 1973. Citado na página 30.

FRANCISCO, S. V. D. L. **Entre o Facínio e a realidade da Razão Áurea**. 119 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto - SP, 2017. Citado na página 32.

GLIGA, A. I. **On continued fractions of the square root of prime numbers**. Princeton, EUA: Junior Thesis, Princeton University, 2003. Disponível em: <http://web.math.princeton.edu/mathlab/jr02fall/Periodicity/alexajp.pdf>. Acesso em: 14/08/2019. Citado na página 78.

IKENAGA, B. **Periodic Continued Fractions**. 2019. Disponível em: <http://sites.millersville.edu/bikenaga/number-theory/periodic-continued-fractions/periodic-continued-fractions.html>. Acesso em: 01/02/2020. Citado na página 71.

KHINCHIN, A. Y. **Continued fractions**. Chicago - U.S.A: University of Chicago press, 1964. Citado na página 97.

MARTÍNEZ, F. E. B.; MOREIRA, C. G. T. A.; ; SALDANHA, N. C.; TENGAN, E. **Teoria dos números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo**. 2ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. Citado na página 78.

MOREIRA, C. G. T. A.; MARTÍNEZ, F. E. B.; SALDANHA, N. C. **Tópicos de teoria dos números**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. Citado nas páginas 30, 46, 73 e 117.

NETO, A. da S. **Convite às equações diofantinas: uma abordagem para a educação básica**. 152 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal de Roraima, Boa Vista - RR, 2016. Citado na página 64.

NETO Ângelo P.; GUIMARÃES, Z. G. **Análise real**. Fortaleza - Ce: UAB/IFCE, 2011. Citado nas páginas 29 e 45.

OLDS, C. D. **Continued fractions**. Washington: New Mathematical Library. The Mathematical Association of America, 1963. Citado nas páginas 55, 78, 87 e 109.

PAIXÃO, J. C. **Fracções contínuas no ensino pré-universitário**. 66 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores) — Universidade de Lisboa, Departamento de Matemática, Lisboa, Portugal, 2011. Citado na página 73.

POMMER, W. M. Frações contínuas e os números irracionais no ensino básico. **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, 2012. Citado na página 114.

SANTOS, A. **Razão áurea: Aplicações na odontologia e anatomia humana**. 2009. Disponível em: <http://ortodontoclinica.blogspot.com/2009/03/aplicacao-da-matematica-e-da-geometria.html>. Acesso em: 20/09/2019. Citado na página 120.

SARAIVA, J. C. V. As pirâmides do Egito e a razão áurea. In: DRUCK, S. (Ed.). **Explorando o ensino da Matemática**. Brasília: Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Básica, 2004. v. 1, cap. 3, p. 117 – 121. Citado nas páginas 32 e 123.

SARDINA, M. **General Method for Extracting Roots using (Folded) Continued Fractions**. Surrey, England: [s.n.], 2007. Disponível em: <http://myreckonings.com/Dead_Reckoning/Online/Materials/General%20Method%20for%20Extracting%20Roots.pdf>. Acesso em: 19/07/2019. Citado na página 97.

SBM. **Manual da Marca e da Identidade visual**. 2017. Disponível em: <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2017/03/SBM_Manual_Marca_ver20170223.pdf>. Acesso em: 06/09/2019. Citado na página 119.

SILVA, A. A. da. **Desvendando a crise da incomensuralidade. Uma proposta para a Educação básica utilizando frações contínuas**. 152 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Universidade Federal do ABC, Santo Andre, 2016. Citado na página 35.

SOUZA, L. B. de. **Aproximações Diofantinas e a Teoria das Frações Contínuas**. 52 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) — Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2018. Citado nas páginas 46 e 71.

WALDSCHMIDT, M. Continued fraction introduction and application. **Institute de Jussieu University Pierre et Marie Curie Paris, TU Kirtipur Kathmandu, Nepal November**, v. 2, 2015. Citado na página 30.

WALLE, J. A. V. de. **Matemática no Ensino Fundamental - Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula**. 6ª. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. ISBN 978-85-363-2090-8. Citado na página 126.

WEISSTEIN, E. W. **e Continued Fraction**. 1999. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/eContinuedFraction.html>. Citado na página 109.

YIU, P. **MST Number Theory and Cryptograph**. Boca Raton, USA: Departament of Mathematics Florida Atlantic University, 2008. Citado nas páginas 78 e 89.

ICMC USP
SÃO CARLOS