



UNIVERSIDADE FEDERAL DA FRONTEIRA SUL
CAMPUS CHAPECÓ
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

LUCIANA SACHINI

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATRIZES UTILIZANDO A
METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA**

CHAPECÓ
2020

LUCIANA SACHINI

**UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATRIZES UTILIZANDO A
METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação da Profa. Dra Rosane Rossato Binotto.

CHAPECÓ

2020

Bibliotecas da Universidade Federal da Fronteira Sul - UFFS

Sachini, Luciana

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATRIZES UTILIZANDO A METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA / Luciana Sachini. -- 2020.

73 f.:il.

Orientadora: Doutora em Matemática Rosane Rossato Binotto

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional, Chapecó, SC, 2020.

1. Metodologia de ensino, sala de aula invertida aplicada ao ensino das Matrizes. I. Binotto, Rosane Rossato, orient. II. Universidade Federal da Fronteira Sul. III. Título.



LUCIANA SACHINI

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE MATRIZES UTILIZANDO A
METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal da Fronteira Sul – UFFS, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador (a): Prof. Dra. Rosane Rossato Binotto.

Aprovado em: 03 de setembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dra. Rosane Rossato Binotto - UFFS

Prof. Dra. Patricia Rodrigues Fortes – UFSM

Prof. Dr. Vitor José Petry – UFFS

Chapecó – SC, setembro de 2020

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela minha existência e por permitir participar desta formação que sempre foi um grande objetivo na minha carreira profissional.

À minha família pelo apoio incondicional nos momentos de dificuldades ou de ausência, e pela paciência que tiveram para que eu atingisse essa conquista.

Aos amigos e colegas que nos momentos de incertezas apoiaram, auxiliando a concretização desta conquista.

Aos professores que com sua dedicação contribuíram direta ou indiretamente para minha formação, em especial, a professora Rosane Rossato Binotto por sua orientação para a realização deste trabalho.

À CAPES pela recomendação do PROFMAT por meio do parecer do Conselho Técnico Científico da Educação Superior e pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática e à UFFS – Universidade Federal da Fronteira Sul pela parceria que busca a melhoria do ensino de Matemática na Educação Básica por meio da implementação do PROFMAT.

RESUMO

Apresentamos neste trabalho uma proposta metodológica que contempla uma sequência didática sobre conteúdos de Matrizes, para o Ensino Médio, utilizando como metodologia a Sala de Aula Invertida aliada às Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. Com esta proposta buscamos tornar os alunos mais ativos no processo educativo, desenvolver sua autonomia e proporcionar a resolução de problemas com temas mais conexos a sua realidade de modo a promover uma aprendizagem mais significativa. Para tanto desenvolvemos uma pesquisa de natureza teórica e descritiva. Neste sentido elaboramos uma sequência didática que contempla atividades para serem desenvolvidas em momentos não presenciais e em momentos presenciais, que formam a base da metodologia Sala de Aula Invertida, sendo que para os momentos não presenciais (mas online) os alunos têm disponíveis videoaulas explicativas sobre conteúdos de Matrizes, gravadas pelo professor, bem como exercícios/problemas referentes a esse conteúdo. Nos momentos presenciais, o professor coordena discussões e reflexões sobre os conceitos previamente estudados, além de resolver exercícios/problemas referentes a esses conteúdos. Considerando que o material didático que elaboramos tem características de ser potencialmente significativo para o aluno aliado a sua predisposição para aprender concluímos que esse material têm possibilidade de gerar aprendizagem significativa de conteúdos de Matrizes.

Palavras-chave: Aprendizagem significativa. Metodologias ativas. Sequência didática. Videoaulas. Ensino Médio.

ABSTRACT

We present in this work a methodological proposal that contemplates a didactic sequence about Matrix contents, for High School, using as methodology the Inverted Classroom allied to the Digital Technologies of Information and Communication. With this proposal, we seek to become students more active in the educational process, develop their autonomy and provide problem solving with themes more related to their reality in order to promote more meaningful learning. To this end, we developed a research of a theoretical and descriptive nature. In this sense, we elaborated a didactic sequence that contemplates activities to be developed in non-face-to-face and face-to-face moments, which form the basis of the Inverted Classroom methodology, and for non-face-to-face (but online) moments students have explanatory video lessons Matrix contents, recorded by the teacher, as well as exercises / problems related to that content. In the classroom, the teacher coordinates discussions and reflections on previously studied concepts, besides solving exercises / problems related to these contents. Considering that, the didactic material we elaborate has characteristics of being potentially significant for the student, allied to his predisposition to learn, we conclude that this material has the possibility of generating significant learning of Matrix contents.

Key words: Meaningful learning. Active methodologies. Following teaching. Video classes. High school.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Matriz gerada a partir do Quadro 1.

Figura 2: Representação genérica de uma matriz de m linhas e n colunas.

Figura 3: Demonstração diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada.

Figura 4: Multiplicação de Matrizes.

Figura 5: Metodologias Ativas e modalidades do Ensino Híbrido

Figura 6: Ambiente do aplicativo onde são criadas as questões.

Figura 7: Questões inseridas no aplicativo sobre matrizes.

Figura 8: Exemplos de cartões Qr *code* para respostas das questões de múltipla escolha.

Figura 9: Ambiente do blog com acesso aos links das videoaulas e exercícios a distância.

Figura 10: Rotas Aéreas.

Figura 11: Conexões entre os aeroportos.

Figura 12: Notas de Cláudio por bimestre nas disciplinas de matemática, português, ciências e estudos sociais.

Figura 13: Custo e Pratos da alimentação de um restaurante.

Figura 14: Quantidade de alimento e suas composições por porção.

Figura 15: Matriz produto por loja.

Figura 16: Matrizes preço por cor e quantidade por cartaz.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Notas dos alunos em Matemática

Quadro 2: Resultados obtidos por quatro times em um torneio

LISTA DE SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

Inep – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PCNs – Parâmetros Curriculares Nacionais

Saeb – Sistema de Avaliação da Educação Básica

TDICs – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

TICs – Tecnologias de Informação e Comunicação.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 SOBRE O CONTEÚDO DE MATRIZES	17
2.2 MATRIZES.....	18
2.2.1 Definição e Representação	18
2.2.2 Tipos de Matrizes	19
2.2.2.1 Matriz quadrada	19
2.2.2.2 Matriz triangular.....	20
2.2.2.3 Matriz diagonal	20
2.2.2.4 Matriz identidade.....	21
2.2.2.5 Matriz nula	21
2.2.2.6 Matriz linha.....	21
2.2.2.7 Matriz coluna	22
2.2.3 Igualdade de Matrizes	22
2.2.4 Matriz Transposta	22
2.4.5 Matriz simétrica	23
2.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES.....	23
2.3.1 Matriz Oposta	23
2.3.2 Adição de Matrizes	23
2.3.3 Subtração de Matrizes	24
2.3.4 Multiplicação de uma matriz por um número real	24
2.3.5 Multiplicação de matrizes	24
2.4 MATRIZ INVERSA.....	25
2.4.1 Matriz Inversa: inversão por sistemas lineares	26
3.1 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL.....	27
3.2 O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA.....	30
3.3 METODOLOGIAS ATIVAS	31
3.4 A METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA	33

3.4.1 Ferramentas Tecnológicas para a Implantação da Metodologia Sala de Aula Invertida	37
3.4.1.1 Plickers	37
3.4.1.2 Aplicativos da Plataforma Google.....	39
4 METODOLOGIA	41
5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O USO DA METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA	43
5.1 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA	43
5.2 ROTEIRO PARA A IMPLEMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE MATRIZES UTILIZANDO A METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA	45
5.2.1 - Primeiro Momento não Presencial	47
5.2.2 - Primeira Aula Presencial	47
5.2.3 - Segundo Momento não Presencial	48
5.2.4 – Segunda Aula Presencial	48
5.2.5 - Terceiro Momento não Presencial	49
5.2.6 – Terceira Aula Presencial	50
5.2.7 – Quarto Momento não Presencial	50
5.2.8 – Quarta Aula Presencial	50
5.2.9 – Quinta Aula Presencial	51
5.2.10 – Sexta Aula Presencial	51
5.3 CONTRIBUIÇÕES E POTENCIALIDADES DA PROPOSTA METODOLÓGICA.....	52
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	55
REFERÊNCIAS	57
ANEXOS	59

1 INTRODUÇÃO

Ainda em idade escolar tinha um sonho de ser professora de Matemática, meus professores me inspiravam e alimentei essa vontade de ser uma profissional que fizesse a diferença no dia a dia do meu trabalho. Por isso, na conclusão do ensino médio decidi cursar Licenciatura em Matemática.

Antes mesmo de concluir a graduação fui convidada a lecionar em uma escola pública estadual, a então diretora tinha sido minha professora no ensino médio e era conhecedora do meu desejo de atuar no magistério. Em 2012, fiz o concurso do magistério estadual de Santa Catarina, fui aprovada e iniciei em 2013 como professora efetiva da rede estadual. Como o sonho era não ser somente uma professora e sim fazer a diferença como professora de Matemática eu sempre procurei me manter atualizada e sempre estudando, fiz um curso de especialização em metodologias do ensino da Matemática, e quando surgiu a oportunidade de cursar uma pós-graduação na minha área de formação e em uma instituição federal eu não pensei duas vezes, e me inscrevi. Nas duas primeiras vezes que prestei o exame de acesso para cursar o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, apesar de ter passado, minha colocação não permitiu meu ingresso no curso, mas em 2017, com melhor desempenho no exame de acesso, pude iniciar no ano seguinte o PROFMAT.

No dia a dia do meu trabalho, no ambiente escolar da Educação Básica, é possível perceber que atualmente a Educação vem passando por um momento de mudanças curriculares. Os avanços tecnológicos de informação e comunicação vem exigindo dos profissionais da educação uma reformulação de práticas e metodologias que visem a desencadear o interesse dos educandos para o desenvolvimento da aprendizagem efetiva de conceitos de conteúdos da Educação Básica. As avaliações em larga escala nos mostram com dados quantitativos o retrato da situação preocupante em que a educação brasileira se encontra.

Em se tratando do ensino de Matemática, no Ensino Médio, os dados são mais alarmantes, visto que os índices apontam que os níveis de aprendizagem são os mais baixos da história do país, conforme aponta um estudo feito, em 2019, pela Organização Todos Pela Educação¹. Foi realizada uma análise da educação na última década, tendo como base o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), do Instituto Nacional de Estudos e

1 Organização da sociedade civil, sem fins lucrativos, plural, suprapartidária e independente que não recebe recursos públicos. Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/pag/quem-somos/>. Acesso em 04 de setembro de 2019.

Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), e esta revelou um cenário crítico na educação do Ensino Médio, tendo os índices de aprendizagem em Matemática estagnados. Este cenário é preocupante visto que nesta etapa da educação básica os alunos deveriam consolidar habilidades e competências para o exercício efetivo da cidadania e do convívio social.

Em muitas situações o ensino descontextualizado e sem ligação com questões e/ou temas do cotidiano dos alunos, faz com que esses alunos apresentem grandes dificuldades na compreensão de conceitos básicos de Matemática. Mesmo admitindo que a Matemática tem um papel fundamental para a compreensão e resolução de situações do mundo atual, faz-se necessário que o educando construa os conceitos que os levem a tal compreensão. Conforme a BNCC,

Um dos desafios para a aprendizagem da Matemática no Ensino Médio é exatamente proporcionar aos estudantes a visão de que ela não é um conjunto de regras e técnicas, mas faz parte de nossa cultura e de nossa história. (BRASIL, 2017, p.522)

Durante muitas décadas o ensino da Matemática vem sendo considerado pelos alunos algo difícil, que na maioria das vezes se resume a decorar regras e fórmulas atreladas a uma prática de aulas extremamente expositivas e tradicionais, passando assim despercebida a importância que tem a conjectura que o educando deve fazer para resolver um problema envolvendo conceitos matemáticos.

Neste sentido faz-se necessária a busca por metodologias e/ou estratégias de ensino alternativas a fim de motivar e melhorar o ensino e a aprendizagem em Matemática. Muitas são as metodologias ou estratégias de ensino estudadas, dentre elas, as relacionadas ao uso das Tecnologias de Informação e Comunicação, TICs, e em particular, as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação, TDICs.

As TICs estão cada vez mais presentes nas atividades cotidianas das pessoas tanto na vida pessoal quanto no ambiente de trabalho. Na Educação não é diferente, visto que seu uso tem crescido também no ambiente escolar e nas universidades. No ambiente escolar as TICs são usadas como uma metodologia de ensino, bem como uma ferramenta de apoio ao ensino e aprendizagem. Além disso, de acordo com a BNCC (2017, p. 489), “os jovens precisam ter uma visão crítica, ética e estética, e não somente técnica das TDIC e de seus usos, para selecionar, filtrar, compreender e produzir criticamente sentidos em quaisquer campos da vida social.” O que está aqui exposto é que os alunos têm que conhecer as ferramentas de comunicação e informação digitais para melhor selecioná-las e utilizá-las de forma consciente, ética tanto no ambiente escolar como na sua vida.

Em relação as aulas de Matemática, o advento das TICs também tem proporcionado uma mudança no modelo pedagógico estático e restrito adotado por alguns professores, tornando as aulas mais dinâmicas e interativas. Além disso, de acordo com Borba (2010), os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou um problema matemático, de modo que as possibilidades de investigação e experimentação propiciadas por essas mídias podem levar alunos à elaboração de conjecturas, validação de hipóteses além de levantar subsídios para a elaboração de uma demonstração matemática.

Ainda sobre metodologias de ensino, podemos destacar as Metodologias Ativas. Essas metodologias surgiram como uma alternativa àquelas utilizadas no ensino tradicional, permitindo que os alunos atuem como sujeitos mais ativos na construção dos seus próprios conhecimentos. De acordo com Moran (2018), as Metodologias Ativas são metodologias de ensino que destacam o educando na organização do processo de aprendizagem, de forma ajustável, interligada e participativa com instrução do educador, enquanto o método híbrido destaca a mistura de atividades, compartilhamento de espaços, materiais, técnicas, tempos e tecnologias de informação/digital nesse processo ativo.

Nas Metodologias Ativas, o papel do professor torna-se imprescindível, pois ele passa a mediar a construção do conhecimento em vez de apenas transmiti-lo, instigando os alunos a pesquisarem, pensarem, refletirem e exporem ideias para a construção de um conhecimento com base em novas descobertas. Para tanto, o professor precisa conduzir o processo de ensino e aprendizagem envolvendo os alunos em atividades que torne-os protagonistas de sua aprendizagem.

Dentre as metodologias ativas, têm recebido destaque nas pesquisas, o ensino por meio de jogos, projetos de forma mais interdisciplinar, o ensino híbrido ou *blended* e a Sala de Aula Invertida.

Neste trabalho o enfoque é na Metodologia Sala de Aula Invertida. Nessa metodologia, como propõem Bergmann e Sams (2016), como o próprio nome diz, os alunos estudam em casa o material preparado pelo professor e durante a aula presencial esclarecem as possíveis dúvidas e corrigem os erros. Nesta proposta metodológica, nos momentos não presenciais os alunos terão disponíveis em um blog videoaulas produzidas pelo professor e um formulário de perguntas sobre os vídeos, já nos momentos presenciais o professor mediará a resolução de atividades para garantir que os alunos compreenderam os conceitos sobre as Matrizes.

O uso de Metodologias Ativas, em particular a Metodologia Sala de Aula Invertida, para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem representa uma técnica a ser adotada como estratégia para promover uma educação significativa, conexa com a realidade, uma vez

que a mesma permite a utilização de recursos que podem despertar o interesse do educando, promovendo a contextualização dos conceitos.

Em se tratando de aprendizagem podemos destacar David Ausubel e sua Teoria da Aprendizagem Significativa. Para Ausubel (2013, p. 1) a aprendizagem significativa, por recepção é a “aquisição de novos significados a partir de material de aprendizagem apresentado”. Esse material tem que ser “*potencialmente* significativo para o aprendiz”. Além do mais esse material tem que estar relacionado de forma não-arbitrária e não-literal e com uma estrutura cognitiva particular do aprendiz, sendo que esta estrutura possua conhecimentos ancorados relevantes, com os quais seja possível relacionar o novo material.

Do ponto de vista ausubeliano, essa conexão entre o que o aprendiz já sabe e o que ele precisa aprender pode ser realizada por meio de atividades que se caracterizam por desenvolver suas estruturas cognitivas para compreensão dos conceitos dos conteúdos subsequentes. Há uma necessidade de integrar sentimento, pensamento e ação, de forma a proporcionar tal compreensão com a capacidade de aplicação com clareza do que se está aprendendo e o porquê desta aprendizagem.

Nesse sentido a prática pedagógica baseada no uso de metodologias ativas vai ao encontro da teoria da aprendizagem significativa, definida por Ausubel, uma vez que o uso de Metodologias Ativas tem como objetivo o estímulo, no aluno, à pesquisa, à reflexão, à autoaprendizagem, com a facilitação do professor, nesse processo.

Considerando a problemática apresentada em relação aos dados sobre níveis de aprendizagem de Matemática na Educação Básica e considerando algumas possibilidades de trabalharmos com metodologias alternativas que esperamos que facilitem a aprendizagem significativa estamos propondo esse trabalho.

Delimitamos a escolha do tema para Matrizes que é um conteúdo de Matemática, trabalhado no 2º Ano do Ensino Médio. Esse tópico de Matrizes compreende a organização de informações numéricas por meio de tabelas identificando seus elementos em linhas e colunas, considerando as propriedades que as compõe. Elas têm sido muito utilizadas para a resolução de problemas.

Outro fato importante que observamos é em relação a elaboração de uma proposta pedagógica. Sua elaboração acarreta em planejar ações que propiciem aos alunos meios de desenvolverem habilidades e competências, as quais são citadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a partir de determinado conteúdo. A aprendizagem pode ser desenvolvida com base em bons planejamentos e a elaboração de propostas didáticas personalizadas que evidenciam a valorização do que os alunos já sabem e estrategicamente os desafiam a construir

de forma autônoma novos conceitos, conforme apresentam os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs,

Como no desenvolvimento de outras capacidades, a aprendizagem de determinados procedimentos e atitudes — tais como planejar a realização de uma tarefa, identificar formas de resolver um problema, formular boas perguntas e boas respostas, levantar hipóteses e buscar meios de verificá-las, validar raciocínios, resolver conflitos, cuidar da própria saúde e da de outros, colocar-se no lugar do outro para melhor refletir sobre uma determinada situação, considerar as regras estabelecidas — é meio para a construção da autonomia. Procedimentos e atitudes dessa natureza são objeto de aprendizagem escolar, ou seja, a escola pode ensiná-los, planejada e sistematicamente, criando situações que auxiliem os alunos a se tornarem progressivamente mais autônomos. Por isso é importante que desde as séries iniciais as propostas didáticas busquem, em aproximações sucessivas, cada vez mais essa meta. (BRASIL, 2001 p. 95)

Diante deste cenário podemos nos questionar em que sentido o uso de metodologias ativas pode contribuir para a aprendizagem significativa de Matrizes, no Ensino Médio?

A escolha de metodologias ativas deve-se ao fato de que elas são ferramentas importantes no desenvolvimento da autonomia e organização do processo educacional, pois tornam as aulas menos expositivas e promovem uma maior participação dos alunos nas atividades, por isso, o presente trabalho tem como objetivo elaborar uma proposta metodológica para o ensino de Matrizes associada ao uso de Metodologias Ativas: Sala de Aula Invertida. Os objetivos específicos deste trabalho são: (1) elaborar uma proposta pedagógica a fim de tornar as aulas mais dinâmicas, os alunos mais ativos e o professor um mediador no processo de aprendizagem; (2) oferecer uma proposta pedagógica personalizada possibilitando ao aluno tornar-se protagonista de seu aprendizado; (3) Fazer com que os alunos estudem extraclasse desenvolvendo sua autonomia e responsabilidade; (4) Utilizar recursos tecnológicos digitais como ferramenta de apoio às atividades não presenciais e presenciais;

A proposta metodológica elaborada, apresenta estratégias com o uso de Metodologias Ativas que busquem potencializar a aprendizagem dos alunos a respeito do conceito de Matriz, bem como interpretar e representar uma tabela por meio de uma Matriz, identificar seus elementos, reconhecer diversos tipos de Matrizes, realizar operações com Matrizes e resolver problemas que envolvam este conteúdo. Ela foi organizada para os encontros serem trabalhados de forma alternada: um não presencial e outro presencial. Para os encontros não presenciais o aluno terá que ter acesso à internet pois precisará fazer o download de videoaulas, sobre o tema, bem como enviar à professora respostas de listas de exercícios usando o aplicativo *Plickers* e também aplicativos da plataforma Google.

Desta forma, desejamos tornar mais significativo o estudo de conceitos e operações de Matrizes, proporcionando a possibilidade do aluno ser proativo na construção de seu aprendizado, através de uma proposta pedagógica alternativa.

Esta dissertação inicia com a Introdução, a qual aborda o tema, a justificativa e os objetivos traçados para a elaboração de uma proposta metodológica de ensino de Matrizes, com o uso da metodologia Sala de Aula Invertida. No Capítulo 2 um breve relato do surgimento das Matrizes, dos conceitos e propriedades de Matizes abordados na sequência didática, que fazem parte do currículo do Ensino Médio. O Capítulo 3 contempla a fundamentação teórica com aspectos da teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, um recorte sobre tecnologias e sua influência na educação, além do seu uso em Metodologias Ativas. Apresentamos também as contribuições da metodologia Sala de Aula Invertida e as ferramentas tecnológicas digitais utilizadas para a elaboração da proposta. O Capítulo 4 descreve a metodologia utilizada no desenvolvimento do presente trabalho. A sequência didática sobre os conteúdos de Matrizes, a proposta metodológica utilizando a metodologia Sala de Aula Invertida, bem como suas potencialidades e contribuições estão descritas no Capítulo 5. Na sequência temos as considerações finais, as Referências que embasaram este trabalho, e, por último os anexos referentes a sequência didática.

2 SOBRE O CONTEÚDO DE MATRIZES

Neste capítulo, apresentamos um resgate histórico referente ao surgimento e a teoria sobre Matrizes, a fim de identificar a importância de sua compreensão. A sequência dos conteúdos que apresentamos é a mesma a ser seguida na elaboração da proposta metodológica.

2.1 HISTÓRIA DAS MATRIZES

Em relação aos primórdios da Matemática, conforme Eves (2004), em um dos mais importantes textos da Matemática chinesa, “Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática”, encontramos problemas, que utilizando a linguagem matemática atual, poderiam ser representados por sistemas de equações lineares, cuja solução, poderia ser feita utilizando métodos de Matrizes.

A Teoria das Matrizes, ou Álgebra das Matrizes, foi descoberta em 1857, pelo matemático inglês Arthur Cayley (1821-1895). Elas foram descobertas a partir de estudos realizados com transformações lineares.

Mesmo que as ideias de Matriz precedem a ideia de determinantes, historicamente foi ao contrário, uma vez que o estudo dos determinantes eram usados muito antes para a resolução de sistemas lineares. Os estudos realizados por Cayley mostraram como usar Matriz para simplificar a notação de uma transformação linear.

O nome Matriz foi apresentado do matemático James Joseph Sylvester em 1850, mas foi Cayley em 1858 que divulgou esse nome em sua obra *Memoir on the Theory of Matrices*

De acordo com SILVEIRA (1999) o nome *Matriz* significa “local onde algo se gera ou se cria”. Para Sylvester uma Matriz representava “um bloco retangular de termos” e com os estudos de Cayley as matrizes foram assumindo maior importância do que os determinantes.

Conforme SILVEIRA (1999) a partir das contribuições de Joseph Louis Lagrange, em 1790, que fez uso implícito da noção de Matriz, Augustin-Louis Cauchy, em 1826, chamou-as de tabela (*tableau*).

Com o avanço tecnológico o constante uso do computador fez com que as matrizes ganhassem maior aplicabilidade nas áreas da economia, engenharia, informática, física, matemática, entre outras áreas.

2.2 MATRIZES

2.2.1 Definição e Representação

A Teoria sobre Matrizes que apresentamos tem como referência três livros didáticos da segunda série do Ensino Médio, os quais são: Contato Matemática (Souza, 2016); Matemática: interação e tecnologia (Balestri, 2016) e Conexão com a Matemática (Leonardo, 2013).

As matrizes são tabelas retangulares formadas por m linhas e n colunas que permitem organizar dados ou informações numéricas, facilitando a efetuação de vários cálculos simultâneos. A compreensão dos conceitos passa pela convenção de uma ordenação das linhas a serem dadas de cima para baixo e as colunas da esquerda para a direita.

Por exemplo, vejamos a tabela dada pelo Quadro 1:

Quadro 1: Notas dos alunos em Matemática.

	A	B	C	D	E
1	Notas dos alunos em Matemática (2016)				
2	Nome	1º Bimestre	2º Bimestre	3º Bimestre	
3	Adriano	8,5	7,9	7,5	
4	Camila	9,3	8,5	7,3	
5	Juliano	8,2	9,0	8,5	
6	Maria	7,9	8,2	9,5	
7					

Fonte: Secretaria da escola.

Fonte: Matemática 2, interação e tecnologia.

Esses dados podem ser reescritos na forma de outra tabela conforme a Figura 1, a qual chamamos de matriz.

Figura 1: Matriz gerada a partir do Quadro 1.

2ª coluna				
↓	↓	↓		
1ª coluna		3ª coluna		
↓		↓		
[8,5	7,9	7,5	← 1ª linha
	9,3	8,5	7,3	← 2ª linha
	8,2	9,0	8,5	← 3ª linha
	7,9	8,2	9,5	← 4ª linha
]				

Fonte: Matemática 2, interação e tecnologia.

Em geral, uma matriz é representada por uma letra maiúscula do nosso alfabeto (A, B, C, ..., Z), enquanto os seus termos são representados pela mesma letra, só que minúscula, acompanhada de dois índices do lado inferior direito (a_{11} a_{12} a_{13}, \dots, a_{mn}), onde o primeiro termo representa a linha e o segundo termo a coluna em que o elemento está localizado.

Vejamos a representação na Figura 2:

Figura 2: Representação genérica de uma matriz de m linhas e n colunas.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1j}	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2j}	a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3j}	a_{3n}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{ij}	a_{in}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mj}	a_{mn}

Fonte: #Contato Matemática 2, São Paulo, 2016.

Nomeamos essa matriz por $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Sua ordem é $m \times n$, ou seja, m linhas e n colunas, sendo com m e n números naturais. Nela podemos observar o elemento a_{ij} , onde i representa a linha e j a coluna.

Tomamos como exemplo o elemento $a_{32} \rightarrow i = 3$ e $j = 2$. Esse elemento está localizado na 3ª linha e na 2ª coluna.

Para melhor compreensão observamos a construção da matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = 2i + j$. Assim,

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Logo, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

2.2.2 Tipos de Matrizes

Algumas matrizes têm propriedade especiais e recebem nomes específicos.

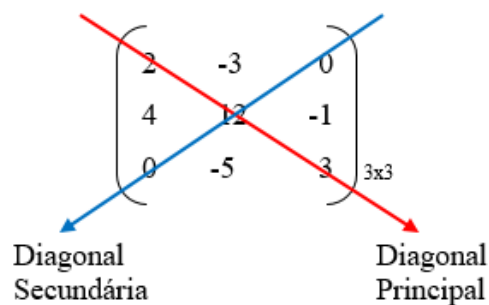
2.2.2.1 Matriz quadrada

As matrizes quadradas são aquelas cujo o número de linhas e colunas são iguais, ou seja, sua ordem é $n \times n$, ou simplesmente dizemos que a matriz tem ordem n, e indicamos A_n .

Nesse tipo de matriz observamos a existência da diagonal principal formada pelos elementos em que $i=j$, ou seja, diagonal que segue do topo da esquerda até o último elemento embaixo na direita; e pela diagonal secundária formada pelos elementos a_{ij} , sendo $i + j = n+1$, com n um número natural, ou seja, diagonal que segue do topo da direita até o último elemento abaixo na esquerda.

Em uma matriz quadrada chamamos de traço a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada.

Figura 3: Diagonal principal e diagonal secundária de uma matriz quadrada.



Fonte: A autora, 2020.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 11 \\ 5 & 2 & 6 \\ 7 & 15 & 25 \end{pmatrix}$$

Matriz quadrada 2x2 (A_2)

Matriz quadrada 3x3 (B_3)

2.2.2.2 Matriz triangular

Uma matriz quadrada de ordem n é triangular quando todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são nulos, ou seja, iguais a zero.

Exemplos:

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -32 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular de 3ª ordem (B_3)

Matriz Triangular de 2ª ordem (C_2)

Uma matriz quadrada de ordem n é diagonal quando todos os elementos acima e abaixo da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal de 3ª
ordem (A_3)

Matriz Diagonal de 4ª
ordem (B_4)

2.2.2.4 Matriz identidade

A matriz identidade é uma matriz quadrada de ordem n cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os elementos acima e abaixo desta diagonal são nulos. Indicamos uma matriz identidade de ordem n por I_n .

Exemplos:

$$I_1 = (1)$$

e

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidade de
1ª ordem (E_1)

Matriz Identidade de
3ª ordem (F_3)

2.2.2.5 Matriz nula

A matriz nula é a matriz cujos os elementos são todos iguais a zero. Indicamos uma matriz nula de ordem $m \times n$ por $O_{m \times n}$, ou simplesmente O_n , caso a matriz seja quadrada.

Exemplos:

$$O_{1 \times 2} = (0 \ 0),$$

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$O_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz Nula de ordem
1 x 2

Matriz Nula de ordem
2

Matriz Nula de ordem
2 x 3

2.2.2.6 Matriz linha

É toda matriz que possui apenas uma linha. Numa matriz linha $m \times n$, $m = 1$.

Exemplos:

$$I = (0 \quad -5 \quad 3)$$

e

$$J = (1 \quad 0 \quad -1 \quad 5).$$

Matriz Linha de ordem 1×3

Matriz Linha de ordem 1×4

2.2.2.7 Matriz coluna

É toda matriz que possui apenas uma coluna. Numa matriz coluna $m \times n$, $n = 1$.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz Coluna de ordem 3×1

Matriz Coluna de ordem 5×1

2.2.3 Igualdade de Matrizes

Se duas matrizes A e B , de mesma ordem, têm todos os seus elementos de mesma posição iguais, dizemos que estas matrizes são iguais, ou seja, $A = B$.

Da mesma forma, se essas duas matrizes A e B não têm a mesma ordem ou se possui pelo menos um par de elementos correspondentes diferentes, dizemos que elas são matrizes diferentes, ou seja, $A \neq B$.

Exemplo:

As matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{18}{2} \\ \sqrt{9} & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 + 1 & 9 \\ 3 & 1 - 3 \end{pmatrix}$ são iguais pois as suas respectivas entradas são iguais.

2.2.4 Matriz Transposta

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A e indica-se por A^t a matriz que se obtém trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A , ou seja, A^t tem ordem $n \times m$. A operação de obtenção de uma matriz transposta de A é denominada transposição da matriz.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Notamos que } A \text{ tem ordem } 3 \times 2 \text{ e } A^t \text{ tem ordem } 2 \times 3.$$

2.4.5 Matriz simétrica

Quando uma matriz A é igual à sua transposta A^t ($A = A^t$), dizemos que A é uma matriz simétrica.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ e $A^t = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

2.3.1 Matriz Oposta

Chama-se matriz oposta de uma matriz A a matriz $-A$, cuja soma com A resulta na matriz nula.

Exemplo:

Dada uma $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. A matriz oposta de A é $-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, pois:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Adição de Matrizes

Dadas duas matrizes A e B de mesmo tipo, ou seja, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, podemos encontrar a matriz soma ($A + B$), somando os elementos correspondentes de A e B , ou seja, os elementos de mesma posição.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, determinar a matriz soma $(A + B)$.

Como $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, isto é, A e B têm a mesma ordem, podemos somar os termos correspondentes para encontrarmos a matriz soma $(A + B)_{2 \times 2}$. Assim, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2.3.3 Subtração de Matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, A e B , ou seja, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denominamos matriz diferença $(A - B)_{m \times n}$ a matriz obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B , ou seja, os elementos de mesma posição.

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplo:

Dadas as matrizes, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ determinar $A - B$.

Como $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, isto é, A e B têm o mesmo tipo, podemos subtrair os termos correspondentes para encontrarmos a matriz diferença $(A - B)_{3 \times 2}$. Assim,

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3.4 Multiplicação de uma matriz por um número real

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k , denomina-se matriz produto do número real k por A , a matriz obtida multiplicando-se cada um dos seus elementos por k .

$$k.A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n} \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ temos que $3.A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$.

2.3.5 Multiplicação de matrizes

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e B uma matriz de ordem $n \times p$, define-se produto da matriz A pela matriz B a matriz C , do tipo $m \times p$, tal que cada elemento de $C=(c_{ij})$ satisfaz:

$$c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + (\dots) + a_{in}.b_{nj}$$

O produto entre duas matrizes A e B é definido se, e somente se, o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B . Assim:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Exemplos:

i) Multiplicando as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ obtemos a matriz $C=(c_{ij})_{2 \times 2}$ dada por $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$.

Veamos o que aconteceria se fosse feito o contrário, ou seja, multiplicar B por A :

Figura 4: Multiplicação de Matrizes.

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: <https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/matrizes>

Observamos que obtemos uma nova matriz.

Concluimos que $A \cdot B \neq B \cdot A$, ou seja, a multiplicação de matrizes não é comutativa.

ii) Vejamos outro exemplo.

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, temos que o produto $A \cdot B$ não é possível, pois $A_{m \times p}$ e $B_{n \times m}$, ou seja, $A_{2 \times 3}$ e $B_{2 \times 3}$ com $p \neq n$. A matriz A tem três elementos na primeira linha e a matriz B tem apenas dois elementos na primeira coluna, logo não é possível efetuar essa multiplicação.

2.4 MATRIZ INVERSA

Uma matriz é chamada de inversível ou não singular se e somente se seu determinante é diferente de zero, por isso uma matriz só pode ser inversível se for uma matriz quadrada com determinante diferente de zero.

Ela é representada pelo número -1 sobrescrito ao nome da matriz. Por exemplo, A^{-1} é a representação da matriz inversa de A.

Exemplo:

Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ temos que sua inversa é $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, pois:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4.1 Matriz Inversa: inversão por sistemas lineares

Um método para determinar a matriz inversa é chamado de método por sistemas lineares. Esse método parte da definição de que o produto de uma matriz inversível de ordem n pela sua inversa também de ordem n é a matriz identidade I_n , isto é: $A \cdot A^{-1} = I_n$.

Exemplo:

Determinar, se existir, a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Queremos encontrar $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pela multiplicação de matrizes obtemos $\begin{pmatrix} 3a + 4c & 3b + 4d \\ 2a + 3c & 2b + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A partir da igualdade das matrizes obtemos um sistema linear de primeira ordem com quatro equações e quatro variáveis. Efetuando os cálculos segue que $a = 3$, $b = -4$, $c = -2$ e $d = 3$.

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como o propósito do referido trabalho é apresentar estratégias ou metodologias de ensino que visem motivar o aluno, bem como tornar seu aprendizado mais significativo, apresentamos neste capítulo aspectos da teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, um recorte sobre tecnologias e sua influência na educação, além da sua contribuição para o surgimento de Metodologias Ativas. Apresentamos também alguns aspectos sobre Metodologias Ativas, com destaque para a metodologia Sala de Aula Invertida.

3.1 TEORIA DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

O desenvolvimento cognitivo permeia a organização e a interação dos conceitos a serem apropriados pelos indivíduos. Conforme Moreira,

É a estrutura cognitiva, entendida como o conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização; ou, conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos. E o complexo resultante dos processos cognitivos, ou seja, dos processos por meio dos quais se adquire e utiliza o conhecimento. (MOREIRA, 2011, p. 152)

Para que o indivíduo se aproprie de algo novo ele precisa estabelecer em seu cognitivo alguma relação entre o novo e o que ele já tem estabelecido em sua estrutura de conhecimento.

O psicólogo e pedagogo norte-americano, David Ausubel dedicou sua vida à educação. Submetido na infância a uma educação severa e sem significados em suas ações cotidianas, Ausubel foi o criador da Teoria da Aprendizagem Significativa. Para ele

A aprendizagem por recepção significativa envolve, principalmente, a aquisição de novos significados a partir de material de aprendizagem apresentado. Exige quer um mecanismo de aprendizagem significativa, quer a apresentação de material *potencialmente* significativo para o aprendiz. Por sua vez, a última condição pressupõe (1) que o próprio material de aprendizagem possa estar relacionado de forma *não arbitrária* (plausível, sensível e não aleatória) e *não literal* com *qualquer* estrutura cognitiva apropriada e relevante (i.e., que possui significado ‘lógico’) e (2) que a estrutura cognitiva *particular* do aprendiz contenha ideias *ancoradas* relevantes, com as quais se possa relacionar o novo material. A interação entre novos significados potenciais e ideias relevantes na estrutura cognitiva do aprendiz dá origem a significados verdadeiros ou psicológicos. Devido à estrutura cognitiva de cada aprendiz ser única, todos os novos significados adquiridos são, também eles, obrigatoriamente únicos. (AUSUBEL, 2013, p. 1)

A partir dos trabalhos de Ausubel, Moreira tem realizado diversos estudos e pesquisas sobre a teoria da Aprendizagem Significativa. Segundo Moreira, para Ausubel,

a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual Ausubel define como conceito subsunçor, ou simplesmente subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. (MOREIRA, 2011 p. 153)

Para o estabelecimento de uma aprendizagem significativa de conceitos matemáticos faz-se necessário uma apresentação com recursos introdutórios que antecedam as práticas referentes ao conteúdo curricular, recursos esses que permitirão servir de ponte entre o que o educando já conhece e o que ele precisa aprender sobre o conteúdo dado. Esses recursos introdutórios são peças-chave, pois agem como organizadores e de forma eficaz buscam atrair o educando para o assunto, desenvolvendo seu interesse pelo mesmo.

Do ponto de vista ausubeliano, essa conexão entre o que o educando já sabe e o que ele precisa aprender pode ser realizada por meio de atividades que se caracterizam por desenvolver suas estruturas cognitivas para compreensão dos conceitos dos conteúdos subsequentes. Há uma necessidade de integrar sentimento, pensamento e ação, de forma a proporcionar tal compreensão com a capacidade de aplicação com clareza do que se está aprendendo e o porquê desta aprendizagem. Conforme Masini e Moreira (2017, p. 19) “aprendizagem significativa é aquisição de novos conhecimentos com significado, compreensão, criticidade e possibilidades de aplicação desses conhecimentos em explicações, argumentações e soluções de situações-problema, inclusive novas situações”.

Para a ocorrência de uma aprendizagem significativa podemos citar, segundo Masini e Moreira (2017), três condições necessárias: 1) a estrutura cognitiva do indivíduo que independentemente influencia facilitando, limitando ou inibindo a aprendizagem de um novo conhecimento significativamente; 2) a predisposição para aprendizagem caracterizada pelo querer aprender é um fator imprescindível; e, 3) a utilização de materiais potencialmente significativos que fazem sentido e motivam à aprendizagem.

Observamos que, para que ocorra a aprendizagem significativa é importante que o material a ser utilizado deva ser potencialmente significativo e que o aluno apresente uma predisposição para o aprendizado. Nesse ponto enfatizamos que não se trata apenas de motivação pessoal ou gostar da matéria, e sim que o aluno deve ter predisposição para relacionar, interativamente, novos conhecimentos à sua estrutura cognitiva a fim de dar novos significados aos seus conhecimentos prévios. Essa condição não é uma condição fácil de ser atendida.

Além da aprendizagem significativa e da aprendizagem mecânica, aquela aprendizagem sem significado, a famosa aprendizagem por memorização, tão comum na escola, Ausubel (1978, p. 50) destaca também a aprendizagem por recepção e aprendizagem por descoberta. Na aprendizagem por recepção a experiência do aluno é secundária, pois no ensino prevalece a exposição verbal. Já na aprendizagem por descoberta a experiência do aluno é fundamental, pois o conteúdo será aprendido por ele e depois será incorporado de forma significativa. Para Ausubel as crianças em idade escolar já possuem um conjunto de conhecimentos organizados, e por isso é possível que ocorra à aprendizagem significativa.

Podemos descrever ainda, sob a visão cognitiva de Ausubel, os processos considerados chaves para a aprendizagem significativa, os quais são:

- 1) A diferenciação progressiva que trata da hierarquia e organização de conhecimentos prévios, a qual caracteriza a estrutura cognitiva do indivíduo. Esta é dinâmica, e vai modificando-se na medida que o indivíduo interage novos conhecimentos com os já existentes.
- 2) A reconciliação integradora é um processo que ocorre juntamente com a diferenciação progressiva, em que o aprendiz organiza os novos conhecimentos integrando-os a estrutura cognitiva e fazendo com que a mesma se transforme.
- 3) Outro processo é a consolidação, este por sua vez diz respeito ao domínio dos conhecimentos prévios. Na aprendizagem significativa, este processo não é imediato. Ele é um processo que pode ser instigado por meio de situações-problema, exercícios, deduções ou outras atividades e tem caráter progressivo, o qual pode ocorrer juntamente com a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora.

Destacamos que existem algumas variáveis importantes que facilitam a aprendizagem significativa, tais como: o conhecimento prévio do aluno sobre determinado conteúdo, a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora, a consolidação, a organização sequencial do conteúdo, o uso de organizadores prévios que pode ser utilizado para suprir deficiências de subsunçores, a linguagem que é muito importante para o intercâmbio de significados e estratégias e instrumentos (didáticos) adequados. Ainda de acordo com Moreira (2011), a facilitação da aprendizagem significativa depende muito mais de uma nova postura do professor, de novas diretrizes escolares, de novas formas de avaliação, do que novas metodologias de ensino, mesmo aquelas que utilizem as TICs.

Nesse sentido, apresentamos uma proposta metodológica para o ensino de matrizes, na qual esperamos que o material didático apresentado seja potencialmente significativo para o aluno.

3.2 O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DA MATEMÁTICA

A sociedade atual está diariamente exposta a tecnologias digitais inovadoras com aparelhos cada vez mais potentes e sofisticados. Esse cenário faz parte de um movimento de evolução da atividade humana. Inserido neste meio está o ambiente escolar, com professores e alunos, que estão expostos a toda informação gerada pelo avanço tecnológico. Como em qualquer setor, as tecnologias também impactam na Educação mais precisamente nas práticas educacionais em geral.

Para competir com todas essas ofertas tecnológicas que atraem os alunos, os professores precisam romper com paradigmas educacionais. As práticas educacionais precisam ser renovadas a fim de que as tecnologias digitais se transformem em ferramentas que possam ser aproveitadas nos planejamentos docentes, e sobretudo, que estes planejamentos contemplem atividades que possam desenvolver o cognitivo, vise a autonomia na construção dos conceitos, buscando dar significância nas ações cotidianas, valorizando a reflexão dos alunos sobre o conceito em questão, de modo que possibilite o mesmo a construir conjecturas que os levem ao conhecimento significativo, conexo com a realidade, ou seja, aprendizagem significativa.

A BNCC, nas competências e habilidades específicas para a área da Matemática, diversas vezes cita a importância do uso das tecnologias digitais de informação e comunicação, as TDICs, para o ensino de conceitos matemáticos e para a resolução de problemas matemáticos que refletem a realidade do cotidiano do aluno ou da sociedade em que ele está inserido. De acordo a BNCC, “Cabe ainda destacar que o uso de tecnologias possibilita aos alunos aprofundar sua participação ativa nesse processo de resolução de problemas”. (BNCC, 2017 p. 528). Percebemos que há também ênfase ao uso das tecnologias, pelos alunos, a fim de torná-los mais ativos e protagonistas na resolução de problemas.

As TICs são todo e qualquer recurso tecnológico que pode ser usado de forma integrada para uma determinada finalidade. Estes constituem ferramentas de práticas consistentes de ensino e aprendizagem quando usados atrelados a softwares, hardwares e a internet. Com o surgimento da internet e das TICs, métodos mais dinâmicos puderam ser incorporados as práticas pedagógicas, métodos esses que permitem o uso de diversas linguagens e registros de observações que podem ser feitos de objetos estudados. Para Scheffer *et al.*:

As tecnologias têm influenciado as maneiras de ensinar e aprender e, neste contexto de inserção das TICs na escola, surgem os objetos virtuais de aprendizagem, que representam iniciativas tecnológicas para o ensino com recursos interativos. (2018, p. 32)

A TICs dão suporte ao trabalho do professor e permitem que as práticas dêem significado à aprendizagem e possibilitem aos educandos a construção de conceitos de forma contextualizada estabelecendo a interação com novas abordagens e diferentes formas de aprender. Como sugere a BNCC, “a atividade matemática como atividade humana, sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e de comunicação”. (BRASIL, 2017, p. 532).

Assim, de acordo com a Proposta Curricular de Santa Catarina (2014, p.104), a importância do uso das TICs no ambiente escolar, visto que os educandos vivem e convivem em seu meio social com redes sociais, jogos em rede, blogs, e estes impactam no processo de ensino escolar. Por isso as tecnologias devem ser utilizadas como ferramentas que potencializam ao desenvolvimento da aprendizagem e a formação humana dos educandos.

3.3 METODOLOGIAS ATIVAS

Nos últimos tempos a Educação tem passado por diversas mudanças. Os métodos tradicionais de ensino, em alguns momentos, estão sendo substituídos por outras metodologias que buscam motivar e inserir, cada vez mais, o aluno no ambiente escolar, tornando-o mais ativo nesse processo de ensino e aprendizagem.

E neste sentido, Moran (2018) enfatiza que as escolas estão mudando para modelos mais centrados de aprendizagem ativa “com problemas reais, desafios relevantes, jogos, atividades e leituras, valores fundamentais, combinando tempos individuais e tempos coletivos; projetos pessoais de vida e de aprendizagem e projetos em grupo”. Estas mudanças têm implicações na configuração do currículo, na participação dos professores, na organização das atividades didáticas e na organização dos espaços e tempos.

Estas metodologias que enfocam a aprendizagem ativa são denominadas Metodologias Ativas. Conforme Camargo e Daros (2018, p. 12), “as Metodologias Ativas de aprendizagem se apresentam como uma alternativa com grande potencial para atender às demandas e desafios da Educação atual”. Elas apresentam uma proposta diferente do que tradicionalmente vem sendo trabalhado nas escolas, propondo que o foco principal no processo de ensino e aprendizagem seja o próprio aluno, tendo na figura do professor o mediador dessa aprendizagem.

O movimento pelo desenvolvimento das Metodologias Ativas teve início na década de 1980, com o intuito de colocar o aluno como centro ativo do processo de ensino e aprendizagem. Com um conjunto de técnicas metodológicas que objetivam estabelecer um processo de

aprendizagem significativa, as metodologias ativas, colocam os alunos como responsáveis pela construção do seu conhecimento, fazendo com que assumam uma postura de maior responsabilidade e autonomia perante a sua formação.

O método tradicional de aulas expositivas onde o professor é transmissor do conhecimento tem se apresentado com pouca eficácia na aprendizagem da atualidade. O longo período de exposição de conteúdos e conceitos fazem com que os alunos rotule a aula como chata e sem significado. Oriundos de uma era digital e tecnológica os alunos da atualidade, precisam construir significados na aprendizagem para que consigam estabelecer relações entre o conceito do objeto de estudo e sua relação com a realidade. Assim,

A aprendizagem significativa só é possível quando o aluno constrói o seu próprio conhecimento e para tal precisa estar mentalmente ativo. Quando os alunos estudam apenas para os momentos de avaliação, a aprendizagem corre o risco de ficar reduzida à memorização. (MOTA e ROSA, 2018, p. 262).

Com a utilização de Metodologias Ativas, o âmbito educacional perde a característica do ensino tradicional, o de seguir o modelo, e passa a ser submetido a métodos que permitem ao aluno investigar, discutir e analisar possíveis soluções para a resolução de problemas, sendo que o que poderá resultar dessas ações serão possíveis conjecturas generalizadas para a compreensão dos conceitos.

Muitas vezes, em nossas escolas os alunos são desencorajados a pensar de forma autônoma, pois estão inseridos em um meio educacional baseado num modelo mecânico que visa a compreensão dos conceitos repassados pelos professores de forma expositiva e exercícios de fixação, sem poder expor para os colegas e professores como ocorreu a assimilação significativa destes conceitos. Esse tipo de prática faz com que os indivíduos pensem por si próprios, não deixando que o conhecimento seja construído pelo coletivo, com a contribuição de ideias que serão moldadas durante a interação aluno-aluno, aluno-professor. Essa interação coletiva leva os alunos a desenvolverem seu cognitivo, fazendo com que formulem conjecturas e desencadeando uma autonomia para a aquisição do conhecimento.

Além disso, a linguagem traz consigo a possibilidade de reter compreensão e expressá-las em discursos compreensíveis, como fala e escrita, permitindo, ainda que regiões do conhecimento sejam formadas, posto que compreensões pode ser agrupadas sob certos aspectos e expressas em linguagem específicas. (BICUDO e GARNICA, 2011, p. 66)

Com o uso de Metodologias Ativas no processo de ensino e aprendizagem o professor passa de mero transmissor de conhecimento para um mediador, pois ele é responsável pela

articulação e organização das atividades didáticas e o desenvolvimento de habilidades, competência, autocrítica e autoconhecimento dos educandos. Sobre esse novo papel do professor os Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática, PCNs, afirmam que:

Numa perspectiva de trabalho em que se considere a criança como protagonista da construção de sua aprendizagem, o papel do professor ganha novas dimensões. Uma faceta desse papel é a de organizador da aprendizagem; para desempenhá-la, além de conhecer as condições socioculturais, expectativas e competência cognitiva dos alunos, precisará escolher o(s) problema(s) que possibilita(m) a construção de conceitos/procedimentos e alimentar o processo de resolução, sempre tendo em vista os objetivos a que se propõe atingir. (BRASIL, 2001 p. 40)

O professor deve criar condições para que os alunos a partir das atividades propostas utilizem os meios tecnológicos disponíveis como ferramentas na construção do conhecimento científico. Para tanto, na elaboração de seu planejamento, o professor precisa conhecer os recursos tecnológicos disponíveis aos alunos, de forma a escolher o mais propício e utilizá-lo como objeto para facilitar a aprendizagem significativa.

De acordo com Moran (2015, p. 16), nas Metodologias Ativas, “o processo de ensinar e aprender acontece numa interligação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são dois mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada – que se mescla, hibridiza constantemente”. Ainda, de acordo com Moran ela é híbrida, porque ela não acontece só no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que incluem os digitais, contudo o professor tem que continuar comunicando-se com os estudantes presencialmente, mas também digitalmente, com as tecnologias móveis, equilibrando a interação com todos e com cada um.

Dentre as metodologias ativas, têm recebido destaque nas pesquisas, o ensino por meio de jogos, projetos de forma mais interdisciplinar e o ensino híbrido ou *blended* na modalidade Sala de Aula Invertida.

3.4 A METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA

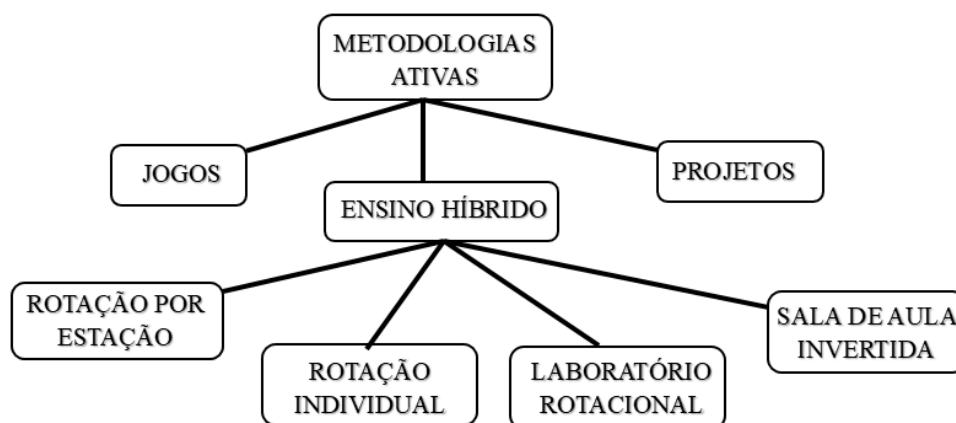
O Ensino Híbrido tem se mostrado uma metodologia de ensino muito promissora, pois possibilita uma nova forma de organização do tempo e do espaço nos ambientes de aprendizagem. Ele traz a possibilidade da personalização e do desenvolvimento da autonomia do aluno na aprendizagem, com momentos presenciais e não presenciais, podendo esses serem online. Nos momentos presenciais os alunos trocam ideias e conhecimentos com atividades de interação e nos momentos online, através de tecnologias digitais o aluno desenvolve a

autonomia de estudar sozinho, a fim auxiliar na construção de seus conhecimentos de forma independente. Com o mesmo objetivo os dois momentos, presencial e não presencial, se completam.

O Ensino Híbrido possui várias modalidades, dentre elas podemos destacar: a Rotação por estações, o Laboratório rotacional, a Rotação individual e a Sala de Aula Invertida. Como já mencionamos, neste trabalho, optamos por utilizar a metodologia Sala de Aula Invertida.

A Figura 5 mostra as principais metodologias consideradas ativas e as modalidades do Ensino Híbrido. Elaboramos esse esquema a partir da leitura dos autores citados nesta dissertação que tratam destes temas.

Figura 5: Metodologias Ativas e modalidades do Ensino Híbrido.



Fonte: A autora, 2020.

A metodologia Sala de Aula Invertida, modalidade de ensino híbrido, também conhecida como Aprendizagem Invertida é uma metodologia ativa muito utilizada no cenário educacional, pois proporciona dinâmica às práticas pedagógicas, faz uso das TICs e coloca o aluno no centro do processo de ensino e aprendizagem.

Considerada como um modelo de inovação para as práticas pedagógicas, a Sala de Aula Invertida ou *Flipped Classroom*, do inglês, proporciona uma mudança no modelo tradicional de ensino, pois instiga o aluno a desenvolver sua autonomia em relação ao seu estudo. Neste modelo, o professor passa a mediar o processo, apontando caminhos que fazem com que o aluno seja responsável pelo processo de construção do seu próprio conhecimento.

Com a prática da Sala de Aula Invertida aliada as tecnologias digitais disponíveis é possível que o professor compartilhe os conteúdos, por meio de aplicativos, blogs, redes sociais ou plataformas, antecipadamente com alunos, tornando-os conhecedores do assunto a ser

discutido em aula, e permitindo que o momento presencial seja de interação e discussão sobre os conceitos. Conforme os PCNs

O computador pode ser usado como elemento de apoio para o ensino (banco de dados, elementos visuais), mas também como fonte de aprendizagem e como ferramenta para o desenvolvimento de habilidades. O trabalho com o computador pode ensinar o aluno a aprender com seus erros e a aprender junto com seus colegas, trocando suas produções e comparando-as. (BRASIL, 2001 p. 48)

No ensino tradicional o professor é o centro do saber e os alunos são receptores, aprendem o conteúdo através da aula expositiva. No modelo da Sala de Aula Invertida, como o próprio nome diz, os alunos estudam em casa o material preparado pelo professor e durante a aula presencial esclarecem as possíveis dúvidas e corrigem os erros, de acordo com o que propõem Bergmann e Sams (2016, p. 11) “o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula”.

Desta forma, a sala de aula invertida permite que os alunos reflitam sobre os conteúdos, em particular os conteúdos de Matemática, de forma autônoma, fazendo com que seus estudos prévios potencializem as estratégias adotadas pelo professor nos momentos presenciais.

Estudos já realizados mostram que além de proporcionar uma aprendizagem mais significativa, a Sala de Aula Invertida também respeita o tempo de aprendizagem de cada educando, uma vez que os mesmos terão acesso ao material produzido pelo professor e poderão revê-lo sempre que julgarem necessário, favorecendo assim para uma aprendizagem personalizada.

Nesse contexto, o desafio para o professor passa a ser ensinar com tecnologia, ou seja, planejar suas aulas baseadas em uma sequência didática em que o computador, o tablet ou smartphone, através de softwares educativos, sejam utilizados para desenvolver o objeto de aprendizagem. Tais meios tecnológicos que são ferramentas do planejamento do professor, fazem parte da metodologia para o alcance de resultados significativos em termos de aprendizagem.

Na perspectiva da Sala de Aula Invertida, o uso das tecnologias adquire um importante significado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, uma vez que essa metodologia permite a personalização do planejamento. A aprendizagem dos conceitos se dá pelo planejamento de uma sequência didática proposta ao aluno desenvolver em casa, com ajuda da tecnologia, e nos momentos presenciais o professor planeja ações práticas, projetos, resolução de problemas ou trabalhos em grupo envolvendo os conceitos já estudados pelos alunos em casa. Dessa forma, esperamos as aulas presenciais tornem-se mais produtivas, pois

possibilitam uma maior interação entre o professor e os alunos, com isso agregando mais significado, ao aluno, dos conteúdos curriculares.

O uso da metodologia Sala de Sula Invertida redefine as tarefas de casa dos alunos. Uma vez que estas, apesar de serem necessárias do ponto de vista de muitos pais e professores, se apresentam muitas vezes como um grande problema. Por um lado, muitos pais dizem que não conseguem auxiliar os filhos nos temas por não conhecerem sobre o assunto, pelos filhos não aceitarem sua ajuda ou por não terem tempo de auxiliá-los. Já para o professor fica o desafio de lidar com os inúmeros deveres que voltam em branco.

Todas essas inquietações sobre as tarefas de casa ganham outra dimensão com a Sala de Aula Invertida, uma vez que os alunos passarão a realizar tarefas introdutórias aos conceitos, a parte fácil, como dever de casa e realizarão atividades mais complexas na aula presencial envolvendo os conceitos previamente vistos em casa, e retomados em aula pelo professor. Na aula presencial ele estará assistido pelo professor para esclarecer dúvidas e também poderá trocar ideias com seus colegas.

Para que este processo permita que o aluno desenvolva uma aprendizagem mais significativa, o professor deve planejar uma sequência de atividades que estabeleça uma relação do conteúdo a ser estudado com os conhecimentos prévios que o aluno dispõe. Para o momento presencial, através das atividades e discussões, com a mediação do professor serão sanadas dúvidas e agregados conceitos e conhecimentos mais complexos sobre o objeto de estudo. Considerando também que os indivíduos não aprendem todos da mesma forma e ao mesmo tempo, a inversão possibilita a retomada ao assunto quantas vezes o aluno precisar.

Com o uso de aplicativos disponíveis a inversão pode ser um momento em que os alunos podem assistir a uma videoaula sobre o conteúdo e imediatamente a seguir dar um *feedback* sobre sua compreensão com relação ao mesmo. Este *feedback* pode ser em forma de fórum, questões discursivas ou objetivas, *quizzes*, *podcast* entre outros. Conforme Bergmann,

Com o crescimento tanto do modelo invertido quanto dos avanços tecnológicos, os alunos agora podem interagir com vídeos e dar *feedback* por um leque de ferramentas *on-line* algumas que coletam informações após os alunos assistirem ao vídeo e outras que coletam enquanto o vídeo está sendo visualizado. (BERGMANN, 2018, p. 46)

Com os resultados dos *feedbacks* o professor pode dar a introdução na sua aula presencial e também será uma ferramenta importante para a avaliação de aprendizagem uma vez que terá conhecimento do nível de entendimento que seus alunos se encontram no início do

estudo, quando apenas uma introdução do assunto foi feita, e ao final do processo de ensino aprendizagem sobre o conteúdo.

3.4.1 Ferramentas Tecnológicas para a Implantação da Metodologia Sala de Aula Invertida

Com o avanço no desenvolvimento tecnológico muitos softwares, plataformas e aplicativos educacionais foram desenvolvidos. Destes softwares, muitos deles gratuitos, são excelentes ferramentas no auxílio aos professores no planejamento de propostas pedagógicas para a aprendizagem dos alunos.

Estas ferramentas podem ser utilizadas tanto para uma proposta pedagógica online, aonde o aluno estuda em casa ou em outro espaço extraclasse, como para as aulas presenciais, pois elas possibilitam deixar a aula mais dinâmica, e com o uso de determinados aplicativos, professor e alunos podem obter os resultados de testes de forma instantânea.

As ferramentas utilizadas neste trabalho são o software *Plickers* e aplicativos do Google que estão disponíveis gratuitamente.

3.4.1.1 Plickers

O *Plickers*² é um software gratuito, com versão online³, na web, e em aplicativo para smartphones e tablets, que possibilita a realização de testes rápidos.

Para a sua utilização, na versão online, é necessário fazer um *login*. Após a realização desse *login* o professor deve criar uma pasta para inserir questões objetivas, sobre o objeto de estudo em questão, as quais podem apresentar até quatro opções de respostas. Na sequência, ele cadastra a turma com o nome de todos os alunos e a cada um deles atribui o número de um cartão. Na plataforma, estão disponível para impressão, os cartões com números e *Qr code*, os quais devem ser utilizados na sala de aula pelos alunos para responder as questões.

Para utilizar o aplicado *offline*, em seu dispositivo móvel, o professor deve fazer o download do aplicativo, e entrar com o mesmo *login* da web. Para aplicar o teste e colher as respostas, o professor deve entregar aos alunos os cartões com seus respectivos números. Depois, o professor seleciona a pasta com as questões que deseja aplicar, projeta elas, e através

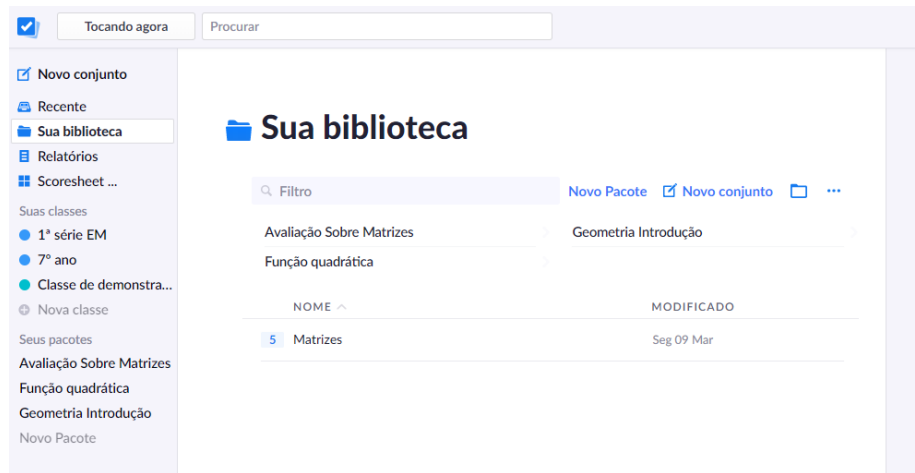
2 Caso a página esteja em inglês ela poderá ser traduzida para o Português clicando com o botão direito do mouse.

3 Disponível em <https://get.plickers.com/>

do aplicativo no smartphone ou tablet, escaneia os cartões dos alunos. É através da posição dos cartões, conforme os alunos mostram ao professor, que o App reconhece as respostas e disponibiliza os dados do desempenho da turma de forma instantânea.

A Figura 6 apresenta o ambiente do aplicativo, na versão para o computador, onde são criadas as questões.

Figura 6: Ambiente do aplicativo onde são criadas as questões.



Fonte: <https://www.plickers.com/library>.

A Figura 7 apresenta, no ambiente do aplicativo, algumas questões sobre matrizes para serem aplicadas aos alunos.

Figura 7: Questões sobre matrizes inseridas no aplicativo.

2ª série EM

EM PROGRESSO

Matrizes

Jogado Seg 09 Mar

Jogue agora

1- Dada a matriz, são elementos de sua diagonal principal:

A 15, 10, 5, 30
B 15, 4, 0, 8
C 30, 2, 0, 1
D 0, 0, 0, 0

PRÓXIM

2- Qual item a matriz A definida por $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ onde $a_{ij} = 1$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$ está correta?

A I
B II
C III
D IV

3- Sejam as matrizes A e B, respectivamente

A I
B II
C III
D IV

Editar conjunto

Fonte: <https://www.plickers.com/library>.

A Figura 8 apresenta exemplos de cartões *Qr code* que podem ser utilizados pelos alunos para a escolha das respostas das questões de múltipla escolha apresentadas no aplicativo *Plickers*.

Figura 8: Exemplos de cartões *Qr code* para respostas das questões de múltipla escolha.



Fonte: A Autora, 2020.

A utilização de algumas ferramentas tecnológicas digitais permite a obtenção de um *feedback* instantâneo do resultado de atividades desenvolvidas pelos alunos, o que possibilita ao professor fazer intervenções pedagógicas significativas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

3.4.1.2 Aplicativos da Plataforma Google

A plataforma Google possui um conjunto de aplicativos gratuitos de excelente utilidade para a implantação da metodologia sala de aula invertida. Ela disponibiliza um pacote de ferramentas gratuitas que inclui e-mail, agenda, armazenamento na nuvem, salas de videochamadas, plataforma para criar sala de aula (para postagem e recebimentos de materiais), programas de edição de documentos, planilhas e apresentações, formulários, criação de sites, fóruns e outros.

Uma das plataformas que utilizamos neste trabalho é a plataforma Google Sala de Aula (ou no inglês Google *Classroom*). Esta plataforma possibilita ao professor criar salas de aula online, onde podem ser disponibilizados ou compartilhados arquivos para estudo extraclasse, em casa, por exemplo, ou ainda a criação de blogs para disponibilizar os conteúdos em formato de sequências didáticas que pode ser acessadas por meio de um link. Esses mecanismos possibilitam aos alunos acessarem as explicações e conceitos quantas vezes eles necessitarem,

para melhor compreensão dos conteúdos. Para tanto, é necessário que o aluno possua um endereço de e-mail.

A utilização de formulários permite aos alunos responderem questionários ou *quizzes* em casa e, de forma instantânea, terem acesso ao seu desempenho, possibilitando assim a retomada dos conceitos que julgar necessário, assim como o professor que também possui acesso a esses dados e pode auxiliar o aluno nessa retomada.

Com a agenda o professor pode programar tempo de realização de trabalho, prazo de entrega, fazendo com que o aluno crie uma rotina de estudo.

A escolha das ferramentas disponibilizadas pela plataforma Google deve ser realizada pelo professor na hora do planejamento, uma vez que ele escolherá a que julgar mais adequada para a aprendizagem do objeto de conhecimento em questão.

4 METODOLOGIA

O presente trabalho tem cunho teórico e descritivo. Inicialmente realizamos uma revisão bibliográfica acerca dos temas Aprendizagem Significativa de Ausubel, Metodologias Ativas, Sala de Aula Invertida e TDICs. Como a revisão bibliográfica foi realizado um levantamento de procedimentos metodológicos para a aprendizagem e com estas informações elaboramos uma proposta metodológica para o ensino de matrizes, a qual compreende uma sequência didática utilizando a metodologia Sala de Aula Invertida e TDICs.

De acordo com Honório e Scortegagna (2016), a metodologia Sala de Aula Invertida compreende três fases: planejamento, implementação e avaliação do processo.

- i) A primeira fase é a fase do planejamento e consiste na escolha do design instrucional do ambiente virtual, no desenvolvimento do material didático, que será disponibilizado online aos alunos (vídeos, listas de exercícios e etc) e, na preparação dos alunos para a implementação da metodologia.
- ii) A segunda fase consiste na implementação da metodologia que é composta de três momentos: momento online, momento presencial e momento de avaliação do encontro presencial.
- iii) A terceira fase consiste em avaliar o processo proposto. Ela envolve o acompanhamento, a revisão e a manutenção do processo proposto e, assim, a criação de critérios para verificar se ele foi efetivo nos resultados da aprendizagem.

Neste trabalho abordamos a primeira destas três fases. Não executamos as fases 2 e 3 desse processo da metodologia Sala de Aula Invertida, conforme os passos descritos por Honório e Scortegagna (2016). A proposta metodológica elaborada, abordando os conteúdos de Matrizes para alunos do Ensino Médio, contempla uma sequência didática (material didático) com videoaulas abordando esse conteúdo e listas com exercícios e problemas.

Uma vez delimitado o tema, Matrizes, para o desenvolvimento do material didático foi escolhido o ambiente virtual oferecido pela plataforma Google e o material adaptado para as atividades não presenciais, às quais são online. Neste trabalho, essas são as atividades que os alunos farão extraclasse, as videoaulas que eles assistirão e as respostas às listas de exercícios que devolverão para o professor. A escolha da plataforma Google foi motivada pelo fato dela oferecer uma variação de ferramentas gratuitas para o desenvolvimento de atividades escolares,

uma vez que as ferramentas ficam conectadas a um e-mail (que pode ser do gmail), e permitem desenvolver, armazenar e disponibilizar o conteúdo e atividades aos alunos.

Esta proposta contempla quatro momentos não presenciais (online) e seis encontros presenciais. As videoaulas elaboradas pelo professor para os momentos não presenciais são bem objetivas e não são extensas, permitindo que os alunos mantenham a concentração e se necessário assistam várias vezes, facilitando a compreensão. É importante incluir uma aula presencial, anterior a esses momentos, para apresentar a proposta metodológica, proposta didática e metodologia Sala de Aula Invertida, explicar como utilizar o software *Plickers* e os aplicativos do Google.

Com a elaboração de uma proposta didática pautada em Metodologias Ativas com o uso da tecnologia esperamos proporcionar maior significação ao processo de ensino, por isso construímos uma sequência de atividades sobre o conteúdo de matrizes em torno do conceito e construção de matrizes, representação de uma tabela identificação de seus elementos, bem como a classificação de uma matriz quanto ao seu tipo, realização de operações com matrizes e resolução de situações-problema que envolvam esse conteúdo.

Também são apresentadas sugestões para a preparação dos alunos para a implementação da metodologia.

5 SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O USO DA METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA

De acordo com Bacich, Tanzi Neto e Trevisani (2015, p.51), “as modificações possibilitadas pelas tecnologias digitais requerem novas metodologias de ensino, as quais necessitam de novos suportes pedagógicos, transformando o papel do professor e dos alunos e ressignificando o conceito de ensino e aprendizagem”. Ainda, como uma possibilidade, os autores apresentam o ensino online como uma forma de preencher lacunas no processo de aprendizagem, uma vez que nesta modalidade podemos ter uma forma de ensino personalizado, podendo contribuir para a aprendizagem significativa.

Neste sentido, apresentamos uma proposta metodológica para o ensino de matrizes, para o Ensino Médio, a qual compreende uma sequência didática elaborada para ser utilizada com a metodologia Sala de Aula Invertida, a qual possui uma parte para ser trabalhada de modo não presencial, mas online, e outra presencial. Esta proposta de sequência didática foi elaborada com o auxílio de ferramentas tecnológicas digitais, como o Google Formulário, blog, *Plickers*, como incremento ao uso de Metodologias Ativas, Sala de Aula Invertida e com atividades que possam despertar o interesse para os conceitos e propriedades de Matrizes.

5.1 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática que estamos apresentando, nesta seção, é uma estratégia de ensino baseada na metodologia ativa Sala de Aula Invertida, por isso a mesma apresenta momentos não presenciais, mas conectados a alguma rede de Internet, em que o aluno estudará em casa ou extraclasse o material disponibilizado pelo professor de modo online, e presencial, em que o aluno estará na sala de aula com o professor e seus colegas.

Nesta proposta metodológica os momentos considerados não presenciais caracterizam-se como online pelo uso da internet para acessá-los, uma vez que as videoaulas e os exercícios são disponibilizados por link em um blog, porém os alunos podem ver quando e quantas vezes precisarem ou quiserem.

Para os momentos não presenciais o aluno tem que acessar o blog ebomestudarmatematica.blogspot.com onde ele encontra em um link o roteiro de estudos. Este

roteiro é composto por videoaulas, produzidas pela professora autora desse trabalho, explicando os conteúdos de Matrizes. Após cada vídeo, que não deve ser muito longo para que os alunos não percam a atenção, eles responderão algumas questões referentes ao conteúdo abordado no vídeo.

Figura 9: Ambiente do blog para acesso aos links das videoaulas e exercícios



Fonte: A Autora, 2019.

Para dar sequência e poder assistir o próximo vídeo o aluno deverá responder, obrigatoriamente, as questões e enviar as respostas ao professor. As respostas ficarão disponíveis para o professor no seu formulário de respostas. Para esse momento foi usado o aplicativo Google Formulário que permite a construção de um formulário onde é possível anexar vídeos, elaborar perguntas objetivas, de respostas curtas, de respostas de múltipla escolha ou de respostas de um parágrafo.

A utilização de vídeos produzidos pelo professor e não de vídeos disponíveis na internet permite a ele uma aproximação maior com os seus alunos, nesses momentos não presenciais, além de proporcionar uma personalização da aprendizagem.

Aqui cabe uma observação de que se algum aluno não possuir acesso à internet em sua casa, o professor tem que buscar auxiliá-lo de outras formas. Pode ser disponibilizado o uso do laboratório de informática da escola ou o professor poderá gravar as aulas num dispositivo tipo pendrive, por exemplo, e entregar ao aluno. Também deve combinar com esse aluno como ele fará as demais atividades online.

Nas aulas presenciais os alunos poderão esclarecer suas dúvidas referentes aos conteúdos abordados nas videoaulas, o professor poderá fazer a correção das questões que os alunos responderam de modo online e ainda os alunos poderão trabalhar no coletivo, com a mediação do professor, na resolução de novas atividades.

5.2 ROTEIRO PARA A IMPLEMENTAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE MATRIZES UTILIZANDO A METODOLOGIA SALA DE AULA INVERTIDA

O roteiro para a implementação da sequência didática sobre Matrizes utilizando a metodologia Sala de Aula Invertida foi elaborado de acordo com os passos descritos por Honório e Scortegagna (2016), os quais compreendem as fases de planejamento, implementação e avaliação do processo, sendo a implementação dividida em dois momentos não presencial e presencial.

Nesta seção detalhamos a fase da implementação da metodologia que é composta dos momentos: não presencial, presencial e de avaliação da aprendizagem dos conteúdos pelos alunos.

Anteriormente ao início da aplicação da proposta, conforme Bergmann e Sams (2016, p. 11) sugerem que o professor deva treinar os alunos a assistirem os vídeos, bem como a não se distraírem enquanto estão assistindo e também como devem fazer seus resumos do conteúdo e a anotarem suas dúvidas. Eles enfatizam a importância de que os alunos assistam os vídeos, “paudem” e “retrocedam” para que possam anotar pontos importantes da lição assistida e levar suas dúvidas para a aula presencial.

Para os quatro momentos não presenciais os alunos deverão acessar o blog ebomestudarmatematica.blogspot.com, através de links de acesso. Ao acessar os links o aluno encontrará os formulários, sendo que cada formulário é composto por duas videoaulas e questões para serem respondidas a fim de auxiliar os alunos em sua compreensão dos conteúdos apresentados nos vídeos. Os alunos deverão assistir os vídeos, responder as questões online e ao final enviá-las ao professor.

As aulas presenciais serão introduzidas a partir das respostas enviadas pelos alunos e a partir daí o professor mediará atividades de mais complexidade sobre o assunto.

Em relação à sequência didática elaborada para cada encontro, não presencial e presencial, ela contempla os seguintes itens:

- Conteúdos: são descritos os conteúdos trabalhados em cada encontro;
- Objetivos: descrevem os objetivos da aula;
- Tempo de execução da sequência didática;
- Materiais necessários para a execução das atividades da sequência;
- Descrição: detalhamento de cada aula da sequência didática.

Em relação à avaliação da aprendizagem dos alunos, ela poderá ser feita de dois modos: utilizando uma ferramenta disponível no software/aplicativo *Plickers* e presencialmente por meio da realização de atividades escritas, de preferência com questões discursivas. Para a avaliação o professor também poderá considerar os *feedbacks* dos formulários respondidos pelos alunos nos momentos não presenciais.

Uma das ferramentas que pode ser utilizada para a avaliação trata-se de uma atividade dinâmica com perguntas objetivas realizadas no aplicativo *Plickers*. Para a realização desta avaliação, é necessário entrar no site www.plickers.com utilizando o computador, fazer o cadastro na versão gratuita. A confirmação dos dados dará acesso à tela inicial do aplicativo⁴.

Para elaborar as questões, para aplicar aos alunos, o professor tem que clicar em novo conjunto, disponível no aplicativo. Na versão gratuita esses conjuntos constituem blocos de cinco perguntas, mas nada impede a criação de mais conjuntos. Criado(s) o conjunto ou os conjuntos de questões, onde cada conjunto tem um título, os mesmos ficam disponíveis no ícone Biblioteca, no aplicativo.

Para o cadastro dos alunos e a distribuição do número de cartões *Qr code* a eles, basta clicar no ícone Nova Classe, digitar o nome da turma, confirmar e inserir o nome e sobrenome dos alunos. A ordem em que é inserido o nome do aluno condiz com o número do cartão em que estarão as respostas desse aluno. Por exemplo: o primeiro nome inserido é representado pelo cartão de número 1, e portanto na hora da aplicação da atividade ele deverá receber o seu respectivo cartão.

Para corrigir a atividade avaliativa criada no aplicativo *Plickers*, o professor precisa fazer o download do aplicativo, em seu celular ou smartfone, o qual será utilizado para fazer a leitura dos *Qr code* com as respostas dos alunos. Ele deverá adicionar a mesma conta e e-mail que informou na hora do cadastro na versão online. Uma vez instalado o aplicativo e sincronizado, o professor terá todas as informações que inseriu no computador disponível em seu smartfone.

A realização da atividade acontecerá com a seleção do conjunto de questões que está disponível no item biblioteca. Após clicar neste conjunto, escolher a turma em que se deseja aplicar tais questões, e iniciar o jogo. As questões deverão ser reproduzidas por um projetor ou multimídia. Os alunos de posse de seus respectivos cartões *Qr code*, lerão as questões individualmente e posicionarão o cartão conforme a alternativa escolhida como correta. Com o

4 Caso a página esteja em inglês ela poderá ser traduzida para o Português clicando com o botão direito do mouse.

smartfone o professor capturará as imagens Qr *code* de cada aluno e imediatamente o resultado aparecerá na projeção, informando a resposta certa e o resultado de cada cartão. Ao final da aplicação do teste, o professor terá acesso ao desempenho de cada aluno por resposta individual ou por porcentagem de acertos, clicando apenas no ícone relatórios.

No segundo momento de avaliação, os alunos realizarão uma avaliação escrita, individual onde através da interpretação e resolução dos exercícios serão avaliados.

5.2.1 - Primeiro Momento não Presencial (online)

Conteúdos: Matrizes: contexto histórico, organização das matrizes por linhas e colunas, ordem, tipo, lei de formação, classificação, diagonais de uma matriz.

Objetivos:

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes;
- Reconhecer e conceituar matrizes;
- Resolver situações-problema envolvendo matrizes;
- Estudar esses conteúdos, de modo individual, a partir do material disponibilizado pela professora.

Descrição:

Neste primeiro momento os alunos devem acessar o material disponibilizado no blog ebomestudarmatematica.blogspot.com. Trata-se de um formulário criado no Google Formulário, aplicativo da plataforma Google, onde os alunos terão, a sua disposição, videoaulas explicativas sobre os conceitos de matrizes: contexto histórico, organização das matrizes por linhas e colunas, ordem, tipo, lei de formação e classificação e questões referentes a estes conceitos.

Após assistirem aos vídeos os alunos responderão as questões disponíveis no formulário e enviarão respostas para o professor. Assim, o professor poderá usar as respostas destas questões para iniciar sua aula presencial.

5.2.2 - Primeira Aula Presencial

Conteúdos: Matrizes: contexto histórico, organização das matrizes por linhas e colunas, ordem, tipo, lei de formação, classificação, diagonais de uma matriz.

Objetivos:

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes;
- Reconhecer e conceituar matrizes;
- Resolver situações-problema envolvendo matrizes.

Tempo: 45 minutos.

Descrição:

A aula iniciará com uma conversa sobre o assunto matrizes, partindo das videoaulas assistidas em casa pelos alunos e das atividades por eles respondidas no Google Formulário. Neste momento o professor deve retomar os conteúdos estudados previamente pelos alunos a fim de melhor elucidá-los ou sanar dúvidas apresentadas.

Em seguida, em grupos, os alunos passam para a resolução da lista de atividades (Anexo I), a qual pode ser resolvida em grupo com a mediação do professor.

5.2.3 - Segundo Momento não Presencial

Conteúdos: Matrizes: transposta, simétrica, anti-simétrica, igualdade, adição e subtração, e multiplicação de um número real por uma matriz.

Objetivos:

- Desenvolver cálculos e operações com matrizes;
- Determinar transposta de uma matriz;
- Reconhecer uma matriz simétrica e anti simétrica.
- Resolver situações-problema envolvendo matrizes.
- Estudar esses conteúdos, de modo individual, a partir do material disponibilizado pela professora.

Descrição:

Neste momento os alunos terão acesso ao material disponibilizado no blog ebomestudarmatematica.blogspot.com. O material consiste em videoaulas com a explicação sobre matriz transposta, simétrica, anti-simétrica; igualdade, adição e subtração de matrizes, e multiplicação de um número real por uma matriz, além de resolver as atividades envolvendo estes conceitos.

Após assistir cada vídeo, os alunos deverão responder as questões propostas e enviá-las para o professor. O retorno dessas respostas será dado na próxima aula presencial.

5.2.4 – Segunda Aula Presencial

Conteúdos: Matrizes: transposta, simétrica, anti simétrica, igualdade, adição e subtração, e multiplicação de um número real por uma matriz.

Objetivos:

- Desenvolver cálculos e operações com matrizes;
- Determinar transposta de uma matriz;
- Reconhecer uma matriz simétrica e anti simétrica.
- Resolver situações-problema envolvendo matrizes.

Tempo: 90 minutos.

Descrição:

A aula iniciará com a correção e revisão dos exercícios resolvidos presencialmente na aula anterior, Anexo I, sobre matrizes: contexto histórico, organização das matrizes por linhas e colunas, ordem, tipo, lei de formação, classificação, diagonais de uma matriz. Em seguida acontecerá uma conversa em torno das videoaulas assistidas em casa pelos alunos e das atividades testes de compreensão dos conceitos envolvendo matriz transposta, matriz simétrica, matriz anti simétrica, igualdade de matrizes, adição e subtração de matrizes, e multiplicação de um número real por uma matriz. Rever os conceitos envolvidos nas atividades, se necessário.

Posteriormente será realizada a resolução da lista de atividades (Anexo II), a qual poderá ser resolvida em grupo com a mediação do professor.

5.2.5 - Terceiro Momento não Presencial

Conteúdos: Multiplicação de matrizes e matrizes inversas.

Objetivos:

- Desenvolver cálculos e operações com matrizes;
- Determinar se uma matriz inversa e quando uma matriz possui inversa.
- Resolver situações-problema envolvendo matriz e inversa de matriz.
- Estudar esses conteúdos, de modo individual, a partir do material disponibilizado pela professora.

Descrição:

Assistir aos vídeos disponibilizados no blog ebomestudarmatematica.blogspot.com com explicação sobre multiplicação de matrizes e matrizes inversas, resolver as atividades envolvendo estes conceitos e enviá-las ao professor.

5.2.6 – Terceira Aula Presencial

Conteúdos: Multiplicação de matrizes e matrizes inversas.

Objetivos:

- Desenvolver cálculos e operações com matrizes;
- Determinar se uma matriz apresenta inversa por sistemas lineares e quando uma matriz possui inversa.
- Resolver situações-problema envolvendo matriz e inversa de matriz.

Tempo: 45 minutos.

Descrição:

A aula iniciará com a correção e revisão dos exercícios resolvidos na aula anterior. Em seguida acontecerá uma conversa em torno das videoaulas assistidas em casa pelos alunos e das atividades testes de compreensão dos conceitos. Serão revisados os conceitos envolvidos nas atividades, se necessário for.

Posteriormente será iniciada a resolução da lista de atividades (Anexo III), a qual poderá ser resolvida em grupo com a mediação do professor e concluída em casa.

5.2.7 – Quarto Momento não Presencial

Conteúdos: Resolução de problemas sobre matrizes e de equações matriciais.

Objetivos:

- Resolver situações-problema envolvendo matriz e inversa de matriz.
- Estudar esses conteúdos, de modo individual, a partir do material disponibilizado pela professora.

Descrição:

Neste momento os alunos deverão terminar de resolver a lista de atividades (Anexo III) sobre multiplicação de matrizes e matrizes inversas, e também terão disponível videoaulas no blog ebomestudarmatematica.blogspot.com com a explicação e dicas sobre resolução de problemas sobre matrizes e de equações matriciais, necessárias para o cálculo de uma matriz inversa.

5.2.8 – Quarta Aula Presencial

Conteúdo: Resolução de problemas sobre matrizes e de equações matriciais.

Objetivos:

- Aplicar conhecimentos de matrizes na resolução de problemas.

Tempo: 90 minutos.

Descrição:

A aula iniciará com a correção e revisão dos exercícios extraclasse sobre multiplicação de matrizes e matrizes inversas. Em seguida, explicação e exemplificação de equações matriciais e a importância das matrizes na resolução de problemas. Posteriormente será realizada a resolução da lista de atividades (Anexo IV), a qual poderá ser resolvida em grupo com a mediação do professor, sobre equações matriciais e problemas envolvendo matrizes.

5.2.9 – Quinta Aula Presencial

Conteúdo: Revisão e Avaliação.

Objetivos:

- Identificar se os conceitos acerca do conteúdo de matrizes foram compreendidos.

Tempo: 45 minutos.

Descrição:

A aula iniciará com a correção e revisão da lista de atividades (anexo IV) sobre equações matriciais e problemas envolvendo matrizes. Em seguida acontecerá um primeiro momento avaliativo com o uso do aplicativo *Plickers*. Este momento avaliativo é individual, os alunos previamente cadastrados no aplicativo usarão cartões individuais com *Qr code* que conforme a posição mostrada representa a alternativa de resposta escolhida pelo aluno, no mesmo instante os resultados serão apresentados no projetor e ao final da atividade o *Plickers* já informa o percentual de acerto de cada aluno.

5.2.10 – Sexta Aula Presencial

Conteúdos: Matrizes: Avaliação

Objetivos:

- Identificar se os conceitos acerca dos conteúdos de matrizes foram compreendidos;
- Aplicar conhecimentos de matrizes na resolução de problemas.

Tempo: 90 minutos.

Descrição:

Neste encontro acontecerá o segundo momento avaliativo o qual consiste na resolução individual de dez questões discursivas envolvendo todos os conteúdos de Matrizes estudados (Anexo V).

5.3 CONTRIBUIÇÕES E POTENCIALIDADES DA PROPOSTA METODOLÓGICA

Sabemos que, cada vez mais a tecnologia e os meios tecnológicos digitais fazem parte da vida cotidiana dos alunos, e em muitas ocasiões são tidas como um problema para o processo educacional por causarem distração e desinteresse dos alunos pela aprendizagem. Sem ter como fugir destes avanços tecnológicos, e tendo que utilizá-los a favor da educação é que propomos o presente trabalho, em que elaboramos uma proposta metodológica, que contempla uma sequência didática para o ensino de Matrizes, aliando o uso de tecnologias digitais a uma metodologia ativa, a metodologia Sala de Aula Invertida, com o intuito de que esse material elaborado com essa metodologia possa contribuir para a Aprendizagem Significativa do aluno.

Conforme já foi apresentado, segundo Masini e Moreira (2017, p. 26), para que o indivíduo desenvolva uma aprendizagem significativa é necessário três condições básicas: (1) conhecimento prévio; (2) predisposição para a aprendizagem, e; (3) materiais instrucionais potencialmente significativo. Criar tais condições significa dar aos alunos possibilidade de adquirir novos conhecimentos com sentido tornando-os capazes de aplicá-los em situações novas.

Assim, o presente trabalho busca desenvolver uma sequência didática que propicie aos alunos a exploração dos conceitos de matrizes com o auxílio de recursos tecnológicos durante as atividades não presenciais, mas online e em aulas presenciais, com o uso do aplicativo *Plickers*. A partir dessa exploração buscamos promover reflexões que permeiam os conceitos curriculares, e, por meio destes, desenvolver competências e habilidades que resultem em ações. Tais reflexões são promovidas através de situações-problema que descrevem o contexto em que os alunos estão inseridos e mobilizam os mesmos à construção do conhecimento com significado.

Com a grande demanda de conteúdo, propostos pela grade curricular do Ensino Básico, o tempo em sala de aula torna-se insuficiente para uma abordagem mais complexa sobre os conceitos e suas aplicações. O método da sala de aula invertida possibilita que os conceitos básicos sobre Matrizes sejam estudados em casa através de videoaulas gravadas pelo professor.

Desta forma o tempo que o aluno escutaria o professor explicando na sala de aula ele assiste a videoaula extraclasse, além do mais ele pode rever a videoaula quantas vezes quiser, bem como anotar as dúvidas para saná-las na aula presencial.

Para a sequência apresentada neste trabalho, os vídeos criados para os momentos não presenciais e disponibilizados de modo online foram gravados em uma sala de aula, dispostos para acesso dos alunos por meio de um link em um blog. Cada videoaula é seguida de algumas perguntas, que visam identificar a compreensão que o aluno teve sobre o assunto. Tais questões, após respondidas, devem ser encaminhada ao professor. No método tradicional, esta seria a aula em sala e o aluno levaria para casa uma lista de exercícios dos quais, na maioria das vezes ou a maioria deles, não resolveria. Com a Sala de Aula Invertida, o professor, antecipadamente consegue diagnosticar o que ficou falho na compreensão dos conceitos, pelos alunos, o que possibilita a introdução do desenvolvimento da aula presencial e de novas atividades a fim de oferecer uma nova oportunidade ou aprofundamento da aprendizagem.

É claro que, o professor tem que ficar atento se os alunos estão assistindo as videoaulas e respondendo os questionários, nos momentos não presenciais. Caso isso não esteja sendo feito, por algum aluno, cabe ao professor conversar.

Em sala de aula, no momento presencial, as atividades desenvolvidas pelos alunos, coletivamente ou com a mediação do professor, podem favorecer à Aprendizagem Significativa. Para auxiliar nessa aprendizagem com significados, o professor pode propor problemas com características da vida cotidiana dos alunos, sendo que para resolvê-los os alunos têm que fazer uso dos conceitos envolvidos nos conteúdos de matrizes trabalhados. Desta forma o professor pode através do planejamento proporcionar uma maior significação a aprendizagem, uma vez que destaca a importância cognitiva de cada aluno para encontrar uma estratégia a partir do conteúdo para chegar a uma solução. Atividades coletivas, de debate ou reflexões promovem interação entre as informações novas e conhecimentos anteriores já construído, compõem uma estrutura cognitiva organizada de forma hierárquica na mente do indivíduo e faz com que o conhecimento seja agregado, ocorrendo assim a aprendizagem significativa.

As atividades colaborativas presenciais são aquelas em que uma tarefa, uma situação-problemas deve ser resolvida colaborativamente em pequenos grupos (e.g., dois a quatro participantes) em sala de aula com a mediação do professor, ou de um monitor se houver, sempre que os alunos solicitem e o mediador julgar que é pertinente. Ou seja a função do mediador não é a de responder quaisquer perguntas, mas a de dar sugestões, esclarecer dúvidas, estimular os alunos, mantê-los em atividade. (MOREIRA, 2017 p.43)

Com a proposta de práticas de aprendizagem não presenciais mediadas por ferramentas tecnológicas, foi possível desenvolver um material, os vídeos e os formulários de atividades, personalizado para os momentos de estudos dos alunos em casa ou extraclasse, uma vez que cada um possui uma dinâmica particular em seu ambiente familiar. Diante da realidade atual dos alunos, os momentos não presenciais juntamente com os momentos presenciais, trabalhados de forma coletiva e mediados pelo professor se tornam uma metodologia educacional apoiada nas novas tecnologias da informação e comunicação que propiciam ao aluno o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo a elaboração de uma proposta metodológica para o ensino de Matrizes com o uso da metodologia Sala de Aula Invertida, sendo fundamentada na teoria da Aprendizagem Significativa, teoria elaborada por David Ausubel, e amplamente estudada por Moreira, a qual visa proporcionar maior significação ao processo de aprendizagem.

Nesta proposta metodológica buscamos articular um planejamento aliado ao uso de tecnologias digitais, Metodologias Ativas de ensino: a metodologia Sala de Aula Invertida, de modo a promover uma Aprendizagem Significativa de conteúdos de Matrizes, na Educação Básica.

Propomos responder a seguinte questão “Em que sentido o uso de metodologias ativas pode contribuir para a aprendizagem significativa de Matrizes, no Ensino Médio?”

Para tanto escolhemos o uso das TDICs uma vez que elas têm um papel fundamental no uso da metodologia Sala de Aula Invertida, pois além de proporcionar a comunicação, a personalização e poder contribuir para a autonomia dos alunos, elas também podem ser utilizadas nos momentos presenciais, na sala de aula, ou em qualquer outro ambiente educacional. Esperamos que o uso destas ferramentas, também nos momentos presenciais, despertem, por meio de interações, maior intencionalidade dos alunos para aprender de forma significativa.

A exploração da metodologia Sala de Aula Invertida aliada a tecnologia permite uma abordagem metodológica em que o aluno é protagonista no processo de construção do seu conhecimento, fazendo com que desenvolva autonomia na aprendizagem. Tal metodologia também permite ao aluno dar uma nova significação ao uso dos meios tecnológicos digitais disponíveis, o de que não são apenas instrumentos de comunicação e de mera informação, mas também ferramentas que possibilitam a exploração e construção de novos conhecimentos.

Além do mais, a exploração dos conceitos previamente às aulas presenciais, possibilitam ao professor a elaboração de um planejamento, para a sala de aula, com uma linguagem mais diversificada que exija dos alunos compartilhar e debater suas ideias e entendimentos, evitando a construção, muitas vezes de compreensões errôneas sobre o assunto.

Sabemos que a realidade de muitos alunos de escola pública pode ser um desafio para a implementação da metodologia Sala de Aula Invertida, devido a esses alunos não possuírem fácil acesso as tecnologias digitais, fora da escola. Porém, o professor e a comunidade escolar podem buscar meios de proporcionar a esses alunos formas de acessarem as atividades a serem

desenvolvidas de modo não presencial, um deles é proporcionando o acesso ao laboratório de informática escolar no contraturno. Uma outra dificuldade que pode ser observada na implantação desta metodologia é a utilização desses recursos de forma inadequada, não favorecendo uma aprendizagem significativa dos conteúdos e promovendo uma mera aprendizagem mecânica.

Apesar destas dificuldades apresentadas, consideramos que o uso da metodologia da Sala de Aula Invertida com o auxílio de tecnologias, desenvolve um ambiente de sala de aula mais colaborativo com atividades em que os alunos tornam-se sujeitos ativos no processo de construção de seus próprios conhecimentos, permitindo ao aluno fazer relação entre os conteúdos de matrizes estudados com assuntos/temas do seu cotidiano. Consideramos também que o material que elaboramos, a sequência didática, videoaulas e questionários, tem características de ser potencialmente significativo para o aluno pois alia o uso de tecnologias ao ensino de conteúdos de Matrizes, podendo despertar a curiosidade e o interesse do aluno para o ensino.

Diante de tudo que foi exposto podemos concluir que o material didático que apresentamos aliado a predisposição do aluno para aprender têm possibilidade de gerar aprendizagem significativa de conteúdos de Matrizes.

A fim de concluir, destacamos que a autora, futuramente aplicará essa proposta metodológica a alunos do Ensino Médio, da Educação Básica, para verificar na prática as conclusões deste estudo, bem como o desejo de aprofundar a pesquisa referente as contribuições que o uso de Metodologias Ativas, em específico a Sala de Aula Invertida, subsidiadas por tecnologias digitais de informação e comunicação propiciam a Aprendizagem Significativa no processo de ensino da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. and HANESIAN, H. **Educational psychology: a cognitive view**. 2nd. ed. New York, Holt Rinehart and Winston, 1978.

AUSUBEL, D. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva**. Lisboa: Plátano: 2013.

BACICH, L.; MORAN, J. (Org.) **Metodologias Ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico prática**. Porto Alegre: Penso, 2018.

BACICH, L.; TANZI NETO, A.; TREVISANI, F. M. (Org.) **Ensino híbrido: Personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**, volume 2. 2ª ed. São Paulo: Leya, 2016.

BERGMANN, J. **Aprendizagem invertida para resolver o problema do dever de casa**. Trad. Henrique de Oliveira Guerra; revisão técnica: Marcelo L.D.S. Gabriel. Porto Alegre: Penso, 2018.

BERGMANN, J.; SAMS, A. **Sala de aula invertida: Uma metodologia ativa de aprendizagem**. Trad. Afonso Celso da Cunha Serra. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da educação matemática**. 4ª ed. Belo Horizonte-Ed. Autêntica, 2011. 111p.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5ª ed.; 3ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.104 p.

BORBA, M. de C; SCUCUGLIA, R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. 2ª ed.; 2ª reimp. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **Parâmetros curriculares nacionais/ Matemática**. Brasília: A Secretaria. MEC/SEF, 2001. 3ª ed. 142 p.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. **Introdução aos Parâmetros curriculares**. Brasília: A Secretaria. MEC/SEF, 2001. 3ª ed. 142 p.

DAROS, T.; CAMARGO, F. **A sala de aula inovadora: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo**. Porto Alegre: Penso, 2018.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Unicamp: Editora da Unicamp, 2004.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v. 2.

GIORDANO, C. C.; SILVA, D. S. C. **Metodologias ativas em Educação Matemática: a abordagem por meio de projetos na Educação Estatística.** Revista de Produção Discente em Educação Matemática. ISSN 2238-8044. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/pdemat/article/view/35422>. Acesso em: 07 de maio de 2020.

HONÓRIO, H. L. G.; SCORTEGAGNA, L. **Sala de aula invertida na prática: implementação e avaliação no ensino de matemática.** VI Congresso Brasileiro de Informática na Educação; Anais do XXIII Workshop de Informática na Escola. Juiz de Fora, 2017.

MORAN, J. M. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José. (Org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática.** Porto Alegre: Penso, 2018. p. 02-25.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem.** Porto alegre: Editora E.P.U., 2011. 248p.

_____. **Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares.** Porto alegre: Editora da Física, 2011.

MOTA, A. R.; ROSA, C. W. Ensaio sobre metodologias ativas: reflexões e propostas. **Revista Espaço Pedagógico**, v. 25, n. 2, p. 261-276, 28 maio 2018.

ROLKOUSKI, E. **Tecnologias no ensino de Matemática.** 1ª ed. Curitiba: Ed. Intersaberes, 2013.

SANTA CATARINA, Governo do Estado. **Secretaria de Estado de Educação e do Desporto.** Proposta Curricular de Santa Catarina: formação integral na educação básica. Florianópolis, 2014.192 p.

SCHEFFER, N. F.; COMACHIO, E.; CENCI, D. (orgs). **Tecnologias da informação e comunicação em educação Matemática: articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações.** Curitiba: CRV, 2018.194 p.

SILVEIRA, J. F. P. da. **Surgimento da Teoria das Matrizes.** 1999. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html>. Acesso em 05 de outubro de 2019.

SOUZA, J. R. **#Contato Matemática.** 2ª série. 2ª ed. São Paulo: FTD, 2016.

TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Em 10 anos, aprendizado adequado no Ensino médio segue estagnado, apesar dos avanços no 5º ano do Fundamental.** Publicado em 21 de março de 2019. Disponível em: <https://www.todospelaeducacao.org.br/conteudo/meta-3-em-10-anos-aprendizado-adequado-ensino-medio-segue-estagnado-avancos-5-ano-fundamental>. Acesso em 04 de setembro de 2019.

ANEXOS

Anexo I - Lista de Exercícios da Primeira Aula Presencial

Conteúdos: Matrizes - contexto histórico, organização das matrizes por linhas e colunas, ordem, tipo, lei de formação, classificação, diagonais de uma matriz.

1- O Quadro 2 registra os resultados obtidos por quatro times em um torneio em que todos se enfrentam uma única vez:

Quadro 2: Resultados obtidos por quatro times em um torneio

	Vitórias	Empates	Derrotas
Concórdia	0	1	2
Chapecoense	2	1	0
Figueirense	0	2	1
Avaí	1	2	0

Fonte: As Autoras, 2020.

- Represente a matriz $A = (a_{ij})$ correspondente.
- Qual é a ordem da matriz A ?
- O que representa o elemento a_{23} da matriz A ?
- Qual o elemento da matriz A que indica a vitória do Avaí?

2- O mapa da Figura 10 apresenta as rotas oferecidas por uma companhia aérea que atua em parte do Brasil.

Figura 10: Rotas Aéreas

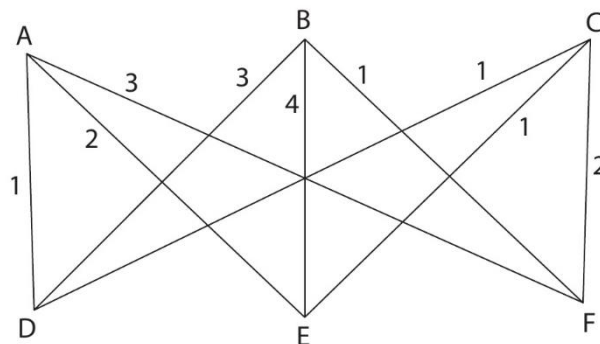


Fonte: Livro didático Contato Matemática 1ª ed. São Paulo, 2016.

- a) Escreva a matriz $C=(c_{ij})_{5 \times 5}$ tal que $c_{ij}=1$, se existe percurso direto da cidade i para j e $c_{ij}=0$, se não existe percurso direto da cidade i para j .
- b) Sabendo que a passagem para cada percurso custa R\$ 210,00, qual é o menor custo para uma viagem de ida e volta de Rio Branco a Boa Vista?
- c) A matriz C é uma matriz triangular? Ela é uma matriz diagonal?

3- (UFAL- AL/2010) A Figura 11 a seguir ilustra a rede de conexões entre os aeroportos A, B e C de uma cidade, e os aeroportos D, E e F de outra cidade. O número sobre a linha unindo os nomes dos dois aeroportos representa o número de linhas aéreas voando na rota de um aeroporto ao outro. Podemos representar os aeroportos de uma cidade como as linhas de uma matriz, os aeroportos da outra como as colunas de uma matriz e em cada intersecção linha coluna o número de conexões entre os dois aeroportos. Qual das matrizes a seguir não contém as informações corretas sobre os voos entre as duas cidades?

Figura 11: Conexões entre os aeroportos.



Fonte: Novo Olhar Matemática 2, São Paulo, 2013.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) & \text{c)} \left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right) & \text{e)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{array} \right) \\ \text{b)} \left(\begin{array}{ccc} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{array} \right) & \text{d)} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) & \end{array}$$

4- Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

- a) Classifique a matriz segundo seu tipo.
b) Determine os elementos a_{13} , a_{21} e a_{32} da matriz A.

5- Defina com suas palavras e dê um exemplo de uma:

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (a) Matriz quadrada; | (f) Diagonal secundária de uma matriz |
| (b) Matriz diagonal; | (g) Matriz simétrica; |
| (c) Matriz linha; | (h) Matriz identidade; |
| (d) Matriz coluna; | (i) Matriz oposta; |
| (e) Diagonal principal de uma matriz; | (j) Matriz transposta. |

6- Determine a soma dos elementos da matriz linha de ordem 1×5 que obedece a lei:

$$a_{ij} = 2i^2 - 3j.$$

7- Determine a ordem das matrizes a seguir e classifique-as em quadrada, diagonal, triangular, linha, coluna.

$$\text{a)} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{c)} C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{e)} E = (10 \quad 2 \quad -1)$$

$$\text{b)} B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 5 \\ 8 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{d)} D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

8- Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 4}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i = j \\ i - j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$ então $a_{22} + a_{34}$ é igual

a: _____

9- Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$, em que $a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{se } i \geq j \\ 1, & \text{se } i < j \end{cases}$

10- Verifique se cada afirmativa é verdadeira (V) ou falsa (F).

- a) Toda matriz quadrada A, tal que $a_{ij} = 0$ para $i < j$, é triangular superior.
b) Uma matriz diagonal é, simultaneamente, triangular superior e inferior.

- c) () Toda matriz nula é diagonal.
- d) () A matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz coluna.
- e) () Matriz linha é uma matriz de ordem $1 \times n$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Em particular, a matriz identidade de ordem 1×1 é uma matriz linha.

Anexo II - Lista de Exercícios da Segunda Aula Presencial

Conteúdos: Matriz transposta, simétrica, anti-simétrica. Igualdade, adição e subtração de matrizes, e multiplicação de um número real por uma matriz.

1- Sejam $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ determine $(A + B)^t$.

2- Determinar os valores de a e b , tais que: $\begin{pmatrix} 2a + 1 \\ b + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 2 \\ a + 3 \end{pmatrix}$

3- Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ calcule:

- | | |
|------------|--------------|
| a) $A + B$ | d) $2.A$ |
| b) $A - B$ | e) $3.B^t$ |
| c) $B - A$ | f) $(A^t)^t$ |

4- Calcule x , y e z , tais que

$$\begin{pmatrix} 2x & z \\ x - y & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2z \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

5- Determine a relação existente entre as matrizes $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Anexo III – Lista de Exercícios da Terceira Aula Presencial

Conteúdos: Multiplicação de matrizes e matrizes inversas.

1- Determine os produtos das matrizes:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

2- Calcule a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3- Encontre o valor de x para que o produto $A \cdot B$ seja uma matriz simétrica.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4- Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule:

a) $A + B$;

b) $2A - 3B$;

c) $A \cdot C$

d) $B \cdot C$

e) $C \cdot D$

f) $D \cdot A$

g) $D \cdot B$

h) $3 \cdot A \cdot D$

i) $D \cdot (2A + 3D)$

Anexo IV– Lista de Exercícios da Quarta Aula Presencial

Conteúdo: Atividades sobre equações matriciais e problemas envolvendo matrizes.

1- Resolva a equação $(X + A)^t = C$, sabendo que X é uma matriz de ordem 2×3 ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2- (UENF) A temperatura corporal de um paciente foi medida, em graus Celsius, três vezes ao dia, durante cinco dias. Cada elemento a_{ij} da matriz abaixo corresponde à temperatura observada no instante i do dia j .

$$\begin{pmatrix} 35,6 & 36,4 & 38,6 & 38,0 & 36,0 \\ 36,1 & 37,0 & 37,2 & 40,5 & 40,4 \\ 35,5 & 35,7 & 36,1 & 37,0 & 39,2 \end{pmatrix}$$

Determine:

- O instante e o dia em que o paciente apresentou a maior temperatura;
- A temperatura média do paciente no terceiro dia de observação.

3- (Adaptado de UFRJ) Há 5 alunos que compõem o Grêmio Estudantil de uma escola. Eles devem escolher entre si um presidente, sendo que cada aluno pode votar em até 3 nomes. Realizada a votação onde cada um deles recebeu um número de 1 a 5 os votos foram tabulados na matriz A a seguir indicada. Na matriz A , cada elemento a_{ij} é igual a 1 (um) se i votou em j , e é igual a 0 (zero), caso contrário.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Responda justificando sua resposta:

- Qual o candidato mais votado?
- Quantos candidatos votaram em si mesmos?

4- (UFRJ) Em uma cidade há três revistas de noticiário semanal: 1; 2 e 3. Na matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ a seguir, o elemento a_{ij} representa a probabilidade de um assinante trocar a assinatura da revista i para a revista j , na época da renovação.

$$A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

Responda justificando sua resposta:

a) Qual a probabilidade de os assinantes da revista 2 trocarem de revista quando forem renovar a assinatura?

b) Quais os leitores menos satisfeitos com a revista que estão assinando?

5- (CESGRANRIO) Cláudio anotou suas médias bimestrais de matemática, português, ciências e estudos sociais em uma tabela com quatro linhas e quatro colunas, formando uma matriz, como mostra a figura. Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por:

Figura 12: Notas de Cláudio por bimestre nas disciplinas de matemática, português, ciências e estudos sociais.

	1ºb	2ºb	3ºb	4ºb
matemática	5,0	4,5	6,2	5,9
português	8,4	6,5	7,1	6,6
ciências	9,0	7,8	6,8	8,6
est. sociais	7,7	5,9	5,6	6,2

Fonte: Projeto medicina

a) $\frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{4}$

e) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

6- (Adaptado - UFRJ-1999) Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar sorvete, foram de sorveteria em sorveteria, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos sorvetes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e D às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de sorvetes que i pagou para j , sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha i , coluna j de cada matriz). Assim, no sábado Antônio pagou 4 sorvetes que ele próprio consumiu, 1 sorvete de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha da matriz S).

- Quem consumiu mais sorvetes no fim de semana?
- Quantos sorvetes Cláudio ficou devendo para Antônio?

7- (UFRS, 2020) A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante:

Figura 13: Custo e Pratos da alimentação de um restaurante

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{prato } P_1 \\ \text{prato } P_2 \\ \text{prato } P_3 \end{matrix}$$

Fonte: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/cursos/trab3/ves32-34.html>, julho/2020

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P_1 , P_2 , e P_3 desse restaurante:

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1 , P_2 , e P_3 , está indicada na alternativa?

- $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

8- (UFRJ) Uma confecção vai fabricar 3 tipos de roupa utilizando materiais diferentes. Considere a matriz A a seguir, onde a_{ij} representa quantas unidades do material j serão empregadas para fabricar roupas do tipo i .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Responda justificando sua resposta:

- a) Quantas unidades do material 3 serão empregados para fabricar roupas do tipo 2?
 b) Calcule o total de unidades do material 1 que serão empregados para fabricar 5 roupas do tipo 1, 4 roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3?

9- Calcule a matriz X sabendo que X satisfaz a equação matricial abaixo.

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

10- (PUC-CAMP) Em um laboratório, as substâncias A, B e C são a matéria-prima utilizada na fabricação de dois medicamentos. O Mariax é fabricado com 5g de A, 8g de B e 10g de C e o Luciax é fabricado com 9g de A, 6g de B e 4g de C. Os preços dessas substâncias estão em constante alteração e, por isso, um funcionário criou um programa de computador para enfrentar essa dificuldade. Fornecendo-se ao programa os preços X , Y e Z de um grama das substâncias A, B e C, respectivamente, o programa apresenta uma matriz C , cujos elementos correspondem aos preços de custo da matéria-prima do Mariax e do Luciax. Essa matriz pode ser obtida de:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ x & y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 & 4 \\ x & y & z \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ x & y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y & z \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 \\ x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 8 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$

Figura 14: Quantidade de alimento e suas composições por porção.

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \\ \begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{matrix} \end{matrix}$$

Fonte: Projeto Medicina

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

a) $\begin{pmatrix} 18,20 \\ 36,30 \\ 454,20 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 48,30 \\ 36,00 \\ 432,40 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 29,70 \\ 16,20 \\ 460,20 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 51,90 \\ 48,30 \\ 405,60 \end{pmatrix}$

5- (UFPR-1995) Considere a matriz $A=[a_{ij}]$, de ordem 4×4 , cujos elementos são mostrados a seguir.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \neq j \\ 0, & \text{se } i = j \end{cases}$$

É correto afirmar que:

1. Na matriz A, o elemento a_{23} é igual ao elemento a_{32} .
2. Os elementos da diagonal principal da matriz A são todos nulos.
04. O determinante da matriz A é igual a -4.
08. Se a matriz B é $[1 \ -1 \ 1 \ -1]$, então o produto B.A é a matriz -B.
16. Sendo I a matriz identidade de ordem 4, a matriz $A+I$ possui todos os elementos iguais a 1.

Marque como resposta a soma dos itens corretos. _____

6- (Vunesp-2002) Considere três lojas, L_1 , L_2 e L_3 , e três tipos de produtos, P_1 , P_2 e P_3 . A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j , com $i, j = 1, 2, 3$.

Figura 15: Matriz produto por loja.

$$\begin{array}{c}
 L_1 \quad L_2 \quad L_3 \\
 P_1 \begin{bmatrix} 30 & 19 & 20 \end{bmatrix} \\
 P_2 \begin{bmatrix} 15 & 10 & 8 \end{bmatrix} \\
 P_3 \begin{bmatrix} 12 & 16 & 11 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Fonte: Projeto Medicina

Analisando a matriz, podemos afirmar que

- a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.
 b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.
 c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.
 d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i , $i = 1, 2, 3$, é 52.
 e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

7- (UEPA-2006) Para a confecção de um cartaz, uma gráfica dispõe das cores: preto, amarelo, vermelho e azul, cujas doses têm preços unitários, em reais, representado pela matriz A abaixo. Atendendo à solicitação do cliente, a gráfica apresentou um orçamento com as possíveis combinações de cores, cujas quantidades de doses utilizadas em cada cartaz estão representadas pela matriz B abaixo. Nessas condições, o cartaz de menor custo terá preço de:

Figura 16: Matrizes preço por cor e quantidade por cartaz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{preto} \\ \rightarrow \text{amarelo} \\ \rightarrow \text{vermelho} \\ \rightarrow \text{azul} \end{array}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{cartaz } 1 \\ \rightarrow \text{cartaz } 2 \\ \rightarrow \text{cartaz } 3 \\ \rightarrow \text{cartaz } 4 \end{array}$$

Fonte: Projeto Medicina

- a) R\$13,00
 b) R\$12,00
 c) R\$11,00
 d) R\$10,00
 e) R\$9,00

8- Determine x e y , tais que:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2x + 3y & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 5x + 2y \end{bmatrix}.$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 8 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

9- Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:

$$\text{a)} A - B^t - C =$$

$$\text{b)} 2.A - C =$$

$$\text{c)} -3.C + B^{-1} =$$

10- Encontre a matriz X , na equação $A \cdot X = B$, onde $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$